مدرسان شریف

فصل اول

«آنالیز برداری»

مقدمه

دوستان و همراهان عزیز، قرار است از الان تا آخر کتاب یکدیگر را همراهی کنیم و با جزئیات الکترومغناطیس به طور کامل آشنا شویم. همان‌طور که می‌دانید، الکترومغناطیس یک کلمه ترکیبی از دو کلمه الکتریسیته و مغناطیس است. از آنجا که الکتریسیته زودتر از مغناطیس کشف شد، ما هم بر این اساس، ابتدا الکتریسیته و سپس مغناطیس را آموزش می‌دهیم.

درسنامه (۱): بردار

محور مختصات

محور مختصات متعامد: برای تعیین مکان دقیق یک نقطه در فضا از دستگاه مختصات متعامد استفاده می‌کنیم. یک دستگاه مختصات متعامد، از سه رویه تشکیل شده که این سه رویه دوبه‌دو برهم عمودند. همچنین برای تعیین مکان، یک نقطه به نام مبدأ مختصات لازم است که از تقاطع این سه رویه به‌دست می‌آید. اگر این سه رویه را با معادلات $u_1 = f(x,y,z)$ و $u_2 = g(x,y,z)$ و $u_3 = k(x,y,z)$ توصیف نماییم، مختصات هر نقطه دلخواه در فضا را با (u_1, u_2, u_3) نمایش می‌دهند. در این کتاب با سه دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین)، استوانه‌ای و کروی سروکار خواهیم داشت که در ادامه فصل مشخصات هرکدام را توصیف خواهیم نمود.

کمیت

جوهر و بنیاد پدیده‌های فیزیکی و مخصوصاً الکترومغناطیس با دو نوع کمیت ساخته می‌شود که عبارتند از:

۱ـ کمیت‌های اسکالر که فقط با اندازه مشخص می‌شوند؛ مانند جرم (m)، دما (T). برای توصیف این کمیت‌ها کافی است یک عدد ارائه کنید؛ مثل $1kg$، $30^\circ C$ و ... .

۲ـ کمیت‌های برداری که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز می‌باشند و از قواعد جمع برداری پیروی می‌کنند (برای مثال جریان الکتریکی I نیز جهت دارد ولی بردار نیست، چون مثل بردارها جمع نمی‌شود)، مانند نیرو $(\vec{F})$، شتاب $(\vec{a})$.

برای تشخیص کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، از علامت پیکان $\rightarrow$ روی کمیت‌های برداری استفاده می‌کنیم. اندازه یک بردار را نیز با استفاده از علامت قدرمطلق نشان می‌دهیم. مثلاً بردار $\vec{A}$ را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}_A$

$|\vec{A}|$ اندازه بردار و $\hat{a}_A$ جهت بردار را نشان می‌دهد.

بردار واحد (یکه)

بردار یکه، برداری است که اندازه آن یک می‌باشد و فقط جهت را نشان می‌دهد. اگر بردار $\vec{A}$ را بر اندازه آن تقسیم کنیم، برداری به دست می‌آید که اندازه آن برابر واحد بوده و جهت آن با جهت بردار $\vec{A}$ یکسان است. به این بردار، بردار واحد (یکّه) می‌گوییم. بردارهای یکه را معمولاً با حرف a که روی آن کلاه $(\wedge)$ قرار دارد و زیرنویس آن جهت را مشخص می‌کند، نشان می‌دهند.

$$\boxed{\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$$

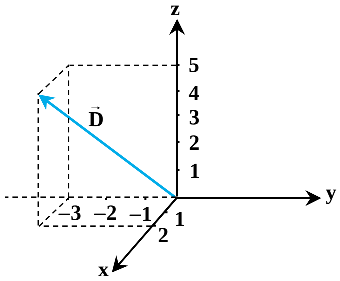
➤ **توجه:** در برخی کتاب‌ها برای نمایش بردار یکه به‌صورت مقابل عمل می‌کنند: $\hat{x} = \hat{a}_x \ , \ \hat{y} = \hat{a}_y$

اگر بردار $\vec{C}$ به‌صورت $\vec{C}=\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y$ نوشته شود اندازه و جهت آن به این روش به دست می‌آید:

$$|\vec{C}|=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}$$

$$\hat{a}_C=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}\hat{a}_x+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}\hat{a}_y$$

مثال۱: بردار $\vec{D}$ نشان داده شده در شکل مقابل را به تفکیک اندازه و جهت بنویسید.



$$\vec{D}=۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_z$$

☑ **پاسخ:** اگر بخواهیم اندازه چنین برداری با فرمت $\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y+\gamma\hat{a}_z$ را به دست آوریم، مقدار آن برابر است با:

$$|\vec{D}|=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲}$$

و جهت آن هم به صورت مقابل است:

$$\hat{a}_D=\frac{\vec{D}}{|\vec{D}|}=\frac{\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y+\gamma\hat{a}_z}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲}}$$

بنابراین $\vec{D}$ را به این شکل هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases}|\vec{D}|=\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲+۵^۲}=\sqrt{۴+۹+۲۵}=\sqrt{۳۸}\\ \hat{a}_D=\dfrac{۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_x}{\sqrt{۳۸}}\end{cases}\quad,\quad \vec{D}=|\vec{D}|\hat{a}_D=\sqrt{۳۸}\left(\frac{۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_z}{\sqrt{۳۸}}\right)$$

قواعد ساده برداری

تساوی بردارها

اگر اندازه و جهت دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یکسان باشد، می‌گوییم که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مساویند. اگر اندازه بردارها یکسان ولی جهت آنها خلاف یکدیگر است، آن دو بردار قرینه یکدیگر هستند.

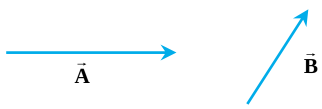
ضرب بردار در کمیت اسکالر

اگر بردار $\vec{A}$ را در کمیت اسکالری مانند k ضرب کنیم، اندازه بردار $\vec{A}$، k برابر شده و برحسب اینکه k مثبت یا منفی باشد، جهت بردار $k\vec{A}$ همان جهت قبلی یا خلاف جهت اولیه خواهد بود.

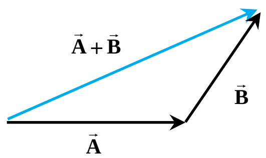
جمع و تفریق بردارها

جمع بردارها

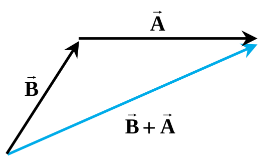
فرض کنید که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به‌صورت مقابل داریم:



دو روش برای جمع کردن این دو بردار وجود دارد، به نام‌های روش مثلثی و روش متوازی‌الاضلاع.

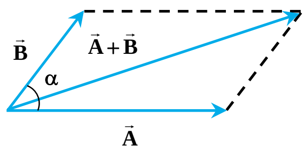


روش مثلثی: در این روش، ابتدای یکی از بردارها به انتهای بردار دیگر متصل می‌شود. پس ضلع سوم می‌ماند که باید سعی کنید آن را طوری رسم کنید که ابتدای آن ابتدای بردار اول و انتهای آن انتهای بردار دوم باشد.



جمع بردارها **خاصیت جابجایی** دارند، یعنی:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



روش متوازی‌الاضلاع: در این روش دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. حاصل جمع دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند و از رأس مشترک دو بردار رسم می‌شود.

این روش‌ها، روش‌های هندسی بودند، اگر بردارها را برحسب مؤلفه‌هایشان داشتیم چه می‌کنیم؟ اگر بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z\quad,\quad\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$$

مدرسان شریف

فصل دوم

«میدان الکتریکی ساکن در فضای آزاد یا خلأ»

مقدمه

ورود شما را به فصل دوم خیر مقدم می‌گوییم و امیدواریم که فصل اول را به خوبی یاد گرفته باشید. در فصل اول مقدمات و مفاهیم آنالیز برداری معرفی شد و اکنون موقع به کارگیری آنها می‌باشد. از این فصل تا انتهای کتاب همواره می‌خواهیم از این ابزارها در حل مسائل الکترومغناطیس استفاده کنیم. پس با امید به آنکه شما فصل اول را خوب فرا گرفته‌اید شروع می‌کنیم.

همان‌طور که گفتیم، الکترومغناطیس ترکیبی از دو کلمه الکتریسیته و مغناطیس می‌باشد. الکتریسیته مانند اکسیژن برای تنفس همه جا حضور دارد و به شما خواهیم گفت که منبع آن چیست؟!!

در این فصل قرار است نیرو و میدان الکتریکی ساکن (خطوط میدان و قانون گاوس و شار الکتریکی) را مورد بحث قرار دهیم.

درسنامه (۱): بارهای الکتریکی

بار الکتریکی و جرم دو خاصیت اساسی ماده هستند؛ جرم، زیربنای پدیده‌های گرانشی و بار الکتریکی، سنگ بنای الکتریسیته است. منشأ میدان‌های الکترومغناطیسی، بارهای الکتریکی هستند. تغییرات میدان‌ها در فضا به مقدار، موقعیت، سرعت و شتاب بارها بستگی دارد. به نکات زیر در مورد بار الکتریکی توجه کنید:

۱) بارهای الکتریکی را با یک عدد حقیقی که می‌تواند مثبت (+) یا منفی (-) باشد مشخص می‌کنیم. پس هر بار الکتریکی با اندازه و علامتش مشخص می‌شود. برای مثال: ۱- و ۳+ کولن

۲) بارهای الکتریکی درست مثل اعداد حقیقی می‌توانند با یکدیگر جمع جبری شوند و بارهای دیگری را تولید کنند.

۳) مواد در حالت طبیعی خنثی هستند. یعنی مقدار کل بار مثبت با مقدار کل بار منفی برابر است.

۴) می‌دانیم مواد از تعداد زیادی اتم درست شده‌اند که در حالت طبیعی خنثی هستند. زیرا مقدار بار پروتون(بار مثبت) برابر با مقدار بار الکترون‌ها (بار منفی) می‌باشد. وقتی می‌گوییم جسمی باردار است، منظور ما این است که جسم بار اضافی دارد که به این بار اضافی، بار خالص ماده نیز می‌گویند.

۵) بار الکتریکی را با حرف (Q) یا (q) و الکترون را با حرف (e) و پروتون را با (p) نمایش می‌دهند. واحد بار الکتریکی کولن می‌باشد که آن را با نماد C نشان می‌دهند.

۶) کمترین مقداری که یک بار الکتریکی (q) می‌تواند داشته باشد برابر با بار یک الکترون (e) یعنی، $|e| = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ C$ است.

۷) بار الکتریکی کوانتیده است. یعنی مقدار بار الکتریکی فقط می‌تواند مضارب صحیحی از بار یک الکترون باشد.

$$q = ne \qquad ; \qquad n \in \mathbb{Z}$$

توزیع بار الکتریکی به دو دسته تقسیم می‌شود: ۱) توزیع بار گسسته ۲) توزیع بار پیوسته

۱) توزیع بار گسسته (نقطه‌ای): در این توزیع، بارها در یک یا چند نقطه متمرکز هستند.

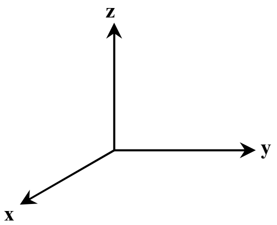
۲) توزیع بار پیوسته: هرگاه بار الکتریکی روی یک خط، سطح یا حجمی قرار گیرد توزیع بار پیوسته خواهیم داشت.

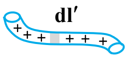
توزیع بار پیوسته خود به سه دسته تقسیم می‌شود: الف) توزیع بار خطی ب) توزیع بار سطحی ج) توزیع بار حجمی

الف) توزیع بار خطی: در این توزیع، بارها در امتداد یک خم توزیع می‌شوند. معمولاً در این نوع توزیع، مقدار بار الکتریکی توزیع شده در واحد طول خم را با λ یا ρ_L نشان می‌دهیم که آن را چگالی بار الکتریکی خطی می‌نامند. واحد λ برابر $\frac{C}{m}$ می‌باشد.

چگالی بار خطی در یک نقطه دلخواه روی خط به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\rho_l = \dfrac{dq}{dl}$

در این رابطه، dq مقدار بار الکتریکی در جزء دیفرانسیل خطی dl' می‌باشد. توجه کنید که اگر توزیع بار یکنواخت باشد، چگالی بار خطی به‌صورت $\rho_l = \dfrac{q}{l}$ به‌دست می‌آید که q کل بار الکتریکی روی منحنی است.



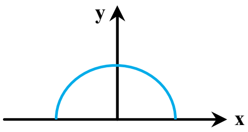


در هر دو حالت توزیع بار خطی یکنواخت و غیریکنواخت، کل بار توزیع شده روی میله‌ای به طول L را به صورت مقابل به دست می‌آوریم:

$$Q = \int_L \rho_l dl$$

برای درک بهتر چگالی بار خطی، مثال بعد را حل می‌کنیم.

مثال ۱: مطابق شکل زیر دو میله نازک پلاستیکی شبیه هم به شکل نیم‌دایره خم شده‌اند. اگر توزیع بار الکتریکی روی یکی از آنها یکنواخت و با چگالی $\rho_l = \rho_\circ$ باشد و توزیع بار الکتریکی روی میله دیگر غیریکنواخت و با چگالی $\rho_l = \rho_\circ x^2$ باشد، نسبت کل بار الکتریکی میله با چگالی یکنواخت به بار الکتریکی میله دیگر چقدر است؟



۱) $\dfrac{2}{a}$ ۲) $\dfrac{4}{a}$

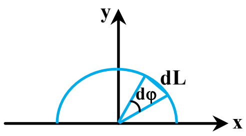
۳) $\dfrac{2}{a^2}$ ۴) $\dfrac{4}{a^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به رابطه بیان شده برای چگالی بار خطی یکنواخت در بالا داریم: $\rho_l = \dfrac{Q_1}{L} \Rightarrow Q_1 = \rho_l L$

L محیط نیم‌دایره است، بنابراین داریم: $Q_1 = \rho_l L = \rho_\circ \pi a$

با استفاده از رابطه بیان شده برای چگالی بار خطی غیریکنواخت می‌توان نوشت: $\rho_l = \dfrac{dq_2}{\rho_l} \Rightarrow dq_2 = \rho_l dl = \rho_\circ x^2 dl$

از آنجایی که dl جزء دیفرانسیل طول روی محیط دایره می‌باشد و با توجه به شکل زیر، می‌توانیم به این صورت عمل کنیم که:



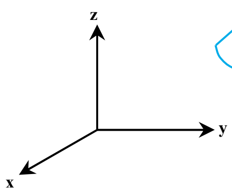
$$\left.\begin{array}{l} dl = a d\varphi \\ dq_2 = \rho_\circ x^2 dl \end{array}\right\} \Rightarrow dq_2 = \rho_\circ x^2 (a d\varphi)$$

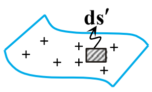
با انتگرال‌گیری از رابطه بالا روی مسیر میله می‌توانیم مقدار بار الکتریکی میله را به دست آوریم: $Q_2 = \int_\circ^\pi \rho_\circ x^2 (a d\varphi)$

چون انتگرال بالا در مختصات استوانه‌ای گرفته می‌شود ولی متغیر x را در مختصات دکارتی داریم، پس باید آن را به مختصات استوانه‌ای انتقال بدهیم. با توجه به مطالب فصل اول داریم $x = a\cos\varphi$. با جایگذاری x در انتگرال می‌توان نوشت: $Q_2 = \int_\circ^\pi \rho_\circ a^2 \cos^2\varphi (a d\varphi) = \rho_\circ a^3 \int_\circ^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \dfrac{\rho_\circ a^3 \pi}{2}$

حالا می‌توانیم نسبت بار دو میله را به دست آوریم: $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\rho_\circ \pi a}{\dfrac{\rho_\circ \pi a^3}{2}} = \dfrac{2}{a^2}$

ب) توزیع بار سطحی: در این توزیع، بارها بر روی یک سطح توزیع می‌شوند. در این نوع توزیع، مقدار بار الکتریکی پراکنده شده در واحد سطح را با σ یا ρ_s نشان می‌دهند. واحد σ برابر $\dfrac{C}{m^2}$ است. توزیع بار سطحی هم می‌تواند مانند توزیع بار خطی یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. اگر توزیع بار سطحی یکنواخت باشد، چگالی بار سطحی را از رابطه زیر به دست می‌آوریم.





$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

در این رابطه، Q کل بار توزیع شده روی سطح به مساحت S است.

و اگر توزیع بار غیریکنواخت داشته باشیم، چگالی بار سطحی در یک نقطه دلخواه روی سطح را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم. $\rho_s = \dfrac{dq}{ds}$

dq مقدار کل بار الکتریکی جزء دیفرانسیل سطح ds در نقطه مورد نظر روی سطح می‌باشد.

کل بار الکتریکی توزیع شده روی سطح S را به صورت مقابل محاسبه می‌کنیم: $Q = \int_s \rho_s ds$

فصل سوم

«پتانسیل الکتریکی»

مقدمه

در فصل قبل درباره نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی در فضای آزاد به طور کامل صحبت کردیم. حال وقت آن رسیده به دو موضوع مهم که همیشه ذهن ما را به خود مشغول کرده است؛ یعنی کار و انرژی بپردازیم. انسان کار می‌کند تا چیزی را به دست آورد و برای این کار، انرژی به دست می‌آورد و یا از دست می‌دهد. بنابراین کار و انرژی رابطه مستقیمی با یکدیگر دارند.

درسنامه (۱): کار الکتریکی

هر موقع نیروی کافی صرف می‌شود تا جسمی جابجا شود، می‌گوییم کار انجام شده است. پس می‌توان کار را به صورت یک قانون و فرمول به صورت زیر نوشت:

جابجایی × نیرو = کار $\Rightarrow W=\vec{F}.\vec{L}$

در رابطه‌ی بالا، $\vec{F}$ نیروی به کار رفته برای انجام کار و $\vec{L}$ مسافت جابجایی جسم و در نتیجه W کار انجام شده است.

همان طور که می‌دانیم $\vec{F}$ (نیرو) یک بردار است و واحد آن (N) می‌باشد و $\vec{L}$ (جابجایی) نیز یک بردار و واحد آن (m) است. نیرو و جابجایی در یکدیگر ضرب نقطه‌ای می‌شوند که حاصل نیز یک عدد مثبت یا منفی است. این عدد همان کار انجام شده با واحد $(N.m)$ یا J می‌باشد.

رابطه کار با انتگرال خطی

اگر مسیر جابجایی جسم پیچ و خم داشت چه می‌کنیم؟

مسیر $\vec{L}$ را به قسمت‌های کوچک $d\vec{l}$ تقسیم می‌کنیم و سپس همگی آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم یعنی:

$$W=\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}=-\int_B^A \vec{F}.d\vec{l}$$

نکته۱: دقت کنید که کار ناشی از نیروی پایستار فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد و به خود مسیر بستگی ندارد.

اثبات: اگر بتوان نیرو یا میدانی را برحسب گرادیان یک اسکالر نوشت، آن نیرو (میدان) پایستار نامیده می‌شود:

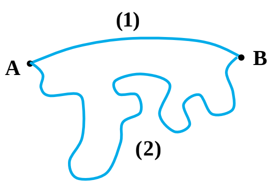
$$\vec{F}=\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow W=\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}=\int_A^B (\vec{\nabla}\phi).d\vec{l}$$

طبق قضیه اصلی گرادیان که در فصل اول خواندیم، می‌توانیم انتگرال سمت راست را به صورت مقابل بنویسیم:

$$\int_A^B (\vec{\nabla}\phi).d\vec{l}=\phi(B)-\phi(A)$$

در نتیجه کار W ناشی از نیروی $\vec{F}$ فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر (B,A) بستگی دارد و به خود مسیر وابسته نیست.

نکته۲: کار ناشی از نیروی پایستار حول هر مسیر بسته‌ای برابر با صفر است. این نتیجه مستقیم نکته ۱ می‌باشد.



$$A=B \Rightarrow W=\phi(A)-\phi(A)=0$$

کار الکتریکی

در دنیای الکتریسیته، جسم ما، بار الکتریکی (q) و نیروی ما، نیروی الکتریکی است. بنابراین می‌توانیم فرمول کار را برای کار الکتریکی به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$W=\int_A^B \vec{F}_e.d\vec{l}$$

اجازه دهید برای واضح شدن الکتریکی بودن کار از رابطه $F_e = qE$ استفاده کنیم. پس با یک جایگذاری ساده به فرمول زیر می‌رسیم.

$$\boxed{W = \int_A^B q\vec{E}.d\vec{l} = q\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}}$$

حال مفهوم این فرمول را با هم مرور کنیم. این فرمول می‌گوید:

اگر بخواهیم بار مثبت q را در حضور میدان الکتریکی و با سرعت ثابت از نقطه A به نقطه B جابجا کنیم باید کار انجام دهیم. کار می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ اما:

۱) اگر حرکت بار q هم جهت با میدان اعمال شده باشد دیگر نیازی نیست که شما کاری انجام دهید. در واقع بار q خود به خود در جهت میدان حرکت می‌کند. بنابراین کاری که شما انجام می‌دهید منفی و کاری که نیروی الکتریکی انجام می‌دهد مثبت است. $\vec{F} = \vec{F}_e = q\vec{E}$

۲) اگر حرکت بار q خلاف جهت میدان اعمال شده باشد، شما باید کار انجام دهید تا بر نیروی الکتریکی غلبه کنید. پس کار شما مثبت خواهد بود و کار نیروی الکتریکی منفی می‌باشد. $\vec{F} = -\vec{F}_e = -q\vec{E}$

مثال۱: در داخل حوزه عمل نیرو به صورت $\vec{F} = (y^۲ - y)\hat{a}_x + x\hat{a}_y$ است که در آن $\hat{a}_x$، $\hat{a}_y$ بردارهای یکه در جهات x و y هستند. چگونه باید از مبدأ مختصات $(۰,۰,۰)$ شروع به حرکت کرد و در نقطه $(۱,۱,۰)$ متوقف گردید تا در هر نقطه نه انرژی ایجاد و نه مصرف شود؟

۱) از مبدأ شروع کرده روی محور yها تا نقطه $(۰,۱,۰)$ پیش رفته سپس به موازات محور xها تا $(۱,۱,۰)$ پیش می‌رویم.

۲) از مبدأ شروع کرده روی محور xها تا نقطه $(۱,۰,۰)$ پیش رفته سپس به موازات محور yها تا نقطه $(۱,۱,۰)$ پیش می‌رویم.

۳) از مبدأ شروع کرده و مستقیماً تا نقطه $(۱,۱,۰)$ پیش می‌رویم.

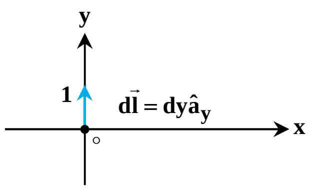
۴) چنین چیزی ممکن نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وقتی می‌گوید نه انرژی ایجاد و نه مصرف شود، یعنی کار انجام شده باید صفر باشد. پس داریم:

$$W = \int_{(۰,۰,۰)}^{(۱,۱,۰)} \vec{F}.d\vec{l} = ۰$$

در این سؤال تنها می‌توانید با چک کردن تک‌تک گزینه‌ها به پاسخ موردنظر دست پیدا کنید. بنابراین از گزینه (۱) شروع به چک کردن رابطه فوق می‌کنیم.

ابتدا، روی محور yها از مبدأ به نقطه $(۰,۱,۰)$ می‌رویم. یعنی $x = ۰$ و مقدار y از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. پس خواهیم داشت:

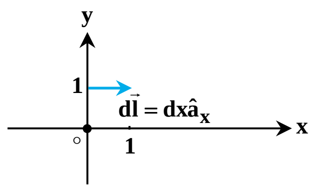


$$d\vec{l} = dy\,\hat{a}_y$$

$$\vec{F} = (y^۲ - y)\hat{a}_x + ۰\times\hat{a}_y$$

$$W_۱ = \int_{y=۰}^{۱} [(y^۲ - y)\hat{a}_x].dy\,\hat{a}_y = ۰$$

سپس به موازات محور xها تا $(۱,۱,۰)$ پیش می‌رویم. یعنی $y = ۱$ و x از مقدار ۰ تا ۱ تغییر می‌کند.



$$d\vec{l} = dx\,\hat{a}_x$$

$$\vec{F} = (۱-۱)\hat{a}_x + x\,\hat{a}_y$$

$$W_۲ = \int_{x=۰}^{۱} [x\,\hat{a}_y].dx\,\hat{a}_x = ۰$$

دقت کنید که چون $\hat{a}_x.\hat{a}_y = ۰$ است، حاصل کل انتگرال صفر می‌شود.

حال از جمع آثار استفاده می‌کنیم: $W = W_۱ + W_۲ = ۰$. پس به نظر گزینه (۱) درست است.

حالا می‌خواهیم ببینیم که $\vec{F}$ پایستار است یا نه؟ چون $\nabla\times\vec{F} \neq ۰$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $\vec{F}$ پایستار نیست.

فرض کنیم بتوان $\vec{F}$ را بر حسب گرادیان ϕ نوشت:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow (y^۲ - y)\hat{a}_x + x\hat{a}_y = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

فصل چهارم

«الکترواستاتیک عایق‌ها و هادی‌ها»

مقدمه

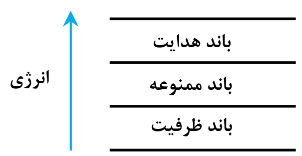
همه ما می‌دانیم که واحد ساختمانی ماده اتم است و هر اتم از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی تشکیل شده است. الکترون‌ها در لایه‌هایی به فواصل مختلف از هسته قرار می‌گیرند. الکترون‌های آخرین لایه را به عنوان الکترون‌های ظرفیت می‌شناسیم که نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی به عهده دارند. توجه کنید که در برخی از اجسام، الکترون‌های لایه آخر تحت تأثیر نیروی ضعیفی از سوی هسته قرار دارند و با دریافت انرژی اندکی به سادگی از اتم خود جدا شده و به اتم‌های دیگر می‌پیوندند. این الکترون‌ها متعلق به اتم خاصی نیستند و آن‌ها را الکترون‌های آزاد می‌نامیم. اعمال یک میدان الکتریکی خارجی، الکترون‌های آزاد را با سرعت متوسط به حرکت درمی‌آورد و در نتیجه جریانی به وجود می‌آید که ناشی از جابجایی الکترون‌هاست. چنین پدیده‌ای را هدایت الکتریکی و جسمی را که قابلیت هدایت آن زیاد باشد، مانند اکثر فلزات، هادی می‌نامند. اما در برخی از اجسام دیگر، الکترون‌های آخرین لایه را به سختی می‌توانیم از هسته دور کنیم و اعمال یک میدان الکتریکی خارجی فقط مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابجا می‌کند. در این اجسام، الکترون‌های آخرین لایه مانند الکترون‌های نزدیک به هسته همیشه در مجاورت اتم خود باقی می‌مانند و از این رو آنها را الکترون‌های مقید می‌گوییم. از آنجایی که الکترون‌های مقید حرکتی ندارند و از طرفی تعداد الکترون‌های آزاد نیز ناچیز است، هدایت الکتریکی در این قبیل اجسام بسیار کم است و آنها را عایق می‌نامند. جابجایی موضعی بارها در اجسام عایق باعث به وجود آمدن پدیده دیگری به نام قطبی شدن می‌شود که اهمیت زیادی دارد. اجسام دیگری هم داریم که در حد میانی بین هادی‌ها و عایق‌ها قرار می‌گیرند و آنها را نیمه‌هادی می‌نامند.

چندین عامل بر شکل‌گیری میدان الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی یا یک میدان اولیه در مجاورت اجسام موثر هستند و در محاسبه میدان الکتریکی باید آن‌ها را در نظر بگیرید. این عوامل عبارتند از: چگونگی توزیع بارهای الکتریکی در فضا، ابعاد و شکل هندسی اجسام، موقعیت مکانی بارهای الکتریکی نسبت به اجسام و قابلیت گذردهی برای عایق‌ها. به طور کلی، بارهای الکتریکی میدان الکتریکی اولیه‌ای را تولید می‌کنند که پس از تأثیر بر روی یک جسم هادی یا عایق منجر به جدا شدن بارهای مثبت و منفی و بروز بارهای القایی در جسم می‌شود.

آیا الکترون‌های اطراف هسته انرژی دارند؟

همان‌طور که می‌دانید الکترون‌ها در باندهای مجاز مختلف انرژی قرارگرفته‌اند.

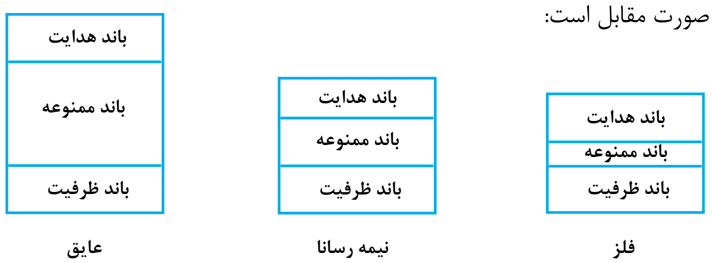
نوار انرژی در اتم‌ها را می‌توانیم به صورت مقابل نشان دهیم:



نواحی مجاز دارای تعداد زیادی سطوح انرژی نزدیک به هم هستند. بر طبق اصل پاولی، هر سطح انرژی فقط توسط یک الکترون می‌تواند اشغال شود.

باند ممنوعه هم حاوی سطوح انرژی است ولی همان‌طورکه از اسمش پیداست حضور الکترون در این باند ممنوع است.

شکل نوار انرژی در اجسام مختلف به صورت مقابل است:



باند ممنوعه را که حتماً از فیزیک دبیرستان به یاد دارید! در عایق‌ها باند ممنوعه در حدود چند الکترون‌ولت است.

از این رو در حالت عادی تعداد کمی از الکترون‌ها می‌توانند از باند ظرفیت به باند هدایت بروند. نتیجه این است که رسانندگی این اجسام بسیار کم است.

در عایق‌ها از الکترون آزاد خبری نیست یا بهتر بگوییم تعداد الکترون‌های آزادشان بسیار ناچیز است.

درسنامه (۱): میدان الکتریکی در حضور اجسام عایق

همان‌طور که می‌دانیم، هر اتم در حالت خنثی شامل یک هسته با بار مثبت در مرکز و یک ابر الکترونی کروی با بار منفی، اطراف آن است.
حالا اگر به اتم میدان الکتریکی اعمال شود، حضور میدان موجب جابجایی بارهای مثبت و منفی می‌شود.
می‌توان گفت اتم به شکل یک دوقطبی درمی‌آید که البته همان‌طور که می‌دانید این دو قطبی تولید میدان الکتریکی جدیدی درخلاف جهت میدان اعمالی $\vec{E}$ می‌کند، به این مفهوم قطبی شدن می‌گوییم.
عایق‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

۱) دسته اول: عایق‌هایی که مولکول‌های قطبی دارند.

و اما، مولکول قطبی چیست؟

مولکول‌هایی که در آن‌ها جابجایی بارهای مثبت و منفی (مراکز ثقل بارها) به صورت دائمی وجود داشته باشد را مولکول‌های قطبی می‌گوییم. این مولکول‌ها مولد میدان الکتریکی ساکن هستند.

در حالت عادی، مولکول‌های یک عایق به صورت تصادفی (بی‌نظم و ترتیب) وجود دارند. در عایق‌هایی که مولکول‌های قطبی دارند، با اعمال میدان خارجی این دو قطبی‌ها در جهت میدان اعمالی قرار می‌گیرند.

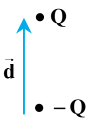
به یاد داشته باشید که در این دسته از عایق‌ها، دوقطبی‌ها در غیاب میدان اعمالی هم وجود داشته‌اند ولی در جهات تصادفی و مختلف بوده‌اند.

۲) دسته دوم: عایق‌هایی که مولکول‌های غیرقطبی دارند.

مولکول‌های این دسته از عایق‌ها در اثر اعمال میدان خارجی (و به تبع آن با جابه جایی مراکز ثقل بارهای مثبت و منفی‌شان) قطبی می‌شوند.

به طور کلی هر دو دسته از عایق‌ها زمانی که در حضور یک میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرند میدان تولید شده توسط دوقطبی‌هایشان، میدان الکتریکی را در داخل و خارج دی الکتریک تغییر می‌دهد. از این‌رو میدان کل در هر نقطه از فضا، جمع میدان‌های اولیه و ثانویه است. همان‌طور که متوجه شدید، در این بخش (عایق‌ها در میدان الکتریکی) دوقطبی‌های الکتریکی اهمیت خاصی دارند.

همان‌طور که از قبل به یاد دارید، به حاصلضرب بار Q و بردار $\vec{d}$ گشتاور دو قطبی الکتریکی گفتیم.
گشتاور دو قطبی کمیتی جهت‌دار است و جهت آن از بار منفی به مثبت می‌باشد.



$$\vec{P}_T = Q\vec{d}$$

برای توزیع بار حجمی $\rho(\vec{r})$، گشتاور دوقطبی از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{P}_T = \int \rho(\vec{r})\vec{r}dv$$

مثال ۱: گشتاور دوقطبی الکتریکی یک حلقه به شعاع a که به طور یکنواخت با چگالی خطی λ باردار شده است نسبت به مرکز حلقه کدام است؟

۱) صفر ۲) $\pi a^2\lambda$ ۳) $2\pi a^2\lambda$ ۴) $4\pi a^2\lambda$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی، با توجه به تقارن هندسی حلقه داریم:

$$\vec{P} = \int \rho(\vec{r})\vec{r}dv = \int \lambda\vec{r}dl = \lambda\int \vec{r}dl$$

اما با تجزیه‌ی $\vec{r}$ به مختصات دکارتی و با توجه به این که $d\ell = ad\varphi$ است، حاصل انتگرال صفر است.

مثال ۲: چگالی حجمی توزیع بار الکتریکی در کره‌ای به شعاع R با رابطه $\rho = \rho_0 r\cos\theta$ داده می‌شود که درآن ρ_0 ثابت و منفی است و r و θ مربوط به مختصات کروی است و مبدأ مختصات در مرکز کره واقع شده است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با R^2 و در راستای مثبت محور z ها است.
۲) گشتاور دو قطبی این کره مستقل از محل مبدأ مختصات است.
۳) گشتاور دو قطبی این کره صفر است.
۴) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با R^5 و در راستای منفی محور z ها است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی خواهیم داشت:

$$\vec{P} = \int \rho(r)\vec{r}d^3r' = \rho_0\int r\cos\theta r^2 dr d(\cos\theta)d\varphi r(\hat{z}\cos\theta + \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi)$$

که در آن برداری را به مختصات دکارتی تجزیه کرده‌ایم. انتگرال $\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{Bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Bmatrix} = 0$ است. بنابراین تنها مؤلفه‌ی z باقی خواهد ماند:

$$\vec{P} = \rho_0\hat{z}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\phi dr$$

دقت کنید نیاز به محاسبه‌ی انتگرال نیست، زیرا به طور واضح گشتاور دو قطبی با توجه به منفی بودن ρ_0 در راستای $-\hat{z}$ است و با R^5 متناسب است لـذا گزینه‌ی (۴) درست است.

مدرسان شریف

فصل پنجم

«خازن‌ها»

مقدمه

همان‌طور که می‌دانید خازن از دو هادی (با اشکال دلخواه) که توسط فضای آزاد یا محیط دی‌الکتریک از هم مجزا شده‌اند، تشکیل می‌شود. اگر یک اختلاف پتانسیل بین دو جسم هادی به وجود آوریم، بارهای مساوی و مختلف‌العلامت روی سطح هادی‌ها توزیع می‌شوند. خطوط میدان الکتریکی بر سطح هادی‌ها عمودند و از رسانای با بار مثبت خارج شده و به رسانای با بار منفی وارد می‌شوند.

درسنامه (۱): تعریف و محاسبه خازن

مقدار بار (Q) به وجود آمده روی سطح هر هادی، متناسب با اختلاف پتانسیل (V) بین دو هادی است. $Q \propto V$

ضریب این تناسب را با C نشان می‌دهیم و آن را ظرفیت خازن می‌نامیم. از این‌رو ظرفیت خازن به صورت نسبت بار ذخیره شده در خازن به اختلاف پتانسیل بین دو هادی تعریف می‌شود

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

واحد ظرفیت خازن، $\frac{C}{V}$ (کولمب / ولت) یا F (فاراد) است. همان‌طور که می‌دانید Q و V هر دو به میدان الکتریکی $\vec{E}$ مربوطند؛ بنابراین می‌توان ظرفیت خازن را بر حسب میدان الکتریکی به صورت زیر نوشت.

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\oiint_S \varepsilon \vec{E}.d\vec{s}}{\int_{+}^{-} \vec{E}.d\vec{l}}} \qquad (۱)$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان گفت که رابطه میدان و بار یک رابطه خطی است و اگر $\vec{E}$ را α برابرکنیم، بار هم α برابر می‌شود. همچنین اگر میدان α برابر شود براساس مخرج همین رابطه، پتانسیل هم α برابر می‌شود و در نتیجه نسبت $\frac{Q}{V}$ که همان ظرفیت خازن است ثابت باقی می‌ماند. بنابراین:

نکته۱: ظرفیت یک خازن مستقل از بار ذخیره شده در آن و اختلاف پتانسیل بین دو هادی است و فقط به شکل هندسی و قابلیت گذردهی عایق بین هادی‌ها بستگی دارد.

چند خازن پرکاربرد

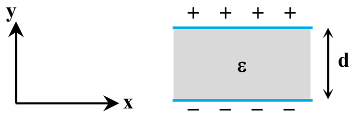
۱ـ خازن مسطح

خازن مسطح، ساده‌ترین ساختار خازنی است که شامل دو صفحه رسانای موازی است.

با فرض یکنواختی بار روی صفحات خازن می‌توان چگالی سطحی بار را به صورت زیر بیان کرد.

$$\rho_S = \frac{Q}{S}$$

با توجه به این که میدان الکتریکی به دست آمده در داخل دی‌الکتریک ثابت (یکنواخت) است و با صرف نظر از اثرات لبه‌ای میدان (و با فرض همگن بودن دی‌الکتریک) داریم:



$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_y$$

$$V = \int_{+}^{-}\vec{E}.d\vec{l} = \int_{d}^{۰}(-\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}y).(dy\,\hat{a}y) = \int_{d}^{۰}(-\frac{Q}{\varepsilon S})dy = \frac{Q}{\varepsilon S}d$$

S مساحت صفحات خازن، d فاصله صفحات خازن است. بنابراین ظرفیت خازن مسطح به صورت زیر حاصل می‌شود:

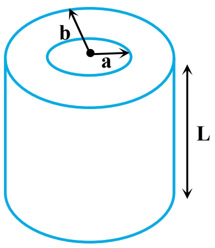
$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \varepsilon\frac{S}{d}}$$

۲ــ خازن استوانه‌ای

این خازن از دو هادی استوانه‌ای هم محور تشکیل شده که استوانه داخلی به شعاع a و استوانه خارجی به شعاع b است. فضای بین هادی‌ها از دی‌الکتریکی با گذردهی ε پر شده است.

در خازن استوانه‌ای نیز اگر نسبت طول استوانه‌ها به شعاع آن‌ها بزرگ باشد، می‌توان از اثرات لبه‌ای میدان صرف نظر کرد و میدان داخل دی‌الکتریک را به صورت شعاعی در نظر گرفت.

$$\vec{E} = E_r\hat{a}_r$$



سپس با استفاده از قانون گاوس میدان E_r را می‌یابیم. سطح گاوسی را یک استوانه‌ی هم‌محور در فضای دی‌الکتریک در نظر می‌گیریم.

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E_r(۲\pi rL) = \frac{Q}{\varepsilon} \rightarrow E_r = \frac{Q}{۲\pi\varepsilon rL}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{E} = \frac{Q}{۲\pi\varepsilon rL}\hat{a}_r \qquad a < r < b$$

اگر بارهای Q و −Q را روی سطوح دو هادی در نظر بگیریم، می‌توانیم پتانسیل را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$V = \int_{+}^{-}\vec{E}.d\vec{l} = \int_{a}^{b}(\frac{Q}{۲\pi\varepsilon rL}\hat{a}_r).(dr\,\hat{a}_r) = \int_{a}^{b}\frac{Q}{۲\pi\varepsilon rL}dr = \frac{Q}{۲\pi\varepsilon L}[\ln r]_a^b \Rightarrow V = \frac{Q}{۲\pi\varepsilon L}(\ln\frac{b}{a})$$

بنابراین ظرفیت خازن استوانه‌ای به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{۲\pi\varepsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}}$$

پس می‌توانیم بگوییم که ظرفیت واحد طول کابل هم محور (خازن استوانه‌ای) بر واحد طول به صورت مقابل است:

$$C = \frac{۲\pi\varepsilon}{\ln(\frac{b}{a})}$$

۳ــ خازن کروی

خازن کروی از دو کره رسانای هم مرکز به شعاع‌های a و b $(a < b)$ تشکیل شده است. در فضای بین دو کره عایق یا دی‌الکتریک وجود دارد.

به علت تقارن موجود، از قانون گاوس برای محاسبه میدان استفاده می‌کنیم. فرض کنید کره هادی درونی دارای بار +Q و کره هادی بیرونی دارای بار −Q باشد.

$$\vec{E} = \hat{a}_R E_R = \hat{a}_R\frac{Q}{۴\pi\varepsilon R^۲} \qquad V = \int_a^b\frac{Q}{۴\pi\varepsilon R^۲}dR = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon}(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})$$

بنابراین ظرفیت یک خازن کروی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}}$$

اگر شعاع کره بیرونی را به سمت بی‌نهایت میل دهیم $(b \rightarrow \infty)$ ظرفیت یک کره تنها به دست می‌آید:

$$C = ۴\pi\varepsilon a$$

در حقیقت هر رسانای تنها (مثل کره فوق) یک خازن است که صفحه دیگر آن در بی‌نهایت فرض می‌شود.

مدرسان شریف

فصل ششم

«معادله پواسون و لاپلاس»

مقدمه

در این فصل به بررسی معادلات پواسون و لاپلاس در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی می‌پردازیم. هدف از این معادلات به دست آوردن توزیع پتانسیل در نقاط مختلف است. به این منظور، علاوه بر استفاده از معادلات پواسون یا لاپلاس لازم است شرایط مرزی پتانسیل را نیز بدانیم. این معادلات فقط در محیط‌های همگن صادق هستند.

درسنامه (۱): معرفی معادلات پواسون و لاپلاس

شکل دیفرانسیلی (نقطه‌ای) قانون گاوس به صورت مقابل می‌باشد: $(\vec{\nabla}.\vec{D})=\rho$

با استفاده از رابطه $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ می‌توان چنین نوشت: $\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\rho$

اگر محیط اطراف توزیع بار الکتریکی همگن باشد (ε تابع مکان نباشد) خواهیم داشت: $\varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E}=\rho$

با توجه به رابطه $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$، می‌توانیم رابطه بالا را به این شکل بنویسیم:

$$\varepsilon[-\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}V)]=\rho \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

معادله بالا به معادله پواسون موسوم است. در صورتی که فضای مورد نظر بدون بار الکتریکی باشد، معادله پواسون را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\nabla^2 V=0}$$

این معادله به معادله لاپلاس معروف است. معادلات لاپلاس و پواسون، معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی هستند که توأم با شرایط مرزی مشخص شده باید حل شوند. شرایط مرزی موردنیاز برای حل این معادله از روی شرایط مرزی حاکم بر میدان‌های الکتریکی نتیجه می‌شوند و به‌صورت مقادیر معینی برای خود پتانسیل یا مشتق عمودی آن روی مرزهای مسأله یا مشخص بودن پتانسیل در بی‌نهایت بیان می‌شوند. مثلاً اگر توزیع بار محدودی داشته باشیم، پتانسیل نمی‌تواند در بی‌نهایت مقدار داشته باشد؛ پس شرط صفر بودن پتانسیل در بی‌نهایت را داریم.

توجه داشته باشید که پاسخ معادله لاپلاس منحصر بفرد است. یعنی اگر پاسخی به دست آوردید که در معادله لاپلاس یا پواسون صدق می‌کرد و شرایط مرزی را هم برآورده می‌ساخت، آن پاسخ، تنها پاسخ ممکن مسأله خواهد بود.

همان‌طور که در مقدمه نیز گفتیم، معادلات لاپلاس و پواسون تنها در محیط **همگن** صادق هستند و حتماً حواستان به این مورد باشد. اگر صحبتی از همگن یا ناهمگنی محیط نشده بود، خودمان آن را همگن در نظر می‌گیریم.

اگر محیط **ناهمگن** بود به طریق زیر عمل می‌کنیم:

۱) معادله $\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho_V$ را نوشته و بردار $\vec{D}$ را به دست می‌آوریم.

۲) به کمک $\vec{D}$ و رابطه $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ میدان الکتریکی $\vec{E}$ را محاسبه می‌کنیم.

۳) از رابطه بین میدان الکتریکی $\vec{E}$ و پتانسیل الکتریکی استفاده کرده و با در نظر گرفتن شرایط مرزی، پتانسیل را در نقاط مختلف فضا به‌دست می‌آوریم.

$$(V(x)-V(a)=-\int_a^x \vec{E}.d\vec{l})$$

تذکر ۱: همیشه قبل از شروع به حل، شرایط مرزی را در گزینه‌ها چک کنید.

در بخش‌های بعدی قرار است معادلات لاپلاس و پواسون را در دستگاه‌های مختصات مختلف که معمولاً به صورت یک بعدی و دو بعدی مطرح می‌شوند، بررسی کنیم.

مثال ۱: بین صفحات مسطح خازنی که در $z=0$, $z=d$ قرار دارند، ماده‌ای عایق با $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})$ قرار دارد. اگر چگالی بار سطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s(\frac{C}{m^2})$ باشد، اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_s d}{2\varepsilon_0}$　۲) $\frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}$　۳) $\frac{\pi\rho_s d}{4\varepsilon_0}$　۴) $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}d^2\ln(2)$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: چون نسبت به x و y تقارن داریم، میدان‌ها فقط مؤلفه‌ی z دارند. از طرفی باید در همه جا شرط $\vec{\nabla}.\vec{D}=0$ برقرار باشد $(0<z<d)$، بنابراین باید $\vec{D}$ یک بردار ثابت باشد.

$$\vec{D}=D_0\hat{a}_z \xrightarrow{\text{شرط مرزی در } z=0 \text{ و } z=d} \begin{cases} D_0-0=\rho_s & : z=0 \\ 0-D_0=-\rho_s & : z=d \end{cases} \Rightarrow D_0=\rho_s \Rightarrow \vec{D}=\rho_s\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})} \Rightarrow \Delta V=V(0)-V(d)=\int_{z=0}^{z=d}\vec{E}.\hat{a}_z\hat{d}z=\int_0^d\frac{\rho_s dz}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})}=\frac{\rho_s d}{\varepsilon_0}\tan^{-1}(\frac{z}{d})\Big|_0^d=\frac{\rho_s d\pi}{4\varepsilon_0}$$

روش دوم: ابتدا ظرفیت بر واحد سطح را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه $V=\frac{\rho_s}{C_s}$، اختلاف پتانسیل را به‌دست می‌آوریم.

برای محاسبه‌ی C_s از المان‌های سری با ارتفاع dz بهره می‌بریم:

$$\frac{1}{C}=\int d(\frac{1}{C})=\int_0^d\frac{dz}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})(1)}=\frac{d\pi}{4\varepsilon_0} \Rightarrow V=\frac{\rho_s d\pi}{4\varepsilon_0}$$

مثال ۲: یک خازن استوانه‌ای طویل دارای عایقی ناهمگن با گذردهی نسبی متغیر (نسبت به شعاع r)، $\varepsilon_r=\frac{a}{b+r}$ می‌باشد (b,a اعداد ثابت اند). اختلاف پتانسیل بین صفحات V_0 فرض می‌شود. تغییرات پتانسیل بین صفحات به کدامیک از شکل‌های زیر است؟ (A , B , C ثابت‌های غیرصفرند.)

۱) $A+B\ln r$　۲) $A+Br+C\ln r$　۳) $A+Br+C\ln(r+b)$　۴) $A+B\ln r+C\ln(r+b)$

پاسخ: گزینه «۲» خود سوال داد می‌زند که من ناهمگنم. یعنی نمی‌توان از معادلات لاپلاس و پواسون استفاده کرد. پس چه باید کرد؟ درسته از الگوریتم خودمان استفاده می‌کنیم.

۱) پیدا کردن $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,D_r)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rD_r)=0 \Rightarrow rD_r=k_1 \Rightarrow D_r=\frac{k_1}{r} \Rightarrow \vec{D}=\frac{k_1}{r}\hat{a}_r$$

۲) پیدا کردن $\vec{E}$:

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\frac{k_1}{r}}{\varepsilon_0\frac{a}{b+r}}\hat{a}_r=\frac{k_1(b+r)}{\varepsilon_0\,ar}\hat{a}_r$$

۳) پیدا کردن V: ولی به خاطر اینکه در اینجا شرایط مرزی داده نشده از فرمول $\frac{V(x)-V(a)}{V(b)-V(a)}$ استفاده نمی‌کنیم و مستقیماً خود تابع V را به دست می‌آوریم.

$$V=-\int_r^{r_0}\vec{E}\,.\,d\vec{l}=-\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a}\int_r^{r_0}(\frac{b}{R}+1)dR=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}[b\ln R+R]_r^{r_0} \Rightarrow V=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}[b\ln r_0+r_0-b\ln r-r]=A+Br+C\ln r$$

که به ترتیب ثابت‌های A، B و C عبارتند از:

$$A=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}(b\ln r_0+r_0) \qquad B=\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a} \qquad C=\frac{bk_1}{\varepsilon_0\,a}$$

دقت کنید که در این مسئله r_0 ثابت و یک عدد است، در حالی‌که r یک متغیر است.

مدرسان شریف

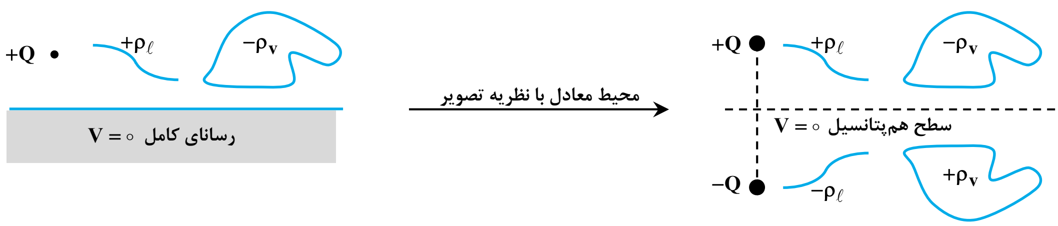
فصل هفتم

«روش تصاویر»

مقدمه

اگر در یک محیط یک توزیع بار در بالای یک صفحهٔ رسانای کامل متصل به زمین وجود داشته باشد، می‌توانیم به جای آن محیط یک محیط دیگر شامل همان توزیع بار اولیه، تصویر آن توزیع بار و یک سطح هم پتانسیل را در نظر بگیریم.

به صورت نمادین در شکل زیر آرایش بارهای نقطه‌ای، خطی، حجمی در هر دو حالت نشان داده شده است.



در استفاده از روش تصویر باید دو شرط همیشه برقرار شود:

۱) تصویر بار باید در محیط رسانا قرار بگیرد.

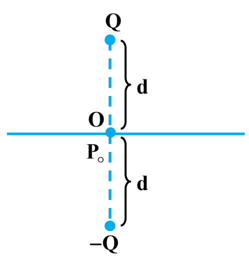
۲) تصویر بار باید طوری قرار بگیرد که سطح رسانا، پتانسیل صفر یا ثابتی داشته باشد.

درسنامه (۱): تصویر بار نقطه‌ای در یک صفحه مسطح هادی زمین شده

فرض کنید یک سطح هادی نازک و بی‌نهایت وجود دارد که به پتانسیل صفر متصل شده است و هیچ اطلاع دیگری از این سطح، نظیر چگالی توزیع بار، میدان الکتریکی و ... در دسترس نیست. حال بار نقطه‌ای Q را به فاصله d بالای سطح هادی در نظر بگیرید.

میدان الکتریکی یا پتانسیل الکتریکی یا ... را برای نقطه‌ای در بالای صفحه، می‌توان با روش تصاویر و از طریق الگوریتم زیر محاسبه نمود.

الگوریتم روش تصویر:



۱ـ زیر بار نقطه‌ای Q و روی صفحه، P_0 یا O را به عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم.

۲ـ یک بار نقطه‌ای $-Q$ به فاصله d زیر صفحه هادی زمین شده قرار می‌دهیم.

۳ـ صفحه هادی را حذف می‌کنیم.

۴ـ میدان الکتریکی یا پتانسیل الکتریکی یا..... را در نقطه مورد نظر محاسبه می‌کنیم.

اگر می‌خواهید بدانید که آیا این روش صحیح است یا خیر به قضیه یکتایی پاسخ معادله لاپلاس برمی‌گردیم.

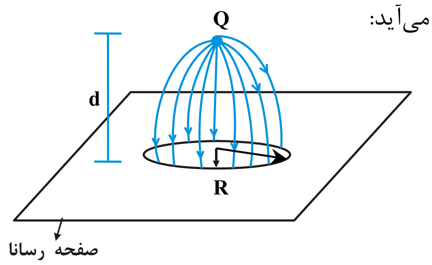
معادله لاپلاس می‌گفت: من فقط یک جواب دارم که در معادله من صدق کند و شرایط مرزی را نیز برآورده کند.

حالا بیایید پتانسیل نقطه P_0 را به دست آوریم، ببینیم صفر می‌شود یا نه؟!!!

$$V_{P_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}=0$$

به همین راحتی ... هر نقطه‌ای به جز P_0 را نیز روی صفحه در نظر می‌گرفتیم، پتانسیل آن صفر می‌شد. این نشان‌دهنده هم پتانسیل بودن این صفحه فرضی می‌باشد که دقیقاً صفحه هادی را مدل می‌کند.

بار القاشده ناشی از بار نقطه‌ای Q در داخل دایره‌ای به شعاع R روی صفحه رسانا از رابطه زیر به‌دست می‌آید:



$$Q' = -Q[۱-\frac{R}{\sqrt{d^۲+R^۲}}]$$

همچنین چگالی بار سطحی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_s = -\frac{Qd}{۲\pi[d^۲+R^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$$

مثال ۱: بار نقطه‌ای q به جرم m به فاصله d از یک صفحه متصل به زمین از حالت سکون رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا بار به صفحه برخورد کند؟

۱) $(\frac{۲\pi d}{q})\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ md}$　　۲) $(\frac{\pi d}{۲q})\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ md}$　　۳) $(\frac{۴\pi d}{q})\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ md}$　　۴) $(\frac{\pi d}{q})\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ md}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در ارتفاع x بالای صفحه، نیروی وارد بر q برابر است با:

$$F = -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^۲}{۴x^۲} = m\frac{d^۲x}{dt^۲} \Rightarrow \frac{d^۲x}{dt^۲} = -\frac{A}{x^۲}\ ,\ A = \frac{q^۲}{۱۶\pi\varepsilon_\circ m}$$

با ضرب کردن رابطه فوق در $V = \frac{dx}{dt}$ می‌توان نوشت:

$$V\frac{dV}{dt} = -\frac{A}{x^۲}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}V^۲) = \frac{d}{dt}(\frac{A}{x}) \Rightarrow \frac{۱}{۲}V^۲ = \frac{A}{x}+C$$

از آنجایی که در $x = d$، $V = \circ$ می‌باشد، داریم:

$$C = \frac{-A}{d}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V^۲ = ۲A(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{d}) \Rightarrow -\frac{dx}{dt} = \sqrt{۲A}\sqrt{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{d}} = \sqrt{\frac{۲A}{d}}\sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

$$\int_d^\circ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{d-x}}dx = -\sqrt{\frac{۲A}{d}}\int_\circ^t dt = -\sqrt{\frac{۲A}{d}}t$$

برای محاسبه انتگرال سمت چپ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = u^۲ \Rightarrow dx = ۲udu$$

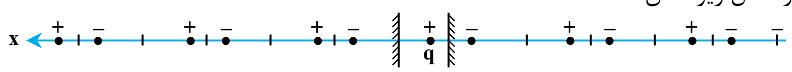
$$\int_d^\circ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{d-x}}dx = ۲\int_{\sqrt{d}}^\circ \frac{u^۲}{\sqrt{d-u^۲}}du = ۲\left\{-\frac{u}{۲}\sqrt{d-u^۲}+\frac{d}{۲}\sin^{-۱}(\frac{u}{\sqrt{d}})\right\}\Bigg|_{\sqrt{d}}^\circ = -d\sin^{-۱}(۱) = -d\frac{\pi}{۲}$$

در نتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا بار به صفحه برخورد کند برابر است با:

$$t = \sqrt{\frac{d}{۲A}}\frac{\pi d}{۲} = \sqrt{\frac{\pi^۲d^۲}{۴}\frac{d}{۲q^۲}۱۶\pi\varepsilon_\circ m} = \frac{\pi d}{q}\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ md}$$

مثال ۲: دو صفحه رسانای نامتناهی و موازی، به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه‌ای q در بین آن‌ها و به فاصله x از یک صفحه واقع است. نیروی وارد بر q را بیابید.

☑ **پاسخ:** پیکربندی تصاویر در شکل زیر نشان داده شده است.



نیروهای وارد بر بار q از طرف بارهای تصویری مثبت، دو به دو همدیگر را خنثی می‌کنند. نیروی کل وارد بر بار q از طرف بارهای تصویری منفی به صورت زیر است:

$$F = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}q^۲\left\{\frac{۱}{[۲(a-x)]^۲}+\frac{۱}{[۲a+۲(a-x)]^۲}+\frac{۱}{[۴a+۲(a-x)]^۲}+\cdots-\frac{۱}{(۲x)^۲}-\frac{۱}{(۲a+۲x)^۲}-\frac{۱}{(۴a+۲x)^۲}-\cdots\right\}$$

$$F = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^۲}{۴}\left\{\left[\frac{۱}{(a-x)^۲}+\frac{۱}{(۲a-x)^۲}+\frac{۱}{(۳a-x)^۲}+\cdots\right]-\left[\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(a+x)^۲}+\frac{۱}{(۲a+x)^۲}+\cdots\right]\right\}$$

برای بررسی صحت جواب، می‌توانیم آن را در $x = \frac{a}{۲}$ به دست بیاوریم:

$$F = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^۲}{۴}\left\{\left[\frac{۱}{(\frac{a}{۲})^۲}+\frac{۱}{(\frac{۳a}{۲})^۲}+\frac{۱}{(\frac{۵a}{۲})^۲}+\cdots\right]-\left[\frac{۱}{(\frac{a}{۲})^۲}+\frac{۱}{(\frac{۳a}{۲})^۲}+\frac{۱}{(\frac{۵a}{۲})^۲}+\cdots\right]\right\} = \circ$$

که با واقعیت فیزیکی و شهود ما مطابقت دارد.

فصل هشتم

«جریان‌های الکتریکی دائم»

مقدمه

تا به حال به بررسی رفتار بارهای الکتریکی ساکن (الکترواستاتیک) پرداختیم. در این فصل بارها را به حرکت درمی‌آوریم! اما مواظب هستیم که حرکت بارها به گونه‌ای باشد که جریان ایجاد شده نسبت به زمان تغییر نکند. این جریان را جریان الکتریکی دائم می‌نامیم. این جریان عامل ایجاد میدان مغناطیسی ساکن است که در بحث مگنتواستاتیک به آن می‌پردازیم. اما قبل از ورود به بحث مگنتواستاتیک، در این فصل در مورد «آثار الکتریکی» جریان‌های الکتریکی صحبت می‌کنیم. در این قسمت به شکل عمیق‌تری با مفهوم «مقاومت الکتریکی» آشنا می‌شوید!

درسنامه (۱): چگالی جریان الکتریکی

اگر هر ذره الکتریکی را با بار e در نظر بگیریم و تعداد آنها در واحد حجم N باشد، در این صورت چگالی بار حجمی را می‌توانیم به صورت $\rho = Ne$ بنویسیم. حال در صورتی که بار حجمی با چگالی ρ، با سرعت $\vec{v}$ حرکت کند، چگالی جریان الکتریکی معادل را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v} = Ne\vec{v} \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)} \qquad \text{رابطه (۱)}$$

دقت کنید که در عمل، سرعت حرکت الکترون متناسب با شدت میدان الکتریکی اعمال شده به آنها بوده، خب! پس می‌توانیم اینگونه بنویسیم:

$$\boxed{\vec{v} = -\mu_e\vec{E}} \qquad \text{رابطه (۲)}$$

μ_e را قابلیت تحرک الکترون می‌نامند. بدیهی است که الکترونها در خلاف جهت میدان اعمال شده حرکت می‌کنند و چون μ_e مثبت فرض می‌شود، لذا علامت منفی در رابطه فوق نشان‌دهنده معکوس بودن جهت حرکت الکترون‌ها با میدان الکتریکی است. با جایگزین کردن $\vec{v}$ در رابطه (۱) داریم:

$$\boxed{\vec{J} = -Ne\mu_e\vec{E} = \sigma\vec{E}} \qquad \text{رابطه (۳)}$$

در رابطه (۳)، σ را رسانایی یا قابلیت هدایت الکتریکی می‌نامند. توجه کنید که رسانایی هادی ایده‌آل یا هادی کامل، بی‌نهایت و رسانایی یک عایق ایده‌آل یا عایق کامل، صفر فرض می‌شود. رابطه $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ را به عنوان شکل نقطه‌ای قانون اهم نیز می‌شناسیم. این قانون بیان می‌کند که چگالی جریان هدایتی در هر نقطه در یک جسم متناسب با شدت میدان الکتریکی در آن نقطه است.

نکته۱: جریان الکتریکی I گذرنده از سطح بسته S از رابطه مقابل به دست می‌آید: $I = \iint \vec{J}.\vec{ds}$

مثال۱: یک کره رسانا به مرکز مبدأ مختصات با شعاع R به پتانسیل $V_\circ$ وصل شده است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. اندازه چگالی جریان سطحی الکتریکی روی سطح کره کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\omega V_\circ\cos\theta$ ۲) $\varepsilon_\circ\omega V_\circ$ ۳) $\varepsilon_\circ\omega V_\circ\cos\theta$ ۴) $\varepsilon_\circ\omega V_\circ\sin\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از رابطه $\vec{J}_s = \rho_s\vec{v}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{v} = r\omega\hat{a}_\varphi \xrightarrow{r=R\sin\theta} \vec{v} = (R\sin\theta)\omega\hat{a}_\varphi$$

از طرفی چگالی بار سطحی کره چنین است:

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\varepsilon_\circ R V_\circ}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_\circ V_\circ}{R}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{J}_s = \left(\frac{\varepsilon_\circ V_\circ}{R}\right)(R\sin\theta)\omega\hat{a}_\varphi = \varepsilon_\circ\omega V_\circ\sin\theta\hat{a}_\varphi$$

مثال ۲: شعاع الکترونی در یک لامپ اشعه کاتدی به صورت استوانه‌ای با چگالی بار حجمی $\rho_v = \frac{-10^{-13}}{r^2 + 10^{-8}}$ در مختصات استوانه‌ای در فاصله $0 \le r \le 3\times10^{-4}$ متر و $\rho = 0$ برای $r > 3\times10^{-4}$ متر می‌باشد. اگر سرعت الکترون برابر با $\frac{1}{\pi}\times10^{7}\,\frac{m}{s}$ باشد، جریان شعاع الکترونی را به دست آورید.

(مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $I = \ln 10\,\mu A$ ۲) $I = \ln 5\,\mu A$ ۳) $I = 2\ln 10\,\mu A$ ۴) $I = 2\ln 5\,\mu A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چگالی جریان الکتریکی برابر است با:

$$\vec{J} = \rho_v \vec{V} = -\frac{1}{\pi}10^{-6}\frac{1}{r^2 + 10^{-8}}\hat{a}_z$$

در نتیجه جریان الکتریکی برابر است با:

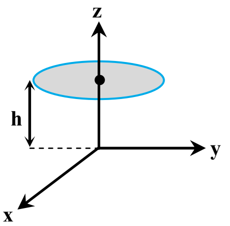
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{3\times10^{-4}} Jrdrd\varphi \Rightarrow I = \frac{1}{\pi}10^{-6}(2\pi)\int_0^{3\times10^{-4}}\frac{rdr}{r^2 + 10^{-8}} = 10^{-6}\ln(10) = \ln(10)\mu A$$

مثال ۳: در مختصات کروی، چگالی جریان الکتریکی به صورت روبه‌رو در یک محیط هادی مفروض است: $\vec{J} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\hat{a}_r - \frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi(\frac{A}{m^2})$

کل جریانی که در جهت $\hat{a}_z$ از یک دیسک دایره‌ای به شعاع R به مرکز محور z و مستقر در $z = h$، می‌گذرد، کدام است؟ فرض کنید $h >> R$ باشد.

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)

۱) $I = \frac{2\pi R}{h}$ ۲) $I = \frac{4\pi R^2}{h^2}$ ۳) $I = \frac{2\pi R^2}{h^2}$ ۴) $I = \frac{4\pi R}{h}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا چگالی جریان را در راستای $\hat{a}_z$ محاسبه می‌نماییم.

برای این منظور کافی است از ضرب داخلی بردار $\vec{J}$ در $\hat{a}_z$ استفاده کنیم.

$$J_z = \vec{J}.\hat{a}_z = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\hat{a}_r.\hat{a}_z) - \frac{1}{r^2}(\hat{a}_\varphi.\hat{a}_z) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\theta + \frac{1}{r^3}\sin\theta$$

مطابق شکل $\cos\theta = \frac{h}{r}$ و $\sin\theta = \frac{R}{r}$ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$J_z = \frac{1}{r^2(\frac{R}{r})}(\frac{h}{r}) + \frac{1}{r^3}(\frac{R}{r}) = \frac{h}{r^2R} + \frac{R}{r^4}$$

اکنون برای محاسبه‌ی جریان، کافی است انتگرال سطحی چگالی جریانی را که از مساحت خواسته شده می‌گذرد، محاسبه کنیم.

$$I = \int J_z ds = \iint(\frac{h}{r^2R} + \frac{R}{r^4})RdRd\phi = 2\pi\int(\frac{h}{r^2} + \frac{R^2}{r^4})dR$$

از طرفی داریم $r^2 = R^2 + h^2$ و چون طبق صورت سؤال $h \gg R$ می‌باشد، لذا می‌توان از R^2 در مقابل h^2 صرف‌نظر کرد و در نتیجه خواهیم داشت:

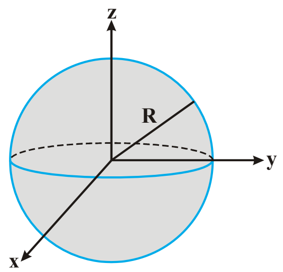
$$r^2 \simeq h^2 \quad , \quad r^4 \simeq h^4$$

با جایگذاری r^2 و r^4 جدید در رابطه‌ی جریان، به دست می‌آوریم:

$$I = 2\pi\int(\frac{h}{h^2} + \frac{R^2}{h^4})dR = \frac{2\pi R}{h} + \frac{R^3}{3h^4} = \frac{6\pi Rh^3 + R^3}{3h^4} \Rightarrow I \simeq \frac{6\pi Rh^3}{3h^4} = \frac{2\pi R}{h}$$

مثال ۴: کره‌ای رسانا به شعاع R و رسانندگی σ مفروض است. اگر پتانسیل در نقطه‌ای از سطح کره که زاویه بردار مکان آن با محور z برابر θ است، $5\cos\theta$ ولت باشد، چگالی جریان داخل کره کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۹۵)



۱) $-\frac{5}{R}\sigma\cos\theta\,\hat{k}$ ۲) $-\frac{5\sigma}{R}\hat{k}$

۳) $\frac{5\sigma}{R}\hat{\varphi}$ ۴) $\frac{5}{R}\sigma\cos\theta\,\hat{\varphi}$

مدرسان شریف

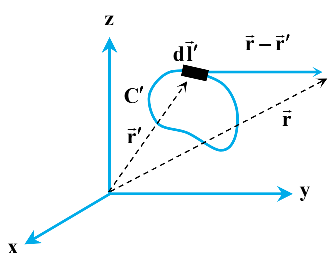
فصل نهم

«میدان مغناطیسی ساکن»

مقدمه

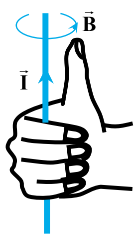
همراهان عزیز می‌دانیم که منشأ کلیه پدیده‌های الکترومغناطیسی، بارهای الکتریکی هستند. بارهای الکتریکی ساکن فقط تولید میدان الکتریکی می‌کنند. حرکت بارهای الکتریکی باعث به وجود آمدن پدیده دیگری به نام میدان مغناطیسی می‌شود. اگر بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت حرکت کنند، میدان مغناطیسی ساکن را تولید می‌کنند و اگر حرکت شتابدار داشته باشند، میدان‌های متغیر با زمان و پدیده تشعشع را به وجود می‌آورند که در فصل‌های بعد و پس از معرفی معادلات ماکسول آن‌ها را توضیح می‌دهیم؛ اما در این فصل مهم‌ترین قانون در دنیای مغناطیس، یعنی قانون بیوساوار را یاد خواهیم گرفت.

درسنامه: قانون بیوساوار



قانون بیوساوار در دنیای مغناطیس مانند قانون کولن در دنیای الکتریسیته است. با استفاده از این قانون می‌توانیم میدان مغناطیسی یا چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ را به دست آوریم. میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی یکنواخت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{B(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{Id\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$



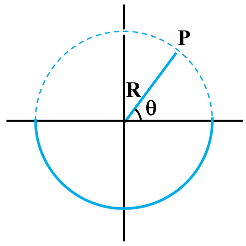
با توجه به ضرب خارجی بین بردار $\vec{r}-\vec{r}'$ و $Id\vec{l}'$ نتیجه می‌گیریم که جهت میدان مغناطیسی توسط قانون دست راست مشخص می‌شود. اگر انگشت شست دست راست در جهت جریان و بقیهٔ انگشتان به سمت نقطهٔ میدان (مشاهده) باشد، جهت بسته شدن انگشت‌ها، جهت میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد. ضرب خارجی و قانون دست راست را در فصل اول توضیح دادیم.

جریان‌های با توزیع سطحی و حجمی را به صورت مجموعه‌ای از جریان‌های خطی در نظر می‌گیریم و میدان حاصل از کل مجموعه را با استفاده از اصل جمع آثار به دست می‌آوریم. میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های سطحی و حجمی میدان مغناطیسی به ترتیب از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{J}_s\times\hat{a}_R}{R^2}ds' \quad \text{(جریان سطحی)}}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\times\hat{a}_R}{R^2}dv' \quad \text{(جریان حجمی)}}$$

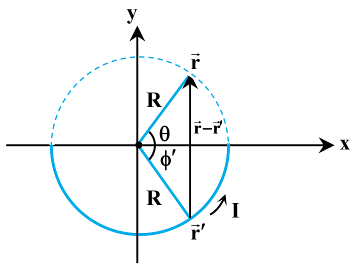
مثال۱: مطابق شکل، از یک سیم نیم‌دایره به شعاع R جریان ثابت I می‌گذرد. میدان مغناطیسی در نقطه P کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ I}{\lambda\pi R}\ln\left|\left|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{\text{۴}})}{\tan(\frac{\theta}{\text{۴}})}\right|\right|\hat{z}$ ۲) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi R}\ln\left|\left|\frac{\tan(\frac{\theta+\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{۴}})}{\tan(\frac{\theta}{\text{۴}})}\right|\right|\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi R}\ln\left|\left|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{\text{۴}})}{\cot(\frac{\theta}{\text{۴}})}\right|\right|\hat{z}$ ۴) $\frac{\mu_\circ I}{\lambda\pi R}\ln\left|\left|\frac{\tan(\frac{\theta}{\text{۴}})}{\tan(\frac{\theta+\pi}{\text{۴}})}\right|\right|\hat{z}$

پاسخ: گزینه «۱» نقاط منبع و مشاهده به صورت زیر هستند:



$$\vec{r}' = R\cos\phi'\hat{x} - R\sin\phi' y \quad , \quad \vec{r} = R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}' = R[(\cos\theta-\cos\phi')\hat{x} + (\sin\theta+\sin\phi')\hat{y}]$$

جزء طول برای محاسبه انتگرال بیوساوار برابر است با:

$$d\vec{l}' = R\sin\phi' d\phi'\hat{x} + R\cos\phi' d\phi'\hat{y} = Rd\phi'(\sin\phi'\hat{x} + \cos\phi'\hat{y})$$

با اندکی محاسبات (خودتان انجام دهید!) می‌توان به نتیجه مقابل رسید:

$$d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}') = R^{\text{۲}}[\text{۱}-\cos(\theta-\phi')]d\phi'\hat{z}$$

بنابراین میدان $\vec{B}$ برابر است با:

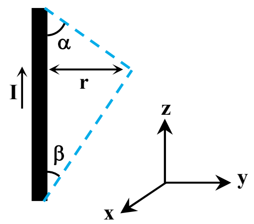
$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi}\int\frac{d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{\text{۳}}} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi}R^{\text{۲}}\hat{z}\int_\circ^\pi\frac{[\text{۱}-\cos(\theta+\phi')]}{[\text{۲}R^{\text{۲}}-\text{۲}R^{\text{۲}}\cos(\theta+\phi')]^{\text{۳}/\text{۲}}}d\phi'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ IR^{\text{۲}}}{\text{۴}\pi(\text{۲}R^{\text{۲}})^{\text{۳}/\text{۲}}}\hat{z}\int_\circ^\pi\frac{d\phi'}{\sqrt{\text{۱}-\cos(\theta+\phi')}} = \frac{\mu_\circ I}{\lambda\sqrt{\text{۲}}\pi R}\hat{z}\int_\circ^\pi\frac{d\phi'}{\sqrt{\text{۲}}\sin[\frac{(\theta+\phi')}{\text{۲}}]}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۱۶}\pi R}\hat{z}\left\{\text{۲}\ln\left|\tan(\frac{\theta+\phi'}{\text{۴}})\right|\right\}\Bigg|_\circ^\pi = \frac{\mu_\circ I}{\lambda\pi R}\ln\left|\left|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{\text{۴}})}{\tan(\frac{\theta}{\text{۴}})}\right|\right|\hat{z}$$

مهم‌ترین کاربردهای قانون بیوساوار به شرح زیر می‌باشد.

۱) میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم حامل جریان I در راستای $+\hat{z}$ عبارت است از:

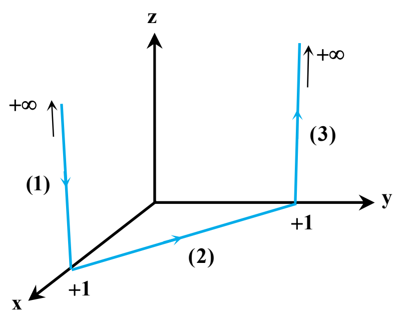


$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi r}(\cos\alpha+\cos\beta)\hat{a}_\varphi}$$

میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم بسیار بلند حامل جریان I با جایگذاری $\alpha=\beta=\circ$ در رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۲}\pi r}\hat{a}_\varphi$$

مثال۲: برای سیم نامحدود حامل جریان I در شکل زیر، میدان $\vec{B}$ در مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۲) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi}(\hat{x}+\hat{y})$

۳) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۴}\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\text{۲}\hat{z})$

۴) $\frac{\mu_\circ I}{\text{۲}\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

مدرسان شریف

فصل دهم

«قانون آمپر»

درسنامه: بررسی قانون آمپر

از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی برخی توزیع‌های جریان متقارن استفاده می‌کنیم. اگر C یک مسیر بسته دلخواهی باشد، در این صورت می‌توانیم بنویسیم: (I جریان کل در برگرفته شده توسط مسیر بسته C می‌باشد.)

$$\boxed{\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_\circ I \qquad (۱)}$$

معادله قانون آمپر را به شکل مقابل هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = I \qquad (۲)$$

$\vec{H}$، شدت میدان مغناطیسی است که در فضای آزاد (خلأ) به‌صورت $\vec{H} = \frac{۱}{\mu_\circ}\vec{B}$ تعریف می‌شود.

قانون آمپر در معادله بالا نشان می‌دهد که انتگرال خطی $\vec{H}$ حول هر مسیر بسته برابر کل جریان احاطه شده در آن مسیر بسته است.

روشن است که استفاده از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی، بستگی به کسب اطلاعات اولیه‌ای درباره جهت و اندازه میدان دارد. این اطلاعات اولیه را به کمک قانون بیوساوار و با در نظر گرفتن تقارن توزیع جریان به دست می‌آوریم.

حواستان باشد که قانون آمپر فقط برای جریان ثابت (نامتغیر با زمان) برقرار است و برای جریان‌های متغیر با زمان به صورت بالا برقرار نیست.

تذکر: قانون آمپر (به فرم رابطه (۱)) فقط در فضای آزاد کاربرد دارد. در فصل‌های بعد برای مواد مغناطیس‌شونده نیز در مورد این قانون صحبت می‌کنیم.

قانون آمپر هم مانند قانون گاوس همیشه کارگشا نیست. فقط در مواردی که به دلیل تقارن در مسأله بتوانیم $\vec{B}$ را از داخل انتگرال $\oint \vec{B}.d\vec{l}$ بیرون آوریم، می‌توانیم آن را از طریق قانون آمپر محاسبه کنیم. در غیر این صورت برای محاسبه $\vec{\mathbf{B}}$ باید از قانون بیوساوار استفاده کنیم که قبلاً در مورد این قانون بحث کردیم.

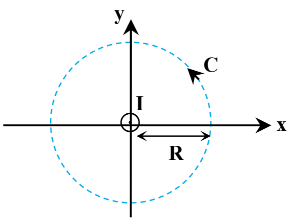
حالا با توجه به توضیحاتی که گفتیم، چه مسیری را برای انتگرال‌گیری انتخاب کنیم؟

مسیری که دو ویژگی زیر را داشته باشد:

۱- شدت میدان مغناطیسی، مماس یا عمود بر آن باشد تا ضرب داخلی $\vec{H}.d\vec{l}$ مساوی صفر یا به ضرب اندازه‌ها تبدیل شود.

۲- شدت میدان مغناطیسی $(\vec{H})$ در طول آن ثابت باشد تا به راحتی از زیر انتگرال بیرون آمده و ساده شود.

مثال۱: **میدان مغناطیسی را در فاصله R از یک سیم راست حامل جریان بیابید.**



$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = I$$

$$\oint_C \vec{H}.(Rd\phi\hat{a}_\phi) = \int_{\phi=\circ}^{۲\pi} H_\phi R d\phi = ۲\pi R H_\phi = I$$

پس شدت میدان مغناطیسی اطراف سیم راست حامل جریان همان‌طور که قبلاً هم دیدیم برابر است با:

$$H_\phi = \frac{I}{۲\pi R} \rightarrow \vec{H} = \frac{I}{۲\pi R}\hat{a}_\phi$$

نکته۱: شکل دیفرانسیلی (نقطه‌ای) قانون آمپر به صورت زیر است:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$$

این رابطه می‌گوید که در هر نقطه از فضا، کرل چگالی شار مغناطیسی برابر حاصلضرب μ_0 در چگالی توزیع جریان در آن نقطه است. در ادامه با توزیع جریان‌هایی که با استفاده از قانون مداری آمپر، خیلی راحت می‌توانیم میدان مغناطیسی ناشی از آنها را حساب کنیم عبارتند از:

۱ـ در دستگاه مختصات استوانه‌ای: اگر چگالی توزیع جریان الکتریکی فقط تابعی از مختصات شعاعی r باشد، میدان مغناطیسی ناشی از مؤلفه $\hat{a}_z$ چنین جریانی، فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد که به نوبه خود فقط تابعی از r می‌باشد. مسیر بسته آمپری را به صورت دایره‌ای به شعاع r روی صفحه‌ای عمود بر محور z و مرکزی منطبق بر این محور در نظر می‌گیریم.

همچنین میدان مغناطیسی ناشی از مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ چنین جریانی، فقط مؤلفه $\hat{a}_z$ را دارد که به نوبه خود فقط تابعی از r است. در این حالت مسیر بسته آمپری را به صورت مستطیلی در صفحه‌ای که محور z دارد، در نظر می‌گیریم. طول این مسیر مستطیلی برابر واحد و موازی محور z و عرض آن برابر $w=r_2-r$ از r تا r_2 در امتداد شعاعی است.

مثال۲: **یک توزیع جریان در مختصات استوانه‌ای با چگالی** $\vec{J}=\begin{cases}\frac{k}{\rho}\hat{a}_z\,, & 0<\rho<a\\ 0\,, & \rho>a\end{cases}$ **داده شده است. شدت میدان مغناطیسی ناشی از آن در ناحیه $\rho<a$ کدام است؟**

۱) $\frac{ka}{\rho}\hat{a}_\varphi$ ۲) $-k\hat{a}_\varphi$ ۳) $k\hat{a}_\varphi$ ۴) $-\frac{ka}{\rho}\hat{a}_\varphi$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint\vec{H}.d\vec{l}=I=\iint\vec{J}.d\vec{s}=\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}(\frac{k}{\rho}\hat{a}_z).(\rho d\varphi d\rho\hat{a}_z)$$

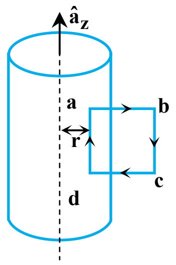
$$H_\varphi 2\pi\rho=2\pi k\rho\Rightarrow H_\varphi=k\Rightarrow\vec{H}=k\hat{a}_\varphi$$

مثال۳: **یک جریان الکتریکی با چگالی سطحی $\vec{J}=J_0\sin(ar)\hat{a}_\varphi$ درون یک استوانه بسیار بلند به شعاع R جاری است. میدان مغناطیسی درون استوانه به کدام صورت است؟**

۱) $\vec{H}=aJ_0\cos(ar)\hat{a}_z$ ۲) $\vec{H}=\frac{J_0}{a}[\cos(ar)-\cos(aR)]\hat{a}_z$

۳) $\vec{H}=\frac{J_0}{a}\cos(ar)\hat{a}_z$ ۴) $\vec{H}=\frac{J_0}{a}\cos(aR)\hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۲» برای استفاده از قانون مداری آمپر، یک مسیر مستطیلی مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



به دلیل تقارن مسأله، میدان $\vec{H}$ در جهت $\hat{a}_z$ می‌باشد. از طرفی میدان $\vec{H}$ خارج استوانه صفر است، بنابراین:

$$\oint\vec{H}.d\vec{l}=\int_{ab}Hzdz'=\int_{z_1}^{z_2}Hzdz'=Hz(z_2-z_1)$$

طبق قانون آمپر داریم:

$$\oint\vec{H}.d\vec{l}=\int\vec{J}.d\vec{s}\Rightarrow H(z_2-z_1)=\int_{z_1}^{z_2}\int_r^R J_0\sin(ar')dr'dz'$$

$$\Rightarrow H(z_2-z_1)=J_0(z_2-z_1)[-\frac{\cos(ar')}{a}]_r^R\Rightarrow\vec{H}=\frac{J_0}{a}[\cos(ar)-\cos(aR)]\hat{a}_z$$

مثال۴: **یک استوانه بسیار بلند به شعاع a دارای بار حجمی یکنواخت با چگالی ρ است. این استوانه حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد. چگالی شار مغناطیسی در $r=\frac{a}{2}$ برابر است با: (محور استوانه را در امتداد z فرض کنید)**

۱) $\vec{B}=\frac{3\mu_0\omega\rho a^2}{8}\hat{a}_\varphi$ ۲) $\vec{B}=\frac{\mu_0\omega\rho a^2}{8}\hat{a}_z$ ۳) $\vec{B}=\frac{\mu_0\omega\rho a^2}{8}\hat{a}_\varphi$ ۴) $\vec{B}=\frac{\mu_0\omega\rho a^2}{4}\hat{a}_z$

مدرسان شریف

فصل یازدهم

«پتانسیل مغناطیسی برداری و پتانسیل مغناطیسی اسکالر»

مقدمه

در مبحث الکتریسیته ساکن با پتانسیل الکتریکی آشنا شدیم و دیدیم که چقدر به ما کمک کرد و محاسبات میدانی ما را آسان‌تر نمود.

در مبحث مغناطیس نیز توابع پتانسیلی را معرفی می‌کنیم که در محاسبات میدان مغناطیسی به ما کمک می‌کنند.

پتانسیل مغناطیسی می‌تواند اسکالر (V_m) یا برداری $(\vec{A})$ باشد که در ادامه با هر یک از آنها آشنا خواهیم شد.

درسنامه (۱): پتانسیل مغناطیسی اسکالر

محاسبه پتانسیل اسکالر شرط خاصی را می‌طلبد که به قرار زیر است:

شرط خاص: چگالی جریان در محیطی که پتانسیل عددی مغناطیسی محاسبه می‌شود باید صفر باشد. یعنی باید $\vec{J}=\circ$ باشد.

طبق قانون آمپر می‌دانیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$$

حال اگر چگالی جریان در محیط صفر باشد، قانون آمپر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\circ$$

در فصل اول و در قسمت مشتقات فضایی، توضیح دادیم که کرل گرادیان یک تابع اسکالر، صفر است. پس تحت شرط فوق، حتماً میدان مغناطیسی $\vec{H}$، گرادیان یک تابع اسکالر به نام تابع پتانسیل اسکالر (عددی) مغناطیسی (V_m) می‌باشد.

$$\vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}V_m)=\circ\to \boxed{\vec{H}=-\vec{\nabla}V_m}$$

پتانسیل اسکالر مغناطیسی را با V_m نشان می‌دهیم که V نشانگر پتانسیل بودن و اندیس m نشانگر مغناطیسی بودن آن است و واحد آن نیز آمپر (A) می‌باشد.

ارتباط پتانسیل اسکالر مغناطیسی V_m و چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$

می‌دانیم در فضای آزاد، $\vec{B}=\mu_\circ\vec{H}$ است. پس خیلی راحت می‌توانیم رابطه بین V_m و $\vec{B}$ را نیز به دست آوریم.

$$\vec{B}=-\mu_\circ\vec{\nabla}V_m$$

از این ارتباط می‌خواهیم به یک نتیجه برسیم و آن چیزی نیست جز:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\circ\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot(-\mu_\circ\vec{\nabla}V_m)=\circ\Rightarrow-\mu_\circ\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V_m)=\circ\Rightarrow\boxed{\nabla^2 V_m=\circ}$$

خب! این نتیجه نشان می‌دهد که باز هم معادله لاپلاس برقرار است.

تذکر۱: دقت کنید که معادله لاپلاس فقط در محیط‌های مغناطیسی همگن اعتبار دارد و اما تفاوت و شباهت بین پتانسیل الکتریکی V و پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m چیست؟

شباهت: مرجع (پتانسیل صفر) پتانسیل اسکالر مغناطیسی نیز در بی‌نهایت است.

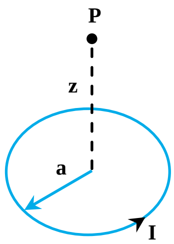
تفاوت: پتانسیل الکتریکی V در هر نقطه‌ای نسبت به مرجع، یک مقدار منحصر به فرد داشت، ولی پتانسیل اسکالر مغناطیسی در یک نقطه نسبت به مرجع، می‌تواند مقدارهای متغیر داشته باشد.

نکات مهم: معمولاً مسائل طوری طرح می‌شوند که مقدار تابع پتانسیل V_m یک مقدار منحصر به فرد می‌شود. در این صورت می‌توانیم رابطه زیر را که اختلاف پتانسیل اسکالر مغناطیسی است، به دست آوریم.

$$V_m(a)-V_m(b)=-\int_b^a \vec{H}\cdot d\vec{l} \;\Rightarrow V_m(a)-V_m(b)=-\int_b^a (\frac{\vec{B}}{\mu_\circ})\cdot d\vec{l}=-\frac{۱}{\mu_\circ}\int_b^a \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

تذکر ۲: در محیط‌های همگن و بدون جریان با استفاده از معادله لاپلاس $(\nabla^۲ V_m=\circ)$، می‌توانیم V_m را حساب کرده و از روی آن $\vec{H}$ را بدست آوریم $(\vec{H}=-\vec{\nabla}V_m)$. اما چون پتانسیل مغناطیسی عددی یک تابعِ چند مقداری است و همچنین شدت جریان در کلیه نقاط صفر نیست، بنابراین این روش خیلی هم مفید نیست.

مثال ۱: جریان I از یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع a می‌گذرد. پتانسیل اسکالر مغناطیسی نقطه P در ارتفاع z روی محور حلقه، برابر است با:



۱) $\frac{I}{۲}(۱-\frac{z}{\sqrt{a^۲+z^۲}})$ ۲) $۲I(۱-\frac{z}{\sqrt{a^۲+z^۲}})$

۳) $\frac{I}{۲\pi}(۱-\frac{۲z}{\sqrt{a^۲+۴z^۲}})$ ۴) $I(۱-\frac{۲z}{\sqrt{a^۲+۴z^۲}})$

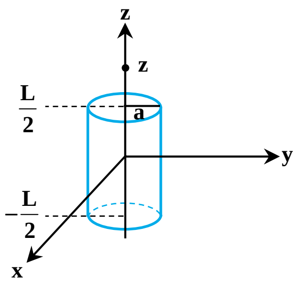
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه V_m ابتدا باید $\vec{H}$ را روی محور حلقه بدست می‌آوریم. بنابراین: $(\vec{R}=z\hat{a}_z-a\hat{a}_r)$

$$\vec{H}=\oint\frac{Id\vec{l}\times\hat{a}_R}{۴\pi|\vec{R}|^۲}=\int_{\phi=\circ}^{۲\pi}\frac{Iad\phi}{۴\pi(a^۲+z^۲)}\hat{a}_\phi\times\frac{z\hat{a}_z-a\hat{a}_r}{\sqrt{a^۲+z^۲}}=\frac{Ia^۲}{۴\pi(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}[۲\pi]\hat{a}_z=\frac{Ia^۲}{۲(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\hat{a}_z$$

حال می‌توانیم به راحتی V_m را به دست آوریم:

$$V_m=-\int_\infty^z\vec{H}\cdot d\vec{l}=-\int_\infty^z\frac{Ia^۲}{۲(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}dz=\frac{-Ia^۲}{۲}\left[\frac{z}{a^۲\sqrt{z^۲+a^۲}}\right]_\infty^z=\frac{-I}{۲}(\frac{z}{\sqrt{z^۲+a^۲}}-۱)\Rightarrow V_m=\frac{I}{۲}(۱-\frac{z}{\sqrt{a^۲+z^۲}})$$

مثال ۲: بر روی سطح یک پوسته استوانه‌ای غیرمغناطیسی، چگالی سطحی جریان الکتریکی $\vec{J}=J_\circ\hat{a}_\phi$ وجود دارد. پتانسیل مغناطیسی اسکالر در نقطه z (مطابق شکل) به چه صورت است؟



۱) $\frac{J_\circ L}{۲}\sqrt{a^۲+(z-\frac{L}{۲})^۲}$ ۲) $\frac{J_\circ}{۲}(L+\sqrt{a^۲+(z-\frac{L}{۲})^۲}-\sqrt{a^۲+(z+\frac{L}{۲})^۲})$

۳) $\frac{J_\circ}{۲}(\sqrt{a^۲+(z-\frac{L}{۲})^۲}-\sqrt{a^۲+(z+\frac{L}{۲})^۲})$ ۴) $\frac{J_\circ L}{۲}\sqrt{a^۲+(z+\frac{L}{۲})^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» پوسته استوانه‌ای را به حلقه‌هایی با ضخامت dz' تجزیه می‌کنیم. پتانسیل مغناطیسی اسکالر در نقطه z ناشی از یک حلقه با جریان $I=J_\circ dz'$ و واقع در ارتفاع z'، برابر است با:

$$dV_m=\frac{J_\circ dz'}{۲}(۱-\frac{z-z'}{\sqrt{a^۲+(z-z')^۲}})$$

$$V_m=\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{J_\circ dz'}{۲}(۱-\frac{z-z'}{\sqrt{a^۲+(z-z')^۲}})=\frac{J_\circ}{۲}L-\frac{J_\circ}{۲}\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{z-z'}{\sqrt{a^۲+(z-z')^۲}}dz'$$

$$V_m=\frac{J_\circ}{۲}L+\frac{J_\circ}{۲}\sqrt{a^۲+(z-z')^۲}\Big]_{z'=-\frac{L}{۲}}^{z'=\frac{L}{۲}}=\frac{J_\circ}{۲}(L+\sqrt{a^۲+(z-\frac{L}{۲})^۲}-\sqrt{a^۲+(z+\frac{L}{۲})^۲})$$

فصل دوازدهم

«مواد مغناطیسی ــ مغناطیس‌شدگی»

مقدمه

در فصل مربوط به الکتریسیته ساکن، گفتیم که مواد از نظر الکتریکی به سه دسته: **عایق، هادی** و **نیمه‌هادی** تقسیم می‌شوند و در آنجا عایق و هادی‌ها را بررسی کردیم. در مغناطیس نیز، مواد به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند که عبارتند از: ۱ــ **دیامغناطیس**، ۲ــ **پارامغناطیس**، ۳ــ **فرومغناطیس**

قبل از این که درباره این مواد بحث کنیم، اول توضیح مختصری در مورد ساختار مواد از دید مغناطیسی ارائه و رفتار ماده را از دید میکروسکوپی بررسی می‌کنیم.

همانطور که می‌دانید اجزاء تشکیل‌دهنده مواد، اتم‌ها هستند و هر اتم از یک هسته در مرکز آن و تعدادی الکترون که در مدارهای دایره‌ای شکل مخصوصی به دور هسته در حال گردش هستند، ساخته شده است. برای درک بهتر مطلب بدون داشتن میکروسکوپ، خورشید و سیاره‌هایی که به دور خورشید در حال گردش هستند را تصور کنید (خورشید، هسته اتم و کره‌ها، الکترون‌های آنها می‌باشند). به حرکت الکترون‌ها به دور هسته (کره‌ها به دور خورشید) حرکت مداری گفته می‌شود (که سال را به‌وجود می‌آورد). در عین حال، الکترون و هسته نیز به دور خود در حال چرخیدن هستند که به آن، حرکت چرخشی گفته می‌شود (پیداش شب و روز).

بنابراین الکترون‌های یک اتم دارای دو گشتاور کلی می‌باشند: ۱ــ **گشتاور مداری** ۲ــ **گشتاور چرخشی**

گشتاور مداری یک الکترون به نوع اتم و شعاع مداری که در آن واقع است، بستگی دارد و گشتاور چرخشی هر الکترون یکی از دو مقدار $\pm ۹/۳\times ۱۰^{-۲۴}\ (\frac{A}{m})$ می‌باشد. هسته اتم به دلیل جرم سنگینش فقط دارای گشتاور چرخشی است، پس سرعت چرخش آن بسیار کوچکتر از سرعت چرخش الکترون می‌باشد؛ در نتیجه می‌توان گشتاور چرخشی هسته را در برابر گشتاور چرخشی الکترون نادیده گرفت.

بررسی مواد مغناطیسی

وقتی یک جسم در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، ذرات بارداری که در اتم‌های جسم قرار دارند از خود عکس‌العمل نشان داده و این عکس‌العمل باعث به وجود آمدن میدان (جریان) جدیدی می‌شود. ویژگی‌های این میدان جدید به خواص مغناطیسی جسم بستگی دارد.

الکترون در یک اتم، دو نوع حرکت دارد. یک حرکت مداری به دور هسته اتم و یک حرکت چرخشی به دور خود (اسپین). وقتی الکترون‌ها به دور هسته خود حرکت مداری داشته باشند، باعث به وجود آمدن گشتاور مغناطیسی می‌شوند و هنگامی که از طریق اسپین خود حرکت چرخشی داشته باشند، هم یک گشتاور مغناطیسی ایجاد می‌کنند. این دو گشتاور مغناطیسی (چرخشی و مداری) با هم، گشتاور مغناطیسی کل الکترون را مشخص می‌کند. بر اساس این گشتاور کل است که می‌توانیم مواد مغناطیسی را تقسیم‌بندی کنیم. اگر اتم‌های یک ماده گشتاور کل غیر صفر داشته باشند، به آن ماده مغناطیسی می‌گویند مانند مواد پارامغناطیس و فرومغناطیس ولی اگر اتم‌های آن دارای گشتاور کل صفر باشند، به آن ماده غیرمغناطیسی می‌گوییم؛ مانند مواد دیامغناطیس. در حالت غیرمغناطیسی گشتاورهای چرخشی و مداری همدیگر را خنثی کرده‌اند. به طور کلی سه پدیده مغناطیسی اصلی به نامهای دیامغناطیسی، پارامغناطیسی و فرومغناطیسی، شناخته شده‌اند که پدیده اول به حرکت مداری الکترون‌ها نسبت داده می‌شود و دو پدیده دیگر به دلیل حرکت چرخشی الکترون‌ها است. علاوه بر این پدیده‌ها، دو پدیده دیگر هم به نام‌های ضد فرو مغناطیسی و فری مغناطیسی داریم که شکل‌های تغییر یافته پدیده فرو مغناطیسی محسوب می‌شوند.

به طور خلاصه برای مواد دیامغناطیس می‌توانیم ویژگی‌های زیر را بگوییم:

۱ــ در این مواد گشتاور مغناطیسی ناشی از حرکت مداری و حرکت اسپینی الکترون‌ها کاملاً همدیگر را حذف می‌کنند، بنابراین گشتاور مغناطیسی اتم‌های آن صفر می‌باشد.

۲ــ تمام مواد اثر دیامغناطیس را دارند ولی در بعضی مواد اثرات قوی‌تری این اثر را می‌پوشانند.

۳ــ مواد دیامغناطیس دارای ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی کوچک‌تر از یک می‌باشند $(\mu_r < ۱)$.

۴ــ مواد دیامغناطیس مواد خطی می‌باشند یعنی رابطه $\vec{B} = \mu_\circ \mu_r \vec{H}$ در آن‌ها صدق می‌کند.

۵ــ مواد دیامغناطیس تابع دما نمی‌باشند.

به‌طور خلاصه برای مواد پارامغناطیس ویژگی‌های زیر را داریم:

۱ـ در این مواد گشتاور مغناطیسی ناشی از حرکت مداری و حرکت اسپینی الکترون‌ها همدیگر را حذف نمی‌کنند، بنابراین گشتاور مغناطیسی اتم‌های آن مخالف صفر می‌باشد.

۲ـ در مواد پارامغناطیس، μ اندکی بزرگ‌تر از $\mu_\circ$ می‌باشد $(\mu_r > ۱)$.

۳ـ این مواد خطی هستند، یعنی رابطه $\vec{B} = \mu_\circ\mu_r\vec{H}$ برای آن‌ها معتبر می‌باشد.

۴ـ تابع دما می‌باشند. چون هر چه دما افزایش پیدا کند آرایش دوقطبی‌ها بیشتر به هم می‌خورد و μ_r به یک نزدیک‌تر می‌شود.

به‌طور خلاصه برای مواد فرومغناطیس ویژگی‌های زیر را داریم:

۱ـ توسط میدان مغناطیسی خارجی به شدت مغناطیده می‌شوند.

۲ـ هنگام برداشته شدن میدان مغناطیسی خارجی بخش بزرگی از مغناطیس خود را حفظ می‌کنند.

۳ـ در دمای بالاتر از دمای کوری تبدیل به پارامغناطیس می‌شوند.

۴ـ تابع دما می‌باشند.

۵ـ غیرخطی هستند یعنی رابطه $\vec{B} = \mu_\circ\mu_r\vec{H}$ برای آن‌ها معتبر نمی‌باشد.

۶ـ دارای μ_r بسیار بزرگ‌تر از یک می‌باشند.

درسنامه: مغناطیس شدگی

اگر اتم را به‌صورت کلاسیکی به‌صورت یک حلقه جریان فرض کنیم می‌توانیم هر اتم را به‌صورت یک دوقطبی مغناطیسی $\vec{m}_i$ در نظر بگیریم. این دوقطبی‌های مغناطیسی در حالتی که هیچ میدان مغناطیسی خارجی به ماده اعمال نشود، در جهات مختلف توزیع می‌شوند که همدیگر را خنثی می‌کنند و گشتاور مغناطیسی کل صفر خواهد شد. با اعمال میدان مغناطیسی $\vec{B}$، گشتاور $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ بر روی هر اتم اعمال می‌شود، که موجب می‌شود گشتاور دوقطبی‌ها در راستای میدان مغناطیسی قرار گیرد. در این حالت ماده مغناطیده می‌شود. برای بیان میزان مغناطیس‌شدگی از بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ استفاده می‌کنیم. بردار مغناطیس به‌صورت میزان گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم تعریف می‌شود. اگر در واحد حجم Nتا اتم موجود باشد، بردار مغناطیس‌شدگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to \circ} \frac{\sum_{i=۱}^{N\Delta V} \vec{m}_i}{\Delta V}$$

از لحاظ ماکروسکوپی به‌جای اینکه اثر تک‌تک دوقطبی‌های مغناطیسی را در نظر بگیریم، می‌توان ماده را به‌صورت دو جریان سطحی و حجمی مقید مدل‌سازی کنیم.

چگالی جریان سطحی مقید: $\vec{J}_{sb} = \vec{M} \times \hat{n}$ چگالی جریان حجمی مقید: $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

نکته۱: در حالت کلی گشتاور دوقطبی برای یک توزیع جریان سطحی $\vec{k}$ و حجمی $\vec{J}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{m} = \frac{۱}{۲}\iiint \vec{r}' \times \vec{J}\, dv \quad , \quad \vec{m} = \frac{۱}{۲}\iint \vec{r}' \times \vec{k}\, ds$$

مثال۱: یک کره به شعاع a از ماده مغناطیسی با بردار چگالی دو قطبی مغناطیسی ثابت $\vec{M} = M_\circ\hat{a}_x$ وجود دارد. $\vec{J}_m$ چگالی جریان مقید حجمی و $\vec{J}_{sm}$ چگالی جریان مقید سطحی در نقطه $(\circ, a, \circ)$ چقدر است؟

۱) $\vec{J}_{sm} = M_\circ\hat{a}_z, \vec{J}_m = \circ$ ۲) $\vec{J}_{sm} = \frac{M_\circ}{۲}\hat{a}_z, \vec{J}_m = \circ$ ۳) $\vec{J}_{sm} = \circ, \vec{J}_m = \frac{M_\circ}{۲}\hat{a}_z$ ۴) $\vec{J}_{sm} = M_\circ\hat{a}_z, \vec{J}_m = M_\circ\hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که بردار $\vec{M}$ دارای اندازه یکنواخت می‌باشد بنابراین کرل آن برابر صفر است:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \circ$$

از طرفی بردار واحد عمود بر سطح کره $\hat{a}_r$ می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{a}_n = M_\circ\hat{a}_x \times \hat{a}_r$$

با تجزیه بردار $\hat{a}_r$ خواهیم داشت:

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y + \cos\theta\hat{a}_z$$

بنابراین:

$$\vec{J}_{sm} = M_\circ\hat{a}_x \times [\sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y + \cos\theta\hat{a}_z]$$

$$\vec{J}_{sm} = M_\circ\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_z - M_\circ\cos\theta\hat{a}_y$$

در نقطه $(\circ, a, \circ)$ داریم:

$$\varphi = \frac{\pi}{۲}, \theta = \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین چگالی جریان مقید سطحی برابر است با:

$$\vec{J}_{sm} = M_\circ\hat{a}_z$$

فصل سیزدهم

«شرایط مرزی در مغناطیس ساکن»

مقدمه

در بخش مربوط به الکتریسیته ساکن، دیدیم که اگر دو ماده متفاوت در کنار یکدیگر قرار بگیرند، با استفاده از شرایط مرزی می‌توان میدان‌های الکتریکی و ... را در طرفین مرز مشترک دو ماده، به یکدیگر مرتبط ساخت. در مبحث الکتریسیته ساکن شرایط مرزی را به طور کامل یاد گرفتید؛ خب! کافی است دانسته‌های خود را به کار ببرید و شرایط مرزی را برای مبحث مغناطیس نیز به دست آورید.

درسنامه (۱): شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی

اگر دو محیط همگن مغناطیسی یکی با نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و دیگری با نفوذپذیری مغناطیسی μ_2 در کنار یکدیگر قرار بگیرند، برای تعیین شرایط مرزی آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱ــ به دست آوردن مؤلفه‌های عمود بر مرز

برای به دست آوردن مؤلفه‌های عمود بر مرز، استوانه کوچکی که ارتفاع آن به سمت صفر میل می‌کند را در محل موردنظر در نظر می‌گیریم. همانطور که می‌دانید، شار مغناطیسی گذرنده از هر سطح بسته‌ای صفر است. (زیرا $\nabla.\vec{B}=0$)

پس می‌توان نوشت:

$$\oint_S \vec{B}.d\vec{s}=0 \rightarrow B_{n1}\Delta S - B_{n2}.\Delta S \rightarrow \boxed{B_{n1}=B_{n2}}$$

دقت کنید که مؤلفه‌های عمودی $\vec{B}$ در مرز همواره پیوسته هستند.

از همین فرمول کوچک می‌توانیم مؤلفه‌های عمودی $\vec{H},\vec{M}$ را هم پیدا کنیم. رابطه‌ی زیر را ببینید.

$$\boxed{\mu_1 H_{n1}=\mu_2 H_{n2}}$$

حواستان باشد که مؤلفه‌های عمودی میدان مغناطیسی (H_{n1},H_{n2}) پیوسته نیستند و به نسبت μ_1,μ_2 تغییر می‌کنند.

با جایگذاری $\frac{\vec{M}}{\chi_m}$ به جای $\vec{H}$، به فرمول مقابل می‌رسیم.

$$\mu_1\frac{M_{n1}}{\chi_{m1}}=\mu_2\frac{M_{n2}}{\chi_{m2}}$$

همان‌طور که می‌بینید مؤلفه‌های عمودی $\vec{M}$ نیز مانند $\vec{H}$ در مرز دارای ناپیوستگی می‌باشند.

مثال ۱: محور z حامل جریان الکتریکی I می‌باشد. ناحیه $x>0$ فضای آزاد و ناحیه $x<0$ محیطی مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری μ است. مقدار چگالی شار مغناطیسی در هر یک از دو ناحیه با کدام‌یک از گزینه‌های زیر داده می‌شود؟

۱) در هر دو ناحیه برابر $\frac{I}{\pi r}\frac{\mu\mu_0}{(\mu+\mu_0)}$

۲) در ناحیه $x>0$ برابر $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ و در ناحیه $x<0$ برابر $\frac{\mu I}{2\pi r}$

۳) در هر دو ناحیه برابر $\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu+\mu_0}{2})$

۴) در ناحیه $x>0$ برابر $\frac{\mu_0 I}{\pi r}$ و در ناحیه $x<0$ برابر $\frac{\mu I}{\pi r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق قانون مداری آمپر خواهیم داشت:

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l}=I \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} H_۱ rd\varphi+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} H_۲ rd\varphi=I \Rightarrow H_۱(\pi r)+H_۲(\pi r)=I$$

در مرز دو محیط، میدان‌ها بر مرز عمود می‌باشند، بنابراین می‌توان از شرط مرزی مؤلفه‌های عمودی میدان استفاده کرد.

طبق شرایط مرزی $B_{n۲}=B_{n۱}$ و لذا می‌توان نوشت:

$$\mu_\circ H_۱=\mu H_۲ \Rightarrow H_۲=\frac{\mu_\circ}{\mu}H_۱$$

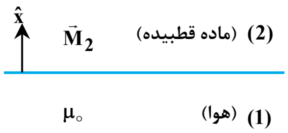
با جایگذاری مقدار فوق در رابطه مربوط به قانون آمپر، خواهیم داشت:

$$H_۱(\pi r)+\frac{\mu_\circ}{\mu}H_۱(\pi r)=I \Rightarrow H_۱=\frac{\mu I}{(\mu+\mu_\circ)\pi r}$$

بنابراین چگالی شار مغناطیسی در هر دو محیط برابر است با:

$$\vec{B}_۱=\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ \mu I}{(\mu_\circ+\mu)\pi r}\hat{a}_\varphi$$

مثال ۲: کدام‌یک از روابط زیر صحیح هستند؟



۱) $\hat{x}.(\vec{H}_۲-\vec{H}_۱)=\hat{x}.\vec{M}_۲$　۲) $\hat{x}\times(\vec{H}_۲-\vec{H}_۱)=\hat{x}.\vec{M}_۲$

۳) $\hat{x}.(\vec{H}_۱-\vec{H}_۲)=\hat{x}.\vec{M}_۲$　۴) $\hat{x}\times(\vec{H}_۱-\vec{H}_۲)=\hat{x}.\vec{M}_۲$

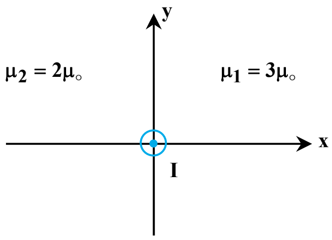
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که:

$$B_{۱x}=B_{۲x} \Rightarrow \hat{x}.(\vec{B}_۱-\vec{B}_۲)=\circ$$

از طرفی: $\vec{B}_۱=\mu_\circ\vec{H}_۱$ و $\vec{B}_۲=\mu_\circ(\vec{H}_۲+\vec{M}_۲)$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{x}.[\mu_\circ\vec{H}_۱-\mu_\circ\vec{H}_۲-\mu_\circ\vec{M}_۲]=\circ \Rightarrow \hat{x}.[\vec{H}_۱-\vec{H}_۲]=\hat{x}.\vec{M}_۲$$

مثال ۳: در ناحیه $x>\circ$ از فضا ماده‌ای با نفوذپذیری $\mu_۱=۳\mu_\circ$ و در ناحیه $x<\circ$ ماده‌ای با نفوذپذیری $\mu_۲=۲\mu_\circ$ پر شده است. یک سیم باریک که حامل جریان I است، روی محور z واقع است. میدان $\vec{H}$ در $x>\circ$ به کدام صورت است؟



۱) $\frac{۳I}{۵\pi r}\hat{\varphi}$　۲) $\frac{۳I}{۱\circ\pi r}\hat{\varphi}$

۳) $\frac{۲I}{۵\pi r}\hat{\varphi}$　۴) $\frac{۲I}{۱\circ\pi r}\hat{\varphi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قاعده دست راست درمی‌یابیم که میدان عمود بر مرز مشترک است، پس از شرایط مرزی $B_{۱n}=B_{۲n} \Rightarrow \vec{B}_۱=\vec{B}_۲$، می‌فهمیم که میدان B در دو محیط یکسان است. حال از قانون آمپر استفاده می‌کنیم.

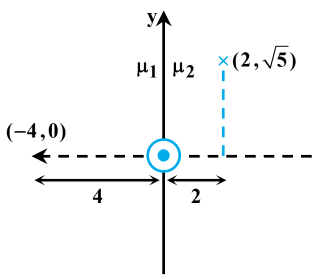
$$\oint H.dl=I \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} H_۱.rd\varphi+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} H_۲.rd\varphi=I \Rightarrow \vec{H}_۱(\pi r)+\vec{H}_۲(\pi r)=I \Rightarrow (\frac{B_۱}{\mu_۱}+\frac{B_۲}{\mu_۲})\pi r=I$$

$$B_۱=B_۲ \Rightarrow B(\frac{۱}{\mu_۱}+\frac{۱}{\mu_۲})\pi r=I \Rightarrow \vec{B}.(\frac{\mu_۱+\mu_۲}{\mu_۱\times\mu_۲})\pi r=I \Rightarrow \vec{B}=\frac{(\mu_۱\times\mu_۲)}{\mu_۱+\mu_۲}\frac{I}{\pi r} \Rightarrow \vec{H}_۱=\frac{B}{\mu_۱}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_۱=\frac{\mu_۲}{\mu_۱+\mu_۲}\frac{I}{\pi r}=\frac{۲\mu_\circ}{۲\mu_\circ+۳\mu_\circ}\frac{I}{\pi r}=\frac{۲}{۵}\frac{I}{\pi r}\hat{\varphi}$$

مثال ۴: یک سیم بی‌نهایت طویل حامل جریان I، مطابق شکل زیر، منطبق بر محور z و در مرز دو محیط با ضرایب نفوذپذیری $\mu_۱=۲\mu_\circ$ ، $\mu_۲=۳\mu_\circ$ قرار دارد. مرز دو ناحیه بر صفحه $x=\circ$ منطبق است. شدت میدان مغناطیسی $(H_۱)$ در $(x_۱=۲\ ,\ y_۱=\sqrt{۵})$ چند برابر شدت میدان مغناطیسی $(H_۲)$ در $(x_۲=-۴\ ,\ y_۲=\circ)$ است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)



۱) $\frac{۸}{۹}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) ۲

فصل چهاردهم

«القای الکترومغناطیسی»

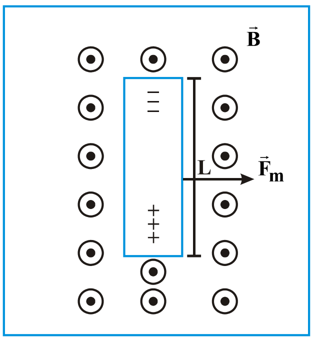
مقدمه

تا اینجا با الکتریسیته ساکن و مغناطیس ساکن آشنا شدیم. وجه مشترک فصل‌های قبلی این بود که میدان‌ها با زمان تغییر نمی‌کردند. در این فصل قصد داریم برخی از عوامل مؤثر بر مسائل الکترومغناطیسی را با زمان تغییر دهیم و آثار آن‌ها را مشاهده کنیم. با ما همراه باشید!

درسنامه (۱): قانون فاراده

اگر به دو سر یک سیم رسانا ولتاژ اعمال کنیم (میدان الکتریکی اعمال کنیم)، جریانی در سیم رسانا ایجاد می‌شود، که این جریان الکتریکی منجر به تولید میدان مغناطیسی می‌شود. حال سؤال این است که آیا می‌توان با میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی تولید کرد؟

فارادی نشان داد که با استفاده از یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان می‌توان میدان الکتریکی تولید کرد به این پدیده القای الکترومغناطیسی می‌گویند.



اگر یک میله رسانا به طول L با سرعت V در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت کند، به ذرات باردار q در داخل رسانا نیروی لورنتس $\vec{F}_m = q\vec{V}\times\vec{B}$ وارد می‌شود. این نیرو باعث راندن بارهای مثبت به سمت پایین و بارهای منفی به سمت بالا می‌شود. حرکت بارهای الکتریکی باعث ایجاد میدان الکتریکی خواهد شد که به همین دلیل یک نیروی الکتریکی $\vec{F}_e = \vec{E}q$ به سمت بالا ایجاد می‌شود. حرکت بارهای مثبت و منفی تا وقتی ادامه دارد که اندازه نیروی الکتریکی و مغناطیسی با هم برابر شوند. یعنی:

$$E = VB \leftarrow qVB = Eq$$

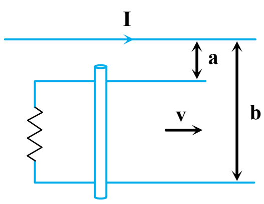
در این حالت یک اختلاف پتانسیل بین دو سر میله ایجاد می‌شود که به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\Delta V = EL = BLV$$

به این اختلاف پتانسیل، نیرو محرکه القایی حرکتی می‌گویند، چرا که در اثر حرکت میله به‌وجود آمده است. رابطه کلی نیرو محرکه القایی برابر است با:

$$\Delta V = \oint(\vec{V}\times\vec{B}).d\vec{L}$$

مثال ۱: یک میلهٔ مسی با سرعت v روی ریل‌های یک رسانا که موازی می‌باشند حرکت می‌کند. از سیمی به موازات این ریل‌ها مطابق شکل جریان I عبور می‌کند. نیروی محرکهٔ القایی ε در میله برابر است با:



۱) $\frac{\mu_\circ Iv}{4\pi}\ln\frac{a}{b}$

۲) $\frac{\mu_\circ Iv}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$

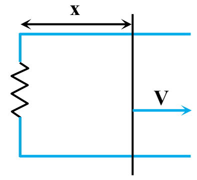
۳) $\frac{\mu_\circ Iv}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

۴) $\frac{\mu_\circ Iv}{\pi}\ln\frac{a}{b}$

پاسخ: گزینه «۳» برای به دست آوردن emf ابتدا باید شار گذرنده از سطح محدود بین رسانا و میله را به دست آوریم. چون میله با سرعت v حرکت می‌کند، شار گذرنده از سطح مدار متغیر با زمان خواهد بود. برای به دست آوردن شار، ابتدا با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی حاصل از سیم جریان را به دست می‌آوریم:

$$\oint\vec{B}.d\vec{l} = \mu_\circ I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}$$

حال شار گذرنده از سطح محدود بین رسانا و میله را محاسبه می‌کنیم:



$$x = vt \Rightarrow \circ < x < vt$$

$$\phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{s} = \int_a^b \int_\circ^{Vt} \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} dx\,dr = \int_a^b \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} vtdr \Rightarrow \phi = \frac{\mu_\circ Ivt}{۲\pi} \ln\frac{b}{a}$$

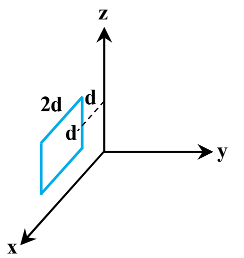
که در نتیجه برای emf مقدار مقابل به دست می‌آید:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{\mu_\circ Iv}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$$

مثال ۲: **سیمی با جریان I در جهت z مثبت روی محور zها قرار گرفته است. درصفحه $y = \circ$، سیمی به صورت مستطیل به اضلاع a و b طوری واقع شده است که طول a موازی و به فاصله d از محور zها باشد. اگر $b = ۲a = ۲d$ فرض شود، چند درصد فلوی مغناطیسی در این سیم کاهش می‌یابد. اگر مستطیل در صفحه $y = \circ$ حول محور ثقل آن یک چهارم دور گردش نماید؟** (مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{۲\ln\frac{۳}{۵}}{\ln ۳}$ ۲) $\dfrac{۲\ln\frac{۵}{۳}}{\ln ۳}$ ۳) $\dfrac{\ln\frac{۲۷}{۲۵}}{\ln ۳}$ ۴) $\dfrac{\ln\frac{۲۵}{۲۷}}{\ln ۳}$

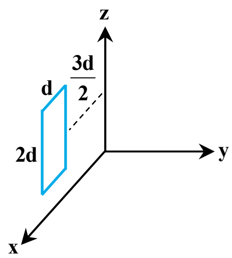
پاسخ: گزینه «۲» مطابق شکل در حالت اول فلوی مغناطیسی برابر است با:



$$\Phi_۱ = \int_{s_۱} \vec{B}_۱.d\vec{s}_۱ = \int_z\int_x \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\frac{dx}{x}dz$$

$$\Phi_۱ = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi} d\ln(\frac{۳d}{d}) = \frac{\mu_\circ Id}{۲\pi}\ln ۳$$

در حالت دوم فلوی مغناطیسی برابر است با:



$$\Phi_۲ = \int_{s_۲} \vec{B}_۲.d\vec{s}_۲ = \int_z\int_x \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\frac{dx}{x}dz$$

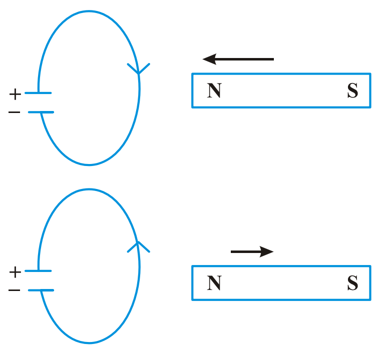
$$\Phi_۲ = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}(۲d)\ln\left(\frac{۵\frac{d}{۲}}{۳\frac{d}{۲}}\right) = \frac{\mu_\circ Id}{\pi}\ln(\frac{۵}{۳})$$

نسبت فلوی مغناطیسی در حالت دوم به حالت اول برابر است با:

$$\frac{\Phi_۲}{\Phi_۱} = \frac{۲\ln(\frac{۵}{۳})}{\ln(۳)}$$

قانون لنز

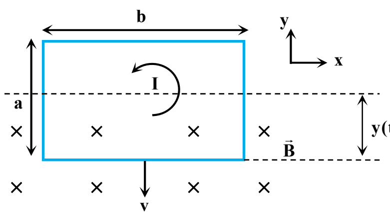
در آزمایش فارادی، اگر مطابق شکل زیر آهنربا را به حلقه نزدیک کنیم، و سپس از آن دور کنیم، ولتاژی که به علت تغییر شار مغناطیسی گذرنده از حلقه در دو سر حلقه القا می‌شود، تغییر علامت می‌دهد.



طبق قانون لنز، جهت جریان القاشده در حلقه به‌گونه‌ای است که با تغییر شار مغناطیسی گذرنده از حلقه مخالفت می‌کند. بنابراین وقتی آهنربا را به حلقه نزدیک می‌کنیم شار گذرنده از حلقه زیاد می‌شود. پس طبق قانون لنز جهت جریان القایی طوری خواهد بود که با افزایش شار مخالفت کند. در حالتی که آهنربا را دور کنیم شار عبوری از حلقه کاهش می‌یابد و جهت جریان القایی طوری خواهد بود که با کاهش شار مخالفت کند. نیرو محرکه القایی از رابطه $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$ به‌دست می‌آید.

که ϕ شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه است و از رابطه $\phi = \iint \vec{B}.d\vec{s}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۳: **یک حلقه چهارگوش با ابعاد a و b دارای مقاومت R است و مطابق شکل در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند. جریان القایی در حلقه چقدر است؟**



۱) $\dfrac{vb^۲B}{R}$ ۲) $\dfrac{vbB}{R}$

۳) $\dfrac{vb^۲B^۲}{R}$ ۴) $\dfrac{vb^۲B^۲}{۲R}$

مدرسان شریف

فصل پانزدهم

«انرژی و نیروی مغناطیسی»

درسنامه (۱): انرژی مغناطیسی

همان‌گونه که برای تشکیل سیستمی از بارهای نقطه‌ای و به طور کلی تشکیل یک توزیع پیوسته بار نیاز به انجام کار داریم، برای تشکیل سیستمی مرکب از حلقه‌های جریان هم باید کار انجام شود. در این مورد کار انجام شده را می‌توانیم به منزله انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی تعبیر کنیم. بنابراین انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستمی که از n حلقه، حامل جریان‌های $I_1, I_2, \ldots, I_n$ تشکیل شده است به صورت زیر می‌باشد که با نماد W_m نشان داده شده است:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} L_{jj} I_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk} I_j I_k$$

منظور از L_{jj} ضریب خودالقایی حلقه jام و M_{jk} $(j \neq k)$ ضریب القاء متقابل بین حلقه jام و kام است. I_j و I_k نیز به ترتیب جریان حلقه jام و kام می‌باشند.

در برخی مسائل، با توجه به پارامترهای داده شده در صورت مسأله، به نظر می‌رسد که محاسبه انرژی مغناطیسی از طریق شار مغناطیسی ساده‌تر باشد. پس می‌توانیم رابطه فوق را برحسب شار مغناطیسی گذرنده از حلقه‌ها، به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \phi_j}$$

ϕ_j در رابطه‌ی بالا، شار کل گذرنده از حلقه jام است. در حالت خاص $n = 2$ خواهیم داشت:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + M_{12} I_1 I_2}$$

حالا اگر نتیجه به‌دست آمده از رابطه $W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \phi_j$ را برای یک جریان که به طور پیوسته با چگالی $\vec{J}$ در حجم V توزیع شده باشد، تعمیم دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\iint_S \phi \vec{J} . d\vec{s}}$$

و از طرفی طبق رابطه $\phi = \iint_S \vec{B} . d\vec{s} = \oint_{\partial s} \vec{A} . d\vec{l}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\iiint_V (\vec{J} . \vec{A}) dv}$$

به همین ترتیب، برای یک توزیع سطحی جریان با چگالی $\vec{J}_s$ روی سطح S، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی چنین خواهد بود:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\iint_S \vec{J}_s . \vec{A} ds}$$

خب! حالا می‌توانیم با استفاده از روابطی که برای انرژی مغناطیسی گفتیم یعنی همین روابط بالا، ثابت کنیم که چگالی انرژی مغناطیسی در یک محیط بعد از این که میدان مغناطیسی از B_1 به B_2 افزایش یابد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\frac{dW_m}{dv} = \int_{B_1}^{B_2} H dB}$$

از رابطه فوق روی کل حجم موردنظر انتگرال بگیریم، انرژی مغناطیسی ذخیره شده برابر است با:

$$W_m = \int_V \int_{B_1}^{B_2} H dB dv$$

در محیط‌های غیرخطی چگالی انرژی مغناطیسی را از رابطه بالا محاسبه می‌کنیم.

در صورتی که محیط خطی باشد داریم $H = \frac{B}{\mu}$ و با جایگذاری H بر حسب B در انتگرال فوق به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

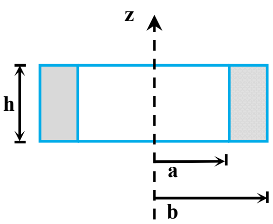
$$W_m = \int_V \int_{B_1}^{B_2} \frac{B}{\mu} dB dv = \int_V \int_{H_1}^{H_2} \mu H dH dv$$

اگر فرض کنیم میدان مغناطیسی اولیه صفر باشد $(B_1 = 0)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{B}|}{\mu} dV = \frac{1}{2}\int_V \mu |\vec{H}| dv}$$

نکته۱: انرژی ذخیره‌شده دایپل مغناطیسی $\vec{m}$ که در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گرفته است، از رابطه $W_m = -\vec{m}.\vec{B}$ به‌دست می‌آید.

مثال۱: چه مقدار انرژی باید مصرف کنیم تا جریان ثابت I در یک چنبره با هستهٔ هوایی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و سطح مقطع مستطیلی به ابعاد $(b-a)$ و h مطابق شکل با N دور سیم‌پیچی برقرار شود؟ فرض بر این است که سیم‌پیچی منظم باشد آنچنانکه تنها مؤلفهٔ B_φ داخل هسته حضور داشته باشد و در خارج چنبرهٔ میدان صفر باشد.



۱) $W = \frac{1}{4\pi}\mu_0 N^2 I^2 h \ln(\frac{b-a}{a}) J$

۲) $W = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 I^2 h \ln(\frac{b-a}{a}) J$

۳) $W = \frac{1}{4\pi}\mu_0 N^2 I^2 h \ln\frac{b}{a} J$

۴) $W = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 I^2 h \ln\frac{b}{a} J$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای به دست آوردن انرژی از رابطه $W = \frac{1}{2}LI^2$ استفاده می‌کنیم. ابتدا باید L را به دست آوریم، برای به‌دست آوردن L نیاز به میدان مغناطیسی درون چنبره داریم:

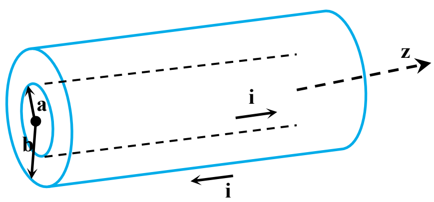
$$H_\varphi = \frac{NI}{2\pi r}$$

با استفاده از تعریف ضریب القایی داریم:

$$\phi = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L = \frac{N\psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{4\pi}\mu_0 N^2 I^2 h \ln\frac{b}{a}$$

مثال۲: یک کابل هم‌محور دایره‌ای بسیار طویل با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل مفروض است. از هادی داخلی و خارجی آن جریان کل i در جهت‌های مخالف هم و به موازات محورکابل عبور می‌کند. انرژی مغناطیسی ذخیره شده بر واحد طول کابل کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 i^2 \ln\frac{b}{a}}{2\pi}$

۲) $\frac{\mu_0 i^2 \ln\frac{a}{b}}{4\pi}$

۳) $\frac{\mu_0 i^2 \ln\frac{b}{a}}{4\pi}$

۴) $\frac{\mu_0 i^2 \ln\frac{b}{a}}{8\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از تعریف انرژی مغناطیسی داریم:

$$W_m = \frac{1}{2}\int \frac{B^2}{\mu_0} dv = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\int_a^b \int_0^1 \frac{dzdr}{r} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

که در آن $dv = 2\pi r dr dz$ و $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (چگالی شار مغناطیسی داخل کابل) است.

مدرسان شریف

فصل شانزدهم

«معادلات ماکسول»

مقدمه

در فصل گذشته از قانون القای فاراده صحبت کردیم. که هر میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می‌کند و خواهیم دید که هر میدان الکتریکی متغیر هم تولید میدان مغناطیسی می‌کند. معادلات حاکم بر الکتریسیته ساکن و مغناطیسیته ساکن، با وجود این دو حقیقت تغییر می‌کنند و معادلات ماکسول حاصل انتهایی کار است. پس از بیان معادلات ماکسول و توابع پتانسیل، معادلات موج مربوط به آن را محاسبه می‌کنیم و در ادامه جواب هماهنگ سینوسی برای این معادلات را به دست می‌آوریم.

درسنامه (۱): مفاهیم اولیه معادلات ماکسول

اصل موضوعه اساسی القای الکترومغناطیسی می‌گوید که هر میدان مغناطیسی متغیر با زمان، یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. پس معادلات در حالت متغیر با زمان را می‌توانیم به این صورت بنویسیم که:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

از طرفی می‌دانیم که اصل بقای بار در تمام زمان‌ها برقرار است و به صورت معادله پیوستگی مقابل بیان می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

اما در حالت‌های متغیر با زمان (یعنی $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$)، اصل بقای بار با رابطه $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ در تناقض است، چرا؟ برای اینکه طبق قضایای آنالیز برداری، دیورژانس کرل هر میدان برداری، برابر صفر است و از این رو:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{H})=0\neq-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

برای رفع این تناقض ناچاریم معادله بالا را به صورت مقابل بازنویسی کنیم:

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{H})=0=\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

در این صورت طبق قانون گاوس $(\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho)$ داریم:

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{H})=\vec{\nabla}.(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$$

پس در حالت تغییرپذیر با زمان، شکل دیفرانسیلی قانون آمپر به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

در رابطه بالا $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ را چگالی جریان جابه‌جایی می‌نامند. و این که $\vec{J}$ چگالی جریانهای آزاد را نشان می‌دهد که ممکن است شامل جریان انتقالی $(\rho\vec{V})$ ناشی از حرکت توزیع بارهای آزاد و جریان هدایتی $(\sigma\vec{E})$ ناشی از حضور میدان الکتریکی در محیط هادی باشد. بنابراین به طور خلاصه می‌توانیم این گونه بنویسیم:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\&\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\&\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\\&\vec{\nabla}.\vec{B}=0\end{aligned}}$$

به معادلات بالا، معادلات ماکسول می‌گوییم. این چهار معادله به همراه معادله پیوستگی $(\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t})$ و معادله نیروی لورنتس، $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$، اساس نظریه الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند. هرچند برای حل این معادلات، به روابط ساختمندی $B[H]$ و $E[D]$ هم نیاز داریم.

مثال۱: یک موج الکترومغناطیسی در خلأ توسط میدان الکتریکی $\vec{E} = E_\circ \sin(\omega t + \beta z)\hat{x}$ مشخص شده است. القای مغناطیسی $\vec{B}$ کدام است؟

۱) $\vec{B} = \frac{\beta E_\circ}{\omega}\sin(\omega t + \beta z)\hat{a}_y$
۲) $\vec{B} = \frac{\beta E_\circ}{\omega}\sin(\omega t + \beta z)\hat{a}_z$
۳) $\vec{B} = -\frac{\beta E_\circ}{\omega}\sin(\omega t + \beta z)\hat{a}_y$
۴) $\vec{B} = -\frac{\beta E_\circ}{\omega}\sin(\omega t + \beta z)\hat{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از معادله ماکسول می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \hat{a}_y \beta E_\circ \cos(\omega t + \beta z) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

از حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\vec{B} = -\hat{a}_y \beta E_\circ \int_\circ^t \cos(\omega t + \beta z)dt = -\hat{a}_y \frac{\beta E_\circ}{\omega}\sin(\omega t + \beta z)$$

مثال۲: یک میدان الکتریکی در یک ناحیه معین به وسیله روابط $\begin{cases} E_x = \circ \\ E_y = \circ \\ E_z = kz \end{cases}$ معین می‌شود که k یک ثابت غیرصفر می‌باشد، کدام جمله زیر درست می‌باشد؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) در این ناحیه یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان وجود دارد.
۲) در این ناحیه یک چگالی بار الکتریکی وجود دارد.
۳) در این ناحیه میدان الکتریکی نمی‌تواند بر حسب زمان ثابت باشد.
۴) هیچ‌یک از جملات فوق صحیح نمی‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به میدان الکتریکی داده شده، می‌توانیم با استفاده از معادلات ماکسول درستی گزینه‌ها را بررسی کنیم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \circ & \circ & kz \end{vmatrix} = \circ \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \circ$$

بنابراین میدان مغناطیسی از زمان مستقل می‌باشد چون مشتق آن نسبت به زمان را صفر به‌دست آوردیم.

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow k = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \rho = k\varepsilon$$

در این ناحیه یک چگالی بار الکتریکی وجود دارد بنابراین گزینه ۲ درست است.

مثال۳: در محیطی در حضور بارهای الکتریکی آزاد با چگالی حجمی $\rho(\vec{r},t)$ و جریان الکتریکی با چگالی $\vec{J}(\vec{r},t)$ معادله موج برای میدان مغناطیسی به شکل $(\nabla^۲ - \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲}{\partial t^۲})\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{X}$ است. در سیستم واحدهای SI بردار $\vec{X}$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\mu_\circ \vec{\nabla} \times \vec{J}$
۲) $-\mu_\circ \vec{\nabla} \times \vec{J} + \varepsilon_\circ^{-۱}\vec{\nabla}\rho$
۳) $\mu_\circ \vec{\nabla} \times \vec{J} - \varepsilon_\circ^{-۱}\vec{\nabla}\rho$
۴) $\mu_\circ \vec{\nabla} \times \vec{J}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از دو قانون ماکسول داریم:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \Rightarrow \vec{\nabla} \times B = \mu\omega\frac{\partial E}{\partial t} + \mu J \\ \vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{cases}$$

اگر دو بار از B کرل بگیریم:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times B) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.B) - \nabla^۲ B = -\nabla^۲ B \qquad (۱)$$

این بار اگر از قوانین ماکسول که در بالا استفاده کردیم، در گرفتن کرل از B استفاده کنیم:

$$\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times E + \mu\vec{\nabla} \times J = \mu\varepsilon(-\frac{\partial^۲ B}{\partial t^۲}) + \mu\vec{\nabla} \times J \qquad (۲)$$

با مساوی قراردادن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-\nabla^۲ B = -\mu\varepsilon\frac{\partial^۲ B}{\partial t^۲} + \mu\vec{\nabla} \times J$$

که البته فرض شده است محیط خلأ است و به این ترتیب $(\mu = \mu_\circ$ و $\varepsilon = \varepsilon_\circ)$

به این ترتیب به معادله‌ی دلخواه می‌رسیم و $(\nabla^۲ - \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲}{\partial t^۲})B = -\mu_\circ \times J$ باید توجه کرد که از رابطه‌ی $c = \frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ \varepsilon_\circ}}$ به عنوان سرعت نور استفاده شده است.

مدرسان شریف

فصل هفدهم

«امواج الکترومغناطیسی مسطح»

مقدمه

موج مسطح یکنواخت یک جواب خاص معادلات ماکسول است به طوری که $\vec{E}$ جهت یکسان، اندازه یکسان و فاز یکسانی را در صفحات نامحدود عمود بر جهت انتشار داشته باشد (همین طور در مورد $\vec{H}$). موج مسطح یکنواخت در عمل وجود ندارد، چون برای تولید آن منبعی با مقدار انرژی بی‌نهایت مورد نیاز است و این که، منابع موج همواره مقدار انرژی محدودی دارند. اما اگر به اندازه کافی از منبع دور باشیم، جبهه موج (سطح فاز ثابت) تقریباً کروی می‌شود و بخش بسیار کوچکی از سطح یک کره عظیم، بسیار نزدیک به یک صفحه است. امواج مسطح یکنواخت از نظر تئوری و عملی اهمیت اساسی دارد.

درسنامه (۱): امواج الکترومغناطیسی TEM و TE و TM

امواج الکترومغناطیسی عرضی (TEM)

امواج الکترومغناطیسی تخت از نوع عرضی هستند. علت عرضی بودن این است که در حالت کلی اگر جهت انتشار $\vec{k}$ باشد میدان به صورت $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}$ درمی‌آید و از $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$ خواهیم داشت: $\vec{k}.\vec{E}_0=0$

در این نوع از امواج، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر و بر جهت انتشار عموداند. به عبارتی هیچ‌کدام از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مؤلفه طولی (در جهت انتشار) ندارند. حالا اگر راستای انتشار در امتداد محور z باشد، داریم: $H_z=0 \quad , \quad E_z=0$

سرعت انتشار (سرعت فاز) امواج TEM را از رابطه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{u_{p(TEM)}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

امپدانس موج نیز برابر است با:

$$\boxed{Z_{TEM}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta}$$

اگر $\hat{k}$ بردار واحد در راستای انتشار باشد، می‌توان این طور نوشت:

$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{Z_{TEM}}(\hat{k}\times\vec{E})}$$

$$\boxed{\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\,(\hat{k}\times\vec{E})=\frac{n}{c}(\hat{k}\times\vec{E})}$$

در این رابطه $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ سرعت انتشار نور در خلأ می‌باشد. همچنین $n=\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ ضریب شکست محیط است.

نکته۱: سرعت انتشار و امپدانس موج TEM مستقل از فرکانس است.

رابطه بین ضریب شکست n و ثابت دی‌الکتریک ε_r را می‌توانیم به صورت مقابل بنویسیم:

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_\circ\mu_\circ}}$$

با توجه به اینکه در اغلب موارد μ به $\mu_\circ$ نزدیک است، خواهیم داشت:

$$n\cong\sqrt{\varepsilon_r}$$

مثال۱: در یک موجبر، تابع پتانسیل به صورت $\phi=\sum_{i=1}^{n}(a_i\sin k_i x+b_i\cos k_i y)$ قابل بیان است. میدان مغناطیسی در این موجبر کدام گزینه است؟ (جهت انتشار موج $\hat{a}_z$ بوده و $z_\circ$ امپدانس مشخصه موجبر است)

۱) $\vec{H}=\frac{1}{z_\circ}\sum_{i=1}^{n}(a_ik_i\cos k_ix\hat{a}_x-b_ik_i\sin k_iy\hat{a}_y)$

۲) $\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{i=1}^{n}[(a_ik_i\cos k_ix)\hat{a}_x-(b_ik_i\sin k_iy)\hat{a}_y]$

۳) $\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{i=1}^{n}[(a_ik_ix+b_i\cos k_iy)(\hat{a}_x+\hat{a}_y)]$

۴) $\vec{H}=-\frac{1}{z_\circ}\sum_{i=1}^{n}(b_ik_i\sin k_iy\hat{a}_x+a_ik_i\cos k_ix\hat{a}_y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» میدان الکتریکی را به‌صورت گرادیان پتانسیل می‌نویسیم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-\{\hat{a}_x\sum_{i=1}^{n}a_ik_i\cos k_ix-\hat{a}_y\sum_{i=1}^{n}b_ik_i\sin k_iy\}$$

حال که میدان الکتریکی را داریم، می‌توانیم $\vec{H}$ را حساب کنیم:

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\hat{a}_z\times\vec{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{i=1}^{n}(-a_ik_i\cos k_ix\hat{a}_y-b_ik_i\sin k_iy\hat{a}_x)$$

$$\vec{H}=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{i=1}^{n}(b_ik_i\sin k_iy\hat{a}_x+a_ik_i\cos k_ix\hat{a}_y)\ \Rightarrow\vec{H}=-\frac{1}{z_\circ}\sum_{i=1}^{n}(b_ik_i\sin k_iy\hat{a}_x+a_ik_i\cos k_ix\hat{a}_y)$$

مدرسان شریف

فصل هجدهم

«موجبرها و تشدیدکننده‌های حفره‌ای»

مقدمه

در این فصل، اول به صورت کلی مشخصات امواج منتشرشونده در طول ساختارهای هدایتی یکنواخت را بررسی می‌کنیم. پس از بررسی دو نوع موجبر صفحه موازی و مستطیلی به بحث تشدیدکننده‌ی حفره‌ای که وسیله‌ای برای ذخیره انرژی الکترومغناطیسی است، می‌رسیم.

درسنامه (۱): موجبرها

انتشار امواج در موجبرها

برای انتقال مؤثر نقطه به نقطه توان و اطلاعات موج انرژی، منبع باید جهت‌دار یا هدایت شده باشد. ساختارهای هدایت موج را موجبر می‌گوییم. در این بخش موج‌هایی را بررسی می‌کنیم که در راستای موجبرهای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت نشر می‌شوند. فرض می‌کنیم موج‌ها در راستای z و با ثابت انتشار $\gamma=\alpha+j\beta$ حرکت می‌کنند. وابستگی به z و t برای تمام مؤلفه‌های میدان با فرکانس زاویه‌ای ω به صورت زیر است:

$$H\,,\,E\ \propto\ e^{-\gamma z}e^{j\omega t}=e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}$$

برای مثال داریم:

$$E(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[E^{\circ}(x,y)e^{(j\omega t-\gamma z)}]$$

حال با توجه به معادلات هلمهولتز (در محیط بدون بار و منبع) می‌دانیم که:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\nabla_{xy}^2\vec{E}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla_{xy}^2\vec{H}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\nabla_{xy}^2\vec{E}+(\gamma^2+k^2)\vec{E}=0 & (1)\\ \nabla_{xy}^2\vec{H}+(\gamma^2+k^2)\vec{H}=0 & (2)\end{cases}$$

در بالا ∇^2 را به دو قسمت تبدیل کردیم. هر کدام از ۲ معادله انتهایی، ۳ معادله دیفرانسیل درجه ۲ برای مؤلفه‌های E و H است. تمام مؤلفه‌های E و H از هم مستقل نیستند. از روابط کرل میان میدان‌ها به روابط زیر می‌رسیم: $(\vec{\nabla}\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\ ,\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E})$

$$H_x^{\circ}=-\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial x}-j\omega\epsilon\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\right)\qquad(3)$$

$$H_y^{\circ}=-\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial y}+j\omega\epsilon\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x}\right)\qquad(4)$$

$$E_x^{\circ}=-\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x}+j\omega\mu\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\right)\qquad(5)$$

$$E_y^{\circ}=-\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}-j\omega\mu\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial x}\right)\qquad(6)$$

که در بالا $h^۲ = \gamma^۲ + k^۲$. (k عدد موج و γ ثابت انتشار موج در موجبر)

برای تحلیل موجبرها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) اول با توجه به نوع موج $(TM, TE\text{،}TEM)$ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱) یا (۲) را برای مؤلفه E_z و H_z حل می‌کنیم.

ب) با محاسبه E_z یا H_z از معادلات (۱) و (۲)، سایر کمیت‌های عرضی موج (E_y, E_x, H_y, H_x) را از طریق معادلات ۳، ۴، ۵ و ۶ به‌دست می‌آوریم.

انتشار TEM در موجبر

از آنجا که برای موج‌های TEM، $H_z = ۰$ و $E_z = ۰$ (با توجه به معادلات ۳ تا ۶) برای آنکه موج در آن منتشر شود باید $h = ۰$ باشد، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\gamma_{TEM}^۲ + k^۲ = ۰ \rightarrow \gamma_{TEM} = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

سرعت فاز برای موج‌های TEM اینگونه است:

$$v_p(TEM) = \frac{\omega}{k} = \frac{۱}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

از روی روابط کرل بین میدان‌ها هم می‌توانیم امپدانس موج را به دست آوریم:

$$\boxed{Z_{TEM} = \frac{E_x^\circ}{H_y^\circ} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \qquad (\Omega)}$$

Z_{TEM} همان امپدانس ذاتی محیط دی‌الکتریک است. می‌توان فرمول کلی زیر را برای موج TEM منتشر شونده در راستای Z به دست آوریم:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{۱}{Z_{TEM}} \vec{a}_z \times \vec{E} (\frac{A}{m})}$$

نکته۱: دقت کنید که موجبرهای تک رسانا نمی‌توانند موج‌های TEM را منتشر کنند. زیرا مؤلفه E_z نداریم. در غیاب رسانای داخلی جریان هدایتی طولی هم نداریم. با توجه قانون آمپر انتگرال خطی میدان مغناطیسی روی صفحه عرضی برابر جمع جریان‌های طولی است. از آنجا که این جمع صفر است، پس هیچ حلقه‌ی بسته‌ای از میدان مغناطیسی روی صفحه عرضی نداریم. بنابراین TEM نمی‌تواند در یک موجبر تک رسانایی منتشر شود.

انتشار امواج TM (مغناطیسی عرضی) در موجبر

در این امواج $H_z = ۰$ است، پس اول باید E_z را با توجه به معادلات مرزی از رابطه‌ی زیر باید به دست بیاوریم: $\nabla_{xy}^۲ E_z^\circ + h^۲ E_z^\circ = ۰ \quad (h^۲ = \gamma^۲ + k^۲)$

با قرار دادن $H_z = ۰$ در معادلات (۳ تا۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E_x^\circ = -\dfrac{\gamma}{h^۲}\dfrac{\partial E_z^\circ}{\partial x} \\ E_y^\circ = -\dfrac{\gamma}{h^۲}\dfrac{\partial E_z^\circ}{\partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x^\circ = \dfrac{j\omega\varepsilon}{h^۲}\dfrac{\partial E_z^\circ}{\partial y} \\ H_y^\circ = -\dfrac{j\omega\varepsilon}{h^۲}\dfrac{\partial E_z^\circ}{\partial x} \end{cases}$$

حالا با توجه به معادلات بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{۱}{Z_{TM}}(\vec{a}_z \times \vec{E})} \quad , \quad \boxed{Z_{TM} = \frac{E_x^\circ}{H_y^\circ} = -\frac{E_y^\circ}{H_x^\circ} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}}$$

وقتی معادله هلمهولتز را برای شرایط مرزی خاص یک موجبر حل می‌کنیم، متوجه می‌شویم که جواب برای مقادیر گسسته‌ای از h وجود دارد.

هر کدام از این مقادیر h برای آن مؤلفه‌ی موج یک ثابت انتشار خاص می‌دهد: $\gamma = \sqrt{h^۲ - k^۲} = \sqrt{h^۲ - \omega^۲\mu\varepsilon}$

فرکانسی که در آن $\gamma = ۰$ است را فرکانس قطع می‌گوییم. مقدار f_c برای یک مد خاص به مقدار ویژه آن مد (h) بستگی دارد: $f_c = \dfrac{h}{۲\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

حالا می‌توانیم دو حالت زیر را برای γ درنظر بگیریم $(\gamma = h\sqrt{۱-(\frac{f}{f_c})^۲})$:

الف) $(\frac{f}{f_c})^۲ > ۱$: در این حالت، ثابت فاز γ موهومی است و داریم $(\gamma = j\beta)$: $\beta = k\sqrt{۱-(\frac{f_c}{f})^۲}$

مدرسان شریف

فصل نوزدهم

«تابش»

مقدمه

تا اینجا انتشار امواج الکترومغناطیس در محیط آزاد، دی‌الکتریک و ساختارهای هدایت‌کننده موج (موجبرها) را مطالعه کردیم. در این فصل به بررسی نحوه تولید موج الکترومغناطیس و تابش الکترومغناطیس از یک منبع می‌پردازیم. هر مجموعه‌ای از بارها و جریان‌های الکتریکی متغیر با زمان از خود تابش می‌کنند.

درسنامه (۱): انواع تابش

امواج الکترومغناطیس از بارهای شتابدار و جریانهای متغیر ناشی می‌شوند. امواج به وجود آمده در خلأ تا بی‌نهایت انتشار یافته و با خود انرژی منتقل می‌کنند. وجه مشخصه‌ی تابش این جریان، برگشت‌ناپذیری انرژی از چشمه است. اگر فرض کنیم چشمه در نزدیکی مبدأ قرار دارد و یک کره‌ی بزرگ به شعاع r را در نظر بگیریم، توان کل خارج شده از سطح کره عبارت است از:

$$\boxed{P(r)=\oint \vec{S}.d\vec{a}=\frac{1}{\mu_0}\int d\vec{a}\,.(\vec{E}\times\vec{B})}$$

توان تابشی، حد $P(r)$ است وقتی r به بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\boxed{P_{rad}=\lim_{r\to\infty}P(r)}$$

چون سطح کره $4\pi r^2$ است، برای این که تابش روی دهد، باید بردار پوئینتینگ در r بزرگ به صورت $\frac{1}{r^2}$ کاهش یابد و سریع‌تر از $\frac{1}{r^2}$ نباشد. پس به راحتی می‌توانیم ببینیم که چشمه‌های ایستا تابش نمی‌کنند اما میدان‌های وابسته به زمان دارای جملاتی هستند که به صورت $\frac{1}{r}$ در rهای بزرگ کاهش می‌یابند. پس این جملات هستند که باعث تابش می‌شوند.

به طور عمومی از سه تقریب در مسائل تابش استفاده می‌کنیم:

۱ـ اندازه‌ی مشخصه‌ی دستگاه خیلی کمتر از r، یعنی فاصله‌ای باشد که میدان‌ها را در آن محاسبه می‌کنیم $(d\ll r)$.

۲ـ این اندازه مشخصه باید کوتاه‌تر از طول موج مشخصه‌ی سیستم باشد $(d\ll\frac{c}{\omega})$.

۳ـ تقریبی است که به آن تقریب منطقه‌ی تابش می‌گویند. این تقریب می‌گوید که ما به میدان در فواصلی علاقه داریم که خیلی بزرگ‌تر از طول موج مشخصه‌ی سیستم است $(r\gg\frac{c}{\omega})$. به طور کلی این سه تقریب به صورت $r\gg\frac{c}{\omega}\gg d$ هستند.

پس این مسأله اول برای دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی و سپس برای یک‌بار نقطه‌ای شتاب‌دار بررسی می‌شود.

مثال ۱: **در کدام‌یک از حالات زیر حتماً تابش الکترومغناطیسی وجود دارد؟ ($\vec{S}$ بردار پوئینتینگ است)**

۱) $\vec{\nabla}.\vec{S}=0$ ۲) $\vec{\nabla}.\vec{S}\neq 0$ ۳) $\vec{\nabla}.\vec{S}=0\,,\,\vec{\nabla}\times\vec{S}=0$ ۴) $\vec{\nabla}.\vec{S}=0\,,\,\vec{\nabla}\times\vec{S}\neq 0$

پاسخ: گزینه «۲» توان تابش شده از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$P_R=\oint_s \vec{s}.\hat{a}_n da$$

اگر از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، داریم: $(\int_v \vec{\nabla}.\vec{f}dv=\oint_s \vec{f}.\hat{a}_n da)$

$$P_R=\oint_s \vec{s}.\hat{a}_n da=\int_v \vec{\nabla}.\vec{s}\,dv$$

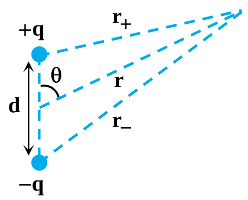
پس برای اینکه $P_R\neq 0$ باشد یعنی توان تابشی داشته باشیم باید $\vec{\nabla}.\vec{s}\neq 0$ باشد.

تابش دو قطبی الکتریکی

در یک دو قطبی الکتریکی اگر به شیوه‌ای بار را به حرکت رفت و برگشت بین دو قطب از راه سیم و با بسامد زاویه‌ای ω وادار کنیم، خواهیم داشت:

$$q(t)=q_\circ\cos\omega t \xrightarrow{p_\circ=q_\circ d} \vec{p}(t)=P_\circ\cos(\omega t)\hat{a}_z$$

پتانسیل تأخیری ناشی از دو قطبی را هم به صورت زیر داریم:



$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{\frac{q_\circ\cos[\omega(t-\frac{|\vec{r}_+|}{c})]}{|\vec{r}_+|}-\frac{q_\circ\cos[\omega(t-\frac{|\vec{r}_-|}{c})]}{|\vec{r}_-|}\right\}$$

در این رابطه $r_\pm=\sqrt{r^2\mp rd\cos\theta+(\frac{d}{2})^2}$ است. در فواصل خیلی دور $(|\vec{r}|\equiv r\gg\frac{c}{\omega})$ و با استفاده از تقریب‌هایی که در بالا گفتیم، خواهیم داشت:

$$V(r,\theta,t)=-\frac{P_\circ\omega}{4\pi\varepsilon_\circ c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]$$

با توجه به اینکه جریان گذرنده از سیم به صورت $I(t)=\frac{dq}{dt}\hat{a}_z=-q_\circ\omega\sin(\omega t)\hat{a}_z$ می‌باشد می‌توانیم این گونه بنویسیم:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\frac{-q_\circ\omega\sin[\omega(t-\frac{|\vec{r}|}{c})]}{|\vec{r}|}dz}$$

از آنجا که انتگرال فاکتور d اضافه می‌کند، پس در تقریب مرتبه اول انتگرال را با مقدار آن در مبدأ (مرکز دوقطبی) جایگزین می‌کنیم، بنابراین:

$$\vec{A}(\vec{r},\theta,t)=\frac{-\mu_\circ P_\circ\omega}{4\pi r}\sin[\omega(t-\frac{|\vec{r}|}{c})]\hat{a}_z$$

در این صورت می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{-\mu_\circ p_\circ\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{|\vec{r}|}\right)\cos[\omega(t-\frac{|\vec{r}|}{c})]\hat{a}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\xrightarrow{r\gg\frac{c}{\omega}}\vec{B}\simeq\frac{-\mu_\circ p_\circ\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{|\vec{r}|}\right)\cos[\omega(t-\frac{|\vec{r}|}{c})]\hat{a}_\varphi}$$

از روابط بالا نتیجه می‌گیریم که موج تکفام با بسامد ω در جهت شعاعی و با سرعت نور حرکت می‌کند. $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همفاز، متقابلاً متعامد و عرضی هستند و نسبت بین دامنه آنها برابر سرعت نور می‌باشد. $(\frac{E_\circ}{B_\circ}=c)$

انرژی تابیده از یک دو قطبی الکتریکی نوسان‌کننده را توسط بردار پوئینتینگ مشخص می‌کنیم.

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_\circ}(\vec{E}\times\vec{B})=\frac{\mu_\circ}{c}\left\{\frac{p_\circ\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{|\vec{r}|}\right)\cos[\omega(t-\frac{|\vec{r}|}{c})]\right\}^2\hat{a}_r$$