فصل اول

«نظریه احتمال»

نظریه احتمال پایه و اساس علم آمار محسوب می‌شود و بالطبع درک پایه‌ای و عمیق این مقوله بر هر فردی که قصد استفاده صحیح از نتایج آماری را دارد، ضروری است. می‌توان گفت اساس و درونمایه نظریه احتمال، یافتن ابزاری است برای طراحی و تحلیل جوامع، آزمایش‌ها و یا هر چیز دیگری که می‌توان یک پدیده تصادفی در نظر گرفت تا در نهایت بتوانیم استنباط‌هایی منطقی را درباره جوامع ایجاد کنیم.

هدف ما در این فصل، این است که احتمال را تعریف کنیم و اصول اساسی نظریه احتمال را بیان نماییم و نحوه به کارگیری آنها را در تجزیه و تحلیل مسائل آماری تشریح کنیم. همچنان که مطالعه نظریه احتمال لازمه مطالعه آمار است، مطالعه نظریه مجموعه‌ها نیز اساس یادگیری نظریه احتمال است؛ پس ابتدا به معرفی این نظریه در حد لازم می‌پردازیم.

نظریه‌ی مجموعه

در این بخش ابتدا تعاریف اساسی نظریه مجموعه‌ها را ارائه می‌دهیم، سپس عملگرهای مجموعه‌ای را معرفی و ویژگی‌های آنها را بیان می‌کنیم، مجموعه‌های جدا از هم را تعریف می‌کنیم و سرانجام وارد بحث احتمالات می‌شویم.

تعاریف:

۱ـ مجموعه: یک مجموعه،گروه یا گردایه‌ای از اشیاء یا عناصر می‌باشد و هر یک از این عناصر را نقطه یا عضو مجموعه می‌نامیم.

۲ـ مجموعه مرجع: بزرگترین مجموعه‌ای را که شامل تمام نقاط و مجموعه‌های مورد مطالعه باشد، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با نماد Ω نمایش می‌دهیم.

۳ـ تعلق یا عضویت: اگر عضو α در مجموعه A باشد، می‌گوییم α متعلق به A است و به صورت $\alpha \in A$ نمایش می‌دهیم.

۴ـ زیرمجموعه بودن یا جزئیت: می‌گوییم A زیر مجموعه Bاست هرگاه هر عضو A در B نیز باشد و آن را به صورت $A \subset B$ نمایش می‌دهیم، به عبارتی:

$$A \subset B \Leftrightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B$$

۵ـ هم‌ارزی: دو مجموعه B و A را هم‌ارز می‌گوییم و آن را به صورت $A = B$ نمایش می‌دهیم اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \ , \ B \subset A$$

۶ـ مجموعه تهی: اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را تهی یا پوچ می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

حال با فرض اینکه B و A دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع Ω باشند، عملگرهای مجموعه‌ای زیر را ارائه می‌دهیم:

۷ـ اجتماع: اجتماع دو مجموعه B و A مجموعه‌ای است شامل تمام اعضایی که به A و یا به B یا به هر دو تعلق داشته باشند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A \bigcup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

۸ ـ اشتراک: اشتراک دو مجموعه B و A را به صورت $A \bigcap B$ نمایش می‌دهیم و شامل اعضایی است که هم به A و هم به B تعلق داشته باشند:

$$A \bigcap B = \{x \in \Omega : x \in A \ , \ x \in B\}$$

۹ـ متمم: متمم A را به صورت $\overline{A}$ یا A^C و یا A' نمایش می‌دهیم:

$$\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

توجه کنید که اگر $A \subset B$، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $B^C \subset A^C$.

۱۰ـ تفاضل مجموعه‌ها: اگر B و A مجموعه‌هایی دلخواه از Ω باشند، در این صورت $A - B$ را اعضایی به حساب می‌آوریم که در A باشند ولی در B نباشند:

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A \ , \ x \notin B\}$$

دقت کنید $A \bigcap B$ را به صورت AB نیز نمایش می‌دهند. به قضیه زیر که خواص این عملگرها را نشان می‌دهد توجه کنید.

قضیه ۱: سه زیرمجموعه A ، B و C را از مجموعه مرجع Ω در نظر بگیرید، در این صورت داریم:

۱ـ خاصیت جابجایی: $B\cap A=A\cap B \ ; \ A\cup B=B\cup A$

۲ـ خاصیت شرکت‌پذیری: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \ ; \ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

۳ـ قوانین توزیع‌پذیری: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \ ; \ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۴ـ قوانین دمورگان: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C \ ; \ (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

برای آشنایی با نحوه اثبات این قضیه که در تجزیه و تحلیل بهتر مسائل مربوط به مجموعه‌ها مفید خواهد بود، رابطه دوم قسمت ۳ را ثابت می‌کنیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

مطابق تعریف تساوی مجموعه‌ها باید نشان دهیم هرکدام از طرفین تساوی شامل دیگری است، ابتدا نشان می‌دهیم:

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

فرض کنید $x\in(A\cap(B\cup C))$ باشد، از تعریف اشتراک نتیجه می‌شود که $x\in A$ و $x\in(B\cup C)$، این بدین معنی است که $x\in A$ و $x\in B$ یا $x\in A$ و $x\in C$، یا به‌طور معادل $x\in(A\cap B)$ یا $x\in(A\cap C)$ یعنی $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$؛ پس اثبات کردیم که:

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

حال فرض کنید $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$، بنابر تعریف اجتماع داریم $x\in(A\cap B)$ یا $x\in(A\cap C)$ یعنی $x\in A$ و $x\in B$ یا $x\in A$ و $x\in C$ و این بدین معنی است که: $x\in A$ و $x\in(B\cup C)$ و در نهایت نتیجه می‌گیریم: $x\in(A\cap(B\cup C))$ ؛ پس اثبات کردیم که:

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset(A\cap(B\cup C))$$

و در نهایت حکم اثبات می‌شود. تا اینجا اجتماع و اشتراک را برای دو مجموعه A و B تعریف کردیم. این تعریف‌ها را می‌توان به بیش از دو مجموعه نیز گسترش داد. اگر Γ یک مجموعه اندیس‌گذار باشد، در این صورت داریم:

$$\bigcup_{i\in\Gamma}A_i=\{x\in\Omega : x\in A_i \ \text{برای برخی از}\ i\text{ها}\}$$

به همین ترتیب، اشتراک تعداد دلخواهی از مجموعه‌ها را نیز به صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

$$\bigcap_{i\in\Gamma}A_i=\{x\in\Omega : x\in A_i \ \text{برای همه}\ i\text{ها}\}$$

قضیه ۲: تعمیم قضیه دمورگان: اگر Γ مجموعه اندیس‌گذار باشد و $\{A_i\}$ مجموعه‌ای شامل زیرمجموعه‌های Ω باشد که توسط Γ اندیس‌گذاری شده‌اند آنگاه:

۱) $\bigcap_{i\in\Gamma}\overline{A}_i=\overline{\bigcup_{i\in\Gamma}A_i}$ ۲) $\bigcup_{i\in\Gamma}\overline{A}_i=\overline{\bigcap_{i\in\Gamma}A_i}$

توجه داشته باشید که Γ می‌تواند شمارا یا ناشمارا باشد.

حال تعریف زیر را ارائه می‌دهیم که می‌تواند در بخش افراز فضای نمونه که در درک مسائل احتمالات کاربرد فراوان دارد، به کار رود.

۱۱ـ مجموعه‌های جدا از هم یا ناسازگار: دو زیرمجموعه A و B از Ω را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$A\cap B=\varnothing$$

به همین ترتیب A_1 ، A_2 و ... را دوبه‌دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه به ازای هر $i\neq j$ (i و j دلخواه)، $A_i\cap A_j=\varnothing$ باشد.

برای مثال $A\cap B$ و $A^C\cap B$ دو مجموعه ناسازگارند که در آن A و B دو پیشامد دلخواه می‌باشند و طبق قانون احتمال کل که در ادامه توضیح داده خواهد شد می‌توان گفت:

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$

به قضیه زیر که از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم توجه کنید.

قضیه ۳:

الف) اگر $A\subset B$، در این صورت: $A\cap B^C=\varnothing \quad , \quad A\cap B=A \quad , \quad A\cup B=B$

ب) $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

ج) $\varnothing=(A\cap B)\cap(A\cap B^C)$

آنالیز ترکیباتی

یکی از روش‌های مفید در محاسبه احتمالات، شمارش تعداد دفعاتی است که پیشامدی اتفاق می‌افتد. نظریه‌ی ریاضی مربوط به این نوع شمارش را آنالیز ترکیباتی می‌گویند. در واقع می‌توان مفاهیم اساسی آنالیز ترکیباتی مانند اصل اساسی شمارش، ترتیب، ترکیب و ... را مهم‌ترین ابزارهای روش محاسبه احتمال دانست.

اصل اساسی شمارش

قضیه ۴: اگر عملی در k مرحله مختلف انجام شود که iامین مرحله، خود به n_i طریق مختلف صورت گیرد $(i=۱,۲,...,k)$، این عمل به $n_۱ \times n_۲ \times ... \times n_k$ طریق مختلف انجام می‌شود.

مثال ۱: فردی می‌خواهد از مکان ۱ به مکان ۲ و سپس به مکان ۳ برود. اگر برای جابه‌جایی اول ۲ مسیر و برای جابه‌جایی دوم ۸ مسیر وجود داشته باشد، کلاً به چند طریق می‌تواند از مکان ۱ به مکان ۳ برود؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۶　　۳) ۶　　۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» بنابر قضیه بالا داریم: $۱۶ = ۸ \times ۲$

❖ **تعریف ۱: فاکتوریل:** فاکتوریل را با نماد ! نمایش می‌دهیم و آن را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$n! = (n)\times(n-۱)\times(n-۲)\times ... \times ۲ \times ۱$$

همچنین داریم:

$$n! = n(n-۱)!\ ,\ ۰! = ۱! = ۱$$

جایگشت: در سؤالاتی از این قبیل که به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی، فیزیک و شیمی را در کنار هم قرار داد، یا به چند طریق می‌توان از بین ۳ نفر یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد که در آنها ترتیب و مکان قرار گرفتن مناسب و یا سمت دقیق افراد مهم است، با مسأله‌ی جایگشت روبرو هستیم. درواقع تعداد حالاتی که n شیء متمایز در کنار هم قرار می‌گیرند برابر $n!$ می‌باشد.

ترتیب: اگر n شیء داشته باشیم و بخواهیم از بین آنها k شیء انتخاب کنیم به طوری‌که ترتیب انتخاب مهم باشد، با مقوله‌ی ترتیب سروکار داریم که در این صورت تعداد حالات مختلف این کار را با نماد P_k^n نشان می‌دهیم $(k=۰,۱,۲,...,n)$ و برابر است با:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

درواقع هر ترتیب به عنوان یک جایگشت شناخته می‌شود.

مثال ۲: با اعداد ۱،۲ و ۳ چند عدد دو رقمی بدون تکرار اعداد می‌توان ساخت؟

۱) ۶　　۲) ۳　　۳) ۹　　۴) ۷

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** اگر بخواهیم اعداد را نوشته و آنها را شمارش کنیم، داریم:۱۲و۱۳و۲۳و۳۲ و۳۱و۲۱، می‌بینیم که شش عددند.

از طرفی با استفاده از فرمول بالا داریم:

$$P_۲^۳ = \frac{۳!}{(۳-۲)!} = ۶$$

روش دوم: توجه کنید که در جایگاه (۱) هر یک از اعداد ۱,۲,۳ می‌توانند قرار بگیرند؛ اما چون تکرار مجاز نیست، در جایگاه (۲) یکی از ۳ عدد بالا که در (۱) قرار گرفته حذف شده و تنها ۲ عدد می‌تواند قرار بگیرد.

۳ حالت	۲ حالت

$\Rightarrow ۳ \times ۲ = ۶$

مثال ۳: الف ـ به چند طریق ۳ زن و ۳ مرد می‌توانند در کنار هم بنشینند؟

ب ـ به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند به شرط آنکه مردها کنار هم و زن‌ها نیز کنار هم باشند؟

پاسخ: الف ـ در اینجا مقصود محاسبه تعداد حالاتی است که شش نفر کنار هم می‌نشینند:

۶	۵	۴	۳	۲	۱

$۶! = ۷۲۰$

ب ـ می‌دانیم که مردها به !۳ طریق و زن‌ها نیز به !۳ طریق مختلف می‌توانند در کنار هم بنشینند. از طرفی اگر به هر کدام از مجموعه مردها و زن‌ها به عنوان یک واحد نگاه کنیم، این دو واحد به !۲ حالت، می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. طبق قضیه ۴ داریم:

۳	۲	۱	۳	۲	۱

مرد　　زن

به دو حالت امکان جابه‌جایی دارند

$۲! \times ۳! \times ۳! = ۷۲$

مثال ۴: بین ۱۰ نفر مسابقات ورزشی برگزار می‌شود، به چند طریق می‌توان رتبه های ۱ تا ۳ را به آنها داد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۴۰ ۳) ۶۲۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ: گزینه «۴» رتبه‌ی ۱ را به ۱۰ حالت می‌توان اختصاص داد. با مشخص شدن رتبه‌ی ۱، رتبه ۲ را به ۹ حالت مختلف می‌توان به افراد باقی مانده اختصاص داد و به همین ترتیب رتبه ۳ را می‌توان به ۸ حالت اختصاص داد، پس داریم:

رتبه ۱ رتبه۲ رتبه ۳

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$$

درواقع با یک ترتیب ۳ از ۱۰ سروکار داریم، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$P_۳^{۱۰} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!} = ۷۲۰$$

ترکیب: در بسیاری از موارد علاقه‌مند به یافتن تعداد انتخاب‌های k شیء از n شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها هستیم. در این گونه موارد با مسأله‌ی ترکیب مواجه‌ایم و آن را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ارتباط بین ترکیب و ترتیب به صورت روبه‌رو می‌باشد.

$$P_k^n = k!C_k^n$$

نکته ۱: در مسأله‌ی ترکیب، ترتیب قرارگرفتن اشیاء مهم نیست. C_k^n را به صورت $\binom{n}{k}$ نیز نشان می‌دهند.

به روابط زیر توجه کنید:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱ \quad , \quad \binom{n}{k}=۰ ,k>n \text{ یا } k<۰ \text{ و } \binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n, \binom{n}{k}=\binom{n-۱}{k-۱}+\binom{n-۱}{k}$$

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱} \text{ و}$$

مثال ۵: در یک بازی خاص، یک زوج عدد از ۱ تا n انتخاب می‌شود. تعداد زوج‌های مختلف کدام است؟

۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ ۳) $\frac{n-۱}{۲}$ ۴) $\frac{n+۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» چون در اینجا ترتیب اعداد مهم نیست و مثلاً (۲ و۱) و (۱ و ۲) یک‌بار به حساب می‌آید، بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{n}{۲}=\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال ۶: می‌خواهیم کمیته‌ای شامل ۳ نفر کارشناس و ۲ نفر کارشناس ارشد تشکیل دهیم. اگر آنها را از یک گروه شامل ۵ نفر کارشناس و ۴ نفر کارشناس ارشد انتخاب کنیم، این عمل به چند طریق انجام می‌پذیرد؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۱» این مسأله در دو مرحله انجام می‌شود، بنابراین با استفاده از اصل اساسی شمارش و ترکیب داریم:

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۲}=۶۰$$

قضیه ۵: در صورتی که $n=۰,۱,۲,...$ و x و y اعدادی دلخواه باشند، بنابر قضیه دوجمله‌ای (بسط دو جمله‌ای نیوتن) داریم:

$$(x+y)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

مثال ۷: در یک مجموعه‌ی n عضوی چند زیرمجموعه وجود دارد؟

۱) ۲^n ۲) ۴^n ۳) $۲^{n-۱}$ ۴) $۲^{۲n-۲}$

پاسخ: گزینه «۱» تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی، ۱ عضوی، ۲ عضوی و... و n عضوی در یک مجموعه‌ی n عضوی به ترتیب برابر $\binom{n}{۰},\binom{n}{۱},\binom{n}{۲}$ و ... و $\binom{n}{n}$ می‌باشد (در زیرمجموعه‌ها ترتیب اهمیت ندارد).

پس داریم: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ = تعداد زیرمجموعه‌ها

بنابر قضیه ۵، اگر قرار دهیم $a=b=1$، خواهیم داشت: $a=b=1\Rightarrow (a+b)^n=2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^k(1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

پس تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته ۲: اگر مجموعه‌ای دارای n عضو مختلف باشد و بخواهیم این مجموعه را به k گروه مختلف با اندازه‌های $n_1,n_2,\ldots,n_k$ تقسیم کنیم به طوری که $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$، در این صورت تعداد حالات مختلف انجام این کار بنابر اصل اساسی شمارش برابر است با:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

قضیه ۶: با بسط قضیه دو جمله‌ای به بیش از دو جمله به قضیه چند جمله‌ای می‌رسیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$n=\sum_{i=1}^{k}n_i\ ,\ (x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$$

مثال ۸: اگر بخواهیم از بین ۹ نفر ۳ گروه مختلف با تعداد اعضای ۲، ۳ و ۴ نفر تشکیل دهیم، این کار به چند طریق انجام می‌گیرد؟

۱) ۱۱۰۰	۲) ۱۳۰۰	۳) ۱۲۶۰	۴) ۱۳۶۰

پاسخ: گزینه «۳» بنابر نکته مذکور داریم: $\binom{9}{2,3,4}=\frac{9!}{2!3!4!}=1260$

◆ ◆ ◆ ◆

نکته ۳: اگر n توپ متفاوت داشته باشیم و بخواهیم آنها را در k ظرف مختلف قرار دهیم، این کار به n^k طریق متفاوت قابل انجام است.

نکته ۴: برای معادله $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ تعداد $\binom{n+k-1}{n}$ مجموعه جواب صحیح نامنفی $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ و تعداد $\binom{n-1}{k-1}$ مجموعه جواب با عناصر صحیح مثبت وجود دارد.

نکته ۵: برای نامعادله $x_1+x_2+\ldots+x_k\le n$ تعداد $\binom{n+k}{n}$ مجموعه جواب نامنفی و صحیح داریم.

مثال ۹: اگر بخواهیم ۶ کامپیوتر را در ۴ اتاق توزیع کنیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ چنانچه لازم باشد به هر اتاق حداقل یک کامپیوتر اختصاص داده شود به چند طریق این کار قابل انجام است؟

۱) ۷۴ و ۵	۲) ۸۴ و ۱۰	۳) ۸۴ و ۵	۴) ۷۴ و ۱۰

پاسخ: گزینه «۲» با درنظر گرفتن این نکته که کامپیوترها یکسان هستند، تعداد حالاتی که می‌توان این کار را انجام داد برابر تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ می‌باشد، بنابراین از نکته ۴ نتیجه می‌شود:

$$x_1+x_2+\ldots+x_4=6\Rightarrow\binom{6+4-1}{6}=84\ \text{تعداد جواب‌های نامنفی}$$

برای قسمت دوم، با کنار گذاشتن ۴ کامپیوتر، باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+\ldots+x_4=2$ را به دست آوریم که برابر $\binom{2+4-1}{2}=10$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۰: اتوبوسی با ۱۰ نفر مسافر در ۴ ایستگاه توقف می‌کند تا مسافران پیاده شوند. به چند طریق مسافران در ایستگاه‌ها پیاده شوند به طوری‌که هیچ ایستگاهی خالی نماند؟

۱) ۸۴	۲) ۲۸۴	۳) ۸۰	۴) ۲۸۰

پاسخ: گزینه «۱» این مسأله مانند یافتن تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+\ldots+x_4=10$ می‌باشد، با توجه به نکته ۴ داریم:

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{10-1}{4-1}=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\ \ 6!}=84$$ = تعداد طرق پیاده شدن مسافران

مثال۱۱: تعداد جملات در بسط چند جمله‌ای $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ کدام است؟

۱) $\binom{n+k-1}{k}$ ۲) $\binom{n+k-1}{k-1}$ ۳) $\binom{n+k-1}{n-1}$ ۴) $\binom{n+k}{n-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بنابر بسط چند جمله‌ای داریم:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1,...,n_k} x_1^{n_1} ... x_k^{n_k}$$

مشاهده می‌شود که عملگر جمع روی کلیه‌ی مقادیر صحیح و غیر منفی n_1، n_2، ... و n_k به طوری‌که $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ باشد، انجام می‌شود.

بنابراین با به کار بردن نکته ۴، تعداد جملات برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ می‌باشد.

نظریه احتمال

یکی از اهداف اصلی آماردانان کسب نتایج حاصل از طراحی و انجام آزمایش تصادفی مناسب در مورد جامعه است، قدم اول در این فرآیند، معین نمودن تمام برآمدهای ممکن یا درواقع فضای نمونه است.

❖ **تعریف ۲: فضای نمونه**: عبارت است از تمام برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی خاص و آن را با S نمایش می‌دهیم. (تصادفی بودن آزمایش به این معنی است که نتیجه یا برآمد حاصل از انجام آزمایش قطعی نیست و نمونه‌ای از کلیه‌ی برآمدهای ممکن آزمایش است).

برای مثال اگر آزمایش پرتاب یک سکه باشد، آنگاه فضای نمونه شامل دو برآمد خواهد بود: $S = \{H, T\}$

که H نشان دهنده مشاهده طرف شیر سکه و T نشان دهنده طرف خط سکه است.

به عنوان مثالی دیگر، اگر آزمایش ثبت طول عمر قطعات تولیدی یک کارخانه باشد آنگاه فضای نمونه، مجموعه کلیه اعداد حقیقی نامنفی می‌باشد: $S = [0, \infty)$

❖ **تعریف ۳: پیشامد**: هر زیرمجموعه مناسب از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامیم، مجموعه یا رده‌کلیه پیشامدهای مربوط به یک آزمایش مفروض را فضای پیشامد می‌نامیم و آن را با نماد $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید E_nها $(n \geq 1)$ دنباله‌ای از پیشامدها باشند در صورتی که $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$ باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{E_n : n \geq 1\}$ را یک دنباله‌ی صعودی و اگر $E_1 \supset E_2 \supset ... E_n \supset ...$ باشد، $\{E_n : n \geq 1\}$ را یک دنباله‌ی نزولی از پیشامدها می‌نامیم.

دقت داشته باشید که در فضاهای نمونه به اندازه کافی بزرگ، هر زیرمجموعه دلخواه ممکن است یک پیشامد نباشد. با وجود این، می‌توانیم فضای پیشامد را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم تا شامل تمام پیشامدهایی باشد که در مورد احتمال آنها صحبت می‌کنیم. دقت کنید تنها در صورتی که فضای نمونه متناهی و شمارا باشد فضای پیشامد، متناظر با زیرمجموعه‌های فضای نمونه خواهد بود.

فضاهای نمونه را با توجه به تعداد اعضایی که شامل می‌شوند، به دو دسته طبقه‌بندی می‌کنیم:

۱ـ فضاهای نمونه شمارا: اگر تعداد اعضای فضای نمونه بتوانند در یک تناظر یک به یک با زیر مجموعه‌ای از اعداد صحیح واقع شوند، آن را شمارا می‌نامیم که می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد؛ مثلاً فضای نمونه مربوط به پرتاب یک سکه شمارا و متناهی است.

۲ـ فضاهای نمونه ناشمارا: فضاهای نمونه‌ای را که نمی‌توان در تناظری یک به یک با زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح قرار داد ناشمارا می‌نامیم؛ مانند فضای نمونه مربوط به طول عمر قطعات تولیدی کارخانه.

زمانی که از وقوع یا رخداد پیشامد A صحبت می‌کنیم درواقع منظورمان مشاهده برآمدی از آزمایش است که در A باشد. به عبارتی، اگر نتیجه آزمایش برآمدی باشد که به A تعلق داشته باشد می‌گوییم پیشامد A رخ داده است و در آن هنگام می‌توان از احتمال وقوع آن نیز صحبت به میان آورد.

در این قسمت به چند تعریف از احتمالات می‌پردازیم:

❖ **تعریف ۴: احتمال کلاسیک:** اگر کلیه نتایج آزمایش تصادفی n برآمد مختلف ناسازگار و همشانس باشند و در صورتی‌که n_A تعداد برآمدهای پیشامد A باشند، احتمال وقوع A برابر $\frac{n_A}{n}$ می‌باشد.

همشانس بودن برآمدها به معنی شانس یکسان برای وقوع از نظر شرایط آزمایش است، مثلاً در آزمایش پرتاب سکه متعادل یا تاس سالم، همه برآمدها از شانس وقوع یکسان برخوردارند. ضمناً ناسازگاری برآمدها به این معنی است که آن‌ها اشتراکی نداشته باشند.

برای مثال، احتمال مشاهده خال آس در یک دسته کارت بازی معمولی برابر $\frac{۴}{۵۲}$ است، زیرا فضای نمونه شامل ۵۲ کارت است و تعداد خال‌های آس برابر ۴ می‌باشد.

❖ **تعریف ۵: احتمال فراوانی**: همان‌طور که دیدید در احتمال کلاسیک، محاسبه احتمال بر مبنای تعداد برآمدهای پیشامد موردنظر و تعداد برآمدهای فضای نمونه مشروط بر همشانس بودن و ناسازگار بودن برآمدها انجام می‌گرفت. همچنین اگر وقوع یک پیشامد حتمی باشد احتمال آن یک است و اگر عدم وقوع آن محرز باشد، احتمال آن صفر است. مثلاً احتمال مشاهده خط یا شیر در پرتاب سکه برابر یک است و احتمال مشاهده عدد ۸ در پرتاب تاس سالم برابر صفر است. در محاسبه احتمال در حالت کلاسیک، شیوه استدلال بر اساس قیاس استوار است؛ اما مشکلی که در این نحوه استدلال وجود دارد در اطمینان از همشانس بودن برآمدهاست. مثلاً ما چگونه می‌توانیم از متعادل بودن یک سکه یا تاس، مطمئن باشیم. اما اگر تعداد برآمدهای ممکن نامتناهی باشد باید تعریف احتمال را تا حدی تغییر داد، چرا که نمی‌توان از احتمال کلاسیک یاری گرفت؛ پس از احتمال پسین یا فراوانی استفاده می‌کنیم. به این صورت که به دفعات زیاد آزمایش را در شرایط یکسان تکرار می‌کنیم و در انتها می‌پذیریم که در درازمدت یک برآمد قابل پیش‌بینی با احتمالی نشأت گرفته از یک نظم خاص که در تکرار آزمایش به چشم می‌خورد وجود دارد، مثلاً در پرتاب تاس فراوانی هر کدام از وجوه تاس به $\frac{۱}{۶}$ خیلی نزدیک است و منطقی است که آن را با این احتمال تقریب بزنیم. یا برای مثال، پیش‌بینی نوزادی که در شهری معین از ایران پسر است یا دختر، بر اساس احتمال کلاسیک ممکن نیست، ولی می‌توان به طور اطمینان‌بخشی این کار را با نتایج انتخاب گروهی و مناسب از تولدها مرتبط ساخت و بر اساس فراوانی نسبی، تقریب خاصی را برای احتمال پسر بودن در نظر گرفت.

اصول موضوعه احتمال

در اینجا قصد داریم بین هر پیشامد دلخواه A از فضای نمونه S و اعداد حقیقی بین صفر و یک ارتباطی ایجاد کنیم که به آن احتمال وقوع پیشامد A می‌گوییم و آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که دامنه این تابع تمام زیرمجموعه‌های S تعریف می‌شود و برد آن اعداد حقیقی بین صفر و یک‌اند و شامل خود صفر و یک نیز می‌باشد.

❖ **تعریف ۶**: تابع احتمال $P[\cdot]$ یک تابع مجموعه‌ای با دامنه $\mathcal{A}$ (فضای پیشامد)و برد $[0,1]$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

۱ـ برای هر $A \in \mathcal{A}$ داریم: $0 \le P(A) \le 1$

۲ـ اگر S فضای نمونه فرض شود، احتمال آن برابر یک است: $P[S]=1$

۳ـ اگر A_1، A_2 و... دنباله‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند و اگر $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ در این صورت داریم:

$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i]=\sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

$$\forall i \ne j: A_i \cap A_j = \varnothing$$

در بسیاری از کتب آماری به این اصول، اصول موضوعه احتمال یا اصول موضوعه کولموگروف گفته می‌شود که درواقع ویژگی‌های یک تابع احتمال را بدست می‌دهد.

قضیه ۷: اگر $\varnothing$ بیانگر پیشامد تهی باشد، داریم:

$$P[\varnothing]=0$$

قضیه ۸: اگر A پیشامدی در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه:

$$P[\bar{A}]=1-P[A]$$

اثبات: می‌دانیم که $A \cap \bar{A} = \varnothing$ و $A \cup \bar{A} = S$، بنابراین داریم:

$$P[S]=P[A \cup \bar{A}]=P[A]+P[\bar{A}]=1 \Rightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$$

قضیه ۹: اگر A و B دو پیشامد از فضای پیشامد باشند، در این صورت:

$$P[A]=P[A \cap B]+P[A \cap \bar{B}] \quad , \quad P[A-B]=P[A \cap \bar{B}]=P[A]-P[A \cap B]$$

قضیه ۱۰: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$P[A \cup B]=P[A]+P[B]-P[A \cap B]$$

اثبات: جهت به دست آوردن رابطه $P(A \cup B)$ ابتدا توجه می‌کنیم که $A \cup B$ را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار A و $A^C B$ نوشت و داریم:

$$P(A \cup B)=P(A \cup (A^C \cap B))=P(A)+P(A^C \cap B) \qquad (I)$$

از طرفی چون $B=AB \cup A^C B$، پس داریم:

$$P(B)=P(AB)+P(A^C B) \Rightarrow P(A^C B)=P(B)-P(AB) \xrightarrow{(I)} P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

مثال ۱۲: دو سکه متعادل را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر A پیشامدی باشد که اولین سکه شیر ظاهر شود و B پیشامدی باشد که دومین سکه شیر ظاهر شود، آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: مطابق اطلاعات مسأله داریم:

$$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

$$A=\{(H\ ,\ H),(H\ ,T)\}\quad ,\quad B=\{(H\ ,\ H),(T\ ,\ H)\}\quad ,\quad A\cap B=\{(H,H)\}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

روش دوم: ابتدا $A\cup B$ را مشخص کرده و سپس احتمال آن را محاسبه می‌کنیم:

$$A\cup B=\{(H\ ,\ H),(H\ ,\ T),(T\ ,\ H)\}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$$

نکته ۶: می‌توان احتمال $A\cup B$ را به بیش از دو پیشامد نیز تعمیم داد، مثلاً در مورد اجتماع سه پیشامد داریم:

$$P(A\cup B\cup C)=P[(A\cup B)\cup C]=P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cup B)\cap C]$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P\big[(A\cap C)\cup(B\cap C)\big]$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-\big[P(AC)+P(BC)-P(ABC)\big]$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

مثال۱۳: در یک باشگاه ورزشی ۳۰ نفر بازی فوتبال، ۳۵ نفر تنیس، ۱۵ نفر بدمینتون، ۱۶ نفر فوتبال و تنیس، ۱۳ نفر تنیس و بدمینتون، ۱۰ نفر فوتبال و بدمینتون و ۵ نفر نیز هر سه ورزش را انجام می‌دهند. در صورتی‌که یک نفر از میان این باشگاه انتخاب کنیم، با چه احتمالی این فرد در سه رشته فعالیت دارد؟

۱) $\frac{۵}{۳۰}$ ۲) $\frac{۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر A، B و C به ترتیب بیانگر تعداد ورزشکارانی باشد که در رشته‌های فوتبال، تنیس و بدمینتون فعالیت دارند، در این صورت داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)=۳۰+۳۵+۱۵-۱۶-۱۳-۱۰+۵=۴۶$$

بنابراین ۴۶ نفر در این باشگاه فعالیت دارند، در نتیجه خواهیم داشت: P (فرد در هر سه رشته فعالیت داشته باشد) $=\frac{۵}{۴۶}$

قضیه ۱۱: اگر A و B دو پیشامد از فضای پیشامد باشند و $A\subset B$، آنگاه:

$$P[A]\le P[B]$$

اثبات: چون $A\subset B$، بنابراین می‌توان B را به صورت $B=A\cup(A^C\cap B)$ نوشت و با توجه به اینکه A و A^CB ناسازگار هستند، داریم:

$$P(B)=P(A\cup(A^C\cap B))=P(A)+P(A^C\cap B)$$

چون $P(A^C\cap B)\ge ۰$ بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۱۲: نامساوی بول: در صورتی که $A_۱$، $A_۲$،... و A_n پیشامدهایی از فضای پیشامدها باشند، داریم:

$$P[\bigcup_{i=۱}^{n}A_i]\le\sum_{i=۱}^{n}P[A_i]$$

❖ **تعریف ۷: فضای احتمال:** سه تایی $(S,\mathcal{A},P[\bullet])$ را فضای احتمال می‌نامیم که S بیانگر فضای نمونه، $\mathcal{A}$ فضای پیشامد و $P[\bullet]$، تابع احتمال با دامنه $\mathcal{A}$ می‌باشد.

قضیه ۱۳: نامساوی بونفرونی: برای پیشامدهای دلخواه $A_۱$، $A_۲$،... و A_n داریم:

$$P\left(\bigcap_{i=۱}^{n}A_i\right)\ge ۱-\sum_{i=۱}^{n}P(\bar{A}_i)$$

احتمال شرطی

در مسائل احتمال و محاسبه احتمال پیشامدها، ممکن است با وضعیت‌هایی مواجه شویم که لازم است پیشامدی خاص محاسبه شود، مشروط بر اینکه قبلاً پیشامد دیگری رخ داده باشد. در این‌گونه موارد با احتمالات شرطی سروکار داریم.

❖ **تعریف ۸: احتمال شرطی:** اگر A و B دو پیشامد در $\mathcal{A}$ از فضای احتمال $(S, \mathcal{A}, P[\bullet])$ باشند، احتمال شرطی پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)},\ P(B)>0 \quad , \quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)>0$$

نتیجه: $P[A\cap B]=P[A|B].P[B]=P[B|A].P[A] \to P(A\cap B)=P(B|A).P(A)$

مثال ۱۴: دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال دو شیر به شرط آن که سکه اول شیر باشد و احتمال دو شیر به شرط آن که حداقل یکی از سکه‌ها شیر باشد، به ترتیب کدامند؟

۱) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر A_1 و A_2 به ترتیب پیشامدهای مربوط به شیر در سکه اول و شیر در سکه دوم باشند، داریم:

$$P[A_1\cap A_2|A_1]=\frac{P[A_1\cap A_2]}{P[A_1]}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$P[A_1\cap A_2|A_1\cup A_2]=\frac{P[(A_1\cap A_2)\cap(A_1\cup A_2)]}{P[A_1\cup A_2]}=\frac{P[A_1\cap A_2]}{P[A_1\cup A_2]}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

توجه کنید که: $A_1\cap A_2\subset A_1\cup A_2 \Rightarrow (A_1\cap A_2)\cap(A_1\cup A_2)=A_1\cap A_2$

قضیه ۱۴: اگر $\varnothing$ پیشامد تهی محسوب شود داریم: $P[\varnothing|B]=\frac{P(\varnothing\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B)}=0$

قضیه ۱۵: فرض کنید $A,B\in\mathcal{A}$ باشد، در این صورت داریم: $P[\bar{A}|B]=1-P[A|B]$

❖ **تعریف ۹: نسبت بخت پیشامد A:** این نسبت بیان می‌کند که چه نسبتی بین شانس وقوع پیشامد A و عدم وقوع آن وجود دارد و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{نسبت بخت پیشامد } A=\frac{P(A)}{P(A^C)}=\frac{P(A)}{1-P(A)}$$

توجه کنید در صورتی که نسبت بخت صحت یک ادعا یا فرض برابر K باشد، آنگاه می‌توان گفت که شانس صحت این فرض «K به ۱» است.

قضیه ۱۶: احتمالات کل: برای فضای احتمال $(S, \mathcal{A}, P[\bullet])$ اگر B_1، B_2،... و B_n مجموعه‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند که در شرایط روبه‌رو صدق کنند: $S=\bigcup_{i=1}^{n}B_i\ ,\ P[B_i]>0, i=1,2,\ldots,n$

در این صورت برای هر $A\in\mathcal{A}$ داریم:

$$P[A]=\sum_{i=1}^{n}P[A|B_i].P[B_i]$$

در صورتی که $n=2$ باشد، داریم:

$$P(A)=P(AB)+P(AB^C)=P(A|B)P(B)+P(A|B^C)P(B^C)$$

این رابطه به ما کمک می‌کند تا احتمال وقوع یک پیشامد را با مشروط کردن نسبت به وقوع و یا عدم وقوع پیشامد دیگر محاسبه کنیم. درواقع در بسیاری از موارد، محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد به طور مستقیم مشکل است، اما به سادگی با مشروط کردن آن نسبت به پیشامد دیگر می‌توان احتمال آن را به دست آورد.

مدرسان شریف

فصل سوم

«بسندگی و کامل بودن»

بسندگی

مفهوم بسندگی آماره‌ها را می‌توان این‌گونه بیان کرد که ما علاقمند باشیم داده‌های خام را توسط یک آماره‌ی مناسب تا حد امکان خلاصه کنیم، در حالی که اطلاعات موجود در آن‌ها از نظر کمّی و کیفی ثابت بماند؛ یعنی به دنبال تابعی از نمونه هستیم که عیناً همان اطلاعاتی را در مورد θ بدهد که خود نمونه می‌دهد. چنین تابعی به منظور اهداف برآورد، بسنده است و از این رو یک آماره بسنده نامیده می‌شود.

همانطور که گفته شد، آماره T تابعی از X است که به پارامتر مجهول θ بستگی ندارد. آماره‌ی $T=t(X_1,\dots,X_n)$ یک متغیر تصادفی است که n متغیر تصادفی را فشرده‌تر می‌سازد که این فشرده‌سازی و تلخیص داده‌ای جهت استفاده از حقایق کافی نهفته در نمونه در ایجاد استنباط در مورد جامعه برای ما اهمیت دارد. توجه کنید که آماره‌ها در واقع افرازهای خاصی را بر روی χ (برد X) ایجاد می‌کنند و ما در جستجوی یافتن آماره‌ای هستیم که بیشترین تلخیص را بر روی χ ایجاد کند.

آماره و افراز

بنابر تعریف، مجموعه‌های A_1 و A_2 و ... تشکیل یک افراز روی فضای نمونه S می‌دهند، اگر دوبه‌دو مجزا باشند و ضمناً اجتماع تمام آن‌ها فضای نمونه باشد. به عبارتی داشته باشیم: $\text{i)}\ \forall i\neq j: A_i\cap A_j=\varnothing\quad \text{ii)}\ \bigcup_i A_i=S$

از طرفی یک متغیر تصادفی X که تابعی از فضای نمونه S به مجموعه مقادیر آن می‌باشد، افرازی روی S ایجاد می‌کند؛ زیرا اگر A_x را به صورت $\{w\in s \mid X(w)=x\}$ تعریف کنیم، در این صورت داریم: $\text{i)}\ \forall x_1\neq x_2 \Rightarrow A_{x_1}\cap A_{x_2}=\varnothing\quad \text{ii)}\ \bigcup_i A_{x_i}=S$

فرض کنید از یک توزیع برنولی یک نمونه nتایی بگیریم؛ آن‌گاه χ مجموعه‌ای از تمام بردارهای n بعدی با مؤلفه‌های ۰ یا ۱ است. یا اگر از یک توزیع نرمال نمونه بگیریم، آنگاه χ یک فضای اقلیدسی n بعدی است. در این صورت آماره‌ای که به صورت تابعی از $(x_1,\dots,x_n)$ در نظر گرفته می‌شود، افرازی بر χ القا یا تعریف می‌کند. (یادآوری می‌کنیم که یک افراز χ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای χ است که اجتماع آنها χ می‌شود.) برای تفهیم افراز آماره T به مثال زیر توجه کنید.

مثال۱: فرض کنید X_1,X_2,X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $B(1,\theta)$ باشند. در این صورت:

$$\chi=\{(0,0,0)(0,1,0)(0,0,1)(0,1,1)(1,0,0)(1,0,1)(1,1,0)(1,1,1)\}$$

حال اگر T را به صورت $T(X)=X_1+X_2+X_3$ تعریف کنیم، مجموعه افرازهای ایجاد شده را به دست آورید.

پاسخ:

$$E_0=\{x:T(x)=0\}=\{(0,0,0)\}\quad E_1=\{x:T(x)=1\}=\{(0,0,1)(1,0,0)(0,1,0)\}$$

$$E_2=\{x:T(x)=2\}=\{(1,1,0)(0,1,1)(1,0,1)\}\quad E_3=\{x:T(x)=3\}=\{(1,1,1)\}$$

واضح است که آماره‌ی $T(X)=X_1+X_2+X_3$ باعث شد که به جای این‌که با هشت نقطه سروکار داشته باشیم تنها با چهار نقطه (۰و۱و۲و۳) روبه‌رو باشیم و این مفهوم تلخیص اطلاعات را نمایان می‌سازد. در اینجا اگر $T=1$ بیان شود، نقاط نمونه‌ای $(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ متناظراً به ذهن می‌رسند و با چنین دانشی یعنی تنها با استفاده از $T=1$ مقدار $\frac{1}{3}$ برای p (پارامتر مجهول) به‌دست می‌آید.

در این راستا فشرده‌سازی و تلخیص نباید منجر به از دست دادن اطلاعات مهم و اساسی در مورد پارامتر مجهول گردد. آماره‌ی T فضای نمونه را به ۴ مجموعه‌ی E_0، E_1، E_2 و E_3 افراز کرد. بعضی اوقات دو آماره مانند T_1 و T_2 افرازهای یکسان روی فضای نمونه ایجاد می‌کنند. در این صورت این دو آماره از نظر اهداف برآورد پارامتر یکسان‌اند و اختلاف در مقادیری که آن‌ها می‌گیرند اهمیت نخواهد داشت. به بیان ساده‌تر زاویه‌ی دید ما، افرازهای القاء شده توسط آماره‌اند، نه مغایر آن.

نکته۱: اگر دو آماره T_1 و T_2 افرازهای یکسان ایجاد کنند، آنگاه تناظر یک به یک بین آن‌ها برقرار است و همچنین احتمال شرطی A به شرط $T_1 = t_1$ همانند احتمال شرطی A به شرط $T_2 = t_2$ است (t_1 و t_2 مقادیر متناظر با افرازهای متناظر هستند)، یعنی $P(A \mid T_1 = t_1) = P(A \mid T_2 = t_2)$. در واقع، برای دو آماره با افراز یکسان تابعی یک به یک مانند g وجود دارد که:

$$T_1 = g(T_2), T_2 = g^{-1}(T_1)$$

❖ **تعریف۱:** افراز Π^* یک تلخیص افراز Π گفته می‌شود، اگر هر مجموعه افراز شده Π^* اجتماعی از مجموعه‌های افراز شده Π باشد.

❖ **تعریف۲: آماره بسنده:** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی $f(x,\theta)$ باشد. آماره‌ی $S = s(X_1,\dots,X_n)$ را یک آماره بسنده گویند، اگر و فقط اگر برای هر s، توزیع شرطی $X_1, X_2,\dots,X_n$ با معلوم بودن S=s به θ بستگی نداشته باشد.

این تعریف بیان می‌کند که در صورتی که مقدار S معلوم باشد به مقادیر نمونه جهت انجام استنباط در مورد پارامتر مجهول نیازی نیست.

نکته۲: ۱) اگر آماره T بسنده باشد و آماره U نیز افرازی همانند T ایجاد کند، آماره U نیز بسنده است و در واقع بین این دو آماره تناظری یک به یک برقرار است. ۲) اگر T آماره‌ای بسنده و تلخیصی از آماره‌ی U باشد، آماره‌ی U نیز بسنده است.

نکته۳: تعریف ۲ مبین آن است که با در دست داشتن S=s به اطلاعات کافی دسترسی داریم و این یعنی S کافی و بسنده است.

ممکن است این سؤال برای خواننده پیش آید که هدف از تلخیص داده‌ها چیست. این کار در اصل به منظور تسریع و افزایش دقت در برآوردیابی انجام می‌پذیرد (که در فصول آتی به تفصیل به آن خواهیم پرداخت)؛ چرا که مثلاً به جای کار در فضای n بعدی در فضای یک‌بعدی کار خواهیم کرد.

مثال۲: فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با پارامتر θ باشد، به طوری که $\theta \in (0,\infty)$. آماره بسنده برای پارامتر θ کدام است؟

۱) $X_{(n)}$　　۲) $X_{(1)}$　　۳) $\sum_{i=1}^{n} X_i$　　۴) $(X_{(1)}, X_{(n)})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** با فرض $x = (x_1, x_2,\dots,x_n)$ داریم:

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

و $S(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\theta)$؛ بنابراین اگر $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ و $\underset{\sim}{x} = (x_1,\dots,x_n)$، آنگاه:

$$P(X = x \mid S(X) = s) = P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n \mid S(X) = s) = \frac{P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n, S(X) = s)}{P(S(X) = s)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n)}{P(S(\underset{\sim}{X}) = s)} & ; \quad s = \sum x_i \\ 0 & ; \quad s \neq \sum x_i \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{s!}{n^s \prod_{i=1}^{n} x_i!} & ; \quad s = \sum x_i \\ 0 & ; \quad s \neq \sum x_i \end{cases}$$

چون چگالی مربوطه به θ بستگی ندارد، پس $S(X)$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر مجهول است.

روش دوم: تابع $f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} X_i!}$ تنها از طریق $\sum_{i=1}^{n} X_i$ به θ بستگی دارد؛ پس $\sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره بسنده برای θ است.

قرارداد: از این به بعد منظور از X مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مانند ($X_1, X_2,\dots,X_n$) و x مقادیری از متغیر تصادفی X مانند ($x_1, x_2,\dots,x_n$) می‌باشد.

مثال۳: فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$، یک نمونه از توزیع هندسی با پارامتر θ باشد. در این صورت نشان دهید که $s(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره بسنده برای θ است. X را تعداد شکست‌ها تا حصول اولین موفقیت در نظر بگیرید.

پاسخ: تابع چگالی به صورت $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, ...)$ داریم:

$$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}, s(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim NB(n, \theta) \text{ و } f_\theta(s) = \binom{n+s-1}{s} \theta^n (1-\theta)^s$$

حال توزیع شرطی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$P_\theta[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \mid (S(\underset{\sim}{x}) = s)] = \frac{P_\theta(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, S(\underset{\sim}{x}) = S)}{P(S(\underset{\sim}{X}) = s)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)}{P_\theta(S(\underset{\sim}{X}) = S)} ; & \sum_{i=1}^{n} x_i = S \\ 0 ; & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq S \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\binom{n+s-1}{s} \theta^n (1-\theta)^s} ; & \sum_{i=1}^{n} x_i = S \\ 0 ; & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq S \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{n+s-1}{s}} & \sum_{i=1}^{n} x_i = S \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq S \end{cases}$$

واضح است که توزیع شرطی مذکور به پارامتر θ بستگی ندارد؛ بنابراین $S(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره بسنده برای θ محسوب می‌شود. از طرفی می‌توانستیم بگوییم تابع $f_\theta(X) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{j=1}^{n} X_i}$ تنها از طریق $\sum_{i=1}^{n} X_i$ به θ بستگی دارد؛ بنابراین یک آماره بسنده برای θ است.

قضیه۱: (دسته‌بندی فیشر- نیمن) آماره $S(X)$ برای پارامتر θ بسنده است، اگر و تنها اگر توابع غیرمنفی g و h وجود داشته باشند، به قسمی که برای هر $\theta \in \Theta$، $f_\theta(x) = g(\theta, S(x))h(x)$ به طوری‌که $g(\theta, S(x))$ فقط از طریق $S(x)$ به x بستگی داشته و $h(x)$ به θ بستگی نداشته باشد.

نکته۴: این قضیه برای یافتن آماره‌ی بسنده بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد و قابل تعمیم به r آماره‌ی بسنده‌ی توأم نیز می‌باشد. به این قضیه، تجزیه به عوامل نیز گفته می‌شود.

مثال۴: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از تابع چگالی احتمال مقابل باشد. $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1 \;,\; \theta > 0$ آماره بسنده θ کدام است؟

۱) $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ۲) $\prod_{i=1}^{n} X_i^2$ ۳) $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ ۴) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{X_i^2}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم و فرم مربوط به قضیه ۱ را ایجاد می‌کنیم:

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1} . 1 = g(\theta, \prod_{i=1}^{n} x_i) h(x)$$

پس طبق قضیه‌ی دسته‌بندی نیمن، $\prod_{i=1}^{n} x_i$ یک آماره بسنده برای θ می‌باشد (در اینجا $h(x)$ تابع ثابت یک است).

مثال۵: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، به طوری‌که $-\infty < \mu < \infty$ و $\sigma > 0$. آن‌گاه آماره بسنده (μ, σ^2) کدام است؟

۱) $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X_i^2} \,,\, \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i^2)$ ۲) $\sum \dfrac{1}{X_i^2} \,,\, \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X_i}$ ۳) $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 - X_i} \,,\, \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)$ ۴) $\sum X_i \,,\, \sum X_i^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع چگالی احتمال نمونه را به دست می‌آوریم:

$$f_{\mu,\sigma^2}(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2]\}=(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2]$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum x_i-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}]=g(\mu,\sigma^2,\sum_{1}^{n}x_i,\sum_{1}^{n}x_i^2)h(x)$$

پس با توجه به قضیه فیشر ـ نیمن آماره بسنده توأم برای (μ,σ^2)، $(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2)$ می‌باشد.

نکته۵: از آنجایی که رابطه‌ی یک به یک بین $(\overline{X},S^2)$ و $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ وجود دارد، $(\overline{X},S^2)$ نیز آماره‌ای بسنده محسوب می‌شود.

تذکر۱: دقت کنید که نمی‌توان گفت $\sum_{i=1}^{n}x_i$ برای μ آماره بسنده و $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ برای σ^2 آماره بسنده است؛ بلکه $(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2)$ توأمان برای (μ,σ^2) بسنده است.

❖ **تعریف۳: خانواده نمایی چگالی‌ها:** خانواده یک‌پارامتری چگالی‌های $f(.;\theta)$ که می‌توان آن را برای $-\infty<x<\infty$ و برای هر $\theta\in\Theta$ و برای انتخابی مناسب از توابع $a(.)$، $b(.)$، $c(.)$ و $d(.)$ به صورت مقابل بیان کرد: $f(x;\theta)=a(\theta)b(x)e^{\{c(\theta)d(x)\}}$
به خانواده نمایی تعلق دارد.

این تعریف قابل تعمیم به خانواده نمایی kپارامتری نیز می‌باشد که در مثال ۵ می‌بینید.

مثال۶: فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیع‌های نمایی k- پارامتری با تابع چگالی (یا تابع احتمال) زیر باشد.

$$\mathbf{f_\theta(x)=a(\theta)b(x)\exp[\sum_{i=1}^{k}c_i(\theta)d_i(x)]}$$

آماره بسنده توأم برای $(C_1(\theta),C_2(\theta),\cdots,C_k(\theta))$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** به‌راحتی می‌توان نشان داد که $(\sum_{j=1}^{n}d_1(X_j),\dots,\sum_{j=1}^{n}d_k(X_j))$ یک آماره بسنده‌ی توأم برای θ است (به عنوان تمرین این کار را انجام دهید)

آماره بسنده مینیمال

همانطور که قبلاً گفتیم منظور ما خلاصه کردن داده‌ها بدون از دست دادن اطلاعاتی درباره پارامتر است و همچنین مشاهده کردیم که بیش از یک آماره بسنده می‌تواند وجود داشته باشد. در مورد آماره بسنده مینیمال ما به دنبال آماره‌ای هستیم که هیچ مجموعه‌ای از آماره‌های بسنده به اندازه‌ی آماره بسنده‌ی مینیمال داده‌ها را فشرده نکند و در واقع در جستجوی یافتن آماره‌ای می‌باشیم که حداکثر تلخیص را در بر داشته باشد.

یک تعریف رسمی از آماره‌های بسنده مینیمال به صورت زیر است:

❖ **تعریف۴: آماره‌ی بسنده مینیمال:** مجموعه‌ای از آماره‌های بسنده‌ی توأم را بسنده مینیمال می‌گویند، اگر و فقط اگر تابعی از هر مجموعه دیگری از آماره‌های بسنده باشد.

نکته۶: آماره‌ی بسنده مینیمال منحصربه‌فرد نیست؛ اما اگر S_1 و S_2 دو آماره بسنده مینیمال باشند، آنگاه یک رابطه یک به یک بین آن‌ها برقرار است.

نکته۷: اگر S آماره‌ی بسنده مینیمال باشد و $T=h(S)$ به طوری‌که h یک به یک نباشد، آنگاه T بسنده نخواهد بود؛ زیرا S تابعی از هر آماره‌ی بسنده‌ی دیگر است.

قضیه۲: فرض کنید X دارای تابع چگالی (یا تابع احتمال) به شکل $P_\theta(x)$ باشد. در صورتی که برای هر مقدار ثابت و ممکن $\theta_0\in\Theta$، نسبت $\frac{P_\theta(x)}{P_{\theta_0}(x)}$ برای هر $\theta\in\Theta$ تنها از طریق $S(X)$ به X بستگی داشته باشد، آنگاه $S(X)$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است.

مثال۷: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, \theta)$ باشد. یک آماره بسنده مینیمال برای θ به‌دست آورید.

۱) $X_{(1)}$ ۲) $X_{(n)}$ ۳) $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ۴) $\prod_{i=1}^{n} X_i$

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:**

$$P_\theta(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^{-n} u(\theta - x_{(n)})$$

با فرض $\theta_0 = x_{(n)}$ داریم:

$$\frac{P_\theta(\underset{\sim}{x})}{P_{\theta_0}(\underset{\sim}{x})} = (\frac{\theta}{\theta_0})^{-n} u(\theta_0 - x_{(n)})$$

نسبت مذکور از طریق $x_{(n)}$ به x بستگی دارد؛ در نتیجه $x_{(n)}$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است.

روش دوم: $x_1, \ldots, x_n \in U(0, \theta) \Leftarrow 0 < x_1, \ldots, x_n < \theta \Leftarrow X_{(n)} < \theta \Leftarrow X_{(n)}$ آماره بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

روش به‌دست آوردن آماره بسنده مینیمال به روش لهمن- شفه:

در این روش، به‌دست آوردن آماره بسنده مینیمال براساس تشکیل افرازهای آماره مورد نظر انجام می‌شود. در ساختن یک افزار از مجموعه‌ها بـرای خـانواده چگالی داده‌ها یعنی $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ که بسنده باشد، برای هر نقطه x از فضای نمونه، مجموعه $D(x)$ای موجود است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(x) = \{y : f_\theta(y) = k(x, y) f_\theta(x)\} \subset \chi$$

به طوری که $k(x, y)$ مثبت و مستقل از θ می‌باشد. در واقع $D(x)$ بیانگر مجموعه نقاط y از فضای نمونه است که با نقطه x معادل‌اند و این بدین معنی است که نسبت چگالی‌ها در نقاط x و y برای این نقاط (معادل) به θ بستگی ندارد و خواهیم داشت:

$$\frac{f_\theta(x)}{f_\theta(y)} = k(x, y)$$

با مثال زیر این روش را معرفی می‌کنیم.

توجه: دقت کنید که این روش در واقع یک قضیه می‌باشد و اکثراً در یافتن آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال می‌تواند مفید واقع شود.

مثال۸: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با چگـالی $f_\theta(x) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)\,;\ 0 < x < \theta\,,\ \theta \in (0, \infty)$ باشـد. آمـاره بسنده مینیمال برای θ کدام است؟

۱) $X_{(1)}$ ۲) $X_{(n)}$ ۳) $\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ ۴) $(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots X_{(n)})$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توابع چگالی احتمال توأم نمونه را به‌دست می‌آوریم:

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \{\frac{2}{\theta^2}(\theta - x_i) u(\theta - x_i)\} = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \{\prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i)\} u(\theta - x_{(n)})$$

به طریق مشابه داریم:

$$f_\theta(y) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \{\prod_{i=1}^{n} (\theta - y_i)\} u(\theta - y_{(n)}) \quad \Rightarrow \frac{f_\theta(x)}{f_\theta(y)} = \frac{\{\prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i)\} u(\theta - x_{(n)})}{\{\prod_{i=1}^{n} (\theta - y_i)\} u(\theta - y_{(n)})}$$

برای اینکه $\frac{f_\theta(x)}{f_\theta(y)}$ به θ بستگی نداشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta - y_i) \Rightarrow (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = (y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}) \\ u(\theta - x(n)) = u(\theta - y_{(n)}) \Rightarrow x_{(n)} = y_{(n)} \end{cases}$$

پس $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است.

برای پیدا کردن آماره بسنده مینیمال، آماره‌ای (T) را پیدا می‌کنیم که اگر $T(x) = T(y)$ باشد، آنگاه نسبت بالا به θ بستگی نداشته باشد.

این نسبت به θ بستگی ندارد، اگر و تنها اگر $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = (y_{(1)}, \ldots, y_{(n)})$؛ بنابراین $D(x) = \{y : y_{(i)} = x_{(i)}\ ;\ i = 1, \ldots, n\}$.

لذا $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است.

در استفاده از روش لهمن- شفه برای تعیین آماره بسنده‌ی مینیمال در حالتی که تکیه‌گاه توزیع بستگی به یک یا چند پارامتر ناشناخته داشته باشد، دستورالعمل زیر می‌تواند مفید باشد.

فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_\theta(x)$ باشد و $\theta \in \Theta \subseteq R^k$.

گام اول: برای یافته‌های یک نمونه تصادفی دلخواه x، مجموعه زیر را براساس x به دست آورید.
$\Theta_x = \{\theta \in \Theta : f_\theta(x) > 0\}$

گام دوم: رابطه هم‌ارزی را روی فضای نمونه به صورت زیر تعریف کنید:

$$x \sim y \longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_x = \Theta_y \\ \dfrac{f_\theta(y)}{f_\theta(x)} = k \ ; \ \theta \in \Theta_x \end{cases}$$

که در آن k یک مقدار ثابت و مثبت است.

کلاس مجموعه‌ای هم‌ارز به دست آمده یک افراز بسنده مینیمال برای θ را تشکیل می‌دهد؛ در نتیجه هر آماره‌ای که چنین افرازی را ایجاد کند، یک آماره بسنده مینیمال خواهد بود.

مثال۹: فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال برای $\theta = (\beta, \alpha)$ کدام است؟

$$\mathbf{f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} , x \ge \beta , \alpha > 0 , \beta \in (0,\infty)}$$

۱) $(X_{(1)}, \prod_{i=1}^n X_i)$ ۲) $(X_{(n)}, \prod_{i=1}^n X_i)$ ۳) $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$ ۴) $(X_{(n)}, \sum_{i=1}^n X_i)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به کمک روش لهمن- شفه داریم:

گام اول: $\Theta_x = \{(\alpha,\beta) : \alpha > 0 , \beta \le x_{(1)}\}$

گام دوم:

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta_x = \Theta_y \\ \dfrac{f_\theta(y)}{f_\theta(x)} = k \ ; \ \theta \in \Theta_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \left(\dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n y_i}\right)^{\alpha+1} = k \ ; \theta \in \Theta_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n y_i \end{cases} \Leftrightarrow (x_{(1)}, \prod_{i=1}^n x_i) = (y_{(1)}, \prod_{i=1}^n y_i)$$

بنابراین $(X_{(1)}, \prod_{i=1}^n X_i)$ آماره بسنده مینیمال برای $\theta = (\beta, \alpha)$ است.

مثال۱۰: فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با احتمال $\theta < x < 2\theta$ و $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}$ باشد. آماره بسنده مینیمال θ کدام است؟

۱) $X_{(1)}$ ۲) $X_{(n)}$ ۳) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ ۴) $X_{(n)} - X_{(1)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در اینجا نیز براساس روش لهمن- شفه داریم:

گام اول: $\Theta_x = \{\theta \mid \frac{X_{(1)}}{2} \le \theta \le X_{(n)}\} = [\frac{X_{(1)}}{2}, X_{(n)}]$

گام دوم:

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})} = k \ ; \ \theta \in \Theta_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_{(1)}, x_{(n)}) = (y_{(1)}, y_{(n)}) \\ \dfrac{U(\theta - \frac{y_{(1)}}{2}) U(y_{(n)} - \theta)}{U(\theta - \frac{X_{(1)}}{2}) U(x_{(n)} - \theta)} = k \end{cases} ; \ \theta \in \Theta_x \Leftrightarrow (x_{(1)}, x_{(n)}) = (y_{(1)}, y_{(n)})$$

بنابراین $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ آماره بسنده مینیمال است.

برآورد فاصله‌ای

در برآورد فاصله‌ای یا بازه‌ای به دنبال فاصله‌ای یا بازه‌ای هستیم که دربرگیرنده پارامتر مجهول جامعه باشد، همانند برآورد نقطه‌ای. مسأله یافتن برآورد بازه‌ای را از دو بُعد مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا یافتن برآوردگرهای بازه‌ای مطرح است و در مرحله دوم تعیین برآوردگرهای بازه‌ای خوب یا بهینه است.

❖ **تعریف ۱۳: بازه‌ی اطمینان:** فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از چگالی $f_\theta(X)$ باشد. اگر $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$ و $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$ دو آماره باشند که $T_1 \le T_2$ و داشته باشیم $P_\theta[T_1 < \tau(\theta) < T_2] = \alpha$ که در آن α به θ بستگی نداشته باشد، در این صورت بازه تصادفی (T_1, T_2) یک بازه اطمینان 100α درصد برای $\tau(\theta)$ است و α ضریب اطمینان نامیده می‌شود. T_1 و T_2 را به ترتیب حدود اطمینان بالایی و پایینی برای $\tau(\theta)$ می‌نامند. T_1 حد اطمینان پایینی یکطرفه و T_2 حد اطمینان بالایی یکطرفه برای $\tau(\theta)$ نامیده می‌شود.

۱ــ کمیت محوری

❖ **تعریف ۱۴:** فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از تابع چگالی $f_\theta(x)$ باشد. فرض می‌کنیم $Q = q(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$؛ یعنی Q تابعی از $X_1, X_2, \dots, X_n$ و θ می‌باشد. اگر Q دارای توزیعی باشد که به θ بستگی نداشته باشد، آن را یک کمیت محوری می‌نامند.

مثال۳۱: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta, 9)$ باشد. در این صورت $(\bar{X} - \theta)$ و $\dfrac{\bar{X} - \theta}{3/\sqrt{n}}$ کمیت محوری هستند، زیرا توزیع اولی $N(0, \frac{9}{n})$ و دومی نرمال استاندارد است، پس توزیع هیچ‌کدام به θ بستگی ندارد و هر دو کمیت محوری هستند.

۲ــ روش کمیت محوری

در به‌کارگیری روش متعارف و استاندارد برای به‌دست آوردن یک فاصله اطمینان برای θ که به روش کمیت محوری معروف است، ابتدا به دنبال یافتن یک کمیت محوری، مثلاً Q هستیم و با توجه به اینکه توزیع Q به پارامتر θ بستگی ندارد، برای هر $\alpha \in (0,1)$، مقادیر a و b را که بستگی به θ ندارد طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم:

$$P_\theta(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

آن‌گاه با حل نامساوی برحسب θ داریم:

$$P_\theta(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha$$

که در آن T_1 و T_2 توابعی از $X_1, X_2, \dots, X_n$ و a و b خواهند بود.

نکته۲۰: کمیت محوری لزومی ندارد که منحصربه‌فرد باشد.

نکته۲۱: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی پیوسته nتایی از توزیع $F_\theta(x)$ باشد، آنگاه $Y(\theta) = -2\mathrm{Ln}F_\theta(x) = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ln}F_\theta(x_i)$ دارای توزیع $\chi^2_{(2n)}$ است؛ لذا در بسیاری از موارد می‌توان $Y(\theta)$ را به عنوان کمیت محوری استفاده کرد.

مثال۳۲: فرض کنید یک نمونه تصادفی nتایی $X_1, X_2, \dots, X_n$ از توزیع $\theta > 0$; $u(0,\theta)$ باشد. یک کمیت محوری پیدا کنید و همچنین یک فاصله اطمینان برای θ بیابید.

☑ **پاسخ:**

$$Q = -2n\mathrm{Ln}\frac{X_{(n)}}{\theta} \sim \chi^2_{(2)} \quad ; \quad P(\chi^2_{(2, \frac{\alpha}{2})} < -2n\mathrm{Ln}\frac{X_{(n)}}{\theta} < \chi^2_{(2, 1-\frac{\alpha}{2})}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2, 1-\frac{\alpha}{2})} < \mathrm{Ln}\frac{X_{(n)}}{\theta} < -\frac{1}{2n}\chi^2_{(2, \frac{\alpha}{2})}) = 1 - \alpha$$

از آنجا که $2n$ علامت منفی دارد، پس جابه‌جایی حد بالا و پایین را داریم.

پس فاصله به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$(X_{(n)} \exp\{+\frac{1}{2n}\chi^2_{(2, \frac{\alpha}{2})}\}, X_{(n)} \exp\{+\frac{1}{2n}\chi^2_{(2, 1-\frac{\alpha}{2})}\})$$

۳ــ روش عمومی (یا روش آماری)

در مواردی ممکن است قادر به تعیین یک کمیت محوری نباشیم. در چنین مواقعی اگر علاقه‌مند به تعیین یک فاصله اطمینان در سطح $(1 - \alpha)$ بدون کمیت محوری باشیم، روش عمومی برای یافتن چنین فاصله اطمینانی به صورت زیر خواهد بود.

فرض کنید $Y = h(X_1, \dots, X_n)$ یک برآوردگر منطقی (MLE یا UMVUE) برای θ باشد. با فرض اینکه Y یک متغیر تصادفی پیوسته است، اگر $g_\theta(Y)$ نمایانگر تابع چگالی احتمال Y باشد، با انتخاب توابع $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$ به طوری‌که $h_1(\theta) < h_2(\theta)$ و

$$\begin{cases} P_\theta(Y < h_1(\theta)) = \int_{-\infty}^{h_1(\theta)} g_\theta(y)dy = \alpha_1 \\ P_\theta(Y > h_2(\theta)) = \int_{h_2(\theta)}^{\infty} g_\theta(y)dy = \alpha_2 \end{cases}$$

که در آن $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$، داریم:

$$P_\theta(h_1(\theta)<Y<h_2(\theta))=1-\alpha$$

حال فرض کنید $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$ توابعی اکیداً صعودی از θ باشند. در این صورت داریم:

$$h_1(\theta)<Y<h_2(\theta)\ \Leftrightarrow\ h_2^{-1}(Y)<\theta<h_1^{-1}(Y)$$

در نتیجه $(h_2^{-1}(Y),h_1^{-1}(Y))$ یک خانواده از فواصل اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ برای θ است.

مثال ۳۳: یک فاصله اطمینان برای θ به روش عمومی پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** $t=X_{(n)}$ یک آماره بسنده است که MLE برای θ می‌باشد.

$$f_T(t;\theta)=n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\qquad;\qquad 0<x<\theta$$

برای α_1 و α_2 و θ مفروض، $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\alpha_1=\int_0^{h_1(\theta)}\frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}dt\ \Rightarrow\ \int_0^{h_1(\theta)}t^{n-1}dt=\frac{\theta^n\alpha_1}{n}\ \Rightarrow\ \left.\frac{t^n}{n}\right|_0^{h_1(\theta)}=\frac{\theta^n\alpha_1}{n}\Rightarrow[h_1(\theta)]^n=\theta^n\alpha_1\ \Rightarrow\ h_1(\theta)=\theta\alpha_1^{\frac{1}{n}}$$

و

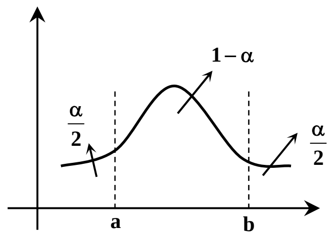
$$\alpha_2=\int_{h_2(\theta)}^{\theta}\frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}dt\ \Rightarrow\ \int_{h_2(\theta)}^{\theta}t^{n-1}dt=\frac{\alpha_2\theta^n}{n}\Rightarrow h_2^n(\theta)=\theta^n(1-\alpha_2)\ \Rightarrow\ h_2(\theta)=\theta(1-\alpha_2)^{\frac{1}{n}}$$

پس:

$$P(\theta\alpha_1^{\frac{1}{n}}<t<\theta(1-\alpha_2)^{\frac{1}{n}})=1-\alpha\Rightarrow P(t(1-\alpha_2)^{-\frac{1}{n}}<\theta<t\alpha_1^{-\frac{1}{n}})=1-\alpha\ ;\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2$$

۴ـ فاصله اطمینان با دم‌های برابر

اگر برای هر کمیت محوری Q ، a و b اختیار شده در روابط زیر صدق کنند:



$$P_\theta(Q<a)=P_\theta(Q>b)=\frac{\alpha}{2}$$

در این صورت چنین فاصله‌هایی را فواصل اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ با دم‌های برابر می‌نامیم.

در روش عمومی نیز اگر $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ اختیار شود، آنگاه فاصله اطمینان به‌دست آمده یک فاصله اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ با دم‌های برابر خواهد بود.

فواصل اطمینان با دم‌های برابر به دلیل سادگی و عمومیتشان در عمل بیشتر مورد توجه و استفاده‌اند.

مثال ۳۴: فرض کنید X_1، ...، X_n یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع $E(\theta)$ باشد. فاصله‌ای با دم‌های برابر برای میانگین جامعه در سطح $(1-\alpha)$ به‌دست آورید.

۱) $\left(\dfrac{\sum X_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}},\dfrac{\sum X_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}\right)$

۲) $\left(\dfrac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}},\dfrac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}\right)$

۳) $\left(\sum X_i\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})},\sum X_i\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}\right)$

۴) $\left(2n\sum X_i\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})},2n\sum X_i\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$X\sim E(\theta)\ ;\ \ f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\quad;\quad Q=\frac{2\sum X_i}{\theta}\sim\chi^2_{(2n)}$$

$$P\left(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<\frac{2\sum X_i}{\theta}<\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}\right)=1-\alpha\Rightarrow P\left(\frac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}<\theta<\frac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}\right)=1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان پارامتر θ به صورت مقابل است:

$$\left(\frac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}},\frac{2\sum X_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}\right)$$

۵ـ کوتاه‌ترین فاصله اطمینان

برای هر کمیت محوری Q، اگر a و b را طوری انتخاب کنیم که اندازه $T_2 - T_1$، یعنی طول فاصله اطمینان مشاهده شده، مینیمم شود، چنین فاصله اطمینانی کوتاه‌ترین فاصله اطمینان بر پایه کمیت محوری Q خواهد بود. گاهی ممکن است کمیت محوری دیگری نظیر Q' یافت شود که فاصله اطمینانی کوتاهتر از فاصله اطمینان مبتنی بر پایه کمیت محوری Q را ارائه کند (Q را به صورت تابعی از پارامتر مجهول و آماره بسنده قرار می‌دهیم).

نکته۲۲: اگر بعد فضای پارامتر با بعد فضای آماره بسنده برابر و توزیع کمیت محوری Q نسبت به محور عمودی متقارن باشد، آن‌گاه کوتاه‌ترین فاصله اطمینان مبتنی بر پایه Q با فاصله اطمینان با دم‌های برابر بر پایه Q یکسان است.

نکته۲۳: کوتاه‌ترین فاصله اطمینان خاصیت پایایی تحت تبدیل‌های عمومی از پارامتر را ندارد؛ حتی برخلاف فواصل اطمینان با دم‌های برابر خاصیت بهینگی برای توابع اکیداً صعودی یا نزولی نیز در فواصل اطمینان با کوتاه‌ترین طول حفظ نمی‌شود.

۶ـ فاصله اطمینان برای تفاضل دو میانگین

اگر $X_1, \dots, X_m$ یک نمونه تصادفی m تایی از توزیع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y_1, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ باشد و همچنین به فرض دو نمونه مستقل از هم باشند، فواصل اطمینان با دم‌های برابر در سطح $(1-\alpha)$ در حالات مختلف به صورت زیر است:

۱) زمانی‌که $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و نامعلوم باشد، آنگاه فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2$ برابر است با:

$$((\bar{X}-\bar{Y}) - t_{(m+n-2,(1-\frac{\alpha}{2}))} S_P\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \ \text{و}\ (\bar{X}-\bar{Y}) + t_{(m+n-2,(1-\frac{\alpha}{2}))} S_P\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})$$

به طوری که S_p^2 واریانس آمیخته است و به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$S_p^2 = \frac{(m-1)\sigma_1^2 + (n-1)\sigma_2^2}{m+n-2}$$

۲) زمانی $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و معلوم باشد به سادگی تحقیق می‌شود که:

$$((\bar{X}-\bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \ ,\ (\bar{X}-\bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})$$

فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2$ است.

۳) و اگر $\sigma_1 \neq \sigma_2$ و معلوم باشند، آنگاه فاصله:

$$((\bar{X}-\bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}} \ ,\ (\bar{X}-\bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}})$$

یک خانواده از فواصل اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ برای $(\mu_1 - \mu_2)$ می‌باشد.

۷ـ فاصله اطمینان برای نسبت دو واریانس

اگر $X_1, \dots, X_m$ یک نمونه تصادفی mتایی از توزیع $N(\mu, \sigma_1^2)$ و $Y_1, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma_2^2)$ باشد، آنگاه با فرض استقلال دو نمونه، فاصله اطمینان زیر یک فاصله اطمینان در سطح α برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ است.

$$(\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{(m-1,n-1,\frac{\alpha}{2})} \ ,\ \frac{S_2^2}{S_1^2}F_{(m-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2})})$$

۸ـ فاصله اطمینان مجانبی

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیعی از خانواده چگالی‌های $\{f_\theta \ ; \theta \in \Theta\}$ باشد. می‌خواهیم یک فاصله اطمینان مجانبی در سطح تقریبی $(1-\alpha)$ برای θ به‌دست آوریم. فرض کنید $\hat{\theta}_n$ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ بر پایه n مشاهده اول باشد. تحت شرایط مطلوب می‌توان نشان داد که برای nهای بزرگ $\hat{\theta}_n$ دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین θ و واریانس $\sigma_n^2(\theta) = [nE(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(x_1))^2]^{-1}$ است. توجه داشته باشید که $\sigma_n^2(\theta)$ همان کران پایین کرامر-رائو برای واریانس برآوردگرهای نااریب θ است؛ بنابراین برای nهای بزرگ داریم:

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \sim N(0,1)$$

اما به دلیل ظاهر شدن θ در مخرج کسر در برخی مسائل با مشکل مواجه می‌شویم. می‌توان نشان داد که برای nهای بزرگ‌تر $\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)}$ نیز دارای توزیع تقریبی $N(0,1)$ است. بدین ترتیب برای nهای بزرگ فاصله‌ی $(\hat{\theta}_n - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_n(\hat{\theta}_n)$ و $\hat{\theta}_n + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_n(\hat{\theta}_n))$ یک خانواده از فواصل اطمینان مجانبی در سطح تقریبی $(1-\alpha)$ برای θ است.

مثال۳۵: فرض کنید X_1، ...، X_m و Y_1، ...، Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $B(1,\theta_1)$ و $B(1,\theta_2)$ باشند. یک فاصله اطمینان مجانبی برای $\theta_1-\theta_2$ در سطح تقریباً $(1-\alpha)$ به‌دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم که $X_1,\dots,X_m$ و $Y_1,\dots,Y_n$ دارای توزیع برنولی با پارامترهای $(1,\theta_1)$ و $(1,\theta_2)$ هستند که میانگین آن‌ها به صورت زیر است:

$$\hat{\theta}_1=\bar{X}_m \quad , \quad \hat{\theta}_2=\bar{Y}_n \quad ; \quad \sigma_m^2(\theta_1)=\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{m} \quad , \quad \sigma_n^2(\theta_2)=\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}$$

می‌توان نشان داد که برای m و nهای بزرگ آماره‌ی زیر دارای توزیع مجانبی $N(0,1)$ است:

$$Q=\frac{(\bar{X}_m-\bar{Y}_n)-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\sigma_m^2(\hat{\theta}_1)+\sigma_n^2(\hat{\theta}_2)}}$$

بنابراین یک فاصله اطمینان مجانبی در سطح $(1-\alpha)$ برای $(\theta_1-\theta_2)$ برابر است با:

$$\left[(\bar{X}_m-\bar{Y}_n)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_m(1-\bar{X}_m)}{m}+\frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}} \;\text{ و }\; (\bar{X}_m-\bar{Y}_n)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_m(1-\bar{X}_m)}{m}+\frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}}\right]$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)=\theta x^{-\theta-1} I_{(0,\infty)}(x)$ باشد. MLE برای θ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{1}{\bar{x}}$ ۲) $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ ۳) $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$ ۴) $\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{n}$

۲ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu,1)$ باشد. آنگاه برآوردگر نااریب به طور یکنواخت با کمترین واریانس (UMVUE) برای μ^2 برابر است با: (سراسری ۷۵)

۱) $\bar{X}^2$ ۲) $\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ ۳) $\frac{1}{n}\sum X_i^2$ ۴) $\frac{1}{n}\sum (X_i-\bar{X})^2$

۳ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با چگالی $\theta \in (-\infty,+\infty)$ \quad $f_\theta(x)=\exp(\theta-x) \;;\; x\ge\theta$ باشد، اگر $T=X_{(1)}$، آنگاه T برآوردگر درستنمایی ماکزیمم برای θ برآوردی .... است. (سراسری ۷۵)

۱) اریب و ناسازگار ۲) نااریب و ناسازگار ۳) نااریب و سازگار ۴) اریب و سازگار

۴ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی $(n\ge 4)$ از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد. آنگاه برآوردگر نااریب با کمترین واریانس برای $\frac{\mu}{\sigma^2}$ برابر است با: (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{\bar{X}}{(n-1)S_u^2}$ ۲) $\frac{\bar{X}}{(n-3)S_u^2}$ ۳) $\frac{(n-3)\bar{X}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$ ۴) $\frac{(n-1)\bar{X}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$

۵ـ فرض کنید X_i دارای توزیع پواسون با پارامتر λ و λ دارای توزیع پیشین نمایی با پارامتر θ باشد. در این صورت براساس یک نمونه تصادفی nتایی از X_iها و تحت تابع زیان درجه دوم $L=(T(x)-\lambda)^2$، برآورد بیزی λ چیست؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\hat{\lambda}_B=\frac{(\bar{x}+n)}{(1+\theta)}$ ۲) $\hat{\lambda}_B=\frac{(n\bar{x}+1)}{(n+\theta)}$ ۳) $\hat{\lambda}_B=\frac{(n+\theta)}{(n\bar{x}+1)}$ ۴) $\hat{\lambda}_B=\frac{\bar{x}+1}{(\theta+1)}$

۶ـ در توزیع دوجمله‌ای $X\sim Bin(n,\theta)$ برآوردگری برای θ به صورت $T(x)=\frac{x+a}{n+a+b}$ در نظر می‌گیریم. مخاطره T به ازای چه مقادیری از a و b مینیمم خواهد بود؟ (سراسری ۷۵)

۱) $a=-b=1$ ۲) $a=b=1$ ۳) $a=1,\ b=0$ ۴) $a=b=0$

۷ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. اگر $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$، $X_{(n)}=\max(X_1,\cdots,X_n)$، $T_1=2\bar{x}$ و $T_2=\frac{n+1}{n}x_{(n)}$ باشند، گزینه صحیح کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) T_1 برآوردکننده نااریب θ است؛ اما T_2 نمی‌تواند برآوردکننده نااریب θ باشد.

۲) T_2 برآوردکننده نااریب θ است؛ اما T_1 نمی‌تواند برآوردکننده نااریب θ باشد.

۳) T_1 و T_2 برآوردکننده‌های θ با شرط $V_\theta(T_2)\le V_\theta(T_1)$ هستند.

۴) T_1 و T_2 برآوردکننده‌های نااریب θ با شرط $V_\theta(T_1)<V_\theta(T_2)$ هستند.

۸ـ نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را با تابع چگالی $f(x,\theta)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,\ \lambda>0\\ 0 & \theta.w\end{cases}$ در نظر بگیرید. در این صورت کاراترین برآوردکننده برای $\frac{1}{\lambda}$ و واریانس آن عبارت است از: (سراسری ۷۶)

۱) $\bar{X}$ با واریانس $\frac{1}{n\lambda^2}$ ۲) $\frac{1}{\bar{X}}$ با واریانس $\frac{1}{n\lambda^2}$ ۳) $\frac{1}{\bar{X}}$ با واریانس $n\lambda^2$ ۴) $\bar{X}$ با واریانس $n\lambda^2$

۹ـ فرض کنید Y_1 ، Y_2 و Y_3 آماره‌های ترتیبی یک نمونه تصادفی سه‌تایی از توزیعی با تابع چگالی $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}$ باشند. آنگاه یک آماره نااریب برای θ عبارت است از: (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{y_2}{2}$ ۲) $2y_1$ ۳) $3y_3$ ۴) $4y_1$

۱۰ـ فرض کنید $X=(X_1,\dots,X_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع F_θ ، S یک آماره و T یک آماره بسنده برای خانواده توزیع‌های $\{F_\theta:\theta\in\Theta\}$ باشد. اگر $I_{\underline{X}}(\theta)$ نمایانگر اطلاع فیشر بر پایه X باشد، گزینه صحیح کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $I_X(\theta)>I_T(\theta)>I_S(\theta)$ ۲) $I_{\underline{X}}(\theta)=I_T(\theta)\geq I_{\underline{S}}(\theta)$ ۳) $I_T(\theta)>I_{\underline{X}}(\theta)>I_{\underline{S}}(\theta)$ ۴) $I_{\underline{X}}(\theta)=I_{\underline{S}}(\theta)>I_T(\theta)$

۱۱ـ هرگاه $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $\Gamma(1,\frac{1}{\theta})$ باشد، آنگاه یک آماره نااریب با کمترین واریانس برای θ برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) $\bar{x}$ ۲) $n\bar{x}$ ۳) $\frac{(n-1)}{\sum x_i}$ ۴) $\frac{\sum x_i}{(n-1)}$

۱۲ـ دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی با پارامتر p را در نظر بگیرید. اگر X تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش اول باشد، گزینه صحیح کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ بر پایه X وجود دارد؛ اما آن را به‌طور صریح نمی‌توان نوشت.

۲) برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ بر پایه X وجود ندارد.

۳) $\frac{1}{\bar{X}}$ برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ است.

۴) $\frac{2}{X+1}$ برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ است.

۱۳ـ دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی با پارامتر p را در نظر بگیرید. اگر X تعداد آزمایش‌های لازم تا حصول r موفقیت باشد، گزینه صحیح کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ وجود ندارد. ۲) $\frac{x}{r}$ یک برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ است.

۳) $\frac{r}{x}$ یک برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ است. ۴) $\frac{x+1}{r+1}$ یک برآوردگر نااریب $\frac{1}{p}$ است.

۱۴ـ هرگاه $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2}\exp\{-(\frac{x-\theta_1}{\theta_2})\}\quad \theta_1\leq x<\infty$ باشد، آنگاه برآورد ML (حداکثر درستنمایی) پارامتر θ_2 کدام‌یک از مقادیر زیر است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\sum X_i-nX_{(1)}$ ۲) $X_{(n)}-X_{(1)}$ ۳) $\frac{1}{n}\sum(X_i-X_{(1)})$ ۴) $X_{(1)}$

۱۵ـ $\bar{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی از توزیع $b(1,\theta)$ است. برآوردی که به طور یکنواخت دارای حداقل واریانس در میان کلیه برآوردهای نااریب برای واریانس $\bar{X}$ است، برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}$ ۲) $\bar{x}(1-\bar{x})$ ۳) $n\bar{x}(1-\bar{x})$ ۴) $\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n-1}$

۱۶ـ X یک تک مشاهده از چگالی احتمال $f(x;\theta)=x\theta^2e^{-\theta x}$ و $x>0$ است. یک بازه اطمینان (CI) با ضریب اطمینان $1-\alpha$ برای θ برابر است با: (سراسری ۷۷)

۱) $\left(\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},4)}}{X},\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},4)}}{X}\right)$ ۲) $\left(\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},3)}}{2X},\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},3)}}{2X}\right)$ ۳) $\left(\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},4)}}{2X},\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},4)}}{2X}\right)$ ۴) $\left(\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},4)}}{2X},\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},4)}}{2X}\right)$

آزمون‌های χ^2

در این بخش تعدادی از آزمون فرض‌ها را که به طریقی توزیع کی دو را دخالت می‌دهند، معرفی می‌کنیم. این بحث شامل توزیع مجانبی نسبت درستنمایی تعمیم یافته، آزمون‌های نیکویی برازش و آزمون‌هایی مربوط به جدول‌های توافقی می‌شود. در این بخش توزیع مجانبی نسبت درستنمایی تعمیم‌یافته را نیز بیان می‌کنیم. در صورتی که آماره LRT قابل تبدیل به آماره‌ای ساده نباشد، برای به‌دست آوردن توزیع آن، حجم نمونه را بزرگ در نظر می‌گیریم. از آنجایی‌که $\lambda(x)$ در فاصله‌ی $(0,1)$ توزیع می‌شود، بالطبع برای هر مقدار ثابت و K، آماره‌ی $U=-2KLn\lambda(x)$ روی فاصله‌ی $(0,\infty)$ توزیع می‌شود؛ بنابراین K را باید طوری انتخاب کنیم که U دارای توزیع χ^2 باشد.

قضیه۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی با چگالی توأم $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n\ ;\ \theta)$ باشد که در آن $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_k)$ است و فرض کنید که این چگالی کاملاً در شرایط کلی نظم (شرایط مطلوب) صدق می‌کند.

در آزمون فرض $H_0:\theta=\theta_{1.},\dots,\theta_{r.}=\theta_{r.}\ ,H_1:\theta_i\neq\theta_{i.}, 1\le i\le r$ که در آن $\theta_{1.},\dots,\theta_{r.}$ معلوم و $\theta_{r+1},\dots,\theta_k$ نامعلوم‌اند، هنگامی که H_0 درست و n حجم نمونه بزرگ است، $-2\log\lambda_n$ تقریباً دارای توزیع خی دو با r درجه آزادی است.

درجه آزادی توزیع مجانبی خی دو را می‌توان به دو طریق زیر در نظر گرفت:

اولاً: به عنوان تعداد پارامترهایی که با H_0 مشخص می‌شوند. ثانیاً: به عنوان تفاضل ابعاد Θ و Θ_0.

H_0 رد می‌شود اگر و تنها اگر $-2\log\lambda_n>\chi^2_{(1-\alpha)}(r)$ که در آن $\chi^2_{1-\alpha}(r)$ برابر چندک $(1-\alpha)$ام توزیع کی دو با r درجه آزادی است.

مثال۱۷: فرض کنید $x_{i1_i},\dots,x_{in_i}$ نمونه تصادفی مستقل با توزیع $N(\mu_i,\sigma_i)\ ;\ i=1,2,3$ باشد. می‌خواهیم به روش LRT آزمون زیر را انجام دهیم. ناحیه رد آزمون مجانبی را برای n_i های بزرگ $i=1,2,3$ مشخص کنید.

$$\begin{cases}H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2\\ H_1:\ \exists i,j\ ;\ \sigma_i^2\neq\sigma_j^2\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(\theta)=L(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2)=\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}e^{\frac{-1}{2\sigma_i^2}(x_{ij}-\mu_i)^2}$$

$$\sup L(\theta)=L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\mu_3,\hat\sigma_1^2,\hat\sigma_2^2,\hat\sigma_3^2)=\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat\sigma_i^2}}e^{e^{\frac{-1}{2\hat\sigma_i^2}(x_{ij}-\hat\mu_i)}}=\prod_{i=1}^{3}(2\pi\hat\sigma_i^2)^{\frac{-n_i}{2}}e^{\frac{-1}{2\hat\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\hat\mu_i)}=\prod_{i=1}^{3}(2\pi\hat\sigma_i^2)^{\frac{-n_i}{2}}e^{-\frac{n_i}{2}}$$

$\hat\mu_i$ در رابطه بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat\mu_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}=\overline{X}_{i.},\hat\sigma_i^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2$$

$$\sup_{\theta_0}L(\theta)=L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\mu_3,\hat\sigma^2,\hat\sigma^2,\hat\sigma^2)=\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_i}(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\hat\sigma^2}(x_{ij}-\hat\mu)}=\prod_{i=1}^{3}(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{n_i}{2}}e^{-\frac{1}{2\hat\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\hat\mu)}$$

$$=(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{\sum n_i}{2}}e^{-\frac{1}{2\hat\sigma^2}}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\hat\mu)=(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\hat\sigma^2}\sum_{i=1}^{3}n_i\hat\sigma_i^2}=(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\hat\sigma_i^2 n_i,\hat\mu_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$$

حال اقدام به تشکیل $\lambda(x)$ می‌کنیم:

$$\lambda(x_1,x_2,x_3)=\frac{\sup_{\theta_0}L(\theta)}{\sup_{\theta}L(\theta)}=\frac{(2\pi\hat\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{3}\hat\sigma_i^{2\,-\frac{n_i}{2}}e^{-\frac{n}{2}}}=\frac{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}n_i\hat\sigma_i^2)^{-\frac{n}{2}}}{\prod_{i=1}^{3}\hat\sigma_i^{2\,-\frac{n_i}{2}}}=\frac{\hat\sigma_1^{2\,\frac{n_1}{2}}\hat\sigma_2^{2\,\frac{n_2}{2}}\hat\sigma_3^{2\,\frac{n_3}{2}}}{(\frac{1}{n}(n_1\hat\sigma_1^2+n_2\hat\sigma_2^2+n_3\hat\sigma_3^2))^{\frac{n}{2}}}$$

پس تابع آزمون و ناحیه رد به صورت مقابل به دست می‌آیند:

$$\varphi(X)=\begin{cases}1 & ;\quad -2Ln\lambda(x_1,x_2,x_3)>\chi^2_{2,1-\alpha}\\ 0 & ;\quad 0.w\end{cases}$$

نمونه‌گیری از توزیع نرمال

در این قسمت به معرفی آزمون فرض‌های مربوط به پارامترهای توزیع نرمال و ناحیه بحرانی آن‌ها می‌پردازیم.

آزمون‌های مربوط به میانگین

۱ـ یک جامعه نرمال:

الف) $\begin{cases} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ (σ^2 معلوم)

ناحیه بحرانی: $\bar{X} > \mu_0 + (\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) Z_{1-\alpha}$

ب) $\begin{cases} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ (σ^2 نامعلوم)

فرض کنید $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ باشد، آنگاه H_0 رد می‌شود، اگر $T > C$ باشد (توجه کنید اگر $\mu = \mu_0$ باشد، آنگاه T دارای توزیع t با $(n-1)$ درجه آزادی است.)

ج) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \ne \mu_0 \end{cases}$ (σ^2 معلوم)

H_0 رد می‌شود، اگر بازه اطمینان زیر μ_0 را دربرنداشته باشد.

$$\bar{X} - Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ برابر چندک $[1-\frac{\alpha}{2}]$ام توزیع نرمال استاندارد است.

د) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \ne \mu_0 \end{cases}$ (σ^2 نامعلوم)

H_0 رد می‌شود، اگر بازه اطمینان زیر μ_0 را دربرنداشته باشد.

$$\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ برابر چندک $[1-\frac{\alpha}{2}]$ام توزیع $t-$ استیودنت با $(n-1)$ درجه آزادی است.

۲ـ برابری میانگین دوجامعه‌ای:

الف) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$

H_0 رد می‌شود، اگر و تنها اگر $T > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$.

$t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ برابر چندک $(1-\alpha)$ام توزیع t با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی است و

$$T = \frac{\sqrt{n_1 n_2 / (n_1 + n_2)} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{[\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2] / (n_1 + n_2 - 2)}}$$

۳ـ برابری چند میانگین:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_i = \mu_j & \forall i, j \\ H_1 : \mu_i \ne \mu_j & \exists i, j \end{cases}$$

این قسمت اغلب به عنوان آنالیز واریانس یکطرفه تلقی می‌شود.

آزمون‌های مربوط به واریانس

۱ـ برای یک جامعه:

الف) $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ (μ معلوم)

ناحیه رد: $\sum (X_i - \mu)^2 > k$

ب) $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ (μ نامعلوم)

ناحیه بحرانی $V > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

$$V = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

۲ـ برای دو جامعه:

قبل از بیان فرض، R را بیان می‌کنیم:

$$R=\frac{(n_2-1)\sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j}-\bar{X}_1)^2}{(n_1-1)\sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2}$$

الف) $\begin{cases}H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2\\H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2\end{cases}$

H_0 رد می‌شود، اگر و تنها اگر R بزرگتر از $F_{(1-\alpha)}(n_1-1,n_2-1)$ باشد که آن را برابر چندک $(1-\alpha)$ام توزیع F با (n_1-1) و (n_2-1) درجه آزادی در نظر می‌گیریم.

ب) $\begin{cases}H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2\\H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2\end{cases}$

H_0 رد می‌شود، اگر و تنها اگر R کوچکتر از $F_{(1-\alpha)}(n_1-1,n_2-1)$ باشد.

ج) $\begin{cases}H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\\H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2\end{cases}$

H_0 رد می‌شود، اگر R کوچک یا بزرگ شود.

H_0 پذیرفته می‌شود، اگر و تنها اگر $k_1<R<k_2$، که در آن k_1 و k_2 طوری انتخاب می‌شوند که آزمون دارای اندازه α شود.

۳ـ چندجامعه‌ای:

$$\begin{cases}H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_k^2\\H_1:\sigma_i^2\ne\sigma_j^2\qquad\exists i,j\end{cases}$$

فرض کنید $\lambda(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{\prod_{i=1}^{k}(\hat{\sigma}_i^2)^{\frac{n_i}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\sigma}_i^2\right)^{\frac{n}{2}}}$ که در آن $\hat{\sigma}_i^2=\dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2$ است، آنگاه H_0 رد می‌شود، اگر و تنها اگر $-\log\lambda>\chi^2_{(1-\alpha)}(k-1)$.

$\chi^2_{(1-\alpha)}(k-1)$ چندک $(1-\alpha)$ توزیع کی دو با $(k-1)$ درجه آزادی است.

آزمون‌های ناااریب

❖ **تعریف۱۶: آزمون‌های نااریب:** احتمال رد شدن H_0 هنگامی که نادرست است حداقل به بزرگی احتمال رد شدن H_0 در هنگامی است که درست است. یعنی:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\pi_\varphi(\theta)\le\inf_{\theta\in\Theta_1}\pi_\varphi(\theta)$$ و یا: $\forall\theta\in\Theta_0:\pi_\varphi(\theta)\le\alpha\ ,\ \forall\theta\in\Theta_1:\pi_\varphi(\theta)\ge\alpha$

دقت کنید که هر آزمون UMPT در سطح α، یک آزمون نااریب در سطح α نیز می‌باشد.

آزمون (۱)

تعداد سؤالات : ۴۵ **سطح آزمون : (A)** (ساده)

۱ـ در یکی از دبیرستان‌های تهران سه کلاس چهارم دبیرستان A، B و C وجود دارد که احتمال این‌که دانش‌آموزی از این کلاس‌ها در امتحانات پایان ترم موفق شود، به ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ است. احتمال این‌که دانش‌آموزی متعلق به این کلاس‌ها باشد، به ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. اگر یک دانش‌آموز انتخابی در امتحانات پایان ترم موفق شده باشد، احتمال این‌که به کلاس B تعلق داشته باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۲ـ سه پیشامد A، B و C را در نظر بگیرید. فرض کنید $P(C)=۲P(B)=۴P(A)$ و $P(A\cup B\cup C)=۵P(A)$ باشد. اگر A و B ناسازگار، A و C مستقل و B و C نیز از هم مستقل باشند، احتمال پیشامد A برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳ـ اگر S فضای نمونه باشد و A یک پیشامد دلخواه در این فضا باشد ، $۱-P(A\mid S)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $P(A)$ ۴) $P(A')$

۴ـ اگر $X_۱,...,X_{۱۰}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(۰,۱)$ باشد، در این صورت واریانس آماره ترتیبی سوم کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۲۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۲۱}$

۵ـ اگر $Z_۱,Z_۲,...,Z_۶$ یک نمونه تصادفی ۶تایی از توزیع نرمال استاندارد باشد، در این صورت امید ریاضی متغیر $T=\frac{Z_۱}{Z_۲}+\frac{Z_۳}{Z_۴}+\frac{Z_۵}{Z_۶}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۶ـ متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $x\in R$ و $F_X(x)=\frac{۱}{۱+e^{-۲x}}$ می‌باشد. میانه این توزیع برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $Ln۲$ ۴) $e^{-۲}$

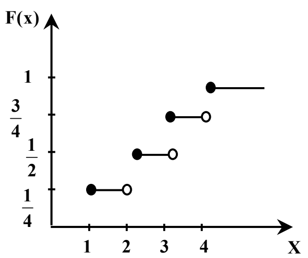
۷ـ اگر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t)=e^{۲(e^t-۱)}$ باشد، مقدار احتمال $P(X\geq ۲)$ کدام است؟

۱) $۱-e^{-۲}$ ۲) $۱-۳e^{-۲}$ ۳) $۱-e^{-۳}$ ۴) $۱-۳e^{-۳}$

۸ـ براساس بررسی‌های انجام شده معلوم شده است که ۶۰ درصد قبولی‌های کنکور سراسری خانم هستند. در یک نمونه تصادفی به حجم ۱۰۰ از قبولی‌های کنکور، احتمال آن‌که حداقل ۱۶ نفر آقا باشند، کدام است؟ (Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\Phi(\sqrt{۲۴})$ ۴) $۱-\Phi(\sqrt{۲۴})$

۹ـ در شکل زیر $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی X است. مقادیر $P(X=۲)$ و $P(X\geq ۴)$ به ترتیب کدام هستند؟



۱) $\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴},\frac{۲}{۴}$

۳) $۱,\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴}$

۱۰ـ فرض کنید توزیع توأم دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد. مقدار $P(X_1=3, X_2=2)$ کدام است؟

$X_2 \backslash X_1$	1	2	3
1	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	K

۱) $\frac{1}{12}$　　۲) $\frac{2}{13}$　　۳) $\frac{3}{12}$　　۴) $\frac{5}{12}$

۱۱ـ اگر $P(X_2=1 \mid X_1=1)=\frac{1}{12}$ و $P(X_1=2)=\frac{7}{12}$ و $x_1 \in \{1,2\}$ باشد، در این صورت حاصل $P(X_1=1, X_2=1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$　　۲) $\frac{1}{144}$　　۳) $\frac{5}{144}$　　۴) $\frac{5}{24}$

۱۲ـ اگر X دارای میانگین ۱ و انحراف معیار ۴ باشد، آنگاه داریم:

۱) $P(|X-1| \le 4k) \ge 1-\frac{1}{k^2}$　　۲) $P(|X-1| \le k) \ge \frac{16}{k^2}$

۳) $P((X-1)^2 \le 4K) \le \frac{1}{k^2}$　　۴) $P((kX-1)^2 \ge (16)^2) \le 1-\frac{1}{(k)^2}$

۱۳ـ اگر $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ نمونه تصادفی ۱۰ تایی از تابع $P(\lambda)$ باشد، در این صورت $X_1 \mid Y=y$ دارای چه توزیعی است؟ $\left(Y=\sum_{i=1}^{10} X_i\right)$

۱) $B(y,10)$　　۲) $B(y,\frac{1}{10})$　　۳) $P(10)$　　۴) $P(10\lambda)$

۱۴ـ فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی ۳تایی از توزیع $Be(p)$ باشد. در این صورت کدام‌یک آماره بسنده برای p <u>نیست</u>؟

۱) $T_1(x)=x_1x_2+2x_2$　　۲) $T_2(x)=x_1+2x_2+2x_3$　　۳) $T_3(x)=3x_1+2x_2+2x_3$　　۴) $T_4(x)=5x_1+x_2+x_3$

۱۵ـ فرض کنید $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع $N(0,0,1,1,\rho)$ باشد. یک آماره بسنده مینیمال برای ρ کدام است؟

۱) $\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$　　۲) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$　　۳) $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}$　　۴) $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$

۱۶ـ اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد، آنگاه کدام‌یک از هم مستقل‌اند؟

۱) $X_{(n)}, X_{(1)}$　　۲) $\text{med}, \bar{X}$　　۳) $X_{(n-1)}, X_{(2)}$　　۴) $X_{(4)}-X_{(3)}, X_{(2)}-X_{(1)}$

۱۷ـ یک سکه سالم را حداقل چند بار باید پرتاب کرد تا با احتمال دست‌کم ۰/۹ نسبت دفعاتی که شیر مشاهده می‌شود، بین ۰/۴ و ۰/۶ باشد؟

۱) ۲۵۰ بار　　۲) ۵۲۰ بار　　۳) ۵۷۰ بار　　۴) ۷۵۰ بار

۱۸ـ فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند، ضریب همبستگی X_1-X_2 و X_1+X_2 کدام است؟

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x_1<2 \ , \ 0<x_2<2 \\ & \end{cases}$$

۱) صفر　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۱

۱۹ـ در صورتی که $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد، $Var(\bar{X} \mid \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)$ کدام است؟

۱) σ^2　　۲) $\frac{n}{n+1}\sigma^2$　　۳) $\frac{\sigma^2}{n}$　　۴) $\frac{n+1}{n}\sigma^2$