



مدرس‌ان شریف

فصل اول

«سیگنال‌ها»

قبل از ورود به هر مبحثی درباره تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، ابتدا باید با مفهوم سیگنال و روابط حاکم بر آن‌ها آشنا شویم. این فصل به نوعی مهمترین فصل این کتاب بوده و درجه‌ای برای ورود به بحث اصلی است. تا انتهای این کتاب به دفعات از روابط مطرح شده در این فصل استفاده خواهد شد. این فصل در چهار درسنامه تنظیم شده است. ابتدا در درسنامه اول با مقدمات و برخی از تعاریف آشنا می‌شویم. در این درسنامه روش‌های مختلف نمایش سیگنال‌ها و نحوه رسم شکل آن‌ها را بیان خواهیم کرد. در درسنامه دوم انواع تبدیلات بر روی سیگنال‌ها را مطرح می‌کنیم. با برخی از این تبدیلات در ریاضیات پایه آشنا شده‌اید. درسنامه سوم مربوط به ویژگی‌های سیگنال‌ها است که برای هر سیگنال چهار ویژگی مختلف را بررسی می‌کنیم. در نهایت در درسنامه چهارم با سیگنال‌های اصلی و مهم آشنا می‌شویم. سوالات بسیار کمی به صورت مستقیم از این فصل مطرح می‌شود اما ابداً این فصل را دست‌کم نگیرید زیرا پیش‌نیازی برای تمامی فصل‌های بعدی است.

درسنامه (I): مقدمات

در این درسنامه به بررسی مقدمات و تعاریفی درباره سیگنال‌ها می‌پردازیم. همچنین نحوه نمایش و رسم شکل یک سیگنال را نیز بررسی می‌کنیم.

مفهوم سیگنال

در حالت کلی سیگنال به عنوان یک مدل ریاضی از پدیده‌های فیزیکی تعریف می‌شود. برای مثال سیگنال‌های مالی در بازار بورس نحوه تغییر قیمت یک سهام را در یک بازه زمانی مشخص می‌کنند. یا سیگنال ولتاژ دو سر یک مقاومت طبق رابطه $v(t) = Ri(t)$ تغییرات ولتاژ و جریان یک مقاومت را نشان می‌دهد. به بیان ساده‌تر، سیگنال، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است. این متغیر مستقل می‌تواند از هر جنسی باشد. برای مثال، سیگنال تصویر که آن را به صورت $I(x, y)$ نشان می‌دهیم، روشنایی هر پیکسل از تصویر را بر حسب طول (x) و عرض (y) آن نشان می‌دهد. بنابراین $I(x, y)$ تابعی از دو متغیر مستقل x, y است که این متغیرها از جنس مکان هستند. در این درس صرفاً سیگنال‌هایی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم که دارای یک متغیر مستقل از جنس زمان یا فرکانس هستند. فصل اول تا سوم مربوط به سیگنال‌های زمانی و فصول چهارم تا هشتم مربوط به سیگنال‌های فرکانسی خواهند بود. در این درسنامه صرفاً تعاریف ابتدایی از سیگنال‌های فرکانسی بررسی شده و بحث اصلی بر روی این سیگنال‌ها از فصل چهارم شروع می‌شود.

بعد از این توضیحات ابتدایی به تعریف سیگنال می‌پردازیم که صرفاً مختص این کتاب است و نمی‌توان این تعریف را تعمیم داد.

تعریف سیگنال: به تابعی از متغیر مستقل زمان یا فرکانس به ترتیب سیگنال‌های زمانی یا فرکانسی گفته می‌شود که یک بیان ریاضی از پدیده‌های فیزیکی هستند.

اجزای سیگنال

یک سیگنال از اجزای زیر تشکیل می‌شود:

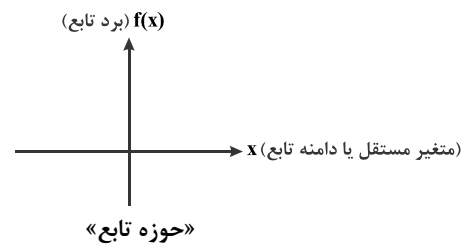
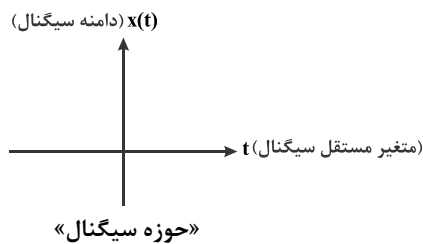
۱- **نام سیگنال:** سیگنال‌های زمانی را با حروف کوچک انگلیسی $(x, y, h, w, \dots)$ و سیگنال‌های حوزه‌ی فرکانس را با حروف بزرگ انگلیسی $(X, Y, H, W, \dots)$ نامگذاری می‌کنیم.

۲- **متغیر مستقل:** متغیری که تابع هیچ متغیر دیگری نبوده و از جنس زمان یا فرکانس است. متغیرهای مستقل از جنس زمان را با t یا n نشان می‌دهیم. t در حوزه‌ی اعداد حقیقی $(t \in \mathbb{R})$ و n در حوزه اعداد صحیح $(n \in \mathbb{Z})$ تغییر می‌کنند. متغیرهای مستقل از جنس فرکانس را با ω ، s یا z نشان می‌دهیم. ω در حوزه اعداد حقیقی $(\omega \in \mathbb{R})$ ، s ، z نیز در حوزه‌ی اعداد مختلط $(s, z \in \mathbb{C})$ تغییر می‌کنند.

۳- **دامنه‌ی سیگنال:** متغیری که تابع متغیر مستقل بوده و در حوزه‌ی اعداد مختلط تغییر می‌کند. برای نشان دادن دامنه‌ی سیگنال، نام آن را نوشته و در مقابل آن یک پرانتز یا کروشه باز و بسته قرار می‌دهیم. به عنوان مثال دامنه‌ی سیگنال‌های زمانی را به صورت $x()$ یا $x[]$ و دامنه‌ی سیگنال‌های فرکانسی را به صورت $X()$ یا $X[]$ نشان می‌دهیم. گاهی به دامنه‌ی سیگنال، «متغیر تابع» یا «مقدار سیگنال» نیز گفته می‌شود.



تذکره ۱: در حوزه تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها، دامنه یک سیگنال (Amplitude) معادل برد یک تابع در حوزه تجزیه و تحلیل توابع است، آن را با دامنه توابع اشتباه نگیرید (صرفاً نامگذاری‌ها متفاوت هستند)

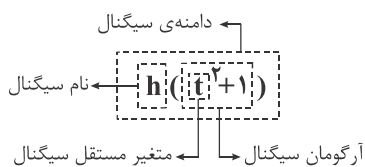


۴- **آرگومان سیگنال:** به عبارتی که در داخل پرانتز یا گروهی مقابل نام سیگنال قرار دارد، آرگومان سیگنال گفته می‌شود. آرگومان سیگنال شامل خود متغیر مستقل یا تابعی از آن است.

دسته‌بندی سیگنال‌های زمانی

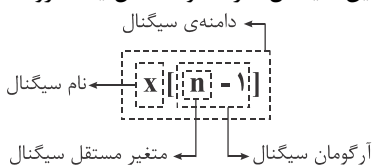
سیگنال‌های زمانی با توجه به پیوسته یا گسسته بودن متغیر مستقل به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

۱- **سیگنال‌های زمان پیوسته (CT(Continuous Time):** در این سیگنال‌ها، متغیر مستقل که از جنس زمان است، پیوسته بوده و در حوزه اعداد حقیقی تغییر می‌کند. متغیر مستقل سیگنال‌های زمان پیوسته را با t نشان می‌دهند. آرگومان این سیگنال‌ها را عموماً داخل یک پرانتز باز و بسته () قرار می‌دهند.



به عنوان مثال به سیگنال زمان پیوسته مقابل و اجزای تشکیل‌دهنده آن توجه کنید.

۲- **سیگنال‌های زمان گسسته (DT(Discrete Time):** در این سیگنال‌ها، متغیر مستقل که از جنس زمان است، گسسته بوده و در حوزه‌ی اعداد صحیح تغییر می‌کند. متغیر مستقل سیگنال‌های گسسته را با n و گاهی با k یا m نیز نشان می‌دهند. آرگومان این سیگنال‌ها را عموماً داخل یک گروه کروشه باز و بسته [] قرار می‌دهند اما می‌توان آن را داخل یک پرانتز باز و بسته نیز نشان داد.



به عنوان مثال به سیگنال زمان گسسته مقابل و اجزای تشکیل‌دهنده آن توجه کنید.

تذکره ۲: دامنه سیگنال‌های گسسته تنها به‌ازای $n \in \mathbb{Z}$ هایی که باعث صحیح شدن مقدار آرگومان سیگنال می‌شوند، تعریف می‌شود. در نتیجه دامنه یک سیگنال گسسته را به‌ازای $n \notin \mathbb{Z}$ های صحیحی که باعث غیر صحیح شدن مقدار آرگومان می‌شوند، صفر در نظر می‌گیریم.

تذکره ۳: به دامنه سیگنال‌های گسسته نمونه یا sample نیز گفته می‌شود.

۳- **سیگنال‌های دیجیتال:** به سیگنال‌های زمان گسسته‌ای که دامنه آن‌ها فقط در حوزه‌ی اعداد صحیح تغییر کند، سیگنال‌های دیجیتال گفته می‌شود. در جدول زیر انواع سیگنال‌های زمانی و حوزه تغییرات متغیرهای این سیگنال‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم.

نوع سیگنال	متغیر مستقل	دامنه
زمان پیوسته	$t \in \mathbb{R}$	$x() \in \mathbb{C}$
زمان گسسته	$n \in \mathbb{Z}$	$x[] \in \mathbb{C}$
دیجیتال	$n \in \mathbb{Z}$	$x[] \in \mathbb{Z}$

ضابطه سیگنال

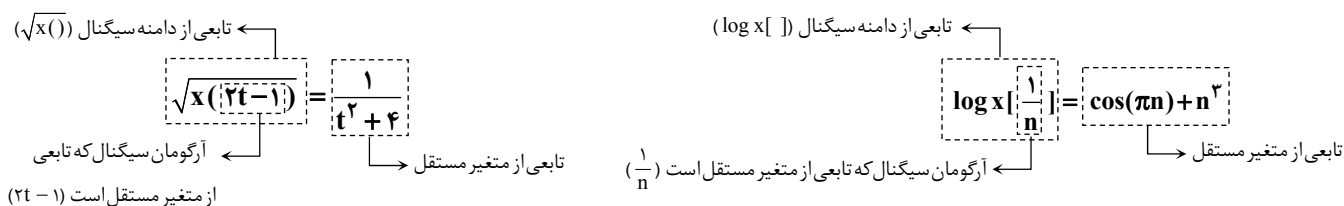
رابطه بین متغیر مستقل (n/t) و دامنه سیگنال $(x[n]/x(t))$ ، ضابطه سیگنال نامیده می‌شود. هر سیگنال توسط ضابطه خود بیان می‌شود و به کمک آن می‌توان دامنه سیگنال را در هر زمان دلخواه تعیین کرد. فرم کلی ضابطه سیگنال از رابطه زیر تبعیت می‌کند. (هم پیوسته و هم گسسته):

قسمت (۱)	قسمت (۲)	قسمت (۳)
فرم ریاضی: $h(x(g(t))) = f(t)$ فرم کلی ضابطه سیگنال: $h(x[g(n)]) = f(n)$	فرم بیانی: تابعی از متغیر مستقل	تابعی از متغیر مستقل = (تابعی از متغیر مستقل)

اما در اغلب موارد ضابطه سیگنال‌ها در فرم زیر بیان می‌شود، که به آن فرم استاندارد گفته می‌شود (هم پیوسته و هم گسسته):

فرم استاندارد ضابطه سیگنال: فرم ریاضی: $x(t) = f(t)$ $x[n] = f(n)$	فرم بیانی: (متغیر مستقل) دامنه سیگنال: فرم بیانی: تابعی از متغیر مستقل =
---	--

به عنوان مثال به دو سیگنال پیوسته و گسسته زیر که در فرم کلی بیان شده‌اند توجه کنید:



تذکره ۴: طبق تعریف این کتاب برای سیگنال‌ها به عنوان تابعی از اطلاعات، ضابطه بیان شده برای یک سیگنال باید به گونه‌ای باشد که شرایط تابع برقرار باشد. بنابراین اگر به ازای یک زمان، بیشتر از یک مقدار برای دامنه سیگنال محاسبه شود، ضابطه بیان شده نمی‌تواند نشان‌دهنده یک سیگنال باشد. به سیگنال‌های زیر که با ضابطه خود بیان شده‌اند، توجه کنید.

$$x(t) = -t^2 + 1 \quad ۱-$$

قسمت ۱: تابعی از دامنه سیگنال که در این مثال خود دامنه یعنی $x(t)$ است.

قسمت ۲: آرگومان سیگنال که باید متغیر مستقل یا تابعی از آن باشد که در این مثال خود متغیر مستقل یعنی t است.

قسمت ۳: تابعی از متغیر مستقل که در این مثال $(-t^2 + 1)$ است.

ضابطه‌ی این سیگنال در فرم استاندارد بیان شده است.

طبق ضابطه داده شده باید بتوان دامنه سیگنال را در هر زمان دلخواه به دست آورد. برای مثال دامنه سیگنال را در زمان‌های $t = 1$ ، $t = -\frac{3}{2}$ و $t = +\infty$ تعیین می‌کنیم.

$$t = 1 \rightarrow x(1) = -(1)^2 + 1 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$t = -\frac{3}{2} \rightarrow x(-\frac{3}{2}) = -(-\frac{3}{2})^2 + 1 \Rightarrow x(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$$

$$t = +\infty \rightarrow x(+\infty) = -(\infty)^2 + 1 \Rightarrow x(+\infty) = -\infty$$

$$x(t-1) = -t^2 + 1 \quad ۲-$$

در این مثال، قسمت دوم ضابطه سیگنال یعنی آرگومان آن را تغییر دادیم. آرگومان را به صورت تابعی از متغیر مستقل یعنی $(t-1)$ نوشتیم. بنابراین ضابطه این سیگنال در فرم استاندارد بیان نشده است. در این مثال نیز ضابطه سیگنال را به ازای $t = 1$ ، $t = -\frac{3}{2}$ و $t = +\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$t = 1 \rightarrow x(1-1) = -(1)^2 + 1 \Rightarrow x(0) = 0$$

$$t = -\frac{3}{2} \rightarrow x(-\frac{3}{2}-1) = -(-\frac{3}{2})^2 + 1 \Rightarrow x(-\frac{5}{2}) = -\frac{5}{4}$$

$$t = +\infty \rightarrow x(\infty-1) = -(\infty)^2 + 1 \Rightarrow x(+\infty) = -\infty$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این مثال با جایگذاری $t = 1$ در ضابطه سیگنال دامنه سیگنال $x(t)$ در $t = 0$ یعنی $x(0)$ به دست آمد، در حالی که در مثال قبل با جایگذاری $t = 1$ ، دامنه سیگنال $x(t)$ در همان $t = 1$ یعنی $x(1)$ محاسبه شد. این اختلاف به این دلیل است که آرگومان سیگنال در این مثال برابر با متغیر مستقل (t) نبوده و تابعی از آن است. در واقع دامنه سیگنال $x(t-1)$ در $t = 1$ یعنی $x(1-1) = x(0)$ با دامنه سیگنال $x(t)$ در $t = 0$ یعنی $x(0)$ برابر است.

$$x^2(t) = -t^2 + 1 \quad ۳-$$

در این مثال، قسمت اول ضابطه سیگنال یعنی دامنه آن را تغییر داده و آن را به صورت تابعی از $x(t)$ یعنی $x^2(t)$ نوشتیم. بنابراین ضابطه این سیگنال در فرم استاندارد بیان نشده است. حال ضابطه سیگنال را در سه زمان $t = 1$ ، $t = -\frac{3}{2}$ و $t = +\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$t = 1 \rightarrow x^2(1) = -(1)^2 + 1 \Rightarrow x^2(1) = 0 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$t = -\frac{3}{2} \rightarrow x^2(-\frac{3}{2}) = -(-\frac{3}{2})^2 + 1 \Rightarrow x^2(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4} \Rightarrow x(-\frac{3}{2}) = \pm j\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$t = +\infty \rightarrow x^2(+\infty) = -(\infty)^2 + 1 \Rightarrow x^2(+\infty) = -\infty \Rightarrow x(+\infty) = \pm j(\infty)$$

دامنه سیگنال در دو زمان $t = -\frac{3}{2}$ و $t = +\infty$ به صورت قطعی به دست نیامد $x(-\frac{3}{2})$ برابر با $j\frac{\sqrt{5}}{2}$ یا $-j\frac{\sqrt{5}}{2}$ ؛ بنابراین با توجه به تعریف سیگنال در این کتاب که آن را تابعی از متغیر مستقل در نظر می‌گیریم، چنین ضابطه‌ای نشان‌دهنده یک سیگنال نیست (در هر تابع به ازای یک مقدار از متغیر مستقل حداکثر باید یک مقدار از متغیر تابع موجود باشد).



$$x[n] = -n^2 + 1 \quad ۴-$$

در ضابطه این سیگنال، متغیر مستقل n است. بنابراین این ضابطه نشان‌دهنده یک سیگنال زمان گسسته است. دامنه این سیگنال را در زمان‌های $n = 1$ ،

$$n = 1 \rightarrow x[1] = -(1)^2 + 1 \Rightarrow x[1] = 0 \quad n = -\frac{3}{2} \text{ و } n = +\infty \text{ به دست می‌آوریم.}$$

$$n = -\frac{3}{2} \rightarrow n \notin \mathbb{Z} \rightarrow x[-\frac{3}{2}] = 0 \quad x[-\frac{3}{2}] \text{ تعریف نمی‌شود یا به عبارتی برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.}$$

$$n = +\infty \rightarrow x[+\infty] = -(\infty)^2 + 1 \Rightarrow x[+\infty] = -\infty$$

$$x[\sqrt{n}] = -n^2 + 1 \quad ۵-$$

در این مثال، آرگومان سیگنال را به صورت تابعی از n یعنی $\sqrt{n}$ در نظر گرفتیم. حال دامنه این سیگنال را در زمان‌های $n = 4$ ، $n = 2$ ، $n = -1$ و

$$n = \frac{5}{2} \text{ به دست می‌آوریم.}$$

آرگومان یعنی $\sqrt{-1}$ در حوزه اعداد صحیح تعریف نشده است، بنابراین $x[\sqrt{-1}]$ تعریف نشده و صفر در نظر گرفته می‌شود. $n = -1 \rightarrow x[\sqrt{-1}] = 0$

آرگومان یعنی $\sqrt{2}$ عضو اعداد صحیح نیست، بنابراین $x[\sqrt{2}]$ تعریف نشده و صفر در نظر گرفته می‌شود. $n = 2 \rightarrow x[\sqrt{2}] = 0$

$\sqrt{4} = \pm 2 \in \mathbb{Z}$ است، بنابراین $x[\sqrt{4}]$ نشان‌دهنده $x[-2]$ و $x[+2]$ است. $n = 4 \rightarrow x[\sqrt{4}] = -(4)^2 + 1 \Rightarrow x[-2] = x[+2] = -15$

$$n = \frac{5}{2} \rightarrow n \notin \mathbb{Z} \rightarrow x[\sqrt{\frac{5}{2}}] = 0$$

تذکره ۵: دامنه سیگنال‌های گسسته به ازای $n \notin \mathbb{Z}$ و n های صحیحی که به ازای آنها آرگومان عددی صحیح نباشد، صفر در نظر گرفته می‌شود.

در این مثال سه حالت زیر رخ داد:

$$n = \frac{5}{2} : n \notin \mathbb{Z} \text{ است و دامنه سیگنال در این زمان صفر در نظر گرفته می‌شود. } x[\sqrt{\frac{5}{2}}] = 0 \quad ۱-$$

$n = -1$ و $n = 2$: با وجود اینکه $n \in \mathbb{Z}$ بود اما باعث غیرصحیح شدن آرگومان شدند. در نتیجه در $n = -1$ و $n = 2$ دامنه سیگنال صفر در نظر

گرفته می‌شود. $x[\sqrt{-1}] = x[\sqrt{2}] = 0$

$n = 4 : n \in \mathbb{Z}$ است و آرگومان نیز به‌ازای این n صحیح می‌باشد. بنابراین دامنه سیگنال در $n = 4$ قابل تعریف است. $۳-$

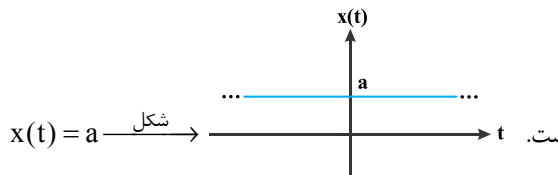
شکل سیگنال

برای رسم شکل سیگنال‌ها از همان روش‌های مرسوم رسم شکل توابع و نقطه‌گذاری‌های مناسب استفاده می‌کنیم. شکل سیگنال‌ها را در مختصات دوبعدی

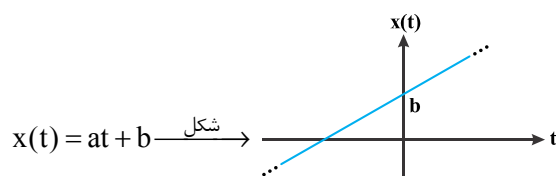
رسم می‌کنیم که محور افقی مربوط به متغیر مستقل ($n \in \mathbb{Z} / t \in \mathbb{R}$) و محور عمودی مربوط به دامنه سیگنال ($x[n] \in \mathbb{C} / x(t) \in \mathbb{C}$) است.

توجه به نکات زیر برای رسم شکل سیگنال‌ها مفید هستند.

(۱) در رسم شکل سیگنال‌های پیوسته عموماً با چند سیگنال زیر روبرو خواهید بود.



(الف) سیگنال ثابت: سیگنالی که ضابطه‌ی آن به ازای تمامی زمان‌ها یک عدد مختلط ثابت است. $x(t) = a$



(ب) سیگنال خطی: سیگنالی که ضابطه‌ی آن یک چندجمله‌ای درجه اول برحسب

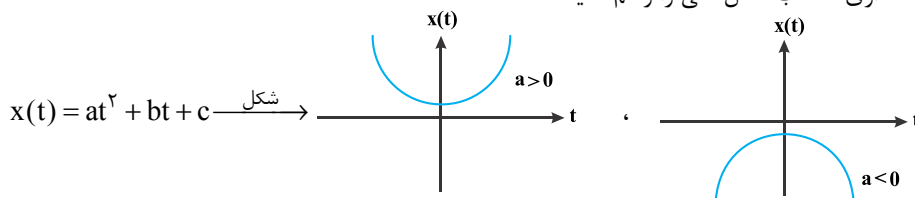
متغیر مستقل t است. برای رسم چنین سیگنالی از هر روشی که به خاطر دارید

می‌توانید استفاده کنید، اما انتخاب دو نقطه و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر

سریع‌ترین روش است.

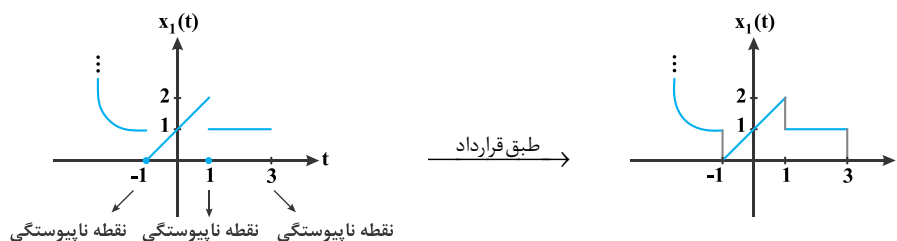
(ج) سیگنال درجه دوم (سه‌می): سیگنالی که ضابطه‌ی آن یک چندجمله‌ای درجه دوم برحسب متغیر مستقل t است. نیازی به رسم دقیق شکل این سیگنال

نیست بلکه کافیت با پیدا کردن رأس سه‌می و نقطه‌گذاری مناسب شکل کلی را رسم کنید.

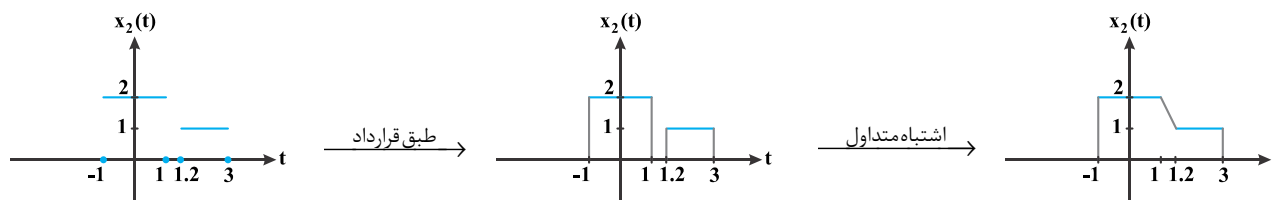


(د) سیگنال‌های اصلی: با ضابطه این سیگنال‌ها و شکل آن‌ها در درسنامه (۴) به طور کامل آشنا خواهید شد.

۲) اگر سیگنال $x(t)$ در لحظه $t = t_0$ دارای نقطه ناپیوستگی باشد، طبق یک قرارداد، دامنه سیگنال در t_0^- و t_0^+ را با یک خط عمود به یکدیگر وصل می‌کنیم.



توجه کنید دامنه $x_1(t)$ در $t = 3^-$ برابر با ۱ و در $t = 3^+$ برابر با صفر است. بنابراین در $t = 3$ کافیسیت با یک خط عمود دامنه ۱ را به صفر وصل می‌کنیم.



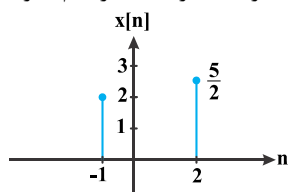
$x_2(t)$ در چهار نقطه $t = -1, 1, 1/2, 3$ ناپیوستگی دارد. براساس یک اشتباه متداول، دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t = 1$ به دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t = 1/2$ با یک خط مورب وصل می‌شود، در صورتی‌که باید با یک خط عمود دامنه سیگنال در $t = 1^-$ یعنی $x_2(1^-) = 2$ به دامنه‌ی آن در $t = 1^+$ یعنی $x_2(1^+) = 0$ وصل شود.

تذکره: مقدار دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t = t_0$ از رابطه $x(t_0) = \frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$ به دست می‌آید.

برای مثال مقادیر سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در نقاط پیوستگی آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$x_1(1) = \frac{x_1(1^-) + x_1(1^+)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_2(3) = \frac{x_2(3^-) + x_2(3^+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

۳) برای رسم سیگنال‌های گسسته کافیسیت به جای n اعداد صحیح جایگذاری کرده و دامنه سیگنال را طبق ضابطه حساب کنید. دامنه سیگنال‌های گسسته را به ازای n ‌های غیر صحیح و n ‌های صحیحی که باعث غیر صحیح شدن آرگومان می‌شوند، صفر در نظر می‌گیریم. مقدار دامنه $x[n]$ در هر لحظه‌ی n_0 را با یک خط عمودی که در بالای آن یک نقطه توپر قرار گرفته است، نشان می‌دهیم. این خط عمودی را به اندازه مقدار دامنه رسم کرده و مقدار دامنه را کنار دایره توپر یادداشت می‌کنیم.



به عنوان مثال شکل سیگنال $x[n]$ که در $n = -1$ برابر با ۲ و در $n = 2$ برابر با $\frac{5}{2}$ است به صورت مقابل

رسم می‌شود.

۴) برای رسم سیگنال‌های چندضابطه‌ای، کافیسیت هر ضابطه را با توجه به بازه‌ی خود به صورت جداگانه رسم کرده و بعد قسمت‌های رسم شده را در کنار یکدیگر قرار داد. هنگام نقطه‌گذاری برای رسم هر ضابطه، همواره ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی را در نقطه‌گذاری قرار دهید.

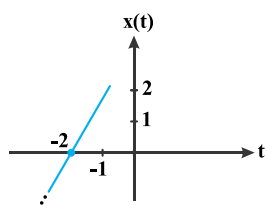
مثال ۱: شکل هر یک از سیگنال‌های زیر را با توجه به ضابطه‌ی آن رسم کنید.

$$x(t) = \begin{cases} 2t+4, & t < -1 \\ 2, & -1 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 3 \\ \frac{1}{3}t^2, & t > 3 \end{cases}$$

پاسخ: سیگنال چندضابطه‌ای است. بنابراین هر ضابطه را در بازه زمانی خود رسم می‌کنیم.

ابتدای بازه

$$x(t) = 2t+4, \quad t < -1 \quad \xrightarrow{\text{نقطه‌گذاری}} \quad \begin{array}{c|c} t & x(t) \\ \hline -1 & 2(-1)+4=2 \\ 3 & 2(-3)+4=0 \end{array}$$



ضابطه $x(t)$ در بازه $t < -1$ برابر با خط مورب رسم شده است. این بازه از سمت چپ نامحدود است. با گذاشتن یک علامت «...» ادامه‌دار بودن این خط را از سمت چپ نشان می‌دهیم.



مدرسایان شریف

فصل دوم

«سیستم‌ها»

بعد از شناخت و بررسی سیگنال‌ها در فصل اول، در این فصل سیستم‌ها را معرفی و بررسی می‌کنیم. سیگنال‌ها همواره در کنار سیستم‌ها مطرح می‌شوند و دو مفهوم جدایی‌ناپذیر هستند. سیستم در یک مفهوم ابتدایی به‌عنوان ماشینی است که سیگنال‌ها به آن وارد و خارج می‌شوند. سیگنال‌های وارد شده دچار تغییراتی شده و در نهایت از سیستم خارج می‌شوند.

این فصل یکی از مهمترین فصل‌ها در کنکور می‌باشد که در دو درسنامه تنظیم شده است. درسنامه اول مربوط به مقدمات و تعاریف اولیه، نحوه نمایش و تعیین خروجی سیستم‌ها است. گاهی از بخش سوم درسنامه اول یعنی تعیین خروجی سیستم‌ها سؤالاتی مطرح می‌شود. اما مهمترین قسمت این فصل درسنامه دوم است. در این درسنامه ۶ خاصیت برای سیستم تعریف می‌شود. هر سال حداقل یک سؤال از این بخش مطرح می‌شود و شما با داشتن ضابطه سیستم باید خاصیت‌های خواسته شده را تعیین کنید. مثال‌های تألیفی که بعد از معرفی هر خاصیت آورده شده‌اند شما را در رابطه با سؤالات کنکور کاملاً آماده می‌کنند. کافی است راه‌حل‌های مطرح شده برای هر مثال را با حوصله و دقت کافی مطالعه کنید. روش‌های تستی متعددی نیز برای تعیین این خاصیت‌ها مطرح شده است. بعد از کمی تمرین و کسب تسلط کافی، خواهید دید که به راحتی می‌توانید خواص شش‌گانه یک سیستم را حتی بدون نیاز به کاغذ و قلم بررسی کنید.

درسنامه (۱): تحلیل و توصیف سیستم‌ها



در این درسنامه ابتدا با مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به سیستم‌ها آشنا می‌شویم. سپس روش‌های مختلف توصیف سیستم‌ها را به‌صورت اجمالی بررسی می‌کنیم. در نهایت روش‌های تعیین خروجی سیستم‌ها را دسته‌بندی کرده و شرح می‌دهیم.

تعاریف اولیه و مقدمات

در این بخش ابتدا با چند مفهوم و تعریف اولیه آشنا می‌شویم:

تعریف سیستم

فضایی است که در آن سیگنال‌ها دچار تغییراتی شده و به سیگنال‌های دیگری تبدیل می‌شوند. سیستم‌ها را معمولاً با حرف S نشان می‌دهند. سیستم‌ها از سه جزء عملگر سیستم، ورودی و خروجی تشکیل شده‌اند.

عملگر سیستم: نشان‌دهنده فرآیند تبدیل سیگنال ورودی به سیگنال خروجی سیستم است. در واقع عملگر سیستم، تمامی تبدیلات رخ داده بر روی ورودی سیستم را نشان می‌دهد. عملگر سیستم را معمولاً به‌صورت $S\{\}$ یا $T\{\}$ نشان می‌دهند.

ورودی سیستم: سیگنال یا سیگنال‌هایی که تحت عملگر سیستم قرار می‌گیرند.

خروجی سیستم: سیگنال یا سیگنال‌هایی که از تبدیلات اعمال شده بر روی ورودی سیستم حاصل می‌شوند.

تذکره ۱: در این درس به بررسی سیستم‌هایی با یک ورودی و یک خروجی می‌پردازیم که اصطلاحاً به آن‌ها سیستم‌های تک‌ورودی - تک‌خروجی (single-input single output system (SISO)) گفته می‌شود.

سیستم‌ها را می‌توان بنا بر معیارهای مختلفی طبقه‌بندی کرد، اما تنها دو نوع سیستم زیر در این درس اهمیت دارند.

سیستم‌های پیوسته در زمان

سیستم‌هایی که در آن‌ها سیگنال‌های ورودی پیوسته در زمان به سیگنال‌های خروجی پیوسته در زمان تبدیل می‌شوند. نمایش شماتیک این سیستم‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{c} x(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t) \end{array}, \quad x(t) \xrightarrow{S} y(t), \quad S\{x(t)\} = y(t)$$

سیستم‌های گسسته در زمان

سیستم‌هایی که در آن‌ها سیگنال‌های ورودی گسسته در زمان به سیگنال‌های خروجی گسسته در زمان تبدیل می‌شوند. نمایش شماتیک این سیستم‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{c} x[n] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y[n] \end{array}, \quad x[n] \xrightarrow{S} y[n], \quad S\{x[n]\} = y[n]$$

تذکره ۲: همواره ورودی سیستم را $(x[n], x(t))$ و خروجی سیستم را $(y[n], y(t))$ در نظر می‌گیریم (به جای x و y می‌توان هر حرف انگلیسی دلخواهی استفاده کرد). در واقع ورودی و خروجی سیستم، سیگنال‌های خالصی هستند که هیچ‌گونه تبدیل نوع اول (تبدیل بر روی متغیر مستقل) و تبدیل نوع دوم (تبدیل بر روی دامنه) بر روی آن‌ها انجام نگرفته است. مگر اینکه یک ورودی و خروجی خاصی برای سیستم در نظر بگیریم. برای مثال در سؤالی اشاره می‌شود که «سیگنال $x^2(t-1)$ به‌عنوان ورودی به یک سیستم اعمال می‌شود».

تذکره ۳: منظور از نمایش‌های $S\{x(t)\} = ?$ و $x(t) \xrightarrow{S} ?$ خروجی سیستم S به‌ازای ورودی $x(t)$ است. برای مثال نمایش $S\{x(t-t_0)\}$ به معنای خروجی سیستم S_1 به‌ازای ورودی $x(t-t_0)$ نمایش $x^2[-n] \xrightarrow{S_2}$ به معنای خروجی سیستم S_2 به‌ازای ورودی $x^2[-n]$ است.

نمایش سیستم‌ها

هر سیستم با توجه به فرآیند مخصوص به خود سیگنال‌های ورودی را به سیگنال‌های خروجی تبدیل می‌کند. برای توصیف این فرآیند و نحوه تبدیل سیگنال ورودی به خروجی روش‌های مختلفی وجود دارد. این روش‌ها را به‌طور جامع و کاربردی در فصل هشتم بررسی می‌کنیم. در این قسمت این روش‌ها صرفاً معرفی شده و به اندازه لازم توضیح داده می‌شوند.

نمایش جبری

در این نوع نمایش رابطه بین ورودی و خروجی به‌صورت یک رابطه جبری بیان می‌شود. عملگرهای جبری استفاده شده در این نمایش شامل: چهار عمل اصلی، توان، روابط کوچکتر بزرگتری، انتگرال، سیگما، مشتق و ... هستند. این عملگرها هم بر روی متغیر مستقل و هم بر روی دامنه سیگنال اثر می‌گذارند. نمایش جبری، متداول‌ترین روش نمایش سیستم‌ها است. می‌توان سیستم‌ها را در این نوع نمایش به سه دسته طبقه‌بندی کرد:

۱- سیستم‌های تک ضابطه‌ای: سیستم‌هایی که به ازای تمامی زمان‌های ممکن طبق یک ضابطه، خروجی را محاسبه می‌کنند. تمامی زمان‌های ممکن در سیستم‌های پیوسته در زمان حوزه اعداد حقیقی ($t \in \mathbb{R}$) و در سیستم‌های گسسته در زمان حوزه اعداد صحیح ($n \in \mathbb{Z}$) هستند.

$$S_1: y(t) = x^2(t-1) \quad , \quad S_2: y[n] = \sum_{k=-\infty}^{2n-1} x[k^2-2]$$

۲- سیستم‌های چندضابطه‌ای زمانی: سیستم‌هایی که در هر بازه زمانی، خروجی را از ضابطه مشخصی تعیین می‌کنند. در این سیستم‌ها شرط‌ها بر روی متغیر مستقل که از جنس زمان است، تعریف می‌شود.

$$S_1: y(t) = \begin{cases} \sqrt{x(t)} & , \quad t > 2 \\ \frac{1}{2}x(t-1) & , \quad 0 < t \leq 2 \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau & , \quad t \leq 0 \end{cases} \quad , \quad S_2: y[n] = \begin{cases} 2x^2[n^2] & |n| \leq 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

۳- سیستم‌های چندضابطه‌ای دامنه‌ای: سیستم‌هایی که خروجی را از چند ضابطه تعیین می‌کند که شرط استفاده از هر ضابطه براساس دامنه ورودی یا خروجی تعیین می‌شود.

$$S_1: y(t) = \begin{cases} x^3(\sqrt{t}) & , \quad x(t) > 2x(t-1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x(t) < 2x(t-1) \end{cases} \quad , \quad S_2: y(t) = \begin{cases} x(t-1) - x^2(t) & , \quad y(t) \geq 0 \\ x(t) & , \quad y(t) < 0 \end{cases}$$

$$S_3: y[n] = \begin{cases} nx[n-1] & , \quad x[n-1] < n-1 \\ x[n] + x[1] & , \quad x[n-1] \geq n-1 \end{cases}$$

توجه: سیستم S_3 هم از نوع چندضابطه‌ای زمانی است و هم دامنه‌ای. چون شرط‌ها هم بر روی متغیر مستقل و هم بر روی دامنه ورودی تعریف شده‌اند.

نمایش توصیفی

بیان رابطه ورودی و خروجی سیستم در چند جمله و عبارت، نمایش توصیفی سیستم نامیده می‌شود. این نوع از نمایش هر چند نمایش مرسوم نیست اما کمک می‌کند که درک خوبی از عملگرهای سیستم و فرآیند تبدیل ورودی به خروجی حاصل شود. برای مثال به نمایش توصیفی دو سیستم S_1 و S_2 که از روی نمایش جبری آن‌ها به‌دست آمده است دقت کنید.

نمایش توصیفی S_1 : سیستم گسسته‌ای که متغیر مستقل ورودی یعنی (n) را به $(n-1)$ تبدیل کرده (ورودی را یک واحد به سمت راست انتقال زمانی می‌دهد) و دامنه ورودی را در دو ضرب می‌کند.

نمایش توصیفی S_2 : سیستم پیوسته‌ای که متغیر مستقل ورودی را دو برابر کرده (فشرده می‌کند) و بعد دامنه ورودی را به توان دو رسانده و در متغیر مستقل ضرب می‌کند.



نمایش بلوک دیاگرامی

بیان رابطه ورودی و خروجی سیستم به کمک دسته‌ای از نمادها و شکل‌های استاندارد، نمایش بلوک دیاگرامی سیستم نامیده می‌شود. اصولاً این نوع نمایش برای فهم کلی عملکرد سیستم در یک نگاه مناسب بوده و برای بررسی و تحلیل سیستم بهتر است نمایش جبری سیستم از روی نمایش بلوک دیاگرامی به دست آید. جدول زیر انواع بلوک دیاگرام‌ها و معادل جبری آن‌ها را نشان می‌دهد.

معادل جبری	بلوک دیاگرام
عملگر ضرب اسکالر (یکسان برای پیوسته و گسسته)	
$y(t) = ax(t)$	
عملگر جمع (یکسان برای پیوسته و گسسته)	
$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	
عملگر ضرب (یکسان برای پیوسته و گسسته)	
$y(t) = x_1(t)x_2(t)$	
عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه T مختص حالت پیوسته	
$y(t) = x(t - T)$	
عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه N مختص حالت گسسته	
$y[n] = x[n - N]$	
عملگر انتگرال‌گیری مختص حالت پیوسته	
$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	
عملگر انباشتگی مختص حالت گسسته	
$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$	
عملگر مشتق مختص حالت پیوسته	
$y(t) = x'(t)$	
عملگر تأخیر زمانی به اندازه یک واحد مختص حالت گسسته	
$y[n] = x[n - 1]$	

❗ **تذکره ۴:** توجه کنید که در عملگر انتگرال‌گیر و انباشتگی همواره کران‌ها به صورت استاندارد $(\sum_{-\infty}^n \int_{-\infty}^t)$ است، بنابراین اگر در بلوک دیاگرام کران‌ها

مشخص نباشند هرگز آن‌ها را به صورت $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty}$ در نظر نگیرید.

نمایش معادلاتی

در این نوع نمایش، رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته را برحسب ترکیبی از ورودی، خروجی و مشتق‌های آن‌ها بیان می‌کنیم که به آن نمایش معادلات دیفرانسیلی گفته می‌شود. مانند سیستم‌های صفحه بعد:

$$S_1: y''(t) + 2y(t) = x'(t) - \frac{1}{2}x(t)$$

$$S_2: ty'(t) + y(t) = x'(t)x(t) + 2x(t) \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

در حالت گسسته نیز اگر رابطه ورودی و خروجی را برحسب ترکیبی از ورودی، خروجی و انتقال یافته‌های آن نشان دهیم، آن را به صورت معادلات تفاضلی نمایش داده‌ایم. مانند سیستم‌های زیر:

$$S_3: y[n-2] - 2y[n-1] + 2y[n] = x[n] \quad , \quad y[-1] = -1 \quad , \quad y[0] = 1$$

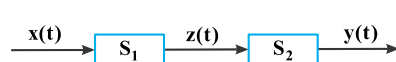
$$S_4: y[n] + 2y[n+1] = \frac{1}{2}x[n]x[n-1] + y[n-1]$$

🌟 **تذکره ۵:** به $y(0)$ ، $y'(0)$ ، ... و $y[0]$ ، $y[-1]$ ، ... مقادیر اولیه معادلات دیفرانسیلی یا تفاضلی گفته می‌شود.

با این نوع نمایش در فصل هشتم به طور کامل آشنا خواهیم شد.

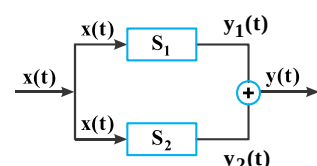
اتصال سیستم‌ها

سیستم‌ها را در سه فرم به یکدیگر متصل می‌کنیم:



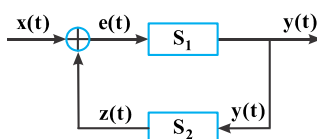
۱- **اتصال سری یا متوالی (Cascade):** در این نوع اتصال، خروجی سیستم قبلی، ورودی سیستم فعلی است. نمایش بلوک دیاگرامی سیستم‌های سری به صورت مقابل است:

$z(t)$ خروجی سیستم S_1 و ورودی سیستم S_2 است.



۲- **اتصال موازی (Parallel):** در این نوع اتصال، ورودی همه سیستم‌ها یکسان است و خروجی سیستم کلی از جمع خروجی تک تک سیستم حاصل می‌شود. نمایش بلوک دیاگرامی سیستم‌های موازی به صورت مقابل است:

۳- **اتصال فیدبک یا پس‌خورد (Feedback):** در این نوع اتصال، از خروجی نمونه‌گیری کرده و با ورودی جمع می‌کنیم که این عمل در یک حلقه تکرار می‌شود.



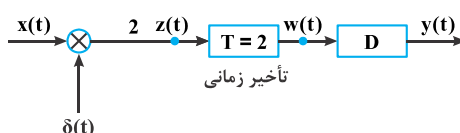
$$\begin{cases} z(t) = S_2\{y(t)\} \\ e(t) = x(t) + z(t) \\ y(t) = S_1\{e(t)\} \end{cases}$$

به $e(t)$ ، سیگنال خطا گفته می‌شود.

در این درس دو اتصال سری و موازی، از اتصال فیدبک مهم‌تر هستند.

🌟 **تذکره ۶:** نحوه اتصال سیستم‌های گسسته نیز دقیقاً مانند سیستم‌های پیوسته است.

📌 **مثال ۱:** در بلوک دیاگرام‌های زیر، نمایش جبری سیستم‌ها را به دست آورید.

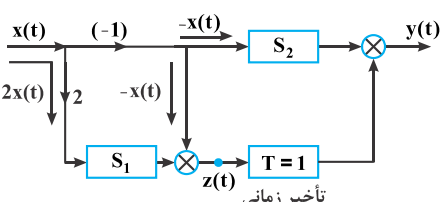


(۱)

✅ **پاسخ:** برای سادگی محاسبات، گره‌هایی را در بلوک دیاگرام انتخاب کرده و گام به گام خروجی را به دست می‌آوریم.

$$z(t) = 2x(t)\delta(t) \xrightarrow{\text{غیربالی ضرب}} z(t) = 2x(0)\delta(t), w(t) = z(t-2) = 2x(0)\delta(t-2), y(t) = w'(t) = 2x(0)\delta'(t-2)$$

$$\Rightarrow \text{نمایش جبری: } y(t) = 2x(0)\delta'(t-2)$$



(۲)

$$S_1\{x(t)\} = (t^2 + 1)x(t)$$

$$S_2\{x(t)\} = \frac{1}{1+t^2}x(t)$$

$$S_1\{x(t)\} = (t^2 + 1)2x(t)$$

✅ **پاسخ:** ورودی سیستم S_1 سیگنال $(2x(t))$ است. در نتیجه خروجی آن به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$z(t) = 2(t^2 + 1)x(t) \times (-x(t)) = -2(t^2 + 1)x^2(t)$$

خروجی سیستم S_1 در $(-x(t))$ ضرب شده و سیگنال $z(t)$ را می‌سازد.

ورودی سیستم S_2 سیگنال $(-x(t))$ است. در نتیجه خروجی آن به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

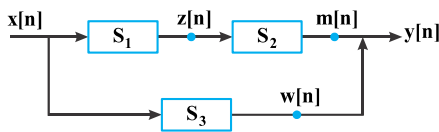
$$S_2\{x(t)\} = \frac{1}{1+t^2}(-x(t))$$

$y(t)$ از ضرب خروجی سیستم S_2 و $z(t)$ که به اندازه یک واحد تأخیر زمانی یافته حاصل می‌شود.

$$y(t) = S_2\{x(t)\} \times z(t-1) = \left(\frac{-1}{1+t^2}x(t)\right)(-2((t-1)^2+1)x^2(t-1)) \Rightarrow y(t) = \frac{2(t^2-2t+2)}{t^2+1}x(t)x^2(t-1)$$

توجه: درک روند محاسبه خروجی سیستم S_1 به کمک نمایش توصیفی این سیستم بسیار راحت است. نمایش جبری این سیستم به صورت $S_1\{x(t)\} = (t^2+1)x(t)$ است. این سیستم ورودی را گرفته و آن را در (t^2+1) ضرب کرده و خروجی را محاسبه می‌کند. ورودی این سیستم سیگنال $2x(t)$ است بنابراین $2x(t)$ را در (t^2+1) ضرب کرده و خروجی برابر $2(t^2+1)x(t)$ می‌شود.

(۳)



$$S_1: y[n] = x[n-1]$$

$$S_2: y[n] = 2x^2[n]$$

$$S_3: y[n] = x[n] + x[n-1]$$

✓ **پاسخ:** سیستم S_1 و S_2 با هم به صورت سری و با سیستم S_3 به صورت موازی بسته شده‌اند. ضابطه‌ی هر سیستم به‌طور جداگانه داده شده است. سیگنال‌های $z[n]$ ، $w[n]$ و $m[n]$ را در بلوک دیاگرام مشخص می‌کنیم (با تسلط کافی، دیگر نیازی به در نظر گرفتن این سیگنال‌های کمکی نیست).

$$S_1: \underbrace{y[n]}_{\text{خروجی } S_1} = x[n-1] \Rightarrow \underbrace{z[n]}_{\text{خروجی } S_1} = \underbrace{x[n-1]}_{\text{ورودی } S_2}$$

خروجی سیستم S_1 همان ورودی سیستم S_2 است، چرا که این دو سیستم به صورت سری بسته شده‌اند. خروجی سیستم S_1 برابر $x[n-1]$ است. در سیستم S_2 طبق ضابطه $S_2: y[n] = 2x^2[n]$ ورودی باید به توان ۲ رسیده و در عدد ۲ ضرب شود. پس $x[n-1]$ را به توان ۲ رسانده و در عدد ۲ ضرب می‌کنیم که سیگنال $2x^2[n-1]$ حاصل می‌شود که همان خروجی سیستم S_2 است.

$$S_2: \underbrace{y[n]}_{\text{خروجی } S_2} = 2x^2[n] \Rightarrow \underbrace{m[n]}_{\text{خروجی } S_2} = 2x^2[n-1]$$

$$S_3: \underbrace{y[n]}_{\text{خروجی } S_3} = x[n] + x[n-1] \Rightarrow \underbrace{w[n]}_{\text{خروجی } S_3} = x[n] + x[n-1]$$

برای پیدا کردن خروجی کلی یعنی $y[n]$ باید خروجی سیستم S_2 و S_3 را جمع کنیم، چرا که سیستم S_3 با مجموعه سیستم‌های S_1 و S_2 موازی بسته شده است.

$$\underbrace{y[n]}_{\text{خروجی کلی}} = w[n] + m[n] = x[n] + x[n-1] + 2x^2[n-1]$$

تعیین خروجی سیستم‌ها

در این بخش نحوه تعیین خروجی سیستم‌ها را با داشتن ورودی و ضابطه سیستم بررسی می‌کنیم، تمامی سؤالات مربوط به این بخش را تیپ‌بندی کرده و روش حل سؤالات هر تیپ را به صورت گام‌به‌گام بیان می‌کنیم. تمامی روش‌ها در سیستم‌های زمان پیوسته توضیح داده شده است ولی روش حل سؤالات در سیستم‌های زمان گسسته نیز دقیقاً به همان صورت است.

تیپ ۱: سیستم‌های تک‌ضابطه‌ای

گام اول: ورودی داده شده را دقیقاً برابر با $x(t)$ در نظر بگیرید. (ورودی داده شده $x(t) =$)

گام دوم: نحوه رفتار سیستم را شناسایی کنید. یعنی تمام عملگرهای موجود بر روی متغیر مستقل و دامنه سیگنال را تعیین کنید.

سیستم متغیر مستقل را در آرگومان ورودی دو برابر کرده و دامنه را در سیگنال e^t ضرب می‌کند. $\xrightarrow{\text{شناسایی رفتار سیستم}} S: y(t) = e^t x(2t) \xrightarrow{\text{مثال}}$

گام سوم: ورودی را به سیستم اعمال کرده و با توجه به عملگرهای سیستم تمامی تغییرات لازم را بر روی ورودی اعمال کنید. در نهایت خروجی به دست خواهد آمد.

🌟 **تذکره ۷:** همواره به ترتیب عملگرهای سیستم دقت کنید در غیر این صورت ممکن است در تعیین خروجی، خطای محاسباتی انجام دهید.

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} \text{ورودی: } x(t) = e^{-t}u(t) \\ \text{ضابطه: } y(t) = e^t x(2t) \end{cases}$$



مدرس‌ان شریف

فصل سوم

«سیستم‌های LTI»

در فصل قبل شش خاصیت را برای سیستم‌ها مطرح کردیم. از بین این خواص، دو خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. به سیستم‌هایی که این دو خاصیت را به‌طور همزمان داشته باشند، سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (Linear Time Invariant (LTI)) گفته می‌شود. این سیستم‌ها به دو دلیل از اهمیت بالایی برخوردار هستند.

۱- پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی‌های نمایی، ضربی از ورودی است.

$$x(t) = e^{s_0 t} \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = A e^{s_0 t} \quad x[n] = z_0^n \xrightarrow{\text{LTI}} y[n] = A z_0^n$$

درباره این ویژگی در فصل هشتم مفصل بحث خواهیم کرد.

۲- اگر پاسخ سیستم LTI به ورودی ضربه واحد ($x[n] = \delta[n]$, $x(t) = \delta(t)$) مشخص باشد، می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به‌دست آورد.

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{LTI}} h(t) : y(t) = x(t) * h(t) \quad \delta[n] \xrightarrow{\text{LTI}} h[n] : y[n] = x[n] * h[n]$$

به $h(t)$ و $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم LTI گفته می‌شود. نماد «*» عملگر کانولوشن نامیده شده و رابطه $x(t) * h(t)$ به‌صورت $x(t)$ کانولوشن $h(t)$ خوانده می‌شود. به کمک روابط گفته‌شده می‌توان بدون داشتن ضابطه سیستم، پاسخ به هر ورودی دلخواه ($x[n]$, $x(t)$) را به‌دست آورد که این ویژگی برای مهندسان بسیار کاربردی است.

در این فصل درباره عملگر کانولوشن و خواص این عملگر، نحوه محاسبه کانولوشن دو سیگنال، پاسخ ضربه سیستم‌های LTI و ویژگی‌های آن بحث خواهیم کرد. سؤالات مطرح‌شده در این فصل عموماً سؤالات متوسطی هستند که ایده طراحی آن‌ها تکراری است. بنابراین به سادگی با حل سؤالات سال‌های قبل می‌توانید به این سؤالات پاسخ دهید.

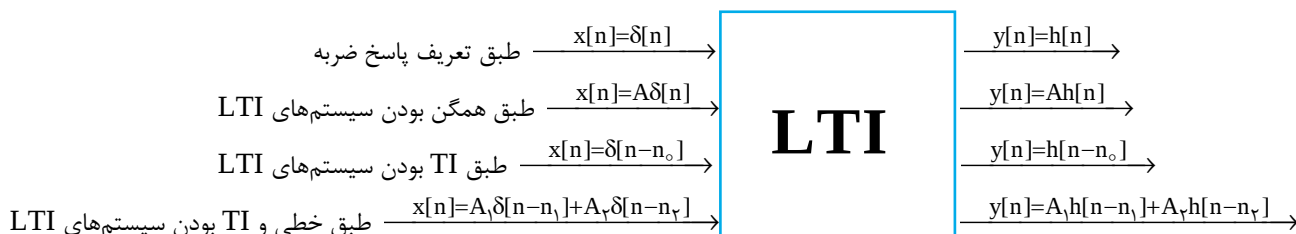
درسنامه (۱): سیستم‌های LTI گسسته



سیستم‌های LTI گسسته، سیستم‌های LTI ای هستند که ورودی و خروجی آن‌ها، سیگنال‌هایی گسسته باشند. تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI گسسته در حوزه زمان با توجه به ماهیت گسسته بودن سیگنال‌ها نسبت به سیستم‌های LTI پیوسته، کمی ساده‌تر است. اما سؤالات مطرح‌شده در حوزه پیوسته کمی بیشتر از حوزه گسسته است. با این وجود، تحلیل سیستم‌های LTI گسسته اشتراکات بسیار زیادی با سیستم‌های LTI پیوسته دارد. بنابراین با درک عمیق مفاهیم این درسنامه، دیگر مشکلی در درسنامه بعدی (سیستم‌های LTI پیوسته) نخواهید داشت.

پاسخ ضربه سیستم‌های LTI گسسته

پاسخ یک سیستم LTI گسسته به ورودی ضربه واحد، پاسخ ضربه سیستم نامیده می‌شود و آن را با $h[n]$ نشان می‌دهیم. پاسخ ضربه عموماً جزء داده‌های مسئله است و به‌عنوان مشخصه یک سیستم LTI در نظر گرفته می‌شود. با توجه به خطی و تغییرناپذیری بودن این سیستم‌ها می‌توان طرح شماتیک زیر را برای سیستم‌های LTI گسسته در نظر گرفت.



- طبق تعریف خاصیت همگنی برای سیستم‌های خطی، با A برابر کردن ورودی، خروجی نیز A برابر می‌شود.

$$A\delta[n] \xrightarrow{LTI} Ah[n]$$
- طبق تعریف خاصیت TI بودن، با انتقال زمانی ورودی، خروجی نیز به همان اندازه انتقال زمانی می‌یابد.

$$\delta[n - n_0] \xrightarrow{LTI} h[n - n_0]$$
- طبق تعریف خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان، پاسخ سیستم به ترکیب خطی و انتقالی از ورودی ضربه، همان ترکیب خطی و انتقالی از پاسخ ضربه می‌شود.

$$A_1\delta[n - n_1] + A_2\delta[n - n_2] \xrightarrow{LTI} A_1h[n - n_1] + A_2h[n - n_2]$$

تذکره ۱: عبارت «پاسخ ضربه (impulse response)» مختص سیستم‌های LTI است و برای سیستم‌هایی که LTI نیستند باید از عبارت «پاسخ به ورودی ضربه واحد» استفاده کرد.

مثال ۱: پاسخ به ورودی ضربه واحد را در سیستم‌های زیر به دست آورید.

$$y[n] = 2x[n-1] \quad (1)$$

پاسخ: کافی است $x[n] = \delta[n]$ را در ضابطه سیستم جایگذاری کنیم.

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow 2x[n-1] = 2\delta[n-1] \Rightarrow y[n] = 2\delta[n-1]$$

 سیستم LTI است، بنابراین پاسخ به ورودی ضربه واحد، همان پاسخ ضربه سیستم خواهد بود و می‌توان گفت $h[n] = 2\delta[n-1]$ است. با توجه به LTI بودن سیستم پاسخ به این ورودی‌ها نیز قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \delta[n+1] &\xrightarrow{LTI} h[n+1] = 2\delta[n+1-1] = 2\delta[n] \\ 2\delta[n-2] + \sqrt{2}\delta[n+2] &\xrightarrow{LTI} 2h[n-2] + \sqrt{2}h[n+2] = 2\delta[n-3] + 2\sqrt{2}\delta[n+1] \end{aligned}$$

حال می‌خواهیم پاسخ سیستم LTI به ورودی $x[n] = \delta[2n]$ را به دست آوریم. به خاطر داشته باشید که هرگز در یک سیستم LTI روابط زیر برقرار نیستند:
 $\delta[an] \not\rightarrow h[an], \quad \delta_{(a)}[n] \not\rightarrow h_{(a)}[n]$

می‌توان $\delta[2n]$ را به صورت زیر نوشت و خروجی را به دست آورد.

$$y[n] = x[2n-2] \quad (2)$$

پاسخ: با فرض $x[n] = \delta[n]$ خروجی را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که با توجه به ترتیب تبدیلات بر روی متغیر مستقل در حالت گسسته، انتقال زمانی را باید قبل از Down-sampling اعمال کنید.

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow x[n-2] = \delta[n-2] \Rightarrow x[2n-2] = \delta[2n-2] \Rightarrow y[n] = \delta[2n-2]$$

 سیستم LTI نیست. بنابراین استفاده از عبارت «پاسخ ضربه» و نماد « $h[n]$ » برای این سیستم بی‌معنی است و می‌توان گفت «پاسخ به ورودی ضربه واحد» برابر با $\delta[2n-2]$ است.

مثال ۲: برای سیستم S با رابطه ورودی - خروجی $y(n) = x\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ ، گزینه کامل‌تر کدام است؟ (بخش صحیح $\lfloor u \rfloor$) (سراسری ۹۴)

- (۱) پاسخ به ورودی $\delta(n)$ مساوی $\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$ است. (۲) پاسخ ضربه سیستم برابر $\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$ است.
 (۳) سیستم بدون حافظه است. (۴) همه موارد

پاسخ: گزینه «۱» این سیستم حافظه‌دار است. کافی است در $n=1$ رابطه‌ی ورودی و خروجی را بررسی کنیم.

$$y(1) = x\left(\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right) = x(0) \rightarrow \text{به } X(0) \text{ وابسته بوده و سیستم حافظه‌دار است. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) اشتباه هستند.}$$

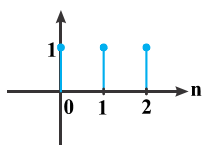
در گزینه‌های (۱) و (۲) پاسخ سیستم به ورودی ضربه واحد بیان شده است. در گزینه (۱) از عبارت «پاسخ به ورودی $\delta(n)$ » و در گزینه (۲) از عبارت «پاسخ ضربه» استفاده شده است. با توجه به اینکه در هر دو گزینه پاسخ به ورودی ضربه واحد یکسان است، برای تعیین گزینه صحیح باید LTI بودن سیستم را بررسی کرد. اگر سیستم LTI باشد، می‌توان از عبارت «پاسخ ضربه» استفاده کرد.

سیستم خطی است ولی آرگومان ورودی به صورت (عدد + n) نیست، پس سیستم TV می‌باشد. در نتیجه سیستم LTI نیست و نمی‌توان از عبارت

«پاسخ ضربه» برای این سیستم استفاده کرد و گزینه (۱) صحیح است.

به عنوان تمرین، پاسخ سیستم به ورودی $x(n) = \delta(n)$ را پیدا می‌کنیم.

$$x(n) = \delta(n) \xrightarrow{S} y(n) = \delta\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \quad \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = 0 = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$



نکته ۱: ضابطه سیگنال‌های گسسته‌ای که آرگومان آن‌ها داخل عملگر جزءصحیح قرار می‌گیرند، می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$x\left[\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right] = x_{(r)}[n] + x_{(r)}[n-1] + \dots + x_{(r)}[n-(r-1)]$$

اگر از نکته گفته‌شده استفاده کرده و پاسخ به ورودی $\delta(n)$ را برای سیستم مثال بالا به‌دست آوریم داریم:

$$y(n) = x\left[\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right] = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2] \xrightarrow{x(n)=\delta(n)} y(n) = \delta\left(\frac{n}{3}\right) + \delta\left(\frac{n-1}{3}\right) + \delta\left(\frac{n-2}{3}\right)$$

$$\delta(af(n)) = \delta(f(n)) \rightarrow y(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

پاسخ به ورودی دلخواه در سیستم‌های LTI گسسته

همان‌طور که در ابتدای فصل مطرح کردیم، با داشتن پاسخ ضربه سیستم‌های LTI می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواهی را به‌دست آورد. رابطه ورودی و خروجی در سیستم‌های LTI گسسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

پاسخ ضربه (کانولوشن) ورودی = خروجی جمع کانولوشن

نماد «*»، کانولوشن نامیده شده که بین دو سیگنال اعمال می‌شود. برای بیان عملگر کانولوشن به‌صورت رابطه‌ی نوشته‌شده که **جمع کانولوشن** نامیده می‌شود، مراحل زیر را باید انجام داد:

- ۱- یکی از سیگنال‌هایی که کانولوشن بر روی آن‌ها اعمال شده را به دلخواه انتخاب کرده و در آرگومان آن به جای n ، k جایگذاری کنید.
- ۲- سیگنال دوم را انتخاب کرده و در آرگومان آن به جای n ، $(n-k)$ جایگذاری کنید.

- ۳- دو سیگنال را در یکدیگر ضرب کرده و بر روی متغیر k ، از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ سیگما $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\right)$ بگیرید.

تذکره ۲: متغیر مستقل در سمت چپ تساوی n و در سمت راست تساوی k است. می‌توان به جای k ، هر حرف دیگری از جمله l و ... نیز استفاده کرد.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{متغیر مستقل: } k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

متغیر مستقل: n متغیر مستقل: k

مثال ۳: رابطه جمع کانولوشن را برای سیگنال‌های زیر بیان کنید.

$$h[n] = u[-n+4], \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (1)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]u[-(n-k)+4] \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]u[-k+4]$$

$$h_{(3)}[-n+2], \quad x_{(3)}[n+1] \quad (2)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{(3)}[k+1]h_{(3)}[-(n-k)+2] \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{(3)}[n-k+1]h_{(3)}[-k+2]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k], \quad x[n] = 2 \quad (3)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x[k']h[n-k'] = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[(n-k')-k] = 2 \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k'-k] \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x[n-k']h[k'] = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k'-k] = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k'-k]$$

تذکر ۱: برای تمایز قائل شدن بین متغیر k در ضابطه $h[n]$ و متغیر k در رابطه جمع کانولوشن از متغیر k' به جای k در رابطه جمع کانولوشن استفاده کردیم.

تذکر ۲: $x[n] = \delta[n]$ یک سیگنال ثابت است که به n وابسته نیست؛ بنابراین هنگام نوشتن رابطه جمع کانولوشن بدون تغییر $(x[n] = \delta[n] \Rightarrow x[k] = x[n-k] = \delta[n-k])$ وارد سیگما می‌شود.

محاسبه کانولوشن دو سیگنال گسسته

برای به‌دست آوردن خروجی یک سیستم LTI گسسته باید کانولوشن دو سیگنال گسسته ورودی و پاسخ ضربه $(x[n] * h[n])$ را تعیین کنیم. برای این منظور باید رابطه جمع کانولوشن $(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k])$ یا $(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k])$ محاسبه شود. چند روش برای محاسبه این رابطه وجود دارد که هر کدام را به‌صورت جداگانه توضیح می‌دهیم. هر روش با توجه به شرایطی، برای حل مسئله مناسب است.

۱- روش محاسباتی

در این روش باید رابطه جمع کانولوشن را به کمک روابط حاکم بر سری‌های ریاضی محاسبه کنید. بنابراین بهتر است سری‌های توانی زیر را که به محاسبه رابطه جمع کانولوشن کمک می‌کنند، به خاطر بسپارید.

۱) $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$: جمع اعداد متوالی از ۱ تا n

۲) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{a^{n_0}}{1-a} = \frac{\text{جمله اول}}{\text{قدرنسبت}} & , |a| < 1 \\ \infty & , |a| \geq 1 \end{cases}$: حد مجموع تصاعد هندسی (جمع بی‌نهایت جمله متوالی از یک تصاعد هندسی)

۳) $\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} = \frac{\text{جمله یکی بعد از آخر - جمله اول}}{\text{قدرنسبت} - 1}$: مجموع چندجمله متوالی از یک تصاعد هندسی

۴) $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$: مجموع اعداد مربع کامل متوالی از ۱ تا n

۵) $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \begin{cases} \frac{a}{(1-a)^2} & , |a| < 1 \\ \infty & , |a| \geq 1 \end{cases}$: اگر از رابطه (۲) نسبت به a مشتق گرفته و کمی تغییر در آن ایجاد کنیم

۶) $\sum_{n=0}^{n_1} na^n = a \frac{1-a^{n_1+1}}{(1-a)^2} - \frac{na^{n_1+1}}{1-a}$: اگر از رابطه (۳) نسبت به a مشتق گرفته و کمی تغییر در آن ایجاد کنیم

شرایط استفاده از روش محاسباتی: اگر ضابطه دو سیگنال به‌صورت توانی (a^n) و سیگنال‌های پله یا ضربه باشد، می‌توان از این روش استفاده کرد و گرنه محاسبه سری‌های دیگر بسیار مشکل خواهد بود.

تذکر ۳: برای محاسبه رابطه جمع کانولوشن می‌توان به اختیار یکی از روابط $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$ یا $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$ را انتخاب کرد. رابطه‌ای

را انتخاب می‌کنیم که با توجه به ضابطه سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n]$ باعث ساده‌تر شدن بار محاسباتی شود. نحوه تشخیص انتخاب یکی از رابطه‌ها را در مثال‌ها خواهید دید.

مثال ۴: کانولوشن سیگنال‌های زیر را از روش محاسباتی به‌دست آورید.

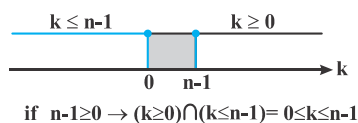
$$h[n] = u[n-1], \quad x[n] = u[n] \quad (1)$$

پاسخ: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k-1]$

سیگنال‌های پله در سیگما باعث تغییر کران خواهند شد. بنابراین باید مشخص کرد که سیگنال‌های پله در چه بازه‌ای ۱ هستند. توجه کنید که متغیر مستقل k می‌باشد نه n . دو سیگنال پله در یکدیگر ضرب شده‌اند، بنابراین باید از بازه‌ها اشتراک گرفت.

$$u[k] = 1, \quad k \geq 0$$

$$u[n-k-1] = 1, \quad n-k-1 \geq 0 : k \leq n-1$$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k-1] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} (1)(1) & , \quad n-1 \geq 0 \\ 0 & , \quad n-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} (n-1)-0+1 & , \quad n-1 \geq 0 \\ 0 & , \quad n-1 < 0 \end{cases} = n \times \begin{cases} 1 & , \quad n-1 \geq 0 \\ 0 & , \quad n-1 < 0 \end{cases} = nu(n-1)$$

$$h[n] = 3^n u[-n] \quad , \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (2)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] 3^{n-k} u[-(n-k)] = 3^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] 3^{-k} u[-n+k] \quad \checkmark \text{ پاسخ:}$$

3^n به k وابسته نیست، پس می‌توان آن را از سیگما بیرون آورد. اشتراک بازه‌های زمانی که دو سیگنال پله در آن‌ها یک هستند را نیز باید به دست آورد.

$$\begin{aligned} u[k] &= 1, \quad k \geq 0 \\ u[-n+k] &= 1, \quad -n+k \geq 0 : k \geq n \end{aligned} \quad \cap \rightarrow \begin{cases} k \geq n, & n \geq 0 \\ k \geq 0, & n < 0 \end{cases} \Rightarrow y[n] = \begin{cases} 3^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k 3^{-k}, & n \geq 0 \\ 3^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k 3^{-k}, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & n \geq 0 \\ 3^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & n < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حداکثر جمع تصاعد هندسی}} y[n] = \begin{cases} 3^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}, & n \geq 0 \\ 3^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{1-\frac{1}{2}}, & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \frac{6}{5} (3)^n, & n < 0 \end{cases}$$

احتمالاً جواب به دست آمده در گزینه‌ها وجود نداشته باشد چرا که اغلب گزینه‌ها برحسب سیگنال‌های پله بیان می‌شوند. برای اینکه جواب به دست آمده را برحسب سیگنال‌های پله بیان کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} y[n] &= \begin{cases} \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ \frac{6}{5} (3)^n, & n < 0 \end{cases} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \underbrace{\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}}_{u[n]} + \frac{6}{5} (3)^n \underbrace{\begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases}}_{u[-n-1]} \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} (3)^n u[-n-1] \end{aligned}$$

البته در این قبیل موارد که فرم جواب به دست آمده با فرم جواب گزینه‌ها یکسان نیست، می‌توان از امتحان کردن گزینه‌ها و جواب به دست آمده در یک یا دو زمان خاص نیز استفاده کرد.

$$h[n] = n \quad , \quad x[n] = 2^{-|n|} \quad (3)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \quad \checkmark \text{ پاسخ:}$$

در این مثال استفاده از سیگمای اول به نظر کمی راحت‌تر از سیگمای دوم است.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|}(n-k) = n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k 2^{-|k|}$$



مدرسایان شریف

فصل چهارم

«سری فوریه»

در سه فصل قبلی سیگنال‌ها و سیستم‌ها را در حوزه زمان تجزیه و تحلیل کردیم. در واقع متغیر مستقل تمامی سیگنال‌ها برحسب زمان (n/t) بود، اما می‌توان سیگنال‌ها و سیستم‌ها را برحسب متغیر مستقل دیگری نیز که فرکانس نام دارد، تجزیه و تحلیل کرد. فرکانس را می‌توان با توجه به کاربرد آن به صورت متفاوتی تعریف کرد. اما در این درس به ضرب متغیر مستقل در سیگنال‌های نمایی که پایه آن عدد e بوده و متغیر مستقل در توان ظاهر شود، فرکانس گفته می‌شود. به عنوان مثال به سیگنال‌های زیر و نحوه تعیین فرکانس‌های آن‌ها دقت کنید.

• $x[n] = e^{jk\omega_0 n}$ و $x(t) = e^{jk\omega_0 t}$: ضرب متغیر مستقل در این دو سیگنال پیوسته و گسسته $j\omega_0$ است. به $j\omega_0, k \in \mathbb{Z}$ فرکانس موهومی گفته می‌شود. این فرکانس مختص سیگنال‌های متناوب است. ω_0 نیز فرکانس پایه نام دارد که از رابطه $\omega_0 = \frac{2\pi}{\text{دوره تناوب}}$ محاسبه می‌شود. از این فرکانس در این فصل (سری فوریه) استفاده خواهد شد.

• $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ و $x(t) = e^{j\omega_0 t}$: ضرب متغیر مستقل در این دو سیگنال پیوسته و گسسته $j\omega_0$ است. $j\omega_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$ نیز همانند $j\omega_0$ فرکانس موهومی نامیده شده اما مختص سیگنال‌های نامتناوب است. از این فرکانس در فصل پنجم (تبدیل فوریه) استفاده خواهد شد.

• $x(t) = e^{st}$: ضرب متغیر مستقل در این سیگنال پیوسته s است. به $s \in \mathbb{C}$ که مقداری مختلط است، فرکانس مختلط گفته می‌شود. مقدار مختلط s را در فرم دکارتی به صورت $s = \sigma + j\omega$ نشان می‌دهیم که $\sigma = \text{Re}\{s\}$ و $\omega = \text{Im}\{s\}$ است. از این فرکانس در فصل ششم (تبدیل لاپلاس) استفاده خواهد شد.

• $x[n] = z^n$: سیگنال نمایی است که متغیر مستقل n در توان ظاهر شده است اما پایه آن عدد e نیست. به کمک روابط ریاضی آن را به صورت $x[n] = z^n = e^{n \ln z} = e^{n \ln(z)}$ بازنویسی می‌کنیم. حال پایه این سیگنال نمایی به e تبدیل شد و ضرب متغیر مستقل یعنی n برابر با $\ln(z)$ است. بنابراین فرکانس این سیگنال گسسته برابر با $\ln(z)$ تعیین می‌شود، اما طبق یک قرارداد، فرکانس این سیگنال را z در نظر می‌گیریم. به $z, z \in \mathbb{C}$ که مقداری مختلط است، فرکانس مختلط گفته می‌شود. مقدار مختلط z را در فرم قطبی به صورت $z = re^{j\theta}$ نشان می‌دهیم که $r = |z|$ و $\theta = \angle z$ است. از این فرکانس در فصل هفتم (تبدیل Z) استفاده خواهد شد.

هدف ما در چهار فصل پیش‌رو تبدیل سیگنال‌های زمانی به معادل فرکانسی آن‌ها و پیدا کردن فرکانس‌های این سیگنال‌ها است. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم فرکانس‌های سیگنال $x(t) = 2 + \cos(\pi t)$ را به دست آوریم. طبق تعریف فرکانس، باید سیگنال $x(t)$ را برحسب سیگنال‌های نمایی با پایه

عدد e بیان کنیم. برای این منظور از رابطه اوایلر کمک گرفته و رابطه سیگنال $x(t)$ را به صورت $x(t) = 2e^{j0t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}$ بیان می‌کنیم.

بدین صورت مشخص می‌شود که $x(t)$ دارای سه فرکانس موهومی $\omega_1 = j0, \omega_2 = j\pi, \omega_3 = -j\pi$ است. به عنوان یک قرارداد، می‌توان ضرب j را در فرکانس‌های موهومی بیان نکرد. بنابراین می‌توان گفت سیگنال $x(t)$ دارای سه فرکانس موهومی $\omega_1 = 0, \omega_2 = \pi, \omega_3 = -\pi$ است. در این مثال برای بیان معادل فرکانسی $x(t)$ از رابطه اوایلر کمک گرفتیم. آیا همواره می‌توان از رابطه اوایلر برای به دست آوردن فرکانس‌های یک سیگنال زمانی کمک گرفت؟ آیا روابط دیگری برای تبدیل سیگنال‌های زمانی به معادل فرکانسی خود وجود دارد؟ آیا هر سیگنالی را می‌توان از حوزه زمان به حوزه فرکانس تبدیل کرد؟ به این سؤالات در چهار فصل پیش‌رو پاسخ خواهیم داد. در این چهار فصل چهار ابزار ریاضی (سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z) خواهیم آموخت که سیگنال‌های زمانی را به سیگنال‌های فرکانسی تبدیل می‌کنند. هر یک از چهار ابزار، ویژگی‌های خاص خود را داشته و مختص نوع خاصی از سیگنال‌ها هستند. بعد از آشنایی با این تبدیلات در فصل هشتم، سیستم‌های LTI را به کمک این چهار تبدیل، در حوزه فرکانس تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. خواهید دید که تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان (فصل سوم) به مراتب ساده‌تر خواهد بود.

در این فصل اولین ابزار ریاضی برای تبدیل سیگنال‌های زمانی به سیگنال‌های فرکانسی را بررسی می‌کنیم. سری فوریه ابزاری است که به وسیله آن می‌توان برخی از سیگنال‌های پیوسته و گسسته متناوب را برحسب فرکانس‌های موهومی بسط داد.

این فصل از دو درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول رابطه بسط سری فوریه یک سیگنال زمانی و رابطه ضرایب سری فوریه مطرح می‌شود. در درسنامه دوم خواص سری فوریه را بررسی کرده و در انتهای آن سؤالات کنکور را تیپ‌بندی می‌کنیم. همچنین چند نکته و روش تستی نیز برای حل هرچه سریع‌تر سؤالات، بیان خواهیم کرد. سؤالات این فصل متوسط در برخی از موارد دشوار هستند، اما با حل سؤالات سال‌های قبل به راحتی می‌توانید با انواع سؤالات آشنا شده و خود را در برابر سؤالات دشوار این فصل بیمه کنید.

درسنامه (۱): نمایش سری فوری سیگنال‌های متناوب



برای هر سیگنال متناوب می‌توان پارامتری به اسم فرکانس پایه تعریف کرد. این پارامتر که آن را با ω_0 نشان می‌دهند از رابطه $\omega_0 = \frac{2\pi}{\text{دوره تناوب}}$ محاسبه می‌شود (در درس فیزیک به ω_0 فرکانس زاویه‌ای می‌گفتیم که واحد آن نیز $\frac{\text{رادیان}}{\text{ثانیه}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است). سیگنال‌های متناوب را به کمک ابزار سری فوری می‌توان برحسب مضارب از فرکانس پایه یعنی $(k\omega_0, k \in \mathbb{Z})$ بسط داد. در واقع سری فوری بیان می‌کند که برای یک سیگنال زمانی در چه مضارب از ω_0 ، مؤلفه فرکانسی تعریف شده و این مؤلفه فرکانسی چیست. در این درسنامه با نمایش سری فوری سیگنال‌های متناوب آشنا می‌شویم.

روابط بسط و آنالیز سری فوری

در نمایش سری فوری سیگنال‌ها همواره دو رابطه مطرح است. رابطه بسط سری فوری و رابطه ضرایب سری فوری. رابطه بسط سری فوری، یک سیگنال زمانی متناوب را برحسب فرکانس‌های $k\omega_0$ یعنی سیگنال‌های نمایی موهومی $(e^{jk\omega_0 n} / e^{jk\omega_0 t})$ بسط می‌دهد و رابطه ضرایب سری فوری، مؤلفه‌های فرکانسی سیگنال زمانی را در فرکانس‌های $k\omega_0$ به دست می‌آورد. به این مؤلفه‌های فرکانسی، ضرایب سری فوری گفته می‌شود و آن را با a_k نشان می‌دهیم. این روابط در حالت زمان پیوسته و گسسته به صورت زیر بیان می‌شوند:

	CT	DT
رابطه بسط سری فوری	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$
رابطه ضرایب سری فوری	$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$

در مورد روابط گفته شده به چند نکته زیر توجه کنید. این نکات در به خاطر سپردن روابط و درک مفهوم آن‌ها کمک زیادی می‌کنند.

- $x(t)$ و $x[n]$ سیگنال‌های متناوب هستند. بنابراین انتگرال و سیگما در رابطه ضرایب سری فوری بر روی یک دوره تناوب بسته می‌شود. $(\sum_{n \in \langle N \rangle}, \int_T)$ منظور از $\int_T$ این است که کران انتگرال را باید به گونه‌ای در نظر بگیرید که اختلاف کران بالا و پایین T شود. برای مثال اگر $T=3$ باشد، می‌توان انتگرال‌های زیر را به عنوان $\int_T$ در نظر گرفت: $\int_T \xrightarrow{T=3} \int_0^3$ یا $\int_{-1}^2$ یا $\int_{100}^{103}$ یا ...
 - عموماً کران‌ها را به شکلی انتخاب می‌کنیم که محاسبات ساده باشد. در مورد $\sum_{k \in \langle N \rangle}$ نیز باید کران بالا و پایین را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اختلاف آن‌ها یک واحد از دوره تناوب کمتر باشد. به بیان بهتر در $\sum_{k \in \langle N \rangle}$ باید N نمونه متوالی از سیگنال متناوب را زیر سیگما در نظر بگیریم. برای مثال اگر $N=3$ باشد داریم: $\sum_{k \in \langle N \rangle} \xrightarrow{N=3} \sum_{k=0}^2$ یا $\sum_{k=-1}^1$ یا $\sum_{k=98}^{100}$ یا ...
 - یکی از اشتباهات متداول این است که در $\sum_{k \in \langle N \rangle}$ کران بالا و پایین را طوری انتخاب می‌کنند که اختلاف آن‌ها N شود.
 - $\int_T = \int_b^a : a-b=T$ ، $\sum_{k \in \langle N \rangle} = \sum_b^a : a-b=N-1$
 - ضرایب سری فوری سیگنال پیوسته $x(t)$ ، یک سیگنال گسسته غیرمتناوب محسوب می‌شود. بنابراین در رابطه بسط سری فوری سیگنال پیوسته، سیگما را از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ می‌بندیم $(\sum_{k=-\infty}^{+\infty})$.
 - ضرایب سری فوری سیگنال گسسته $x[n]$ ، یک سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب خود سیگنال محسوب می‌شود. بنابراین در رابطه بسط سری فوری سیگنال گسسته، سیگما را بر روی یک دوره تناوب می‌بندیم $(\sum_{k \in \langle N \rangle})$. از طرفی به دلیل متناوب بودن ضرایب سری فوری سیگنال گسسته، می‌توان رابطه زیر را نوشت:
- $a_k = a_{k+mN}$ ، $m \in \mathbb{Z}$: ضرایب سری فوری یک سیگنال گسسته با دوره تناوب سیگنال متناوب است**
- ضرایب سری فوری را می‌توان به صورت $\dots, b[k], a[k], b[k], \dots$ که بیانگر یک سیگنال گسسته با متغیر مستقل k هستند نیز نشان داد: $a_k = a[k]$
 - به هارمونیک k ام $e^{jk\omega_0 t}$ گفته می‌شود.

- سیگنال‌های $e^{jk\omega_0 t}$ و $e^{jk\omega_0 n}$ دارای فرکانس‌های $jk\omega_0$ می‌باشند. به همین دلیل گفته می‌شود که سری فوریه، یک سیگنال متناوب را برحسب فرکانس‌های موهومی $jk\omega_0$ بسط می‌دهد. با صرف‌نظر از j می‌توان گفت سری فوریه یک سیگنال متناوب را برحسب مضارب صحیح فرکانس پایه $(k\omega_0 = \dots, -\omega_0, 0, \omega_0, \dots)$ بسط می‌دهد.
- ضرایب سری فوریه (a_k) در واقع نشان‌دهنده وزن سیگنال در فرکانس $jk\omega_0$ می‌باشد. برای مثال a_2 نشان می‌دهد که سیگنال $x(t)$ در فرکانس $2\omega_0$ چه وزنی دارد. اگر $a_2 = 0$ باشد، می‌گوییم $x(t)$ در فرکانس $2\omega_0$ را دارا نیست و اگر $a_2 = 3$ باشد، می‌گوییم $x(t)$ در فرکانس $2\omega_0$ به اندازه ۳ واحد مقدار دارد.
- در زیر رابطه بسط سری فوریه به‌زای چند k نشان داده شده است.

$$CT: x(t) = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots$$

$(-j\omega_0)$ وزن فرکانس هارمونیک (-1) وزن فرکانس صفر هارمونیک (1) وزن فرکانس $(j\omega_0)$

$$DT: x[n] = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 n} + a_{-1} e^{-j\omega_0 n} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} + a_2 e^{j2\omega_0 n} + \dots$$

- سیگنال نمایی موهومی هنگامی که با خود سیگنال در یک سمت رابطه باشند با توان منفی و هنگامی که با ضرایب سری فوریه در یک سمت رابطه باشند با توان مثبت ظاهر می‌شود. به تفاوت متغیرهای مستقل نیز در دو سمت روابط دقت کنید.

$$\underbrace{x(t)}_{\text{متغیر مستقل: } t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k: \text{متغیر مستقل}}}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t} \quad \underbrace{a_k}_{\text{متغیر مستقل: } k} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{\text{متغیر مستقل: } t}$$

$$\underbrace{x[n]}_{\text{متغیر مستقل: } n} = \sum_{\substack{k=\langle N \rangle \\ k: \text{متغیر مستقل}}} a_k e^{+jk\omega_0 n} \quad \underbrace{a_k}_{\text{متغیر مستقل: } k} = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}}_{\text{متغیر مستقل: } n}$$

- رابطه بین سیگنال و ضرایب سری فوریه را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{F.S} a_k & a_k &\xrightarrow{F.S^{-1}} x(t) \\ x[n] &\xrightarrow{F.S} a_k & a_k &\xrightarrow{F.S^{-1}} x[n] \end{aligned}$$

- بهتر است روابط بسط سری فوریه و آنالیز سری فوریه را به‌صورت زیر در فرم بیانی به‌خاطر بسپارید.

	CT	DT
رابطه بسط سری فوریه	سیگنال = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{ضرایب } e^{jk\omega_0 t}$	سیگنال = $\sum_{k=\langle N \rangle} \text{ضرایب } e^{jk\omega_0 n}$
رابطه ضرایب سری فوریه	ضرایب = $\frac{1}{T} \int_T \text{سیگنال } e^{-jk\omega_0 t} dt$	ضرایب = $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \text{سیگنال } e^{-jk\omega_0 n}$

اولین قدم در حل سؤالات این فصل، پیدا کردن مؤلفه‌های فرکانسی یک سیگنال زمانی متناوب است. همان‌طور که گفتیم، مؤلفه‌های فرکانسی یک سیگنال متناوب همان ضرایب سری فوریه هستند. در مثال زیر ضرایب سری فوریه چند سیگنال مهم را به‌دست می‌آوریم. اگر مایل بودید می‌توانید برای بالا بردن سرعت عمل خود، ضرایب سری فوریه این سیگنال‌ها را به‌خاطر بسپارید. البته به کمک روابط مطرح‌شده در فصل بعد به راحتی می‌توانید تمامی این ضرایب را به‌دست آورید.

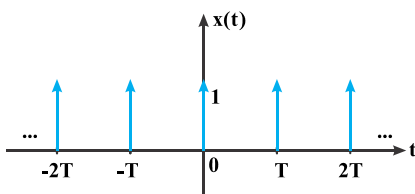
مثال ۱: ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را به‌دست آورید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (1)$$

پاسخ: $x(t)$ یک قطار ضربه پیوسته با دوره تناوب T است. به شکل آن توجه کنید.

حال به کمک رابطه ضرایب سری فوریه، a_k را محاسبه می‌کنیم. کران انتگرال باید در یک دوره تناوب باشد.

برای این منظور بازه $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ را در نظر می‌گیریم تا ضربه موجود در $t = 0$ داخل انتگرال قرار بگیرد.



$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 (0)} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \times 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{T}$$

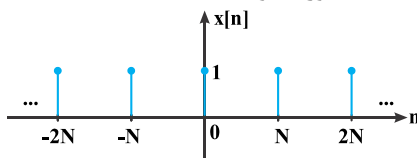
خاصیت غربالی $t=0$

بنابراین می‌توان گفت ضرایب سری فوریه قطار ضربه پیوسته، برابر با معکوس دوره تناوب است. $a_k = \frac{1}{T}$ به k وابسته نبوده و به ازای تمامی $k \in \mathbb{Z}$ ها مقداری ثابت دارد.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \quad (۲)$$

پاسخ: $x[n]$ نیز مانند مثال قبلی یک قطار ضربه گسسته با دوره تناوب N است.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$



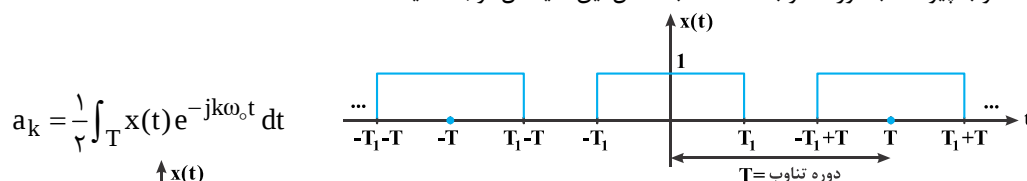
کران سیگما را باید طوری در نظر گرفت که $(N-1 = \text{کران پایین} - \text{کران بالا})$ باشد. در این بازه فقط ضربه موجود در $n=0$ داخل سیگما قرار می‌گیرد.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0 (0)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}$$

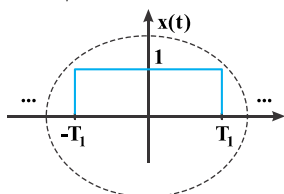
ضرایب سری فوریه قطار ضربه گسسته نیز مانند حالت پیوسته برابر با معکوس دوره تناوب است.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T_1}\right), \quad T_1 < \frac{T}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: $x(t)$ سیگنال مستطیلی متناوب پیوسته با دوره تناوب T است. به شکل این سیگنال توجه کنید:



$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



برای محاسبه a_k کران انتگرال را باید به گونه‌ای انتخاب کرد که $(T = \text{کران پایین} - \text{کران بالا})$ شود. توجه کنید که نیازی به اتلاف وقت و به‌دست آوردن کران موردنظر نیست. بلکه کافی است یک دوره تناوب از $x(t)$ را داخل انتگرال قرار دهید. یک دوره تناوب از $x(t)$ طبق شکل آن، به‌صورت مقابل است:

یک دوره تناوب از $x(t)$ تنها در بازه $(-T_1, T_1)$ مقدار دارد که این مقدار برابر با یک است و در بقیه زمان‌ها صفر است. بنابراین کران انتگرال را $(-T_1, T_1)$ در نظر می‌گیریم.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} (1) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T} \frac{1}{-jk\omega_0} (e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1})$$

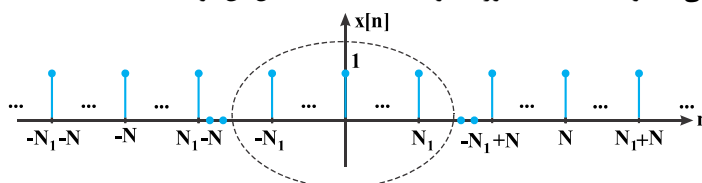
$$= \frac{1}{-jk\omega_0 T} (-2j) \left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right) \Rightarrow a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

تذکر: می‌توان a_k به‌دست آمده را به‌صورت سیگنال sinc نیز نوشت:

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\pi \frac{k\omega_0 T_1}{\pi}}{k\pi} \times \frac{\sin(\pi \frac{k\omega_0 T_1}{\pi})}{\pi \frac{k\omega_0 T_1}{\pi}} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\pi T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k \frac{\pi}{T} T_1}{\pi}\right) = \frac{\pi T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k T_1}{T}\right)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{n-kN}{N_1}\right), \quad N_1 < \frac{N}{2} \quad (۴)$$

پاسخ: $x[n]$ سیگنال مستطیلی متناوب گسسته با دوره تناوب N است. به شکل آن توجه کنید:



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \xrightarrow{\text{برابر با ۱ است}} a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_1} (e^{-jk\omega_0})^n$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جملات تصاعد هندسی}} a_k = \frac{1}{N} \frac{e^{-jk\omega_0(-N_1)} - e^{-jk\omega_0(N_1+1)}}{1 - e^{-jk\omega_0}}$$

سعی می‌کنیم رابطه به دست آمده را به صورت سینوسی بنویسیم:

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{e^{-jk\omega_0(\frac{1}{2})} (e^{jk\omega_0(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\omega_0(N_1+\frac{1}{2})})}{e^{-jk\omega_0(\frac{1}{2})} (e^{jk\omega_0(\frac{1}{2})} - e^{-jk\omega_0(\frac{1}{2})})} = \frac{1}{N} \frac{2j \sin(k\omega_0(N_1 + \frac{1}{2}))}{2j \sin(\frac{k\omega_0}{2})} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{k\omega_0}{2}(2N_1 + 1))}{\sin(\frac{k\omega_0}{2})}$$

تذکر: همواره سعی کنید در محاسبه ضرایب سری فوریه، سیگنال‌های نمایی موهومی را به کمک روابط اوایلر به سیگنال‌های سینوسی تبدیل کنید.

جمع‌بندی ضرایب سری فوریه سیگنال‌های مهم

سیگنال	ضرایب
	$a_k = \frac{1}{T}$
	$a_k = \frac{1}{N}$
	$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{T_1}{T} \text{sinc}(\frac{\gamma k T_1}{T})$
	$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{k\omega_0}{2}(2N_1 + 1))}{\sin(\frac{k\omega_0}{2})}$

شرایط سیگنال‌های مهم و ضرایب سری فوریه آن‌ها:

- سیگنال‌های قطار ضربه باید در زمان صفر مقدار داشته باشند و سیگنال‌های مستطیلی متناوب نیز باید زوج بوده و در زمان صفر مقدار داشته باشند.
- ضرایب سری فوریه سیگنال مستطیلی متناوب پیوسته به صورت sinc است ولی ضرایب سری فوریه سیگنال مستطیلی متناوب گسسته به صورت sinc نیست.

مثال ۲: مقدار $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \gamma n\pi)$ برابر با کدام است؟ (دکتری ۱۴۰۰)

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \quad (۴) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \quad (۳) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi t} \quad (۲) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi t} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها کافی است بسط سری فوریه $x(t)$ را بنویسیم. ☒

$x(t)$ قطار ضربه‌ای با دوره تناوب $T = 2\pi$ است. ضرایب سری فوریه قطار ضربه برابر با معکوس دوره تناوب می‌باشد. $(a_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi})$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1} x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jkt}$$



مدرس‌ان شریف

فصل پنجم

«تبدیل فوریه»

در این فصل دومین ابزار ریاضی برای تبدیل سیگنال‌های زمانی به سیگنال‌های فرکانسی را بررسی می‌کنیم. تبدیل فوریه ابزاری است که به وسیله آن می‌توان برخی از سیگنال‌های پیوسته و گسسته نامتناوب را برحسب فرکانس‌های موهومی بسط داد. هرچند به کمک سری فوریه می‌توان تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب را نیز به دست آورد. این فصل از دو درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول روابط مربوط به تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه مطرح می‌شود و در درسنامه دوم خواص تبدیل فوریه را بررسی می‌کنیم. این خواص در بسیاری از موارد به خواص سری فوریه شباهت دارند.

درسنامه (I): تبدیل فوریه سیگنال‌های زمانی



در فصل قبل برای سیگنال‌های متناوب زمانی نمایش سری فوریه را بیان کردیم. نشان دادیم که سیگنال‌های متناوب را می‌توان برحسب سیگنال‌های نمایی $e^{jk\omega_0 n} / e^{jk\omega_0 t}$ یعنی مضارب صحیح فرکانس پایه $(jk\omega_0, k \in \mathbb{Z})$ بسط داد. برای این کار کافی بود ضرایب سری فوریه (a_k) را پیدا کنیم. حال می‌خواهیم در مورد سیگنال‌های نامتناوب بحث کنیم. برای پیدا کردن مؤلفه‌های فرکانسی سیگنال‌های نامتناوب از یک ابزار ریاضی به نام تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم. تبدیل فوریه سیگنال‌های نامتناوب را برحسب سیگنال‌های نمایی $e^{j\omega n} / e^{j\omega t}$ یعنی فرکانس‌های $(j\omega, \omega \in \mathbb{R})$ بسط می‌دهد. البته در ادامه خواهید دید که برای سیگنال‌های متناوب نیز می‌توان تبدیل فوریه تعریف کرد.

روابط تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه

در رابطه با تبدیل فوریه سیگنال‌ها همواره یک زوج رابطه مطرح می‌شود. رابطه تبدیل فوریه از روی سیگنال زمانی، تبدیل فوریه آن را محاسبه می‌کند. تبدیل فوریه یک سیگنال پیوسته را با $X(j\omega)$ و یک سیگنال گسسته را با $X(e^{j\omega})$ نشان می‌دهیم. رابطه عکس تبدیل فوریه نیز از روی تبدیل فوریه، سیگنال زمانی را محاسبه می‌کند. این زوج رابطه در حالت زمان پیوسته و گسسته در ادامه بیان می‌شوند:

	CT	DT
رابطه تبدیل فوریه	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$
رابطه عکس تبدیل فوریه	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

در مورد روابط گفته شده به چند نکته زیر توجه کنید. این موارد در به خاطر سپردن روابط و درک مفهوم آن‌ها کمک زیادی می‌کنند.

- $x(t)$ و $x[n]$ سیگنال‌های متناوبی نیستند. بنابراین انتگرال و سیگما در رابطه تبدیل فوریه در کل بازه زمانی یعنی از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ و بر روی متغیر مستقل n/t بسته می‌شود $(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}, \int_{-\infty}^{+\infty} dt)$.
- تبدیل فوریه سیگنال پیوسته $x(t)$ ، یعنی $X(j\omega)$ یک سیگنال پیوسته غیرمتناوب با متغیر مستقل ω محسوب می‌شود. بنابراین در رابطه عکس تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته، انتگرال را از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ و بر روی ω می‌بندیم $(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega)$.
- آرگومان تبدیل فوریه یک سیگنال پیوسته را $(j\omega)$ در نظر می‌گیریم. با این وجود متغیر مستقل سیگنال $X(j\omega)$ ، $j\omega$ نبوده و ω می‌باشد. به دلیل اینکه اغلب در تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته عبارت $j\omega$ ظاهر می‌شود، آرگومان را به این صورت در نظر گرفته‌اند. البته $X(j\omega)$ را گاهی به صورت $X(\omega)$ ، $X(j\Omega)$ و $X(\Omega)$ نیز نشان می‌دهند. برای مثال به چند نمونه تبدیل فوریه یک سیگنال پیوسته توجه کنید.

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}, \quad X_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad \dots$$

• تبدیل فوری سیگنال گسسته $x[n]$ ، یعنی $X(e^{j\omega})$ یک سیگنال پیوسته متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ و متغیر مستقل ω محسوب می‌شود. بنابراین در رابطه عکس تبدیل فوری سیگنال‌های گسسته، انتگرال را بر روی یک دوره تناوب و بر روی ω می‌بندیم $(\int_{-\pi}^{\pi} d\omega)$.

• آرگومان تبدیل فوری سیگنال گسسته را $e^{j\omega}$ در نظر می‌گیریم. با این وجود متغیر مستقل سیگنال $X(e^{j\omega})$ ، $e^{j\omega}$ نبوده و ω می‌باشد. به دلیل اینکه اغلب در تبدیل فوری سیگنال‌های گسسته عبارت $e^{j\omega}$ ظاهر می‌شود، آرگومان را به این صورت در نظر گرفته‌اند. البته $X(e^{j\omega})$ را گاهی به صورت $X(\omega)$ ، $X(j\omega)$ ، $X(\Omega)$ و $X(e^{j\Omega})$ نیز نشان می‌دهند. برای مثال به چند نمونه تبدیل فوری سیگنال گسسته توجه کنید.

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ze^{-j\omega}} \quad , \quad X_2(j\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \quad , \quad \dots$$

• سیگنال‌های $e^{j\omega t}$ و $e^{j\omega n}$ دارای فرکانس‌های $j\omega$ هستند. به همین دلیل گفته می‌شود تبدیل فوری، یک سیگنال را برحسب فرکانس‌های موهومی $(j\omega, \omega \in \mathbb{R})$ بسط می‌دهد.

• تبدیل فوری در واقع معادل فرکانسی یک سیگنال زمانی است و نشان می‌دهد که سیگنال زمانی در هر فرکانس موهومی $j\omega, \omega \in \mathbb{R}$ چه مقداری دارد. البته برای سادگی در نوشتار از j صرف‌نظر کرده و می‌توان گفت که تبدیل فوری مقدار فرکانسی یک سیگنال زمانی را در فرکانس $\omega, \omega \in \mathbb{R}$ بیان می‌کند. اما هرگز فراموش نکنید که فرکانس‌ها در تبدیل فوری موهومی هستند.

برای مثال در ادامه خواهید دید که تبدیل فوری سیگنال $x(t) = e^{-2t}u(t)$ برابر با سیگنال $X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$ است. حال می‌توان گفت سیگنال

زمانی $x(t)$ در فرکانس $\omega = 3$ دارای مقدار $X(j3) = \frac{1}{2 + j3}$ یا در فرکانس $\omega = 0$ دارای مقدار $X(j0) = \frac{1}{2 + j0}$ و ... است.

اشتباه متداول: فرض کنید در سؤالی تبدیل فوری یک سیگنال به صورت $X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$ داده شده و $X(2)$ خواسته شده است. منظور از $X(2)$

مقدار تبدیل فوری در فرکانس $\omega = 2$ یعنی $X(j2)$ است. $X(j\omega)$ را در $\omega = 2$ قرار می‌دهیم. یعنی $X(2)$ دقیقاً همان $X(j2)$ می‌باشد و تنها اختلاف در شیوه نوشتار است.

$$X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow X(2) = X(j\omega) \Big|_{\omega=2} = \frac{1}{2 + j2} \quad \checkmark$$

برای مثال اشتباه متداولی که ممکن است رخ دهد به صورت زیر است:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow X(2) = X(j\omega) \Big|_{\omega=-j2} = X(j(-j2)) = \frac{1}{2 + j(-j2)} = \frac{1}{4} \quad \times$$

این اشتباه به دلیل تفاوت قائل شدن بین $X(j\omega)$ و $X(\omega)$ است. در صورتی که گفته شد $X(j\omega)$ ، همان $X(\omega)$ است و تنها در نوع نوشتار با یکدیگر تفاوت دارند. در تبدیل فوری زمان گسسته نیز ممکن است همین برداشت اشتباه رخ دهد. به مثال زیر توجه کنید:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ze^{-j\omega}} \Rightarrow X(0) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = X(e^{j0}) = \frac{1}{1 - ze^{-j0}} = -1 \quad \checkmark$$

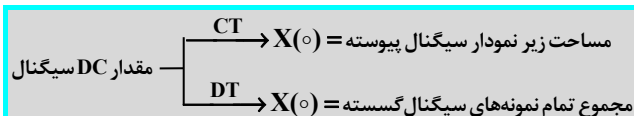
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ze^{-j\omega}} \Rightarrow X(0) = X(e^{j(-\infty)}) = \frac{1}{1 - ze^{-j(-\infty)}} \quad \times$$

• به $X(j0)$ و $X(e^{j0})$ یا همان $X(0)$ مقدار DC سیگنال گفته می‌شود. به رابطه $X(0)$ توجه کنید.

$$CT: X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \xrightarrow{\omega=0} X(j0) = X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j0t} dt \Rightarrow \boxed{X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt}$$

$$DT: X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \xrightarrow{\omega=0} X(e^{j0}) = X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j0n} \Rightarrow \boxed{X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]}$$

بنابراین در مورد مقدار DC سیگنال می‌توان گفت:



• سیگنال نمایی موهومی $e^{j\omega n} / e^{j\omega t}$ هنگامی که با سیگنال زمانی در یک سمت رابطه باشند با ضریب منفی توان و هنگامی که با تبدیل فوری سیگنال در یک سمت رابطه باشند با ضریب مثبت توان ظاهر می‌شود. به ضریب $\frac{1}{j\pi}$ در رابطه عکس تبدیل فوری و متغیرهای مستقل در دو سمت رابطه نیز دقت کنید:

$$\begin{aligned} \underbrace{X(j\omega)}_{\text{متغیر مستقل: } \omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{متغیر مستقل: } t} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{ضریب منفی}} dt \\ \underbrace{x(t)}_{\text{متغیر مستقل: } t} &= \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(j\omega)}_{\text{متغیر مستقل: } \omega} \underbrace{e^{+j\omega t}}_{\text{ضریب مثبت}} d\omega \\ \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\text{متغیر مستقل: } \omega} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n]}_{\text{متغیر مستقل: } n} \underbrace{e^{-j\omega n}}_{\text{ضریب منفی}} \\ \underbrace{x[n]}_{\text{متغیر مستقل: } n} &= \frac{1}{j\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\text{متغیر مستقل: } \omega} \underbrace{e^{+j\omega n}}_{\text{ضریب مثبت}} d\omega \end{aligned}$$

• رابطه بین سیگنال و تبدیل فوری را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{F} X(j\omega) & F\{x(t)\} &= X(j\omega) & X(j\omega) &\xrightarrow{F^{-1}} x(t) & F^{-1}\{X(j\omega)\} &= x(t) \\ x[n] &\xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) & F\{x[n]\} &= X(e^{j\omega}) & X(e^{j\omega}) &\xrightarrow{F^{-1}} x[n] & F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= x[n] \end{aligned}$$

اولین قدم در حل سؤالات این فصل، پیدا کردن تبدیل فوری یک سیگنال زمانی است. در مثال زیر تبدیل فوری چند سیگنال مهم را به کمک رابطه تبدیل فوری، به دست می‌آوریم. در انتها جدول تبدیل فوری سیگنال‌های مهم را گردآوری می‌کنیم.

مثال ۱: تبدیل فوری سیگنال‌های زمانی زیر را به دست آورید.

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0 \quad (1)$$

✓ پاسخ: کافی است سیگنال $x(t)$ را در رابطه تبدیل فوری جایگذاری کنیم:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt \xrightarrow{u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}} X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} (\underbrace{e^{-(a+j\omega)(\infty)}}_0 - \underbrace{e^{-(a+j\omega)(0)}}_1) = -\frac{1}{a+j\omega} (0-1) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \\ \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0 \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}} \end{aligned}$$

$\text{Re}\{a\} > 0$ است. پس مقدار سیگنال $e^{-(a+j\omega)(\infty)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$e^{-(a+j\omega)(\infty)} = e^{-a(\infty)} \times e^{-j\omega(\infty)} \xrightarrow{\text{Re}\{a\} > 0} \underbrace{e^{-\infty}}_0 \times \underbrace{e^{-j\omega(\infty)}}_{\text{کراندار}} = 0$$

تذکر: با توجه به توضیحات داده شده می‌توان گفت سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} < 0$ تبدیل فوری ندارد. در واقع اگر $X(j\omega)$ را برای این سیگنال محاسبه کنیم، واگرا خواهد شد ($X(j\omega) = \infty$).

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad (2)$$

✓ پاسخ: کافی است سیگنال $x[n]$ را در رابطه تبدیل فوری جایگذاری کنیم:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \xrightarrow{u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ \xrightarrow{\text{حد مجموع تصاعد هندسی قدرنسبت} = ae^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) &= \frac{(ae^{-j\omega})^0}{1 - ae^{-j\omega}} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \Rightarrow \boxed{x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}} \end{aligned}$$

حد مجموع تصاعد هندسی هنگامی همگرا می‌شود که $|a| < 1$ باشد. قدرنسبت این تصاعد $ae^{-j\omega}$ است که در مورد اندازه آن می‌توان گفت:

$$|ae^{-j\omega}| = |a| |e^{-j\omega}| = |a|$$

چون فرض سؤال این بود که $|a| < 1$ است پس حد مجموع تصاعد هندسی همگرا است.

تذکر: با توجه به توضیحات داده شده می‌توان گفت سیگنال $x[n] = a^n u[n], |a| > 1$ تبدیل فوری ندارد. در واقع $X(e^{j\omega})$ برای این سیگنال واگرا خواهد بود ($X(e^{j\omega}) = \infty$).

تبدیل فوری یک سیگنال گسسته با دوره تناوب $T = 2\pi$ متناوب است. در مورد این سیگنال نیز می‌توان این موضوع را تحقیق کرد:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega+2\pi)}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega} \underbrace{e^{-j2\pi}}_1} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

$$x(t) = \delta(t) \quad (۳)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j\omega(\cdot)}}_1 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \Rightarrow X(j\omega) = 1$$

غربالی
 $t=0$

پاسخ: ☒

$$\Rightarrow x(t) = \delta(t) \xleftarrow{F} X(j\omega) = 1$$

$$x[n] = \delta[n] \quad (۴)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] \underbrace{e^{-j\omega(\cdot)}}_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1$$

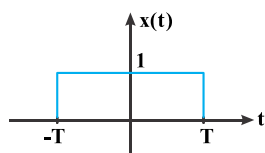
غربالی
 $n=0$

پاسخ: ☒

$$\Rightarrow x[n] = \delta[n] \xleftarrow{F} X(e^{j\omega}) = 1$$

سیگنال DC را می‌توان با هر دوره تناوب دلخواهی متناوب فرض کرد. بنابراین می‌توان گفت $X(e^{j\omega}) = 1$ سیگنالی متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است.

$$x(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right) \quad (۵)$$



پاسخ: ☒ شکل سیگنال $x(t)$ به صورت روبه‌رو است:

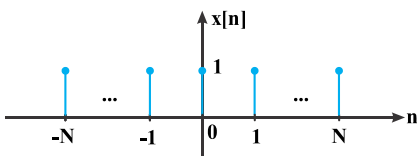
$x(t)$ در بازه $(-T, T)$ مقدار ۱ داشته و در بقیه زمان‌ها صفر است. بنابراین برای محاسبه تبدیل فوری $x(t)$ داریم:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j\omega) = \int_{-T}^{+T} (1) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^{+T} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T})$$

بهتر است $X(j\omega)$ را به فرم سینوسی بنویسیم. برای این منظور کافی است صورت و مخرج را در $(-2j)$ ضرب کنیم.

$$= -\frac{1}{j\omega} (-2j) \left(\frac{1}{2j} e^{j\omega T} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega T} \right) = -\frac{2j}{j\omega} \sin(\omega T) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$$

$$x[n] = \prod\left(\frac{n}{N}\right) \quad (۶)$$



پاسخ: ☒ شکل سیگنال $x[n]$ به صورت روبه‌رو است:

$x[n]$ در بازه $[-N, N]$ مقدار ۱ داشته و در بقیه زمان‌ها صفر است. بنابراین برای محاسبه تبدیل فوری $x[n]$ داریم:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} (1) e^{-j\omega n} \xrightarrow[\text{مجموع جملات تصاعد هندسی}]{\text{مجموع جملات تصاعد هندسی}} X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(-N)} - e^{-j\omega(N+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

بهتر است $X(e^{j\omega})$ را به فرم سینوسی بنویسیم. برای این منظور کافی است در صورت و مخرج از $e^{-j\frac{\omega}{2}}$ فاکتور بگیریم.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}(N+1)} - e^{-j\frac{\omega}{2}(N+1)})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = \frac{2j \sin \omega (N + \frac{1}{2})}{2j \sin \frac{\omega}{2}} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2}))}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

متناوب بودن تبدیل فوری این سیگنال گسسته نیز با دوره تناوب $T = 2\pi$ مشهود است.

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2}))}{\sin \frac{(\omega+2\pi)}{2}} = \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\omega}{2} + \pi)} = \frac{-\sin(\omega(N + \frac{1}{2}))}{-\sin(\frac{\omega}{2})} = \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2}))}{\sin \frac{\omega}{2}} = X(e^{j\omega})$$

تذکر: تبدیل فوری سیگنال مستطیلی پیوسته به صورت سیگنال sinc ظاهر شد. اما تبدیل فوری سیگنال مستطیلی گسسته به صورت sinc نیست.

(دکتری ۹۹)

کج مثال ۲: کدام عبارت می‌تواند تبدیل فوری یک سیگنال زمان گسسته باشد؟

$$\sin \omega \quad (۱) \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (۲) \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + ۱ \quad (۳) \quad \sin c(\omega) \quad (۴)$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» تبدیل فوری یک سیگنال گسسته، خود سیگنالی پیوسته و متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ می‌باشد (تبدیل فوری گسسته می‌تواند با دوره تناوب $(T = \frac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{Z})$ نیز متناوب باشد). بنابراین از بین گزینه‌ها، باید سیگنالی انتخاب شود که با دوره تناوب 2π یا کسری از آن متناوب باشد.

$$\sin \omega \longrightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \text{گزینه (۱)} \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + ۱ \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \text{گزینه (۳)} \quad \text{نامتناوب} \longrightarrow \text{گزینه (۴)}$$

در نتیجه گزینه (۱) جواب تست خواهد بود.

همگرایی تبدیل فوری

رابطه تبدیل فوری، یک سیگنال نامتناوب را برحسب سیگنال‌های نمایی ($e^{j\omega n} / e^{j\omega t}$) بسط می‌دهد.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

حال سؤال این است. آیا روابط بالا همواره برقرار هستند و انتگرال‌های نوشته شده در همه زمان‌ها به مقدار سیگنال در آن زمان همگرا می‌شود؟

$$x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \quad x[n_0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n_0} d\omega$$

روابط بالا به شرط محدود بودن تبدیل فوری سیگنال ($X(e^{j\omega}), X(j\omega)$) برقرار هستند. در واقع می‌توان گفت به شرط محدود بودن تبدیل فوری، رابطه عکس تبدیل فوری به سیگنال زمانی همگرا می‌شود. محدود بودن تبدیل فوری یک سیگنال تحت شرایطی میسر است که به آن شرایط دیریکله گفته می‌شود.

شرایط دیریکله برای محدود بودن (همگرایی) تبدیل فوری

۱- سیگنال پیوسته انتگرال‌پذیر مطلق ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$) و سیگنال گسسته جمع‌پذیر مطلق ($\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$) باشد. ۲- تعداد ماکزیمم و

مینیمم‌های سیگنال پیوسته محدود باشد. ۳- تعداد نقاط ناپیوستگی سیگنال پیوسته محدود باشد. ۴- دامنه سیگنال پیوسته در نقاط ناپیوستگی محدود باشد.

🌟 **تذکره ۱:** شرط ۲، ۳ و ۴ برای سیگنال گسسته مطرح نمی‌شود. چرا که داشتن ماکزیمم، مینیمم و نقاط ناپیوستگی برای یک سیگنال گسسته بی‌معنی است. همچنین این شروط در مورد سیگنال‌های پیوسته که در کاربردهای عملی از آن‌ها استفاده می‌شوند، همواره برقرار هستند. بنابراین تنها شرط اول دیریکله در مورد محدود بودن تبدیل فوری اهمیت داشته و بررسی می‌شود. درباره برقراری شرط اول دیریکله و رابطه آن با تبدیل فوری یک سیگنال چند حالت رخ می‌دهد.

رابطه شرایط دیریکله و تبدیل فوری:

۱- سیگنال انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر مطلق باشد $\leftarrow$ سیگنال تبدیل فوری دارد و تبدیل فوری آن همواره تابعی کراندار و پیوسته برحسب ω است.

۲- سیگنال انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر مطلق نباشد: $\leftarrow$ الف) سیگنال تبدیل فوری دارد ولی تبدیل فوری تابعی کراندار یا پیوسته برحسب ω نیست.

ب) سیگنال تبدیل فوری ندارد.

در مورد موارد گفته شده به چند مثال زیر توجه کنید:

کج مثال ۳: شرط اول دیریکله را در مورد سیگنال‌های زیر بررسی کرده و در صورت وجود، تبدیل فوری سیگنال‌های زیر را پیدا کنید. در مورد کراندار و پیوستگی تبدیل فوری آن‌ها نیز بحث کنید.

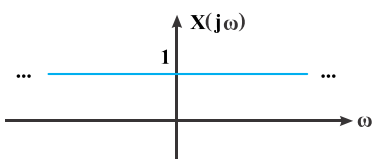
$$x(t) = \delta(t) \quad (۱)$$

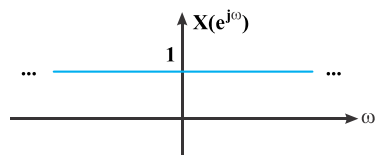
$$\text{پاسخ: } \checkmark \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t)| dt = 1 < \infty$$

بنابراین سیگنال انتگرال‌پذیر مطلق بوده و قطعاً تبدیل فوری دارد. تبدیل فوری سیگنال ضربه پیوسته را در مثال‌های قبلی به صورت $X(j\omega) = 1$ به دست آوردیم. مشاهده می‌کنید که $X(j\omega)$ همواره تابعی کراندار و پیوسته از ω است.

$$x[n] = \delta[n] \quad (۲)$$

$$\text{پاسخ: } \checkmark \quad I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n]| = 1 < \infty$$





بنابراین سیگنال جمع‌پذیر مطلق بوده و قطعاً تبدیل فوریه دارد. تبدیل فوریه سیگنال ضربه گسسته را در مثال‌های قبلی به صورت $X(e^{j\omega}) = 1$ به دست آوردیم. مشاهده می‌کنید که $X(e^{j\omega})$ همواره تابعی کراندار و پیوسته از ω است.

تذکر: تمامی سیگنال‌هایی که در مثال ابتدای فصل تبدیل فوریه آن‌ها به دست آمد نیز انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر مطلق هستند. اگر به تبدیل فوریه آنها توجه کنید، تابعی کراندار و پیوسته از ω مشاهده خواهید کرد.

$$x(t) = e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} < 0 \quad (۳)$$

پاسخ: $\checkmark$ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-at}u(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-(\operatorname{Re}\{a\} + j\operatorname{Im}\{a\})t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\{a\}t} |u(t)| dt$ یک مقدار مختلط است $a = \operatorname{Re}\{a\} + j\operatorname{Im}\{a\}$ شرط اول دیریکله

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}| |u(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\{a\}t} |u(t)| dt \xrightarrow{\substack{\text{سیگنالی مثبت و حقیقی} \\ |e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}u(t)| = e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}u(t)}} I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\{a\}t} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\{a\}t} dt$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{Re}\{a\}} e^{-\operatorname{Re}\{a\}t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\operatorname{Re}\{a\}} (e^{-\operatorname{Re}\{a\}(\infty)} - e^0) \xrightarrow{\operatorname{Re}\{a\} < 0 \rightarrow -\operatorname{Re}\{a\}(\infty) = +\infty} I = -\frac{1}{\operatorname{Re}\{a\}} (e^{+\infty} - e^0) = \infty$$

بنابراین این سیگنال انتگرال‌پذیر مطلق نبوده و تبدیل فوریه ندارد. اگر تبدیل فوریه را برای این سیگنال محاسبه کنید، خواهید دید که انتگرال تبدیل فوریه واگرا خواهد شد.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} (e^{-(a+j\omega)\infty} - e^0) = -\frac{1}{a+j\omega} (\underbrace{e^{-a(\infty)}}_{\text{کراندار}} \times \underbrace{e^{-j\omega(\infty)}}_1 - e^0) \xrightarrow{\operatorname{Re}\{a\} < 0 \rightarrow e^{-a(\infty)} = \infty} X(j\omega) = \infty$$

تبدیل فوریه به ازای تمامی ω ها واگرا شد. در واقع تبدیل فوریه برای این سیگنال وجود ندارد.

تذکر: سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$ تبدیل فوریه دارد که تبدیل فوریه آن را در مثال‌های قبلی به دست آوردیم، اما سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} < 0$ تبدیل فوریه ندارد.

$$x[n] = a^n u[n], |a| > 1 \quad (۴)$$

پاسخ: $\checkmark$ $I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n| |u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \xrightarrow[\text{قدرنسبت: } |a| \geq 1]{\text{حد مجموع تصاعد هندسی}} I = \infty$ شرط اول دیریکله

بنابراین این سیگنال جمع‌پذیر مطلق نبوده و تبدیل فوریه ندارد. اگر تبدیل فوریه را برای این سیگنال محاسبه کنید، خواهید دید که سیگمای تبدیل فوریه واگرا خواهد شد.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \xrightarrow[\text{قدرنسبت: } |ae^{-j\omega}| = |a| \geq 1]{\text{حد مجموع تصاعد هندسی}} X(e^{j\omega}) = \infty$$

تبدیل فوریه به ازای تمامی ω ها واگرا شد. در واقع تبدیل فوریه برای این سیگنال وجود ندارد.

تذکر: سیگنال $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ تبدیل فوریه دارد که تبدیل فوریه آن را در مثال‌های قبلی به دست آوردیم، اما سیگنال $x[n] = a^n u[n], |a| > 1$ تبدیل فوریه ندارد.

نکته: سیگنال‌های نمایی که انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر مطلق نباشند، نمونه‌ای از سیگنال‌هایی هستند که شرط اول دیریکله را نداشته و تبدیل فوریه نیز ندارند.

$$x(t) = u(t) \quad (۵)$$

پاسخ: $\checkmark$ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt = \int_0^{+\infty} (1) dt = \infty$ شرط اول دیریکله

بنابراین این سیگنال انتگرال‌پذیر مطلق نیست. اما با این وجود تبدیل فوریه دارد. به رابطه تبدیل فوریه این سیگنال دقت کنید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega(\infty)} - e^0)$$

$e^{-j\omega(\infty)}$ قابل محاسبه نیست. در واقع حد $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-j\omega t}$ وجود ندارد. برای رفع این مشکل از تبدیل فوریه تعمیم‌یافته استفاده می‌شود. این موضوع

خارج از مباحث موردنیاز برای کنکور است و نیازی به یادگیری تبدیل فوریه تعمیم‌یافته ندارد. اما باید تبدیل فوریه سیگنال‌های مهمی که انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر مطلق نیستند را بلد بوده و به خاطر بسپارید.

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه تعمیم‌یافته}} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

تبدیل فوریه تعمیم‌یافته برای سیگنال پله پیوسته به صورت مقابل است:



مدرس‌ان شریف

فصل ششم

«تبدیل لاپلاس»

در این فصل سومین ابزار ریاضی برای تبدیل سیگنال‌های زمانی به سیگنال‌های فرکانسی را بررسی می‌کنیم. تبدیل لاپلاس ابزاری است که به وسیله آن می‌توان برخی از سیگنال‌های پیوسته نامتناوب را برحسب فرکانس‌های مختلط بسط داد. احتمالاً با تبدیل لاپلاس در دروس مدارهای الکتریکی، معادلات دیفرانسیل و کنترل خطی آشنا شده باشید. در درس سیگنال و سیستم تبدیل لاپلاس دوطرفه و در دروس ذکرشده تبدیل لاپلاس یک‌طرفه استفاده می‌شود. بنابراین سعی کنید تمامی روابط و مفاهیمی که درباره تبدیل لاپلاس می‌دانید کنار گذاشته و این فصل را بدون پیش‌فرض خاصی مطالعه کنید. هرچند درباره تبدیل لاپلاس یک‌طرفه نیز در فصل هشتم مواردی را مطرح خواهیم کرد.

این فصل از سه درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول روابط مربوط به تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی آن مطرح می‌شود. در ادامه در درسنامه دوم خواص تبدیل لاپلاس را بررسی می‌کنیم. این خواص در بسیاری از مواقع به خواص تبدیل فوری و سری فوری شباهت دارد. در انتهای این درسنامه جدول تبدیل لاپلاس سیگنال‌های مهم گنجانده شده است که باید آن را به خاطر بسپارید. در درسنامه سوم نیز روش‌های به دست آوردن تبدیل لاپلاس یک سیگنال زمانی و عکس تبدیل لاپلاس یک سیگنال فرکانسی بررسی خواهند شد.

درسنامه (۱): تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زمانی

در فصل چهارم نشان دادیم که سیگنال‌های متناوب پیوسته را می‌توان برحسب سیگنال نمایی موهومی $e^{jk\omega_0 t}$ و فرکانس موهومی $j\omega_0$ بسط داد. همچنین در فصل پنجم سیگنال‌های غیرمتناوب پیوسته را برحسب سیگنال نمایی موهومی $e^{j\omega t}$ و فرکانس موهومی $j\omega$ بسط دادیم. حال می‌خواهیم یک سیگنال زمانی را برحسب فرکانس‌های مختلط $s = \sigma + j\omega$ بسط دهیم. برای این منظور از ابزار تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

روابط تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس سیگنال زمانی پیوسته $x(t)$ را با $X(s)$ نشان داده و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

رابطه تبدیل لاپلاس

در مورد رابطه تبدیل لاپلاس گفته شده به چند نکته زیر توجه کنید. این موارد در به خاطر سپردن و درک مفهوم این رابطه کمک زیادی می‌کنند.

- $x(t)$ سیگنالی متناوب نیست. بنابراین انتگرال در کل بازه زمانی یعنی از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ بر روی متغیر مستقل سیگنال (t) بسته می‌شود $(\int_{-\infty}^{+\infty} dt)$.
- تبدیل لاپلاس سیگنال پیوسته $x(t)$ ، یعنی $X(s)$ یک سیگنال پیوسته غیرمتناوب با متغیر مستقل s محسوب می‌شود. s یک مقدار مختلط است و آن را به صورت $s = \sigma + j\omega$ و $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ نشان می‌دهند $(\sigma = \text{Re}\{s\}, \omega = \text{Im}\{s\})$.
- سیگنال e^{-st} دارای فرکانس مختلط s است. به همین دلیل گفته می‌شود که تبدیل لاپلاس، یک سیگنال را برحسب فرکانس‌های مختلط $(s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in \mathbb{R})$ بسط می‌دهد.
- تبدیل لاپلاس در واقع معادل فرکانسی یک سیگنال زمانی پیوسته است و نشان می‌دهد که سیگنال زمانی در هر فرکانس مختلط $s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ چه مقداری دارد.

برای مثال در ادامه خواهید دید که تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{-2t}u(t)$ برابر با سیگنال $X(s) = \frac{1}{s+2}$ است. حال می‌توان گفت معادل فرکانسی

سیگنال زمانی $x(t)$ در فرکانس $s = 3 + j2$ دارای مقدار $X(3 + j2) = \frac{1}{3 + j2 + 2} = \frac{1}{5 + j2}$ است.

• رابطه عکس تبدیل لاپلاس به صورت روبه‌رو بیان می‌شود:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

برای محاسبه این انتگرال مختلط می‌توان از قضیه مانده‌ها که احتمالاً در ریاضیات مهندسی با آن آشنا شده‌اید، استفاده کرد. هرچند در این درس به هیچ‌وجه از این رابطه استفاده نکرده و برای محاسبه $x(t)$ از روی $X(s)$ روش‌های دیگری ذکر خواهد شد.

• رابطه بین سیگنال و تبدیل لاپلاس را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s), \quad L\{x(t)\} = X(s)$$

$$X(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t), \quad L^{-1}\{X(s)\} = x(t)$$

• تبدیل لاپلاس مختص سیگنال‌های زمانی پیوسته است. برای سیگنال‌های زمانی گسسته تبدیل Z تعریف می‌شود که در فصل بعد با این تبدیل آشنا می‌شویم.

اولین قدم در حل سؤالات این فصل، پیدا کردن تبدیل لاپلاس یک سیگنال زمانی پیوسته است. در مثال زیر، تبدیل لاپلاس چند سیگنال مهم را به کمک رابطه تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم.

مثال ۱: تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زمانی زیر را به دست آورید.

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a \in \mathbb{C} \quad (۱)$$

☒ پاسخ: کافی است سیگنال $x(t)$ را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری کنیم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt \xrightarrow{u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}} X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{a+s} (e^{-(a+s)(+\infty)} - \underbrace{e^{-(a+s)(0)}}_1)$$

همگرا و واگرا شدن عبارت $e^{-(a+s)(+\infty)}$ به مقادیر a و s بستگی دارد. a و s هر دو مقادیری مختلط هستند $(s = \text{Re}\{s\} + j\text{Im}\{s\} = \sigma + j\omega)$.
 $e^{-(a+s)(+\infty)} = e^{-(\text{Re}\{a\} + j\text{Im}\{a\} + \sigma + j\omega)(+\infty)} = e^{-(\text{Re}\{a\} + \sigma)(+\infty)} \times e^{-j(\text{Im}\{a\} + \omega)(+\infty)}$

بنابراین داریم:

عبارت $e^{-j(\text{Im}\{a\} + \omega)(+\infty)}$ نوسانی است و نمی‌تواند واگرا شود. اما در مورد عبارت $e^{-(\text{Re}\{a\} + \sigma)(+\infty)}$ می‌توان گفت:

$$e^{-(\text{Re}\{a\} + \sigma)(+\infty)} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & \text{همگرا} \quad \text{Re}\{a\} + \sigma > 0 \\ e^{+\infty} = \infty & \text{واگرا} \quad \text{Re}\{a\} + \sigma < 0 \end{cases}$$

بنابراین در مورد تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ می‌توان نوشت:

$$X(s) = \begin{cases} -\frac{1}{a+s} (0-1) & , \quad \text{Re}\{a\} + \sigma > 0 \\ -\frac{1}{a+s} (\infty-1) & , \quad \text{Re}\{a\} + \sigma < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a+s} & , \quad \sigma > -\text{Re}\{a\} \\ -\infty & , \quad \sigma < -\text{Re}\{a\} \end{cases}$$

ضابطه $X(s)$ به صورت دو ضابطه‌ای محاسبه شد. $X(s)$ در ناحیه $\sigma > -\text{Re}\{a\}$ همگرا و در ناحیه $\sigma < -\text{Re}\{a\}$ واگرا می‌شود. برای بیان ساده‌تر فقط ضابطه $X(s)$ در ناحیه‌ای که همگرا شده را به همراه ناحیه همگرایی می‌نویسیم. بدیهی است در نواحی دیگر که نوشته نشده است، حاصل $X(s)$ واگرا ($X(s) = \infty$) خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\boxed{x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma > -\text{Re}\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t), \quad a \in \mathbb{C} \quad (۲)$$

☒ پاسخ: همانند مثال قبل داریم:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at}u(-t) e^{-st} dt \xrightarrow{u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}} X(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{a+s} (e^{-(a+s)(0)} - \underbrace{e^{-(a+s)(-\infty)}}_1)$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر s و a را جدا می‌کنیم.

$$e^{-(a+s)(-\infty)} = e^{-(\text{Re}\{a\} + \sigma)(-\infty)} \times \underbrace{e^{-j(\text{Im}\{a\} + \omega)(-\infty)}}_{\text{نوسانی است و هرگز واگرانی نمی‌شود}}$$

$$e^{-(\operatorname{Re}\{a\}+\sigma)(-\infty)} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & (\text{همگرا}), \operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0 \\ e^{+\infty} = \infty & (\text{واگرا}), \operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0 \end{cases} \Rightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a+s}(1-0), & \operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0 \\ \frac{1}{a+s}(1-\infty), & \operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a+s}, & \sigma < -\operatorname{Re}\{a\} \\ \infty, & \sigma > -\operatorname{Re}\{a\} \end{cases}$$

در نتیجه برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ داریم:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma < -\operatorname{Re}\{a\}$$

تذکر: همان‌طور که مشاهده کردید، دو سیگنال $e^{-at}u(t)$ و $-e^{-at}u(-t)$ دارای تبدیل لاپلاس‌هایی با ضابطه یکسان ولی با نواحی همگرایی متفاوت هستند. بنابراین تبدیل لاپلاس بدون ناحیه همگرایی خود معنا نداشته و همواره باید ناحیه همگرایی برای آن ذکر شود.

$$x(t) = e^{-at}, \quad a \in \mathbb{C} \quad (۳)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{a+s} (e^{-(a+s)(+\infty)} - e^{-(a+s)(-\infty)})$$

پاسخ: ☒

در دو مثال قبل همگرایی دو عبارت $e^{-(a+s)(-\infty)}$ و $e^{-(a+s)(+\infty)}$ را به صورت زیر بررسی کردیم:

$$e^{-(a+s)(+\infty)} = \begin{cases} 0 & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0 \\ \infty & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0 \end{cases}, \quad e^{-(a+s)(-\infty)} = \begin{cases} 0 & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0 \\ \infty & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \begin{cases} -\frac{1}{a+s}(0-\infty) & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0 \\ -\frac{1}{a+s}(\infty-0) & , \operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0 \end{cases} = \begin{cases} \infty & , \sigma > -\operatorname{Re}\{a\} \\ \infty & , \sigma < -\operatorname{Re}\{a\} \end{cases}$$

بنابراین $X(s)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

همان‌طور که می‌بینید $X(s)$ همواره واگرا می‌شود. بنابراین سیگنال $x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد.

$$x(t) = e^{-at} \xrightarrow{L} \text{تبدیل لاپلاس ندارد}$$

$$x(t) = \delta(t) \quad (۴)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s(0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt}_1 = 1$$

پاسخ: ☒

تبدیل لاپلاس سیگنال ضربه به صورت یک سیگنال ثابت محاسبه شد که هیچ وابستگی به متغیر s ندارد. بنابراین می‌توان گفت هیچ محدودیتی بر روی متغیر s در رابطه با همگرا شدن $X(s)$ وجود ندارد و $X(s) = 1$ همواره همگرا است. در نتیجه ناحیه همگرایی آن شامل کل صفحه s می‌شود.

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{L} X(s) = 1 \quad \text{کل صفحه } s$$

همگرایی تبدیل لاپلاس

در دو فصل قبل درباره همگرایی سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته مطالبی را بیان کردیم. گفتیم که در صورت برقراری شرایط دیریکله برای سیگنال $x(t)$ ، سری و تبدیل فوریه همگرا خواهند شد. اما در مورد همگرایی تبدیل لاپلاس چه می‌توان گفت؟ طبق مثال‌های حل شده در ابتدای فصل، مشاهده

کردید که همگرایی تبدیل لاپلاس $X(s)$ به طور مستقیم به همگرایی رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$ بستگی دارد.

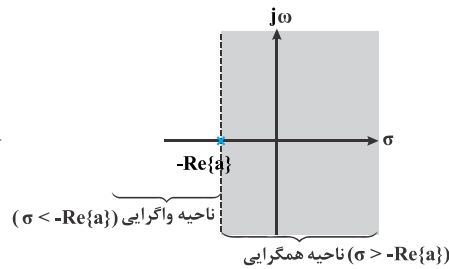
در واقع اگر حاصل رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$ به ازای s_0 ‌هایی همگرا (یعنی یک عدد مختلط و غیربی‌نهایت) شود، $X(s)$ به ازای همان s_0 ‌ها همگرا و اگر

حاصل این رابطه به ازای s_0 ‌هایی واگرا (یعنی بی‌نهایت) شود، $X(s)$ به ازای همان s_0 ‌ها واگرا می‌شود. s در حالت کلی یک مقدار مختلط است و همگرایی

عبارت $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$ فقط به قسمت حقیقی s بستگی دارد و قسمت موهومی آن هیچ نقشی در تعیین همگرا شدن این عبارت ندارد. با توجه به

مختلط بودن s ، می‌توان s_0 ‌هایی را که باعث همگرا یا واگرا شدن $X(s)$ می‌شوند، در صفحه اعداد مختلط نشان داد. این صفحه از دو محور عمود بر هم تشکیل می‌شود که محور افقی و عمودی آن به ترتیب نشان‌دهنده قسمت حقیقی (σ) و قسمت موهومی (ω) متغیر s است. با این کار در واقع صفحه مختلط s را به سه قسمت ناحیه همگرایی، ناحیه واگرایی و مرز ناحیه همگرایی و واگرایی تقسیم می‌کنیم. مرز ناحیه همگرایی و واگرایی را با یک خط چین عمود نشان داده و ناحیه همگرایی را رنگ کرده یا هاشور می‌زنیم. به عنوان نمونه ناحیه همگرایی مثال‌های حل شده را در صفحه s در ادامه نشان می‌دهند:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -\operatorname{Re}\{a\}$$



$$x(t) = e^{-at} \xrightarrow{L} \text{تبدیل لاپلاس ندارد}$$

کل صفحه ناحیه واگرایی است و مرزی وجود ندارد.

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{L} X(s) = 1, s \text{ صفحه کل}$$

کل صفحه ناحیه همگرایی است و مرزی وجود ندارد.

انواع تبدیل لاپلاس

همان‌طور که گفته شد، تبدیل لاپلاس یعنی $X(s)$ سیگنالی پیوسته از متغیر مستقل s است. تبدیل لاپلاس‌هایی را که در این درس به آن‌ها می‌پردازیم، می‌توان در دو نوع دسته‌بندی کرد:

۱- تبدیل لاپلاس گویا

اگر $X(s)$ به صورت کسری بوده و صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌هایی بر حسب s باشد، چنین تبدیل لاپلاسی، گویا نامیده می‌شود.

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}$$

$N(s)$: چندجمله‌ای صورت ← **درجه صورت**: بزرگترین توان متغیر s در چندجمله‌ای صورت

$D(s)$: چندجمله‌ای مخرج ← **درجه مخرج**: بزرگترین توان متغیر s در چندجمله‌ای مخرج

برای مثال به تبدیل لاپلاس‌های زیر توجه کنید:

$$X(s) = \frac{s^2 - 3s}{s^2 + 3s + 1} : \text{درجه مخرج} = 2, \text{درجه صورت} = 3, \quad Y(s) = \frac{1 - s - s^4}{\sqrt{2}s - 3js} : \text{درجه مخرج} = 4, \text{درجه صورت} = 1$$

$$W(s) = \frac{\sqrt{2}s - 1}{s - 1} \rightarrow \text{گویا نیست، چراکه صورت به فرم چندجمله‌ای نمی‌باشد.}$$

۲- تبدیل لاپلاس شبه‌گویا

اگر در تبدیل لاپلاس گویا، عبارت‌هایی به فرم $e^{t_0 s}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ ظاهر شود، تبدیل لاپلاس، شبه‌گویا نامیده می‌شود. برای مثال به تبدیل لاپلاس‌های زیر توجه کنید:

$$X(s) = \frac{e^{-s}(s-1)}{s^2 - s - 1} : \text{درجه مخرج} = 2, \text{درجه صورت} = 1$$

$$Y(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{e^{2s}(s+1)} \rightarrow \text{گویا نیست در نتیجه شبه‌گویا نیز نمی‌باشد.}$$

تذکره: در اغلب موارد تبدیل لاپلاس‌هایی که در این درس خواهید دید، از نوع گویا هستند و در مواردی نادر (به ویژه در کنکور دکتری) تبدیل لاپلاس‌های شبه‌گویا نیز مشاهده می‌شوند.

بعد از معرفی انواع تبدیل لاپلاس‌ها، به تعریف صفر و قطب مفهوم بسیار مهمی در تبدیل لاپلاس‌های گویا و شبه‌گویا محسوب می‌شوند. ادامه درس هر جا از لفظ تبدیل لاپلاس استفاده شود، منظور تبدیل لاپلاس گویا است و در صورت شبه‌گویا بودن تبدیل لاپلاس، به آن اشاره خواهد شد.

صفر و قطب

تعریف صفر $X(s)$

به s_i ‌هایی که به ازای آن‌ها $X(s) = 0$ می‌شوند، صفر (zero) تبدیل لاپلاس گفته می‌شود و آن را با z_i نشان می‌دهیم:

$$z_i = \{s_i \mid \lim_{s \rightarrow s_i} X(s) = 0\}$$

ممکن است $X(s)|_{s=s_i}$ مبهم شود، به همین دلیل در تعریف صفر، از $\lim$ استفاده می‌شود تا در صورت لزوم رفع ابهام انجام شود.

نحوه به‌دست آوردن صفر تبدیل لاپلاس $X(s)$

در تبدیل لاپلاس گویا $(n = \text{درجه مخرج}, m = \text{درجه صورت})$ $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی صفرها را به‌دست آورد.

گام اول: صورت را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های صورت $X(s)$ ، صفرهای $X(s)$ هستند. زیرا به‌ازای ریشه‌های صورت، صورت صفر شده و در نتیجه $X(s) = 0$ می‌شود.

گام دوم: اگر $(\text{درجه صورت}) > (\text{درجه مخرج})$ باشد، $X(s)$ یک صفر مرتبه $(n - m)$ در $s = \pm\infty$ دارد. زیرا در این‌صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) = 0$ است.

تذکره ۲: اگر تبدیل لاپلاس شبه‌گویا باشد، فارغ از درجه صورت و مخرج، $X(s)$ می‌تواند صفرهایی در $s = \pm\infty$ داشته باشد. کافی است صحت رابطه $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) = 0$ را بررسی کنید. در این حالت ممکن است صفری در $s = +\infty$ یا $s = -\infty$ داشته باشد.

تعریف قطب $X(s)$

به s_i هایی که به‌ازای آن‌ها $X(s) = \pm\infty$ می‌شود، قطب (pole) تبدیل لاپلاس گفته می‌شود و آن را با p_i نمایش می‌دهیم:

$$p_i = \{s_i \mid \lim_{s \rightarrow s_i} X(s) = \pm\infty\}$$

نحوه به‌دست آوردن قطب تبدیل لاپلاس $X(s)$

در تبدیل لاپلاس گویا $(n = \text{درجه مخرج}, m = \text{درجه صورت})$ $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی قطب‌ها را به‌دست آورد.

گام اول: مخرج را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های مخرج $X(s)$ ، قطب‌های $X(s)$ هستند. زیرا به‌ازای ریشه‌های مخرج، مخرج صفر شده و در نتیجه $X(s) = \pm\infty$ می‌شود.

گام دوم: اگر $(\text{درجه صورت}) < (\text{درجه مخرج})$ باشد، $X(s)$ یک قطب مرتبه $(m - n)$ در $s = \pm\infty$ دارد. زیرا در این‌صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) = \pm\infty$ است.

تذکره ۳: اگر تبدیل لاپلاس شبه‌گویا باشد، فارغ از درجه صورت و مخرج، $X(s)$ می‌تواند قطب‌هایی در $s = \pm\infty$ داشته باشد. کافی است صحت رابطه $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) = \pm\infty$ را بررسی کنید. در این حالت ممکن است قطبی در $s = +\infty$ یا $s = -\infty$ داشته باشد.

نکته ۱: صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین صفرها و قطب‌های برابر را باید حذف کرد. در صورتی که قبل از محاسبه صفرها و قطب‌ها کسر تبدیل لاپلاس را تا حد امکان ساده کنیم، دیگر صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند، محاسبه نخواهند شد.

نکته ۲: تعداد صفرها با تعداد قطب‌های تبدیل لاپلاس گویا با احتساب تعداد تکرار و صفرها و قطب‌های در بی‌نهایت، برابر است (صفر و قطب در $s = \pm\infty$ را در کنار هم و یک واحد در نظر می‌گیریم).

مثال ۲: صفرها و قطب‌های تبدیل لاپلاس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2-1} \quad (1)$$

پاسخ: مشخص است که $X(s)$ قابل ساده شدن است. ابتدا آن را ساده می‌کنیم.

$$X(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow$ صورت ریشه‌ای ندارد.

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = -1 \Rightarrow s+1=0$

$= 0$ درجه صورت $> 1 = \text{درجه مخرج} \leftarrow X(s)$ یک صفر مرتبه $1-0=1$ در $s = \pm\infty$ دارد.

$X(s)$ یک قطب $(p_1 = -1)$ و یک صفر در $s = \pm\infty$ دارد. همان‌طور که می‌بینید تعداد صفرها با تعداد قطب‌ها برابر است.

تذکر: برای یافتن صفرها و قطب‌های در بی‌نهایت نیازی به بررسی درجه صورت و مخرج نیست. بلکه کافی است ریشه‌های مخرج را به‌عنوان قطب و ریشه‌های صورت را به‌عنوان صفر به‌دست آورد. در نهایت تبدیل لاپلاس به اندازه اختلاف تعداد ریشه‌های مخرج و صورت با احتساب درجه تکرار ریشه‌ها در بی‌نهایت قطب یا صفر خواهد داشت.

$$X(s) = \frac{s^2-1}{s^2+4s+3} \quad (2)$$

پاسخ: ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow z_1 = 1, z_2 = -1 \Rightarrow s^2-1=0$

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = -3, p_2 = -1 \Rightarrow (s+3)(s+1)=0 \Rightarrow s^2+4s+3=0$

مشاهده می‌شود که صفر در $s = -1$ ($z_2 = -1$) و قطب در $s = -1$ ($p_2 = -1$) با یکدیگر برابر هستند. بنابراین اثر همدیگر را خنثی کرده و حذف می‌شوند. توجه کنید، اگر قبل از محاسبه صفرها و قطب‌ها کسر $X(s)$ را ساده می‌کردیم، دیگر صفر و قطب در $s = -1$ به‌دست نمی‌آمد.

$$X(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{s-1}{s+3} \quad \begin{cases} s-1=0 \rightarrow z_1=1 \\ s+3=0 \rightarrow p_1=-3 \end{cases}$$

بنابراین $X(s)$ یک صفر در $s=1$ ($z_1=1$) و یک قطب در $s=-3$ ($p_1=-3$) دارد. چون تعداد ریشه‌های صورت و مخرج برابر است، بنابراین $X(s)$ در بینهایت قطب یا صفری نخواهد داشت. این موضوع از برابری درجه صورت و مخرج نیز مشهود است.

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+1} \quad (3)$$

پاسخ: ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow z_1 = -1 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow s+1=0$

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = 1$ (مرتبه دوم) $\Rightarrow s = 1 \Rightarrow (s-1)^2 = 0 \Rightarrow s^2 - 2s + 1 = 0$
 $X(s)$ یک صفر در $s = -1$ ($z_1 = -1$) و یک قطب مرتبه دوم در $s = 1$ ($p_1 = 1$) دارد. اختلاف تعداد ریشه‌های مخرج و صورت با احتساب تعداد تکرار ریشه‌ها برابر $2-1=1$ می‌شود. بنابراین $X(s)$ باید یک صفر مرتبه اول در $s = \pm\infty$ داشته باشد تا تعداد صفرها و قطبها برابر شوند. از اختلاف درجه صورت ($=1$) و درجه مخرج ($=2$) نیز مشهود است که $X(s)$ یک صفر مرتبه اول ($2-1=1$) در $s = \pm\infty$ دارد.

$$X(s) \begin{cases} \text{zeroes} \rightarrow z_1 = -1, z_2 = \pm\infty \\ \text{poles} \rightarrow p_1 = 1 \text{ (مرتبه دوم): (2 واحد قطب)} \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{e^s(s-j)}{s^2+1} \quad (4)$$

پاسخ: تبدیل لاپلاس شبه‌گویا است. ابتدا بدون در نظر گرفتن عامل e^s ، ریشه‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم.

ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow z_1 = j \Rightarrow s = j \Rightarrow s-j=0$

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = j, p_2 = -j \Rightarrow s = \pm j \Rightarrow s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s^2 = -1 \Rightarrow s = \pm j$

$z_1 = j$ و $p_1 = j$ یکسان بوده و حذف می‌شوند.

تبدیل لاپلاس شبه‌گویاست و فارغ از درجه صورت و مخرج می‌تواند صفرها و قطب‌هایی در $s = \pm\infty$ داشته باشد. کافی است حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{e^s(s-j)}{s^2+1} = \begin{cases} 0, & s = -\infty \\ \infty, & s = +\infty \end{cases}$$

بنابراین $s = -\infty$ صفر و $s = +\infty$ قطب $X(s)$ محسوب می‌شود.

$$X(s) \begin{cases} \text{zeroes} \rightarrow z_1 = -\infty \\ \text{poles} \rightarrow p_1 = -j, p_2 = +\infty \end{cases}$$

تذکر: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، لزوماً در تبدیل لاپلاس شبه‌گویا تعداد صفرها و قطبها با یکدیگر برابر نیستند.

نکته ۳: با داشتن تمامی صفرها و قطب‌های محدود می‌توان ضابطه $X(s)$ را به صورت زیر تعیین کرد:

$$X(s) = k \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)}$$

z_i ها و p_j ها به ترتیب صفرها و قطب‌های $X(s)$ هستند. برای تعیین k ، ضریب ثابت $X(s)$ و ناحیه همگرایی $X(s)$ ، نیاز به اطلاعات بیشتری است.

مثال ۳: ضابطه تبدیل لاپلاس $X(s)$ را که یک صفر در $s = -1$ و دو قطب در $s = +1$ و $s = -2$ دارد و $X(0) = 3$ می‌باشد، تعیین کنید.

$$X(s) = k \frac{(s - (-1))}{(s - (-2))(s - 1)} = k \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}$$

پاسخ: طبق نکته بیان شده، ضابطه $X(s)$ به صورت مقابل تعیین می‌شود:

$$X(0) = k \frac{0+1}{(0+2)(0-1)} = 3 \Rightarrow \frac{k}{-2} = 3 \Rightarrow k = -6$$

طبق رابطه $X(0) = 3$ برای تعیین k ، کافی است به جای s ، صفر جایگذاری کنیم.

$$X(s) = \frac{-6(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$

در نتیجه ضابطه $X(s)$ به صورت روبه‌رو خواهد بود:



مدرس‌ان شریف

فصل هفتم

«تبدیل Z»

در این فصل چهارمین ابزار ریاضی برای تبدیل سیگنال‌های زمانی به سیگنال‌های فرکانسی را بررسی می‌کنیم. تبدیل Z ابزاری است که به وسیله آن می‌توان برخی از سیگنال‌های گسسته نامتناوب را برحسب فرکانس‌های مختلط بسط داد. در سه فصل قبل با سه سیگنال نمایی $e^{-jk\omega_0 n}$ و $e^{-jk\omega_0 t}$ برای سری فوری، $e^{-j\omega n}$ و $e^{-j\omega t}$ برای تبدیل فوری و e^{-st} برای تبدیل لاپلاس آشنا شدید. سیگنال نمایی که در رابطه تبدیل Z استفاده می‌شود، z^{-n} است. پایه این سیگنال متغیر z بوده که مقداری مختلط است، درحالی که پایه استفاده شده در سیگنال‌های نمایی قبلی عدد e است. این باعث تفاوت در روابط و خواص مطرح شده برای تبدیل Z با سری فوری، تبدیل فوری و تبدیل لاپلاس می‌شود: هر چند هنوز هم شباهت‌هایی در برخی از خواص و نکات مطرح شده وجود دارد. تبدیل Z مطرح شده در این درس ارتباط نزدیکی با بسط لوران و تیلور دارد که در ریاضیات مهندسی با آن آشنا می‌شوید. برای مطالعه این فصل هیچ نیازی به آشنایی با این دو بسط وجود ندارد، هر چند می‌توان در حل برخی از سوالات دشوار از بسط لوران و تیلور استفاده کرد. این فصل از سه درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول روابط مربوط به تبدیل Z و ناحیه همگرایی آن مطرح می‌شود. در ادامه در درسنامه دوم خواص تبدیل Z را بررسی می‌کنیم. در انتهای این درسنامه جدول تبدیل Z سیگنال‌های مهم گنجانده شده است که باید آن را به خاطر بسپارید. در درسنامه سوم نیز روش‌های به‌دست آوردن تبدیل Z سیگنال زمانی و عکس تبدیل Z سیگنال فرکانسی بررسی خواهند شد.

درسنامه (I): تبدیل Z سیگنال‌های زمانی گسسته

در فصل ۴ نشان دادیم که سیگنال‌های متناوب گسسته را می‌توان برحسب سیگنال نمایی $e^{jk\omega_0 n}$ و فرکانس موهومی $j\omega_0$ بسط داد. همچنین در فصل ۵ سیگنال‌های غیرمتناوب گسسته را برحسب سیگنال نمایی $e^{j\omega n}$ و فرکانس موهومی $j\omega$ بسط دادیم. حال می‌خواهیم یک سیگنال زمانی را برحسب فرکانس‌های مختلط $z = re^{j\omega}$ بسط دهیم. برای این منظور از ابزار تبدیل Z استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که در فصل تبدیل لاپلاس فرکانس مختلط را در فرم دکارتی و به صورت $s = \sigma + j\omega$ نشان دادیم، اما در این فصل فرکانس‌های مختلط را در فرم قطبی و به صورت $Z = re^{j\omega}$ نشان می‌دهیم که دلیل این موضوع در ادامه مشخص خواهد شد.

روابط تبدیل Z و عکس تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال زمانی گسسته $x[n]$ را با $X(z)$ نشان داده و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

رابطه تبدیل Z

در مورد رابطه تبدیل Z گفته شده، به چند نکته زیر توجه کنید. این موارد در به خاطر سپردن و درک مفهوم این رابطه کمک زیادی می‌کنند.

- $x[n]$ سیگنالی متناوب نیست. بنابراین سیگما در کل بازه زمانی یعنی از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ و بر روی متغیر مستقل سیگنال (n) بسته می‌شود. $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\right)$
- تبدیل Z سیگنال گسسته $x[n]$ ، یعنی $X(z)$ یک سیگنال پیوسته غیرمتناوب با متغیر مستقل Z محسوب می‌شود. Z یک مقدار مختلط است و آن را در فرم قطبی و به صورت $z = re^{j\omega}$ نشان می‌دهند $(\omega \leq \omega_0, r = |z|)$
- سیگنال z^{-n} دارای فرکانس مختلط $(-Lnz)$ است که به اختصار، فرکانس این سیگنال را Z در نظر می‌گیریم. به همین دلیل گفته می‌شود که تبدیل Z ، یک سیگنال گسسته را برحسب فرکانس‌های مختلط $z = re^{j\omega}$ بسط می‌دهد.

$$z^{-n} = e^{\text{Ln}(z^{-n})} = e^{-\text{Ln}z(n)} \xrightarrow[\text{مستقل در سیگنال نمایی است}]{\text{فرکانس، ضریب متغیر}} -\text{Ln}z = \text{فرکانس}$$

• تبدیل Z در واقع معادل فرکانسی یک سیگنال زمانی گسسته است و نشان می‌دهد که سیگنال $x[n]$ در هر فرکانس مختلط $z = re^{j\omega}$ چه مقداری دارد. برای مثال در ادامه خواهید دید که تبدیل Z سیگنال $x[n] = r^n u[n]$ برابر با سیگنال $X(z) = \frac{1}{1-rz^{-1}}$ است. حال می‌توان گفت معادل فرکانسی

$$\text{سیگنال زمانی } x[n] \text{ در فرکانس } z = re^{j\frac{\pi}{2}} \text{ دارای مقدار } X(re^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{1-r(e^{j\frac{\pi}{2}})^{-1}} = \frac{1}{1-r(\frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}})} = \frac{1}{1+\frac{r}{j}}$$

• رابطه‌ی عکس تبدیل Z، به صورت روبه‌رو بیان می‌شود:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

برای محاسبه این انتگرال مختلط می‌توان از قضیه مانده‌ها که احتمالاً در ریاضیات مهندسی با آن آشنا شده‌اید، استفاده کرد. هر چند در این درس به هیچ وجه از این رابطه استفاده نکرده و برای محاسبه $x[n]$ از روی $X(z)$ روش‌های دیگری ذکر خواهد شد.

• رابطه بین سیگنال و تبدیل Z را به صورت مقابل نشان می‌دهیم.

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad , \quad Z\{x[n]\} = X(z)$$

$$X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} x[n] \quad , \quad Z^{-1}\{X(z)\} = x[n]$$

• اگر در رابطه تبدیل Z، سیگما را به ازای چند مقدار از n باز کنیم، رابطه $X(z)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

اولین قدم در حل سؤالات این فصل، پیدا کردن تبدیل Z یک سیگنال زمانی گسسته است. در مثال زیر، تبدیل Z چند سیگنال مهم را به کمک رابطه تبدیل Z به دست می‌آوریم.

مثال ۱: تبدیل Z سیگنال‌های زمانی زیر را به دست آورید.

$$x[n] = a^n u[n] \quad , \quad a \in \mathbb{C} \quad (۱)$$

✓ پاسخ: کافی است سیگنال $x[n]$ را در رابطه تبدیل Z جایگذاری کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} \xrightarrow{u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}} X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

$$\xrightarrow[\text{با قدرنسبت } az^{-1}]{\text{حد مجموع تصاعد هندسی}} X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}}, & |az^{-1}| < 1 : |z^{-1}| < \frac{1}{|a|} : |z| > |a| \\ \infty, & |az^{-1}| \geq 1 : |z^{-1}| \geq \frac{1}{|a|} : |z| \leq |a| \end{cases}$$

$$\text{یادآوری:} \quad \text{حد مجموع تصاعد هندسی} = \begin{cases} \frac{\text{جمله اول}}{\text{قدرنسبت} - 1}, & |\text{قدرنسبت}| < 1 \\ \infty, & |\text{قدرنسبت}| \geq 1 \end{cases}$$

$X(z)$ به ازای $|z| > |a|$ مقداری همگرا و به ازای $|z| \leq |a|$ واگرا می‌شود. در واقع $|z| > |a|$ ناحیه همگرایی $X(z)$ نامیده می‌شود. برای سادگی تنها ضابطه $X(z)$ در ناحیه‌ای که همگرا می‌شود را به همراه ناحیه همگرایی به عنوان تبدیل Z سیگنال $x[n]$ نشان می‌دهیم.

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1], \quad a \in \mathbb{C} \quad (۲)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} \xrightarrow{u[-n-1] = \begin{cases} 1, & -n-1 \geq 0 : n \leq -1 \\ 0, & -n-1 < 0 : n > -1 \end{cases}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -(az^{-1})^n$$

$$\xrightarrow[\text{تغییر متغیر } n \rightarrow -n]{\text{جایجایی کران‌ها}} X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -(a^{-1}z)^n$$

$$\xrightarrow[\text{باقدرنسبت } a^{-1}z]{\text{حدمجموع تصاعدهندسی}} X(z) = \begin{cases} -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}, & |a^{-1}z| < 1: |z| < |a| \\ \infty, & |a^{-1}z| \geq 1: |z| \geq |a| \end{cases} \xrightarrow[\text{ضرب در } az^{-1}]{\text{صورت و مخرج ضابطه اول}} X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}}, & |z| < |a| \\ \infty, & |z| \geq |a| \end{cases}$$

در نتیجه تبدیل Z به صورت زیر به دست می آید.

$$\boxed{x[n] = -a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|}$$

نتیجه گیری: همانطور که مشاهده کردید تبدیل Z دو سیگنال $-a^n u[-n-1]$ و $a^n u[n]$ در ضابطه یکسان ولی در ناحیه همگرایی متفاوت هستند. بنابراین تبدیل Z بدون ناحیه همگرایی خود معنا نداشته و همواره باید ناحیه همگرایی برای آن ذکر شود.

$$(۳) \quad x[n] = a^n, \quad a \in \mathbb{C}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (az^{-1})^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad \checkmark \text{ پاسخ:}$$

در دو مثال قبلی مشاهده کردید که $\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$ به ازای $|z| < |a|$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$ به ازای $|z| > |a|$ مقداری همگرا دارند. بنابراین جمع این دو سیگما به ازای Z هایی که عضو ناحیه $(|z| < |a| \cap |z| > |a| = \emptyset)$ باشند، همگرا خواهد بود. در نتیجه $X(z)$ به ازای هیچ Z ی همگرا نشده و همواره واگرا است. در این صورت می گوییم که سیگنال $x[n]$ تبدیل Z ندارد.

$$\boxed{x[n] = a^n \xrightarrow{Z} \text{تبدیل } Z \text{ ندارد}}$$

$$(۴) \quad x[n] = \delta[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} \xrightarrow[\text{خاصیت غربالی ضربیه}]{\text{خاصیت غربالی ضربیه}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-(0)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1 \quad \checkmark \text{ پاسخ:}$$

$X(z) = 1$ برابر با عدد ثابت ۱ شد و به متغیر Z بستگی ندارد، بنابراین هیچ محدودیتی بر روی متغیر Z در رابطه با همگرا شدن $X(z)$ وجود ندارد و $X(z) = 1$ همواره همگرا است و ناحیه همگرایی آن کل صفحه Z در نظر گرفته می شود.

$$\boxed{x[n] = \delta[n] \xrightarrow{Z} X(z) = 1, \quad Z: \text{کل صفحه}}$$

همگرایی تبدیل Z

در فصول قبلی درباره همگرایی سری فوریه و تبدیل فوریه گسسته مطالبی را بیان کردیم. گفتیم که سری فوریه گسسته همواره همگرا و تبدیل فوریه گسسته به شرط جمع پذیر مطلق بودن سیگنال $x[n]$ همگرا است. اما در مورد همگرایی تبدیل Z چه می توان گفت؟ طبق مثال های حل شده در ابتدای فصل مشاهده کردید

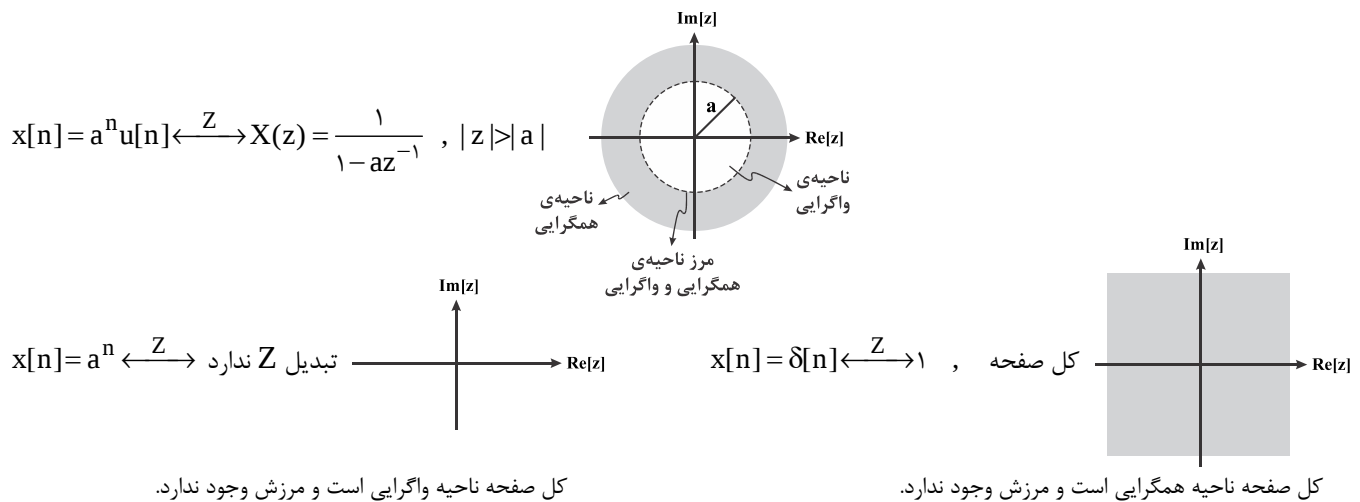
که همگرایی تبدیل Z به طور مستقیم به همگرایی رابطه $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$ بستگی دارد. در واقع اگر حاصل رابطه $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$ به ازای Z_0 هایی همگرا

(یعنی یک عدد مختلط و غیربی نهایت) شود، $X(z)$ به ازای همان Z_0 ها همگرا و اگر حاصل این رابطه به ازای Z_0 هایی واگرا (یعنی بی نهایت) شود، $X(z)$ به ازای همان Z_0 ها واگرا می شود. Z در حالت کلی یک مقدار مختلط است که آن را در فرم قطبی به صورت $z = re^{j\omega}$ نشان می دهیم. همگرایی عبارت

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$ فقط به $|z| = r$ بستگی دارد و $z = \omega$ هیچ نقشی در تعیین همگرا شدن این عبارت ندارد. با توجه به مختلط بودن Z می توان Z_0 هایی را که باعث همگرا یا واگرا شدن $X(z)$ می شوند، در صفحه اعداد مختلط نشان داد. این صفحه از دو محور عمود بر هم تشکیل شده که

محور افقی و عمودی آن به ترتیب نشان دهنده قسمت حقیقی ($\text{Re}\{z\}$) و قسمت موهومی ($\text{Im}\{z\}$) متغیر Z هستند. با این کار در واقع صفحه مختلط Z را به سه قسمت ناحیه همگرایی، ناحیه واگرایی و مرز ناحیه همگرایی و واگرایی تقسیم می کنیم. از طرفی با توجه به اینکه همگرایی و واگرایی $X(z)$ صرفاً به $|z|$ بستگی دارد، این سه ناحیه به صورت دوایری به مرکز مختصات در صفحه مختلط Z نشان داده می شوند، چرا که معادله $|z| < a$ نشان دهنده نقاطی خارج، داخل یا روی محیط دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a هستند. ناحیه همگرایی و واگرایی خارج یا داخل دایره خواهند بود که ناحیه همگرایی را هاشور زده یا رنگ می کنیم. مرز ناحیه همگرایی و واگرایی نیز نقاط روی محیط دایره خواهند بود که این نقاط را به صورت دایره خط چین نشان می دهیم.

به عنوان مثال ناحیه همگرایی مثال‌های حل شده در صفحه Z را به صورت زیر نشان می‌دهند:



انواع تبدیل Z

تبدیل Z هایی که در این درس به آن‌ها می‌پردازیم تنها از نوع گویا هستند و مانند تبدیل لاپلاس در دو نوع گویا و شبه گویا مطرح نمی‌شوند. تبدیل Z گویا: اگر $X(z)$ به صورت کسری بوده و صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌های برحسب Z باشند، چنین تبدیل Z ای، گویا نامیده می‌شود.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}, a_i, b_i \in \mathbb{C}$$

$N(z)$: چندجمله‌ای صورت ← **درجه صورت**: بزرگترین توان متغیر Z در چندجمله‌ای صورت

$D(z)$: چندجمله‌ای مخرج ← **درجه مخرج**: بزرگترین توان متغیر Z در چندجمله‌ای مخرج

🌟 **تذکره ۱:** عموماً تبدیل Z برحسب توان‌های منفی Z بیان می‌شود. گاهی لازم است $X(z)$ را برحسب توان‌های منفی Z و گاهی برحسب توان‌های مثبت Z مرتب کنیم. برای این منظور کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{aligned}
 1) \quad X(z) \text{ بیان شده برحسب توان‌های منفی } z &\xrightarrow[\text{m بزرگترین توان Z در صورت و مخرج بدون در نظر گرفتن علامت}]{\text{صورت و مخرج ضرب در } z^{-m}} X(z) \text{ بیان شده برحسب توان‌های مثبت } z \\
 2) \quad X(z) \text{ بیان شده برحسب توان‌های مثبت } z &\xrightarrow[\text{m بزرگترین توان Z در صورت و مخرج بدون در نظر گرفتن علامت}]{\text{صورت و مخرج ضرب در } z^m} X(z) \text{ بیان شده برحسب توان‌های منفی } z
 \end{aligned}$$

🌟 **تذکره ۲:** برای تعیین درجه صورت و مخرج ابتدا $X(z)$ را برحسب توان‌های مثبت Z بیان کنید.

📖 **مثال ۲:** درجه صورت و مخرج را در تبدیل Z های زیر تعیین کنید و در صورت گویا بودن تبدیل Z، درجه صورت و مخرج را تعیین کرده و $X(z)$ مرتب شده برحسب توان‌های مثبت Z را برحسب توان‌های منفی Z بیان کنید و برعکس.

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{1 - \frac{1}{2}z} \quad (1)$$

☑ **پاسخ:** گویا است. درجه صورت = ۲ ، درجه مخرج = ۱

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{1 - \frac{1}{2}z} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$X(z)$ برحسب توان‌های مثبت Z مرتب شده است. برای بیان آن برحسب توان‌های منفی Z داریم:

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2z^{-2} - z^{-1} + 2} \quad (2)$$

☑ **پاسخ:** گویا است و $X(z)$ برحسب توان‌های منفی Z مرتب شده است. برای بیان آن برحسب توان‌های مثبت Z داریم:

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2z^{-2} - z^{-1} + 2} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 - z}{2 - z + 2z^2}$$

حال درجه صورت و مخرج را تعیین می‌کنیم. درجه صورت = ۲ ، درجه مخرج = ۲

$$X(z) = \frac{\sqrt{2} - jz}{z^2 - z} \quad (۳)$$

$$X(z) = \frac{\sqrt{2} - jz}{z^2 - z} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{\sqrt{2}z^{-2} - jz^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

پاسخ: گویا است. درجه صورت = ۱، درجه مخرج = ۲

$$X(z) = \frac{\sqrt{2}z - z^2}{z^2 + 2z^3} \quad (۴)$$

پاسخ: گویا نیست. چرا که توان‌های z در صورت و مخرج اعداد صحیح نیستند. $(\sqrt{2}z, z^{\frac{3}{2}})$

صفر و قطب

$$z_i = \{z_i \mid \lim_{z \rightarrow z_i} X(z) = 0\}$$

تعریف صفر $X(z)$: به z_i هایی که به ازای آن‌ها $X(z) = 0$ می‌شوند، صفر تبدیل z گفته و با z_i نشان می‌دهیم.

ممکن است $X(z)$ مبهم شود. به همین دلیل در تعریف صفر از $\lim$ استفاده می‌شود تا در صورت لزوم رفع ابهام انجام شود.

نحوه به دست آوردن صفر $X(z)$

در تبدیل z ، $(n = \text{درجه مخرج}, m = \text{درجه صورت})$ $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ که برحسب توان‌های مثبت z مرتب شده باشد، با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی صفرهای آن را به دست آورد.

گام اول: صورت را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های صورت، صفرهای $X(z)$ هستند. زیرا به ازای این ریشه‌ها، صورت صفر شده و در نتیجه $X(z) = 0$ می‌شود.

گام دوم: اگر $(m) > (n)$ درجه صورت باشد، $X(z)$ یک صفر مرتبه $(n - m)$ در $z = \pm\infty$ دارد. زیرا در این صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} X(z) = 0$ می‌باشد.

$$p_i = \{z_i \mid \lim_{z \rightarrow z_i} X(z) = \pm\infty\}$$

تعریف قطب $X(z)$: به z_i هایی که به ازای آن‌ها $X(z) = \pm\infty$ می‌شوند، قطب تبدیل z گفته و با p_i نشان می‌دهیم.

نحوه به دست آوردن قطب $X(z)$

در تبدیل z $(n = \text{درجه مخرج}, m = \text{درجه صورت})$ $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی قطب‌ها را به دست آورد.

گام اول: مخرج را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های مخرج $X(z)$ ، قطب‌های $X(z)$ هستند. زیرا به ازای این ریشه‌ها، مخرج صفر شده و در نتیجه $X(z) = \pm\infty$ می‌شود.

گام دوم: اگر $(m) < (n)$ درجه صورت باشد، $X(z)$ یک قطب مرتبه $(m - n)$ در $z = \pm\infty$ دارد. زیرا در این صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} X(z) = \pm\infty$ می‌باشد.

نکته ۱: صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین صفرها و قطب‌های برابر را باید حذف کرد. در صورتی که قبل از محاسبه صفرها و قطب‌ها، کسر تبدیل z را تا حد امکان ساده کنیم، دیگر صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند، محاسبه نخواهند شد.

نکته ۲: تعداد صفرها با تعداد قطب‌های تبدیل z با احتساب تعداد تکرار و صفرها و قطب‌های در بینهایت، برابر است (قطب (صفر) در $z = \pm\infty$ را یک واحد در نظر گرفته و به صورت $|z| = \infty$ نشان می‌دهیم).

تذکره ۳: برای به دست آوردن صفر و قطب بهتر است ابتدا $X(z)$ را برحسب توان‌های مثبت z مرتب کنید. در این صورت احتمال خطا در محاسبات پایین می‌آید.

مثال ۳: صفرها و قطب‌های تبدیل z های زیر را به دست آورید.

$$X(z) = \frac{z-1}{z^2-1} \quad (۱)$$

$$X(z) = \frac{z-1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z+1}$$

پاسخ: مشخص است که $X(z)$ قابل ساده شده است. ابتدا آن را ساده می‌کنیم.

ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow$ صورت ریشه‌ای ندارد.

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = -1 \rightarrow z+1=0$

$= 0$ درجه صورت $> 1 =$ درجه مخرج $\leftarrow X(z)$ یک صفر مرتبه $(1-0=1)$ در $z = \pm\infty$ یعنی $|z| = \infty$ دارد.

$X(z)$ یک قطب ($p_1 = 1$) و یک صفر در $|z| = \infty$ دارد. همان‌طور که می‌بینید تعداد صفرها با تعداد قطبها برابر است. تذکر: برای یافتن صفرها و قطبهای در بی‌نهایت نیازی به بررسی درجه صورت و مخرج نیست. بلکه کفایت ریشه‌های مخرج را به عنوان قطب و ریشه‌های صورت را به عنوان صفر به دست آورد. در نهایت تبدیل Z به اندازه اختلاف تعداد ریشه‌های مخرج و صورت با احتساب درجه تکرار ریشه‌ها، در بی‌نهایت قطب یا صفر خواهد داشت.

$$X(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}} \quad (۲)$$

پاسخ: بهتر است ابتدا $X(z)$ را برحسب توان‌های مثبت Z مرتب کنیم. برای این کار کافی است صورت و مخرج $X(z)$ را در z^2 ضرب کرد.

$$X(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4z + 3}$$

ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow z_1 = 1, z_2 = -1$ ، $z^2 - 1 = 0 \rightarrow$

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow p_1 = -3, p_2 = -1$ ، $z^2 + 4z + 3 = 0 \rightarrow (z+3)(z+1) = 0 \rightarrow$

صفر $z_2 = -1$ و قطب $p_2 = -1$ یکسان هستند و باید آنها را حذف کنیم. توجه کنید اگر قبل از محاسبه صفر و قطب، کسر $X(z)$ را تا حد امکان ساده می‌کردیم دیگر صفر و قطب یکسان به دست نمی‌آمد.

تعداد صفرها و قطبهای $X(z)$ برابر است. بنابراین $X(z)$ صفر و قطبی در بی‌نهایت نخواهد داشت. این موضوع از برابری درجه صورت و مخرج نیز مشهود است.

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^3 z^{-2}} \quad (۳)$$

پاسخ: ابتدا $X(z)$ را برحسب توان‌های مثبت Z مرتب کرده و صفرها و قطبهای آن را به دست

می‌آوریم. برای این منظور $X(z)$ را باید در z^m ضرب کنیم. m باید بزرگترین توان Z در صورت و مخرج، بدون در نظر گرفتن علامت باشد.

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^3 z^{-2}}$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2) & & (2) & & (2) \\ (2) & + & (2) & = & 5 \end{matrix}$

بنابراین باید صورت و مخرج را در z^5 ضرب کنیم. به نحوه این کار دقت کنید:

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^3 z^{-2}} \times \frac{z^5}{z^5} = \frac{z^3 (1 - z^{-1})^2}{(z(1 - \frac{1}{2}z^{-1}))^3 (z^{-2})} = \frac{z^3 (z - 1)^2}{(z - \frac{1}{2})^3}$$

ریشه‌های صورت صفر هستند $\leftarrow$ مرتبه ۳ $\rightarrow z_1 = 0$ ، $z^3 = 0 \rightarrow$ مرتبه ۲ $\rightarrow (z - 1)^2 = 0 \rightarrow z_2 = 1$

ریشه‌های مخرج قطب هستند $\leftarrow$ مرتبه ۳ $\rightarrow p_1 = \frac{1}{2}$ ، $(z - \frac{1}{2})^3 = 0 \Rightarrow$

۵ صفر و ۳ قطب (با احتساب تکرارها) داریم. بنابراین $X(z)$ باید ۲ قطب در $|z| = \infty$ نیز داشته باشد تا تعداد قطبها و صفرها برابر شوند.

تذکر: سعی کنید قطبها و صفرهای $X(z)$ را در حالتی که برحسب توان‌های منفی Z مرتب شده است، پیدا کنید. خواهید دید که برای پیدا کردن برخی از صفرها و قطبها به مشکل بر خواهید خورد.

$$X(z) = k \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_j (z - p_j)}$$

نکته ۳: با داشتن تمامی صفرها و قطبهای محدود می‌توان ضابطه $X(z)$ را به صورت مقابل تعیین کرد:

z_i ها و p_j ها به ترتیب صفرها و قطبهای $X(z)$ هستند. برای تعیین k (ضریب ثابت $X(z)$) و ناحیه همگرایی $X(z)$ ، نیاز به اطلاعات بیشتری است.

مثال ۴: ضابطه $X(z)$ را که یک صفر در $z = 1$ و دو قطب در $z = -1$ و $z = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$ دارد و $X(2e^{j\frac{\pi}{2}}) = 2$ می‌باشد، تعیین کنید.

پاسخ: طبق نکته گفته شده، ضابطه $X(z)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$X(z) = k \frac{(z - 1)}{(z + 1)(z - 2e^{j\frac{\pi}{2}})} = k \frac{z - 1}{(z - (-1))(z - 2e^{j\frac{\pi}{2}})}$$



مدرس‌ان شریف

فصل هشتم

«تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس»

بعد از بررسی ۴ ابزار ریاضی یعنی سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z آموختیم که چگونه معادل فرکانسی سیگنال‌های زمانی مختلف را به دست آوریم. حال در این فصل به کمک این ابزار، سیستم‌های LTI را در حوزه فرکانس تجزیه و تحلیل می‌کنیم. تمامی روابط و مفاهیمی که در فصل سوم برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان مطرح شده بودند، در حوزه فرکانس بررسی می‌شوند. خواهید دید که روابط حوزه فرکانس بسیار ساده‌تر بوده و کاربرد بیشتری دارند. حتی در مواردی سؤالاتی که در حوزه زمان قابل حل نیستند در حوزه فرکانس به راحتی حل می‌شوند. این فصل مهمترین فصل این کتاب بوده و به همراه فصل پنجم بیشترین سهم از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد.

این فصل از چهار درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول روش‌های مختلف توصیف سیستم‌ها را بیان خواهیم کرد. با این روش‌ها به‌طور اجمالی در فصل دوم آشنا شدید. درسنامه بعدی مربوط به تعیین خواص سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس خواهد بود. در درسنامه بعدی که مهمترین بخش این کتاب است پاسخ سیستم‌های LTI را به انواع مختلف ورودی‌ها در حوزه فرکانس به دست خواهیم آورد. در نهایت در درسنامه چهارم فیلترها را بررسی خواهیم کرد.

در فصل دوم، سیستم‌های LTI را معرفی و دلیل اهمیت این سیستم‌ها را روشن کردیم. تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس به مراتب ساده‌تر از حوزه زمان است. در این فصل با استفاده از ابزارهای ریاضی سری و تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z، سیستم‌های LTI را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم. مباحث این فصل شامل چهار بخش نمایش سیستم‌های LTI، تحلیل خواص سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس، محاسبه خروجی سیستم‌های LTI و فیلتر می‌باشد. این فصل مهم‌ترین فصل در کنکورهای ارشد و دکتری محسوب شده و همه ساله بیشترین سهم از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد.

درسنامه (۱): نمایش سیستم‌های LTI



سیستم‌های LTI را می‌توان به چهار فرم جبری، توصیفی، بلوک دیاگرامی و معادلاتی نمایش داد. از بین این چهار فرم، دو فرم آخر اهمیت بالاتری دارند. برای تحلیل سیستم‌های LTI چه در حوزه فرکانس و چه در حوزه زمان، ابتدا باید با این چهار فرم آشنا شد.

نمایش جبری

نمایش جبری، رابطه بین ورودی و خروجی سیستم‌های LTI را به صورت یک رابطه جبری بیان می‌کند. متداول‌ترین نوع نمایش سیستم‌های LTI و به‌طور کلی هر نوع سیستمی، به‌صورت جبری است. برای نمایش جبری سیستم‌های LTI تنها می‌توان از عملگرهایی استفاده کرد که خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان سیستم را حفظ می‌کنند. به مثال‌های زیر که نمایش جبری چند سیستم LTI است دقت کنید:

$$\text{الف) } y(t-2) = x(t-1) \quad \text{ب) } y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{ج) } Y(j\omega) = X(j\omega)G(j\omega) \quad \text{د) } Y(z) = X(z)z^{-2} \quad \text{ه) } y(t) = x(t) * \delta(t-1)$$

توجه کنید مثال‌های بالا نمایش جبری یک سیستم LTI هستند؛ زیرا عملگرهای جبری اعمال شده روی ورودی و خروجی، خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان سیستم را حفظ می‌کنند.

نمایش توصیفی

اگر رابطه بین ورودی و خروجی در یک سیستم LTI با استفاده از جملاتی بیان شده باشد که خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان را حفظ می‌کنند، سیستم را به صورت توصیفی نمایش داده‌ایم. به‌طور کلی هر سیستمی را می‌توان به این شکل نمایش داد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) سیستمی با پاسخ ضربه $\delta(t-1)$: این عبارت نمایش توصیفی یک سیستم LTI است.

دقت کنید لفظ پاسخ ضربه تنها برای سیستم‌های LTI استفاده می‌شود.

به‌عنوان مثال در تست ۵۲ فصل دوم کارشناسی ارشد سال ۹۴، برای یافتن گزینه صحیح باید توجه می‌کردید که لفظ پاسخ ضربه تنها مختص سیستم‌های LTI است و برای سیستم‌های غیر LTI از مفهوم پاسخ به ورودی ضربه واحد استفاده می‌کنیم.

ب) سیستمی که ورودی را با یک سیگنال دلخواه مستقل از ورودی نباشد، سیستم LTI نخواهد بود، مانند $y(t) = x(t) * h(t)x(t)$.

❗ **تذکره ۱:** اگر سیگنال دلخواه، مستقل از ورودی نباشد، سیستم LTI نخواهد بود، مانند $y(t) = x(t) * h(t)x(t)$.

ج) سیستمی پیوسته که ورودی را مجذور کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی برای یک سیستم LTI نیست؛ زیرا اگر ورودی به توان برسد خاصیت خطی حفظ نمی‌شود.

د) سیستمی گسسته که در ورودی، یک واحد تأخیر زمانی ایجاد کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی یک سیستم LTI است؛ زیرا می‌دانیم تأخیر زمانی، خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان را حفظ می‌کند.

هـ) سیستم پیوسته‌ای که در ورودی، یک واحد تأخیر فرکانسی ایجاد کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی برای یک سیستم LTI نیست؛ زیرا می‌دانیم تأخیر فرکانسی معادل ضرب یک سیگنال نمایی در ورودی در حوزه زمان است و چنین سیستمی خاصیت تغییرناپذیری با زمان را حفظ نمی‌کند.

❗ **تذکره ۲:** در صورتی که در سؤالی با نمایش توصیفی یک سیستم برخورد کردید، ابتدا باید نمایش جبری سیستم را به‌دست آورده و در قدم بعدی خواسته‌های سؤال را به‌دست آورید. برای مثال نمایش جبری سیستم‌های الف تا هـ از روی نمایش توصیفی آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

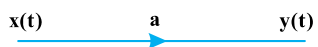
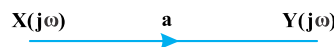
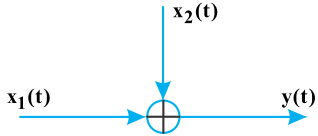
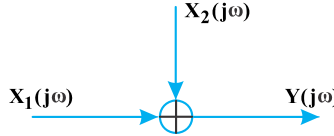
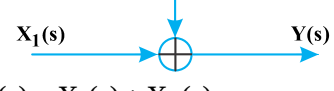
الف) $y(t) = x(t) * \delta(t-1)$ یا $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-1)d\tau$ ب) $y(t) = x(t) * h(t)$ یا $y[n] = x[n] * h[n]$

ج) $y(t) = x^2(t)$ د) $y[n] = x[n-1]$ هـ) $Y(s) = X(s-1)$ یا $Y(j\omega) = X(j(\omega-1))$

نمایش بلوک دیاگرامی

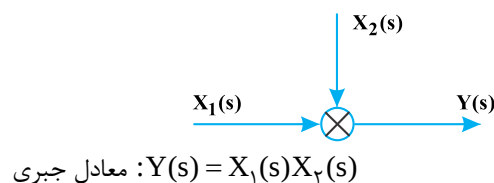
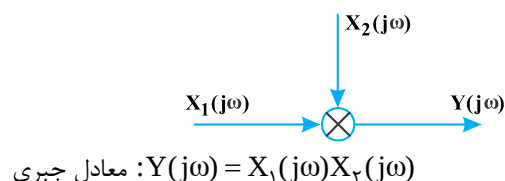
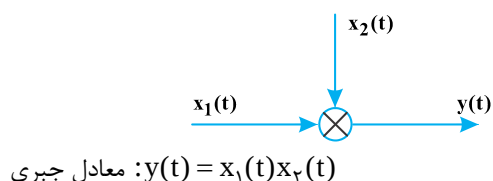
نمایش بلوک دیاگرامی در واقع استفاده از شکل‌هایی استاندارد برای بیان رابطه ورودی و خروجی در یک سیستم است. هر نوعی از سیستم‌ها را می‌توان به‌صورت بلوک دیاگرام نمایش داد.

اگر رابطه سیستمی به‌صورت بلوک دیاگرام بیان شود، ابتدا باید نمایش جبری سیستم را از روی نمایش بلوک دیاگرامی سیستم به‌دست آوریم. معادل جبری هر بلوک دیاگرام را در حوزه زمان و فرکانس می‌توانید در جدول زیر مشاهده کنید. توجه کنید بلوک دیاگرام‌های رسم‌شده در حوزه فرکانس (به غیر از عملگر ضرب) معادل بلوک دیاگرام حوزه زمان است.

حوزه زمان	حوزه فرکانس
عملگر ضرب اسکالر (یکسان برای پیوسته و گسسته)	
 $y(t) = ax(t)$ معادل جبری	 $Y(j\omega) = aX(j\omega)$ معادل جبری  $Y(s) = aX(s)$ معادل جبری
عملگر جمع (یکسان برای پیوسته و گسسته)	
 $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ معادل جبری	 $Y(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$ معادل جبری  $Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$ معادل جبری

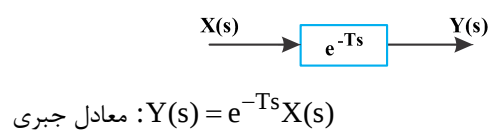
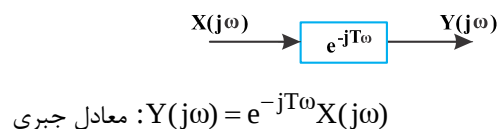
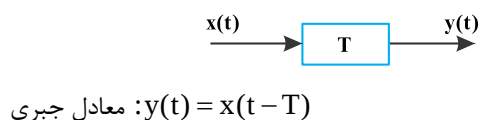


عملگر ضرب (یکسان برای پیوسته و گسسته)

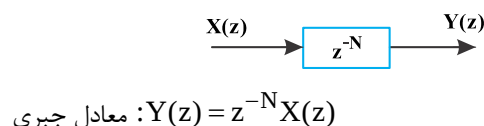
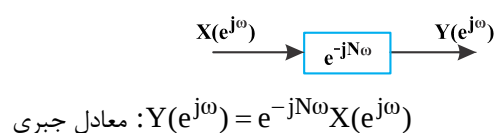
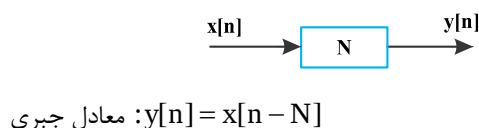


تذکر: بلوک دیاگرام‌های رسم‌شده در حوزه فرکانس مختص عملگر ضرب در حوزه فرکانس هستند و معادل عملگر ضرب در حوزه زمان محسوب نمی‌شوند. بلوک دیاگرام فرکانسی که معادل بلوک دیاگرام عملگر ضرب در حوزه زمان باشد، اهمیت چندانی ندارد.

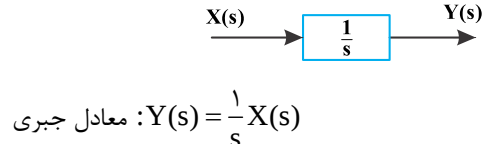
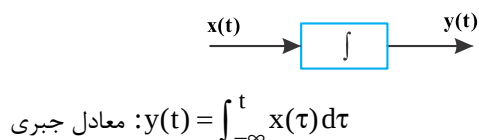
عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه T مختص حالت پیوسته



عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه N مختص حالت گسسته

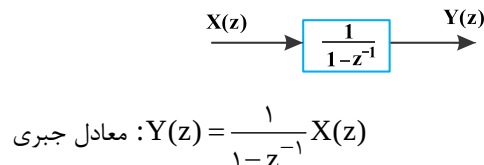
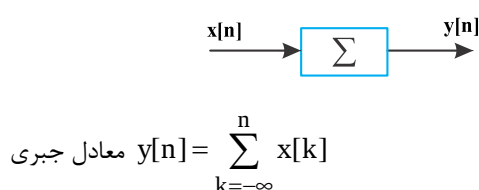


عملگر انتگرال‌گیری در حوزه زمان مختص حالت پیوسته



تذکر: معادل بلوک دیاگرام انتگرال‌گیری زمانی در حوزه فرکانس با استفاده از تبدیل فوریه اهمیت چندانی ندارد.

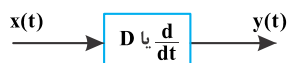
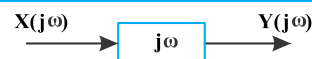
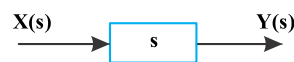
عملگر انباشتگی در حوزه زمان مختص حالت گسسته



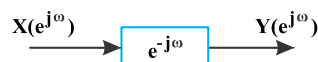
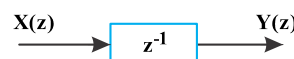
تذکر: معادل بلوک دیاگرام انباشتگی زمانی در حوزه فرکانس با استفاده از تبدیل فوریه اهمیت چندانی ندارد.



عملگر مشتق در حوزه زمان مختص حالت پیوسته

معادل جبری: $y(t) = x'(t)$ معادل جبری: $Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$ معادل جبری: $Y(s) = sX(s)$

عملگر تأخیر زمانی به اندازه یک واحد در حوزه زمان مختص حالت گسسته

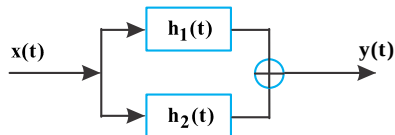
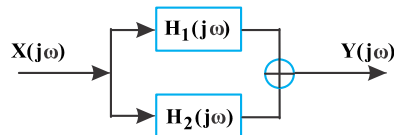
معادل جبری: $y[n] = x[n-1]$ معادل جبری: $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$ معادل جبری: $Y(z) = z^{-1} X(z)$

سیستم‌های LTI سری (یکسان برای پیوسته و گسسته)

معادل بلوک دیاگرامی: $x(t) \rightarrow h_1(t) * h_2(t) \rightarrow y(t)$ معادل جبری: $y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$ معادل بلوک دیاگرامی: $X(j\omega) \rightarrow H_1(j\omega) H_2(j\omega) \rightarrow Y(j\omega)$ معادل جبری: $Y(j\omega) = X(j\omega) H_1(j\omega) H_2(j\omega)$

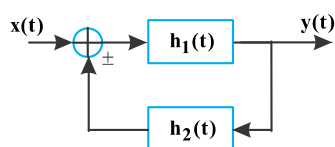
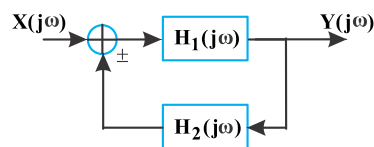
تذکر: معادل فرکانسی سیستم‌های LTI سری با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز مشابه حالت تبدیل فوریه است.

سیستم‌های LTI موازی (یکسان برای پیوسته و گسسته)

معادل بلوک دیاگرامی: $x(t) \rightarrow h_1(t) + h_2(t) \rightarrow y(t)$ معادل جبری: $y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$ معادل بلوک دیاگرامی: $X(j\omega) \rightarrow H_1(j\omega) + H_2(j\omega) \rightarrow Y(j\omega)$ معادل جبری: $Y(j\omega) = X(j\omega) (H_1(j\omega) + H_2(j\omega))$

تذکر: معادل فرکانسی سیستم‌های LTI موازی با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز مشابه حالت تبدیل فوریه است.

سیستم‌های LTI فیدبک (یکسان برای پیوسته و گسسته)

معادل جبری: $y(t) = ((y(t) * h_2(t)) \pm x(t)) * h_1(t)$ معادل بلوک دیاگرامی: $X(j\omega) \rightarrow \frac{H_1(j\omega)}{1 \mp H_1(j\omega) H_2(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega)$ معادل جبری: $Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 \mp H_1(j\omega) H_2(j\omega)} X(j\omega)$

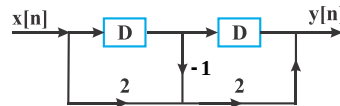
تذکر: معادل فرکانسی سیستم‌های LTI فیدبک با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز مشابه حالت تبدیل فوریه است.

برای یافتن نمایش جبری سیستم‌ها از روی نمایش بلوک دیاگرامی از سه روش می‌توان استفاده کرد:

۱- روش متغیر میانی

در این روش، در هر گره از بلوک دیاگرام، یک متغیر میانی در نظر گرفته می‌شود و برای هر حلقه یا مسیر، معادلات لازم را می‌نویسیم. در نهایت با حذف متغیر و یا متغیرهای میانی از معادلات به دست آمده، رابطه جبری بین ورودی و خروجی را به دست می‌آوریم.

مثال ۱: نمایش جبری ورودی و خروجی را در سیستم زیر مشخص کنید.



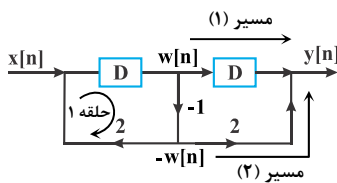
پاسخ: کفایت یک متغیر میانی در نظر بگیریم و گره‌های دیگر را براساس همین متغیر میانی نامگذاری کنیم (برای بالا بردن سرعت عمل، همواره سعی کنید کمترین مقدار متغیر میانی را برای یک بلوک دیاگرام در نظر بگیرید).

متغیر میانی $w[n]$ را به صورت مقابل در بلوک دیاگرام داده شده، در نظر می‌گیریم.

$w[n]$ درواقع همان $x[n-1]$ است؛ زیرا خروجی بلوک D می‌باشد که ورودی آن $x[n]$ است.

تذکر: بلوک D به معنای تأخیر زمانی به اندازه یک واحد است.

حال در جریان داده‌ها حرکت کرده و روابط متغیرها را برحسب یکدیگر به دست می‌آوریم.



$$(1) \text{ معادله حلقه } w[n] = x[n-1] - 2w[n-1]$$

$$(2) \text{ و } (1) \text{ معادلات مسیر } y[n] = w[n-1] - 2w[n]$$

برای حذف متغیر میانی $w[n]$ از طرفین دو رابطه بالا، کافی است دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} w[n] + 2w[n-1] = x[n-1] \\ -2w[n] + w[n-1] = y[n] \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله اول} \times 2} \begin{cases} 2w[n] + 4w[n-1] = 2x[n-1] \\ -2w[n] + w[n-1] = y[n] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین دو معادله}} 5w[n-1] = 2x[n-1] + y[n] \Rightarrow w[n-1] = \frac{2x[n-1] + y[n]}{5} \quad \text{رابطه (۱)}$$

حال $w[n]$ را برحسب x و y محاسبه می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\text{معادله دوم دستگاه} \times (-2)} \begin{cases} w[n] + 2w[n-1] = x[n-1] \\ 4w[n] - 2w[n-1] = -2y[n] \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین دو معادله}} 5w[n] = x[n-1] - 2y[n]$$

$$\Rightarrow w[n] = \frac{x[n-1] - 2y[n]}{5} \quad \text{رابطه (۲)}$$

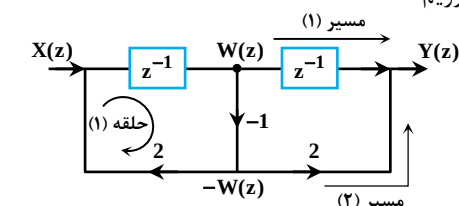
حال کافی است در رابطه (۲)، n ها را به $(n-1)$ تبدیل کرده و سمت راست رابطه به وجود آمده و سمت راست رابطه (۱) را برابر قرار دهیم.

$$\xrightarrow{\text{در رابطه (۲) } n \rightarrow (n-1)} w[n-1] = \frac{x[n-2] - 2y[n-1]}{5} \quad \text{رابطه (۳)}$$

$$\xrightarrow{\text{برابر قرار دادن سمت راست}} \frac{2x[n-1] + y[n]}{5} = \frac{x[n-2] - 2y[n-1]}{5}$$

$$\Rightarrow 2x[n-1] + y[n] = x[n-2] - 2y[n-1] \Rightarrow y[n] + 2y[n-1] = -2x[n-1] + x[n-2]$$

پیدا کردن نمایش جبری یک سیستم از روی بلوک دیاگرام در حوزه زمان عموماً کار دشواری است. بنابراین بهتر است ابتدا معادل فرکانسی بلوک دیاگرام را در حوزه فرکانس رسم کرده و سپس نمایش جبری سیستم را در حوزه فرکانس به دست آوریم، سپس از روی نمایش جبری در حوزه فرکانس به نمایش جبری در حوزه زمان برسیم. حال در این مثال رابطه ورودی و خروجی را در حوزه فرکانس به دست می‌آوریم.



$$(1) \text{ معادلات حلقه } W(z) = (X(z) - 2W(z))z^{-1} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$(2) \text{ معادلات مسیر } Y(z) = z^{-1}W(z) - 2W(z) \quad \text{رابطه (۲)}$$

حال کافی است متغیر میانی $W(z)$ را از رابطه (۱) و (۲) حذف کنیم.

$$(1) \text{ رابطه } W(z)(1 + 2z^{-1}) = z^{-1}X(z) \Rightarrow W(z) = \frac{z^{-1}}{1 + 2z^{-1}} X(z)$$

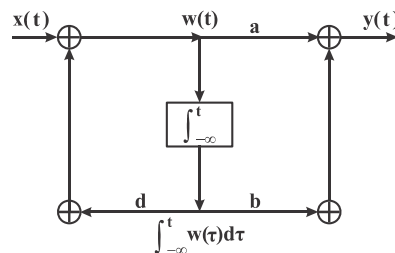
$$(2) \text{ رابطه } Y(z) = (z^{-1} - 2)W(z) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} Y(z) = (z^{-1} - 2)\left(\frac{z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}\right)X(z)$$

رابطه ورودی و خروجی در حوزه فرکانس به کمک تبدیل Z به‌دست آمد. برای پیدا کردن رابطه ورودی و خروجی در حوزه زمان کافی است از طرفین رابطه $(1+z^{-1})Y(z) = (z^{-2}-2z^{-1})X(z)$ به کمک خواص خطی و انتقال زمانی عکس تبدیل Z بگیریم.

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) = z^{-2}X(z) - 2z^{-1}X(z) \xrightarrow{z^{-1}} y[n] + zy[n-1] = x[n-2] - 2x[n-1]$$

همان‌طور که مشاهده کردید، پیدا کردن رابطه ورودی و خروجی در حوزه فرکانس ساده‌تر از حوزه زمان است این سادگی خود را در بعضی از سؤالات بیشتر نشان می‌دهد. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۲: نمایش جبری ورودی و خروجی را در بلوک دیاگرام زیر مشخص کنید.



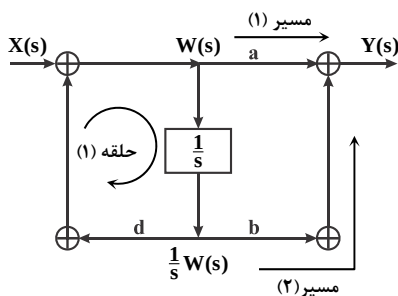
پاسخ: متغیر میانی $w(t)$ را در نظر گرفته و روابط متغیرها را برحسب یکدیگر به‌دست می‌آوریم:

$$w(t) = x(t) + d \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$y(t) = aw(t) + b \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau \quad \text{رابطه (۲)}$$

حال باید از رابطه (۱) و (۲) متغیر میانی $w(t)$ را حذف کرده تا رابطه بین $x(t)$ و $y(t)$ حاصل شود. به دلیل وجود همزمان $w(t)$ و انتگرال آن در معادلات، حذف کردن $w(t)$ از این معادله کار دشواری است (سعی کنید این کار را انجام دهید و به دشواری این راه‌حل پی ببرید).

بهترین روش، حل سؤال در حوزه فرکانس است. برای این منظور، ابتدا معادل فرکانسی بلوک دیاگرام داده‌شده را رسم می‌کنیم:



بلوک $\int_{-\infty}^t$ یک بلوک انتگرال‌گیر است و معادل آن در حوزه فرکانس، بلوک $\frac{1}{s}$ خواهد بود. به جای سیگنال‌های زمانی نیز، تبدیل لاپلاس آن‌ها را قرار می‌دهیم.

مثل حالت قبل، متغیر میانی $W(s)$ را در نظر گرفته و معادلات مربوط به حلقه‌ها و مسیرها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{رابطه (۲): } Y(s) = aW(s) + \frac{b}{s}W(s) \quad \text{معادلات مسیر (۱) و (۲)}, \quad \text{رابطه (۱): } W(s) = X(s) + \frac{d}{s}W(s) \quad \text{معادلات حلقه (۱)}$$

از رابطه (۱)، $W(s)$ را برحسب $X(s)$ به‌دست آورده و در رابطه (۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$W(s) = X(s) + \frac{d}{s}W(s) \Rightarrow X(s) = W(s)\left[1 - \frac{d}{s}\right] = W(s)\left[\frac{s-d}{s}\right] \Rightarrow W(s) = \left[\frac{s}{s-d}\right]X(s) \quad \text{رابطه (۳)}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۲), (۳)}} Y(s) = a\left(\frac{s}{s-d}\right)X(s) + \frac{b}{s}\left(\frac{s}{s-d}\right)X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{as+b}{s-d}X(s)$$

رابطه به‌دست آمده رابطه ورودی و خروجی در حوزه فرکانس است. درواقع بلوک دیاگرام داده‌شده، یک سیستم LTI با تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{as+b}{s-d} \quad \text{را نشان می‌دهد.}$$

برای پیدا کردن رابطه ورودی و خروجی در حوزه زمان، کفایت از طرفین رابطه زیر طبق خواص مشتق زمانی و خطی، عکس تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{as+b}{s-d} \Rightarrow sY(s) - dY(s) = asX(s) + bX(s) \xrightarrow{\text{خاصیت مشتق زمانی و خطی}} y'(t) - dy(t) = ax'(t) + bx(t)$$

رابطه به‌دست آمده نیز، رابطه ورودی و خروجی در حوزه زمان می‌باشد.

نتیجه: در حالت کلی، به‌دست آوردن نمایش جبری یک سیستم از روی بلوک دیاگرام داده‌شده در حوزه فرکانس، راحت‌تر از حوزه زمان است.



مدرسای شریف

فصل نهم

«بررسی خواص سیستم‌ها بدون داشتن ضابطه»

در فصل دوم ۶ خاصیت برای سیستم‌ها معرفی و نحوه تعیین خواص سیستم‌ها با استفاده از ضابطه سیستم شرح داده شد. در این فصل به نحوه تعیین خواص سیستم‌ها با استفاده از یک یا چند ورودی - خروجی داده‌شده می‌پردازیم. بنابراین دیگر خبری از ضابطه سیستم نیست و باید با توجه به مفاهیم هر خاصیت و تجزیه تحلیل ورودی - خروجی‌های داده‌شده، بتوان خواص سیستم را حدس زد. حل مسائل مربوط به این فصل کمی پیچیده و دشوار است، به همین دلیل به ندرت شاهد چنین سؤالاتی در کنکور کارشناسی ارشد خواهید بود. از این رو داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد در صورت نداشتن وقت کافی می‌توانند از مطالعه این فصل اجتناب کنند، البته به داوطلبان کنکور دکتری توصیه می‌شود که از این مباحث غافل نشوند. سؤالات مطرح شده در این فصل در دو حالت کلی تیپ‌بندی می‌شوند. تیپ اول سؤالاتی هستند که با داشتن یک یا چند ورودی - خروجی و بدون داشتن ضابطه سیستم در مورد خواص سیستم‌ها اظهارنظر می‌کنیم. تیپ دوم سؤالاتی هستند که با داشتن یک یا چند ورودی - خروجی و معلوم بودن خواص سیستم و بدون داشتن ضابطه آن، باید خروجی را به ازای یک ورودی جدید محاسبه کرد. روش حل هر دو تیپ سؤال مشابه است و از روابط و نکات یکسانی برای حل آن‌ها استفاده می‌کنیم. تمامی روابط گفته شده در این فصل برای حالت پیوسته مطرح شده‌اند که در حالت گسسته نیز عیناً برقرار هستند.

مقدمه‌ای بر منطق ریاضی

قبل از ورود به مباحث اصلی باید مقدمه‌ای راجع به منطق ریاضی و روابط یک‌طرفه و دوطرفه مطرح شود. در منطق ریاضی دو نوع رابطه ریاضی وجود دارد؛ روابط یک‌طرفه و روابط دوطرفه.

روابط یک‌طرفه

این روابط که به صورت $p \Rightarrow q$ نشان داده می‌شوند بیان می‌کنند که در صورت درستی گزاره p می‌توان درستی گزاره q را نتیجه گرفت و به صورت «اگر ... آنگاه ...» خوانده می‌شوند. برای مثال می‌گوییم «اگر باران ببارد آنگاه هوا ابری است». می‌دانیم در صورت صحیح بودن گزاره اول یعنی بارش باران، قطعاً می‌توان نتیجه گرفت که هوا ابری است. روابط یک‌طرفه را می‌توان به صورت شماتیک نیز نشان داد.

هوا ابری است. $\longrightarrow$ باران می‌بارد.

روابط دوطرفه

این روابط که به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان داده می‌شوند بیانگر این هستند که در صورت درستی گزاره p می‌توان درستی گزاره q و در صورت درستی گزاره q درستی گزاره p را نتیجه گرفت. درواقع یک رابطه دوطرفه بین دو گزاره p و q برقرار است. این روابط را به صورت «اگر و فقط اگر ... آنگاه ...» می‌خوانیم. رابطه‌ی بیان شده در قسمت قبل دوطرفه نیست، چرا که اگر هوا ابری باشد نمی‌توان قطعاً نتیجه گرفت که باران خواهد بارید. گزاره «اگر هوا روشن باشد آنگاه آفتاب در آسمان هست.» نمونه‌ی یک رابطه دوطرفه است که به صورت یک‌طرفه نوشته شده است، چرا که اگر آفتاب در آسمان باشد می‌توان نتیجه گرفت که هوا روشن است. بنابراین بهتر است که این رابطه را به صورت دوطرفه یعنی «اگر و فقط اگر هوا روشن باشد آنگاه آفتاب در آسمان است» بیان کرد. روابط دوطرفه را به صورت شماتیک نیز نشان می‌دهیم.

آفتاب در آسمان است. $\longleftrightarrow$ هوا روشن است.

برای هر رابطه ریاضی، می‌توان عکس و عکس نقیض آن را مطرح کرد.

عکس رابطه

برای نوشتن عکس رابطه یک‌طرفه کافیست جای دو گزاره را با یکدیگر عوض کنیم. برای مثال در رابطه یک‌طرفه «اگر باران ببارد، آنگاه هوا ابری است» عکس رابطه به صورت «اگر هوا ابری باشد، آنگاه باران می‌بارد» بیان می‌شود. این رابطه لزوماً رابطه‌ای صحیح نیست، چرا که می‌دانیم در صورت ابری بودن هوا ممکن است باران ببارد یا نبارد. در چنین حالتی از لفظ **می‌توان** استفاده می‌کنیم؛ یعنی در صورت مطمئن نبودن از صحت رابطه می‌گوییم این رابطه می‌تواند صحیح باشد. بنابراین عکس یک رابطه یک‌طرفه لزوماً صحیح نیست، یعنی هم می‌تواند برقرار باشد و هم می‌تواند برقرار نباشد.

در تست‌های این فصل اکثراً گزینه‌ای خواهید دید که در آن از لفظ **می‌تواند** استفاده شده است.

(می‌تواند باران ببارد. $\rightarrow$ هوا ابری است.) $\xrightarrow{\text{عکس رابطه}}$ (هوا ابری است. $\rightarrow$ باران می‌بارد.): رابطه‌ی یک‌طرفه

ولی در مورد روابط دوطرفه، عکس رابطه همواره برقرار است.

(هوا روشن است. $\leftrightarrow$ آفتاب در آسمان است.) $\xrightarrow{\text{عکس رابطه}}$ (آفتاب در آسمان است. $\leftrightarrow$ هوا روشن است.): رابطه دوطرفه

عکس نقیض رابطه

برای روابط ریاضی می‌توان رابطه عکس نقیض‌شده نیز نوشت. رابطه عکس نقیض به معنای عکس کردن و نقیض (نقض) کردن یک رابطه به‌صورت توأمان است. عکس نقیض روابط یک‌طرفه و دوطرفه همواره برقرار است. برای مثال در رابطه‌ی یک‌طرفه «اگر باران ببارد آنگاه هوا ابری است.» عکس نقیض رابطه به‌صورت «اگر هوا ابری نباشد آنگاه باران نخواهد بارید.» بیان می‌شود. برای نوشتن این رابطه، جای دو گزاره را با یکدیگر عوض کرده (عکس) و آن‌ها را منفی (نقیض) کردیم. می‌دانیم که رابطه بیان شده صحیح است، چرا که در صورت نبودن ابری در آسمان، شاهد بارانی نخواهیم بود. بنابراین در صورت ابری نبودن هوا درباره بارش باران اظهارنظر قطعی خواهیم داشت (قطعاً باران می‌بارد، قطعاً باران نمی‌بارد).

(قطعاً باران نمی‌بارد. $\rightarrow$ هوا ابری نیست.) $\xrightarrow{\text{عکس نقیض رابطه}}$ (هوا ابری است. $\rightarrow$ باران می‌بارد.): رابطه‌ی یک‌طرفه

در مورد روابط دوطرفه نیز همواره عکس نقیض رابطه برقرار است.

(هوا روشن نیست. $\leftrightarrow$ آفتاب در آسمان نیست.) $\xrightarrow{\text{عکس نقیض رابطه}}$ (آفتاب در آسمان است. $\leftrightarrow$ هوا روشن است.): رابطه دوطرفه

در این فصل با استفاده از عکس و عکس نقیض قضایا و روابطی که در مورد یک سیستم با خواص مشخص وجود دارد، با داشتن یک یا چند ورودی - خروجی در مورد خواص سیستم اظهارنظر می‌کنیم. این اظهارنظر شامل سه حالت می‌شود:

۱- سیستم قطعاً (لزوماً) آن خاصیت (ها) را دارد. ۲- سیستم قطعاً (لزوماً) آن خاصیت (ها) را ندارد. ۳- سیستم **می‌تواند** آن خاصیت (ها) را داشته باشد.

درسنامه (I): تعیین خواص سیستم‌ها با استفاده از یک یا چند ورودی - خروجی

در این درسنامه هر ۶ خاصیت اساسی سیستم‌ها را صرفاً با داشتن یک یا چند ورودی - خروجی و بدون داشتن ضابطه سیستم بررسی می‌کنیم.

تعیین خاصیت خطی با داشتن ورودی - خروجی

الف) با داشتن یک ورودی - خروجی: در این حالت برای تعیین خطی بودن سیستم از قضیه یک‌طرفه زیر استفاده می‌کنیم:

پاسخ سیستم به ورودی همواره صفر، خروجی همواره صفر خواهد بود. $\rightarrow$ اگر سیستم خطی باشد

بیان ریاضی قضیه بالا به‌صورت زیر است:

$$y(t) = 0, \forall t \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} x(t) = 0, \forall t$$

در سؤالات این فصل، ورودی - خروجی (سمت راست قضیه مطرح‌شده) داده مسئله و تعیین خواص سیستم (سمت چپ قضیه مطرح‌شده) مطلوب مسئله است. بنابراین برای تعیین خواص سیستم باید از عکس و عکس نقیض قضیه استفاده کنیم (سمت راست قضیه یک‌طرفه را به سمت چپ منتقل می‌کنیم). ابتدا عکس قضیه را مطرح می‌کنیم، می‌دانیم که عکس یک قضیه همواره برقرار نیست. بنابراین با عکس قضیه نمی‌توان درباره خطی یا غیرخطی بودن سیستم اظهارنظر قطعی کرد و اصطلاحاً می‌گوییم سیستم می‌تواند خطی باشد.

سیستم خطی یا غیرخطی است. $\rightarrow$ اگر پاسخ سیستم به ورودی همواره صفر، خروجی همواره صفر باشد. : عکس قضیه

حال به سراغ عکس نقیض قضیه خواهیم رفت. عکس نقیض یک قضیه همواره برقرار است. بنابراین با عکس نقیض قضیه می‌توان درباره خطی یا غیرخطی بودن سیستم اظهارنظر قطعی کرد.

سیستم غیرخطی است. $\rightarrow$ اگر پاسخ سیستم به ورودی همواره صفر، خروجی همواره صفر نباشد. : عکس نقیض قضیه

حال اگر ورودی داده شده در سؤال به ازای تمامی زمان‌ها صفر نباشد (سمت چپ عکس قضیه و عکس نقیض قضیه برقرار نباشد)، طبیعتاً نمی‌توان از قضیه‌ی مطرح‌شده استفاده کرد. بنابراین در این حالت نمی‌توان در مورد خطی بودن سیستم اظهارنظر کرد. اصطلاحاً می‌گوییم سیستم **می‌تواند** خطی باشد، چراکه اطلاعات مسئله برای اظهارنظر قطعی درباره خطی بودن سیستم کافی نیست! با این توضیحات، نکته بعد را مطرح می‌کنیم:

نکته: با داشتن یک ورودی - خروجی، در مورد خطی بودن سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) اگر ورودی به ازای تمامی زمان‌ها صفر باشد ولی خروجی حداقل به ازای یک زمان مشخص و دلخواه صفر نباشد. $\rightarrow$ سیستم **غیرخطی** است.

ب) اگر ورودی و خروجی به ازای تمامی زمان‌ها صفر باشند. $\rightarrow$ سیستم **می‌تواند** خطی باشد.

ج) اگر ورودی به ازای تمامی زمان‌ها صفر نباشد (فارغ از نوع خروجی) $\rightarrow$ سیستم **می‌تواند** خطی باشد.

(ب) با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی: در این حالت برای تعیین خطی بودن سیستم از قضیه یک‌طرفه زیر استفاده می‌کنیم.

پاسخ سیستم به یک ورودی که برحسب ترکیب خطی ورودی‌های دیگر باشد برابر همان ترکیب خطی خروجی‌های متناظر است. $\rightarrow$ اگر سیستم خطی باشد.

بیان ریاضی قضیه بالا به صورت زیر است:

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \dots \xrightarrow{\text{خطی}} y(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t) + \dots$$

با توجه به عکس و عکس نقیض قضیه، نکته زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته ۲: با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی در مورد خطی بودن سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) اگر بتوان یک ورودی دلخواه را برحسب ترکیب خطی ورودی‌های دیگر نوشت و خروجی متناظر با آن ورودی، برابر همان ترکیب خطی از خروجی‌های متناظر با ورودی‌های دیگر نباشد $\leftarrow$ سیستم غیر خطی است.

ب) اگر بتوان یک ورودی دلخواه را برحسب ترکیب خطی ورودی‌های دیگر نوشت و خروجی متناظر با آن ورودی، دقیقاً برابر همان ترکیب خطی از خروجی‌های متناظر باشد $\leftarrow$ سیستم می‌تواند خطی باشد.

ج) اگر نتوان هیچ‌یک از ورودی‌های داده شده را برحسب ترکیب خطی ورودی‌های دیگر نوشت (فارغ از نوع خروجی‌ها) $\leftarrow$ سیستم می‌تواند خطی باشد.

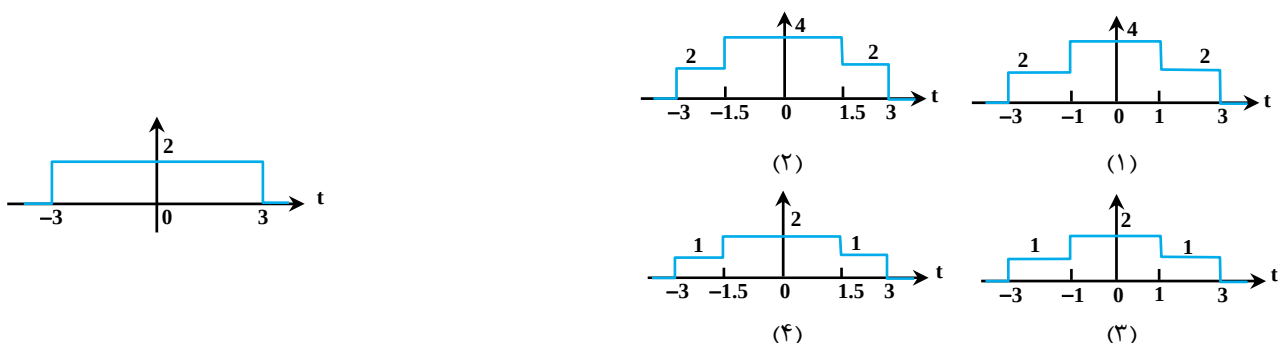
تذکره ۱: اگر تنها دو ورودی - خروجی داشته باشیم، کافی است بررسی کنیم آیا یک ورودی ضربی از ورودی دیگر هست یا نه $(x(t) = kx_1(t))$ ؟ زیرا ترکیب خطی دو ورودی نسبت به یکدیگر دقیقاً به صورت $x(t) = kx_1(t)$ نوشته می‌شود.

مطالب بیان شده در این بخش را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

- سیستم غیر خطی است. $\rightarrow S\{x(t) = 0, \forall t\} = \{y(t) \neq 0, \exists t\}$ $\rightarrow$ یک ورودی - خروجی
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow S\{x(t) = 0, \forall t\} = \{y(t) = 0, \forall t\}$
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow$ (فارغ از نوع خروجی، $\exists t_0, (x(t_0) \neq 0)$)
- سیستم غیر خطی است. $\rightarrow S\{x(t) = kx_1(t)\} \neq \{y(t) = ky_1(t)\}$ $\rightarrow$ دو ورودی - خروجی
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow S\{x(t) = kx_1(t)\} = \{y(t) = ky_1(t)\}$
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow$ (فارغ از نوع خروجی‌ها، $x(t) \neq kx_1(t)$)
- سیستم غیر خطی است. $\rightarrow S\{x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \dots\} \neq \{y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + \dots\}$ $\rightarrow$ بیش از دو ورودی - خروجی
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow S\{x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \dots\} = \{y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + \dots\}$
- سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow$ (فارغ از نوع خروجی‌ها، $x(t) \neq k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \dots$)

تذکره ۲: علامت $\forall t$ ، به معنی این است که رابطه بیان شده باید به ازای تمامی زمان‌ها برقرار است و علامت $\exists t_0$ به معنی این است که رابطه بیان شده تنها به ازای یک زمان دلخواه برقرار است.

مثال ۱: پاسخ یک سیستم خطی (غیر TI) به ورودی‌های به فرم $x(t) = \cos \omega_0 t$ به صورت $y(t) = \cos(\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t)$ است و این خاصیت به ازای جميع مقادیر $\omega_0 \in \mathbb{R}$ وجود دارد. پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل زیر چیست؟ (سراسری ۹۰)

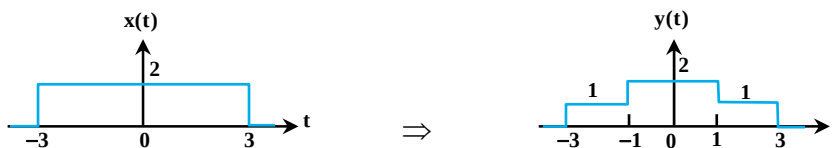


پاسخ: گزینه «۳» با توجه به خطی بودن سیستم، باید خروجی را به صورت ترکیب خطی از ورودی‌ها بنویسیم.

$$x(t) = \cos \omega_0 t \rightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} x(3t) + \frac{1}{2} x(t)$$

از آن‌جا که هر سیگنال از مجموعه‌ای از سیگنال‌های تک فرکانس با فرکانس ω_0 تشکیل شده است و به ازای هر کدام از آنها $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} x(t)$ است و چون سیستم خطی است، همه فرکانس‌ها به یک شکل به خروجی می‌روند، پس در حالت کلی داریم:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} x(t)$$



تعیین خاصیت تغییرناپذیری با زمان (TI) با داشتن ورودی - خروجی

الف) با داشتن یک ورودی - خروجی: در این حالت برای بررسی TI بودن سیستم از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

در صورت متناوب بودن ورودی با دوره تناوب T ، خروجی نیز با دوره تناوب $\frac{T}{m}, m \in \mathbb{N}$ متناوب خواهد بود. $\rightarrow$ اگر سیستم TI باشد.

بیان ریاضی قضیه بالا به صورت زیر است:

$$x(t) = x(t+T) \xrightarrow{\text{سیستم TI}} y(t) = y(t + \frac{T}{m}), m \in \mathbb{N}$$

با توجه به عکس و عکس نقیض قضیه، نکته زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته ۳: با داشتن یک ورودی - خروجی در مورد TI بودن یک سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) اگر ورودی، متناوب با دوره تناوب T و خروجی نامتناوب یا متناوب با دوره تناوبی غیر از $\frac{T}{m}, m \in \mathbb{N}$ باشد $\leftarrow$ سیستم TV است.

ب) اگر ورودی، متناوب با دوره تناوب T و خروجی نیز متناوب با دوره تناوب $\frac{T}{m}, m \in \mathbb{N}$ باشد $\leftarrow$ سیستم می‌تواند TI باشد.

ج) اگر ورودی، نامتناوب باشد (فارغ از نوع خروجی) $\leftarrow$ سیستم می‌تواند TI باشد.

ب) با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی: در این حالت برای تعیین TI بودن سیستم از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

در صورتی که یک ورودی انتقال زمانی یافته ورودی دیگر باشد، خروجی متناظر با ورودی اول نیز انتقال زمانی یافته خروجی متناظر با ورودی دوم به اندازه همان مقدار انتقال زمانی است. $\rightarrow$ اگر سیستم TI باشد

بیان ریاضی قضیه بالا به صورت زیر مطرح می‌شود:

$$x_1(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{\text{سیستم TI}} y_1(t) = y_1(t-t_0)$$

با توجه به عکس و عکس نقیض قضیه، نکته زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته ۴: با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی در مورد TI بودن سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) اگر دو ورودی از بین ورودی‌های داده شده، انتقال زمانی یافته یکدیگر باشند و خروجی متناظر با ورودی اول، انتقال زمانی یافته خروجی متناظر با ورودی دوم به اندازه همان مقدار انتقال زمانی، نباشد $\leftarrow$ سیستم TV است.

ب) اگر دو ورودی از بین ورودی‌های داده شده، انتقال زمانی یافته یکدیگر باشند و خروجی متناظر با ورودی اول نیز انتقال زمانی یافته خروجی متناظر با ورودی دوم به اندازه همان مقدار انتقال زمانی باشد $\leftarrow$ سیستم می‌تواند TI باشد.

ج) اگر نتوان از بین ورودی‌های داده شده، دو ورودی یافت که انتقال زمانی یافته یکدیگر باشند $\leftarrow$ سیستم می‌تواند TI باشد.

مطالب بیان شده در این بخش را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

سیستم TV است. $\rightarrow x(t) = x(t+T)$ و $y(t) \neq y(t + \frac{T}{m}), m \in \mathbb{N}$

سیستم می‌تواند TI باشد. $\rightarrow x(t) = x(t+T)$ و $y(t) = y(t + \frac{T}{m}), m \in \mathbb{N}$

سیستم می‌تواند TI باشد. $\rightarrow y(t)$ چه متناوب چه نامتناوب، $x(t) \neq x(t+T)$

سیستم TV است. $\rightarrow (x_2(t) = x_1(t - t_0) \text{ و } y_2(t) \neq y_1(t - t_0))$
 دو ورودی - خروجی $\rightarrow (x_2(t) = x_1(t - t_0) \text{ و } y_2(t) = y_1(t - t_0))$ باشد. سیستم می‌تواند TI باشد.
 سیستم می‌تواند TI باشد. $\rightarrow (x_2(t) \neq x_1(t - t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R})$ (فارغ از نوع خروجی،
 می‌توان روابط مربوط به دو ورودی - خروجی را برای دو ورودی دلخواه، سه ورودی دلخواه یا ... بررسی کرد. $\rightarrow$ بیش از دو ورودی - خروجی.

مثال ۲: پاسخ یک سیستم زمان گسسته به سه ورودی مختلف به شرح زیر مفروض است: کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً صحیح است؟

(آزاد ۸۹)

الف) این سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست. ب) این سیستم خطی نیست.

$$x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$$

(۲) فقط الف

(۱) فقط ب

$$x_2[n] = \delta[n-2] \rightarrow y_2[n] = \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

$$x_3[n] = \delta[n+1] + \delta[n-2] \rightarrow y_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

☒ پاسخ: گزینه «۲» چون بیش از دو ورودی - خروجی داریم از بین سه ورودی - خروجی داده شده، دو ورودی دلخواه را انتخاب کرده و برای بررسی تغییرناپذیری با زمان از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

سیستم TV است. $\rightarrow (x_2[n] = x_1[n - n_0] \text{ و } y_2[n] \neq y_1[n - n_0])$
 دو ورودی - خروجی $\rightarrow (x_2[n] = x_1[n - n_0] \text{ و } y_2[n] = y_1[n - n_0])$ باشد. سیستم می‌تواند TI باشد.
 سیستم می‌تواند TI باشد. $\rightarrow (x_2[n] \neq x_1[n - n_0], \forall n_0 \in \mathbb{Z})$ (فارغ از نوع خروجی،

چون $x_2[n] = x_1[n-2]$ و $y_2[n] \neq y_1[n-2]$ می‌باشد پس سیستم TV یعنی تغییرپذیر با زمان است و گزاره (الف) لزوماً صحیح است.
 برای بررسی خطی بودن سیستم، باید بتوانیم یکی از ورودی‌ها را برحسب ترکیب خطی دو ورودی دیگر بنویسیم. با توجه به اینکه هیچ‌یک از ورودی‌ها را نمی‌توان برحسب ترکیب خطی ورودی‌های دیگر نوشت و از طرفی هیچ‌یک از ورودی‌ها به‌ازای تمامی زمان‌ها صفر نمی‌باشد؛ بنابراین طبق روابط بیان‌شده در خاصیت خطی، چنین سیستمی می‌تواند خطی باشد و گزاره (ب) لزوماً صحیح نیست.

تعیین خاصیت بدون حافظه بودن با داشتن ورودی - خروجی

الف) با داشتن یک ورودی - خروجی: در این حالت هیچ رابطه مفیدی برای تعیین بی‌حافظه بودن سیستم نمی‌توان ارائه کرد. به عبارت دیگر با داشتن یک ورودی - خروجی نمی‌توان در مورد بدون حافظه بودن سیستم اظهار نظر قطعی کرد و می‌گوییم سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد.
 ب) با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی: در این حالت برای تعیین بی‌حافظه بودن سیستم از قضیه یک‌طرفه زیر استفاده می‌کنیم:

در صورت برابر بودن دو یا چند ورودی در یک زمان دلخواه، خروجی‌های متناظر آن‌ها نیز در آن زمان باهم برابر خواهند بود.
 $\rightarrow$ اگر سیستم بدون حافظه باشد.

بیان ریاضی قضیه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = \dots \xrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه}} y_1(t_0) = y_2(t_0) = \dots$$

با توجه به عکس و عکس نقیض قضیه، نکته زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته ۵: با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی در مورد بدون حافظه بودن سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) اگر دو یا چند ورودی در یک زمان دلخواه با یکدیگر برابر باشند، ولی خروجی‌های متناظر در همان زمان با یکدیگر برابر نباشند $\leftarrow$ سیستم باحافظه است.

ب) اگر دو یا چند ورودی در یک زمان دلخواه با یکدیگر برابر باشند و خروجی‌های متناظر با آن ورودی‌ها نیز در همان زمان مشخص با یکدیگر برابر باشند $\leftarrow$ سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد.

ج) اگر نتوان حداقل دو ورودی یافت که در یک زمان دلخواه با یکدیگر برابر باشند (فارغ از نوع خروجی‌ها) $\leftarrow$ سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد.

تذکر ۳: در نکته مطرح‌شده لزومی ندارد که در یک زمان دلخواه ورودی‌ها با خروجی‌ها برابر باشند، بلکه صرفاً برابری ورودی‌ها با یکدیگر و خروجی‌ها نیز با یکدیگر ملاک است.

مطالب بیان شده در این بخش را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

فارغ از نوع ورودی - خروجی سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد. $\rightarrow$ یک ورودی - خروجی

سیستم باحافظه است. $\rightarrow (x_1(t_0) = x_2(t_0) \text{ و } y_1(t_0) \neq y_2(t_0))$
 دو ورودی - خروجی $\rightarrow (x_1(t_0) = x_2(t_0) \text{ و } y_1(t_0) = y_2(t_0))$ باشد. سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد.
 سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد. $\rightarrow (x_1(t_0) \neq x_2(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R})$ (فارغ از نوع خروجی،

می‌توان روابط مربوط به دو ورودی - خروجی را برای دو ورودی دلخواه، سه ورودی دلخواه یا ... بررسی کرد $\rightarrow$ بیش از دو ورودی - خروجی

مثال ۳: پاسخ یک سیستم زمان - گسسته به ورودی $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{10})$ برابر با $y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi n}{5})$ شده است. کدام یک از دو گزاره زیر لزوماً

- صحیح است؟ (۱) این سیستم باحافظه است. (۲) این سیستم غیر خطی است.
(۱) فقط (۱) (۲) فقط (۲) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه «۴» می‌خواهیم با داشتن یک ورودی - خروجی در مورد باحافظه بودن و غیرخطی بودن سیستم اظهارنظر قطعی کنیم (در صورت سؤال از واژه لزوماً استفاده شده است). هرگز با داشتن یک ورودی - خروجی نمی‌توان در مورد خطی بودن سیستم اظهارنظر قطعی کرد و صرفاً می‌توانیم بگوییم سیستم می‌تواند خطی باشد. ولی در مورد غیرخطی بودن سیستم می‌توان اظهارنظر قطعی کرد. برای اظهارنظر قطعی در مورد غیرخطی بودن سیستم با داشتن یک ورودی - خروجی از رابطه زیر، استفاده می‌کنیم:

سیستم غیر خطی است. $\rightarrow S\{x[n] = 0, \forall n\} = \{y[n] \neq 0, \exists n\}$
سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow S\{x[n] = 0, \forall n\} = \{y[n] = 0, \forall n\}$
سیستم می‌تواند خطی باشد. $\rightarrow (x[n_0] \neq 0, \exists n_0)$ (فارغ از نوع خروجی،

طبق این رابطه چون ورودی $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{10})$ همواره صفر نیست، پس فارغ از نوع خروجی، سیستم می‌تواند خطی باشد و نمی‌توان گفت سیستم لزوماً غیرخطی است. در مورد با حافظه بودن سیستم با داشتن یک ورودی - خروجی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

فارغ از نوع ورودی - خروجی، سیستم می‌تواند بدون حافظه باشد $\rightarrow$ یک ورودی - خروجی
با توجه به این رابطه نمی‌توان گفت سیستم لزوماً باحافظه است. در نتیجه برای چنین سیستمی دو گزاره مطرح شده لزوماً صحیح نیست و گزینه (۴) جواب تست می‌باشد. البته می‌توان با حدس رابطه سیستم به‌طوری‌که ورودی داده شده را به خروجی موردنظر تبدیل کند نیز تست را حل کرد، هرچند این روش همیشه جواب نمی‌دهد. سیستمی با رابطه $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{10})$ ، $y[n] = 2 \cos(\frac{\pi n}{10})$ ، ورودی $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{10})$ را به خروجی $y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi n}{5})$ تبدیل می‌کند. همانطور که می‌دانید چنین سیستمی بدون حافظه و خطی است، پس لزوماً سیستم باحافظه و غیرخطی نخواهد بود.

تعیین خاصیت معکوس‌پذیری با داشتن ورودی - خروجی

(الف) با داشتن یک ورودی - خروجی: در این حالت هیچ رابطه مفیدی برای تعیین معکوس‌پذیری سیستم نمی‌توان ارائه داد. به عبارت دیگر با داشتن یک ورودی - خروجی نمی‌توان در مورد معکوس‌پذیری یک سیستم اظهارنظر قطعی کرد و اصطلاحاً می‌گوییم سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد.
(ب) با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی: در این حالت برای تعیین معکوس‌پذیر بودن سیستم از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

در صورت برابر بودن خروجی‌ها، ورودی‌های متناظر نیز با یکدیگر برابر خواهند بود $\rightarrow$ اگر سیستم معکوس‌پذیر باشد

بیان ریاضی قضیه بالا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y_1(t) = y_2(t) = \dots, \forall t \xrightarrow{\text{سیستم معکوس‌پذیر}} x_1(t) = x_2(t) = \dots, \forall t$$

با توجه به عکس و عکس نقیض قضیه، نکته زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته ۶: با داشتن بیش از یک ورودی - خروجی در مورد معکوس‌پذیر بودن سیستم می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:
(الف) اگر دو یا چند خروجی به ازای تمامی زمان‌ها با یکدیگر برابر باشند، ولی ورودی‌های متناظر به ازای تمامی زمان‌ها با یکدیگر برابر نباشند $\rightarrow$ سیستم معکوس‌ناپذیر است.
(ب) اگر دو یا چند خروجی به ازای تمامی زمان‌ها با یکدیگر برابر باشند و ورودی‌های متناظر نیز به ازای تمامی زمان‌ها با یکدیگر برابر باشند $\rightarrow$ سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد.
(ج) اگر از بین خروجی‌های داده‌شده، هیچ دو خروجی نتوان یافت که با یکدیگر برابر باشند (فارغ از نوع ورودی‌ها) $\rightarrow$ سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد.

مطالب بیان شده در این بخش را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

فارغ از نوع ورودی - خروجی، سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد. $\rightarrow$ یک ورودی - خروجی

سیستم معکوس‌ناپذیر است. $\rightarrow (y_1(t) = y_2(t), \forall t)$ و $(x_1(t_0) \neq x_2(t_0), \exists t_0)$
سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد. $\rightarrow (y_1(t) = y_2(t), \forall t)$ و $(x_1(t) = x_2(t), \forall t)$
سیستم می‌تواند معکوس‌پذیر باشد. $\rightarrow$ (فارغ از نوع ورودی، $(y_1(t_0) \neq y_2(t_0), \exists t_0)$)

می‌توان روابط مربوط به دو ورودی - خروجی را برای دو ورودی دلخواه، سه ورودی دلخواه یا ... بررسی کرد $\rightarrow$ بیش از دو ورودی - خروجی