آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» ابتدا معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم: $\lambda^۲+a\lambda+b=۰$

شرط آنکه $y_۱=e^{-۲x}$ و $y_۲=e^{۳x}$ دو جواب مستقل خطی معادله باشند این است که $\lambda_۱=-۲$ و $\lambda_۲=۳$ دو ریشه‌ی معادله مشخصه باشند، پس داریم:

$$\lambda^۲+a\lambda+b=(\lambda+۲)(\lambda-۳)=\lambda^۲-\lambda-۶ \Rightarrow a=-۱\,,b=-۶ \Rightarrow ab=۶$$

۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه عبارت $(۲x+۱)$ در معادله چند بار تکرار شده تغییر متغیر $۲x+۱=u$ را در نظر می‌گیریم. با اعمال این تغییر متغیر y' و y'' را برحسب $\frac{dy}{du}$ و $\frac{d^۲y}{du^۲}$ به دست می‌آوریم:

$$u=۲x+۱ \Rightarrow du=۲dx$$

$$y'=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=۲\frac{dy}{du}$$

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{du}.\frac{du}{dx}=۴\frac{d^۲y}{du^۲}$$

با جایگذاری y' و y'' در معادله‌ی اصلی داریم:

$$u^۲(۴\frac{d^۲y}{du^۲})+u(۲\frac{dy}{du})+۳y=u \Rightarrow ۴u^۲\frac{d^۲y}{du^۲}+۲u\frac{dy}{du}+۳y=u$$

معادله به شکل معادلات کوشی ـ اویلر درآمده است پس با تغییر متغیر $u=e^t$ به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌رسیم. اکنون توجه شود که دو تغییر متغیر $(۲x+۱)=u$ و $u=e^t$ را اعمال کردیم، پس از ابتدا با اعمال تغییر متغیر $۲x+۱=e^t$ می‌توانستیم به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت برسیم. در سمت راست معادله صورت سؤال عبارت $۲x+۱$ وجود دارد که با تغییر متغیر گفته شده به e^t تبدیل می‌شود، پس گزینه «۱» صحیح است.

۳ـ گزینه «۳» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است پس با تغییر متغیر $t=e^u$ و جایگزینی‌های $ty'=Dy$ و $t^۲y''=D(D-۱)y$ داریم:

$$D(D-۱)y+\alpha Dy+y=۰ \Rightarrow [D^۲+(\alpha-۱)D+۱]y=۰ \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^۲+(\alpha-۱)\lambda+۱=۰$$

برای اینکه پاسخ‌ها نوسانی باشند باید ریشه‌ی معادله مشخصه دارای قسمت موهومی باشد پس شرط $\Delta<۰$ باید برقرار باشد:

$$\Delta<۰ \Rightarrow (\alpha-۱)^۲-۴<۰ \Rightarrow (\alpha-۱)^۲<۴ \Rightarrow -۲<\alpha-۱<۲ \Rightarrow -۱<\alpha<۳$$

۴ـ گزینه «۴» معادله‌ی همگن را به صورت $a_۲y''+a_۱y'+a_۰y=۰$ در نظر می‌گیریم. پس داریم: $a_۲=(x-۱)\,,a_۱=-x\,,a_۰=۱$

با توجه به اینکه شرط $a_۱+xa_۰=۰$ برقرار است پس یکی از جواب‌های معادله‌ی همگن $y_۱=x$ است.

۵ـ گزینه «۲» رونسکین داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$W=\begin{vmatrix} x^{-۱} & y \\ -x^{-۲} & y' \end{vmatrix}=۳ \Rightarrow x^{-۱}y'+x^{-۲}y=۳$$

به معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول رسیدیم که با حل آن به تابع y می‌رسیم:

$$x^{-۱}y'+x^{-۲}y=۳ \Rightarrow y'+\frac{y}{x}=۳x$$

معادله‌ی مرتبه اول به دست آمده یک معادله‌ی خطی است پس داریم:

$$P(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow \mu_{(x)}=e^{\int P(x)dx}=e^{Lnx}=x$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{\mu_{(x)}}(\int \mu_{(x)}.۳xdx+c_۱)=\frac{۱}{x}(\int ۳x^۲dx+c_۱)=\frac{۱}{x}(x^۳+c_۱)=x^۲+\frac{c_۱}{x} \xrightarrow{c_۱=-c} y=x^۲-cx^{-۱}$$

۶ـ گزینه «۱» معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^۲}=۰ \Rightarrow P(x)=\frac{-۱}{x}$$

با توجه به قضیه‌ی آبل رونسکین پاسخ‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$W=ce^{-\int P(x)dx}=ce^{\int\frac{dx}{x}}=ce^{Lnx}=cx$$

۷ـ گزینه «۲» معادله مشخصه را تشکیل داده و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$16\lambda^2+24\lambda+9=0 \Rightarrow (4\lambda+3)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\frac{-3}{4}$$

بنابراین پاسخ معادله و مشتق آن به شکل روبه‌رو است:

$$y=(c_1+c_2t)e^{\frac{-3}{4}t}\ ,\ y'=[c_2-\frac{3}{4}(c_1+c_2t)]e^{-\frac{3}{4}t}$$

با اعمال شرایط اولیه ثابت‌های c_1 و c_2 به دست می‌آیند:

$$y(0)=\alpha \Rightarrow c_1=\alpha$$

$$y'(0)=-1 \Rightarrow c_2-\frac{3c_1}{4}=-1 \Rightarrow c_2=\frac{3\alpha}{4}-1 \Rightarrow y=[(\frac{3\alpha}{4}-1)t+\alpha]e^{\frac{-3t}{4}}$$

حالا خوب دقت کنید؛ اگر دو شرط $\frac{3}{4}\alpha-1>0$ و $\alpha>0$ برقرار باشد آنگاه همواره جواب مثبت است و اشتراک دو شرط گفته شده $\alpha>\frac{4}{3}$ است پس در $\alpha=\frac{4}{3}$ جواب‌های همواره مثبت از جواب‌هایی که در نهایت منفی می‌شوند، جدا می‌شوند.

۸ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه دوم فاقد y است. در این صورت داریم:

$$xy''+y'=x \xrightarrow{y'=p\ \Rightarrow\ y''=p'} xp'+p=x \Rightarrow p'+\frac{1}{x}p=1$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد. لذا داریم:

$$\xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول نسبت به } p \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{Lnx}=x \Rightarrow p=\frac{1}{x}\{\int x\times 1\,dx+c_1\}=\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}+c_1)$$

با ساده‌سازی و جایگذاری $p=y'$ و انتگرال‌گیری از طرفین معادلهٔ حاصل، مقدار y به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$p=\frac{x}{2}+\frac{c_1}{x} \xrightarrow{p=y'} \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}+\frac{c_1}{x} \Rightarrow y=\int(\frac{x}{2}+\frac{c_1}{x})\,dx \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}+c_1Lnx+c_2$$

۹ـ گزینه «۱» معادله‌ی دیفرانسیل مفروض فاقد y است، بنابراین داریم:

$$x^2y''+2xy'-1=0 \xrightarrow{y'=p,\ y''=p'} x^2p'+2xp-1=0 \Rightarrow p'+\frac{2p'}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow p'+\frac{2p'}{x}=\frac{1}{x^2}$$

معادله حاصل یک معادله‌ی خطی مرتبه اول است، پس داریم:

$$\mu_{(x)}=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2dx}{x}}=e^{Lnx^2}=x^2$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{\mu_{(x)}}(\int\mu_{(x)}\cdot\frac{1}{x^2}dx+c) \Rightarrow p=\frac{1}{x^2}(\int dx+c)=\frac{1}{x^2}(x+c)=\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}$$

$$\xrightarrow{p=y'} \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2} \Rightarrow dy=(\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2})dx \xrightarrow{\int} y=Lnx-\frac{c}{x}+c_2 \xrightarrow{c_1=-c} y=Lnx+\frac{c_1}{x}+c_2$$

۱۰ـ گزینه «۱» می‌دانیم که دو پاسخ معادله‌ی $y''+P(t)y'+q(t)=0$ هنگامی مستقل خطی هستند که رونسکین آن‌ها مخالف صفر باشد. با توجه به اطلاعات مسئله y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند. پس داریم:

$$W_0=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'\neq 0$$

رونسکین y_3 و y_4 را تشکیل می‌دهیم:

$$W=\begin{vmatrix} a_1y_1+a_2y_2 & b_1y_1+b_2y_2 \\ a_1y_1'+a_2y_2' & b_1y_1'+b_2y_2' \end{vmatrix}=(a_1b_2-a_2b_1)(y_1y_2'-y_1'y_2)=(a_1b_2-a_2b_1)W_0$$

برای اینکه y_3 و y_4 مستقل خطی باشند، باید $W\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$W=(a_1b_2-a_2b_1)W_0\neq 0 \xrightarrow{W_0\neq 0} a_1b_2-a_2b_1\neq 0 \Rightarrow a_1b_2\neq a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

۱۱ـ گزینه «۳» دو طرف معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم تا معادله استاندارد شود.

$$y''+\frac{-2}{x+1}y'+\frac{2}{(x+1)^2}y=0$$

اکنون به روش کاهش مرتبه y_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$y_2=y_1\times\int\frac{1}{y_1^2}\cdot e^{\int -p(x)dx}\cdot dx \Rightarrow y_2=(x+1)\int\frac{e^{\int\frac{2dx}{x+1}}}{(x+1)^2}dx \Rightarrow y_2=(x+1)\int\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}dx=(x+1)(x)=x^2+x$$

۱۲ـ گزینه «۱» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است. با اعمال تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزین‌های $xy'=Dy$ و $x^2y''=D(D-1)y$ داریم:

$$D(D-1)y+Dy+y=0 \Rightarrow (D^2+1)y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$$

با توجه به معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به شکل مقابل است:

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t \xrightarrow{x=e^t} y=c_1\cos(Lnx)+c_2(Lnx)$$

۱۳ـ گزینه «۱» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$\lambda^2+64=0 \Rightarrow \lambda=\pm 8i \Rightarrow \alpha=0, \beta=8$$

با توجه به ریشه معادله مشخصه پاسخ عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$y=c_1\cos 8x+c_2\sin 8x \Rightarrow y'=-8c_1\sin 8x+8c_2\cos 8x$$

با اعمال شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y(0)=-3 \Rightarrow c_1=-3 \\ y'(0)=32 \Rightarrow 8c_2=32 \Rightarrow c_2=4 \end{cases} \Rightarrow y=-3\cos 8x+4\sin 8x$$

با توجه به پاسخ خصوصی به دست آمده دامنه حرکت و فرکانس را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{دامنه}=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5 \quad \text{و} \quad \text{فرکانس}=\frac{8}{2\pi}=\frac{4}{\pi}$$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0$$

مجموع ضرایب توان‌های زوج با مجموع ضرایب توان‌های فرد برابر است $(1+9=-3-13)$، پس یک ریشه عدد ۱- است. اکنون با تقسیم کردن معادله مشخصه بر $(\lambda+1)$ آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13 & \lambda+1 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3+\lambda^2) & \lambda^2-4\lambda+13 \\ \hline \quad -4\lambda^2+9\lambda+13 & \\ \quad -(-4\lambda^2-4\lambda) & \\ \hline \quad\quad 13\lambda+13 & \end{array}$$

پس معادله مشخصه به فرم $(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+13)$ است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $\lambda_1=-1$ و $\lambda_{2,3}=2\pm 3i$ خواهد بود. با توجه به ریشه‌ها، پاسخ عمومی معادله به شکل زیر است:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}\cos 3x+c_3e^{2x}\sin 3x$$

۱۵ـ گزینه «۴» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است، لذا با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)(D-2)y-D(D-1)y-6Dy+18y=0 \Rightarrow [D^3-3D^2+2D-D^2+D-6D+18]y=0 \Rightarrow [D^3-4D^2-3D+18]y=0$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$\lambda^3-4\lambda^2-3\lambda+18=0$$

با توجه به گزینه‌ها یکی از ریشه‌های معادله مشخصه $\lambda=-2$ است پس با تقسیم بر $\lambda+2$، معادله مشخص را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-4\lambda^2-3\lambda+18 & \lambda+2 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3+2\lambda^2) & \lambda^2-6\lambda+9 \\ \hline \quad -6\lambda^2-3\lambda+18 & \\ \quad -(-6\lambda^2-12\lambda) & \\ \hline \quad\quad 9\lambda+18 & \end{array}$$

پس معادله مشخصه به فرم $(\lambda+2)(\lambda-3)^2$ می‌باشد و ریشه‌های آن به شکل $\lambda_1=-2$ و $\lambda_{2,3}=3$ است.

با توجه به ریشه‌ها پاسخ عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^{3t}+c_3te^{3t} \xrightarrow{x=e^t} y=c_1x^{-2}+c_2x^3+c_3x^3Lnx$$

۱۶ـ گزینه «۱» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$4\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

با توجه به ریشه‌ها پاسخ عمومی را به دست می‌آوریم:

$$y=c_1e^{\frac{1}{2}t}+c_2e^{-\frac{1}{2}t}$$

برای اینکه وقتی $t\to+\infty$ جواب مسأله به صفر میل کند باید ضریب عبارت $e^{\frac{1}{2}t}$ صفر باشد. بنابراین داریم:

$$y=c_2e^{-\frac{1}{2}t}$$

اکنون با توجه به شرایط اولیه مقدار c_2 و β را به‌دست می‌آوریم:

$$y(0)=2 \Rightarrow c_2=2 \Rightarrow y=2e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$y'=-e^{-\frac{1}{2}t} \Rightarrow y'(0)=\beta=-1$$

۱۷ـ گزینه «۲» برای محاسبه جواب خصوصی از روش اپراتور معکوس استفاده می‌کنیم:

$$(D^3+2D^2+D-2)y_p=e^x+\cos x \Rightarrow y_p=\frac{e^x}{(D^3+2D^2+D-2)|_{D=1}}+\frac{\cos x}{(D^3+2D^2+D-2)|_{D^2=-1}}$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{e^x}{(1+2+1-2)}+\frac{\cos x}{(-D-2+D-2)}=\frac{e^x}{2}-\frac{\cos x}{4}$$

۱۸ـ گزینه «۳» اگر $g(x)$ جواب معادله باشد پس باید در معادله صدق کند:

$$g''+gg'-x^3=0 \qquad (1)$$

اکنون در نقطه‌ی $(x=-1)$ معادله را بررسی می‌کنیم و $g''(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g''(-1)+g(-1)g'(-1)-x^3=0 \Rightarrow g''(-1)+(1)(2)-(-1)^3=0 \Rightarrow g''(-1)=-3$$

از معادله‌ی (۱) مشتق می‌گیریم و با بررسی در نقطه‌ی $(x=-1)$ مقدار $g'''(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g'''+(g')^2+gg''-3x^2=0 \Rightarrow g'''(-1)+(2)^2+(1)(-3)-3(1)=0 \Rightarrow g'''(-1)=-4+3+3=2$$

۱۹ـ گزینه «۱» با قرار دادن $x=0$ در معادله، مقدار y'' در این نقطه به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$y''(0)+y(0)=3 \Rightarrow y''(0)=3$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله مفروض داریم:

$$-e^{-x}y''+e^{-x}y'''+y'+xy''+y'=0$$

با قرار دادن $x=0$ در معادله حاصل و جایگذاری شرایط اولیه نتیجه می‌شود که:

$$-y''(0)+y'''(0)+2y'(0)=0 \Rightarrow -3+y'''(0)+2=0 \Rightarrow y'''(0)=1$$

۲۰ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض از نوع کوشی ـ اویلر است. لذا با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)y-2Dy+2y=-2\,\mathrm{Ln}(e^t) \Rightarrow (D^2-3D+2)y=-2t$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به ریشه‌های آن پاسخ عمومی معادله همگن متناظر را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2 \Rightarrow y_h=c_1e^t+c_2e^{2t}$$

با توجه به سمت راست معادله پاسخ خصوصی را به صورت $y_p=At+B$ فرض می‌کنیم و با جایگذاری آن در معادله ضرایب A و B را به دست می‌آوریم:

$$(D^2-3D+2)y_p=-2t \Rightarrow -3A+2(At+B)=-2t \Rightarrow \begin{cases} 2A=-2 \Rightarrow A=-1 \\ -3A+2B=0 \Rightarrow B=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

اکنون پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم:

$$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2e^{2t}-t-\frac{3}{2} \xrightarrow{x=e^t} y=c_1x+c_2x^2-\mathrm{Ln}|x|-\frac{3}{2}$$

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است پس با تغییر متغیر $t=e^u$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)x+Dx+a^2x=b\ \Rightarrow (D^2+a^2)x=b$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به آن پاسخ معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2+a^2=0\ \Rightarrow \lambda=\pm ia\Rightarrow (\alpha=0\ ,\ \beta=a)$$

$$x_h=c_1\cos au+c_2\sin au$$

با توجه به سمت راست معادله پاسخ خصوصی را به فرم $x_p=A$ فرض می‌کنیم و با جایگذاری در معادله مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$(D^2+a^2)x_p=b\ \Rightarrow a^2A=b\ \Rightarrow A=\frac{b}{a^2}$$

$$x=x_h+x_p=c_1\cos au+c_2\sin au+\frac{b}{a^2}$$

اکنون پاسخ عمومی را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{t=e^u} x=c_1\cos(a\operatorname{Ln}t)+c_2\sin(a\operatorname{Ln}t)+\frac{b}{a^2}$$

۲ـ گزینه «۴» تغییر متغیر $z=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\ ,\ y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله‌ی اصلی}]{y',y''\ \text{جایگذاری}}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dz}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dz}+x^2y=0$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم تا ضریب } y \text{ عدد ثابت شود}]{\text{معادله را بر } x^2 \text{ تقسیم}}\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx}}{x^2}\cdot\frac{dy}{dz}+y=0$$

با توجه به خواسته‌ی سؤال ضرایب $\frac{d^2y}{dz^2}$ و $\frac{dy}{dz}$ باید عدد ثابت باشند:

$$\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x^2}=c_1\ \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{c_1}\,x=c_2x\ \Rightarrow z=c_2x^2+c_3$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx}}{x^2}=c_4\xrightarrow{z=c_2x^2+c_3}2c_2+\left(x-\frac{1}{x}\right)2c_2x=c_4x^2\ \Rightarrow 2c_2=c_4$$

ملاحظه می‌شود که به ازای تمام c_2ها با تغییر متغیر $z=c_2x^2+c_3$ معادله‌ی اصلی به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. از آنجا که ثابت c_3 تأثیری در مشتقات ندارد می‌توانیم آن را در نظر نگیریم و شکل کلی $z=vx^2$ را برای تغییر متغیر انتخاب کنیم.

۳ـ گزینه «۴» ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن‌ها فرم پاسخ عمومی معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^3+4\lambda=0\Rightarrow \lambda(\lambda^2+4)=0\Rightarrow \lambda_1=0\ \text{و}\ \lambda_{2,3}=\pm 2i\ \Rightarrow y_h=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین پاسخ خصوصی را به فرم $y_p=x^r[(A_0x+A_1)\cos 2x+(B_0x+B_1)\sin 2x]$ فرض می‌کنیم که r تعداد تکرار $\lambda=\pm 2i$ در ریشه‌های معادله مشخصه و بنابراین برابر ۱ است. پس داریم:

$$y_p=x[(A_0x+A_1)\cos 2x+(B_0x+B_1)\sin 2x]$$

۴ـ گزینه «۲» معادله فاقد y است، لذا با جایگزینی $y'=p$ و $y''=p'$ داریم: $p'=xp^3$

معادله به دست آمده مرتبه‌ی اول و خطی است. با انتگرال‌گیری از طرفین معادله‌ی تفکیک شده داریم:

$$p'=xp^3 \Rightarrow p^{-3}dp=xdx \Rightarrow \frac{-1}{2p^2}=\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow \frac{1}{p^2}=-x^2-2c \xrightarrow{-2c=c_1^2} p^2=\frac{1}{c_1^2-x^2} \Rightarrow p=\frac{\pm 1}{\sqrt{c_1^2-x^2}}$$

باز هم به معادله مرتبه اول خطی رسیدیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm 1}{\sqrt{c_1^2-x^2}} \Rightarrow dy=\frac{\pm dx}{\sqrt{c_1^2-x^2}} \xrightarrow{\int} y=\text{Arcsin}(\frac{\pm x}{c_1})+c_2$$

از آنجا که c_1 اختیاری است پس به جای $\frac{\pm x}{c_1}$ همان $\frac{x}{c_1}$ را استفاده می‌کنیم:

$$y=\text{Arcsin}(\frac{x}{c_1})+c_2 \Rightarrow x=c_1\sin(y-c_2)$$

۵ـ گزینه «۳» از روش اپراتور معکوس برای به دست آوردن پاسخ خصوصی استفاده می‌کنیم:

$$y_p=\frac{\cos x}{P(D)}+\frac{e^{2x}}{P(D)}$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{\cos x}{(D^3-2D^2+1)|_{D^2=-1}}+\frac{e^{2x}}{(D^3-2D^2+1)|_{D=2}}=\frac{\cos x}{-D+2+1}+\frac{e^{2x}}{8-8+1}=\frac{(3+D)\cos x}{9-D^2}+e^{2x} \Rightarrow y_p=\frac{3\cos x-\sin x}{10}+e^{2x}$$

۶ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله‌ی مشخصه متناظر با معادله‌ی دیفرانسیل مفروض را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\lambda_2=1 \Rightarrow x=c_1e^{-2t}+c_2e^t$$

برای اینکه پاسخ مسئله کراندار باشد باید ضریب جمله‌ی e^t صفر باشد پس $c_2=0$. بنابراین داریم:

$$x=c_1e^{-2t} \Rightarrow x'=-2c_1e^{-2t} \to \begin{cases} x(0)=x_0 \Rightarrow c_1=x_0 \\ x'(0)=v_0 \Rightarrow -2c_1=v_0 \Rightarrow v_0=-2x_0 \end{cases}$$

۷ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)=0 \Rightarrow \lambda=2,3$$

در نتیجه جواب عمومی معادله همگن از ضابطه مقابل به دست می‌آید: $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

برای محاسبه جواب خصوصی y_p، ابتدا به محاسبه رونسکین دو جواب $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{3x}$ می‌پردازیم:

$$W=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{5x}-2e^{5x}=e^{5x}$$

در این صورت با داشتن مقادیر y_1 و y_2 و $W(y_1,y_2)$، جواب خصوصی از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.
به نظر ویراستار این سؤال اشتباه است یا اینکه سؤال یا گزینه‌ها نیاز به اصلاح دارند چراکه در تمامی گزینه‌ها انتگرال نامعین برحسب t دیده می‌شود که موجب می‌شود در پاسخ نهایی y_p برحسب t و x به دست آید در حالی که اصلاً t در سؤال وجود ندارد.

$$y_p=-y_1\int\frac{y_2g(x)}{W}dx+y_2\int\frac{y_1g(x)}{W}dx=-e^{2x}\int\frac{e^{3x}g(x)}{e^{5x}}dx+e^{3x}\int\frac{e^{2x}g(x)}{e^{5x}}dx \Rightarrow y_p=-e^{2x}\int e^{-2x}g(x)dx+e^{3x}\int e^{-3x}g(x)dx$$

۸ـ گزینه «۴» u' و u'' برحسب y و مشتقات آن محاسبه کرده و در معادله‌ی اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$u=y^2 \Rightarrow u'=2yy' \Rightarrow u''=2(y')^2+2yy''$$

$$(xy'-y)^2=-x^2yy'' \Rightarrow x^2(y')^2-2xyy'+y^2+x^2yy''=0$$

با اندکی ساده‌سازی داریم:

$$x^2((y')^2yy'')-2xyy'+y^2=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\cdot u''-xu'+u=0 \xrightarrow{\times 2} x^2u''-2xu'+2u=0$$

۹ـ گزینه «۲» $y=e^xv(x)$ پاسخ معادله است پس باید در معادله صدق کند. y' و y'' را به دست می‌آوریم و در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y=e^xv \Rightarrow y'=e^x(v+v') \Rightarrow y''=e^x(v+2v'+v'')$$

$$xy''-(x+2)y'+2y=0 \Rightarrow xe^x(v+2v'+v'')-(x+2)e^x(v+v')+2e^xv=0$$

$$\Rightarrow xv''+(2x-x-2)v'+(x-x-2+2)v=0 \Rightarrow xv''+(x-2)v'=0$$

۱۰ـ گزینه «۲» اگر y_1 و y_2 جواب‌های مستقل یک معادله دیفرانسیل خطی باشند و y جواب عمومی آن باشد داریم:

$$W(y,y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & Lnx & x \\ y' & \frac{1}{x} & 1 \\ y'' & -\frac{1}{x^2} & 0 \end{vmatrix}=(Lnx-1)y''+(-\frac{1}{x})y'+(\frac{1}{x^2})y=0$$

برای نوشتن معادله در فرم استاندارد، طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

$$y''-\frac{1}{x(Lnx-1)}y'+\frac{1}{x^2(Lnx-1)}y=0$$

۱۱ـ گزینه «۴» طبق قضیه آبل با فرض $c=1$ داریم:

$$e^{-x}=e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow -x=-\int p(x)dx\Rightarrow \int p(x)dx=x\Rightarrow p(x)=1$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) صحیح است. طرفین معادلات داده شده در گزینه‌ها را بر x^2 تقسیم کنید. فقط در گزینه (۲) و (۴) ضریب y' برابر با یک است. برای تعیین جواب از بین این دو گزینه باید ببینیم عبارت $x^2y''+x^2y'$ برابر $(2+x)y$ است یا برابر $(2-x)y$؟

$y_1=x^{-1}$ و لذا $y_1'=-x^{-2}$ و $y_1''=2x^{-3}$. در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2(y_1''+y_1')=x^2(2x^{-3}-x^{-2})=2x^{-1}-1=(2-x)x^{-1}\xrightarrow{y=x^{-1}}x^2(y''+y')=(2-x)y$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به عبارت سمت راست معادله باید ببینیم که $D_1=1$ و $D_2=2$ ریشه‌های مرتبه چند معادله‌ی مشخصه هستند:

$$(D^2-4)(D^3-8D^2+65D)(D^3-5D^2+6D)^3y=5e^{2x}+1392e^x\Rightarrow D^4(D+2)(D-2)^4(D-3)^3(D^2-8D+65)y=5e^{2x}+1392e^x$$

با توجه به عبارت سمت چپ معادله $D_1=1$ ریشه‌ی معادله مشخصه نیست و $D_2=2$ ریشه‌ی درجه ۴ است پس داریم:

$$y_p=\frac{5e^{2x}.x^4}{P^{(4)}_{(D)}|_{D=2}}+\frac{1392e^x}{P(D)|_{D=1}}\xrightarrow{\frac{5}{P^{(4)}_{(D)}|_{D=2}}=M}y_p=Mx^4e^{2x}+\frac{1392e^x}{-1392}=Mx^4e^{2x}-e^x$$

۱۳ـ گزینه «۱» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است، پس با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)y+5Dy+4y=0\Rightarrow (D^2+4D+4)y=0\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}}\lambda^2+4\lambda+4=0\Rightarrow(\lambda+2)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-2$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به شکل روبه‌رو به دست می‌آید:

$$y=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

با توجه به تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$y=(c_1+c_2Lnx)x^{-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\frac{c_1+c_2Lnx}{x^2}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\infty}y=\frac{\frac{c_2}{x}}{2x}=\frac{c_2}{2x^2}=0$$

۱۴ـ گزینه «۱» با ضرب دو طرف معادله در x داریم:

$$x^2y''+xy'=x+x^3$$

معادله به فرم کوشی ـ اویلر درآمد، پس با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$[D(D-1)+D]y=e^t+e^{3t}\Rightarrow D^2y=e^t+e^{3t}\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}}\lambda^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی همگن را به دست می‌آوریم:

$$y_h=(c_1+c_2t)$$

به روش اپراتور معکوس پاسخ خصوصی را محاسبه می‌کنیم:

$$y_p=\frac{e^t}{P(D)|_{D=1}}+\frac{e^{3t}}{P(D)|_{D=3}}=\frac{e^t}{1}+\frac{e^{3t}}{9}$$

$$\Rightarrow y=y_h+y_p=(c_1+c_2t)+e^t+\frac{e^{3t}}{9}\xrightarrow[t=Lnx]{x=e^t}y=c_1+c_2Lnx+x+\frac{x^3}{9}$$

۱۵ـ گزینه «۱» با تقسیم دو طرف معادله بر x به فرم معادله‌ی کوشی ـ اویلر می‌رسیم و با اعمال تغییر متغیر $x=e^t$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$x^3y''+2x^2y'=a \Rightarrow x^2y''+2xy'=\frac{a}{x} \xrightarrow{x=e^t} [D(D-1)+2D]y=ae^{-t}$$

معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم و پاسخ عمومی همگن را می‌یابیم:

$$\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1 \Rightarrow y_h=c_1+c_2e^{-t}$$

با توجه به اینکه $\lambda=-1$ ریشه‌ی مرتبه اول معادله مشخصه است. پاسخ خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_p=\frac{ae^{-t}.t}{P'(D)|_{D=-1}}=\frac{ae^{-t}.t}{(2D+1)|_{D=-1}}=\frac{ae^{-t}}{-1}=-ae^{-t}.t \Rightarrow y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-t}-ate^{-t}$$

$$\xrightarrow[Lnx=t]{x=e^t} y=c_1+\frac{c_2}{x}-\frac{aLnx}{x} \Rightarrow y'=\frac{-c_2}{x^2}-\frac{a}{x^2}+\frac{aLnx}{x^2}$$

با توجه به شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y(1)=0 \Rightarrow c_1+c_2-0=0 \\ y'(1)=\frac{2a}{3} \Rightarrow -c_2-a+0=\frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=-\frac{5a}{3} \\ c_1=-c_2=\frac{5a}{3} \end{cases} \Rightarrow y(x)=\frac{5a}{3}-\frac{5a}{3x}-\frac{aLnx}{x} \Rightarrow y(e)=\frac{5a}{3}-\frac{5a}{3e}-\frac{a(1)}{e}=\frac{5a}{3}-\frac{8a}{3e}=\frac{a}{3}(5-\frac{8}{e})$$

۱۶ـ گزینه «۲» طبق فرمول کاهش مرتبه، اگر y_1 یکی از جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد، جواب دیگر این معادله از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:

$$y_2=y_1\int(\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx})dx$$

در این سؤال، با جایگذاری $y_1=e^x$ و $p(x)=-(2-\frac{1}{x})$ داریم:

$$y_2=e^x\int(\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int-(2-\frac{1}{x})dx})dx \Rightarrow y_2=e^x\int(\frac{1}{e^{2x}}e^{\int(2-\frac{1}{x})dx})dx=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{2x-Lnx}dx=e^x\int e^{-Lnx}dx=e^x\int\frac{1}{x}dx=e^xLnx$$

با داشتن جواب‌های خصوصی $y_1=e^x$ و $y_2=e^xLnx$ می‌توانیم جواب عمومی را به این صورت بنویسیم:

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^x+c_2e^xLnx \Rightarrow y=e^x(c_1+c_2Lnx)$$

۱۷ـ گزینه «۳» با جایگذاری شرایط اولیه $y(\pi)=\pi$ ، $y'(\pi)=\frac{1}{\pi}$ در معادله‌ی $\frac{1}{p}=-y\cos y+c\cos y$ مقدار ثابت c را به دست می‌آوریم:

$$\pi=-\pi(-1)+c(-1) \Rightarrow c=0 \Rightarrow \frac{1}{p}=-y\cos y$$

با توجه به اینکه $P=y'$ است پس به معادله‌ای مرتبه اول و تفکیک‌پذیر رسیدیم، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-y\cos y \Rightarrow dx=-y\cos y dy \xrightarrow{\int} x=-y\sin y-\cos y+c_1$$

با توجه به شرط اولیه $y(\pi)=\pi$ مقدار c_1 به دست می‌آید:

$$\pi=-\pi(0)-(-1)+c_1 \Rightarrow c_1=\pi-1 \Rightarrow y\sin y+\cos y+x=\pi-1$$

۱۸ـ گزینه «۴» معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به ریشه‌های آن پاسخ عمومی همگن را به دست می‌آوریم:

$$(D^3-D^2+D-1)=0 \Rightarrow (D-1)(D^2+1)=0 \Rightarrow D_{1,2}=\pm i, D_3=1 \Rightarrow y_h=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^x$$

با توجه به اینکه $D=1$ ریشه‌ی مرتبه اول معادله مشخصه است، پاسخ خصوصی به روش اپراتور معکوس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_p=\frac{3e^x.x}{P'(D)|_{D=1}}=\frac{3xe^x}{(3D^2-2D+1)|_{D=1}}=\frac{3xe^x}{2} \Rightarrow y=y_h+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+(c_3+\frac{3x}{2})e^x$$

۱۹ـ گزینه «۱» معادله از نوع کوشی ـ اویلر است، بنابراین با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$[\text{۲}D(D-\text{۱})+\text{۳}D-\text{۱}]y=\circ \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \text{۲}\lambda^{\text{۲}}+\lambda-\text{۱}=\circ \Rightarrow (\text{۲}\lambda-\text{۱})(\lambda+\text{۱})=\circ \Rightarrow \lambda_{\text{۱}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ ,\ \lambda_{\text{۲}}=-\text{۱}$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به دست می‌آید:

$$y=c_{\text{۱}}e^{\frac{t}{\text{۲}}}+c_{\text{۲}}e^{-t}$$

با توجه به تساوی $x=e^t$ داریم:

$$y=c_{\text{۱}}x^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}+c_{\text{۲}}x^{-\text{۱}}$$

۲۰ـ گزینه «۴» ابتدا رونسکین تابع داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$W(y_{\text{۱}}',y_{\text{۲}}')=\begin{vmatrix} y_{\text{۱}}' & y_{\text{۲}}' \\ y_{\text{۱}}'' & y_{\text{۲}}'' \end{vmatrix}=y_{\text{۱}}'y_{\text{۲}}''-y_{\text{۱}}''y_{\text{۲}}' \xrightarrow[y_{\text{۱}}=e^x]{W(y_{\text{۱}}',y_{\text{۲}}')=\text{۲}e^x} e^x y_{\text{۲}}''-e^x y_{\text{۲}}'=\text{۲}e^x \Rightarrow y_{\text{۲}}''-y_{\text{۲}}'=\text{۲}$$

معادله فاقد $y^{\text{۲}}$ است پس فرض $y_{\text{۲}}'=P$ را در نظر می‌گیریم:

$$y_{\text{۲}}''-y_{\text{۲}}'=\text{۲} \Rightarrow P'-P=\text{۲}$$

به معادله مرتبه اول خطی رسیدیم، بنابراین داریم:

$$\mu=e^{\int -dx}=e^{-x} \Rightarrow P=\frac{\text{۱}}{e^{-x}}\cdot[\int \text{۲}e^{-x}dx+c]=e^x(-\text{۲}e^{-x}+c)=ce^x-\text{۲}$$

با توجه به تساوی $P=y_{\text{۲}}'$ داریم:

$$y_{\text{۲}}'\frac{dy_{\text{۲}}}{dx}=ce^x-\text{۲} \Rightarrow dy_{\text{۲}}=(ce^x-\text{۲})dx$$

$$\xrightarrow{\int} y_{\text{۲}}=ce^x-\text{۲}x+c_{\text{۲}}$$

با فرض $c=\text{۱}$ و $c_{\text{۲}}=\circ$ داریم:

$$y_{\text{۲}}=e^x-\text{۲}x$$

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۲» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^{4}-1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 1, \lambda_{3,4}=\pm i$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ معادله‌ی همگن متناظر را به دست می‌آوریم:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

اکنون پاسخ خصوصی را به روش ضرایب نامعین می‌یابیم، با توجه به فرم عبارت سمت راست معادله پاسخ خصوصی به شکل زیر خواهد بود:

$$y_p=x^{r}[(A_0x+A_1)\sin x+(B_0x+B_1)\cos x]$$

با توجه به اینکه $\lambda=\pm i$ ریشه‌های مرتبه یک معادله مشخصه هستند پس مقدار r برابر ۱ است.

$$y=y_h+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+x(A_0x+A_1)\sin x+x(B_0x+B_1)\cos x$$

۲ـ گزینه «۳» برای یافتن $r(x)$، کافیست مشتقات اول و دوم y را براساس معادلهٔ داده شده برحسب ω محاسبه کنیم و در معادلهٔ دیفرانسیل مفروض جایگزین کنیم:

$$y=\omega(x)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx} \Rightarrow y'=(\omega'-\frac{1}{2}p\omega)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx} \Rightarrow y''=(\omega''-p\omega'-\frac{1}{2}p'\omega+\frac{1}{4}p^{2}\omega)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx}$$

با جایگذاری موارد فوق در معادله داریم:

$$y''+py+q=0 \Rightarrow (\omega''-p\omega'-\frac{1}{2}p'\omega+\frac{1}{4}p^{2}\omega)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}+(p\omega'-\frac{1}{2}p^{2}\omega)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}+\omega qe^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}=0 \Rightarrow$$

$$\omega''+(-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{2}p^{2}+\frac{1}{4}p^{2}+q)\omega=0 \Rightarrow \omega''+\underbrace{(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^{2})}_{r(x)}\omega=0 \Rightarrow r(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^{2}(x)$$

۳ـ گزینه «۳» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به ریشه‌های آن پاسخ معادله‌ی همگن متناظر را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^{2}+4\lambda+13=0 \Rightarrow (\lambda+2)^{2}+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2\pm 3i \Rightarrow (\alpha=-2,\beta=3)$$

$$y_h=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$$

عبارت سمت راست معادله را به دو بخش $R_1(x)=e^{-2x}\cos(3x)$ و $R_2(x)=18e^{-2x}$ تقسیم می‌کنیم و پاسخ خصوصی متناظر با هرکدام را y_{p_1} و y_{p_2} می‌نامیم. با توجه به اینکه $\lambda=-2\pm 3i$ ریشه‌های مشخصه‌اند، پس y_{p_1} با استفاده از روش ضرایب نامعین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_{p_1}=x^{1}e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

همچنین y_{p_2} به روش اپراتور معکوس به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y_{p_2}=\frac{18e^{-2x}}{P(D)|_{D=-2}}=\frac{18e^{-2x}}{(-2)^{2}+4(-2)+13}=2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=xe^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y=y_h+y_p=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)+xe^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+2e^{-2x}$$

به ازای $c_1=c_2=0$ پاسخ به شکل گزینه (۳) خواهد بود.

۴ـ گزینه «۲» با ضرب دو طرف معادله در x به فرم کوشی ـ اویلر می‌رسیم و سپس با تغییر متغیر $x=e^{t}$ و جایگزینی‌های گفته شده مسئله را حل می‌کنیم:

$$x^{3}y'''-2y'x=0 \xrightarrow{x=e^{t}} D(D-1)(D-2)y-2Dy=0 \Rightarrow (D^{3}-3D^{2})y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^{3}-3\lambda^{2}=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0, \lambda_3=3$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ به دست می‌آید:

$$y=c_1+c_2t+c_3e^{3t} \xrightarrow{x=e^{t}} y=c_1+c_2\mathrm{Ln}x+c_3x^{3}$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا معادله را با تقسیم بر ضریب y'' استاندارد می‌کنیم و سپس به روش کاهش مرتبه پاسخ دیگر را می‌یابیم:

$$y''+\frac{1}{x}y'+(x-\frac{1}{4x})y=0 \Rightarrow p(x)=\frac{1}{x}, q(x)=x-\frac{1}{4x}$$

$$y_2=y_1\cdot\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\cdot dx=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\int(\frac{\sqrt{x}}{\cos x})^2.e^{-\int\frac{dx}{x}}.dx=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\int\frac{x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot tgx=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y=c_1y_1+c_2y_2=\frac{c_1\cos x+c_2\sin x}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'=c_1(\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cos x-x^{-\frac{1}{2}}\sin x)+c_2(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\sin x+x^{-\frac{1}{2}}\cos x)$$

با توجه به شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را به دست می‌آوریم:

$$y(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow 1=\frac{0+c_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow c_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$y'(\frac{\pi}{2})=\frac{-1}{\pi} \Rightarrow \frac{-1}{\pi}=c_1(-\sqrt{\frac{2}{\pi}})+\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}) \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{\frac{-1}{2}}\sin x$$

راه تستی: در بین گزینه‌ها تنها گزینه (۱) است که در شرط $y(\frac{\pi}{2})=1$ صدق می‌کند.

۶ـ گزینه «۱» با ضرب دو طرف معادله به فرم کوشی ـ اویلر می‌رسیم:

$$x^2y''-xy'-3y=0$$

اکنون با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده مسئله را حل می‌کنیم:

$$(D(D-1)-D-3)y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=3$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی به شکل روبه‌رو است:

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \xrightarrow{x=e^t} y=c_1x^{-1}+c_2x^3$$

۷ـ گزینه «۱» ابتدا جواب عمومی متناظر با معادله‌ی دیفرانسیل همگن $y''+2y'+y=0$ را به دست می‌آوریم:

$$D^2y+2Dy+y=0 \Rightarrow (D^2+2D+1)y=0$$

پس معادله مشخصه آن به صورت $m^2+2m+1=0$ می‌باشد. ریشه‌های معادله‌ی مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$m_1=-1=m_2 \Rightarrow y_1(t)=e^{-t}, y_2(t)=te^{-t}$$

با استفاده از روش تغییر پارامتر داریم:

$$y_P(t)=u_1(t)e^{-t}+u_2(t)te^{-t} \qquad (*)$$

$$W=\begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (-t+1)e^{-t}\end{vmatrix}=(-t+1)e^{-2t}+te^{-2t}=e^{-2t}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & te^{-t} \\ f(t) & (-t+1)e^{-t}\end{vmatrix}=-te^{-t}f(t) \quad , \quad W_2=\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & f(t)\end{vmatrix}=e^{-t}f(t)$$

$$u_1(t)=\int\frac{W_1}{W}dt=\int\frac{-te^{-t}f(t)}{e^{-2t}}dt=\int -te^tf(t)dt \ , \ u_2(t)=\int\frac{e^{-t}f(t)}{e^{-2t}}dt=\int e^tf(t)dt$$

با جایگذاری $u_1(t)$ و $u_2(t)$ در فرمول (*) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y_P=e^{-t}\int -te^tf(t)dt+te^{-t}\int e^tf(t)dt$$

با تغییر نام متغیر زیر انتگرال به صورت $t=u$ داریم:

$$\Rightarrow y_P=e^{-t}\int_0^t -ue^uf(u)du+te^{-t}\int_0^t e^uf(u)du$$

$$\Rightarrow y_P=\int_0^t -ue^{u-t}f(u)du+\int_0^t te^{u-t}f(u)du=\int_0^t (t-u)e^{-(t-u)}f(u)du$$

با تغییر متغیر $\lambda=t-u$ داریم:

$$\Rightarrow y_P=\int_0^t \lambda e^{-\lambda}f(t-\lambda)d\lambda$$

۸ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه را به شکل زیر تعیین می‌کنیم:

$$\lambda^2+\lambda i=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+i)=0 \Rightarrow \lambda=0\,,\ \lambda=-i$$

در سمت راست عدد ثابت i را هم داریم. بنابراین جواب خصوصی به شکل $y_p=x^r(Ax+B)$ است. چون $x=0$ ریشه‌ی معادله مشخصه است، لـذا $r=1$ و بنابراین جواب خصوصی به صورت $y_p=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$ است. بنابراین $y'=2Ax+B$ و $y''=2A$، با قرار دادن در معادله داریم:

$$2A+i(2Ax+B)=x+i \Rightarrow \begin{cases}2iA=1\\ 2A+iB=i\end{cases} \Rightarrow A=-\frac{i}{2}\,,B=2 \Rightarrow y_p=-\frac{i}{2}x^2+2x$$

۹ـ گزینه «۲» معادله به فرم کوشی ـ اویلر است پس با تغییر متغیر $x=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)y-2Dy+2y=-2t \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=2\,,\ \lambda_2=1$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه داریم:

$$y_h=c_1e^{2t}+c_2e^t \xrightarrow{x=e^t} y_h=c_1x^2+c_2x$$

برای به دست آوردن پاسخ خصوصی با توجه به سمت راست معادله فرض $y_p=At+B$ را در نظر می‌گیریم:

$$y_p''-3y_p'+2y_p=-2t \Rightarrow 0-3A+2At+2B=-2t \Rightarrow \begin{cases}2A=-2 \Rightarrow A=-1\\ -3A+2B=0 \Rightarrow B=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p=-t-\frac{3}{2} \xrightarrow{x=e^t} y_p=-\text{Ln}\,|x|-\frac{3}{2} \Rightarrow y=y_h+y_p=c_1x^2+c_2x-\text{Ln}\,|x|-\frac{3}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۲» معادله به فرم کوشی ـ اویلر است، لذا با فرض $x=e^t$ و جایگزینی‌های $xy'=Dy$ و $x^2y''=D(D-1)y$ داریم:

$$D(D-1)y+3Dy+y=e^{-1} \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی همگن به شکل زیر است:

$$y_h=(c_1+c_2t)e^{-t} \xrightarrow{x=e^t} y_h=(c_1+c_2\text{Ln}x)x^{-1}$$

با توجه به اینکه سمت راست معادله عدد ثابت e^{-1} است، فرض $y_p=A$ را در نظر می‌گیریم و پاسخ خصوصی را می‌یابیم:

$$y_p''+2y_p'+y_p=e^{-1} \Rightarrow 0+0+A=e^{-1} \Rightarrow y_p=e^{-1} \Rightarrow y=y_h+y_p=(c_1+c_2\text{Ln}x)x^{-1}+e^{-1}$$

با توجه به شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را می‌یابیم:

$$y(1)=e^{-1} \Rightarrow (c_1+0)(1)^{-1}+e^{-1}=e^{-1} \Rightarrow c_1=0$$

$$y'(x)=-x^{-2}(c_1+c_2\text{Ln}x)+c_2x^{-2} \Rightarrow y'(1)=1 \Rightarrow -1(0+0)+c_2(1)=1 \Rightarrow c_2=1 \Rightarrow y=x^{-1}\text{Ln}x+e^{-1}$$

با جایگذاری $x=e$ داریم:

$$y(e)=e^{-1}\text{Ln}e+e^{-1}=2e^{-1}$$

۱۱ـ گزینه «۱» پاسخ خصوصی را به روش اپراتور معکوس به دست می‌آوریم:

$$P(D)=D^2-4D+3$$

$$y_p=\frac{e^x\cos 2x}{P(D)}=e^x\cdot[\frac{\cos 2x}{P(D+1)}]=e^x\cdot[\frac{\cos 2x}{(D+1)^2-4(D+1)+3}]=e^x\cdot[\frac{\cos 2x}{D^2-2D}]\Big|_{D^2=-4}$$

برای تولید D^2 در مخرج کسر، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج کسر ضرب می‌کنیم:

$$y_p=e^x.[\frac{\cos 2x}{-2D-4}]\Big|_{D^2=-4} \Rightarrow y_p=e^x\cdot[\frac{(-4+2D)\cos 2x}{(-4)^2-4D^2}]\Big|_{D^2=-4}=e^x\cdot\frac{-4\cos 2x-4\sin 2x}{32}=\frac{-e^x}{8}\cdot(\cos 2x+\sin 2x)$$

۱۲ـ گزینه «۴» با کمی ساده‌سازی داریم:

$$yy''=y^2y'+y'^2 \Rightarrow yy''-y'^2=y^2y' \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y^2} \frac{yy''-y'^2}{y^2}=y'$$

سمت چپ تساوی برابر $\frac{d}{dx}(\frac{y'}{y})$ است. با جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{d}{dx}(\frac{y'}{y})=\frac{dy}{dx} \Rightarrow d(\frac{y'}{y})=dy \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{y'}{y}=y+C$$

با جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$\frac{y'(0)}{y(0)}=y(0)+C \Rightarrow \frac{2}{1}=1+C \Rightarrow C=1 \Rightarrow \frac{y'}{y}=y+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y(y+1)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} dy=y(y+1)dx \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y(y+1)} \frac{dy}{y(y+1)}=dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} Ln\frac{y}{y+1}+LnC=x \Rightarrow \frac{Cy}{y+1}=e^x$$

با جایگذاری $y(0)=1$ داریم:

$$\frac{C\times 1}{1+1}=e^0=1 \Rightarrow C=2 \Rightarrow \frac{2y}{y+1}=e^x$$

اکنون با جایگذاری $x=1$ مقدار $y(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2y(1)}{y(1)+1}=e \Rightarrow \frac{y(1)+1}{2y(1)}=\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{2y(1)}=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}=\frac{2-e}{2e} \Rightarrow y(1)=\frac{e}{2-e}=\frac{-e}{e-2}$$

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا پاسخ عمومی معادله همگن را با توجه به معادله مشخصه به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2\pm i \Rightarrow y_h=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$

با توجه به عبارت سمت راست معادله، پاسخ خصوصی را به روش اپراتور معکوس به دست می‌آوریم:

$$y_p=\frac{e^{2x}\cos x}{(D-2)^2+1}=e^{2x}.[\frac{\cos x}{(D+2-2)^2+1}]|_{D^2=-1}=e^{2x}.[\frac{\cos x}{D^2+1}]|_{D^2=-1}$$

با توجه به اینکه مخرج کسر صفر می‌شود پس از مخرج مشتق گرفته و صورت را در x ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow y_p=e^{2x}.[\frac{x\cos x}{2D}]|_{D^2=-1}=e^{2x}.[\frac{D.x\cos x}{2D^2}]|_{D^2=-1}=e^{2x}.(\frac{\cos x-x\sin x}{-2})$$

اکنون پاسخ عمومی معادله را می‌نویسیم و با استفاده از شرایط اولیه ثابت‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$y=y_h+y_p=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)+\frac{e^{2x}}{2}(x\sin x-\cos x)$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \Rightarrow A-\frac{1}{2}=1 \Rightarrow A=\frac{3}{2} \\ y(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow e^{\pi}(B+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow B=\frac{-\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow y=e^{2x}(\frac{3}{2}\cos x-\frac{\pi}{4}\sin x)+\frac{e^{2x}}{2}(x\sin x-\cos x)=e^{2x}(\cos x-\frac{\pi}{4}\sin x+\frac{x}{2}\sin x)$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$y(\frac{\pi}{4})=e^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{\pi}{8})$$

۱۴ـ گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را مشخص می‌کنیم:

$$\lambda^4-1=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 1,\ \lambda_{3,4}=\pm i$$

با توجه به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه، پاسخ، معادله همگن به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$y_h=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

حال با توجه به شرایط اولیه ثابت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2+c_3=0 \\ y'(0)=0 \Rightarrow c_1-c_2+c_4=0 \\ y''(0)=1 \Rightarrow c_1+c_2-c_3=1 \\ y'''(0)=1 \Rightarrow c_1-c_2-c_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{1}{2} \\ c_2=0 \\ c_3=\frac{-1}{2} \\ c_4=\frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_h=\frac{e^t}{2}-\frac{\cos t}{2}-\frac{\sin t}{2}$$

با اندکی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$y_h=\frac{1}{2}[\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}]-\frac{\cos t}{2}-\frac{\sin t}{2} \Rightarrow y_h=\frac{\cosh t}{2}+\frac{\sinh t}{2}-\frac{\cos t}{2}-\frac{\sin t}{2}$$

۱۵ـ گزینه «۳» با استفاده از روش تغییر پارامتر می‌توانیم پاسخ خصوصی را محاسبه کنیم:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix}=\cos x$$

$$W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix}=-\sin x\cos x\ ,\ W_2(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix}=\cos x$$

$$u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=\int\frac{-\sin x\cos x}{\cos x}dx=\cos x,\ u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=\int\frac{\cos x}{\cos x}dx=x$$

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2=\cos x(1)+x\sin x,\ y_h=c_1(1)+c_2(\sin x)$$

$$y=y_h+y_p=c_1+c_2\sin x+\cos x+x\sin x$$

۱۶ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $(x+\frac{1}{2})=e^t$ معادله را به روش کوشی ـ اویلر حل می‌کنیم:

$$12(x+\frac{1}{2})^2y''-2(x+\frac{1}{2})y'+2y=0\Rightarrow[12D(D-1)-2D+2]y=0\Rightarrow[6D^2-7D+1]y=0$$

$$6\lambda^2-7\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)(6\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=1\ ,\ \lambda=\frac{1}{6}\Rightarrow y(t)=c_1e^t+c_2e^{\frac{t}{6}}$$

با جایگذاری $(x+\frac{1}{2})=e^t$ داریم:

$$y(x)=c_1(x+\frac{1}{2})+c_2(x+\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}\xrightarrow[c_2=\sqrt[6]{2^5}c_4]{2c_3=c_1}y(x)=c_3(2x+1)+c_4\sqrt[6]{2x+1}$$

۱۷ـ گزینه «۲» با تغییر متغیر $x=t^2$ به محاسبه‌ی y' و y'' برحسب $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ می‌پردازیم:

$$x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dot{y}}{2t}$$

$$y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}(\frac{\dot{y}}{2t})=\frac{d}{dt}(\frac{\dot{y}}{2t})\frac{dy}{dx}=(\frac{\ddot{y}}{2t}-\frac{\dot{y}}{2t^2})(\frac{1}{2t})=\frac{1}{4}(\frac{\ddot{y}}{t^2}-\frac{\dot{y}}{t^3})$$

با جایگزینی y'' و y' در معادله داریم:

$$\frac{1}{2}(\frac{\ddot{y}}{t^2}-\frac{\dot{y}}{t^3})+\frac{t^2+1}{t^2}(\frac{\dot{y}}{2t})+y=0\xrightarrow{\text{دو طرف ضرب‌در } 2t^2}\ddot{y}-\frac{\dot{y}}{t}+\frac{t^2+1}{t}(\dot{y})+2t^2y=0\Rightarrow\ddot{y}+t\dot{y}+2t^2y=0$$

۱۸ـ گزینه «۱» با اندکی ساده‌سازی و انتگرال گرفتن از دو طرف معادله داریم:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=1\Rightarrow d(y^{(n-1)})=dx\xrightarrow{\int}y^{(n-1)}=x+c_1\Rightarrow d(y^{(n-2)})=(x+c_1)dx\xrightarrow{\int}y^{(n-2)}=\frac{x^2}{2!}+xc_1+c_2$$

با تکرار همین روند پس از n بار انتگرال گرفتن به رابطه‌ی $y=\frac{x^n}{n!}+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\dots+c_n$ می‌رسیم.

۱۹ـ گزینه «۴» با تقسیم دو طرف معادله بر x به معادله‌ای به فرم کوشی ـ اویلر می‌رسیم:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x}$$

با جایگزین‌های $x=e^t$ ، $xy'=Dy$ ، $x^2y''=D(D-1)y$ و $x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$ داریم:

$$(D(D-1)(D-2)+2D(D-1)-D+1)t=e^{-t}\Rightarrow(D^3-D^2-D+1)y=e^{-t}$$

معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda^2-1)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1\ ,\ \lambda_3=-1$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله همگن به شکل روبه‌رو است:

$$y_h=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}$$

$\lambda=-1$ ریشه‌ی مرتبه اول معادله مشخصه است؛ پس پاسخ خصوصی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y_p=\frac{e^{-t}}{P(D)}=\frac{te^{-t}}{P'(-1)}=\frac{te^{-t}}{(3D^2-2D-1)|_{D=-1}}=\frac{te^{-t}}{4}$$

$$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}+\frac{te^{-t}}{4}$$

با جایگزینی $x=e^t$ داریم:

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2x\text{Ln}x+c_3x^{-1}+\frac{x^{-1}\text{Ln}x}{4}$$

۲۰ـ گزینه «۴» ضرایب معادله دیفرانسیل داده شده، یادآور ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن می‌باشند.

$$\binom{n}{0}D^n+\binom{n}{1}D^{n-1}+\binom{n}{2}D^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}=(D+1)^n$$

از طرف دیگر جواب‌های عمومی و خصوصی معادله $(D+a)^n y=e^{-ax}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1})e^{-ax} \\ y_p=\dfrac{x^n e^{-ax}}{n!} \end{cases}$$

در این معادله، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}\ \Rightarrow (D^4+4D^3+6D^2+4D+1)=y=e^{-x}$$

$$(D+1)^4y=e^{-x}\ \Rightarrow \begin{cases} y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)e^{-x} \\ y_p=\dfrac{x^4e^{-x}}{4!}=\dfrac{x^4e^{-x}}{24} \end{cases}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت مقابل می‌باشد:

$$y=y_h+y_p=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+\frac{x^4}{24})e^{-x}$$