فصل اول

« مقدمه و یادآوری »

مقدمه

مکانیک شاخه‌ای از علم فیزیک است که از لحاظ قدمت، قدیمی‌ترین علم فیزیکی است که در آن اثرات اجسام و نیروهای متقابل بر روی یکدیگر از نظر حرکت و سکون مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مکانیک جدید بر اساس قانون نیوتن(۱۷۲۷-۱۶۴۲) بناشده است، اگر چه تئوری نسبیّت انشتین محدودیتهائی برای قانون نیوتن ایجاد کرده ولی این محدودیتها برای اجسام و فواصل معمولی و مورد مطالعه مهندسی و برای حرکاتیکه نسبت به سرعت نور آهسته‌تر می‌باشند (سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر در ثانیه) ناچیز و قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

ابعاد و واحدهای اصلی مکانیک (طول، زمان و جرم)

برای اندازه‌گیری پدیده‌های مختلف در طبیعت واحدهای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند. طول، سطح، حجم، زمان، نیرو، سرعت، شتاب، درجه حرارت و ... که هر کدام بایستی با واحد مربوطهٔ خود اندازه‌گیری شوند. برای اندازه‌گیری کمیت مربوط به هر یک از این اشیاء و پدیده‌ها یک واحد معین انتخاب شده است. مثلاً برای طول از واحدهایی نظیر میلیمتر، سانتیمتر، متر، فوت، اینچ و... استفاده می‌گردد.

نکته ۱: بدیهی است در صورتیکه واحد طول معین شود واحدهای سطح و حجم نیز خود به خود تعیین می‌شوند.

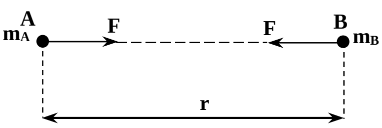
واحدی مثل طول را ***واحد اصلی*** یا اولیه و واحدهایی مانند سطح و حجم که بر مبنای واحد اصلی تعیین می‌شوند را ***واحدهای ثانوی*** یا فرعی می‌نامند (واحدهای اصلی مستقل از یکدیگر هستند). بعد از انتخاب واحد طول "L" ملاحظه می‌گردد که زمان رابطه‌ای با آن ندارد، لذا زمان نمی‌تواند واحد فرعی طول باشد، پس می‌توان آنرا یک واحد اصلی نامید، زمان را با "T" نمایش می‌دهیم، واحد اصلی زمان "ثانیه" می‌باشد.

اکنون که واحدهای طول و زمان معین شده‌اند می‌توان سرعت و شتاب را تعریف و واحد آنها را معین کرد. سرعت یک جسم مقدار طول پیموده شده توسط جسم در واحد زمان و شتاب، تغییر سرعت آن جسم در واحد زمان است.

جرم خاصیتی است که هر ماده دارد و می‌توان گفت زمانی دو ماده دارای یک جرم هستند که در یک نقطه معین از زمین وزن مساوی داشته باشند. جرم یک واحد اصلی است که آن را با "M" نشان می‌دهند. واحد اصلی جرم کیلوگرم است. برای تعریف جامع‌تر جرم دو قانون نیوتن را بیان می‌کنیم:

الف) قانون جاذبه عمومی نیوتن

فرض کنید دو ذره مادی A و B مطابق شکل قرار گرفته باشند، قانون جاذبه عمومی نیوتن بیان می‌کند که بین این دو نقطهٔ مادی نیروی جاذبه‌ای وجود دارد به نحوی که اثر هر یک از نقاط مادی روی دیگری مساوی و مختلف الجهت می‌باشد. یعنی جرم A نیروی F به جرم B و جرم B نیروی جاذبه F به جرم A وارد می‌کنند (یعنی بین نقاط مادی A و B نیروی جاذبه وجود دارد) و داریم:



« شکل ۱ »

$$F = G\frac{m_A m_B}{r^2}$$

مثال۱: اگر فاصله دو ذره نصف شود، نیروی جاذبه بین آنها چند برابر می‌گردد؟

۱) ۲ برابر   ۲) $\frac{1}{2}$ برابر   ۳) ۴ برابر   ۴) تغییری نمی‌کند

پاسخ: گزینه «۳» نیروی جاذبه بین دو ذره با توان دوم معکوس فاصله متناسب است، لذا:

$$F \alpha \frac{1}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} r \to \frac{1}{2} r \\ F \to 4F \end{cases}$$

ب) قانون دوم نیوتن

شتاب حرکت یک جسم تحت اثر نیروی F تناسب مستقیم با نیرو دارد، عدد ثابت تناسب، جرم جسم می‌باشد. یعنی: $F = Ma$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مطلق

الف) سیستم متریک

الف) MKS : در این سیستم جرم یک کیلوگرم در سطح دریا واحد جرم است که کیلوگرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم نیوتن است، یک نیوتن نیروئی است که به یک کیلوگرم جرم شتابی معادل یک متر بر مربع ثانیه بدهد. چون در سطح دریا شتاب جاذبه زمین برابر $g = ۹/۸۰۶۶۵\ m/S^۲$ می‌باشد، بنابراین وزن یک کیلوگرم معادل ۹/۸۰۶۶۵ نیوتن است. $F = mg = ۱\times ۹/۸۰۶۶۵$ نیوتن

ب) CGS : در این دستگاه جرم یک گرم در سطح دریا واحد جرم است که گرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این دستگاه "دین" است و چون $g = ۹۸۰/۶۶۵\ cm/S^۲$ است پس هر گرم وزن تقریباً ۹۸۱ دین می‌باشد.

ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم جرم یک ماده که دارای وزنی معادل یک پوند در سطح دریا می‌باشد واحد جرم است و «پوند جرم» نامیده می‌شود. بنابراین واحد نیرو در این سیستم، نیروئی است که به جرم یک «پوند جرم» شتاب یک فوت بر مربع ثانیه بدهد که «پوندال» نامیده می‌شود. توجه نمائید که وزن یک پوند جرم مساوی $F = Mg$ پوندال است که در آن g شتاب ثقل زمین در محل آزمایش است. اگر محل آزمایش سطح دریا باشد، وزن این جرم مساوی یک پوند است (بنا به تعریف پوند جرم) و چون در سطح دریا $g = ۳۲/۱۷۴۰۵\ Ft/Sec^۲$ است، بنابراین وزن یک پوند معادل پوندال ۳۲/۵۰۱۷۴ می‌باشد، به عبارتی:

پوند ۱ = (یک پوند جرم) $(۳۲/۱۷۴۰۵ Ft/Sec^۲)$ = ۳۲/۵۰۱۷۴ × (یک پوند جرم)×$(۱\ Ft/Sec^۲) = ۳۲/۱۷۴۰۵$ پوندال

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مهندسی

الف) سیستم متریک (MKS)

در این دستگاه یک «کیلوگرم وزن» واحد نیرو است، واحد جرم در این دستگاه جرمی است که اگر واحد نیرو (کیلوگرم وزن) به آن وارد شود شتاب واحد پیدا کند. ملاحظه می‌شود که این واحد ۹/۸۱ برابر کیلوگرم جرم خواهد بود.

ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم «پوند وزن» (وزن یک پوند جرم در کنار دریا) واحد نیرو است، واحد جرم ***«اسلاگ»*** می‌باشد، یک اسلاگ جرمی است که تحت اثر یک پوند وزن شتاب واحد $(۱\ Ft/Sec^۲)$ پیدا کند. بنابراین وزن واحد جرم (اسلاگ) در کنار دریا مساوی پوند $F = Mg = (۱)\times(۳۲/۲)$ و جرم این وزنه پوند جرم و معادل ۳۲/۲ می‌باشد. بنابراین هر اسلاگ معادل ۳۲/۲ پوند است.

نکته ۲: به طور خلاصه وقتی وزن در کنار دریا داده شده باشد مقدار عددی جرم آن به پوند جرم همان وزن است و مقدار عددی جرم آن به اسلاگ وزن آن تقسیم بر ۳۲/۲ می‌باشد.

مثال۲: وزن یک جسم در کنار دریا ۶۴۴ پوند است. وزن این جسم در محلی که شتاب ثقل زمین ۳۰/۵ فوت بر مربع ثانیه است، بر حسب پوند کدام است؟

۱) $۲۵۷^{\#}$ ۲) $۶۱۰^{\#}$ ۳) $۹۱۰^{\#}$ ۴) $۳۵۷^{\#}$

پاسخ : گزینهٔ «۲» اگر از فرمول $F = Ma$ استفاده کنیم، که M بر حسب اسلاگ و a بر حسب فوت بر مجذور ثانیه است خواهیم داشت: (در کنار دریا) $W_\circ = M(۳۲/۲)$ و در محلی با شتاب ثقل g : $W = Mg$ اگر M را در این دو رابطه حذف کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{W}{W_\circ} = \frac{g}{۳۲/۲} \Rightarrow W = W_\circ \frac{g}{۳۲/۲}$$

باتوجه به معلومات مسأله : $W = ۶۴۴\frac{۳۰/۵}{۳۲/۲} = ۶۱۰\ \#$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: وزن جسمی در شرایط متعارف ۷۰۰ پوند است. جرم آن بر حسب اسلاگ چقدر می‌باشد؟

۱) ۲۱/۷ ۲) ۶۵/۶ ۳) ۷۰ ۴) ۷۱/۳

پاسخ : گزینهٔ «۱» جرم جسم بر حسب اسلاگ $\frac{۷۰۰}{۳۲/۲} = ۲۱/۷$ می‌باشد.

دستگاه واحدهای معمول:

کمیت	واحد M.K.S	واحد C.G.S	واحد انگلیسی	واحد مهندسی آمریکائی
جرم	کیلوگرم جرم	گرم	پوند جرم	اسلاگ
طول	متر	سانتی‌متر	فوت	فوت
زمان	ثانیه	ثانیه	ثانیه	ثانیه
نیرو	نیوتن	دین	پوندال	پوند نیرو

تبدیل واحدها:

۱ اینچ $\equiv$ ۲/۵۴ سانتیمتر

۱ فوت $\equiv$ ۱۲ اینچ $\equiv$ ۳۰/۵ سانتیمتر $\equiv$ ۰/۳۰۵ متر $\equiv$ $\frac{1}{5280}$ مایل

۱ اسلاگ $\equiv$ ۳۲/۲ پوند جرم

۱ گرم $\equiv$ $2/205\times10^{-3}$ پوند جرم $\equiv$ $0/685\times10^{-4}$ اسلاگ

۱ پوند نیرو $\equiv$ ۴۴۵ دین $\equiv$ ۳۲/۲ پوندال $\equiv$ ۱۶ اونس

۱ نیوتن $\equiv$ 10^{-5} دین

ایده‌آل نمودن مسائل مکانیک

یکی از مسائل مهمی که در مهندسی باید به آن توجه کرد فرضیات در حل مسائل و به عبارت دیگر ایده‌آل کردن آن مسائل است. اکثر مسائل مهندسی، پیچیده می‌باشند و وقتی مدل ریاضی از روی آن ساخته می‌شود مسئله پیچیدهٔ ریاضی به وجود می‌آورد که حل آن اگر با معلومات حاضر غیرممکن نباشد بسیار مشکل است. در چنین شرایطی یا با فرضیاتی مسئلهٔ مکانیک را ساده می‌کنند به نحوی که قابل حل شود و یا مسئله ریاضی بدست آمده را تقریبی حل می‌کنند. در این جا هدف روش اول است با این شرط که فرضیات ساده کننده بگونه‌ای باشند که جواب و ماهیت مسئله را عوض نکند. در زیر چند نمونه از این ایده‌آل سازی‌ها ذکر شده‌اند:

ماده متصل

همانطور که می‌دانیم مواد در طبیعت هر چقدر هم که بهم فشرده شده باشند متصل نبوده و فضائی بین الکترونها و هسته هر اتم وجود دارد. از آنجایی که در مهندسی با موادی به مراتب بزرگتر از اتم سروکار داریم و فقط مقدار و میانگین خواص در حجم معین مورد استفاده دارند، لذا از این فضاها (که بعلت به هم فشرده نبودن جسم به وجود می‌آیند) صرفنظر کرده و فرض می‌کنیم که جسم یک ماده، بهم پیوسته و متصل است.

جسم صلب (سخت)

منظور از جسم صلب جسمی است که در اثر نیروهای وارده تغییر شکل ندهد. در مقاومت مصالح خواهید دید که هر جسمی هر چند که سخت باشد تحت اثر هر نیروئی هر چند کوچک تغییر شکل می‌دهد. (از لحاظ علمی جسم صلب به صورت تئوری وجود ندارد) ولی در فرضیه جسم صلب این گونه استدلال می‌شود که تغییر شکلها آنقدر کوچک می‌باشند که اثر قابل توجهی نداشته و در نتیجهٔ مسئله اثری ندارند. از این فرضیه در حل مسائل استاتیک استفاده می‌گردد.

ذره جرم‌دار

قوانین نیوتن برای ذره هندسی جرم‌دار وضع شده‌اند، یعنی قوانین نیوتن که اصول مکانیک بر آن بنا شده‌اند در مورد ذره هندسی بدون بعد و دارای جرم می‌باشند. واضح است چنین ذره بدون بُعد و جرم داری در طبیعت وجود ندارد، ولی با فرض وجود آن بسیاری مسائل مکانیک حل می‌شود و در بسیاری از موارد جرم تمام ماده را در مرکز آن متمرکز کرده (به طور فرضی) و آنرا به صورت ذره‌ای جرم‌دار فرض می‌کنیم.

نیروهای متمرکز

در مواردی که محل اثر نیرو یک سطح کوچک از جسم است و انتشار نیرو را در روی سطح نمی‌دانیم، می‌توان تمام نیروها را با یک نیرو جایگزین کرده و نقطهٔ اثر آن نیرو را در جسم (که یک نقطه است) نقطه اثر تمام نیروها فرض کرد، بدیهی است که در طبیعت نیروئی وجود ندارد که بر یک ذره هندسی وارد شود ولی این فرض و ایده‌آل کردن نیرو در سهولت محاسبات بسیار موثر است و همانطور که بعداً در تعادل نیروها خواهیم دید استفاده از نیروهای متمرکز در جسم در مباحث استاتیک توصیه می‌گردد.

بردارها و کمیت‌های غیرجبری

کمیت‌های فیزیکی به دو دسته اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

کمیت اسکالر (عددی، نرده‌ای) کمیتی است که فقط دارای یک مقدار است. نمونه‌های چنین کمیت‌هایی: جرم، طول، زمان و درجه حرارت می‌باشند.

در مقابل کمیت‌های اسکالر، کمیت‌های برداری قرار دارند که برای توصیف آنها بیش از یک مقدار جبری لازم است.مثلاً برای بیان سرعت یک ذره مادی باید اطلاعات زیر داده شوند:

۱ـ مقدار آن کمیت بر حسب واحد اندازه‌گیری (مثلاً فوت بر ثانیه یا متر بر ثانیه و ...)

۲ـ جهت حرکت ذره مادی (برای این منظور می‌توان از یک دستگاه مختصات ثابت استفاده کرد)، به این ترتیب که از یک قطعه خط استفاده می‌کنیم که طول آن با واحد معین اندازه‌گیری طول، مساوی مقدار داده شده در قسمت "۱" باشد (مقدار سرعت) و آن را بوسیلهٔ یک پیکان ($\longrightarrow$) جهت‌دار می‌کنیم به طوریکه سر پیکان جهت حرکت را نشان بدهد. این قطعه خط را بردار و امتداد این بردار را راستا یا محمل آن بردار می‌نامیم. کمیت‌هائی مثل سرعت، شتاب، نیرو و گشتاور را که علاوه بر مقدار، ***راستا و جهت*** نیز دارند ***کمیت‌برداری*** می‌نامند.

بردارها بر حسب کاربرد سه نوعند:

۱. بردار آزاد

بردار آزاد، برداری است که می‌توان آنرا بدون تغییر اثر به هر نقطهٔ فضا انتقال داد به شرطی که راستای آن موازی راستای اولیه، در همان جهت و با همان مقدار اولیه باشد. دو بردار آزاد را در صورتیکه موازی، هم جهت و از نظر مقدار مساوی باشند، ***همسنگ*** می‌نامند. مانند : بردار گشتاور، برآیند نیرو و کوپل (جفت نیرو).

۲. بردار لغزان

بردار لغزان، برداری است که می‌توان آنرا با حفظ جهت اولیه به هر نقطه از راستای آن بردار منتقل کرد، اگر دو بردار لغزان بر روی یک راستا، دارای یک جهت و یک مقدار باشند مساوی‌اند، چنین دو برداری را ***هم‌ارز*** می‌نامند. مانند : بردار نیرویی که به یک جسم صلب اثر می‌کند.

۳. بردار بسته

بردار بسته، برداری است که متعلق به یک موقعیت واحد است و به هیچ وجه قابلیت جابجایی ندارد. نمونه بردار بسته، بردار مکان یک ذره مادی در دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد.

مثال۴: کدامیک از کمیات زیر برداری نمی‌باشند؟

۱) نیرو ۲) ممان اینرسی ۳) شتاب ۴) گشتاور نیرو

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ممان اینرسی به عنوان یکی از خواص سطوح یک کمیت اسکالر با واحد m^4 می‌باشد.

جبر بردارها

بردار، قدر مطلق (مقدار یا اساس) و حاصلضرب بردار در یک عدد جبری

همانطور که قبلاً گفته شد یک بردار را توسط قطعه خط مستقیم و محدود نشان می‌دهیم. سهم یا نشان هر قطعه خط، جهت بردار را نشان خواهد داد. طول قطعه خط که نماینده مقدار جبری آن کمیت است مقدار، اساس و یا مقدار مطلق آن بردار نامیده می‌شود. توجه نمائید که منظور از مقدار یک بردار، عدد مثبت طول آن می‌باشد. لذا مقدار یک بردار مانند $\vec{A}$ همیشه مثبت است و با $|\vec{A}|$ نمایش داده می‌شود.

برای به دست آوردن مقدار برداری مانند: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

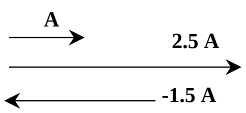
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

« شکل ۲ »

بردارها را با حروف بزرگ یا کوچک لاتین و خط سهمی داری در بالای آن " $\vec{A}$ "، و یا خطی ساده در زیر آن " $\underline{A}$ " و گاهی با نامبردن حروف اول و آخر قطعه خط نماینده بردار نشان می‌دهیم، به نحوی که جهت بردار از طرف حرف سمت چپ به طرف حرف سمت راست باشد (مثل بردار $\overrightarrow{AB}$ یا بردار $\underline{AB}$).

توضیح: در متن درس بردار دلخواه A با نماد $\underline{A}$ نمایش داده شده است. ولی در اکثر تست‌های انتهای فصل و پاسخ‌های تشریحی از نماد $\vec{A}$ استفاده شده است. به هر حال دو نماد $\underline{A}$ و $\vec{A}$ با هم تفاوتی ندارند.

بنا به تعریف، حاصل ضرب یک عدد جبری α در یک بردار آزاد $\underline{A}$، برداری است که راستای آن موازی راستای بردار $\underline{A}$ و مقدار آن برابر حاصل‌ضرب مقدار بردار $|\underline{A}|$ و عدد α است و جهت آن در جهت $\underline{A}$ می‌باشد اگر α مثبت باشد و در جهت عکس $\underline{A}$ می‌باشد اگر α منفی باشد. توجه کنید که اندازه بردار $-\underline{A}$ مساوی اندازه بردار $\underline{A}$ و در جهت عکس آن $\underline{A}$ است. مانند :

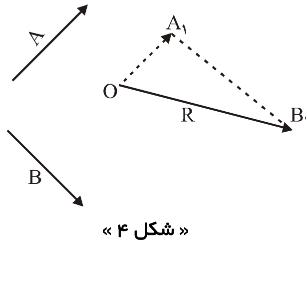


« شکل ۳ »

$$\begin{cases} \underline{A} \\ \alpha = -1/5 \\ \alpha = 2/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \\ A' = A \times (-1/5) \\ A'' = A \times (2/5) \end{cases}$$

جمع و تفریق بردارها

جمع بردارها

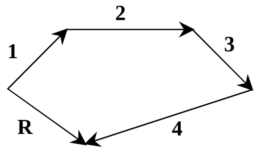


« شکل ۴ »

جمع بردارهای آزاد طبق قانون مثلث به این ترتیب صورت می‌گیرد که فرض می‌کنیم دو بردار آزاد $\underline{A}$ و $\underline{B}$ داشته باشیم. از نقطه اختیاری O بردار $\underline{OA_1}$ همسنگ بردار A و از نقطهٔ A_1 بردار $\underline{A_1B_1}$ را همسنگ بردار $\underline{B}$ رسم می‌کنیم. بنا به تعریف، مجموع دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بردار $\underline{OB_1} = \underline{R}$ می‌باشد لذا : $\underline{A} + \underline{B} = \underline{R}$.

ملاحظه می‌شود که: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} = \underline{R}$

نکته ۳: برای تعمیم تعریف فوق در حل مسائل می‌توان به اختصار گفت برای جمع n بردار باید بردارها را متوالیاً دنبال یکدیگر ترسیم کرده، در این حالت برداری که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار آخری وصل کند بردار مجموع یا بردار برآیند نام دارد، مانند بردار برآیند در شکل«۵».



« شکل ۵ »

جمع بردارها از قانون جابه‌جایی‌پذیری پیروی می‌کند. این جمع کردن را می‌توان به بیش از دو بردار نیز تعمیم داد، به این صورت که جمع سه بردار $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ بدین ترتیب قابل انجام است:

$$(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{R}+\underline{C} \quad ; \quad \underline{A}+\underline{B}=\underline{R}$$

و به سادگی ملاحظه می‌شود که:

$$(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=(\underline{A})+(\underline{B}+\underline{C})=(\underline{A}+\underline{C})+\underline{B}$$

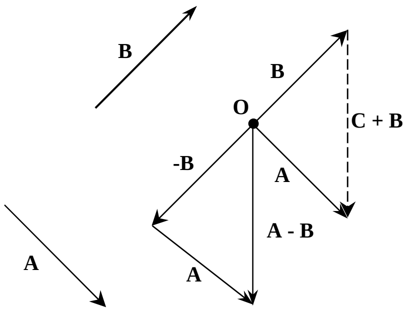
تفریق بردارها

عبارت است از: $\underline{A}-\underline{B}=\underline{A}+\underline{(-B)}$، یعنی برای تفریق بردار $\underline{B}$ از بردار $\underline{A}$ در واقع بردار $(-۱)\underline{B}=-\underline{B}$ را با بردار $\underline{A}$ جمع می‌کنیم. به بیان دیگر: $\underline{C}=\underline{A}-\underline{B}$ به این معنی است که:

$$\underline{C}+\underline{B}=\underline{A}$$

بنابراین:

$$\underline{OA}-\underline{OB}=\underline{BA}$$

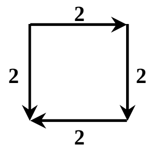


« شکل ۶ »

توجه کنید که مجموع و تفاضل دو بردار در صفحهٔ آن دو بردار است. همچنین :

$$\alpha\underline{A}+\beta\underline{A}=(\alpha+\beta)\underline{A}$$

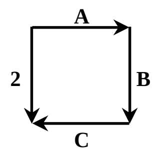
مثال۵: برآیند نیروهای شکل کدامست؟



۱) ۲ ۲) صفر

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به جهت نیروها، برآیند سه بردار نیروی A، B و C مقدار ۲ می‌باشد.



نکته ۴: برای جمع دو بردار و پیدا کردن برآیند آنها از قانون کسینوس‌ها در مثلث استفاده می‌شود :

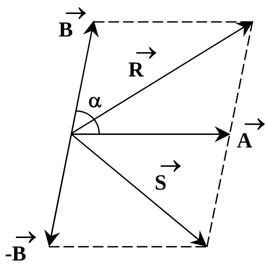
$$|\underline{R}|^۲=|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲+۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}(A,B)$$

نکته ۵: چنانچه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با یکدیگر زاویه α بسازند، اندازه بردار حاصل جمع از رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد.

$$|\underline{R}|=|\underline{A}+\underline{B}|=\sqrt{|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲+۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}\alpha}$$

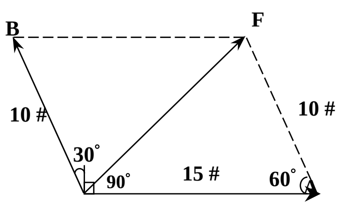
در این حالت اندازهٔ بردار $\vec{A}-\vec{B}$ برابر است با :

$$|\underline{S}|=|\underline{A}-\underline{B}|=\sqrt{|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲-۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}\alpha}$$



« شکل ۷ »

مثال۶: جمع دو بردار داده شده در شکل مقابل را پیدا کنید؟



پاسخ : از قانون کسینوسها در مثلث داریم:

$$|\underline{F}|^۲=(۱۵)^۲+(۱۰)^۲-۲(۱۵)(۱۰)\text{Cos}۶۰°$$

$$\Rightarrow|\underline{F}|=۱۳/۲^{\#}$$

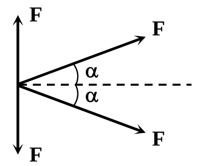
مثال۷: سه بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{V}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ در نظر است. حاصل $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3)$ کدامست؟

۱) 0 ۲) $\vec{k}$ ۳) $6\vec{i} - 4\vec{j}$ ۴) $6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۳» جمع و تفریق بردارهای V_1 ، V_2 و V_3 به صورت زیر انجام می‌گردد:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (3\vec{i} - \vec{k}) + (-2\vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$

مثال۸: شرط آنکه اندازه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل برابر یکی از آنها باشد آن است که:

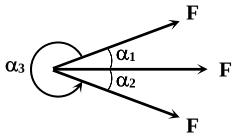


۱) $\alpha = 45^\circ$ ۲) $\alpha = 60^\circ$

۳) $\alpha = 90^\circ$ ۴) $\alpha = 120^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» برآیند دو نیروی در یک راستا صفر است. شرط آنکه برآیند دو نیروی مایل برابر یکی از آن دو گردد، آن است که زاویه بین دو نیرو 120° یعنی $\alpha = 60^\circ$ باشد.

مثال۹: شرط آنکه برآیند سه نیروی نشان داده شده در شکل صفر باشد، آن است که:



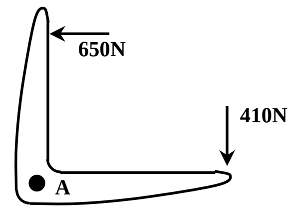
۱) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ۲) $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

۳) $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ ۴) $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» چون سه نیرو هم اندازه‌اند، لذا در صورتی برآیند آنها صفر خواهد شد که شکل برداری آنها تقارن کامل داشته باشد، یعنی:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$$

مثال۱۰: در اهرم 90° شکل زیر، مقدار نیروی وارد بر محور A کدامست؟



۱) $645N$

۲) $768/5N$

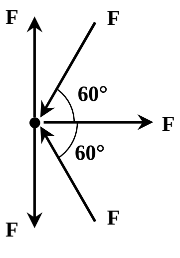
۳) $957/1N$

۴) $1380N$

پاسخ: گزینه «۲» نیروی وارد بر محور A برابر است با برآیند دو نیروی وارده، لذا:

$$R = \sqrt{650^2 + 410^2} = 768/5N$$

مثال۱۱: برآیند بردارهای زیر کدامست؟



۱) F

۲) $F\sqrt{2}$

۳) $F\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» برآیند دو برداری عمودی صفر است. برآیند دو بردار مایل بدلیل زاویه 120° بین آنها، برابر F و در خلاف جهت بردار F افقی موجود خواهد شد، لذا:

$$R = F - F = 0$$

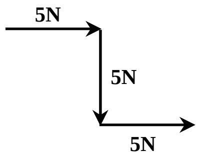
مثال۱۲: دو نیروی ۵ و ۱۰ نیوتنی در راستای افقی (به طرف راست) به نقطه A وارد می‌شوند. برای اینکه نقطه مورد نظر جابجایی نداشته باشد، چه نیرویی (از لحاظ مقدار و جهت) به سیستم فوق اضافه گردد؟

۱) نیروی $10\,N$ عمود بر راستای افق ۲) نیروی $15N$ عمود بر راستای افق

۳) نیروی $15N$ در راستای افق به طرف چپ ۴) نیروی $5\sqrt{5}N$ در راستای افق به طرف چپ

پاسخ: گزینه «۳» شرط تعادل نقطه مورد نظر این است که برآیند نیروها صفر گردد. با توجه به وجود نیروی $10+5\,N$ در راستای افق به طرف راست، وجود نیروی $15N$ به طرف چپ باعث ایجاد تعادل می‌گردد.

مثال۱۳: برآیند نیروهای ۵ نیوتنی شکل کدامست؟

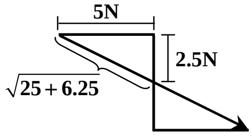


۱) $\sqrt{۳۱/۲۵}$　　۲) $۲\sqrt{۳۱/۲۵}$

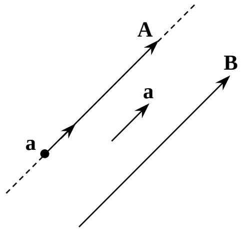
۳) $\sqrt{۶/۷۵}$　　۴) $۲\sqrt{۶/۷۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به روش مثلثی برآیند سه نیروی ۵ نیوتنی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$R = ۲\times\sqrt{۲۵+۶/۲۵} = ۲\sqrt{۳۱/۲۵}$$



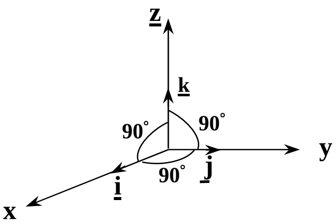
بردار یکه (واحد)



« شکل ۸ »

بردار آزاد $\underline{A}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بردار $\underline{a}$ بر راستای بـردار $\underline{A}$ قـرار گرفتـه و طـول واحـد داشته باشد. بردار $\underline{a}$ به بردار یکه یا بردار واحد در جهت بردار $\underline{A}$ معـروف است. ملاحظـه مـی‌شـود کـه : $\underline{A} = |\underline{A}|\underline{a}$ یا به طور معادل داریم : $\underline{a} = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{۱}{|\underline{A}|}\times\underline{A}$. بنابراین هـر بـرداری را مـی‌تـوان بـه صـورت حاصل ضرب مقدار آن بردار در بردار واحد در جهت آن نوشت. در این صورت بردار $\underline{a}$ یک بردار آزاد است و می‌توان نوشت:

$$\underline{B} = |\underline{B}|\underline{a}$$



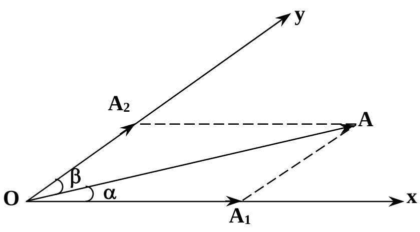
« شکل ۹ »

اگر دستگاه مختصات سه بعدی Oxyz را در نظر بگیریم، گویند محورهای ox، oy و oz، دستگاه مسـتقیم درست کرده‌اند اگر نحوه استقرار محورها به گونه‌ای باشد که وقتی شخصی روی محور Oz ایستاده و پای او به طرف O و سرش به طرف جهت مثبت محور Z باشد حرکت محور x بـه طـرف محـور y از طـرف زاویـه کوچکتر از ۱۸۰° در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) باشد. در غیر این صورت دستگاه معکوس است. در محاسبات معمولاً از سیستم محورهای مختصات مستقیم استفاده خواهد شد. بردار یکه در جهت x به $\underline{i}$، در جهت y به $\underline{j}$ و در جهت z به $\underline{k}$، نمایش داده خواهند شد.

تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌ها

عمل عکس جمع کردن بردارها را تجزیه می‌نامیم.

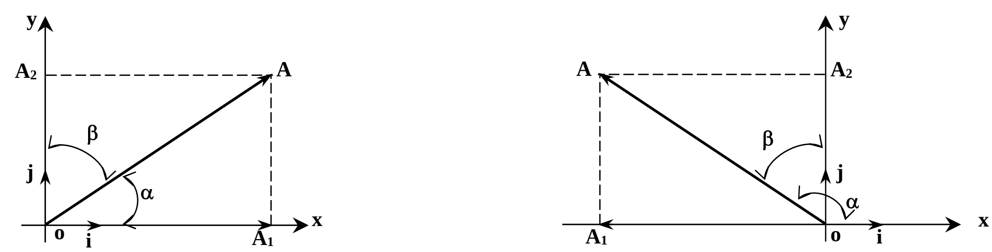
تجزیه یک بردار به دو مؤلفه



« شکل ۱۰ »

فرض کنیم بردار $\underline{A}$ و دو خط مشخص و متقاطع ox و oy داده شده باشد، به گونه‌ای که بـردار $\underline{A}$ در صفحه oxy قرار داشته باشـد، از محـل تقـاطع دو خـط ox و oy (نقطـه O در شـکل مقابـل) برداری همسنگ بردار $\underline{A}$ رسم می‌کنیم.

توجه کنید که چون بردار $\underline{A}$ و خطوط ox و oy داده شده‌اند، زاویه بین بـردار و محـور OX (زاویـه) مشـخص است. از نقطـهٔ A (انتهـای بـردار $\underline{A}$) خطوطی به موازات ox و oy رسم می‌کنیم تا به ترتیب oy و ox را در نقاط $A_۲$ و $A_۱$ قطع کننـد. ملاحظـه مـی‌شـود کـه: $\underline{A} = \underline{OA_۱} + \underline{OA_۲}$، بنابراین بردار $\underline{A}$ در دو جهت داده شدهٔ ox و oy تجزیه شده است. در صورتیکه خطوط x و y موازی و با امتداد $\underline{A}$ متقاطع باشند ایـن تجزیـه امکـان ندارد و در صورتیکه هر سه خط موازی باشند مسئله بینهایت جواب دارد. اکنون از راه مثلثات می‌توان مقدار و یا طول هر یک از بردارهای $\underline{OA_۱}$ و $\underline{OA_۲}$ را پیدا کرد. اگر دو محور ox و oy برهم عمود باشند، $\underline{OA_۱}$ و $\underline{OA_۲}$ را مؤلفه یا ***تصویرهای برداری قائم*** مـی‌نامنـد، اگـر بردارهـای یکـه محورهـای مذکور به ترتیب $\underline{i}$ و $\underline{j}$ باشند، داریم: $\underline{OA_۱} = |\underline{A}|\cos\alpha\,\underline{i}$ و $\underline{OA_۲} = |\underline{A}|\sin\alpha\,\underline{j}$ یا $\underline{OA_۲} = |\underline{A}|\cos\beta\,\underline{j}$

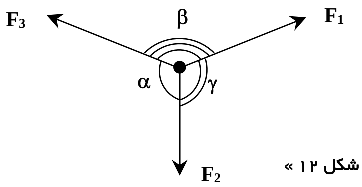


« شکل ۱۱ »

به علاوه: $\cos(\underline{A},x)=\cos\alpha=\ell$ و $\cos(\underline{A},y)=\cos\beta=m$ به ***کسینوس‌های هادی*** بردار $\underline{A}$ موسومند. ملاحظه می‌شود که: $\underline{A}=y\vec{j}$.
همچنین اگر مختصات نقطه $A(x,y)$ باشد : $\overline{OA_1}=x\underline{i}$, $\overline{OA_2}=y\underline{j}$ لذا: $\underline{A}=x\underline{i}+y\underline{j}$. در صورتیکه $\underline{A}$ موازی محور oy باشد $A=yj$ و در صورتیکه $\underline{A}$ موازی محور ox باشد $\underline{A}=x\underline{i}$ می‌باشد.

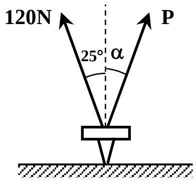
نکته ۶: برای حل مسائل سه بعدی که در آن ۱ یا ۲ مؤلفه اصلی مجهول است می‌توان از رابطه روبرو استفاده کرد: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
یعنی مجموع مربع کامل تمامی کسینوس‌های هادی، مساوی با ۱ است.

نکته ۷: زمانی که سه نیرو در یک نقطه متقاطع باشند، قانون سینوس‌ها به صورت مقابل استفاده می‌شود: $\dfrac{F_1}{\sin\alpha}=\dfrac{F_2}{\sin\beta}=\dfrac{F_3}{\sin\gamma}$



« شکل ۱۲ »

مثال۱۴: اگر برآیند وارده بر میخ نشان داده شده در امتداد عمود باشد، مطلوبست مقدار زاویه α که به ازاء آن، نیروی P حداقل باشد؟

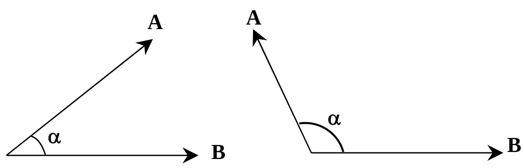


۱) 30°
۲) 60°
۳) 90°
۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» در صورتی که برآیند دو نیروی P و ۱۲۰ نیوتنی در امتداد عمود باشد، پس مولفه افقی برآیند صفر است. لذا:
$P\sin\alpha=120\sin25^\circ \Rightarrow P\times\sin\alpha=$ عدد ثابت
برای اینکه P حداقل مقدار ممکن باشد، باید $\sin\alpha$ حداکثر مقدار را داشته باشد که در ازاء $\alpha=90^\circ$ اتفاق می‌افتد.

حاصلضرب داخلی (جبری یا عددی) دو بردار

تاکنون عمل جمع دو بردار را تعریف کرده‌ایم. حال یک نوع ترکیب به نام ضرب داخلی (عددی یا جبری) را برای دو بردار تعریف می‌کنیم. بنا به تعریف، ضرب داخلی دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ به صورت $\underline{A}.\underline{B}$ نمایش داده شده و نتیجه آن عددی جبری است که مقدار آن برابر حاصلضرب مقدار دو بردار در کسینوس زاویهٔ کوچک بین دو بردار است، یعنی:
$$\underline{A}.\underline{B}=|\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha$$



« شکل ۱۳ »

ملاحظه می‌شود که این عدد جبری ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد، بسته به این که زاویه α کمتر، بیشتر و یا مساوی 90° باشد، بنابراین:
$\underline{i}.\underline{i}=\underline{j}.\underline{j}=\underline{k}.\underline{k}=1 \quad , \quad \underline{i}.\underline{k}=\underline{i}.\underline{j}=\underline{k}.\underline{j}=0$
به علاوه، ضرب داخلی دو بردار جابجایی‌پذیر است: $\underline{A}.\underline{B}=\underline{B}.\underline{A}$
رابطه روبرو در ضرب داخلی بردارها صادق است: $\underline{A}.(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}.\underline{B}+\underline{A}.\underline{C}$
فرض کنید بردارهای $\underline{A}$ و $\underline{B}$ به صورتهای: $\underline{A}=A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}$, $\underline{B}=B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}$ داده شده باشند، در اینصورت ضرب داخلی دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بر حسب مولفه‌ها به صورت: $\underline{A}.\underline{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$ تعریف می‌گردد. بنابراین:
$\underline{A}.\underline{A}=|\underline{A}||\underline{A}|\cos(0)=|\underline{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$.
اگر دو بردار غیر صفر $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بر هم عمود باشند: $\underline{A}.\underline{B}=0$ و بالعکس یعنی: $\underline{\mathbf{A}}.\underline{\mathbf{B}}=0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}}\perp\underline{\mathbf{B}}$

مثال۱۵: در صورتیکه دو بردار $A(1,2,1)$ و $B(-1,0,Z)$ بر یکدیگر عمود باشند، مقدار Z کدامست؟

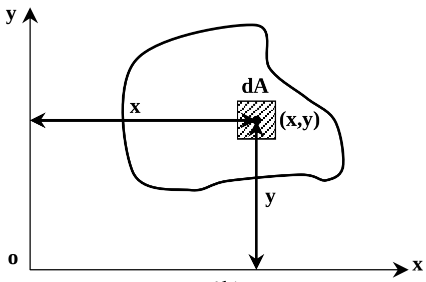
۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» شرط تعامد آن است که ضرب داخلی ۲ بردار صفر باشد، لذا:
$\vec{A}.\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=(1\times-1)+(2\times0)+(1\times Z)=0 \Rightarrow -1+Z=0 \Rightarrow Z=1$

فصل چهارم

« خواص هندسی سطوح »

لنگر استاتیک (لنگر اول سطح) و مرکز سطح



« شکل ۱ »

سطح مستوی A و محورهای x و y را در این صفحه فرض میکنیم. برای هر جزء (سطح بی‌نهایت کوچک) dA، لنگر استاتیک نسبت به محور x ها به صورت $dM_x = ydA$ و نسبت به محور yها به صورت : $dM_y = xdA$ بیان می‌گردد. بنا به تعریف لنگر استاتیک تمام سطح A نسبت به محورx ها: $M_x = \int_A ydA$ و نسبت به محور y ها $M_y = \int_A xdA$ می‌باشد.

طبق تعریف فوق ملاحظه می‌شود که لنگر استاتیک یک سطح نسبت به یک محور ممکن است مثبت، منفی و یا حتی صفر باشد. لنگر استاتیک یک سطح نسبت به محور تقارن سطح صفر می‌باشد و نیز ملاحظه می‌گردد که اگر سطح (A) را به سطوح A_1 و A_2 و ... و A_n تجزیه کنیم به نحوی که هیچ دو سطح آن با هم اشتراک نداشته باشند رابطه:

$$M_x(A) = M_x(A_1) + M_x(A_2) + ... + M_x(A_n)$$

صادق است. واحد اندازه‌گیری لنگر استاتیک در سیستم متریک m^3 می‌باشد. فرض می‌کنیم که در سطح A یک میدان فشار یکنواخت وجود دارد، اگر این فشار را $P=1$ فرض کنیم $PdA=dF$ نیروی وارد بر سطح بی‌نهایت کوچک dA و $ypdA= ydF$ لنگر این نیرو، نسبت به محور x خواهد بود. بنابراین در این میدان فشار، نقطه‌ای با مختصات $(\bar{x},\bar{y})$وجود دارد که مرکز فشار این میدان بوده و خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{\int xpdA}{\int PdA} = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{\int xdA}{A} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\int ydA}{A}$$

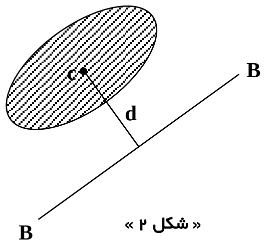
در اینجا A مساحت شکل می‌باشد. در مورد سطح A این نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ به ***مرکز سطح*** موسوم است. در صورتیکه دستگاه مختصات از نقطه $\bar{y}$ و $\bar{x}$ گذشته باشد $\bar{x} = \bar{y} = 0$ است.

$$M_x = \int ydA = 0 \quad \text{و} \quad M_y = \int xdA = 0$$

لنگرهای استاتیک نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح صفر می‌باشند، زیرا مرکز سطح، نقطه واحدی از سطح (حقیقی یا مجازی) می‌باشد که محورهای تقارن سطح از آن نقطه عبور می‌کنند.

از طرفی در صورتیکه مرکز سطح (x_C, y_C) یا $(\bar{x},\bar{y})$ معلوم باشد، لنگر استاتیک سطح نسبت به محور مختصاتی مثل y,x مطابق روابط بالا به صورت $M_x = \int ydA = y_c A \, , M_y = \int xdA = x_c A$ قابل محاسبه خواهد بود. ملاحظه میشود که نقطهٔ(x_C,y_C) که مرکز سطح است بستگی به انتخاب دستگاه مختصات نخواهد داشت و اگر دستگاه مختصات را عوض کنیم گرچه مقادیر عددی y_c و x_c عوض میشود ولی نقطه بدست آمده در سطح همان نقطه اولیه خواهد بود.

نکته ۱: در صورتی که سطح، محور تقارنی داشته باشد و مثلاً محور y محور تقارن آن باشد $M_y = \int xdA = 0$ و $\bar{x} = 0$ مرکز سطح روی آن محور قرار خواهد گرفت. در صورت وجود دو محور تقارن، مرکز سطح در نقطهٔ تقاطع آنها خواهد بود.



« شکل ۲ »

نکته ۲: در حالت کلی لنگر استاتیک یک سطح نسبت به محور دلخواه BB مطابق شکل، برابر است با حاصلضرب فاصلهٔ عمودی مرکز سطح تا محور BB ضربدر مساحت شکل.

$$M_B = A.d$$

با توجه به انواع سطوح مورد نظر در این بحث، برای یافتن موقعیت مرکز سطح به سه روش زیر عمل می‌کنیم :

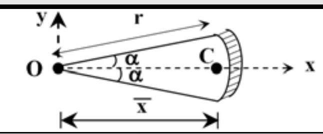
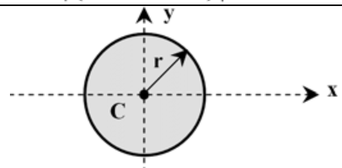
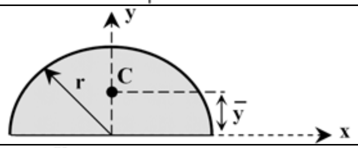
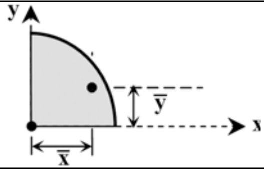
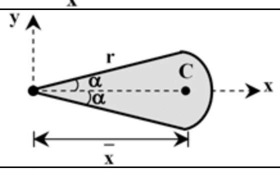
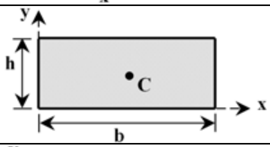
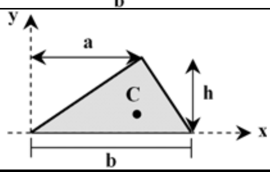
الف) موقعیت مرکز سطح سطوح ساده و منظم هندسی مانند مربع،مستطیل، دایره، مثلث و ... که در جداول و ضمیمه‌های کتب مهندسی قابل دسترسی هستند (جدول زیر).

ب) موقعیت مرکز سطسح سطوح نامنظم هندسی با استفاده از روابط $\bar{x} = \frac{\int xdA}{\int dA}$ و $\bar{y} = \frac{\int ydA}{\int dA}$ محاسبه می‌گردد.

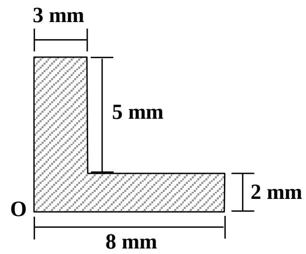
ج) برای یافتن مرکز سطح سطوح مرکب و منظم هندسی، لازم است که آن سطح را به سطوح ساده و منظم هندسی (بند الف) تقسیم کرده و با استفاده از روش میانگین وزنی، موقعیت مرکز سطح به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i}$$

در محاسبه موقعیت مرکز سطح انتخاب و معرفی یک دستگاه محورهای دو بعدی ضروری است. مرکز سطح را مرکز تقارن نیز می‌گویند.

اسم سطح	مختصات مرکز سطح		شکل
	$\bar{y}$	$\bar{x}$	
کمان دایره	۰	$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	
دایره	۰	۰	
نیم‌دایره	$\bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$	۰	
ربع دایره	$\bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$	$\bar{x} = \frac{۴r}{۳\pi}$	
قطاع دایره	۰	$\bar{x} = \frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	
مستطیل	$\bar{y} = \frac{h}{۲}$	$\bar{x} = \frac{b}{۲}$	
مثلث	$\bar{y} = \frac{h}{۳}$	$\bar{x} = \frac{a+b}{۳}$	

مثال۱: موقعیت مرکز سطح شکل مقابل با توجه به دستگاه xoy انتخاب شده کدام است؟



۱) $\begin{cases} x_c = ۲/۳۱ \\ y_c = ۳/۱ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x_c = ۰/۹۶ \\ y_c = ۲/۱۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x_c = ۲/۷۹ \\ y_c = ۲/۶۹ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x_c = ۱/۱۸ \\ y_c = ۱/۱۲ \end{cases}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» سطح مرکب شکل را به دومستطیل (۲×۸) و (۵×۳) تقسیم می‌کنیم.

با توجه به روابط میانگین وزنی و موقعیت مرکز سطح دو مستطیل نسبت به نقطه O خواهیم داشت:

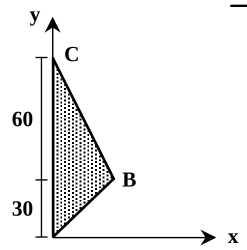
$$x_c\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i\bar{x}_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i} = \frac{[(۸\times۲)\times۴+(۳\times۵)\times۱/۵]}{(۸\times۲)+(۳\times۵)} = ۲/۷۹ \quad \text{و} \quad y_c\bar{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i\bar{y}_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i} = \frac{[(۸\times۲)\times۱+(۳\times۵)\times۴/۵]}{(۸\times۲)+(۳\times۵)} = ۲/۶۹$$

مثال۲: در کدامیک از سطوح زیر، مرکز سطح نقطه‌ای مجازی می‌باشد؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در گزینه چهارم مرکز سطح، نقطه‌ای خارج از سطح و به صورت مجازی می‌باشد. زیرا مرکز سطح این شکل که در اثر تقاطع محورهای تقارن به وجود می‌آید خارج از شکل است.

مثال۳: عرض مرکز سطح شکل زیر کدامست؟



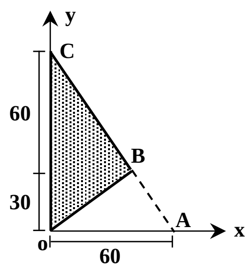
۱) ۴۰

۲) ۳۰

۳) ۳۵

۴) ۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» شکل داده شده را به دو شکل زیر تقسیم می‌نماییم:



$$(O\overset{\triangle}{A}C - O\overset{\triangle}{A}B)$$

$$\bar{y} = \frac{A_۱y_۱ - A_۲y_۲}{A_۱ - A_۲} = \frac{(\frac{۶۰\times۹۰}{۲}\times۳۰)-(\frac{۶۰\times۳۰}{۲}\times۱۰)}{(\frac{۶۰\times۹۰}{۲}-\frac{۶۰\times۳۰}{۲})} = ۴۰\,mm$$

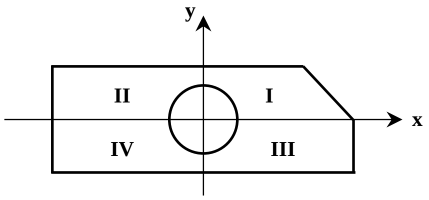
مثال۴: موقعیت $\bar{x}$ کمانی از دایره با شعاع π و زاویه مرکزی ۶۰° کدامست؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۳π ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» موقعیت $\bar{x}$ کمان دایره به صورت: $\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ می‌باشد که در این رابطه α نصف زاویه کمان است:

$$\bar{x} = \frac{\pi.\sin۳۰^\circ}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۶\times\pi\times\frac{۱}{۲}}{\pi} = ۳$$

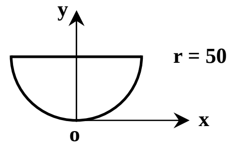
مثال۵: موقعیت مرکز سطح شکل زیر در کدام ربع دستگاه محورهای مختصات قرار دارد؟



۱) I
۲) II
۳) III
۴) IV

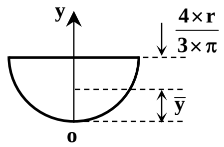
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه مرکز سطح، مرکز تقارن هندسی نیز می‌باشد، لذا موقعیت مرکز سطح در شکل در ناحیه IV قرار خواهد گرفت.

مثال۶: موقعیت $\bar{y}$ شکل زیر کدامست؟



۱) ۲۸/۸ ۲) ۲۱/۲
۳) ۲۵ ۴) ۲۶/۳

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل، مقدار $\bar{y}$ به صورت زیر بدست می‌آید:



$$\bar{y} = ۵۰ - \frac{۴\times ۵۰}{۳\times \pi} = ۲۸/۸$$

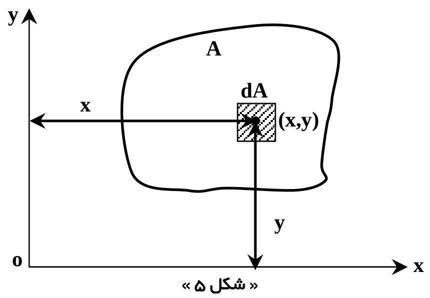
نکته ۳: انحرافی این مثال این است که نیمدایره به صورت وارونه است و در نتیجه جواب فرمول از عدد ۵۰ کم می‌شود.

ممان اینرسی (لنگر جبر) و حاصلضرب اینرسی

سطح مستوی A را در صفحه xoy در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، ممان اینرسی سطح بی‌نهایت کوچک dA نسبت به محور x برابر $dI_{xx} = y^۲dA$ است. ممان اینرسی تمام سطح A، مجموع این لنگرهای بی‌نهایت کوچک است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$I_{xx} = \int y^۲dA$$

و به همین صورت ممان اینرسی سطح نسبت به محور y ها : $I_{yy} = \int x^۲dA$ خواهد بود. حاصلضرب اینرسی این سطح (I_{xy}) به صورت $I_{xy} = \int xydA$ تعریف می‌گردد.



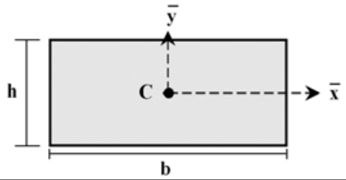
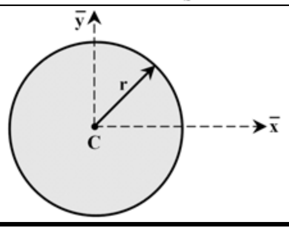
« شکل ۵ »

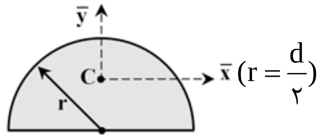
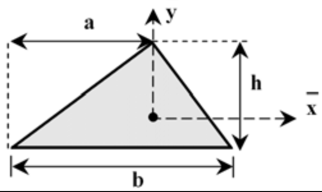
ملاحظه می‌شود که ممان‌های اینرسی همیشه مثبت هستند چون سطح مثبت dA در عدد مثبت $y^۲$ و $x^۲$ ضرب میشود و هر چه سطح از محور مختصات دورتر باشد اثر آن در بالابردن ممان اینرسی نسبت به آن محور بیشتر خواهد بود. (ممان‌های اینرسی به هیچ وجه صفر نمی‌باشند حتی نسبت به محور تقارن سطح)

حاصلضرب اینرسی میتواند مثبت، منفی و یا صفر باشد. واحد اندازه‌گیری ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی $m^۴$ می باشد.

در صورتیکه یکی از دو محور x و y محور تقارن شکل باشند $I_{xy} = ۰$ است. در جداول و ضمیمه‌ها مقادیر ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای مختصاتی که از مرکز سطح میگذرد داده شده‌اند. در صورتیکه این لنگرها نسبت به محورهایی غیر از آنها مورد نیاز باشند باید آنها را حساب کرد.

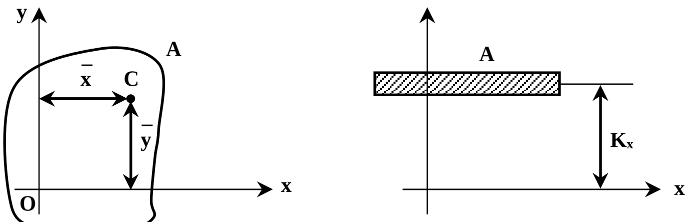
نکته ۳: ممان اینرسی یک شکل مرکب عبارت است از مجموع ممان اینرسی های اجزای ساده یعنی: $I = \sum_{i=۱}^{n} I_i$

$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{bh^۳}{۱۲}$, $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{hb^۳}{۱۲}$	
$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\pi r^۴}{۴} = \frac{\pi d^۴}{۶۴}$ $J_c = \frac{\pi r^۴}{۲} = \frac{\pi d^۴}{۳۲}$	 $(r = \frac{d}{۲})$

$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\pi r^۴}{۸} = \frac{\pi d^۴}{۱۲۸}$ و همینطور برای ربع دایره داریم : $I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\pi r^۴}{۱۶} = \frac{\pi d^۴}{۲۵۶}$	
$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{bh^۳}{۳۶} \quad , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{hb^۳}{۴۸}$	

شعاع ژیراسیون

فرض کنید المان کوچکی از سطح A دارای ممان اینرسی I_{xx} و I_{yy} باشد. حال نوار باریکی از آن را در نظر گرفته که فاصلهٔ آن با محور x ها برابر K_x است در این صورت و بنا به تعریف گشتاور داریم: $I_{xx} = K_x^۲ A$ که K_x به شعاع ژیراسیون معروف است.

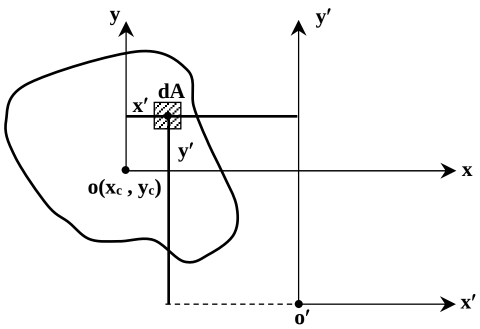


« شکل ۸ »

$$I_{xx} = K_x^۲ A \quad , \quad I_{yy} = K_y^۲ A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \\ K_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \end{cases}$$

انتقال محورهای مختصات

فرض کنیم که ممان‌های اینرسی سطحی نسبت به محورهای مختصات xoy که از مرکز سطح جسم میگذرند داده شده باشند (حاصلضرب اینرسی نسبت به این محورها صفر است) مقدار این لنگرها نسبت به محورهای مختصات $x'o'y'$ که با محورهای $x\ o\ y$ موازی هستند، طبق قضیه انتقال محورها عبارتند از:



« شکل ۹ »

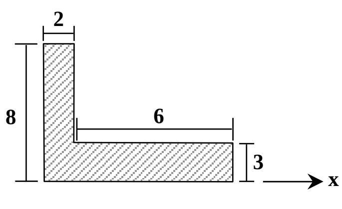
$$I_{x'x'} = y_c^۲ A + I_{xx} \quad ; \quad I_{y'y'} = x_c^۲ A + I_{yy}$$

یعنی ممان اینرسی یک سطح نسبت به هر محور دلخواه موازی برابر است با ممان اینرسی سطح نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح به اضافهٔ مساحت سطح ضربدر فاصلهٔ دو محور موازی به توان دو. همچنین در مورد حاصلضرب اینرسی خواهیم داشت:

$$I_{x'y'} = x_c y_c A + I_{xy}$$

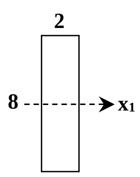
($I_{xy} = ۰$ حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح صفر می‌باشد)

مثال۷: مطلوبست مقدار ممان اینرسی سطح مورد نظر حول محور x ها؟

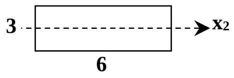


۱) ۳۶۴/۷
۲) ۳۴۱/۲
۳) ۳۸۰/۱
۴) ۳۹۵/۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» همانطور که مشخص است ممان اینرسی دو مستطیل سازنده سطح مرکب فوق، نسبت به محورهای افقی گذرنده از مرکز سطح آنها قابل دستیابی هستند. یعنی:



$$I_{x_۱x_۱} = \frac{۱}{۱۲}(۲)(۸^۳) = ۸۵/۳$$



$$I_{x_۲x_۲}=\frac{۱}{۱۲}(۶)(۳^۳)=۱۳/۵$$

از آنجایی که ممان اینرسی نسبت به محوری خواسته شده است که انتقال یافته موازی محورهای $x_۱$ و $x_۲$ می‌باشد، لذا از قضیه انتقال استفاده کرده و ممان اینرسی هر مستطیل ساده را نسبت به محور x می‌یابیم:

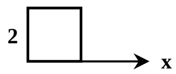
$$I_{xx}(\text{مستطیل } ۸\times۲)=I_{x_۱x_۱}+(۸\times۲)\times(۴^۲)=۳۴۱/۳$$

$$I_{xx}(\text{مستطیل } ۶\times۳)=I_{x_۲x_۲}+(۶\times۳)\times(۱/۵^۲)=۵۴$$

ممان اینرسی سطح مرکب برابر است با مجموع ممان اینرسی‌های سطوح ساده یعنی:

$$I_{xx}=I_{xx}(\text{مستطیل } ۸\times۲)+I_{xx}(\text{مستطیل } ۶\times۳)=۳۴۱/۳+۵۴=۳۹۵/۳$$

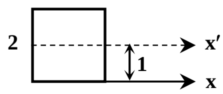
مثال۸: ممان اینرسی مربع شکل زیر نسبت به محور x کدامست؟



۱) ۴　　۲) ۵/۳

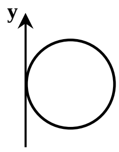
۳) ۲　　۴) ۱/۳

پاسخ: گزینه «۲» ممان اینرسی نسبت به هر محور دلخواه با استفاده از قضیه انتقال محورها قابل محاسبه است، لذا:



$$I_{xx}=\frac{۱}{۱۲}(۲)(۲)^۳+(۲\times۲\times(۱)^۲)=۵/۳$$

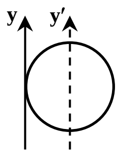
مثال۹: ممان اینرسی دایره‌ای به قطر "d" نسبت به محور عمودی مماس بر آن کدامست؟



۱) $\frac{\pi d^۴}{۳۲}$　　۲) $\frac{۵\pi d^۴}{۶۴}$

۳) $\frac{۳\pi d^۴}{۶۴}$　　۴) $\frac{\pi d^۴}{۱۸}$

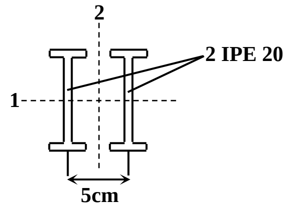
پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از قضیه انتقال محورهای مختصات داریم:



$$I_{yy}=\frac{\pi d^۴}{۶۴}+\left(\frac{\pi d^۲}{۴}\times\left(\frac{d}{۲}\right)^۲\right)=\frac{۵\pi d^۴}{۶۴}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ ممان اینرسی مقطع مرکب روبرو نسبت به محور۲-۲ برابر است با: (معماری ـ سراسری ۷۵)



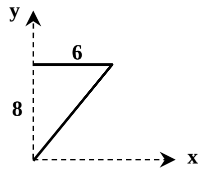
۱) $۲۸۴۰cm^{۴}$

۲) $۳۴۹۰cm^{۴}$

۳) $۳۸۸۰cm^{۴}$

۴) $۷۰۸۶cm^{۴}$

۲ـ کدام گزینه مقدار $\overline{y}$ میله خمیده را نشان می‌دهد؟ (مکانیک جامدات ـ آزاد ۷۵)



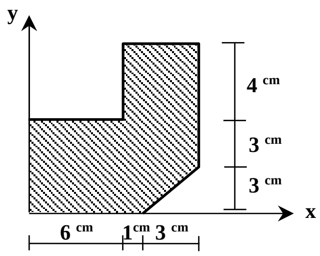
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵/۵

۴) ۴/۵

۳ـ مرکز سطح شکل سایه زده، برابر است با: (معماری ـ سراسری ۷۶)



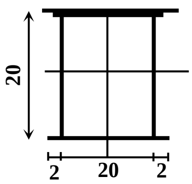
۱) $\overline{x}=۵/۴۲ \quad \overline{y}=۴/۰۴$

۲) $\overline{x}=۵/۴۲ \quad \overline{y}=۴/۲۴$

۳) $\overline{x}=۴/۰۴ \quad \overline{y}=۵/۴۲$

۴) $\overline{x}=۴/۲۴ \quad \overline{y}=۵/۴۲$

۴ـ شعاع ژیراسیون مقطع مقابل حول محور x چند cm است؟ (اندازه‌ها بر حسب cm است.) (معماری ـ سراسری ۷۶)



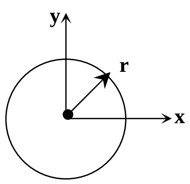
۱) ۹/۳۴

۲) ۹/۴۵

۳) ۹/۵۸

۴) ۹/۷۸

۵ـ ممان اینرسی دایره نسبت به محور x ، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۷۶)



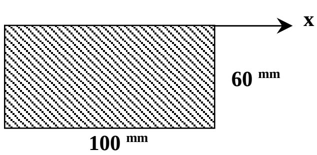
۱) $\frac{\pi r^{۴}}{۴}$ ۲) $\frac{\pi r^{۲}}{۴}$

۳) $\frac{\pi r^{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi r^{۴}}{۲}$

۶ـ مرکز سطح یک جسم، نقطه‌ای است که گشتاورهای مرتبه اول اجزای تشکیل دهنده جسم نسبت به آن .... باشند. (مکانیک جامدات ـ آزاد ۷۶)

۱) صفر ۲) بیشترین ۳) منفی ۴) مثبت

۷ـ ممان اینرسی سطح مستطیلی شکل زیر حول محور x، برابر است با: (معماری ـ سراسری ۷۷)



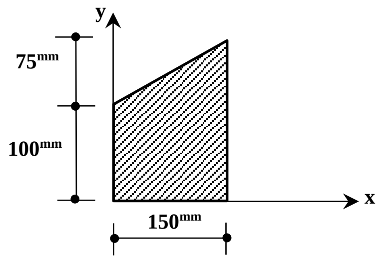
۱) $۱/۲\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

۲) $۳/۱\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

۳) $۵/۵\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

۴) $۷/۲\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

۸ـ طول مرکز سطح شکل سایه زده زیر، چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۷۷)



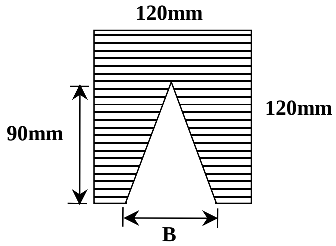
۱) ۸۱/۸mm

۲) ۱۰۵/۵mm

۳) ۸۰mm

۴) ۱۲۳/۱mm

۹ـ مقدار بُعد B را طوری محاسبه نمایید که عرض مرکز سطح بخش هاشورخورده، ۷۰ میلیمتر بالای قاعده قرار گیرد؟ (عمران ـ آزاد ۷۷)



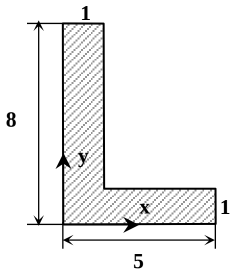
۱) $B = ۷۵$

۲) $B = ۸۵$

۳) $B = ۸۰$

۴) $B = ۴۰$

۱۰ـ مختصات مرکز سطح شکل زیر، کدام است؟ (مکانیک جامدات ـ آزاد ۷۷)



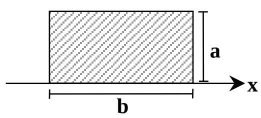
۱) $\bar{y} = ۲/۸۳, \bar{x} = ۱/۳۳$

۲) $\bar{y} = ۲/۸۳, \bar{x} = ۱$

۳) $\bar{y} = ۴, \bar{x} = ۲/۵$

۴) $\bar{y} = ۲, \bar{x} = ۱/۳۳$

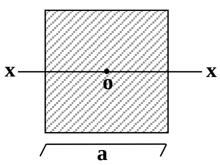
۱۱ـ ممان اینرسی مستطیل مقابل حول محور x، برابر است با: (عمران ـ آزاد ۷۸)



۱) $\frac{ba^۳}{۳}$ ۲) $\frac{ba^۳}{۱۲}$

۳) $\frac{ab^۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{ab^۳}{۳}$

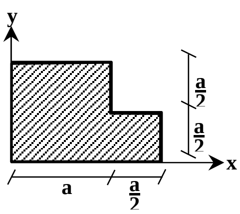
۱۲ـ شعاع ژیراسیون مربع به اضلاع a حول محور x-x (که از مرکز سطح O عبور کرده و موازی قاعده می‌باشد) برابر است با: (عمران ـ آزاد ۷۸)



۱) $\frac{a^۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{۱۲}}$

۳) $\frac{a}{۳}$ ۴) $\frac{a^۴}{۳}$

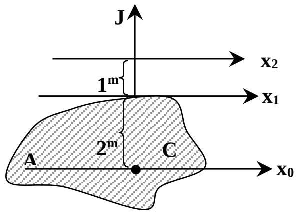
۱۳ـ طول مرکز سطح شکل زیر، برابر است با: (عمران ـ آزاد ۷۸)



۱) $\bar{x} = \frac{۱۲}{۲۵}a$ ۲) $\bar{x} = \frac{a}{۲}$

۳) $\bar{x} = \frac{۱۳}{۲۰}a$ ۴) $\bar{x} = \frac{a}{۴}$

۱۴ـ اختلاف بین ممان‌های اینرسی سطح A حول محور $x_۲$ و $x_۱$ برابر با $۰/۵\ m^۴$ است. مساحت A چند متر مربع است؟ (عمران ـ آزاد ۷۸)



۱) ۰/۵

۲) ۰/۴

۳) ۰/۱

۴) ۰/۲

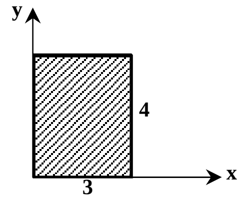
۱۵ـ فاصله مرکز سطح مثلث از قاعده آن،کدام یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟ (h ارتفاع مثلث است) (مکانیک جامدات ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{h}{۲}$ ۲) $\frac{h}{۳}$ ۳) $\frac{h}{۴}$ ۴) $\frac{h}{۵}$

۱۶ـ ممان اینرسی دایره‌ای به قطر D نسبت به محورهای مرکزیش، کدام است؟ (مکانیک جامدات ـ آزاد ۷۹)

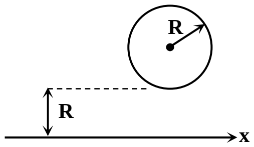
۱) $\frac{\pi D^۴}{۳۲}$ ۲) $\frac{\pi D^۴}{۶۴}$ ۳) $\frac{\pi D^۴}{۱۶}$ ۴) صفر

۱۷ـ ممان اینرسی مستطیل شکل زیر، نسبت به محور y، چقدر است؟ (مکانیک سیالات ـ آزاد ۷۹)



۱) ۹
۲) ۱۸
۳) ۲۷
۴) ۳۶

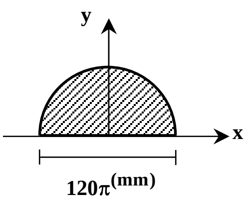
۱۸ـ ممان اینرسی دایره شکل زیر را نسبت به محور xها بدست آورید؟ (معماری ـ سراسری ۸۰)



۱) $I_x = \frac{۱}{۱۶}\pi R^۴$ ۲) $I_x = \frac{۱}{۱۲}\pi R^۴$

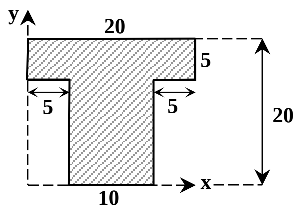
۳) $I_x = \frac{۴}{۱۷}\pi R^۴$ ۴) $I_x = \frac{۱۷}{۴}\pi R^۴$

۱۹ـ مختصات مرکز سطح نیم‌دایره‌ای به قطر π ۱۲۰ میلیمتر نسبت به محورهای x و y، به ترتیب کدام است؟ (ساختمان ـ سراسری ۸۰)



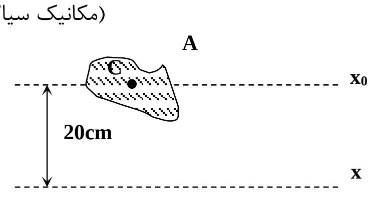
۱) ۴۵,۰
۲) ۰,۴۵
۳) ۸۰,۰
۴) ۱۶۰,۰

۲۰ـ $\overline{y}$ سطح شکل زیر، چند میلی‌متر است؟ (مکانیک جامدات ـ آزاد ۸۰)



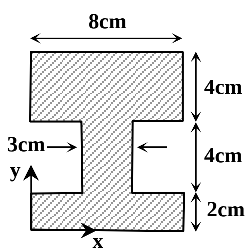
۱) ۶/۲۵
۲) ۸/۵
۳) ۱۱/۵
۴) ۱۴/۲۵

۲۱ـ ممان اینرسی سطح A حول x_0 برابر ۱۵۰۰cm^4 و حول محور x برابر ۹۵۰۰cm^4 می‌باشد. مساحت A چند سانتی‌متر مربع است؟ (مکانیک سیالات ـ آزاد ۸۰)



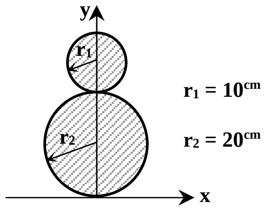
۱) ۳۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۱۰

۲۲ـ مرکز سطح شکل زیر، کدام است؟ (مکانیک سیالات ـ آزاد ۸۰)



۱) $\overline{x} = ۵/۳۳ \,,\, \overline{y} = ۴$
۲) $\overline{x} = ۴ \,,\, \overline{y} = ۵$
۳) $\overline{x} = ۵ \,,\, \overline{y} = ۴$
۴) $\overline{x} = ۴ \,,\, \overline{y} = ۵/۳۳$

۲۳ــ فاصله مرکز سطح شکل نشان داده شده نسبت به محور x ها $(\bar{y})$، چند سانتیمتر است؟ (معماری ـ سراسری ۸۱)



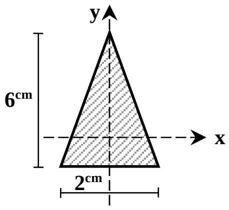
۱) ۱۶

۲) ۲۰

۳) ۲۶

۴) ۴۰

۲۴ــ ممان اینرسی مثلث شکل زیر نسبت به محور y ها (I_{yy})، کدام است؟ (معماری ـ سراسری ۸۱)



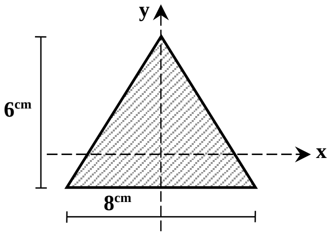
۱) ۳۶

۲) ۱۲

۳) ۴

۴) ۱

۲۵ــ ممان اینرسی مثلث نشان داده شده در شکل زیر نسبت به محور y، کدام است؟ (ساختمان ـ سراسری ۸۱)



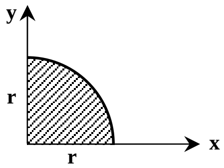
۱) ۲۵۶

۲) ۱۴۴

۳) ۸۵

۴) ۶۴

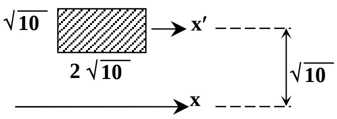
۲۶ــ کدامیک از گزینه‌های زیر، مختصه‌های مرکز سطح شکل مقابل را نشان می‌دهد؟ (ساختمان ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{3r}{4\pi}$ ۲) $\frac{4r}{3\pi}$

۳) $\frac{4\pi}{3r}$ ۴) $\frac{4r}{5\pi}$

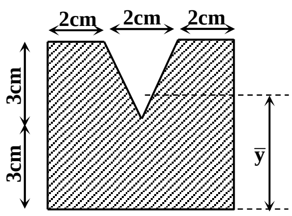
۲۷ــ ممان اینرسی سطح هاشور خورده نسبت به محور x، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۱)



۱) $\frac{100}{6}$ ۲) $\frac{200}{6}$

۳) $\frac{700}{6}$ ۴) $\frac{1300}{6}$

۲۸ــ در شکل نشان داده شده موقعیت مرکز سطح $(\bar{y})$ کدام است؟ (معماری ـ سراسری ۸۲)



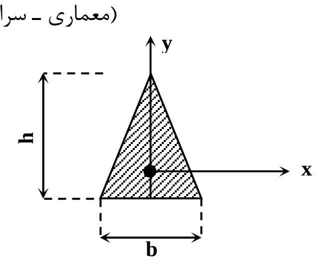
۱) ۳/۱

۲) ۲/۹

۳) ۲/۸

۴) ۲/۵

۲۹ــ ممان اینرسی سطح مثلث شکل زیر نسبت به محور yها کدام است؟ (معماری ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{hb^3}{48}$ ۲) $\frac{hb^3}{36}$

۳) $\frac{h^3b}{36}$ ۴) $\frac{hb^3}{12}$

فصل پنجم

« تنش، کرنش و بارگذاری محوری »

معرفی

در بحث مکانیک جامدات یا مقاومت مصالح، معادلات ریاضی مورد استفاده براساس فرضیه جسم ایده‌آل تعریف خواهند شد. طبق تعریف جسم ایده‌آل جسمی است با سه خاصیت زیر:

الاستیسیته مطلق

در محدوده مورد بحث، اجسام الاستیک در نظر گرفته می‌شوند.

نیروهای وارد بر یک جسم موجب تغییر شکل و ابعاد آن می‌شوند، جسمی که پس از برداشتن بارهای اعمالی کاملاً به شکل اولیه خود برگردد الاستیسیته مطلق می‌باشد. مانند : فنر و لاستیک.

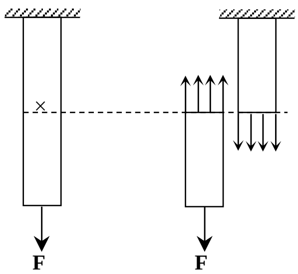
ایزوتروپ

ماده ایزوتروپیک ماده‌ای است که خواص الاستیکی آن در تمام جهات یکسان است.

همگن

ماده همگن ماده‌ای است که در تمام نقاطش دارای خواص یکسان می‌باشد.

مفهوم تنش



«الف» « شکل ۱ » «ب»

همانطور که در «شکل ۱ ـ الف» دیده می‌شود، میله فولادی تحت تأثیر نیروی کششی "F" قرار گرفته است. گفته می‌شود که میله تحت تنش می‌باشد و نیروهای کششی در آن به وجود آمده است. چنین باری باعث افزایش طول میله می‌گردد. اگر میله فولادی را توسط صفحه‌ای عمود بر محور «شکل ۱ـ ب» برش دهیم، در مقطع بریده شده نیروهای کششی که از نظر مقدار برابر F هستند جایگزین می‌گردند. این نیروهای کششی در سطح مقطع به طور یکنواخت توزیع شده و جهتشان مخالف یکدیگر خواهد بود.

به طور کلی مفهوم تنش عبارت است از اینکه زمانی که جسمی تحت اثر یک نیرو (کششی یا فشاری) قرار می‌گیرد، نیرو بر تک تک کریستال‌های آن جسم اثر کرده و ایجاد تغییراتی می‌کند (اعم از تغییر حجم، سطح و طول).

طبق تعریف تنش عبارت است از: نیروی وارده بر سطح مقطع جسم لذا:

$$\text{تنش} = \frac{F}{A}$$

واحد اندازه‌گیری تنش، نیوتن بر متر مربع یا پاسکال (Pa) می‌باشد.

واحدهای بزرگتر اندازه‌گیری تنش در سیستم SI عبارتند از:

$1\,kPa = 10^{3}\,Pa$　　$1\,MPa = 10^{6}\,Pa$　　$1\,GPa = 10^{9}\,pa$

انواع تنش‌ها

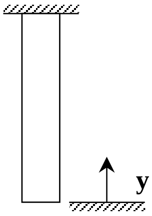
۱. تنش نرمال

در تنش نرمال (σ) راستای نیروی اعمالی از نظر هندسی بر سطح مقطع جسم عمود می‌باشد. تنش نرمال در دو حالت کششی و فشاری نتیجه اعمال نیروهای کششی و فشاری می‌باشند که به ترتیب با علامت‌های مثبت و منفی نمایش داده می‌شوند. تنش نرمال کمیتی است وابسته به سطح و برای محاسبه آن در هر مقطع دلخواه داشتن مقادیر نیرو و سطح مقطع الزامی است.

مثال۱: اندازه تنش نرمال در بالاترین نقطه تیری با طول L و سطح مقطع A که دارای وزن مخصوص γ می‌باشد و از سقف آویزان است، چقدر می‌باشد؟

۱) γL ۲) $\frac{\gamma}{L}$ ۳) γL^2 ۴) $\frac{\gamma}{L^2}$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از مفهوم تنش داریم:



$$\sigma = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح مقطع}} = \frac{\gamma.y.A}{A} = \gamma.y \quad (\gamma = \rho.g)$$

$$\begin{cases}\sigma_{max} \\ y = L\end{cases} \Rightarrow \sigma = \gamma.L$$

زیرا تنها نیروی ایجاد شده وزن جسم است و طبق تعریف داریم : $w = \gamma \times A \times L$

مثال ۲: از آنجائی که اعضاء سازنده خرپا .... هستند، لذا تنش به وجود آمده در اعضاء خرپا از نوع تنش .... می‌باشد.

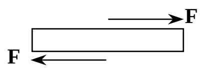
۱) فشاری ـ برشی ۲) کششی ـ نرمال ۳) دو نیرویی ـ محوری ۴) دو نیرویی ـ برشی

پاسخ : گزینه «۳» اعضاء سازنده خرپا، اجسام دو نیرویی هستند، لذا تنش ناشی از چنین نیرویی به دلیل تعامد نیرو به سطح مقطع از نوع تنش نرمال (محوری) خواهد بود.

۲. تنش برشی

نوع دیگر تنش در حالتی قابل بررسی است که در آن نیروی اعمالی موازی با سطح مقطع اعمال شود. همانگونه که در شکل دیده می‌شود نیروی F موازی سطح مقطع صفحه اعمال شده است. طبق تعریف، تنش برشی (τ) عبارت است از نسبت نیروی اعمالی به سطح مقطع.

$$\tau = \frac{F}{A}$$



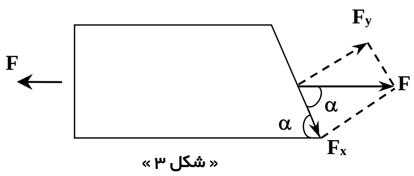
« شکل ۲ »

واحد اندازه‌گیری تنشهای نرمال و برشی برابر می باشند. تنش برشی خاصیت برش در لایه‌های مختلف جسم ایجاد می‌کند و نتیجه اثر نیرو موازی سطح مقطع می‌باشد.

۳. تنش در سطح مورب

حالت سوم بررسی تنش، مربوط به حالتی است که نیرو به صورت زاویه‌دار به سطح اعمال گردد. همانطورکه ملاحظه می‌شود برای بررسی تنش‌های اعمالی به جسم باید نیروی F را در دو راستای موازی و عمود بر سطح به مؤلفه‌هایش تجزیه کنیم. یعنی:

$$\begin{cases}F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha\end{cases}$$



« شکل ۳ »

حال با توجه به تعاریف ارائه شده برای تنشهای برشی و نرمال خواهیم داشت:

$$F_y \perp A \Rightarrow \sigma = \frac{F_y}{A} = \frac{F\sin\alpha}{A}$$

$$F_x \parallel A \Rightarrow \tau = \frac{F_x}{A} = \frac{F\cos\alpha}{A}$$

تنش حاصل از اعمال نیروی عمود بر سطح (F_y) تنش نرمال و تنش حاصل از اعمال نیروی موازی با سطح (F_x) تنش برشی می باشند، بدین معنا که اگر نیرو، زاویه‌دار به مقطع جسم اعمال گردد باعث ایجاد ***تنشهای نرمال و برشی*** توأمان می شود.

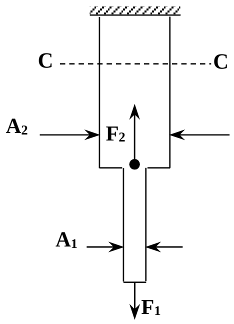
توجه به نکات زیر حائز اهمیت است:

۱) تنش دارای مولفه‌های نرمال و برشی است، لذا تنش کمیت تانسوری مرتبه دوم است.

۲) شرط لازم برای اینکه تنش نرمال یکنواخت باشد، این است که نیرو از راستای مرکز ثقل جسم عبور کند (نیروی محوری).

۳) تنش کمیتی است که در ارتباط با سطح مقطع تعریف می‌گردد، اگر سطح مقطع به صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شود، مقدار تنش بی‌نهایت خواهد شد (نیروی متمرکز).

مثال ۳: میله‌ای با خصوصیات نشان داده شده در شکل مقابل، تحت تأثیر نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ قرار دارد. میزان تنش در مقطع C-C کدام است؟

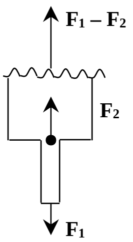


۱) $\frac{F_۱}{A_۲}$

۲) $\frac{F_۱+F_۲}{A_۲}$

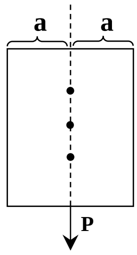
۳) $\frac{F_۱-F_۲}{A_۲}$

۴) $\frac{F_۲}{A_۲}$



☑ **پاسخ :** گزینه «۳» مقدار تنش نرمال در مقطع C-C (عمود بودن نیرو نسبت بـه سـطح مقطـع) عبـارت است از نیروی موجود در آن مقطع به سطح مقطع :

$$\sigma=\frac{F_۱-F_۲}{A_۲}$$



« شکل ۵ »

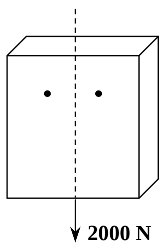
توضیح: تنش برشی در مقاطع پین‌ها، پیچ‌ها و غیره که باعث اتصال صفحه‌ها یا قطعات می‌شوند به صورت زیـر قابل محاسبه می‌باشد :

$$\tau=\frac{P}{nA}$$

$A\equiv$ سطح مقطع پیچ

$n\equiv$ تعداد پیچ‌ها در یک صفحه

مثال ۴: در شکل مقابل قطر تقریبی پین چقدر باشد تا در مقابل نیروی وارده در صورتی که تنش مجاز برشی آن $۱۰۰۰۰\ N/mm^۲$ باشد مقاومت کند؟



۱) ۰/۱۶

۲) ۰/۳

۳) ۰/۱۳

۴) ۰/۳۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\tau=\frac{P}{nA}=\frac{P}{۲A}\Rightarrow A=\frac{P}{۲\tau}$$

$$A=\frac{P}{۲\tau}=\frac{۲۰۰۰}{۲\times۱۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow A=\pi r^۲\Rightarrow r=۰/۱۸\Rightarrow d=۰/۳۶$$

تذکر ۱: نسبت تنش برشی و نرمال در یک زنجیر یا قطعه مدور به صورت: $\tau=\frac{۱}{۲}\sigma_u$ است.

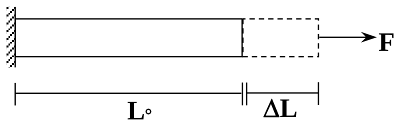
توضیح: زمانی که به یک جسم، تنش برشی اعمال می‌گردد، هیچ‌گونه تغییر شکل طولی در سطح مقطع آن به وجود نمی‌آید، ولی این نکته در مورد تـنش نرمال صدق نمی‌کند.

تذکر ۲: در زنجیرها و حلقه‌ها، تنش نرمال نقش تنش برشی را ایفا می‌کند.

نکته ۱: به صورت کلی تنش برشی پیچ‌ها، پین‌ها و پرچ‌ها از رابطه: $\tau=\frac{F}{n(\frac{\pi d^۲}{۴})}$ که در آن n تعداد پیچ‌ها و ... و d قطر قطعه (پـیچ‌هـا و پـرچ‌هـا و ...) می‌باشند، محاسبه می‌گردد.

کرنــش

الف) کرنش در اثر اعمال نیروی محوری



« شکل ۶ »

اگر قطعه‌ای تحت تأثیر بار محوری (کششی یا فشاری) قرار گیرد، با توجه به خاصیت کشسانی، دچار تغییر طول می‌گردد. در این حالت کمیت کرنش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_\circ} = \frac{\text{تغییر طول اولیه}}{\text{طول اولیه}}$$

کرنش کمیتی بدون واحد و بدون بُعد است زیرا نسبت دو کمیت هم واحد می‌باشد. نکته مهم اینکه کرنش برخلاف تنش برای یک نقطه تعریف می گردد و مقدار آن از هر نقطه به نقطه دیگر متفاوت است، لذا برای محاسبه کرنش دانستن موقعیت هندسی نقطه مورد نظر بسیار مهم است.

با معلوم بودن ***تابع طول*** (u) برای یک قطعه الاستیک، کرنش برابر است با مشتق تابع طول نسبت به تغییر طول قطعه. یعنی:

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

مثال ۵: اگر رابطه تغییر طول در یک تیر به صورت $u(x)=۱۰x^۲ - ۴x$ باشد، مقدارکرنش در محل $x = ۲$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

پاسخ : گزینه «۳»

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = ۱۰(۲)x - ۴ = ۳۶ \quad ; \quad x = ۲$$

ب) کرنش حرارتی

همانگونه که میدانید اکثر مواد در اثر حرارت (برودت) دچار افزایش (کاهش) ابعاد می‌شوند. اگر یک قطعه فلزی گرم شود، افزایش طول قطعـه (بـه صـورت یک بعدی فرض می‌گردد) به صورت روبرو قابل محاسبه می‌باشد: $L = L_\circ(۱+\alpha.\Delta T)$

که در آن L طول قطعه بعد از اعمال حرارت و $L_\circ$ طول اولیه آن می‌باشد. همچنین α، ضریب انبساط حرارت طولی و ΔT اختلاف درجـه حـرارت در دو حالت می‌باشد. $L - L_\circ = L_\circ.\alpha.\Delta T \Rightarrow \Delta L = L_\circ.\alpha.\Delta T$

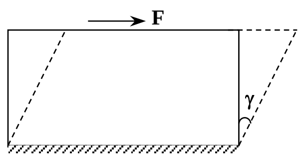
$$\text{طبق تعریف کرنش :} \quad \varepsilon_{th} = \frac{\Delta L}{L_\circ} = \frac{L_\circ.\alpha.\Delta T}{L_\circ} = \alpha.\Delta T$$

که ε را در این حالت کرنش حرارتی ε_{th} گویند.

نکته ۲: زمانی که یک جسم یا قطعه به صورت آزاد و با یک دمای ثابت حرارت داده می‌شود هیچ‌گونه تنشی در آن به وجود نمی‌آید.

ج) کرنش زاویه‌ای

نوع دیگر کرنش به نام کرنش زاویه‌ای"γ"، نتیجه تغییر در زاویه قائمه قطعه‌ای است که تحت اثر نیروی برشی قرار گرفته است.



« شکل ۷ »

دیاگرام تنش ــ کرنش

با استفاده از آزمایش کشش، قطعه تحت تأثیر بارگذاری کششی قرار می‌گیرد. به ازاء هر مقدار مشخص نیروی اعمالی، مقـادیر تـنش و کـرنش قطعـه قابـل محاسبه می‌باشند. با تعیین و ترسیم این مقادیردیاگرام‌هایی برای مواد رسم می‌شوند. دیاگرام مذکور عموماً رابطه بین تنش و کرنش را بدست می‌دهـد کـه به نوبه خود اطلاعات زیادی در مورد رفتار مواد و مناسب بودن آنها برای کاربردهای مختلف دارد. معمولاً محور افقی مقادیر کرنش و محور عمـودی مقـادیر تنش را نشان می‌دهند. بر روی دیاگرام تنش ـ کرنش اکثر مواد فلزی، مناطق و نقاط مهمی وجود دارند که عبارتند از :

۱. نقطه تسلیم

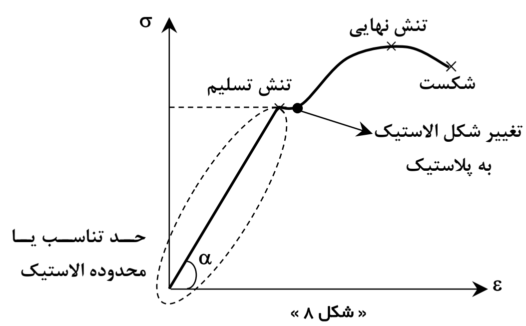
نقطه‌ای است که قطعه تحت تنش بدون افزایش بار، افزایش طول می‌دهد. (نقطه شروع ایجاد تغییر شکل‌های برگشت‌ناپذیر در قطعه)

۲. حد تناسب

یکی از قسمتهای مهم دیاگرام، منطقه حد تناسب است و آن محدوده‌ای است که ماده دارای رفتار خطی بین تنش و کرنش می‌باشد، بدین معنا که با حـذف نیـرو جسـم بـه حالت اولیه خود برگردد (محدوده الاستیک).

مدول الاستیسیته (مدول یانگ یا ضریب ارتجاعی) شـیب قسـمت خطـی دیـاگرام (در محدوده حد تناسب) می‌باشد و مقدار آن نسبت تنش بر کرنش می‌باشد. لذا:

$$E = \tan\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



« شکل ۸ »

ثابت E که از خصوصیات هر جسم و پارامتر وابسته به جنس قطعه است دارای واحدی مشابه واحد تنش می‌باشد.

در محدوده الاستیک از دیاگرام تنش ـ کرنش، تناسب خطی تنش و کرنش به ***قانون هوک*** معروف است $(\sigma = E.\varepsilon)$.

حد الاستیک بیشترین مقدار تنشی است که اگر بر جسم اعمال گردد و سپس برداشته شود، تغییر شکل دائمی در آن بوجود نمی‌آید.

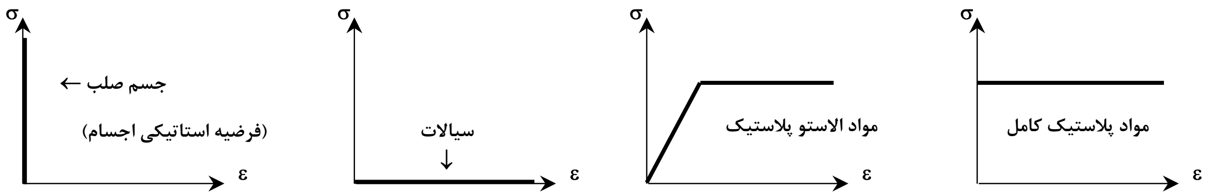
اگر آزمایش فوق را بر اساس تست برش انجام دهیم دیاگرام تنش برشی ـ کرنش زاویه‌ای، در محدوده حد تناسب شکل می‌گیرد که در محدوده تناسب آن خواهیم داشت:

$$G = \tan\alpha = \frac{\tau}{\gamma}$$

در این رابطه G را مدول برش گویند(G از نظر واحد مشابه E می‌باشد). دیاگرام تنش برشی ـ کرنش زاویه‌ای از نظر شکل کلی شبیه به دیاگرام تنش عمودی ـ کرنش عمودی است و همان نقاط و مناطق مهم در این دیاگرام نیز قابل مشاهده می‌باشند.

۳. تنش نهایی

حداکثر مقدار تنش قابل تحمل جسم قبل از شکست می‌باشد. حالتهای خاص دیاگرام تنش ـ کرنش به صورت زیر می‌باشند:



« شکل ۹ »

تغییر طول در اثر بارگذاری محوری

رابطه تغییر طول بعنوان یکی از روابط تغییر شکل در اجسامی که تحت بارگذاری محوری قرار گرفته‌اند بسیار اهمیت دارد و به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد: $\sigma = E\varepsilon$

از تعاریف تنش و کرنش

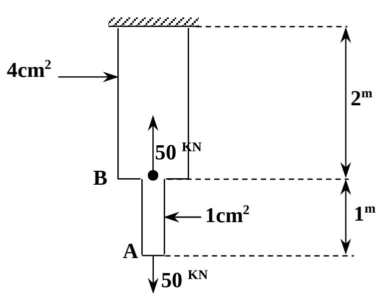
$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A} \\ \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \end{cases} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_\circ}} \Rightarrow \Delta L = \frac{F.L}{A.E}$$

رابطه مهم تغییر طول، به صورت $\Delta L = \frac{F.L}{A.E}$ بدست می‌آید. رابطه تغییر طول برای هر دو نوع تنش کششی و فشاری صادق است. تنش کششی و افزایش طول را مثبت و تنش فشاری و کاهش طول را منفی در نظر می‌گیرند. واحد تغییر طول در سیستم متریک «متر» می‌باشد. تغییر طول همانند کرنش یک کمیت نسبی است و باید محدوده مورد نظر اندازه‌گیری آن مشخص گردد، نکته مهم اینکه رابطه تغییر طول فقط در محدوده‌ای از جسم قابل استفاده است که پارامترهای نیرو(F)، سطح مقطع (A) و ضریب یانگ قطعه (E) ثابت باشند، بدین معنا که اگر در یک جسم تحت اثر بار، مقادیر فوق‌الذکر تغییر کنند رابطه تغییر طول فقط برای محدوده‌ای معتبر است که تغییرات نیرو، سطح مقطع و جنس نداشته باشیم، در این حالت برای محاسبه مقدار تغییر طول ناچاراً باید چندین بار از رابطه تغییر طول استفاده کرد، یعنی:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$$

همانطورکه از رابطه تغییر طول مشخص است، مقدار تغییر طول متناسب با مقدار نیروی محوری، طول قطعه و متناسب با معکوس سطح مقطع قطعه و مدول یانگ می‌باشد.

مثال ۶: مقدار تغییر طول نقطه A نسبت به B در میله شکل زیر کدام است؟ (مدول یانگ قطعه ۲۰۰ GPa است)



۱) صفر

۲) ۰/۲۵ mm

۳) ۲/۵ mm

۴) ۱۲ mm