مدرسان شریف

فصل اول

« روابط تعادل (Equations of Equilibrium) »

در این فصل با توجه به اهمیت موضوعات و این که ۳۵ درصد سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد از این بخش مطرح می‌شود به موارد زیر پرداخته شده است.

۱) شناخت کمیت‌های اسکالر و برداری و توانایی تبدیل واحدها در سیستم‌های BS و SI در محدوده مورد نیاز آزمون‌های کارشناسی ارشد.

۲) شناخت بردارها و روش محاسبات مربوط به این نوع کمیت‌ها شامل: اساس کمیت‌های برداری، روش‌های گوناگون ترکیب کمیت‌های برداری (ضرب داخلی، ضرب خارجی، برآیند، ضرب مختلط و ...) و تجزیه و تصویر یک بردار (در صفحه و فضا).

۳) تعاریف اساسی و شناخت پارامترهای مهم در بحث استاتیک شامل: نیرو، گشتاور نسبت به یک نقطه و یک محور، جفت نیرو، سیستم نیروهای معادل، رنچ و انواع بارهای متمرکز و گسترده.

۴) چگونگی ترسیم دیاگرام جسم آزاد یک قطعه (یا یک نقطه مادی) صُلب در صفحه و فضا، شناخت انواع تکیه‌گاه‌ها و اتصالات، روابط برداری و اسکالر تعادل در صفحه و فضا، سیستم قرقره‌های مرکب بدون اصطکاک، چگونگی حل مسائل تعادل، روش تشخیص درجه نامعینی سازه‌ها و حالات خاص تعادل مانند: اجسام دو نیرویی و سه نیرویی و نیروهای همگرا (در صفحه و فضا).

۵) بکارگیری روابط تعادل در یکی از انواع مکانیزم‌های پرکاربرد عملی و تئوری به نام قاب (ماشین) جهت حل مسائل مربوطه.

مقدمه

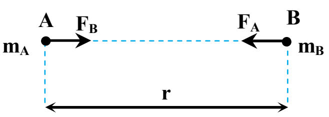
به طور کلی علم مکانیک به دو شاخه اصلی استاتیک و دینامیک تقسیم می‌شود. موضوعی که در این کتاب به آن پرداخته می‌شود مبحث استاتیک است. در این کتاب سعی شده است تمامی مطالب لازم گردآوری شود تا به شما دانشجویان گرامی برای شرکت در آزمون‌های تشریحی و تستی کمک گردد.

علم استاتیک این گونه تعریف می‌شود: بررسی اجسام و سیستم‌های در حال تعادل (سکون) یا در حال حرکت با سرعت ثابت.

آنچه در این فصل اهمیت دارد، معرفی مفاهیم و اصول اساسی استاتیک (صفحه‌ای و فضایی) از جمله: قوانین نیوتن، معرفی پارامترهای اصلی تعادل شامل: نیروها و گشتاورها، روابط تعادل و دیگر جزئیات است. در ابتدا به عنوان اصول اولیه بحث، قانون جاذبه عمومی و قانون دوم نیوتن بررسی می‌شوند.

الف) قانون جاذبه عمومی نیوتن

فرض کنید دو نقطه مادی A و B داشته باشیم، طبق قانون جاذبه عمومی، نیروی جاذبه‌ای بین این دو نقطه مادی وجود دارد که باعث می‌شود اثر هر یک روی دیگری، مساوی و مختلف‌الجهت اثر دیگری روی آن باشد.



شکل ۱. قانون جاذبه عمومی بین دو ذره

بدین معنا که جرم A نیروی جاذبه F_A به جرم B و جرم B نیروی جاذبه F_B به جرم A وارد می‌کند و داریم: $F_A = F_B = F$

توجه داشته باشید که مقدار این نیرو با حاصل‌ضرب جرم‌ها نسبت مستقیم و با مجذور فاصله دو جسم از یکدیگر نسبت معکوس دارد. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$F = G\frac{m_A \cdot m_B}{r^۲}$$

G، ثابت جهانی موسوم به ثابت گرانش بوده و مقدار آن در سیستم SI برابر است با :

$$۶/۶۷۳ \times ۱۰^{-۱۱} \frac{m^۳}{kg.s^۲}$$

ب) قانون دوم نیوتن

این قانون را به عنوان یکی از قوانین اساسی حرکت و حتی تعادل می‌شناسند. طبق این قانون شتاب حرکت یک جرم تحت اثر نیروی F با جرم آن نسبت مستقیم دارد. این شتاب در جهتی است که نیرو بر آن اثر می‌کند، یعنی: $F = m.a$

با توجه به توضیحات فوق، روابط مقابل را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F = m_B.a_B \\ F = m_A.a_A \end{cases} \Rightarrow m_B.a_B = m_A.a_A \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}$$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری

برای اندازه‌گیری کمیات فیزیکی از واحدهای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. هر کدام از کمیت‌های طول، سطح، حجم، زمان، نیرو، سرعت، شتاب، درجه حرارت و ... با واحد مربوط به خود اندازه‌گیری می‌شوند. برای اندازه‌گیری هر یک از این کمیت‌ها یک واحد معین انتخاب می‌شود. مثلاً برای طول واحدهای میلیمتر، سانتیمتر، متر، فوت، اینچ و ... انتخاب شده است.

واضح است که در صورت تعیین واحد طول، واحدهای سطح و حجم نیز خود به خود معین می‌شوند. واحدی مثل طول «واحد اصلی» یا اولیه و واحدهایی مثل سطح و حجم که بر مبنای واحد طول تعیین می‌شوند، «واحدهای ثانویه» یا فرعی نامیده می‌شوند.

جرم نیز واحد اصلی دیگری است که خاصیت هر ماده می‌باشد. به عبارتی می‌توان گفت، دو ماده در صورتی دارای یک جرم هستند که در یک نقطه معین روی زمین، وزن مساوی داشته باشند.

برای اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی از یکی از دو سیستم انگلیسی یا متریک استفاده می‌شود که در زیر به شرح آنها پرداخته می‌شود.

الف) سیستم انگلیسی

در سیستم انگلیسی، جرم یک ماده که دارای وزن یک پوند در سطح دریا می‌باشد، واحد جرم است و پوند جرم (Pound mass) نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم «پوندال» (Poundal) است و عبارت است از نیرویی که به جسمی به جرم یک «پوند جرم»، شتاب یک فوت بر مجذور ثانیه بدهد. توجه داشته باشید که وزن یک پوند جرم، $(F = M.g)$ یک پوندال است و در آن g شتاب ثقل زمین در محل آزمایش است. اگر محل آزمایش سطح دریا باشد، وزن این جرم برابر یک پوند است و چون $g = ۳۲/۲\frac{ft}{sec^۲}$ (در سطح دریا) است، بنابراین وزن یک پوند معادل است با:

$$۱(\text{Pound}) = (\text{یک پوند جرم})\times(۳۲/۲\frac{ft}{sec^۲}) = ۳۲/۲\ (\text{یک پوند جرم})\times(۱\frac{ft}{sec^۲}) = ۳۲/۲(\text{Poundal})$$

ب) سیستم متریک

سیستم متریک شامل دو سیستم اندازه‌گیری MKS و CGS است که به صورت زیر می‌باشد:

ب ـ ۱) MKS: در این سیستم، واحد جرم کیلوگرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم نیوتن می‌باشد که طبق تعریف نیرویی است که به یک کیلوگرم جرم، شتاب واحد یک متر بر مجذور ثانیه را بدهد. در سطح دریا $g = ۹/۸۱\frac{m}{sec^۲}$ است، بنابراین در سیستم MKS وزن یک کیلوگرم جرم برابر با ۹/۸۱ نیوتن می‌باشد.

ب ـ ۲) CGS: واحد جرم در این سیستم، گرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این دستگاه دین (dyne) است. چون $g = ۹۸۱\frac{cm}{sec^۲}$ است، پس در این سیستم اندازه‌گیری، وزن هر گرم جرم تقریباً برابر ۹۸۱ دین می‌باشد.

پ) سیستم واحدهای مهندسی

در مکانیک از چهار واحد اندازه‌گیری برای جرم، طول، زمان و نیرو (به عنوان کمیت‌های اصلی) استفاده می‌شود. چون این واحدها طبق قوانین مکانیک به یکدیگر مرتبط هستند، واحدهایی را که برای این متغیرها به کار می‌بریم، نمی‌توانند دلخواه و مستقل از هم باشند. بنابراین از سیستم‌های تعریف شده‌ای که واحدهای قابل قبول کمیت‌ها در این سیستم‌ها هستند، استفاده می‌شود. در علوم پایه و مهندسی دو سیستم رایج وجود دارد: سیستم انگلیسی (BS) و سیستم بین‌المللی (SI).

واحدهای اصلی هر دو سیستم در جدول زیر نشان داده شده است:

سیستم انگلیسی (BS)	سیستم بین‌المللی (SI)	علامت قراردادی	کمیت
اسلاگ (slug)	کیلوگرم (kg)	M	جرم
فوت (ft)	متر (m) واحدهای پایه	L	طول
ثانیه (s) واحدهای پایه	ثانیه (s)	T	زمان
پوند (lb)	نیوتن (N)	F	نیرو

جدول ۱. واحدهای اصلی در سیستم SI و BS

در هر کدام از سیستم‌ها سه واحد پایه تعریف شده‌اند. نسبت واحد چهارم با واحدهای پایه با استفاده از قانون دوم نیوتن تعیین می‌شود. در سیستم SI نحوه این ارتباط به صورت روبرو است: $F = m.a \Rightarrow N = kg.\frac{m}{s^۲}$

بنابراین یک نیوتن، مقدار نیرویی است که به جسمی به جرم یک کیلوگرم، شتاب یک $\frac{m}{sec^۲}$ می‌دهد.

مشابه آن‌چه در بالا به آن اشاره شد در سیستم BS نیز داریم: $F = m.a \Rightarrow m = \frac{F}{a} \Rightarrow slug = \frac{lb.s^۲}{ft}$

بنابراین یک اسلاگ، جرمی است که در اثر یک پوند نیرو، یک $\frac{ft}{sec^۲}$ شتاب بگیرد.

دقت کنید که در هر دو سیستم SI و BS، رابطهٔ بین وزن و جرم را می‌توان از قانون دوم نیوتن و با در نظر گرفتن شتابی برابر با گرانش g به صورت زیر به‌دست آورد: $W = m.g$

که در سطح دریا مقدار شتاب جاذبه (g) برابر است با: $g = ۹/۸۰۶۶۵\frac{m}{sec^۲}$ یا $۳۲/۱۷۴۰\frac{ft}{sec^۲}$

دقت داشته باشید که در حل مسائل، شتاب جاذبه زمین عموماً به صورت ۹/۸۱ و ۳۲/۲ در نظر گرفته می‌شوند. در حل تست‌ها با فرض عدم استفاده دانشجویان از ماشین حساب شتاب جاذبه زمین را (در سیستم SI) ۱۰ در نظر می‌گیرند.

۱ اینچ ≡ ۲/۵۴ سانتیمتر	۱ فوت ≡ ۱۲ اینچ ≡ ۳۰/۵ سانتیمتر ≡ ۰/۳۰۵ متر
۱ اسلاگ ≡ ۳۲/۲ پوند جرم	۱ گرم ≡ $۲/۲۰۵\times۱۰^{-۳}$ پوند جرم ≡ $۰/۶۸۵\times۱۰^{-۴}$ اسلاگ
۱ پوند نیرو ≡ ۴۴۵۰۰۰ دین ≡ ۳۲/۲ پوندال	۱ نیوتن ≡ $۱۰^{+۵}$ دین = ۰/۱۰۹۷ کیلوگرم نیرو

جدول ۲. روابط تبدیلی بین برخی از واحدهای اصلی

ایده‌آل نمودن مسائل استاتیک

یکی از موارد مهمی که باید در تحلیل‌های مهندسی به آن توجه شود، این است که فرضیات مناسب در حل این مسائل در نظر گرفته شود، به عبارت ساده‌تر «مسائل ایده‌آل شوند». همان‌طور که می‌دانید اکثر مسائل مهندسی پیچیده هستند. برای رفع پیچیدگی مسائل، باید با استفاده از فرضیات ساده کننده مدل ریاضی راحت‌تری از مسأله ارائه شود. به طور حتم در حل برخی مسائل با چنین فرضیاتی مواجه بوده‌اید. به عنوان مثال در تحلیل برخی مسائل، از وزن صرف‌نظر شده است یا نیروی اصطکاک بین سطوح را صفر در نظر می‌گیرند و مواردی از این قبیل. در زیر به برخی از این ساده‌سازی‌های متعارف که به کلیات مباحث نیز لطمه‌ای وارد نمی‌کند اشاره می‌شود:

الف) ماده متصل

همانطور که می‌دانیم همواره فضایی بین الکترونها و هسته اتم مواد به ظاهر فشرده وجود دارد. با این حال از آن‌جایی که در مهندسی با موادی که نسبت به اتم خیلی بزرگتر هستند سروکار داریم، فقط مقدار و میانگین خواص در حجم معین به کار برده می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که جسم یک ماده به هم پیوسته و اتصالی است.

ب) جسم صُلب (سخت) (Rigid Body)

منظور از جسم صُلب، جسمی است که در اثر نیروها یا گشتاورهایی که به آن وارد می‌شود، تغییر شکل ندهد. در واقع هر جسمی هر چند سخت، تحت اثر کوچک‌ترین نیرو تغییر شکل خواهد داد. بنابراین از لحاظ عملی جسم سخت، به صورت تعریف تئوری آن وجود ندارد، ولی فرض جسم صلب، تغییر شکلها را آنقدر کوچک در نظر می‌گیرد که اثر قابل توجهی در حل مسائل و تحلیل آنها نداشته و قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

پ) نقطه جرم‌دار (ذره) (Particle)

چنانچه می‌دانید اصول مکانیک بر مبنای قوانین نیوتن بیان می‌شوند که این قوانین برای یک جرم متمرکز وضع شده‌اند. با این توضیح، امکان وجود نقطه‌ای بدون بُعد و دارای جرم در طبیعت وجود ندارد، ولی در صورتی که فرض شود چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، بسیاری از مسائل را می‌توان به راحتی تجزیه و تحلیل نمود. بنابراین در بسیاری از موارد جرم تمام ماده را در مرکز آن متمرکز فرض نموده و آنرا به صورت نقطه‌ای جرم‌دار (به جرم تمام آن جسم) فرض می‌کنیم. بر اساس این فرض است که (بعنوان مثال) در حل مسائل تعادل، کُره‌ای بزرگ را به مانند یک نقطه که دارای وزنی برابر با وزن کره بزرگ می‌باشد، در نظر می‌گیرند.

ت) نیروی متمرکز

در صورتی که محل اثر نیرو بر یک سطح بسیار کوچک از جسم باشد، می‌توان تمام نیروها را با یک نیروی متمرکز معادل کرده و نقطه اثر آن نیروی جایگزین را، نقطه اثر تمام آن نیروها فرض نمود. این فرض و ایده‌آل کردن نیرو در سهولت محاسبات بسیار مؤثر است. اگرچه در واقعیت، نیروی متمرکز وجود ندارد (زیرا نیرو برای اثر بر یک جسم به یک سطح نیاز دارد) ولی در ساده‌سازی‌ها نیرو را به صورت متمرکز در یک نقطه در نظر می‌گیرند.

قوانین پایه مکانیک

به صورت فهرست‌وار و خلاصه قوانین پایه مکانیک عبارتند از:

الف) قانون اول نیوتن

تمام اجسام به حرکت یکنواخت خود در جهت مستقیم با سرعت ثابت ادامه داده یا در حالت سکون باقی می‌مانند مگر اینکه نیرویی به آنها وارد شود که در آن صورت تغییر سرعت اجباری است.

ب) قانون دوم نیوتن

شتاب یک جسم با نیرویی که بر آن وارد می‌شود، متناسب و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

پ) قانون سوم نیوتن

برای هر عملی **(Action)**، عکس‌العملی **(Reaction)** برابر و در خلاف جهت وجود دارد.

ت) قانون جاذبه عمومی نیوتن

نیروی جاذبه بین دو نقطه مادی، در راستای خط مابین دو نقطه است و مقدار آن با حاصل‌ضرب جرم‌های دو نقطه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله آن دو نقطه نسبت عکس دارد. به عبارت دیگر نیروی جاذبه F برابر $F = G\frac{m_1.m_2}{r^2}$ است که در آن m_1 و m_2 جرم‌های دو نقطه و r فاصله بین آنهاست. G ثابت تناسب است و مقدار آن به واحدهای انتخابی بستگی دارد.

مدنظر باشد که در بحث استاتیک و حل مسائل مربوط به آن از قانون دوم و سوم زیاد استفاده می‌شود.

کمیت‌های اسکالر و برداری (Scalar & Vectors Quantities)

کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک به دو دسته کلی اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

الف) کمیت‌های اسکالر

کمیت‌هایی را که فقط دارای مقدار هستند، کمیت‌های اسکالر گویند. به عبارتی دیگر برای توصیف آنها یک مقدار عددی کافی است. جرم، دما، زمان و طول نمونه‌هایی از این نوع کمیت‌ها هستند.

ب) کمیت‌های برداری

کمیت‌های برداری، آنهایی هستند که علاوه بر مقدار، دارای جهت (سو) و راستا (امتداد) نیز می‌باشند. از جمله این کمیت‌ها می‌توان سرعت، شتاب، نیرو و گشتاور را نام برد. برای تشخیص کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، در روابط و نوشتار، علامت بردار (سهم) را بر روی کمیت‌های برداری اضافه می‌کنند. کمیات برداری (بردارها) به نوبهٔ خود به سه دسته تقسیم می‌شوند:

ب ـ ۱) بردار آزاد (Free Vector)

برداری است که می‌توان آنرا بدون تغییر اثر و خاصیت، به هر نقطه فضا انتقال داد، به شرطی که راستا، مقدار و جهت آن تغییر نکند. دو بردار آزاد در صورتی که موازی، هم‌جهت و دارای مقدار یکسان باشند مساوی‌اند. ضمناً دو بردار آزاد مساوی را «همسنگ» می‌نامند.

ب ـ۲) بردار لغزان (Transmissible Vector)

برداری است که می‌توان آن را به هر نقطه از همان راستا انتقال داد بدون آنکه اثرش تغییر کند، البته به شرطی که جهت اولیه آن حفظ شود. دو بردار لغزانی که هر دو روی یک راستا، دارای یک جهت و یک مقدار باشند مساوی‌اند. این دو بردار لغزان «همارز» نامیده می‌شود.

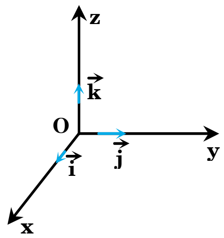
پ ـ۳) بردار بسته (Bound Vector)

بردار بسته برداری است که نقطه اثر آن فقط یک نقطه باشد و با هر گونه تغییری در راستا و نقطه اثر آن، ویژگی و خاصیت اولیه را از دست می‌دهد.

جبر بردارها

از آن‌جایی که مبحث استاتیک در حالت سه بعدی (فضایی) به صورت برداری تحلیل می‌شود، لذا شناخت کامل کمیت‌های برداری و جبر بردارها (شامل تمام اطلاعات و اصطلاحات موجود در بردارها، قوانین و روش‌های ترکیب بردارها) الزامی است. در زیر به تفکیک به این موضوعات پرداخته می‌شود:

الف) دستگاه محورهای مختصات سه بعدی و بردارهای یکه



شکل ۲. دستگاه محورهای مختصات مستقیم

اگر محورهای سه بعدی oxyz طوری باشند که وقتی شخصی روی محور oz می‌ایستد و پای او روی نقطه o و سرش به طرف جهت مثبت محور z باشد، حرکت محور x به طرف محور y از طرف زاویه کوچکتر از ۱۸۰°، در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) ببیند (قانون دست راست)، به چنین محورهایی، سه وجهی (دستگاه مختصات مستقیم) گویند. در غیر این صورت سه وجهی معکوس است. بردار یکه در جهت محور x با $\vec{i}$، در جهت محور y با $\vec{j}$ و در جهت محور z با $\vec{k}$ نمایش داده می‌شود.

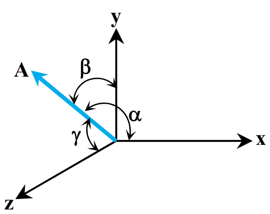
ب) قدر مطلق (اساس) یک بردار

یک کمیت برداری عموماً به صورت مجموع هندسی (ترکیب i، j و k) بیان می‌شود.

طبق تعریف، جذر مجموع مربعات مؤلفه‌های طول، عرض و ارتفاع یک بردار را قدرمطلق (اساس، اندازه یا مقدار) آن بردار گویند. منظور از مقدار یک بردار عددی مثبت برابر با طول آن می‌باشد. بنابراین مقدار یک بردار $(\vec{A})$ کمیتی است اسکالر و همیشه مثبت که به صورت $|\vec{A}|$ نمایش داده می‌شود.

همان‌طور که مطرح شد اگر بردار A به صورت: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ باشد، در این صورت اندازه آن $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ خواهد بود.

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که فقط اندازه بردار صفر، صفر خواهد شد. در یک فضای سه بعدی، اگر α، β و γ به ترتیب زوایای یک بردار با محورهای سه‌گانه x، y و z باشند، کسینوس‌های هادی که زوایای بردار با سه محور مختصات می‌باشند عبارتند از:



شکل ۳. نمایش یک بردار در فضا

$$\begin{cases} \cos\alpha = \ell & \text{(زاویه بردار فضایی با محور x)} \\ \cos\beta = m & \text{(زاویه بردار فضایی با محور y)} \\ \cos\gamma = n & \text{(زاویه بردار فضایی با محور z)} \end{cases}$$

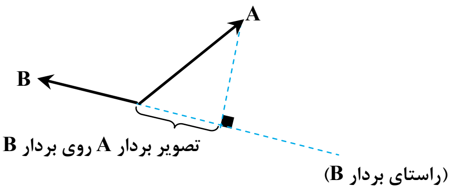
برای محاسبه کسینوس‌های هادی یک بردار $(\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$ به روش زیر عمل می‌کنند:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\ ,\quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}\ ,\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

که در آن $|\vec{A}|$ مقدار بردار A می‌باشد.

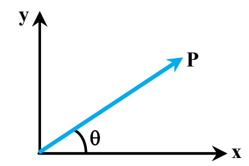
پ) تصویر یک بردار روی یک محور

از نظر هندسی برای تعیین تصویر یک بردار روی بردار دیگر، کافی است از انتهای بردار اول به راستای بردار دوم، عمودی رسم شود. به اندازه‌ای که از این ترسیم به‌دست می‌آید تصویر بردار (به شرح شکل روبرو) گویند.



شکل ۴. روش هندسی برای تعیین تصویر یک بردار روی بردار دیگر

برای به‌دست آوردن تصویر یک بردار (صفحه‌ای) بر روی یک محور، به‌صورت محاسباتی کافی است اندازه بردار اولیه در کسینوس زاویه بین آن بردار با محور مورد نظر ضرب شود، لذا:



شکل ۵. نمایش یک بردار در صفحه

(تصویر بردار P روی محور x) تصویر افقی بردار P $= P.\cos\theta$

(تصویر بردار P روی محور y) تصویر عمودی بردار P $= P.\cos(90^\circ - \theta) = P.\sin\theta$

ت) جمع و تفریق بردارها

یکی از کاربردی‌ترین دستورالعمل‌ها در جبر بردارها، روش‌های گوناگون جمع و تفریق بردارها می‌باشد.

جمع بردارهای آزاد (برآیند) در صفحه، طبق قانون مثلث (روش ترسیمی) به صورت زیر انجام می‌شود:

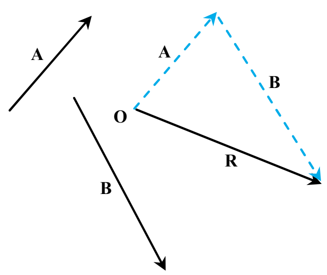
فرض کنید دو بردار آزاد $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وجود داشته باشند، برای اینکه بتوانید بردار برآیند را رسم کنید، ابتدا بردار اول $(\vec{A})$ را رسم کرده و از انتهای بردار اول بردار دوم $(\vec{B})$ را رسم نمایید. برداری که ابتدای $\vec{A}$ را به انتهای $\vec{B}$ متصل می‌کند، بردار برآیند می‌باشد.

توجه داشته باشید که جمع دو بردار (برآیند) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اینگونه نوشته می‌شود:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$$

ملاحظه می‌شود که ترتیب رسم دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تأثیری در اندازه برآیند آنها ندارد، بنابراین:

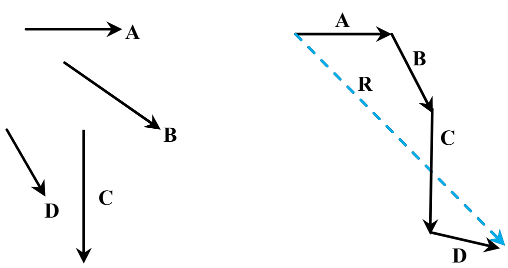
$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{R}$ یعنی جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد.



شکل ۶. برآیند دو بردار به روش مثلثی

روش مثلثی جمع بردارها را می‌توان به بیش از دو بردار نیز تعمیم داد، به این صورت که برای جمع چند بردار به روش مثلثی، کافی است بردارها بطور متوالی دنبال یکدیگر رسم شوند. در این حالت بردار برآیند، برداری است که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار متصل نماید. دقت شود که در جمع بردارها به روش مثلثی محدودیت تعداد وجود ندارد. در حالت خاصی بردار برآیندها صفر می‌شود و آن حالتی است که بردارهای اولیه خود به خود شکل بسته‌ای به وجود آورند.

یکی دیگر از روش‌هایی که به وسیله‌ی آن می‌توان بردار برآیند را ترسیم نمود، روش متوازی‌الاضلاع است، چون این روش در هر بار ترسیم فقط می‌تواند برآیند دو بردار را نشان دهد، به نوعی کاربرد بسیار محدودتری نسبت به روش مثلثی دارد.



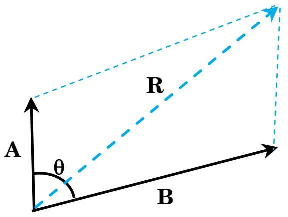
شکل ۷. نحوه ترسیم برآیند چند بردار به روش مثلثی

نکته۱: این نکته را مدنظر داشته باشید که در یک چند ضلعی (کثیرالاضلاع) بردارها، اگر فقط یک بردار نسبت به سایر بردارهای شکل، جهت متفاوتی داشته باشد، آن بردار، برآیند دیگر بردارها می‌باشد.

اندازه برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش تحلیلی (ریاضی) به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \times |\vec{A}| \times |\vec{B}| \times \cos\theta}$$

که θ در رابطه‌ی بالا زاویه بین دو بردار است زمانی که آن دو از یک نقطه مشترک رسم شده باشند.



شکل ۸. شماتیک برآیند دو بردار به روش تحلیلی

روش تحلیلی برای محاسبه اندازه برآیند، زمانی کاربرد دارد که اندازه بردارهای اولیه و زاویه بین آن دو مشخص باشد.

نکته۲: توجه شود که برآیند دو بردار هم اندازه که زاویه بین آنها 120° باشد برابر با اندازه همان بردار خواهد شد.

از آنجایی که روش تحلیلی فقط برای محاسبه برآیند دو بردار معتبر است، بنابراین برای محاسبه برآیند چند بردار (بیش از دو بردار) به روش تحلیلی، لازم است ابتدا تصویر تمامی بردارها روی جهات اصلی محورهای مختصات (x,y,z) محاسبه شود، سپس اندازه بردار برآیند به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$|\vec{R}|=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2} \quad \text{(در فضا)} \qquad |\vec{R}|=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2} \quad \text{(در صفحه)}$$

در صورتی که بردارهای اولیه به صورت مؤلفه‌های هندسی داده شده باشند (به عنوان مثال: $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$)، منظور از جمع و تفریق آنها، جمع و یا تفریق مؤلفه‌ها به صورت نظیر به نظیر می‌باشد. یعنی:

$$\boxed{\begin{cases}\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\\ \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\end{cases} \Rightarrow \vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}}$$

در حالت کلی منظور از تفاضل دو بردار، جمع یک بردار با قرینه بردار دیگر (قرینه یک بردار، برداری است که فقط جهت آن تغییر کرده است) می‌باشد، به عبارتی:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

که با روش‌های ترسیمی و تحلیلی اشاره شده در بالا قابل انجام می‌باشد.

همچنین داریم:

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}|\times|\vec{B}|.\cos\theta}$$

مثال۱: سه بردار $\vec{V}_1=\vec{3i}-\vec{k}$ ، $\vec{V}_2=-\vec{2j}+\vec{k}$ و $\vec{V}_3=-\vec{3i}+\vec{2j}$ را در نظر بگیرید. حاصل $(\vec{V}_1+\vec{V}_2-\vec{V}_3)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\vec{k}$ ۳) $\vec{6i}-\vec{4j}$ ۴) $\vec{6i}-\vec{4j}+\vec{2k}$

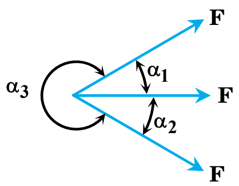
پاسخ: گزینه «۳» جمع و تفریق بردارهای V_1، V_2 و V_3 به صورت زیر و با جمع و تفریق مؤلفه‌های نظیر انجام می‌گردد:

$$\vec{V}_1+\vec{V}_2-\vec{V}_3=(\vec{3i}-\vec{k})+(-\vec{2j}+\vec{k})-(-\vec{3i}+\vec{2j})=\vec{6i}-\vec{4j}$$

در صورتی که اندازه بردار نتیجه خواسته شود، به صورت روبرو عمل می‌شود:

$$|\vec{V}_1+\vec{V}_2-\vec{V}_3|=\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{52}$$

مثال ۲: شرط آنکه برآیند سه نیروی نشان داده شده در شکل صفر باشد، آن است که؟



۱) $\alpha_1=\alpha_2=0$

۲) $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

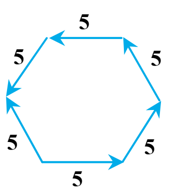
۳) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$

۴) $\alpha_1+\alpha_2=90^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» سه نیرو هم‌اندازه‌اند، بنابراین در صورتی برآیند آنها صفر خواهد شد که شکل برداری آن‌ها تقارن کامل داشته باشد، یعنی:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=120^\circ$$

مثال۳: در کثیرالاضلاع نیروهای شکل، اندازه بردار برآیند کدام است؟

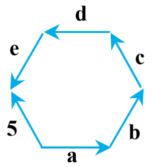


۱) ۳۰

۲) ۵

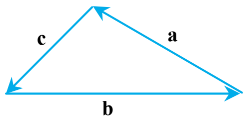
۳) صفر

۴) ۱۵



پاسخ: گزینه «۲» مطابق شکل، برآیند ۵ بردار متوالی d,c,b,a و e به روش مثلث بردار ۵ خواهد بود. دقت شود که جهت بردار ۵ با جهت دیگر بردارها متفاوت است.

مثال ۴: کدام یک از روابط زیر در شکل روبرو صادق است؟



۱) $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

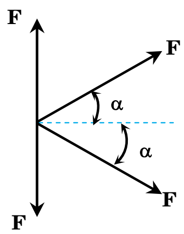
۲) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$

۳) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

۴) $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به جهات دنبال هم بردارها داریم: $\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}=۰ \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

مثال ۵: شرط آنکه اندازه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل برابر یکی از آنها باشد، آن است که؟



۱) $\alpha=۴۵^\circ$

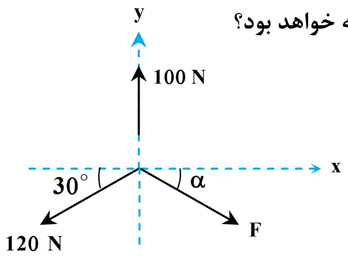
۲) $\alpha=۶۰^\circ$

۳) $\alpha=۹۰^\circ$

۴) $\alpha=۱۲۰^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به توضیحات متن، برآیند دو نیروی هم راستا به دلیل برابری اندازه آن‌ها صفر است. از طرف دیگر شرط آنکه برآیند دو نیروی مایل برابر یکی از آن دو گردد، این است که زاویه بین دو نیرو ۱۲۰°، یعنی $\alpha=۶۰^\circ$ باشد.

مثال ۶: اگر برآیند نیروهای نشان داده شده در شکل $۱۴۰\,N$ و در جهت محور x^+ باشد، زاویه α چند درجه خواهد بود؟



۱) ۷°

۲) $۹/۳^\circ$

۳) $۱۲/۱^\circ$

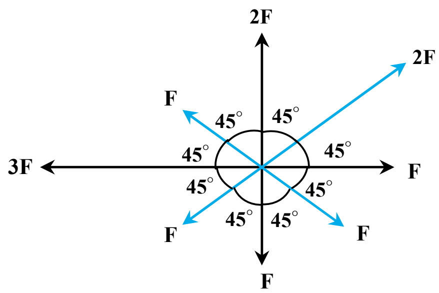
۴) $۸/۲^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرض مسأله، برآیند فقط در جهت محور xها قرار می‌گیرد، بنابراین باید برآیند مؤلفه‌ها در جهت محور yها صفر باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\sum F_y=۰ \Rightarrow ۱۰۰-۱۲۰\sin ۳۰^\circ - F\sin\alpha=۰\\ \sum F_x=۱۴۰ \Rightarrow F\cos\alpha-۱۲۰\cos ۳۰^\circ=۱۴۰\end{cases}$$

از حل همزمان دو رابطه فوق و حذف نیروی F نتیجه می‌شود: $\tan\alpha=۰/۱۶۳ \Rightarrow \alpha=۹/۳^\circ$

مثال ۷: در سیستم نیروهای شکل زیر مقدار برآیند تمامی نیروها چه ضریبی از F می‌باشد؟



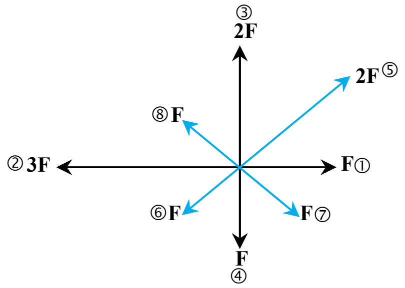
۱) $\sqrt{۶-\sqrt{۲}}$

۲) $\sqrt{۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

۳) $\sqrt{۴-\sqrt{۲}}$

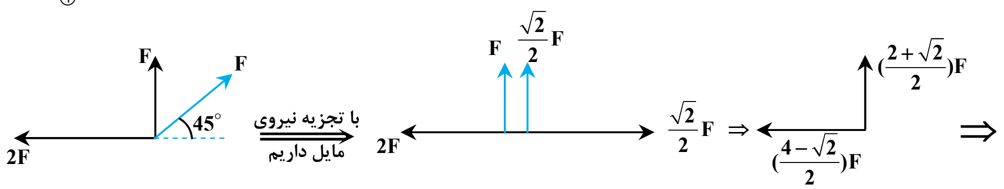
۴) $\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد نیروها زیاد است، برای کم کردن تعداد نیروها ابتدا برآیند نیروهایی را که در یک امتداد قرار دارند به صورت جمع و تفریق معمولی آنها به صورت زیر محاسبه می‌کنند.



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{برآیند (۱ و ۲)} = -۲F\ (\xleftarrow{۲F}) \\ \text{برآیند (۳ و ۴)} = +F(\uparrow F) \\ \text{برآیند (۵ و ۶)} = +F\ (\nearrow F) \\ \text{برآیند (۷ و ۸)} = ۰ \end{cases}$$

پس از این ساده‌سازی، نیروها به‌صورت زیر قابل ترسیم می‌شوند:

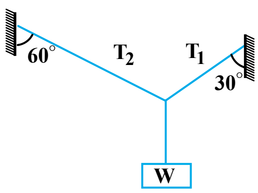


در نتیجه اندازه برآیند دو نیروی عمود بر هم برابر است با:

$$R = \sqrt{[(\frac{۴-\sqrt{۲}}{۲})F]^۲ + [(\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲})F]^۲} = \sqrt{۶-\sqrt{۲}}F$$

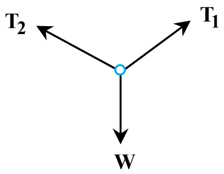
بنابراین اندازه برآیند ضریب $\sqrt{۶-\sqrt{۲}}$ از نیروی F می‌باشد.

مثال ۸: کدام‌یک از سه ضلعی‌های زیر نمایش‌دهنده نیروهای سیستم زیر می‌باشند؟



(۴)   (۳)   (۲)   (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد نقطه اتصال کابل‌ها به وزنه داریم:



بدیهی است که چون سیستم در حال تعادل است باید برآیند دو نیرو، هم امتداد و مساوی نیروی سوم باشد. اگر به زاویه اثر کشش‌های کابل دقت شود، ملاحظه می‌شود که فقط گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹: برآیند دو نیروی شکل و زاویه‌ای که برآیند با افق می‌سازد کدام است؟

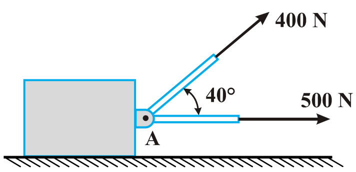
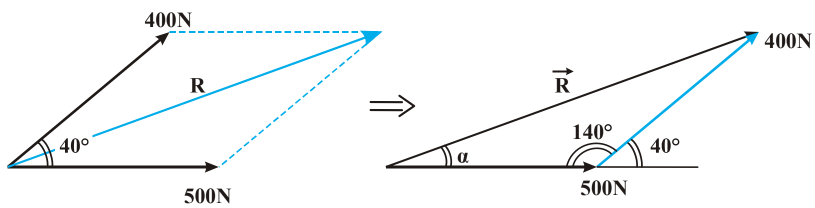


Figure P.2.10

۱) ۸۴۶/۴N و °۱۷/۷   ۲) ۸۴۶/۴N و °۰

۳) ۷۱۲/۲N و °۱۷/۷   ۴) ۷۱۲/۲N و °۰

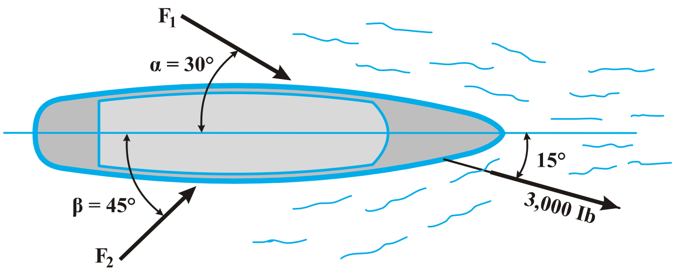
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به موقعیت نیروهای ۴۰۰ و ۵۰۰ نیوتنی داریم:



$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ - ۲F_۱F_۲\cos۱۴۰^\circ \qquad R^۲ = ۵۰۰^۲ + ۴۰۰^۲ - ۲\times۴۰۰\times۵۰۰\times\cos۱۴۰^\circ \Rightarrow R = ۸۴۶/۴N$$

$$\text{(زاویه برآیند با افق } \alpha\text{)} \quad \frac{۴۰۰}{\sin\alpha} = \frac{۸۴۶/۴}{\sin۱۴۰^\circ} \Rightarrow \alpha = ۱۷/۷^\circ$$

مثال۱۰: برای به حرکت درآوردن قایق نشان داده شده در مسیر دریایی مورد نظر نیروی ۳۰۰۰lb با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق مورد نیاز می‌باشد. برای تأمین این نیرو از دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ مطابق شکل استفاده می‌گردد. اندازه این دو نیرو به ترتیب کدامند؟



۱) ۲۱۲۱/۲ و ۷۱۹/۱

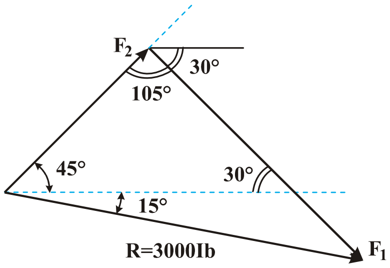
۲) ۸۰۳/۸ و ۷۱۹/۱

۳) ۲۶۸۹/۷ و ۸۰۳/۸

۴) ۲۱۲۱/۲ و ۸۰۳/۸

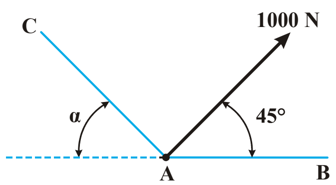
پاسخ: گزینه «۳» $F_۱$ و $F_۲$ همزمان با همدیگر، عمل نیروی ۳۰۰۰lb را انجام می‌دهند، لذا نیروی ۳۰۰۰lb برآیند آن‌ها می‌باشد. ترکیب این نیروها با استفاده از قاعده سینوس‌ها در مثلث به صورت زیر خواهد بود:

با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:



$$\begin{cases} \dfrac{R}{\sin ۱۰۵^\circ} = \dfrac{F_۱}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow F_۱ = ۲۶۸۹/۷\,\text{lb} \\ \dfrac{R}{\sin ۱۰۵^\circ} = \dfrac{F_۲}{\sin ۱۵^\circ} \Rightarrow F_۲ = ۸۰۳/۸\,\text{lb} \end{cases}$$

مثال۱۱: نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد AB و AC تجزیه می‌کنیم. اگر مؤلفه در امتداد AB برابر ۷۰۰ نیوتن باشد مؤلفه امتداد AC کدام است؟



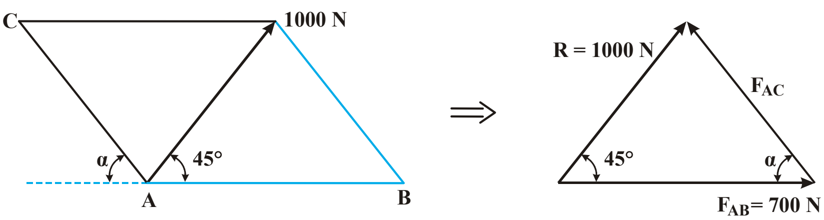
۱) $F_{AC} = ۷۰۷/۱۴$

۲) $F_{AC} = ۸۲۱/۲$

۳) $F_{AC} = ۸۳۳$

۴) $F_{AC} = ۵۰۰$

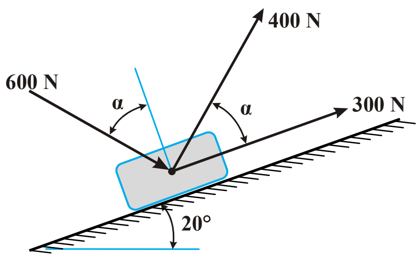
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تجزیه نیروی ۱۰۰۰N به دو مؤلفه AB و AC می‌توان نتیجه گرفت که نیروی ۱۰۰۰N برآیند دو نیروی AB و AC می‌باشد.



با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم:

$$F_{AC}^۲ = ۱۰۰۰^۲ + ۷۰۰^۲ - ۲(۷۰۰)(۱۰۰۰)\cos ۴۵^\circ \Rightarrow F_{AC} = ۷۰۷/۱۴\text{N}$$

مثال۱۲: اگر $\alpha = ۳۵^\circ$ باشد اندازه برآیند سه نیروی نشان داده شده کدام است؟



۱) ۹۷۱/۸N

۲) ۱۰۰۶/۵N

۳) ۳۰۰N

۴) ۱۱۲۵/۳N