فصل پنجم

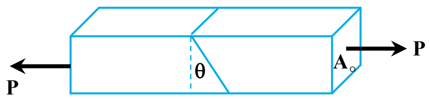
«تبدیلات تنش و کرنش»

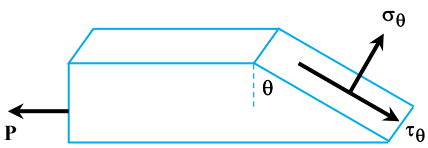
درسنامه (۱): تبدیلات تنش

تبدیلات تنش و کرنش

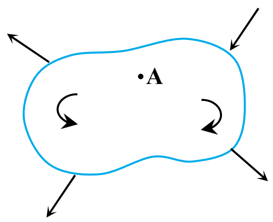
در فصول پیشین تنش در میله‌های تحت کشش یا فشار، محورهای تحت پیچش و تیرهای تحت خمش و برش مورد بررسی قرار گرفتند. این تنش‌ها همگی بر روی مقاطع عرضی عضو اثر می‌کنند، در حالی که ممکن است تنش‌های ایجاد شده در مقاطع مایل بزرگتر باشند. در فصل اول تنش بوجود آمده در صفحات مایل تحت بارگذاری محوری (کششی یا فشاری) تعیین شد، به عنوان مثال اگر جسمی مطابق شکل تحت بار محوری P قرار گیرد تنش قائم و برشی آن در صفحات مایل، به صورت زیر قابل محاسبه است. (اثبات این روابط در فصل اول آورده شده است، این در حالی است که تنش در صفحات قائم (مقاطع عرضی) برابر $\frac{P}{A_o}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{P}{A_o}\cos^2\theta \\ \tau_\theta = \dfrac{P}{A_o}\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$



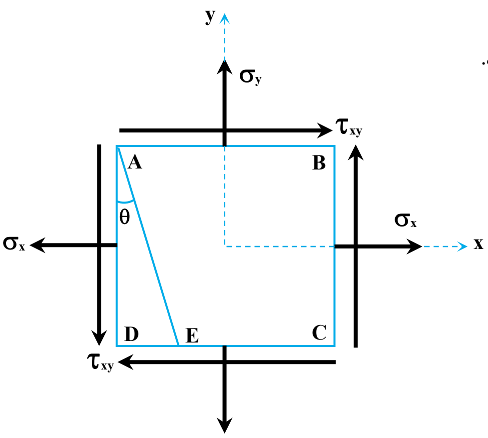


روابط فوق بیانگر آن است که با تغییر امتداد صفحات، مؤلفه‌های تنش قائم و برشی تغییر خواهند نمود. این مسئله در حالت کلی نیز صادق است. یعنی اگر جسمی مطابق شکل روبرو تحت بارگذاری خارجی قرار گیرد، مؤلفه‌های تنش در نقطه A علاوه بر آنکه وابسته به مختصات نقطه A بوده به امتداد صفحه گذرنده از نقطه A نیز وابسته می‌باشند.



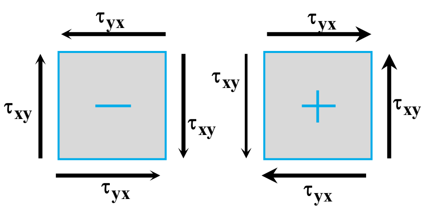
در این فصل نیز هدف بررسی مقادیر تنش و کرنش در هر نقطه از جسم در صفحات مختلف می‌باشد.

ابتدا عمومی‌ترین حالت تنش دوبعدی (صفحه‌ای) در یک نقطه دلخواه از جسم در حالت تعادل مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. برای نمایش تنش در این حالت می‌توان از یک المان بی‌نهایت کوچک به شکل روبرو استفاده کرد. تنش‌های قائم عامل بر وجوه آن σ_x و σ_y بوده و همچنین تنش برشی اعمالی بر وجوه المان τ_{xy} می‌باشد. به علت کوچکی ابعاد المان و حفظ تعادل المان در جهات x و y تنش قائم بر دو وجه مقابل مساوی بوده و تنش‌های برشی اعمال شده بر چهار وجه المان نیز به دلیل تعادل دورانی یکسان می‌باشند.

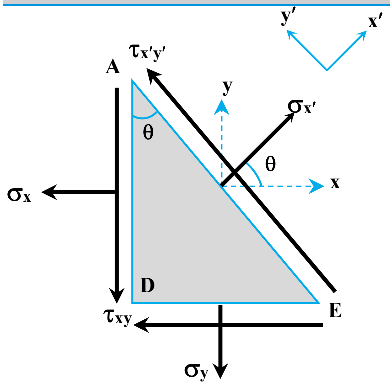


در شکل روبرو تنش‌های قائم و برشی مثبت نمایش داده شده‌اند. طبق قرارداد تنش‌های قائم کششی، مثبت و تنش‌های قائم فشاری، منفی در نظر گرفته شده و علامت تنش‌های برشی نیز مطابق شکل روبرو از قرارداد پیروی می‌کند. اگر τ_{xy} اعمال شده بر وجه سمت راست گشتاوری ایجاد نموده که حول مرکز المان در جهت پادساعتگرد باشد علامت آن را مثبت و اگر در جهت ساعتگرد باشد علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود.

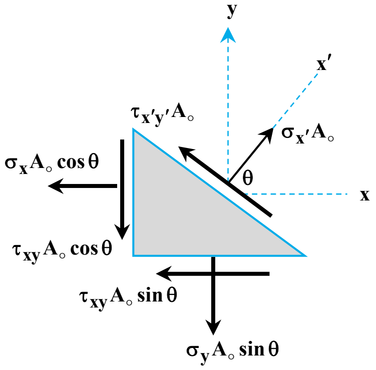
تنها در دو حالت نشان داده شده، المان تحت تنش برشی می‌تواند تعادل داشته باشد لذا هر حالت توزیع تنش برشی دیگری از منظر حفظ تعادل المان نادرست می‌باشد.



اکنون اگر تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} عامل بر وجوه المان نشان داده شده در شکل قبلی معین باشند، می‌توان مؤلفه‌های تنش قائم و برشی را در هر راستای دیگر تعیین نمود. بـه عنـوان مثـال اگـر هـدف محاسبه تنش در راستای مایل AE در المان ABCD باشد، می‌توان ابتدا گوه ADE را مطابق شـکل روبرو جدا نموده و مؤلفه‌های تنش را بر روی وجوه مختلف آن رسـم کـرد، سـپس بـا نوشـتن معـادلات تعادل مقادیر تنش‌های اعمالی بر وجه مایل را محاسبه می‌گردند.



اگر مساحت وجه مایل(صفحه **AE**) مساوی $A_\circ$ در نظر گرفته شود، از حاصل‌ضرب مؤلفه‌های تـنش در مساحت وجهی که تنش بر آن اعمال شده است، نیروی وارد بر وجـوه المـان گـوه‌ای مطـابق شـکل مقابـل بدست می‌آید. اکنون با نوشتن معادلات تعادل $\sum F_x = ۰$ و $\sum F_y = ۰$ روابط زیر بدست می‌آیند:



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow \sigma_{x'}A_\circ\cos\theta - \tau_{x'y'}A_\circ\sin\theta - \tau_{xy}A_\circ\sin\theta - \sigma_x A_\circ\cos\theta = ۰ & (۱). \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow \sigma_{x'}A_\circ\sin\theta + \tau_{x'y'}A_\circ\cos\theta - \tau_{xy}A_\circ\cos\theta - \sigma_y A_\circ\sin\theta = ۰ & (۲) \end{cases}$$

رابطه (۱) را تقسیم بر $A_\circ \cos\theta$ و رابطه (۲) را تقسیم بر $A_\circ \sin\theta$ می‌کنیم تا به نتیجه زیر برسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} - \tau_{x'y'}\mathrm{tg}\theta = \tau_{xy}\mathrm{tg}\theta + \sigma_x \\ \sigma_{x'} + \tau_{x'y'}\cot g\theta = \tau_{xy}\cot g\theta + \sigma_y \end{cases}$$

از حل دستگاه معادله فوق $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ بر حسب مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x\cos^{۲}\theta + \sigma_y\sin^{۲}\theta + ۲\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta) \end{cases}$$

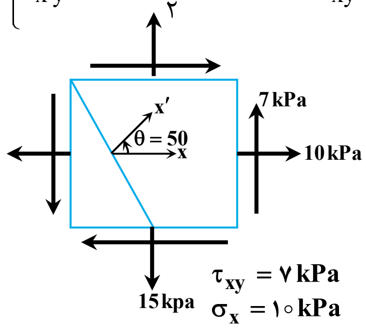
چون زاویه‌ی بین راستای x' و y' مساوی ۹۰°است، برای تعیین مؤلفه تنش قائم $\sigma_{y'}$ می‌توان در رابطه تـنش $\sigma_{x'}$ زاویـه θ را بـه زاویـه $(\theta + ۹۰)$ تبـدیل نمود. در این صورت $\sigma_{y'}$ به صورت مقابل تعیین می‌شود: $\sigma_{y'} = \sigma_x\sin^{۲}\theta + \sigma_y\cos^{۲}\theta - ۲\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$

اما با توجه به اینکه روابط مثلثاتی زیر برقرار است، می‌توان روابط فوق را به صورت ساده شده زیر بیان نمود:

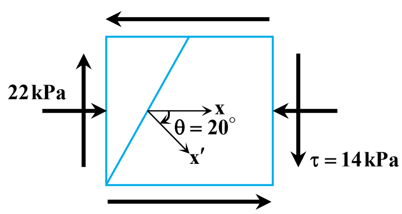
$$\sin^{۲}\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} \quad ; \quad \cos^{۲}\theta = \frac{۱+\cos ۲\theta}{۲} \quad ; \quad ۲\sin\theta\cos\theta = \sin ۲\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos ۲\theta + \tau_{xy}\sin ۲\theta \\ \sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos ۲\theta - \tau_{xy}\sin ۲\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\sin ۲\theta + \tau_{xy}\cos ۲\theta \end{cases}$$

در روابط فوق برای تعیین علامـت θ از محـور x بـه سـمت محور x' حرکت کرده اگـر ایـن حرکـت پادسـاعتگرد باشـد علامت θ مثبت است در غیر ایـن صـورت منفـی اسـت. بـه عنوان مثال در المان‌های شکل مقابل مقادیر مؤلفه‌های تنش با در نظر گرفتن قراردادهای ذکر شده به صورت روبرو است:



$\tau_{xy} = ۷\,\mathrm{kPa}$
$\sigma_x = ۱۰\,\mathrm{kPa}$
$\sigma_y = ۱۵\,\mathrm{kPa}$
$\theta = ۵۰^\circ$



$\tau_{xy} = -۱۴\,\mathrm{kPa}$
$\sigma_x = -۲۲\,\mathrm{kPa}$
$\sigma_y = ۰$
$\theta = -۲۰^\circ$

روابط فوق به معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای معروف می‌باشند. با جمع دو رابطه اول می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\sigma_{x'}+\sigma_{y'}=\left[\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta\right]+\left[\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta-\tau_{xy}\sin2\theta\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'}+\sigma_{y'}=\sigma_x+\sigma_y$$

راستای x و y و همچنین راستای x' و y' راستاهای اختیاری بوده، بنابراین می‌توان نتیجه فوق را برای راستایی مانند x'' و y'' نیز بدست آورد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_{x''}+\sigma_{y''}=\sigma_{x'}+\sigma_{y'}=\sigma_x+\sigma_y=\ldots$$

تذکر ۱: طبق رابطه فوق در هر نقطه از جسم تحت تنش، مجموع تنش‌های متعامد اعمال شده بر وجوه المان تنش صفحه‌ای، ثابت بوده و مستقل از زاویه‌ی θ می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ تابعی از متغیر θ می‌باشند، به ازای زاویه مشخصی تنش‌های قائم اکسترمم می‌شوند. به زاویه صفحه‌ای که تنش‌های قائم بر روی آن دارای حداکثر و حداقل مقدار می‌شوند، زوایای اصلی و به مقادیر تنش‌های نظیر آن زوایا، تنشهای اصلی و به صفحاتی که تنش‌ها در آن صفحات اکسترمم می‌شوند، صفحات اصلی گفته می‌شود. زوایای اصلی را می‌توان با مشتق‌گیری از مؤلفه تنش σ'_x و مساوی صفر قرار دادن آن بدست آورد.

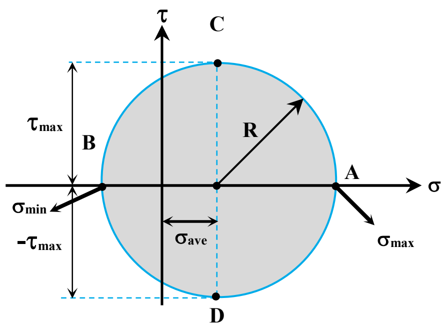
$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta}=0\Rightarrow -2\times\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta_P+2\tau_{xy}\cos2\theta_P=0\Rightarrow \boxed{\tan2\theta_P=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}}$$

به θ_P زاویه صفحات اصلی گفته می‌شود.

از رابطه‌ی فوق دو مقدار $2\theta_P$ که 180° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_P که 90° با هم اختلاف دارند بدست می‌آید. مقادیر تنش‌های اصلی را می‌توان با قرار دادن زوایای اصلی در رابطه‌ی تنش $\sigma_{x'}$ بدست آورد که نتیجه ساده شده آن توسط روابط زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{max}=\sigma_{ave}+R\quad,\quad \sigma_{min}=\sigma_{ave}-R$$

σ_{ave} و R به ترتیب مختصات مرکز دایره مور و شعاع دایره مور را نشان می‌دهد که مقدار آن بر حسب مؤلفه‌های تنش از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:



$$\boxed{\begin{cases}\sigma_{ave}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\\[2mm] R=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{cases}}$$

دایره مور

از این دایره برای تعیین نمودن تنش در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم استفاده می‌شود. به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} معین باشند می‌توان به جای استفاده از روابط مربوط به تبدیلات تنش، دایره مور تنش را رسم نموده و از آن برای تعیین مؤلفه‌های تنش در راستاهای دیگر استفاده نمود. اما برای بدست آوردن معادله دایره مور، می‌توان روابط مربوط به $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$، را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta\right)^2$$

$$\tau_{x'y'}^2=\left(-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta\right)^2$$

با جمع نمودن دو رابطه فوق به رابطه مقابل خواهیم رسید:

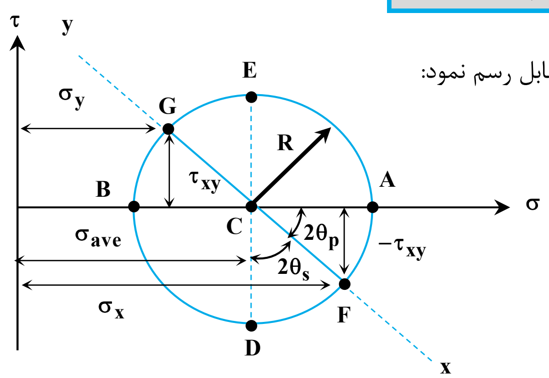
$$\left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{x'y'}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

این رابطه، معادله یک دایره به مختصات مرکز $C\left|\begin{matrix}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ و شعاع R می‌باشد. بنابراین می‌توان معادله دایره مور به قرار زیر است:

$$(\sigma_{x'}-\sigma_{ave})^2+\tau_{x'y'}^2=R^2$$

که در آن مقادیر σ_{ave} و R به ترتیب عبارتند از:

$$\boxed{\sigma_{ave}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲} \quad ; \quad R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}}$$



با مشخص بودن مختصات مرکز دایره مور و همچنین شعاع آن می‌توان دایره را به شکل مقابل رسم نمود: همان‌طور که از شکل مشخص است محور افقی بیانگر محور تنش قائم بوده و محور عمودی نشان‌دهنده تنش برشی می‌باشد. نقاط روی محیط دایره مقادیر تنش را در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم بیان می‌کنند. نقاط A و B به ترتیب معرف ماکزیمم و مینیمم تنش قائم می‌باشند (تنش‌های اصلی) و نقاط E و D نیز معرف ماکزیمم تنش برشی هستند.

تذکر ۲: در صفحات اصلی تنش، تنش‌های قائم دارای مقادیر ماکزیمم و مینیمم بوده و در آن صفحات هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد. این مطلب را می‌توان از شکل دایره مور نیز دریافت نمود. مؤلفه تنش برشی در نقاط A و B مساوی صفر است. $\theta=\theta_P \Rightarrow \sigma_x,\sigma_y=\sigma_{max}$ یا σ_{min} ، $\tau_{xy}=۰$

تذکر ۳: مقدار ماکزیمم تنش برشی مساوی شعاع دایره مور است. $(\tau_{max}=R)$ و تنش قائم نظیر تنش برشی ماکزیمم مساوی σ_{ave} می‌باشد. مقدار ماکزیمم تنش برشی را می‌توان با قرار دادن $\theta=\theta_s$ در فرمول τ_{xy} بدست آورد. (θ_S زاویه‌ای است که تنش برشی ماکزیمم در آن صفحه روی می‌دهد.) زاویه‌ی صفحات تنش برشی ماکزیمم به روش زیر بدست می‌آید:

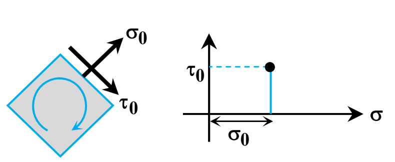
$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta}=۰ \Rightarrow -۲\times\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos۲\theta_s-۲\tau_{xy}\sin۲\theta_s=۰ \Rightarrow \tan۲\theta_s=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲\tau_{xy}}$$

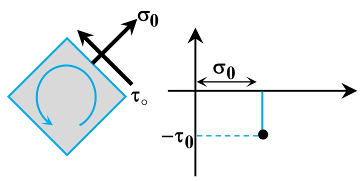
$$\theta=\theta_s \Rightarrow \tau_{xy}=\tau_{max} \ ; \ \sigma_x=\sigma_y=\sigma_{ave}$$

رابطه‌ی فوق دو مقدار $۲\theta_s$ را که ۱۸۰° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_s را که با هم ۹۰° اختلاف دارند تعیین می‌کند.

تذکر ۴: با مقایسه روابط مربوط به امتداد تنش‌های قائم اصلی و امتداد تنش برشی اصلی می‌توان نتیجه گرفت که صفحات تنش برشی اصلی تحت زاویه‌ی ۴۵° نسبت به صفحات تنش قائم اصلی قرار دارند، همچنین با توجه به دایره مور می‌توان گفت مقدار تنش برشی حداکثر مساوی نصف اختلاف بین تنش‌های اصلی است چون تفاضل تنش‌های اصلی برابر قطر دایره مور می‌باشد. $\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{۲}$

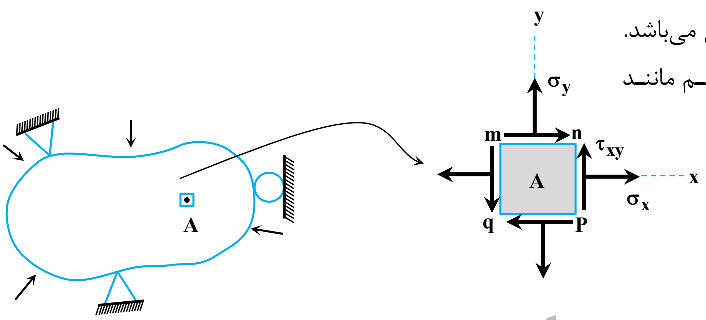
در تعیین علامت مؤلفه مربوط به تنش برشی برای ترسیم دایره مور به این صورت عمل می‌شود که اگر تنش برشی عامل بر یک سطح المان تمایل به دوران المان در جهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت دارد نقطه نظیر آن در روی دایره مور دارای تنش برشی با مقدار مثبت بوده و در بالای محور افقی (محور σ) قرار می‌گیرد و برعکس.



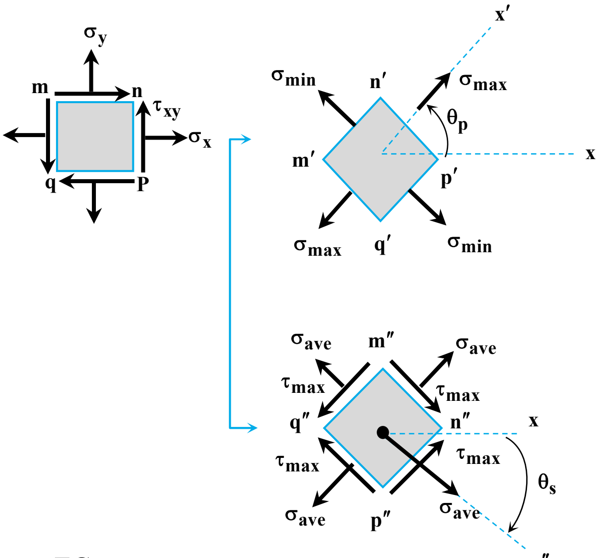


همانطور که قبلاً نیز اشاره شد رسم دایره مور نیازمند آن است که مختصات مرکز دایره $C(\sigma_{ave},۰)$ و شعاع دایره R معلوم باشند یا آنکه مختصات دو نقطه دایره معلوم بوده از وصل کردن این دو نقطه به یکدیگر خطی بدست می‌آید که قطر دایره می‌باشد. این قطر محور افقی را در نقطه C که مرکز دایره است قطع خواهد نمود. هر نقطه توسط مؤلفه‌های آن تعیین می‌گردد. مؤلفه x، مربوط به تنش قائم بر وجه المان می‌باشد و مؤلفه y، مربوط به تنش برشی در وجه مذکور است. تنش قائم کششی، مثبت و تنش قائم فشاری، منفی می‌باشد.

به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش در راستای x و y در یک نقطه از جسم مانند A مشخص باشند، می‌توان دایره مور مربوط به آن را رسم نمود.



ذکر این نکته لازم است که تنش‌های عامل بر یک وجه نشان‌دهنده یک نقطه از محیط دایره است. تنش‌های قائم و برشی اعمال شده بر وجه np معرف نقطه F و تنش‌های قائم و برشی اعمال‌شده بر وجه mn معرف نقطه G از محیط دایره‌ی مور در شکل قبلی است. با وصل کردن این دو نقطه قطر دایره بدست آمده که محور σ را در نقطه C مرکز دایره قطع می‌کند. همان طور که از این شکل مشاهده می‌شود قطر FG بیانگر تنش‌های اعمالی در دو راستای x و y است که در روی دایره مور با یکدیگر 180° اختلاف دارند، این مسئله بیان‌کننده آن است که اگر اختلاف زاویه‌ی بین دو راستا در المان مساوی θ باشد در روی دایره مور این اختلاف زاویه مساوی 2θ خواهد بود. در شکل مذکور زاویه بین قطر FG و قطر AB که معرف تنش‌های قائم اصلی است، مساوی $2\theta_p$ می‌باشد. اگر قطر FG به اندازه‌ی $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد دوران کند به قطر AB رسیده که تنش‌ها در دو انتهای آن، تنش‌های اصلی است.



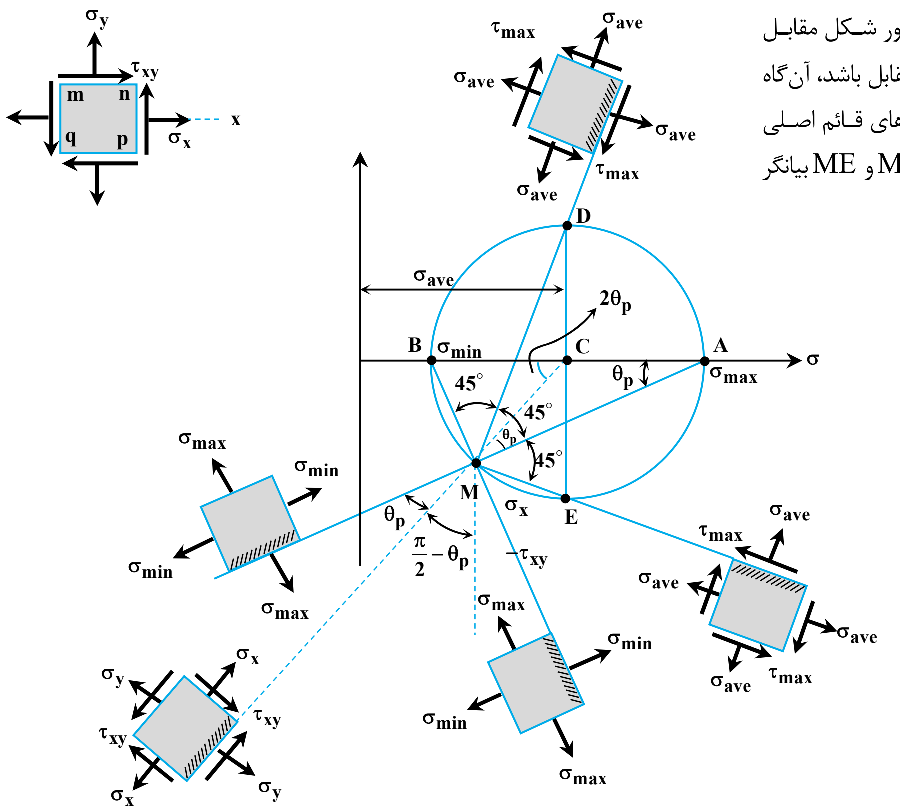
بنابراین برای رسیدن به تنش‌های اصلی در المان کافی است آن را به اندازه‌ی θ_p پادساعتگرد دوران داد. همچنین با گردش ساعتگرد قطر FG به اندازه‌ی $2\theta_s$ به قطر DE رسیده که بیانگر تنش‌های برشی اصلی است. در نتیجه برای رسیدن به تنش برشی ماکزیمم در المان کافی است آن را به اندازه‌ی θ_s در جهت گردش حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانید. شکل فوق نشان‌دهنده نحوه چرخش المان برای رسیدن به تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی است. همانطور که از مطالب فوق نیز مشخص است جهت چرخش المان با جهت حرکت روی دایره‌ی مور یکسان است.

همانطور که در شکل فوق مشخص است در حالتی که تنش‌های اصلی روی المان اعمال می‌شود، روی یک وجه تنش قائم ماکزیمم و روی وجه دیگر تنش قائم مینیمم است. همانطور که در دایره مور شکل قبلی ملاحظه می‌شود اگر خط FG به اندازه $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد بچرخد بر خط AB منطبق می‌گردد و نقطه F بر نقطه A که متناظر با تنش قائم ماکزیمم است منطبق می‌شود لذا با چرخش پادساعتگرد، تنش‌ها روی وجه F (همان راستای x) به ماکزیمم مقدار و روی وجه دیگر به مینیمم مقدار می‌رسد.

با جمع کردن دو زاویه θ_p و θ_s اختلاف زاویه بین محورهای x' و x'' یا زاویه بین تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی بدست می‌آید.

$$2\theta_p + 2\theta_s = 90 \Rightarrow \theta_p + \theta_s = 45^\circ$$ (با توجه به دایره مور)

تذکر ۵: اگر نقطه‌ای مانند M در دایره مور شکل مقابل معرف تنش‌های اعمالی بر وجه np از المان شکل مقابل باشد، آن‌گاه راستای وترهای AM و BM معرف راستای تنش‌های قائم اصلی در المان بوده و به همین ترتیب راستای وترهای MD و ME بیانگر راستای تنش‌های برشی اصلی می‌باشد.



نتایج:

۱ـ تنش‌های اصلی به تنش‌های اکسترمم (تنش‌های حداکثر σ_{max} و حداقل σ_{min}) گفته شده که معمولاً آن‌ها را با σ_1 و σ_2 نمایش می‌دهند، همچنین هیچ‌گونه تنش برشی به همراه تنش اصلی بر روی المان ظاهر نمی‌شود.

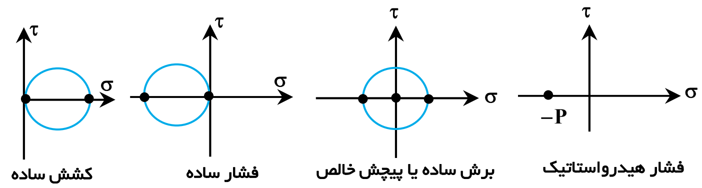
۲ـ تنش برشی اصلی یا تنش برشی ماکزیمم مساوی شعاع دایره مور می‌باشد که از طرفی برابر تفاضل تنش قائم حداکثر و تنش قائم حداقل تقسیم بر دو خواهد بود. $(\tau_{max}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲})$. همچنین در این حالت تنش قائم مساوی مقدار میانگین تنش قائم σ_{ave} می‌باشد. $(\sigma_x=\sigma_y=\sigma_{ave}=\frac{\sigma_۱+\sigma_۲}{۲})$

۳ـ اگر تنش‌های قائم اصلی با هم برابر باشند $(\sigma_۱=\sigma_۲)$ آن‌گاه دایره مور به یک نقطه تبدیل شده و تنش برشی در این حالت مساوی صفر خواهد بود.

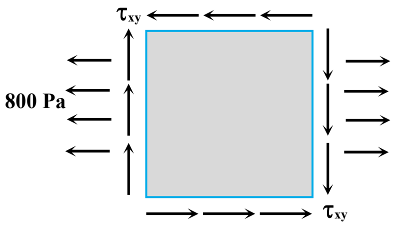
۴ـ مجموع تنش‌های قائم مساوی مجموع تنش‌های اکسترمم بوده و این مقدار برای یک نقطه از جسم همواره کمیتی ثابت است.

$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_۱+\sigma_۲=$ مقدار ثابت

۵ـ برای چند حالت خاص از بارگذاری، دایره مور در اشکال زیر رسم شده است:



مثال۱: در شکل تنش‌های وارده در یک نقطه از سازه‌ای را ملاحظه می‌کنید. در صورتی که تنش اصلی کششی برابر Pa ۱۲۰۰ باشد، میزان تنش برشی ماکزیمم برابر است با:



۱) ۱۰۰۰

۲) ۶۰۰

۳) ۸۰۰

۴) ۱۲۰۰

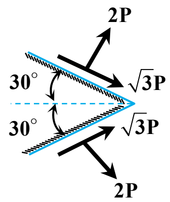
پاسخ: گزینه «۳» **روش اول:** تنش اصلی را می‌توان طبق رابطه زیر نوشت:

$$\sigma_۱=\sigma_{ave}+R\Rightarrow\sigma_۱=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}\Rightarrow ۱۲۰۰=\frac{۸۰۰+۰}{۲}+R\Rightarrow R=۸۰۰Pa=\tau_{max}$$

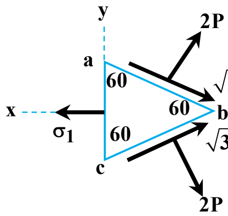
از طرفی تنش برشی ماکزیمم، مساوی شعاع دایره مور است.

روش دوم: $$\sigma_۱+\sigma_۲=\sigma_x+\sigma_y\Rightarrow ۱۲۰۰+\sigma_۲=۸۰۰+۰\Rightarrow\sigma_۲=-۴۰۰Pa\Rightarrow\tau_{max}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲}=\frac{۱۲۰۰-(-۴۰۰)}{۲}=۸۰۰Pa$$

مثال۲: مقدار و امتداد نیروهای موثر بر دو صفحه متقاطع در شکل نشان داده شده است، امتداد و مقدار تنش‌های اصلی در نقطه تقاطع دو صفحه چه اندازه است؟

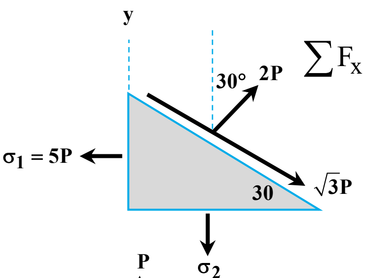


پاسخ: ابتدا، المان مثلثی abc مطابق شکل روبرو رسم می‌شود. اگر تنش‌های قائم اصلی با $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نمایش داده شوند، آن‌گاه راستای افقی x یک امتداد اصلی است چرا که تنش‌های اعمالی بر وجوه مایل به گونه‌ای می‌باشند که برای حفظ تعادل المان گوهای شکل مقابل، (در راستای y) نیاز به حضور تنش برشی بر روی وجه ac نیست. زیرا مؤلفه y تمامی نیروها، یکدیگر را خنثی کرده و بنابراین نیرویی در راستای وجه ac اعمال نخواهد گردید.



(به علت مساوی بودن زوایا، مساحت وجوه مختلف المان برابر است در نتیجه مساحت تمامی وجوه المان مثلثی برابر A در نظر گرفته می‌شود.)

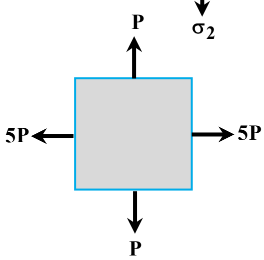
$$\sum F_x=۰\Rightarrow+\sigma_۱A-۲(۲PA)\sin ۳۰-۲(\sqrt{۳}PA)\cos ۳۰=۰\Rightarrow\sigma_۱=۵P$$



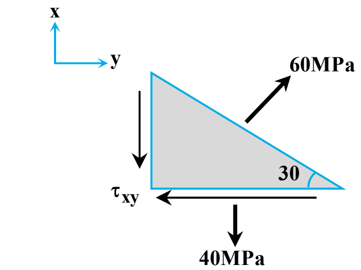
چون محور x یک امتداد اصلی است، بنابراین محور y که بر محور x عمود می‌باشد نیز یک امتداد اصلی می‌باشد، لذا کافی است برای تعیین $\sigma_۲$ از تعادل المان گوهای شکل مقابل استفاده کرد.

اگر مساحت وجه مایل مساوی A در نظر گرفته شود، آن‌گاه مساحت وجه افقی برابر $A\cos ۳۰$ و مساحت وجه قائم برابر $A\sin ۳۰$ خواهد بود. اکنون با نوشتن معادله تعادل در راستای y رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y=۰\Rightarrow-(\sigma_۲A\cos ۳۰)+(۲PA)\cos ۳۰-(\sqrt{۳}PA)\sin ۳۰=۰\Rightarrow\sigma_۲=P$$



بنابراین به طور خلاصه می‌توان المان تنش‌های اصلی را به شکل مقابل رسم نمود:



مثال ۳: تنش برشی اعمال شده بر المان گوه‌ای شکل مقابل چه اندازه است؟

۱) $۲۰\sqrt{۳}$　　۲) ۲۰

۳) $۱۰\sqrt{۳}$　　۴) $\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: چون بر وجه مایل المان گوه‌ای شکل تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین تنش قائم $۶۰\,MPa$ یک تنش اصلی است. از طرفی می‌توان نوشت:

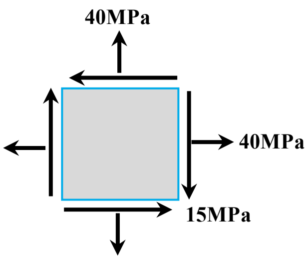
$$\sigma_۱ = \sigma_{ave} + R \Rightarrow ۶۰ = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲})^۲ + \tau_{xy}^۲}$$

$$\Rightarrow ۶۰ = \frac{۰ + ۴۰}{۲} + \sqrt{(\frac{۰ - ۴۰}{۲})^۲ + \tau_{xy}^۲} \Rightarrow ۴۰^۲ = ۲۰^۲ + \tau_{xy}^۲ \Rightarrow \tau_{xy} = ۲۰\sqrt{۳}MPa$$

روش دوم: با نوشتن معادله تعادل در راستای x نیز می‌توان همین نتیجه را گرفت. اگر مساحت وجه مایل A باشد مساحت وجه افقی برابر $A\cos ۳۰$ و مساحت وجه قائم برابر $A\sin ۳۰$ می‌باشد. پس داریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow (۶۰A)\sin ۳۰ - \tau_{xy}(A\cos ۳۰) = ۰ \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{۶۰}{\sqrt{۳}} = ۲۰\sqrt{۳}\ MPa$$

توجه: راه تشخیص اینکه یک تنش، قائم اصلی بوده آن است که بر وجهی که تنش قائم اعمال شده، تنش برشی برابر صفر باشد.

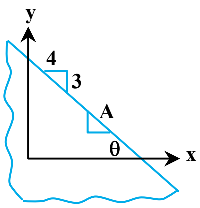


مثال ۴: تنش برشی ماکزیمم در المان شکل زیر مساوی کدامیک از گزینه‌ها است؟

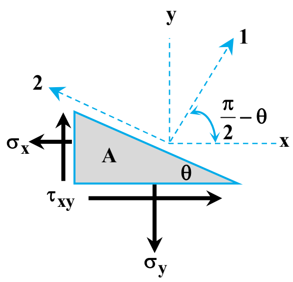
۱) $۴۰\,MPa$　　۲) $۲۰\,MPa$

۳) $۱۵MPa$　　۴) $۲۵MPa$

پاسخ: گزینه «۳» هرگاه تنش‌های قائم اعمالی بر وجوه متعامد المان، یعنی σ_x و σ_y با هم برابر باشند، آن‌گاه تنش برشی وارد بر اضلاع المان مساوی تنش برشی ماکزیمم است.به طور کلی تنها در یک حالت، تنش‌های قائم با هم برابر می‌شوند و آن مربوط به حالتی است که تنش برشی اعمال شده بر المان دارای حداکثر مقدارش باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در شکل فوق به دلیل مساوی بودن تنش‌های قائم σ_x و σ_y، تنش برشی τ_{xy} وارد شده بر وجوه المان مساوی تنش برشی ماکزیمم است.



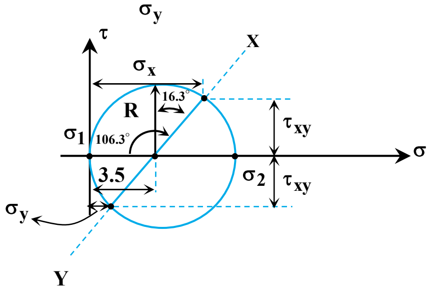
مثال ۵: در نقطه‌ی A از لبه مورب و بارگذاری نشده یک جسم ارتجاعی حداکثر تنش برشی مساوی $۳/۵\frac{N}{mm^۲}$ می‌باشد. مقادیر تنش‌های اصلی و همچنین مؤلفه‌های تنش را در راستای x و y بدست آورید.



$\sigma_1 = ۰$
$R = \tau_{max} = 3.5Mpa$

پاسخ: چون بر روی لبه A هیچ‌گونه تنشی وارد نشده است $(\sigma = \tau = ۰)$، تنش برشی بر روی این لبه صفر می‌باشد. بنابراین راستای عمود بر وجه مایل المان A یک امتداد اصلی است. از طرفی تنش برشی ماکزیمم که مساوی شعاع دایره مور می‌باشد در صورت مسئله داده شده است. بنابراین دایره مور تنش به صورت زیر ترسیم می‌شود:

(نقطه $\sigma_۱$ منطبق بر مبدأ مختصات بوده و شعاع دایره نیز برابر ۳/۵ می‌باشد.)



با توجه به دایره مور می‌توان نوشت:

$$\sigma_۱ = ۰ \quad ; \quad \sigma_۲ = ۲R = ۲ \times \tau_{max} = ۲ \times ۳/۵ = ۷MPa$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = ۳/۵MPa$$

اما برای تعیین مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} ابتدا باید زاویه θ تعیین شود. با استفاده از شکل صورت مسئله می‌توان زاویه θ را تعیین نمود.

$$\theta = tg^{-1}(\frac{۳}{۴}) \simeq ۳۷^\circ$$

زاویه بین امتداد ۱ و محور x مساوی $\frac{\pi}{۲}-\theta$ می‌باشد. اگر محور ۱ به اندازه این زاویه ساعتگرد دوران کند بر محور x منطبق می‌شود، اما در دایره مور باید دو برابر این زاویه یعنی، $۲(\frac{\pi}{۲}-\theta)=۱۰۶/۳^\circ$ ساعتگرد دوران کند. در نتیجه داریم:

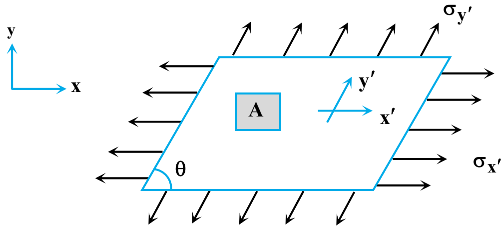
$$\tau_{xy} = -R\cos ۱۶/۳^\circ = -۳/۵\cos ۱۶/۳^\circ = -۳/۳۶MPa$$

$$\sigma_x = \sigma_{ave} + R\sin(۱۰۶/۳-۹۰) = \sigma_{ave} + R\sin ۱۶/۳^\circ = ۳/۵ + ۳/۵\sin ۱۶/۳^\circ = ۴/۴۸MPa$$

و اما برای تعیین مؤلفه تنش σ_y کافی است طبق دایره مور رسم شده رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\sigma_y = \sigma_{ave} - R\sin ۱۶/۳^\circ = ۳/۵ - ۳/۵\sin ۱۶/۳ = ۲/۵۳MPa$$

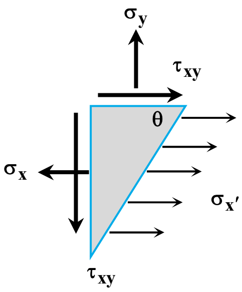
تذکر ۶: اگر مطابق شکل مؤلفه‌های تنش اعمالی بر یک متوازی‌السطوح معین باشد، برای تعیین مؤلفه‌های تنش اعمال شده بر یک المان با وجوه متعامد، مانند المان **A** باید از تصویر کردن مؤلفه‌های تنش داده شده و همچنین از معادلات تعادل المان استفاده نمود.



به عنوان مثال اگر متوازی السطوح تحت تنش‌های $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ باشد، برای محاسبه مؤلفه تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر عمل می‌شود:

۱ـ برای بدست آوردن تنش σ_y کافی است $\sigma_{y'}$ در $\sin\theta$ ضرب شود.
$$\sigma_y = \sigma_{y'}\sin\theta$$

۲ـ برای بدست آوردن تنش τ_{xy}، مؤلفه تنش $\sigma_{y'}$ در $\cos\theta$ ضرب می‌شود.
$$\tau_{xy} = \sigma_{y'}\cos\theta$$



۳ـ در نهایت برای محاسبه تنش σ_x از نوشتن معادله تعادل برای المان گوه‌ای شکل مقابل استفاده می‌شود. (اگر وجه مایل المان مساحتی برابر A داشته باشد وجه افقی المان دارای مساحت $A\cos\theta$ و وجه قائم المان دارای مساحت $A\sin\theta$ خواهد بود.)

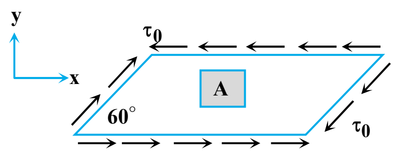
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow \sigma_{x'}A + \tau_{xy}A\cos\theta - \sigma_x A\sin\theta = ۰$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} + \sigma_{y'}\cos\theta \times \cos\theta - \sigma_x \sin\theta = ۰ \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_{x'}}{\sin\theta} + \frac{\sigma_{y'}\cos^۲\theta}{\sin\theta}$$

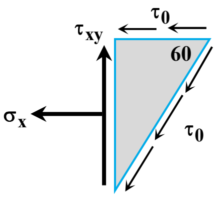
المان در راستای y دارای تعادل می‌باشد. کافی است برای امتحان کردن، معادله زیر را نوشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow \sigma_y \times A\cos\theta - \tau_{xy} \times A\sin\theta = ۰ \Rightarrow \sigma_{y'}A\sin\theta\cos\theta - \sigma_{y'}A\sin\theta\cos\theta = ۰$$

مثال ۶: **مؤلفه‌های تنش را بر روی المان A از متوازی‌السطوح بارگذاری شده زیر بیابید.**



پاسخ: برای تعیین مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} کافی است ابتدا المان گوه‌ای شکل روبرو رسم شده، سپس معادلات تعادل برای آن نوشته شود. تنش قائم اعمال شده بر وجه افقی المان برابر صفر است.



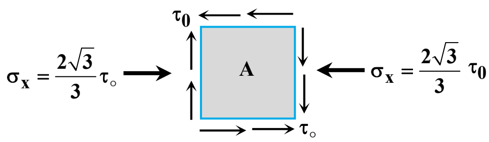
با توجه به شکل المان می‌توان نوشت:
$$\sigma_y = ۰$$

اگر مساحت وجه مایل المان برابر A در نظر گرفته شود می‌توان معادلات تعادل را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow -\tau_۰(A\cos ۶۰) - (\tau_۰ A)\cos ۶۰ - \sigma_x(A\sin ۶۰) = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow -(\tau_۰ A)\sin ۶۰ + \tau_{xy}(A\sin ۶۰) = ۰ \end{cases}$$

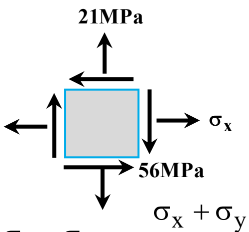
پس از ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_x = -۲\tau_۰ \cot g ۶۰ = -۲\tau_۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \tau_{xy} = \tau_۰ \end{cases}$$



بنابراین تنش‌های اعمالی بر المان A به شکل روبرو می‌باشند:

علامت منفی در مقدار تنش σ_x بیانگر فشاری بودن تنش است.



مثال ۷: اگر حداقل تنش اصلی برای المان نشان داده شده مساوی $-7MPa$ باشد، مقدار تنش σ_x و زاویه‌ای که محور تنش اصلی با محور x می‌سازد چه اندازه است؟

پاسخ: مقدار حداقل تنش اصلی توسط رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

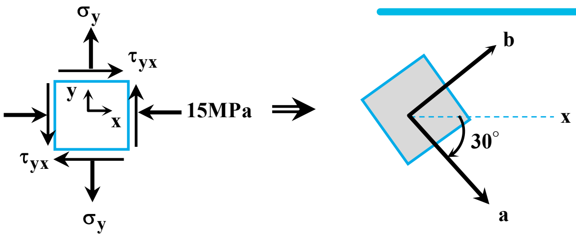
$$\sigma_۲=\sigma_{min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})+\tau_{xy}^۲}\Rightarrow -۷=\frac{\sigma_x+۲۱}{۲}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-۲۱}{۲})^۲+۵۶^۲}$$

$$\Rightarrow(\frac{-\sigma_x-۳۵}{۲})^۲=(\frac{\sigma_x-۲۱}{۲})^۲+۵۶^۲\Rightarrow ۲\times\sigma_x\times۳۵+۳۵^۲=-۴۲\sigma_x+۲۱^۲+۴\times۵۶^۲\Rightarrow\sigma_x=۱۰۵MPa$$

و اما زوایای تنش اصلی توسط رابطه روبرو تعیین می‌شود:

$$\tan۲\theta_P=\frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{۲\times(-۵۶)}{۱۰۵-۲۱}=\frac{-۴}{۳}\Rightarrow ۲\theta_P=-۵۳\Rightarrow\theta_P=-۲۶/۶^\circ$$

در تعیین زاویه تنش اصلی باید به علامت تنش برشی دقت شود. برای تعیین علامت صحیح کافی است به شکل ابتدای فصل مراجعه شود.



مثال ۸: المان تنش صفحه‌ای با حداکثر تنش اصلی $75MPa$ مطابق شکل مفروض می‌باشد. در صورتی که این المان به اندازه ۳۰° ساعتگرد دوران کند، مؤلفه‌های جدید تنش در دستگاه ab را تعیین کنید.(بر روی وجه عمود بر محور x هیچ‌گونه تنش برشی وارد نشده است $\tau_{xy}=۰$)

پاسخ: چون با توجه به فرض سؤال، تنش برشی τ_{xy} مساوی صفر است، بنابراین تنش فشاری $15MPa$ و تنش کششی σ_y تنش‌های اصلی می‌باشند. $(\sigma_۲=-۱۵MPa)$، از طرفی در صورت مسئله تنش اصلی حداکثر نیز داده شده است $(\sigma_۱=۷۵MPa)$.

بنابراین:

$$\sigma_{ave}=\frac{\sigma_۱+\sigma_۲}{۲}=\frac{۷۵+(-۱۵)}{۲}=۳۰MPa$$

از طرفی مجموع تنش‌های قائم همواره مقداری ثابت است. بنابراین با توجه به مقادیر بدست آمده برای تنش‌های اصلی و همچنین مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y بدست آمده از شکل المان فوق می‌توان نوشت:

$$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_۱+\sigma_۲\Rightarrow -۱۵+\sigma_y=۷۵+(-۱۵)\Rightarrow\sigma_y=۷۵MPa$$

تنش σ_y مساوی تنش اصلی حداکثر شده است، پس بر روی وجوه عمود بر محور y نیز تنش برشی صفر است. $\tau_{yx}=۰$

اکنون با استفاده از روابط تبدیل تنش، مؤلفه‌های تنش در دستگاه ab بدست می‌آید:

$$\sigma_a=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos(۲\times(-۳۰))+\tau_{xy}\sin(۲\times(-۳۰))$$

$$=\frac{-۱۵+۷۵}{۲}+(\frac{-۱۵-۷۵}{۲})\cos۶۰+۰\Rightarrow\sigma_a=۳۰-۲۲/۵=۷/۵MPa$$

مؤلفه دیگر تنش یعنی σ_b توسط این رابطه بدست می‌آید:

$$\sigma_b=۳۰+۲۲/۵=۵۲/۵MPa$$

$$\tau_{ab}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\sin۲\theta+\tau_{xy}\cos۲\theta=-\frac{-۱۵-۷۵}{۲}\sin(۲\times(-۳۰))=-۳۹MPa$$

لازم به ذکر است که به دلیل برابر بودن τ_{xy} و τ_{yx} اگر یکی از آن‌ها صفر شود، دیگری نیز برابر صفر است.

مثال ۹: یک میله استوانه‌ای توپر به قطر $d=۲۰mm$ به طور همزمان تحت بار محوری $P=۱۰\pi kN$ و کوپل پیچشی $T=۲۵\pi\ N.m$ قرار دارد. برای المانی روی سطح میله، تنشهای اصلی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ به ترتیب با چند MPa برابرند؟

۱) ۱۲۰ و ۲۰　　۲) ۱۰۰ و ۱۰۰−　　۳) ۱۰۰ و ۲۰−　　۴) ۱۲۰ و ۲۰−

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تنش قائم ناشی از بار محوری و تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی محاسبه می‌شود:

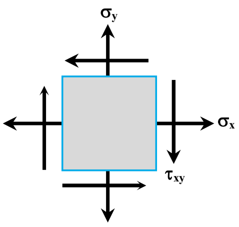
$$\sigma_x=\frac{P}{A}=\frac{۱۰\pi\times۱۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times۲۰^۲}=۱۰۰MPa$$ تنش قائم ناشی از بار محوری

$$\tau_{xy}=\frac{TR}{J}=\frac{۲T}{\pi R^۳}=\frac{۲\times۲۵\pi\times۱۰^۳}{\pi\times۱۰^۳}=۵۰MPa$$ تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی

$$\sigma_{۱,۲}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}=\frac{۱۰۰}{۲}\pm\sqrt{(\frac{۱۰۰}{۲})^۲+۵۰^۲}=۵۰\pm\sqrt{۵۰^۲+۵۰^۲}=۵۰\pm۵۰\sqrt{۲}$$

$$\sigma_۱=۱۲۰MPa\quad\sigma_۲=-۲۰MPa$$

مثال۱۰: در شکل زیر المان ابتدا به شکل مربع است. پس از اعمال تنش‌های نشان داده شده طول قطرهای المان تغییر نمی‌کند. کدام رابطه صحیح است؟



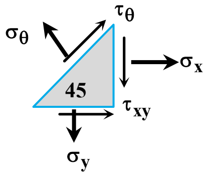
۱) $\tau_{xy} \neq ۰\ ,\ \sigma_x = \sigma_y = ۰$

۲) $\sigma_y \neq ۰\ ,\ \sigma_x \neq ۰\ ,\ \tau_{xy} = ۰$

۳) $\tau_{xy} \neq ۰\ ,\ \sigma_x = -\sigma_y$

۴) $\tau_{xy} = ۰\ ,\ \sigma_x = -\sigma_y$

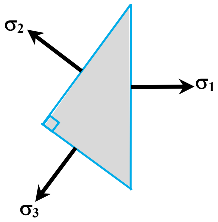
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون در امتداد اقطار، طول قطرها تغییر نمی‌کند بنابراین عمود بر قطرها، تنش نرمال اثر نمی‌کند و تنها تنش برشی اثر کرده است (تنش برشی باعث تغییر طول نمی‌شود.) لذا المان تحت برش محض قرار دارد. تنها حالتی که با ۴۵° دوران المان به حالت برش محض تبدیل می‌شود گزینه (۴) است. این مطلب را می‌توان با توجه به شکل زیر نیز درک نمود:



$$\sigma_\theta = ۰ \Rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos(۲\times۴۵) + \tau_{xy}\sin(۲\times۴۵) = ۰ \Rightarrow \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{۲} + \tau_{xy} = ۰$$

صفر شدن رابطه فوق تنها با جایگذاری گزینه (۴) امکان‌پذیر است.

مثال۱۱: در المانی مطابق شکل تنش‌های برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است. کدام گزینه درست می‌باشد؟

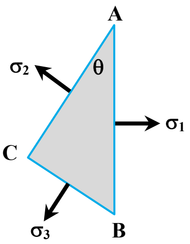


۱) $\sigma_۱ = \sigma_۲ = \sigma_۳$

۲) $\sigma_۱ = ۰\ ,\ \sigma_۲ = \sigma_۳$

۳) $\sigma_۱ = \sigma_۲\sqrt{۲}\ ,\ \sigma_۲ = \sigma_۳$

۴) فقط موقعی که هر سه تنش صفر باشند این حالت بوجود می‌آید.



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن معادلات تعادل برای المان می‌توان ارتباط بین تنش‌ها را تعیین نمود.

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow \sigma_۲ AB\cos\theta \times \sin\theta - \sigma_۳ AB\sin\theta \times \cos\theta = ۰ \Rightarrow \sigma_۲ = \sigma_۳$$

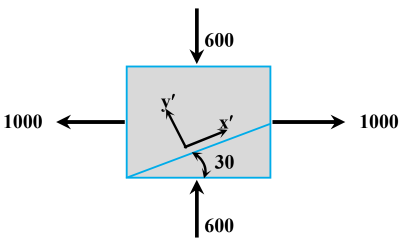
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow \sigma_۱ AB - \sigma_۲ AB\cos\theta \times \cos\theta - \sigma_۳ AB\sin\theta \times \sin\theta = ۰$$

$$\Rightarrow \sigma_۱ = \sigma_۲\cos^۲\theta + \sigma_۳\sin^۲\theta \Rightarrow \sigma_۱ = \sigma_۲\cos^۲\theta + \sigma_۲\sin^۲\theta \Rightarrow \sigma_۱ = \sigma_۲ \Rightarrow \sigma_۱ = \sigma_۲ = \sigma_۳$$

روش ساده‌تر هم این است که بر روی هر سه وجه تنش برشی صفر می‌باشد، در این حالت دایره مور تبدیل به یک نقطه شده و تنش‌های قائم در تمامی وجوه با هم برابر است.

مثال۱۲: عنصری از یک جسم تحت تأثیر دو تنش عمود بر هم $\sigma_x = ۱۰۰۰$ بار و $\sigma_y = -۶۰۰$ بار قرار گرفته است، تنش عمودی در صفحه موربی با زاویه ۳۰ درجه نسبت به محور x چند بار است؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۹۰۰



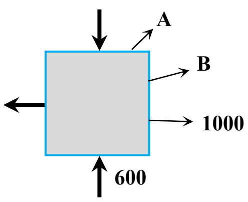
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** محور y' عمود بر وجه مایل، عمود می‌باشد بنابراین تنش $\sigma_{y'}$ برابر است با:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos۲\theta - \tau_{xy}\sin۲\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{۱۰۰۰ - ۶۰۰}{۲} - \frac{۱۰۰۰ + ۶۰۰}{۲}\cos(۲\times۶۰) \Rightarrow \sigma_{y'} = ۲۰۰ + ۴۰۰ = ۶۰۰$$

این مسئله را با استفاده از دایره مور نیز می‌توان حل نمود.

روش دوم: برای رسم دایره مور، دو وجه متعامد از المان را در نظر گرفته و آن‌ها را مطابق شکل A و B می‌نامیم. مؤلفه‌های x و y نقاط متناظر این صفحات روی دایره مور به ترتیب تنش قائم و تنش برشی روی صفحات هستند. پس نقطه‌ی A و B را می‌توان با این مختصات روی دایره مور رسم نمود:



$$B\left|\begin{matrix}\sigma=+۱۰۰۰\\ \tau=۰\end{matrix}\right.\ ,\ A\left|\begin{matrix}\sigma=-۶۰۰\\ \tau=۰\end{matrix}\right.$$

مدرسان شریف

فصل ششم

«خیز تیرها»

درسنامه (۱): تعیین منحنی الاستیک تیر به روش انتگرال‌گیری

هنگامی که تیر تحت بار عرضی قرار گیرد دچار انحناء شده و به صورت یک منحنی درخواهد آمد که به آن منحنی خیز تیر گفته می‌شود. محاسبه‌ی خیز تیر به خصوص خیز حداکثر در بحث طراحی و تحلیل سازه از اهمیت به سزایی برخوردار است. در این فصل هدف به دست آوردن معادله منحنی خیز تیر (منحنی تغییر مکان تیر) با استفاده از روش‌های متداول مانند روش انتگرال‌گیری و روش ممان ـ مساحت می‌باشد.

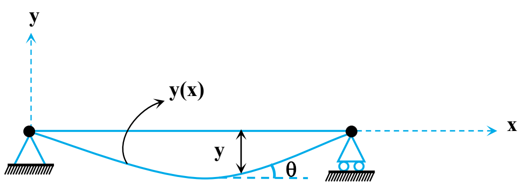
تعیین خیز تیر به روش انتگرال‌گیری

اگر تیری در محدوده‌ی الاستیک تحت بارهای عرضی قرار گیرد، در هر مقطع دلخواه از تیر لنگر خمشی داخلی ایجاد شده که متناسب با آن شعاع انحناء را می‌توان از رابطه روبرو محاسبه کرد:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI}$$

$M(x)$ مقدار لنگر خمشی در مقطع داخلی تیر می‌باشد. اکنون اگر معادله‌ی انحنای تیر تحت بارگذاری عرضی با $y(x)$ نمایش داده شود، انحنای تیر در یک نقطه دلخواه از تیر طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



در رابطه‌ی فوق، y' مقدار شیب منحنی تیر در هر نقطه را بیان می‌کند. چون مقدار شیب تیر در محدوده‌ی رفتار ارتجاعی ناچیز است از این رو از جمله‌ی y'^2 در برابر با یک در مخرج کسر فوق صرف‌نظر می‌شود. در نتیجه:

$$1+y'^2\simeq 1\Rightarrow \frac{1}{\rho}=y''$$

از مقایسه روابط روبرو می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\rho}=y''\\ \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\end{array}\right\}\Rightarrow y''=\frac{M(x)}{EI}\Rightarrow \boxed{EIy''=M(x)}$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق می‌توان معادله‌ی خیز تیر را به صورت روبرو به دست آورد:

$$EIy=\int_0^x\left(\int_0^x M(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$$

C_1 و C_2 دو ثابت می‌باشند که در حین انتگرال‌گیری به وجود می‌آیند. این ثابت‌ها را می‌توان از شرایط معلوم مربوط به شیب و تغییر مکان تیر به دست آورد. این شرایط را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

۱) شرایط مرزی: این شرایط مربوط به تغییر مکان و شیب در تکیه‌گاه‌ها می‌باشد. به طور مثال در تکیه‌گاه ساده (مفصلی یا غلتکی) تغییر مکان صفر است و در تکیه‌گاه گیردار تغییر مکان و شیب هر دو صفر است.

۲) شرایط پیوستگی: این شرط مربوط به نقاطی است که در فصل مشترک دو ناحیه‌ی انتگرال‌گیری قرار دارند. به عنوان مثال تیری که در طول خود دارای دو سطح مقطع متفاوت است، در محل تغییر سطح می‌توان شرط پیوستگی خیز را به کار برد.

۳) شرایط تقارن: در تیرهایی که تحت بارگذاری متقارن قرار گرفته است، می‌توان معادلاتی نوشت که با کمک آن ثوابت انتگرال‌گیری را به دست آورد. به عنوان مثال در یک تیر ساده تحت بار متمرکز در وسط تیر، شیب منحنی تیر در وسط تیر صفر است، چون خیز تیر در این موقعیت ماکزیمم می‌باشد. ذکر این نکته لازم است که ممکن است نیروی برشی و ممان خمشی در چند نقطه در تیر ناپیوسته باشند ولی منحنی خیز تیر و همچنین شیب تیر در تمامی مقاطع تیر پیوسته باشند.

همان طور که در درس استاتیک مطالعه شد، رابطه بین بار گسترده W و نیروی برشی V و لنگر خمشی M به صورت زیر به دست آمد:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dx}&=-W\\ \frac{dM}{dx}&=V\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2}=-W$$

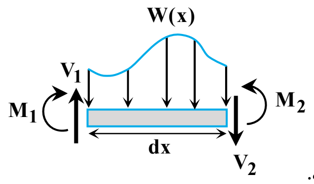
با مقایسه رابطه فوق با رابطه $EIy''=M(x)$، معادله منحنی الاستیک تیر بر حسب بار گسترده به صورت یک رابطه‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه چهار به دست می‌آید:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{W(x)}{EI}\Rightarrow \boxed{\mathbf{EIy''''=-W(x)}}$$

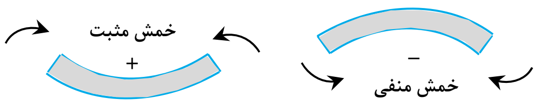
با چهار بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، منحنی الاستیک تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$EIy(x)=-\int_0^x\left(\int_0^x\left(\int_0^x\left(\int_0^x W(x)dx\right)dx\right)dx\right)dx+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

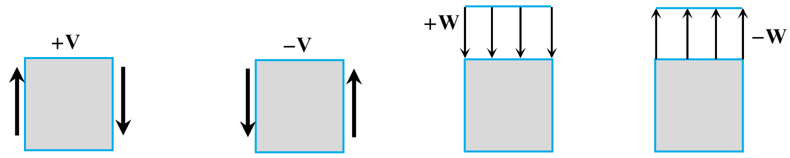
تذکر ۱: در صورتی که یک برش کوچک از تیر تحت بار خارجی به طول dx را رسم کنیم، طبق قرارداد نیروی برشی و گشتاور خمشی مثبت در مقطع داخلی بـه صـورت مقابل رسم می‌شوند:



همچنین گشتاور خمشی هنگامی مثبت در نظر گرفته می‌شود که جهت تقعر منحنی تیر، به سمت yهای مثبت باشد.

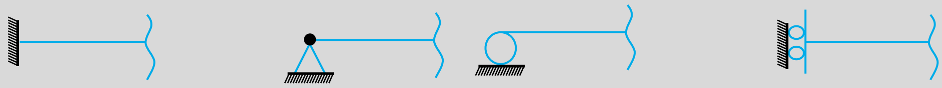


این قرارداد برای نیروی برشی و بار گسترده به صورت زیر می‌باشد:



تذکر ۲: همان طور که گفته شد، برای تعیین ثوابت انتگرال‌گیری نیاز به یک دسته معادلاتی است که بر اساس شرایط مرزی یا پیوستگی و تقارن نوشته می‌شوند. در زیر به چند نوع تکیه‌گاه با شرایط مرزی حاکم بر آن اشاره می‌شود:

الف: شرایط مرزی:



تکیه‌گاه هدایت شونده یا ریلی — تکیه‌گاه ساده شامل تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی — تکیه‌گاه گیردار

تکیه‌گاه هدایت شونده یا ریلی:
$$\begin{cases} y'=0 & \text{شیب}\\ V=0\Rightarrow EIy'''=0 & \text{نیروی برش}\\ \Rightarrow y'''=0 \end{cases}$$

تکیه‌گاه ساده:
$$\begin{cases} y=0 & \text{خیز}\\ M=0\Rightarrow EIy''=0 & \text{لنگر خمشی}\\ \Rightarrow y''=0 \end{cases}$$

تکیه‌گاه گیردار:
$$\begin{cases} y=0 & \text{خیز}\\ y'=0 & \text{شیب} \end{cases}$$

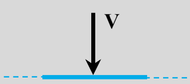
در سر آزاد تیر نیروی برشی و گشتاور خمشی برابر صفر است:

$$\Rightarrow\begin{cases} V=0\Rightarrow EIy'''=0\Rightarrow y'''=0 & \text{برش}\\ M=0\Rightarrow EIy''=0\Rightarrow y''=0 & \text{لنگر خمشی}\end{cases}$$

سر آزاد تیر

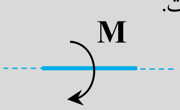
ب: شرایط پیوستگی با فرض ثابت بودن EI در طول تیر:

۱ـ در محل اعمال نیروی متمرکز خارجی، تغییرات خیز و شیب و همچنین تغییرات لنگر خمشی پیوسته بوده اما تغییرات نیروی برشی ناپیوسته است.



$$y_1=y_2\quad;\quad y_1''=y_2''$$
$$y_1'=y_2'\quad;\quad y_1'''\neq y_2'''$$

۲ـ در محل اعمال لنگر متمرکز خارجی، تغییرات خیز و شیب و نیروی برشی پیوسته بوده اما تغییرات لنگر خمشی ناپیوسته است.

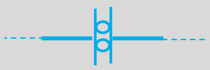


$$y_1=y_2\quad;\quad y_1''\neq y_2''$$
$$y_1'=y_2'\quad;\quad y_1'''=y_2'''$$

۳ـ در محل لولای داخلی شرایط زیر حکم‌فرماست:

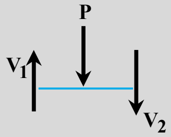
$$y_1=y_2\quad;\quad y_1''=y_2''=0$$
$$y_1'\neq y_2'\quad;\quad y_1'''=y_2'''$$

۴ـ در محل اتصال ریلی (اتصال هدایت شونده):



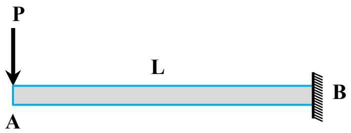
$$y_1 \neq y_2 \quad ; \quad y_1'' = y_2''$$
$$y_1' = y_2' \quad ; \quad y_1''' = y_2''' = 0$$

در صورتی که EI در مقطع مورد نظر ثابت نباشد، آنگاه به جای y'' مقدار EIy'' و به جای y''' مقدار EIy''' قرار داده می‌شود. به عنوان مثـال در حالـت (۱) با فرض ثابت نبودن EI ، شرایط زیر در مقطع اعمال نیروی متمرکز حاکم است.

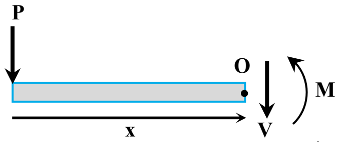


$$y_1 = y_2 \quad , \quad E_1I_1y_1'' = E_2I_2y_2''$$
$$y_1' = y_2' \quad , \quad V_2 + P = V_1 \Rightarrow V_1 - V_2 = P \Rightarrow E_1I_1y_1''' - E_2I_2y_2''' = P$$

مثال۱: تیر یک سرگیردار AB در انتهای خود تحت بار متمرکز قرار گرفته است. معادله منحنی خیز تیر را به دست آورده، همچنین خیز و شیب ماکزیمم در تیر را تعیین نمایید.



☑ **پاسخ:** مقدار لنگر خمشی در یک مقطع دلخواه به فاصله x از انتهای تیر مساوی است با:



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M = -Px$$

$$EIy'' = M(x) \Rightarrow EIy'' = -Px \Rightarrow EIy' = -\frac{P}{2}x^2 + C_1x \Rightarrow EIy = -\frac{P}{6}x^3 + C_1x + C_2 \quad (1)$$

اما در $x = L$ شرایط مرزی به صورت زیر است: (در تکیه‌گاه گیردار شیب و خیز تیر طبق تذکر (۲) مساوی صفر است)

$$x = L \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 = \theta \\ y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

در نتیجه:

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{P}{2}L^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{P}{2}L^2 \\ 0 = -\frac{P}{6}L^3 + C_1L + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}PL^3 \end{cases}$$

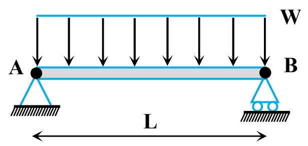
با جایگذاری ثوابت مرزی در معادله فوق، منحنی الاستیک تیر به دست می‌آید:

$$EIy = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}PL^2x - \frac{1}{3}PL^3 \Rightarrow y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3)$$

با جایگذاری $x = 0$ در معادله فوق خیز و شیب ماکزیمم تیر به دست می‌آید:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \qquad y_A = -\frac{PL^3}{3EI}$$

مثال۲: معادله منحنی الاستیک تیر روبرو را به دست آورده، خیـز مـاکزیمم و شیب ماکزیمم آن را تعیین نمایید.



☑ **پاسخ:** چون بار وارد بر تیر از نوع بار گسترده یکنواخت است بنابراین در حل این مثال بهتر است از معادله‌ی $EIy'''' = -W(x)$ استفاده شود:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -W \Rightarrow EI\frac{d^3y}{dx^3} = V = -Wx + C_1 \Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = -\frac{W}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = -\frac{W}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \Rightarrow EIy = -\frac{W}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

شرایط مرزی: در تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی خیز و لنگر خمشی مساوی صفر است، بنابراین:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ M = 0 \Rightarrow y'' = 0 \end{cases} \qquad x = L \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ M = 0 \Rightarrow y'' = 0 \end{cases}$$

با حل معادلات مربوط به شرایط مرزی، ثوابت C_1 تا C_4 به صورت زیر تعیین خواهند شد:

$$C_1 = \frac{1}{2}WL \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = -\frac{1}{24}WL^3 \qquad C_4 = 0 \Rightarrow y = \frac{W}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)$$

چون بارگذاری متقارن است، بنابراین خیز تیر در وسط ماکزیمم می‌باشد. اکنون با جایگذاری $x = \frac{L}{2}$ در رابطه فوق خیز ماکزیمم به دست می‌آید:

$$y_{max} = \frac{-5WL^4}{384EI}$$

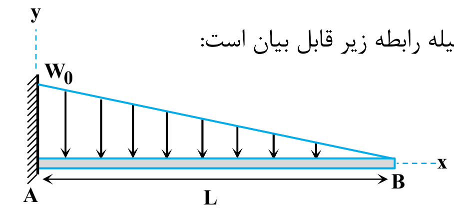
و اما با قرار دادن $x=0$ یا $x=L$ در معادله‌ی شیب تیر (y')، شیب ماکزیمم تعیین خواهد شد:

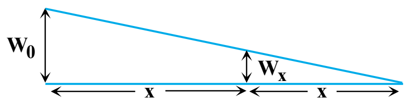
$$\theta_{max}=\frac{WL^3}{24EI}=\theta_A=\theta_B$$

لازم به ذکر است در این مثال شیب ماکزیمم مربوط به دو تکیه‌گاه می‌باشد.

مثال۳: تیر یک سر گیردار AB تحت بار گسترده مثلثی شکل قرار گرفته است. معادله منحنی الاستیک تیر را تعیین نموده، همچنین خیز و شیب ماکزیمم را در تیر بیابید. (صلبیت خمشی تیر در طول آن ثابت است.)

☑ **پاسخ:** شدت بار گسترده در یک فاصله x از تکیه‌گاه با استفاده از تغییرات خطی بار گسترده به وسیله رابطه زیر قابل بیان است:





$$w(x)=w_0\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

از طرفی بین بار گسترده و منحنی الاستیک تیر رابطه مقابل برقرار می‌باشد:

$$EIy''''=-w(x)=-\frac{w_0(L-x)}{L}$$

اما با سه بار انتگرال‌گیری از رابطه فوق منحنی شیب تیر و با چهار بار انتگرال‌گیری منحنی خیز تیر به دست می‌آید:

$$EIy'=-\frac{w_0(L-x)^4}{24L}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3 \quad , \quad EIy=-\frac{w_0(L-x)^5}{120L}+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

برای تعیین ثوابت C_1 تا C_4 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌شود:

$$\text{در تکیه‌گاه گیردار}: x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y'=0 \end{cases}$$

$$\text{در انتهای آزاد تیر}: x=L \Rightarrow \begin{cases} M=0 \Rightarrow EIy''=0 \Rightarrow y''=0 \\ V=0 \Rightarrow EIy'''=0 \Rightarrow y'''=0 \end{cases}$$

با حل معادلات به دست آمده از شرایط فوق ثابت‌ها به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$C_1=+\frac{w_0L}{2} \ , \ C_2=-\frac{w_0L^2}{6} \ , \ C_3=0 \ , \ C_4=0 \Rightarrow \begin{cases} EIy'=\dfrac{-w_0x}{24L}(4L^3-6L^2x+4Lx^2-x^3) \\ EIy=-\dfrac{w_0x^2}{120L}(10L^3-10L^2x+5Lx^2-x^3) \end{cases}$$

و اما در $x=L$ شیب و خیز تیر حداکثر بوده که مقدار آن برابر است با:

$$\theta_{max}=-\frac{w_0L^3}{24EI} \quad ; \quad y_{max}=-\frac{w_0L^4}{30EI}$$

همان طور که از سه مثال حل شده مشخص می‌باشد، به دست آوردن منحنی الاستیک تیر برای بارگذاری‌های مختلف نیاز به صرف وقت نسبتاً زیادی می‌باشد بنابراین به‌کارگیری این روش در آزمون‌ها توصیه نمی‌شود، اما برای چند نوع بارگذاری نتایج به دست آمده از حل تحلیلی در جداولی تحت عنوان جداول خیز و شیب فهرست شده که می‌توان از آن‌ها استفاده نمود. در این کتاب نیز از این جداول در تعیین خیز و شیب تیر تحت بارگذاری‌های مختلف استفاده می‌شود. قبل از اینکه برای تعیین خیز و شیب در تیرها از جداول مربوطه استفاده شود، بهتر است یک‌بار دیگر استفاده از روش جمع آثار در تعیین خیز و شیب تیر، تحت بارگذاری‌های مختلف در محدوده ارتجاعی مورد تأکید قرار گیرد.

استفاده از روش جمع آثار (روش برهم نهی)

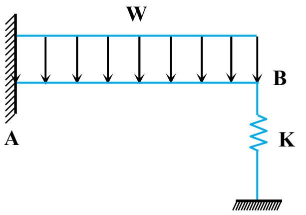
هرگاه تغییر شکل‌های به وجود آمده تحت بارگذاری‌های مختلف کوچک و در محدوده‌ی الاستیک خطی باشد، معادلات دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر به صورت معادله دیفرانسیل خطی می‌باشد، در نتیجه می‌توان از روش جمع آثار استفاده نمود. بدین معنی که هرگاه تیر تحت چندین بار قرار گرفته باشد، شیب و خیز ناشی از هر یک از بارها را به طور جداگانه محاسبه کرده سپس آن‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم، نتیجه به دست آمده خیز و شیب تیر تحت بارگذاری مرکب است. برای تسریع در روش جمع آثار می‌توان از نتایج موجود در جدول ضمیمه کتاب (جدول خیز و شیب تیرها) استفاده نمود. در این جدول، منحنی الاستیک تیر به همراه خیز و شیب ماکزیمم برای بارگذاری‌های ساده ارائه شده است.

به طور خلاصه از روش جمع آثار در مواقعی می‌توان استفاده نمود که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) مواد از قانون هوک پیروی کنند.

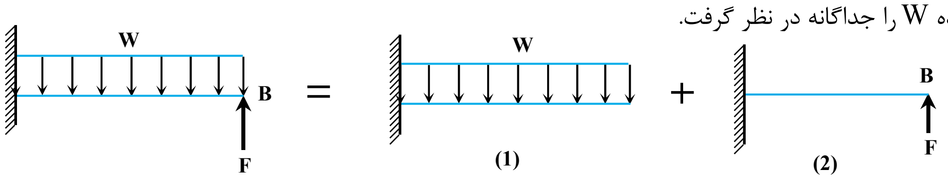
۲) تغییر مکان و زوایای چرخش کوچک باشند.

۳) وجود تغییر مکان‌ها تغییری در نحوه‌ی اثر بارهای اعمالی ایجاد نکند.



مثال۴: تغییر مکان انتهای B از تیر نشان داده شده را به دست آورید.
(k سختی فنر می‌باشد)

☑ **پاسخ:** از طرف فنر نیروی F به تیر اعمال می‌شود، این نیرو مساوی حاصل‌ضرب سختی فنر در خیز مقطع B است. طبق روش جمع آثار می‌توان اثرات نیروی F و بار گسترده W را جداگانه در نظر گرفت.

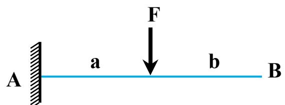


با استفاده از جدول خیز و شیب تیر می‌توان نوشت: (خیز تیر به سمت پایین مثبت فرض می‌شود)

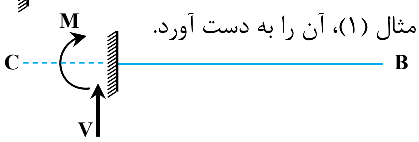
$$y_{B_1}=+\frac{WL^4}{8EI}\quad;\quad y_{B_2}=-\frac{FL^3}{3EI}\Rightarrow y_B=y_{B_1}+y_{B_2}=+\frac{WL^4}{8EI}-\frac{FL^3}{3EI}$$

از طرفی نیروی موجود در فنر متناسب با خیز فنر است، بنابراین $F=+Ky_B$ می‌باشد، در نتیجه:

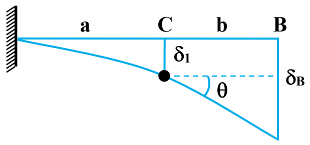
$$y_B=+\frac{WL^4}{8EI}-\frac{Ky_BL^3}{3EI}\Rightarrow y_B+\frac{K_ByL^3}{3EI}=\frac{WL^4}{8EI}\Rightarrow y_B=\frac{\frac{WL^4}{8EI}}{1+\frac{KL^3}{3EI}}\Rightarrow y_B=\frac{3WL^4}{24EI+8KL^3}$$



مثال۵: خیز انتهای تیر نشان داده شده را محاسبه نمایید.



☑ **پاسخ:** خیز δ_B را می‌توان از جدول خیز و شیب به طور مستقیم تعیین نمود یا با استفاده از نتیجه مثال (۱)، آن را به دست آورد.
در فاصله BC چون هیچ‌گونه باری اعمال نشده است بنابراین در این فاصله منحنی خیز تیر به صورت خطی می‌باشد.
برای اثبات مطلب فوق می‌توان در فاصله BC یک برش زده و بخش سمت راست برش را جدا نموده و مقدار لنگر داخلی را به دست آورد. همان طور که از دیاگرام رسم شده مشخص است مقدار لنگر داخلی برابر صفر می‌باشد. از طرفی داریم: $EIy''=M\ \Rightarrow\ EIy''=0\ \Rightarrow\ y''=0$
چون مشتق مرتبه دوم تابع خیز، برابر صفر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در فاصله BC منحنی خیز تیر به صورت خطی می‌باشد. اگر خیز مقاطع B و C به ترتیب با δ_B و δ_1 نشان داده شود، می‌توان نوشت:

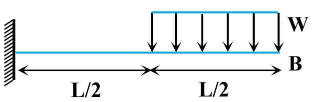


$$\delta_B=\delta_1+b\,tg\theta\xrightarrow{(\text{چون } \theta \text{ کوچک است لذا: } tg\theta\simeq\theta)}\delta_B=\delta_1+b\theta$$

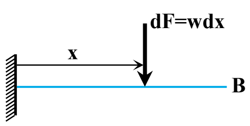
اما شیب و خیز مقطع C را می‌توان با توجه به جدول خیز تعیین نمود. در نتیجه:

$$\delta_B=\frac{Fa^3}{3EI}+b\times\frac{Fa^2}{2EI}=\frac{Fa^2}{6EI}(2a+3b)\Rightarrow\delta_B=\frac{Fa^2}{6EI}(3L-a)$$

در حل این مثال خیز تیر به سمت پایین مثبت در نظر گرفته شده است.



مثال۶: تیر یک سرگیردار AB تحت اثر بار گسترده W مطابق شکل قرار گرفته است. خیز انتهای تیر چه مقدار است؟

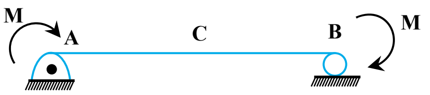


☑ **پاسخ:** در این مثال می‌توان تغییر مکان انتهای تیر را با در نظر گرفتن یک المان از بار گسترده به عنوان یک بار متمرکز و استفاده از نتیجه مثال (۵) به دست آورد. در این مثال به جای a در رابطه خیز تیر، فاصله بار dF تا تکیه‌گاه، یعنی x گذاشته می‌شود.
مقدار x متغیر بوده و در نهایت برای محاسبه خیز انتهای تیر باید از رابطه زیر انتگرال‌گیری نمود.

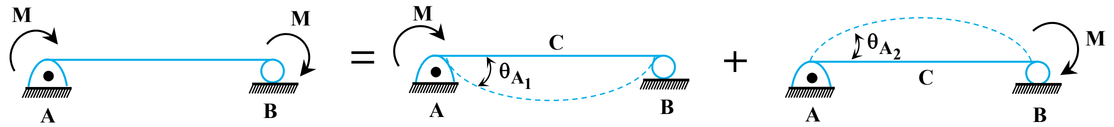
$$dy_B=\frac{dF\,x^2(3L-x)}{6\,EI}=\frac{Wdx\times x^2(3L-x)}{6EI}\Rightarrow y_B=\int dy_B=\frac{W}{6EI}\int_{\frac{L}{2}}^{L}x^2(3L-x)dx=\frac{41WL^4}{384EI}$$

چون بارگذاری گسترده وارد بر تیر در نیمه دوم تیر یعنی، از فاصله $\frac{L}{2}$ تا L می‌باشد بنابراین باید در این فاصله از خیز تیر انتگرال‌گیری نمود.

مثال ۷: شیب در تکیه‌گاه و خیز در وسط تیر بارگذاری شده شکل مقابل چه مقدار است؟



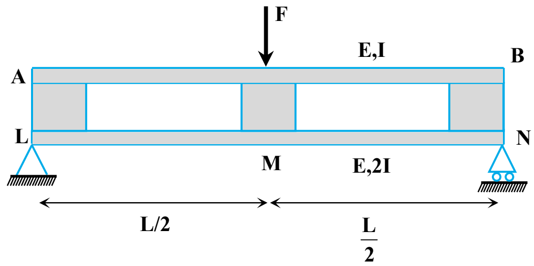
پاسخ : با استفاده از روش جمع آثار، خیز و شیب تیر تحت بارگذاری داده شده مساوی است با:



به دلیل آنکه لنگرهای اعمال شده در دو تکیه‌گاه هم جهت می‌باشد، در نتیجه خیزهای ناشی از دو لنگر در وسط تیر مخالف بوده و همدیگر را خنثی می‌کنند. $\delta_C = ۰$ از طرفی شیب در تکیه‌گاه با استفاده از جدول شیب و خیز تیر مساوی است با: $\theta_A = \theta_{A_1} - \theta_{A_2} = \frac{ML}{۳EI} - \frac{ML}{۶EI} = \frac{ML}{۶EI}$

گردش ساعتگرد تیر در تکیه‌گاه A در این مثال مثبت در نظر گرفته شده است. (طبق جدول خیز و شیب، اگر لنگر خمشی M بر تکیه‌گاه A وارد شود، در تکیه‌گاه A شیبی برابر $\frac{ML}{۳EI}$ ایجاد شده، اما اگر لنگر خمشی در تکیه‌گاه B وارد شود شیب ایجاد شده در تکیه‌گاه A برابر $\frac{ML}{۶EI}$ می‌شود.)

مثال ۸: تیر AB و LN در وسط و دو انتها توسط قطعات صلب به هم متصل شده‌اند. تغییر مکان نقطه M برابر است با:

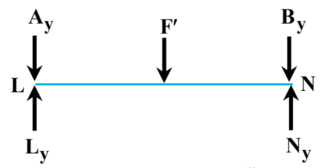


۱) $\frac{FL^۳}{۹۶EI}$ ۲) $\frac{FL^۳}{۱۴۴EI}$

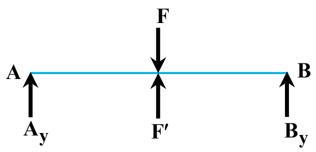
۳) $\frac{۵FL^۳}{۴۸EI}$ ۴) $\frac{FL^۳}{۱۳۵EI}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا دیاگرام آزاد تیرهای AB , LN جداگانه رسم می‌شود. در صورتی که نیروی داخلی بین دو تیر مساوی F' باشد، آنگاه:

دیاگرام آزاد تیر پایینی :



دیاگرام آزاد تیر بالایی :



(۲) $(\delta_{max})_{LN} = \frac{F'L^۳}{۴۸E(۲I)}$: با توجه به جدول خیز   (۱) $(\delta_{max})_{AB} = \frac{(F-F')L^۳}{۴۸EI}$: با توجه به جدول خیز

چون دو تیر توسط قطعات صلب به هم متصل شده‌اند در نتیجه خیز وسط آن‌ها با هم برابر است بنابراین رابطه سازگاری برای دو تیر به صورت زیر نوشته می‌شود. از رابطه سازگاری فوق می‌توان نیروی بین دو تیر AB و LN را به دست آورد. $(\delta_{max})_{AB} = (\delta_{max})_{LN}$

$$\frac{(F-F')L^۳}{۴۸EI} = \frac{F'L^۳}{۹۶EI} \Rightarrow F - F' = \frac{F'}{۲} \Rightarrow F' = \frac{۲}{۳}F \overset{(۲)}{\Rightarrow} \delta_{max} = \frac{(\frac{۲}{۳}F)L^۳}{۹۶EI} = \frac{FL^۳}{۱۴۴EI}$$

مثال ۹: تیر ساده‌ای تحت اثر وزن خود قرار دارد اگر تمامی ابعاد آن به طور مشابه α برابر شود:

۱) تنش خمشی و تغییر شکل آن تغییر نمی‌کند.   ۲) تنش خمشی α برابر و تغییر شکل آن $\alpha^۲$ برابر می‌شود.

۳) هم تنش خمشی و هم تغییر شکل آن α برابر می‌شود.   ۴) تنش خمشی α برابر و تغییر شکل آن $\alpha^۳$ برابر می‌شود.

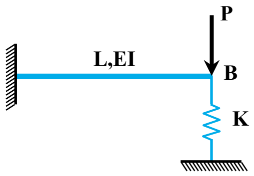
پاسخ : گزینه «۲» اگر ω وزن واحد طول تیر باشد، آنگاه لنگر خمشی ماکزیمم در تیر با ω و با مجذور طول تیر ارتباط مستقیم دارد، از طرفی وزن واحد طول تیر به مساحت سطح مقطع تیر وابسته است، بنابراین: (حداکثر لنگر خمشی در یک تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت برابر $\frac{\omega L^۲}{۸}$ می‌باشد.)

$$\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{\omega L^۲}{۸} \times \frac{C}{I} \Rightarrow \frac{\sigma_۲}{\sigma_۱} = \frac{\omega_۲}{\omega_۱} \times \frac{L_۲^۲}{L_۱^۲} \times \frac{C_۲}{C_۱} \times \frac{I_۱}{I_۲} = \alpha^۲ \times \alpha^۲ \times \alpha \times \frac{۱}{\alpha^۴} = \alpha$$

اگر یک تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت قرار گیرد در وسط تیر خیز ماکزیمم شده و مقدار آن مساوی است با:

$$\text{با توجه به جدول خیز}: y = \frac{۵\omega L^۴}{۳۸۴EI} = \frac{۵}{۳۸۴E}\omega \times \frac{L^۴}{I} \Rightarrow \frac{y_۲}{y_۱} = \frac{\omega_۲}{\omega_۱} \times \frac{L_۲^۴}{L_۱^۴} \times \frac{I_۱}{I_۲} = \alpha^۲ \times \alpha^۴ \times \frac{۱}{\alpha^۴} = \alpha^۲$$

مثال۱۰: تغییر مکان نقطه B چقدر می‌باشد؟



۱) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{P}{K}$ ۳) $\frac{PL^3}{KL^3+3EI}$ ۴) $\frac{EI+KL^3}{PL}$

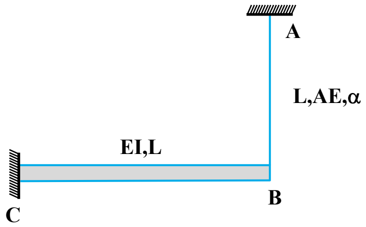
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در صورتی که تحت نیروی خارجی P، نیروی فشاری F در فنر ایجاد شود، آنگاه خیز انتهای تیر تحت دو نیروی P و F با استفاده از جدول خیز تیر و روش جمع آثار مساوی است با:

$$y_B=\frac{(P-F)L^3}{3EI}$$

از طرفی $F=Ky_B$ در نتیجه:

$$y_B=\frac{(P-Ky_B)L^3}{3EI}\Rightarrow y_B(1+\frac{KL^3}{3EI})=\frac{PL^3}{3EI}\Rightarrow y_B=\frac{PL^3}{3EI+KL^3}$$

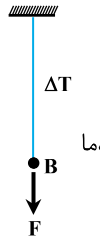
مثال۱۱: کابل AB به انتهای تیر یک سر درگیر CB مطابق شکل متصل شده است، در صورتی که درجه حرارت کابل به اندازه ΔT کاهش یابد تغییر مکان عمودی نقطه B برابر است با:



۱) $\frac{\alpha AL^4\Delta T}{L^3A+3LI}$ ۲) $\frac{2\alpha AL^4\Delta T}{L^3A+3LI}$

۳) $\frac{3\alpha AL^4\Delta T}{L^3A+3LT}$ ۴) $\frac{4\alpha AL^4\Delta T}{L^3A+3LI}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» طبق معادله سازگاری، تغییر طول میله در نقطه B با خیز تیر در نقطه B برابر است:



خیز انتهای تیر در اثر نیروی خارجی: $\delta_{B_1}=\frac{FL^3}{3EI}$

تغییر طول در اثر نیروی خارجی و تغییر دما : $\delta_{B_2}=L\alpha\Delta T-\frac{FL}{AE}$

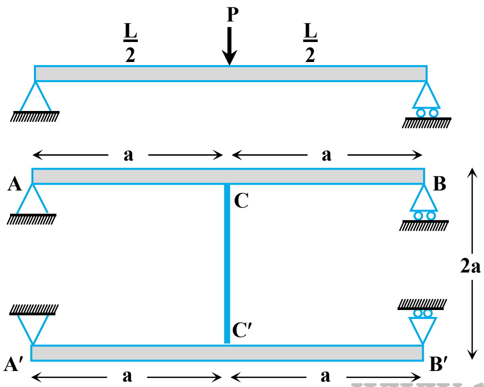
لازم به ذکر است که در رابطه فوق جابجایی B به سمت بالا مثبت در نظر گرفته می‌شود.

رابطه سازگاری : $\delta_{B_1}=\delta_{B_2}\Rightarrow\frac{FL^3}{3EI}=L\alpha\Delta T-\frac{FL}{AE}$

$$\Rightarrow\alpha L\Delta T=\frac{FL}{AE}+\frac{FL^3}{3EI}\Rightarrow F=\frac{\alpha L\Delta T}{(\frac{L}{AE}+\frac{L^3}{3EI})}\xrightarrow{\text{با قرار دادن نیروی F در خیز مقطع B، } \delta_B \text{ به دست می‌آید}}$$

$$\delta_B=\frac{FL^3}{3EI}\xrightarrow{\text{پس از انجام ساده‌سازی عبارت}}\delta_B=\frac{\alpha AL^4\Delta T}{L^3A+3LI}$$

مثال۱۲: دو تیر ساده AB و A′B′ در نقاط C و C′ به کابل C′C متصل می‌باشند که سفت ولی بدون تنش اولیه است. طول کابل 2a و A مساحت مقطع آن می‌باشد. موقعی که درجه حرارت به اندازه T درجه تنزل می‌کند. نیروی کششی S در کابل چه مقدار خواهد بود؟ فرض کنید تیرها و کابل از یک ماده تشکیل شده باشند. یادآوری می‌شود که تغییر مکان وسط یک تیر ساده تحت بار وارده P در وسط آن برابر $\frac{PL^3}{48EI}$ می‌باشد.



۱) $\frac{\alpha T}{(\frac{1}{A}+\frac{a^2}{6I})}$

۲) $\frac{\alpha ET}{(\frac{1}{A}+\frac{a^2}{6I})}$

۳) $\alpha Ea\Delta T$

۴) $2aEA\alpha\Delta T$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

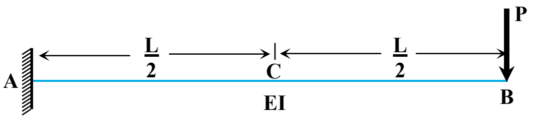
δ_T (کاهش طول کابل در اثر تغییر دما) $= \alpha L \Delta T = 2\alpha a \Delta T$

در اثر کاهش دما در کابل، دو تیر AB و $A'B'$ خم شده تا کاهش طول ناشی از کاهش دما در کابل را جبران کنند. نیرویی که باعث خمش این دو تیر می‌شود با یکدیگر مساوی بوده که از طرفی عکس‌العمل آن باعث کشش در کابل می‌شود. مجموع خیز وسط دو تیر و کشش در کابل مساوی کاهش طول کابل در اثر تغییر دما است.

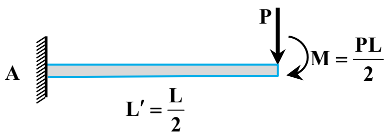
مجموع خیز وسط دو تیر ناشی از نیروی عمل F با استفاده از جدول خیز و شیب + افزایش طول میله ناشی از نیروی عکس‌العمل $F = \delta_T$: رابطه سازگاری

$$\delta_T = \frac{F(2a)}{AE} + 2\times\frac{F(2a)^3}{48EI} \Rightarrow F = \frac{2\alpha a\Delta T}{\frac{2a}{AE}+\frac{a^3}{3EI}} \Rightarrow F = \frac{\alpha\Delta T}{\frac{1}{AE}+\frac{a^2}{6EI}} = \frac{\alpha E\Delta T}{\frac{1}{A}+\frac{a^2}{6I}}$$

مثال ۱۳: خیز نقطه C در تیر شکل مقابل چه مقدار است؟

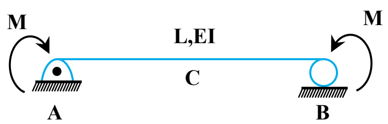


☑ **پاسخ :** بار P را به نقطه‌ی C انتقال داده، حاصل آن یک نیروی P به همراه لنگر ساعتگرد $\frac{PL}{2}$ است. خیز نقطه‌ی C ناشی از بار P و لنگر $M = \frac{PL}{2}$ با توجه به جدول خیز تیر مساوی است با :



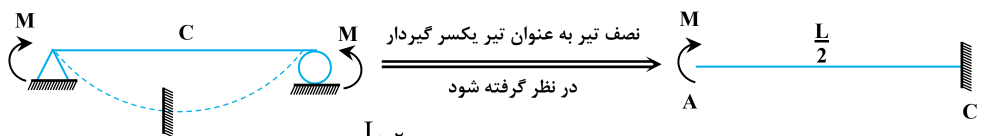
$$y_C = \frac{PL'^3}{3EI} + \frac{ML'^2}{2EI} \xrightarrow{L'=\frac{L}{2}} y_C = \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI} + \frac{(P\frac{L}{2})(\frac{L}{2})^2}{2EI} = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{PL^3}{16EI} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

مثال ۱۴: تغییر مکان وسط تیر شکل روبرو را به دست آورید.



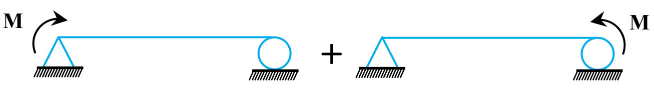
☑ **پاسخ:**

روش اول: چون بارگذاری متقارن بوده در نقطه‌ی C خیز ماکزیمم بوده و شیب در آنجا صفر است. در نتیجه می‌توان از خاصیت تقارن تیر استفاده نموده و نصف تیر مانند یک تیر یکسر گیردار در نظر گرفته شود. (چون لنگرهای خارجی در تکیه‌گاه‌های A و B مساوی و مختلف الجهت بوده بنابراین یکدیگر را خنثی نموده و نیروهای تکیه‌گاهی A, B مساوی صفر است) در چنین حالتی خیز نقطه A نسبت به نقطه C مانند خیز نقطه C نسبت به تکیه‌گاه A است.



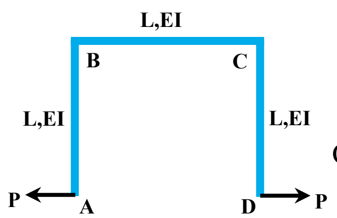
$$y_C = y_{C/A} = -y_{A/C} = -(-\frac{M(\frac{L}{2})^2}{2EI}) = +\frac{ML^2}{8EI}$$

روش دوم: با استفاده از روش جمع آثار و استفاده از جدول خیز و شیب می‌توان نتیجه گرفت که خیز وسط تیر مساوی است با:



$$y_C = \frac{ML^2}{16EI} + \frac{ML^2}{16EI} = \frac{ML^2}{8EI}$$

مثال ۱۵: در قاب U شکل نشان داده شده تغییر فاصله A و D ناشی از خمش چه اندازه است؟



☑ **پاسخ :** به دلیل تقارن سازه می‌توان نیمی از قاب را مورد تحلیل قرار داد. در محل تقارن قاب یعنی نقطه‌ی O شیب تیر مساوی صفر است. در نتیجه می‌توان در محل تقارن تیر یک تکیه‌گاه فرضی از نوع گیردار در نظر گرفت.

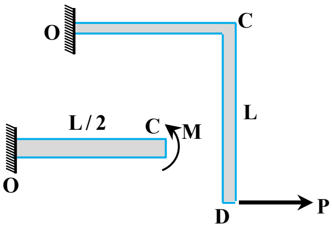
خیز مقطع D تنها ناشی از دوران مقطع C + خیز مقطع D ناشی از خمش بدون در نظر گرفتن اثر دوران در مقطع C $= y_{D/O}$

$$y_{D/O} = y_1 + y_2$$

برای محاسبه‌ی خیز y_1 کافی است بخش CD تیر را مانند یک تیر یک گیردار در نظر گرفت، در نتیجه:

$$y_1 = \frac{PL^3}{3EI}$$

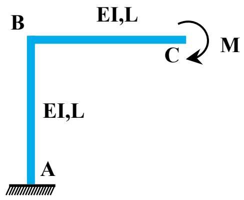
اما برای محاسبه خیز y_2 به دلیل اینکه اثر خمش در نظر گرفته نشده است، بنابراین در این بخش فرض می‌شود که قسمت CD به صورت خطی باشد و خیز ناشی از آن برابر حاصل‌ضرب شیب در طول CD یعنی L است. $y_2=\theta_C\times L$



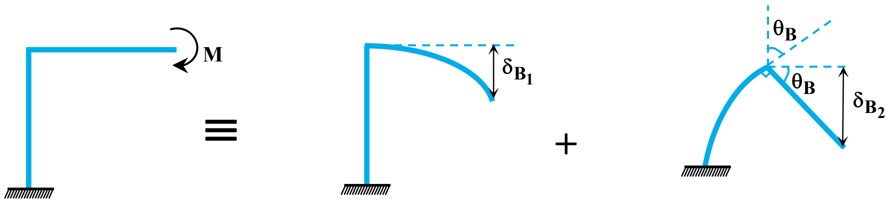
$$\Rightarrow y_{D/O}=\frac{PL^3}{3EI}+\theta_C\times L=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{M(\frac{L}{2})}{EI}\times L=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{PL(\frac{L}{2})}{EI}\times L$$

$$\Rightarrow y_{D/O}=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{PL^3}{2EI}=\frac{5PL^3}{6EI}\Rightarrow y_{D/A}=2y_{D/O}=\frac{5}{3}\frac{PL^3}{EI}$$

مثال ۱۶: خیز نقطه C در راستای قائم چه اندازه است؟



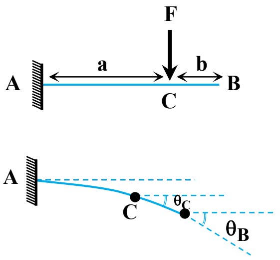
پاسخ: در اثر انتقال لنگر M به مقطع B، این مقطع دورانی ساعتگرد به اندازه θ_B خواهد داشت که طبق جدول مساوی $\frac{ML}{EI}$ خواهد بود.



خیز مقطع C = خیز مقطع B ناشی از خمش بدون در نظر گرفتن اثر دوران مقطع B + خیز مقطع C ناشی از دوران مقطع B

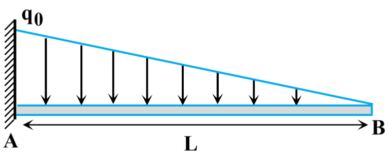
$$y_C=\frac{ML^2}{2EI}+\theta_B\times L=\frac{ML^2}{2EI}+\frac{ML}{EI}\times L\Rightarrow y_C=+\frac{3}{2}\frac{ML^2}{EI}$$

مثال ۱۷: در تیر نشان داده شده در شکل روبه‌رو شیب انتهای تیر را محاسبه کنید.

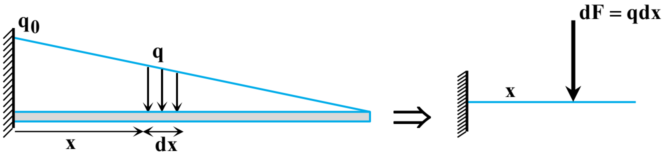


پاسخ: چون در فاصله BC باری بر تیر اعمال نشده است، بنابراین در این فاصله منحنی خیز تیر خطی بوده و تیر هر شیبی در مقطع C داشته باشد همان شیب را در مقطع B نیز خواهد داشت. اما شیب انتهای تیر یکسر گیردار که تحت نیروی متمرکز قرار گرفته است برابر $\frac{FL^2}{2EI}$ می‌باشد بنابراین در رابطه طول تیر L را برابر طول AC قرار داده تا شیب در مقاطع B و C به دست آید: $\theta_B=\theta_C=\frac{Fa^2}{2EI}$

مثال ۱۸: خیز و شیب انتهای تیر نشان داده شده را محاسبه نمایید. (EI ثابت است.)



پاسخ: برای محاسبه شیب و خیز انتهای تیر کافی است ابتدا بار جزئی dF وارد بر یک المان طولی از تیر را در نظر گرفته، سپس شیب و خیز انتهای تیر ناشی از dF را در مقطع دلخواه x از ابتدای تیر محاسبه نموده و در نهایت با انتگرال‌گیری از نتایج به دست آمده شیب و خیز ناشی از بار گسترده وارد بر تیر را به دست آورد.



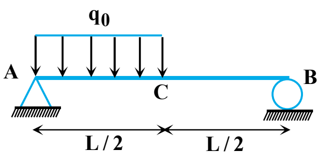
با توجه به تغییرات خطی بار گسترده، شدت بار در فاصله x از ابتدای تیر مساوی $q=q_0\frac{L-x}{L}$ می‌باشد. $dF=qdx=q_0\frac{L-x}{L}dx$

با توجه به نتیجه مثال ۱۸ : $d\theta_B=\frac{x^2dF}{2EI}=\frac{q_0}{2EIL}(L-x)x^2dx$

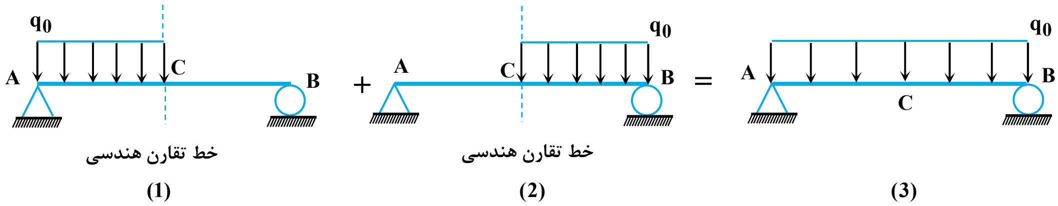
$$\theta_B=\int_0^L d\theta_B=\int_0^L\frac{q_0}{2EIL}(Lx^2-x^3)\,dx=\frac{q_0}{2EIL}[\frac{Lx^3}{3}-\frac{x^4}{4}]_0^L=\frac{q_0L^3}{24EI}$$

با توجه به نتیجه مثال (۵): $dy_B=\frac{dFx^2(3L-x)}{6EI}=\frac{q_0(L-x)(3L-x)x^2}{6EIL}dx\Rightarrow y_B=\int_0^L dy_B=\int_0^L\frac{q_0(L-x)(3L-x)x^2}{6EIL}dx=\frac{q_0L^4}{30EI}$

مثال۱۹: **خیز وسط تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت را به دست آورید.**



پاسخ: برای تعیین خیز وسط تیر می‌توان از روش جمع آثار استفاده نمود.

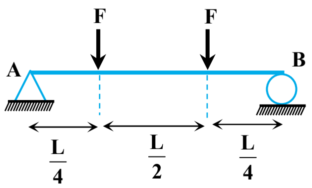


$$(\delta_C)_۱+(\delta_C)_۲=(\delta_C)_۳ \xrightarrow{\text{به دلیل تقارن } (\delta_C)_۱=(\delta_C)_۲} ۲(\delta_C)_۱=(\delta_C)_۳ \xrightarrow{\text{با توجه به جدول خیز}}$$

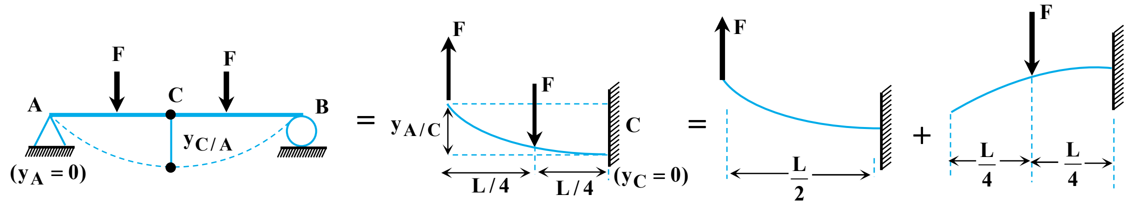
خیز تیر شماره (۳) طبق جدول خیز برابر $\frac{۵q_\circ L^۴}{۳۸۴EI}$ است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$۲(\delta_C)_۱=\frac{۵q_\circ L^۴}{۳۸۴EI} \Rightarrow \delta_{C۱}=\frac{۵q_\circ L^۴}{۷۶۸EI}$$

مثال۲۰: **خیز وسط تیر نشان داده شده را تعیین کنید.**



پاسخ: با توجه به تقارن در بارگذاری $A_y=B_y=F$ بوده و همچنین خیز تیر در وسط ماکزیمم بـوده و شیب در وسط تیر مساوی صفر است. بنابراین می‌توان نیمی از تیر را در نظر گرفته و در وسط تیر یک تکیـه‌گـاه فرضی گیردار قرار داد. $y_C=y_C-y_A=y_{C/A}=-y_{A/C}$

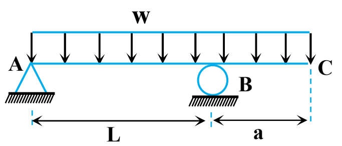


خیز تیر تحت بار خارجی به سمت پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به روش جمع آثار و استفاده از نتیجه مثال (۵) و جدول خیز می‌توان نوشت:

$$y_C=-y_{A/C}=-[\frac{-FL'^۳}{۳EI}+\frac{Fa^۲(۳L'-a)}{۶EI}]=-[-\frac{F(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI}+\frac{F(\frac{L}{۴})^۲(۳(\frac{L}{۲})-\frac{L}{۴})}{۶EI}]$$

$$\Rightarrow y_C=\frac{FL^۳}{۲۴EI}-\frac{۵FL^۳}{۳۸۴EI}=\frac{(۱۶-۵)FL^۳}{۳۸۴EI}=\frac{۱۱FL^۳}{۳۸۴EI}$$

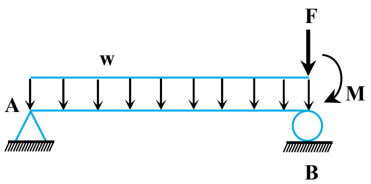
مثال۲۱: **نسبت $\frac{a}{L}$ چه اندازه باشد تا شیب در تکیه‌گاه B مساوی صفر شود؟**



۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

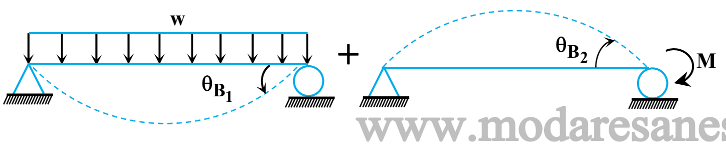
پاسخ: گزینه «۲» می‌توان بار گسترده وارد بر بخش BC را با یک نیرو و لنگر متمرکـز در تکیه‌گاه B به صورت زیر معادل نمود. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F=wa$$

$$M=wa\times\frac{a}{۲}=w\frac{a^۲}{۲}$$

اما شیب در تکیه‌گاه B، ناشی از دو عامل بار گسترده و لنگر متمرکز M در تکیه‌گاه B می‌باشد. بنابراین برای محاسبه شیب در تکیه‌گاه B از روش جمع آثار استفاده می‌شود.

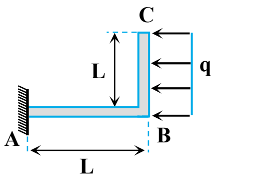


$$\theta_B=\theta_{B۱}+\theta_{B۲}$$

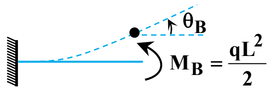
گردش پادساعتگرد B مثبت در نظر گرفته می‌شود، بنابراین با توجه به جدول شیب در تیرها می‌توان نوشت:

$$M = \frac{wa^2}{2} \Rightarrow \theta_{B2} = \frac{-ML}{3EI}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{ML}{3EI} = 0 \Rightarrow \frac{wL^2}{8} = \frac{wa^2}{2} \Rightarrow \frac{a}{L} = \frac{1}{2}$$

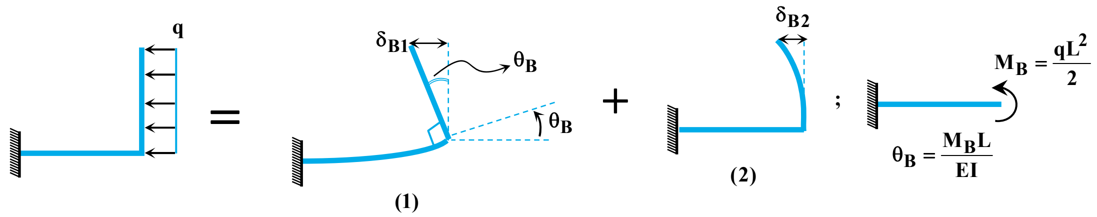


مثال ۲۲: خیز افقی انتهای تیر در مقطع C چه اندازه است؟



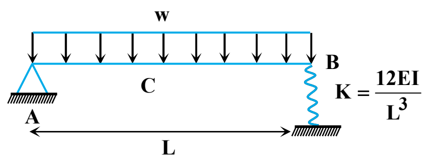
پاسخ: بار گسترده وارد بر بخش BC باعث یک دوران در مقطع B می‌شود، چرا که در مقطع B یک لنگر داخلی به اندازه $\frac{qL^2}{2}$ ایجاد نموده است.

بنابراین خیز افقی در مقطع C، ناشی از دو عامل خمش در قسمت BC تیر و دوران در مقطع B بوده که با استفاده از روش جمع آثار نتایج این دو با هم جمع می‌شود.



$\delta_B =$ خیز ناشی از خمش در قسمت BC بدون در نظر گرفتن دوران در مقطع B + خیز ناشی از دوران مقطع B بدون در نظر گرفتن اثر خمش

$$\Rightarrow \delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2} \xrightarrow{\text{با توجه به جدول خیز و شیب}} \delta_B = \theta_B \times L + (\delta_B)_2 = \frac{M_B L}{EI} \times L + \frac{qL^4}{8EI} = \frac{5qL^4}{8EI}$$

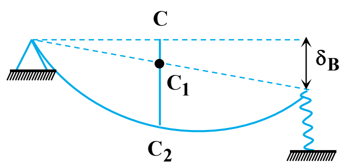


مثال ۲۳: خیز وسط تیر نشان داده شده تحت بار گسترده یکنواخت چه اندازه است؟

(تیر در مقطع B بر روی تکیه‌گاه فنری قرار گرفته است.)

پاسخ: به دلیل تقارن در بارگذاری نیروهای تکیه‌گاهی مساوی می‌باشند، بنابراین:

$$A_y = B_y = \frac{wL}{2}$$



از طرفی خیز تیر در مقطع B ناشی از نیروی B_y مساوی است با:

$$B_y = k\delta_B \Rightarrow \delta_B = \frac{B_y}{k} = \frac{\frac{wL}{2}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{wL^4}{24EI} \qquad (1)$$

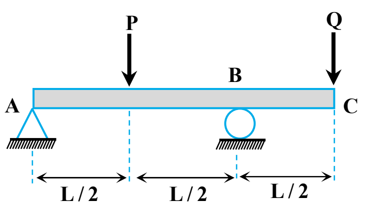
اکنون خیز در مقطع C را می‌توان مطابق شکل زیر به دو بخش تفکیک نمود:

$y_C = CC_2 = CC_1$ (خیز تیر ساده ناشی از فشرده شدن فنر) $+ C_1C_2$ (خیز تیر ساده ناشی از بار گسترده با استفاده از جدول) (۲)

تشابه مثلث: $\frac{CC_1}{\delta_B} = \frac{\frac{L}{2}}{L} \xrightarrow{(1)} CC_1 = \frac{\delta_B}{2}$

با توجه به خیز می‌توان نوشت:

$$(2) \Rightarrow y_C = \frac{1}{2}\delta_B + \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{wL^4}{48EI} + \frac{5wL^4}{384EI} \Rightarrow y_C = \frac{13wL^4}{384EI}$$



مثال ۲۴: نسبت بارهای $\frac{P}{Q}$ چه اندازه باشد تا خیز تیر در مقطع C مساوی صفر شود؟

۱) $\frac{P}{Q} = 1$

۲) $\frac{P}{Q} = 2$

۳) $\frac{P}{Q} = 3$

۴) $\frac{P}{Q} = 4$

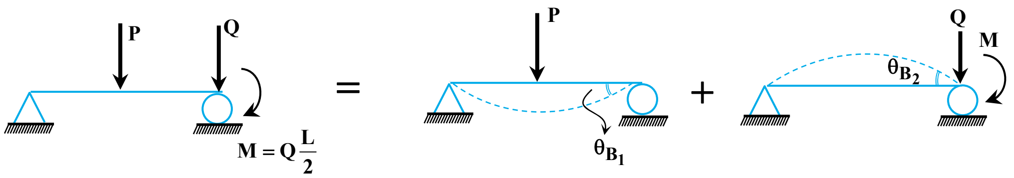
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» خیز تیر در مقطع C را می‌توان ناشی از دو عامل زیر در نظر گرفت:

$$y_C = y_{C_1} + y_{C_2}$$

$$\Rightarrow y_C = \text{(خیز مقطع C ناشی از خمش در تیر BC بدون در نظر گرفتن اثر دوران در مقطع B)} + \text{(خیز مقطع C ناشی از دوران در مقطع B بدون در نظر گرفتن اثر خمش در بخش BC تیر)}$$

$$\Rightarrow y_C = \theta_B \times \frac{L}{۲} + y_{C_۲} \qquad (۱)$$

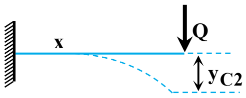
اما برای محاسبه دوران در مقطع B کافی است نیروی Q به مقطع B انتقال داده شود. (دوران ساعتگرد مثبت فرض می‌شود) در اثر لنگر ایجاد شده M $(M = Q\frac{L}{۲})$ در مقطع B از تیر، یک شیب برابر $\theta_{B۲}$ در تکیه‌گاه B ایجاد می‌شود.



همچنین نیروی انتقال یافته Q در تکیه‌گاه B هیچ‌گونه تأثیری در شیب ایجاد شده در تکیه‌گاه B ندارد.

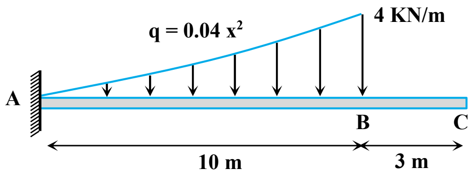
$$\theta_B = -\frac{PL^۲}{۱۶EI} + \frac{ML}{۳EI} = -\frac{PL^۲}{۱۶EI} + \frac{QL^۲}{۶EI} \qquad (۲)$$ با توجه به جدول شیب :

برای محاسبه جمله دوم در رابطه (۱) یعنی $y_{C۲}$، کافی است خیز انتهای یک تیر یک سرگیردار تحت نیروی متمرکز Q در نظر گرفته شود؛ زیرا در محاسبه $y_{C۲}$ شیب در تکیه‌گاه B صفر در نظر گرفته شده است.



$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow y_C = \left(-\frac{PL^۲}{۱۶EI} + \frac{QL^۲}{۶EI}\right)\times\frac{L}{۲} + \frac{Q(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۳۲} = \frac{Q}{۸} \Rightarrow \frac{P}{Q} = ۴$$

مثال ۲۵: در شکل زیر خیز تیر در نقطه C برابر است با کسری به مخرج EI و صورت:



۱) ۲۰۸۹

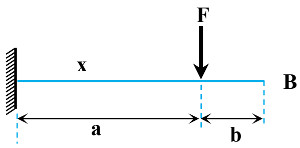
۲) ۲۸۸۸/۹

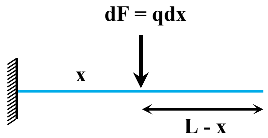
۳) ۳۸۸۸/۹

۴) ۴۰۸۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یک المان از بار گسترده را به عنوان نیروی متمرکز در نظر گرفته و خیز ناشی از آن در نقطه‌ی B طبق جدول ضمیمه‌ی کتاب نوشته می‌شود.

$$\delta_B = \frac{-Fa^۲}{۶EI}(۳L - a) \Rightarrow$$ (با استفاده از جدول خیز)





$$d\delta_B = -\frac{dFx^۲(۳L - x)}{۶EI}$$

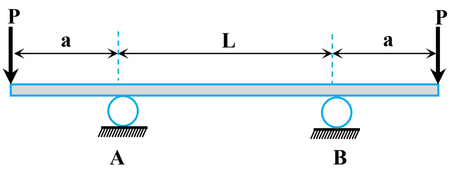
$$\Rightarrow d\delta_B = \frac{-(qdx)x^۲}{۶EI}(۳L - x)$$

$$\Rightarrow \delta_B = \int_۰^{۱۰} \frac{-qdx}{۶EI} x^۲(۳\times۱۳ - x) \qquad , \qquad q = ۰/۰۴x^۲$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{-۱}{۶EI}\int_۰^{۱۰}(۰/۰۴x^۲)\times x^۲(۳۹ - x)dx = \frac{-۰/۰۴}{۶EI}\int_۰^{۱۰}(۳۹x^۴ - x^۵)dx \Rightarrow \delta_B = \frac{-۰/۰۴}{۶EI}\left[\frac{۳۹}{۵}x^۵ - \frac{۱}{۶}x^۶\right]_۰^{۱۰} = \frac{-۴۰۸۹}{EI}$$

مشابه چنین تستی در مثال‌های تشریحی فصل برای بارهای مثلثی حل شده است.

مثال ۲۶: به تیر شکل زیر دو نیروی مساوی P وارد شده است. اگر ρ شعاع انحنای تیر خمیده در فاصله بین دو تکیه‌گاه باشد، حداکثر خیز تیر در این فاصله کدام است؟



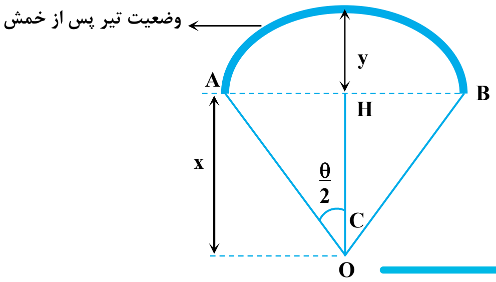
۱) $\rho + \frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^۲ - L^۲}$

۲) $\rho + \frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^۲ + L^۲}$

۳) $\rho - \frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^۲ - L^۲}$

۴) $\rho - \frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^۲ + L^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نیروی برشی داخلی تیر در فاصله OA برابر صفر است. بنابراین تیر در این فاصله تحت خمش خالص بوده و شعاع انحنـاء در ایـن فاصله ثابت و برابر ρ می‌باشد.



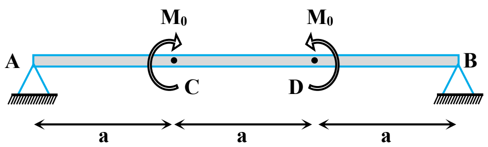
$$OA = OB = OC = \rho$$

$$OC = \rho = x + y \Rightarrow y = \rho - x \quad ; \quad x^2 = OA^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \rho^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{1}{4}(4\rho^2 - L^2)$$

$$y = \rho - \frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2 - L^2}$$

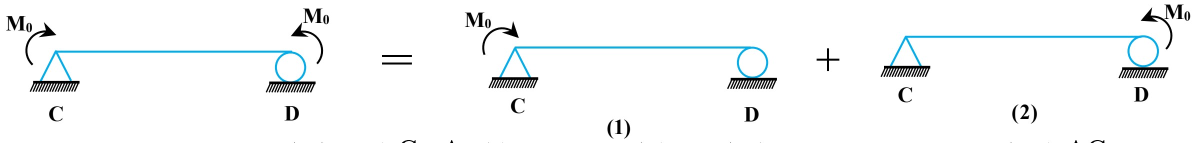
مثال ۲۷: در شکل مقابل، مقدار حداکثر خیز تیر برابر است با کسر $\frac{M_\circ a^2}{8EI}$ ضرب در:



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۸

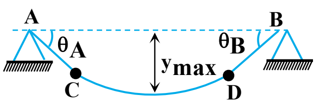
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به دلیل آنکه لنگرهای خارجی خلاف جهت یکدیگر می‌باشند، یکدیگر را خنثی نموده و در نتیجه نیروهای تکیه‌گاهی مساوی صفر است. در این حالت لنگر خمشی داخلی در قسمت‌های AC و DB برابر صفر بوده، بنابراین منحنی الاستیک قسمت‌های مذکور به صورت خطی خواهد بود. از طرفی خیز ماکزیمم در تیر مساوی است با خیز نقطه C بعلاوه خیز ماکزیمم در قسمت CD تیر. (برای محاسبه خیز ماکزیمم در تیر CD از جدول ضمیمه کتاب استفاده شود.) (برای محاسبه شیب تیر در A می‌توان از روش جمع آثار استفاده نمود.)



(شیب تیر در قسمت AC ثابت است، چون تیر به صورت خطی است. بنابراین شیب در مقاطع A و C با هم برابر است.)

$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2} = \frac{M_\circ a}{3EI} + \frac{M_\circ a}{6EI} = \frac{M_\circ a}{2EI} \Rightarrow \theta_C = \theta_A$$

طبق جدول خیز می‌توان نوشت:

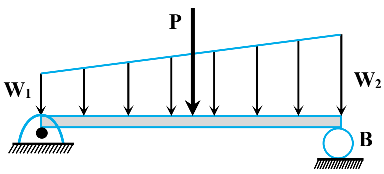


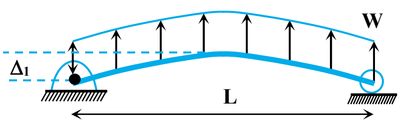
$$(\delta_{max})_{AB} = \delta_C + (\delta_{max})_{CD} \quad ; \quad (\delta_{max})_{CD} = \frac{M_\circ a^2}{8EI}$$

$$\Rightarrow (\delta_{max})_{AB} = \theta_A \times a + \frac{M_\circ (a)^2}{8EI} = \frac{M_\circ (3a)}{6EI} \times a + \frac{M_\circ a^2}{8EI}$$

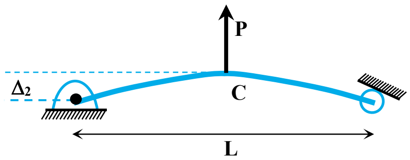
$$(\delta_{max})_{AB} = \frac{12M_\circ a^2 + 3M_\circ a^2}{24} = \frac{5M_\circ a^2}{8EI}$$

مثال ۲۸: تغییر مکان وسط تیر زیر را پیدا کنید. (تغییر مکان وسط تیرهای بارگذاری شده یکنواخت و متمرکز $[\Delta_1, \Delta_2]$ معلوم فرض می‌شوند.)





$$\Delta_1 = \frac{5WL^4}{384EI}$$



$$\Delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$$

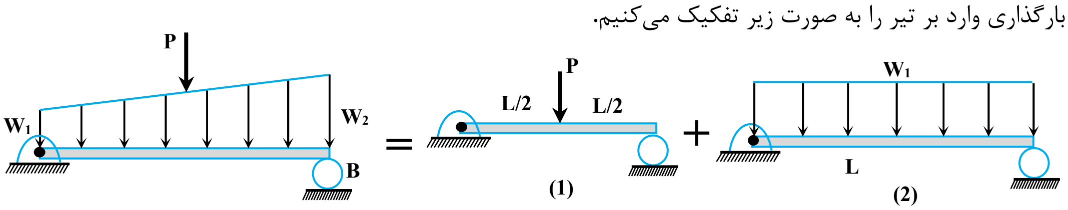
۱) $\Delta_C = \frac{L^3}{EI}\left[\frac{3W_1 - W_2}{348} + \frac{P}{48}\right]$

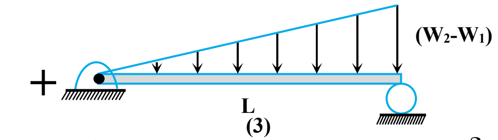
۲) $\Delta_C = \frac{L^5}{EI}\left[\frac{15W_1 - 5W_2}{768} + \frac{P}{48}\right]$

۳) $\Delta_C = \frac{L^4}{EI}\left[\frac{5\frac{P}{L} + 5W_1 - W_2}{384}\right]$

۴) $\Delta_C = \frac{L^3}{48EI}\left[\frac{5(W_1 + W_2)L}{16} + P\right]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا بارگذاری وارد بر تیر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم.





با استفاده از روش جمع آثار و جدول خیز می‌توان نوشت: $\delta_C = \delta_{C_1} + \delta_{C_2} + \delta_{C_3}$

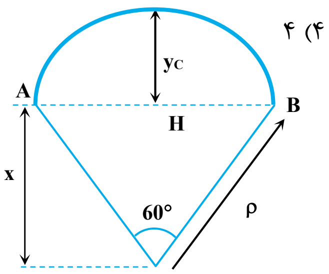
$$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{5W_1L^4}{384EI} + \frac{1}{2} \times \frac{5(W_2 - W_1)L^4}{384EI} \Rightarrow \delta_C = \frac{5(W_2 + W_1)L^4}{768EI} + \frac{PL^3}{48EI}$$

خیز تیر به سمت پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود.

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{L^3}{48EI}\left[\frac{5(W_1 + W_2)L}{16} + P\right]$$

مثال ۲۹: یک خط‌کش فولادی به طول ۳۱/۴ سانتیمتر به وسیله زوج‌های وارد بر دو انتهای آن به صورت قوس دایره‌ای ۶۰ درجه خمیده می‌شود، میزان خیز در وسط خط‌کش چند سانتیمتر است؟

۱) ۱/۵۷ ۲) ۲ ۳) ۳/۱۴ ۴) ۴



☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

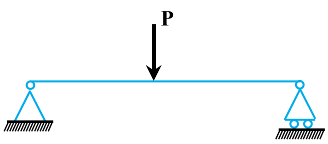
$$y_C = \rho - x = \rho - \rho\cos 30 = \rho(1 - \cos 30)$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$AH = \rho \sin 30 = \frac{L}{2} \Rightarrow \rho = L$$

$$\Rightarrow y_C = 31/4(1 - \cos 30) = 4/2$$

مثال ۳۰: اگر تمام ابعاد تیر (در شکل زیر) α برابر شوند، تغییر مکان ماکزیمم آن چه تغییری می‌کند؟



۱) تغییری نمی‌کند. ۲) α برابر می‌شود.

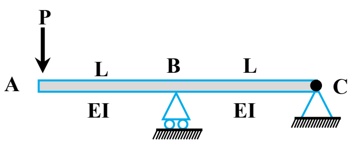
۳) α برابر کوچک می‌شود. ۴) در $\frac{1}{\alpha^4}$ ضرب می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» موقعیت اثر بار P تأثیری در جواب مسئله ندارد لذا آن را در وسط تیر فرض می‌کنیم.

$$\delta_1 = \frac{PL^3}{48EI} \xrightarrow{\text{با } \alpha \text{ برابر شدن ابعاد نتیجه می‌شود}} \delta_2 = \frac{P(\alpha L)^3}{48E(\alpha^4 I)} = \frac{1}{\alpha}\frac{PL^3}{48EI} \Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{\alpha}\delta_1 \Rightarrow \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{1}{\alpha}$$

با α برابر شدن ابعاد سطح مقطع تیر، ممان اینرسی α^4 برابر می‌شود.

مثال ۳۱: در سازه زیر مطلوبست محاسبه خیز در زیربار P.



۱) $\delta_A = \frac{2Pl^3}{3EI}$ ۲) $\delta_A = \frac{2Pl^3}{5EI}$ ۳) $\delta_A = \frac{3Pl^3}{5EI}$ ۴) $\delta_A = \frac{Pl^3}{3EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» خیز مقطع A را می‌توان با استفاده از روش جمع آثار به صورت زیر محاسبه نمود.

$\delta_A = \delta_{A/B}$ (خیز مقطع A فقط ناشی از خمش در قسمت AB بدون در نظر گرفتن اثر دوران مقطع B) $+ \theta_B \times L$ (خیز مقطع A ناشی از دوران مقطع B بدون در نظر گرفتن اثر خمش در قسمت AB)

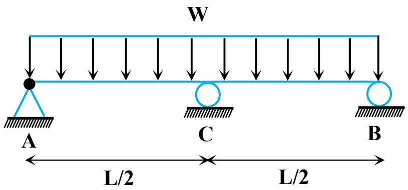
$$\theta_B = \frac{M_BL}{3EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{PL^3}{3EI} + \theta_B \times L = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL \times L}{3EI} \times L = \frac{2}{3}\frac{PL^3}{EI}$$

تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیرهای نامعین استاتیکی با استفاده از جدول خیز و شیب

در اغلب موارد، استفاده از روش جمع آثار جهت تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیرهای نامعین استاتیکی راحت‌تر از روش‌های دیگر می‌باشد. در این روش یکی از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که باعث نامعینی مسأله شده برداشته شده و به جای آن عکس‌العمل مربوط به آن قرار داده می‌شود سپس خیز و شیب تیر ناشی از بارهای خارجی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه می‌شود. در نهایت با استفاده از شرایط مرزی تیر می‌توان نیروی مجهول تکیه‌گاهی را محاسبه نمود.

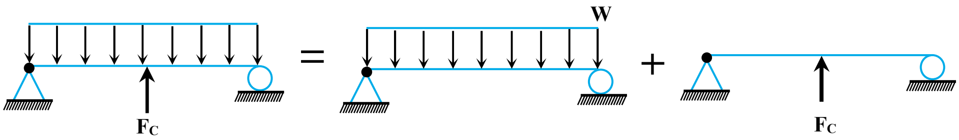
در زیر چندین مثال با حل تشریحی ارائه شده است که به درک بهتر این روش کمک می‌کند.

مثال ۳۲: نیروی تکیه‌گاه C در تیر نامعین مقابل چه مقدار می‌باشد؟



پاسخ : ابتدا تکیه‌گاه C را در نظر نگرفته به جای آن یک مؤلفه نیروی قائم قرار داده، سپس خیز تیر تحت بار گسترده W و نیروی مجهول F_C در مقطع C با استفاده از جدول خیز و شیب محاسبه می‌شود: (خیز تیر به سمت پایین مثبت فرض می‌شود)

$$y_C = y_{C_۱} + y_{C_۲} = \frac{۵WL^۴}{۳۸۴EI} - \frac{F_C L^۳}{۴۸\,EI} \qquad (۱)$$

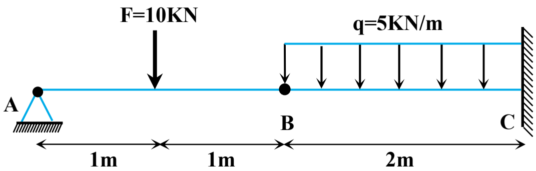


از طرفی چون در مقطع C تکیه‌گاه وجود دارد، خیز در این نقطه مساوی صفر است. در نتیجه با استفاده از رابطه (۱) می‌توان نیروی تکیه‌گاه C را تعیین نمود.

$$(۱) \Rightarrow ۰ = \frac{۵WL^۴}{۳۸۴EI} - \frac{F_C L^۳}{۴۸EI} \Rightarrow F_C = \frac{۲۴۰\,WL}{۳۸۴}$$

مثال ۳۳: تیر مرکب ABC مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است محاسبه‌ی: الف) خیز تیر در مفصل B .

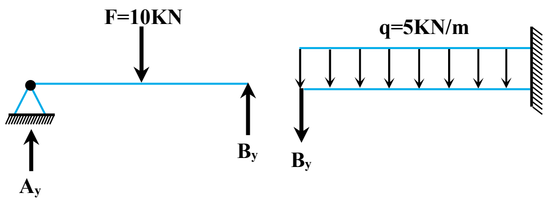
ب) شیب تیر در تکیه‌گاه A $(EI = ۵\times۱۰^۶ \ \ N.m^۲)$



پاسخ: الف) ابتدا تیر مرکب را به دو جزء تفکیک می‌کنیم:

به خاطر تقارن در تیر ساده‌ی AB نیروی تکیه‌گاه A و مفصل B مساویند.

$$B_y = A_y = \frac{۱۰}{۲} = ۵KN = ۵۰۰۰\ N$$



از طرفی تیر یک سرگیردار BC در انتهای خود تحت نیروی متمرکز B_y و همچنین بار گسترده q است (لازم به ذکر است که در هنگام ترسیم دیاگرام آزاد تیر BC، باید عکس‌العمل قائم نیروی مفصل B که در تیر AB رسم شده بود، در تیر BC رسم شود، چرا که قانون سوم نیوتن باید رعایت گردد.)

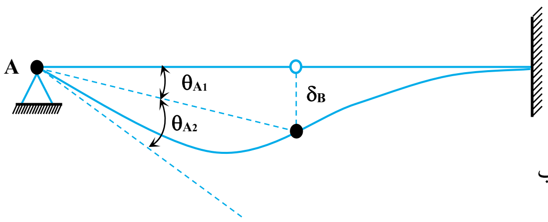
طبق اصل جمع آثار خیز در مفصل B، مساوی مجموع خیز ناشی از نیروی B_y و بار گسترده q است. (خیز تیر به سمت پایین مثبت در نظر گرفته شده است.)

با توجه به جدول خیز برای تیر BC می‌توان نوشت:

$$\delta_B = \frac{B_y L^۳}{۳EI} + \frac{qL^۴}{۸EI} = \frac{۵۰۰۰\times۲^۳}{۳\times۵\times۱۰^۶} + \frac{۵۰۰۰\times۲^۴}{۸\times۵\times۱۰^۶} \Rightarrow \delta_B = ۴/۶۶\times۱۰^{-۳}\ m \simeq ۴/۷mm$$

همان طور که در بالا اشاره شد در رسم نیروی داخلی در مفصل B در دیاگرام آزاد تیرهای AB و BC توجه به قانون سوم نیوتن الزامی است. اگر نیروی B_y در تیر AB نیروی عمل فرض شود، در تیر BC باید عکس‌العمل آن که به سمت بالا است رسم گردد.

ب) شیب تیر در A مساوی است با مجموع شیب ناشی از خیز در مقطع B بدون در نظر گرفتن اثر خمش در تیر AB $(\theta_{A_۱})$، و شیب ناشی از نیروی F اعمال شده در وسط تیر AB $(\theta_{A_۲})$، بدون در نظر گرفتن اثر دوران $\theta_{A_۱}$.

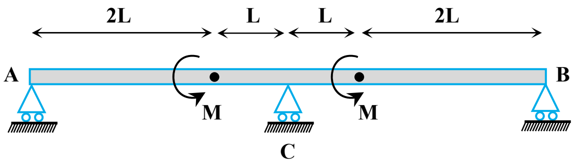


$$\theta_{A_۱} = \frac{\delta_B}{L_{AB}} = \frac{۴/۶۶\times۱۰^{-۳}}{۲} = ۲/۳۳\times۱۰^{-۳}\ rad$$

با توجه به جدول خیز و شیب $\theta_{A_۲} = \frac{FL^۲}{۱۶EI} = \frac{۵۰۰۰\times۲^۲}{۱۶\times۵\times۱۰^۶} = ۰/۲۵\times۱۰^{-۳}\ rad$

$$\theta_A = \theta_{A_۱} + \theta_{A_۲} = ۲/۵۸\times۱۰^{-۳}\ rad$$

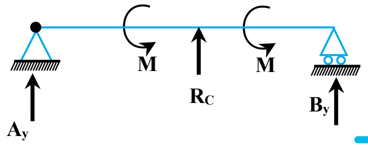
مثال ۳۴: عکس‌العمل در تکیه‌گاه A چقدر است؟



۱) $\frac{2M}{L}$　　۲) $\frac{M}{L}$

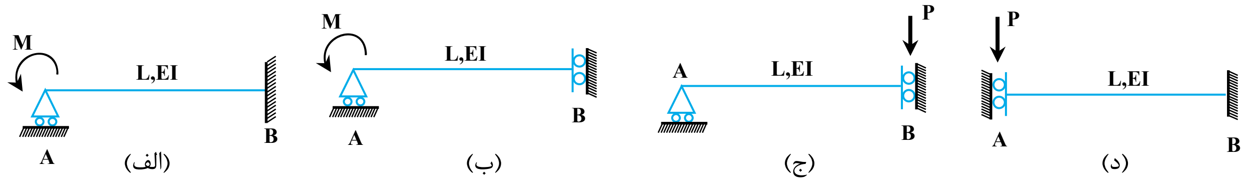
۳) $\frac{2M}{3L}$　　۴) $\frac{M}{3L}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تیر نامعین از درجه یک است، لذا تکیه‌گاه C را برداشته به جای آن نیروی R_C قرار می‌دهیم اما همان طور که مشاهده می‌شود خیزهای ایجاد شده در تکیه‌گاه C ناشی از دو لنگر M، مساوی و مختلف الجهت می‌باشد در نتیجه در مقطع C هیچ‌گونه خیزی ایجاد نشده و نیروی تکیه‌گاه C مساوی صفر است. در چنین حالتی تنها کافی است حول تکیه‌گاه B گشتاورگیری نموده تا نیروی تکیه‌گاه A به دست آید.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -6LA_y + M + M = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M}{3L}$$

مثال ۳۵: درتیرهای شکل زیر نیروهای تکیه‌گاهی و خیز و شیب در هر تکیه‌گاه را در صورت وجود محاسبه نمایید.



☑ **پاسخ: الف)** خیز در تکیه‌گاه A ناشی از نیروی تکیه‌گاهی و لنگر خارجی مساوی صفر است. بنابراین با توجه به جدول خیز و شیب می‌توان نوشت:

$$y_A = 0 = +\frac{ML^2}{2EI} - \frac{R_A L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{2}\frac{M}{L}$$ (خیز تیر به سمت پایین مثبت فرض شده است)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = -R_A \Rightarrow R_B = -\frac{3}{2}\frac{M}{L} \qquad (1)$$

$$\theta_A = \frac{ML}{EI} - \frac{R_A L^2}{2EI} \overset{(1)}{\Rightarrow} \theta_A = +\frac{ML}{EI} - \frac{(\frac{3}{2}\frac{M}{L})L^2}{2EI} = +\frac{ML}{EI} - \frac{3}{4}\frac{ML}{EI} = +\frac{ML}{4EI}$$ (گردش پادساعتگرد مثبت فرض شده است)

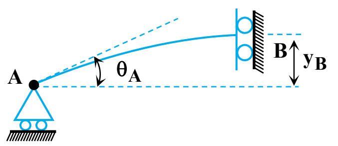
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M - R_A L + M_B = 0 \Rightarrow M - (\frac{3}{2}\frac{M}{L})L + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{M}{2}$$

ب) تکیه‌گاه B ریلی بوده، بنابراین هیچ‌گونه نیروی خارجی تحمل نمی‌کند. اما قادر به تحمل لنگر بوده بنابراین $M_B = M$ می‌باشد.

با نوشتن معادله تعادل می‌توان نیروی تکیه‌گاه A را به دست آورد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 0$$

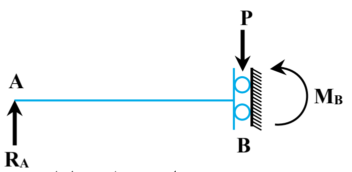
تیر AB در دو انتهای خود تحت اثر دو ممان مساوی و مختلف‌الجهت است. به عبارت دیگر تیر تحت اثر خمش خالص قرار گرفته است و مقدار شیب و خیز آن طبق جدول برابر است با:



$$\theta_A = +\frac{ML}{EI} \quad ; \quad y_B = +\frac{ML^2}{2EI}$$

$$M_B = M$$

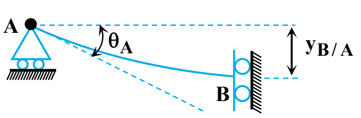
ج) نیروی تکیه‌گاه A باید نیروی خارجی P را تحمل کند، بنابراین طبق قانون تعادل می‌توان نوشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + R_A = 0 \Rightarrow R_A = P$$

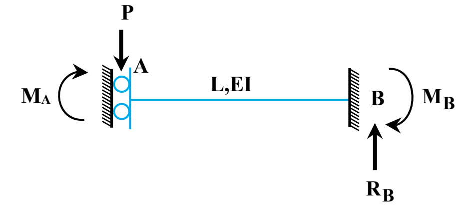
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_B - PL = 0 \Rightarrow M_B = PL$$

با توجه به شکل رسم شده، رفتار و تغییر مکان تیر همانند یک تیر یکسر گیردار است، بنابراین می‌توان برای محاسبه خیز و شیب تیر از جدول مطابق زیر استفاده نمود.



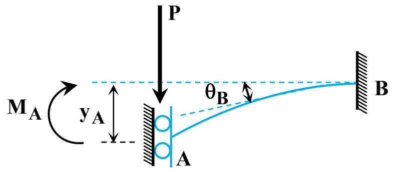
$$\theta_A = -\frac{R_A L^2}{2EI} = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_{B/A} = \frac{+R_A L^3}{3EI} = \frac{+PL^3}{3EI}$$



د) طبق معادله تعادل می‌توان نیروی تکیه‌گاه B را به دست آورد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = P$$



به دلیل آنکه تکیه‌گاه B گیردار است، بنابراین مقدار شیب در این تکیه‌گاه برابر صفر می‌باشد. با استفاده از این نتیجه می‌توان لنگر تکیه‌گاه ریلی A را آورد.

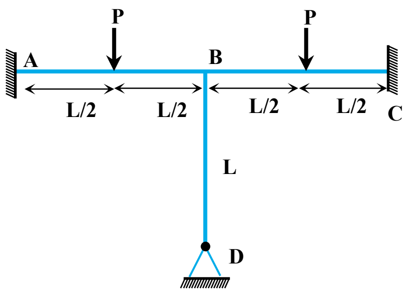
$$\theta_B = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{2EI} - \frac{M_A L}{EI} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{PL}{2}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_B + \frac{PL}{2} - PL = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{2}$$

اکنون با نوشتن معادله تعادل، گشتاور تکیه‌گاهی M_B به دست می‌آید.

$$y_A = +\frac{PL^3}{3EI} - \frac{M_A L^2}{2EI} = \frac{+PL^3}{3EI} - \frac{PL^3}{4EI} = +\frac{PL^3}{12EI}$$

مثال ۳۶: ممان در تکیه‌گاه A برابر است با: (EI = ثابت)



۱) $\frac{PL}{4}$

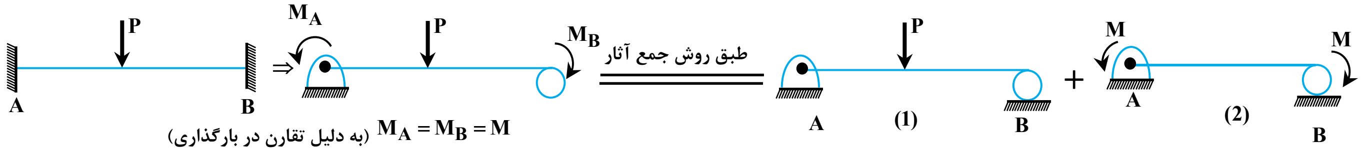
۲) $\frac{PL}{8}$

۳) $\frac{PL}{10}$

۴) هیچ‌کدام از موارد فوق

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» به دلیل تقارن در بارگذاری و ثابت بودن EI میله‌های AB و BC شیب در روی محور تقارن یـا مقطع B مساوی صـفر اسـت. در نتیجه می‌توان با صرف‌نظر کردن از تغییرات طول میله BD، تیر AB را مانند یک تیر دو سرگیردار در نظر گرفت.

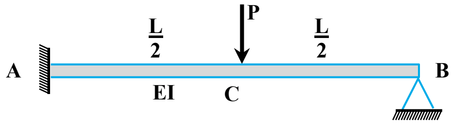
اما تیر دو سر گیردار AB را می‌توان به صورت تیر دو سر مفصل با دو لنگر متمرکز خارجی مساوی و مختلف الجهت در تکیه‌گاه‌ها در نظر گرفت.



شیب در مقطع A و B از تیر AB مساوی صفر است، بنابراین با استفاده از جدول خیز و شیب تیر نیز می‌توان نوشت:

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{2EI} = 0 \Rightarrow M = M_A = M_B = M_C = \frac{PL}{8}$$

مثال ۳۷: برای تیر بارگذاری شده در شکل عکس‌العمل عمودی پایه B چه مقدار است. مدول ارتجاعی در کشش و فشار یکسان می‌باشد از وزن تیر صرف‌نظر می‌شود.



۱) $\frac{P}{4}$ ۲) $\frac{P}{2}$ ۳) $\frac{3P}{8}$ ۴) $\frac{5P}{16}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تکیه‌گاه B را برداشته به جای آن نیروی تکیه‌گاهی B قرار داده می‌شود. اکنون با استفاده از روش جمع آثار می‌توان خیـز مقطـع B را محاسبه نمود.

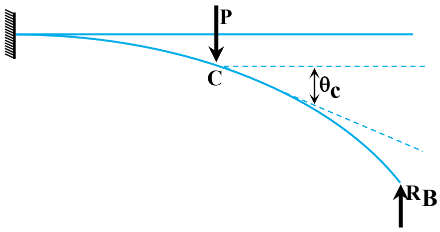
خیز ناشی از نیروی R_B در مقطع B - خیز ناشی از دوران مقطع C تحت نیروی P + خیز ناشی از نیروی P بدون در نظر گرفتن اثر دوران = خیز مقطع B

برای محاسبه خیز δ_{B_1} کافی است خیز انتهای تیر یک سرگیردار به طول $\frac{L}{2}$ تحت نیروی متمرکز محاسبه شود.

$$\delta_C = \delta_{B_1} = \frac{PL'^3}{3EI} = \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI}$$

برای محاسبه خیز δ_{B_2} کافی است خیز مقطع B ناشی از شیب ایجاد شده در مقطع C محاسبه شود. در این حالت از اثر خمش در بخش BC تیـر صـرف‌نظر شده و فرض می‌کنیم که تیر BC به صورت خطی باقی بماند.

$$\delta_{B_2}=\theta_C\times\frac{L}{2}=\frac{PL'^2}{2EI}\times\frac{L}{2}=\frac{P(\frac{L}{2})^2}{2EI}\times\frac{L}{2}\Rightarrow\delta_B=\delta_{B_1}+\delta_{B_2}+\delta_{B_3}$$

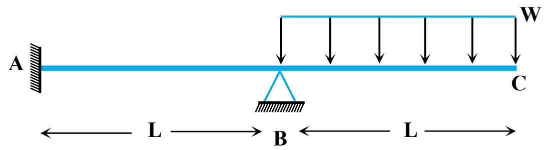


$$\delta_B=\delta_{B_1}+\delta_{B_2}-\delta_{B_3}=0\Rightarrow\frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI}+\theta_C\times\frac{L}{2}-\frac{R_BL^3}{3EI}=0$$

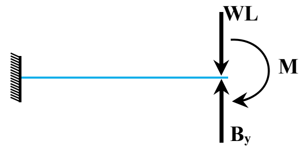
$$\Rightarrow\frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI}+\frac{P(\frac{L}{2})^2}{2EI}\times\frac{L}{2}-\frac{R_BL^3}{3EI}=0$$

$$\Rightarrow\frac{PL^3}{24EI}+\frac{PL^3}{16EI}-\frac{R_BL^3}{3EI}=0\Rightarrow R_B=\frac{5P}{16}$$

مثال ۳۸: در تیر زیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B چه مقدار است؟



پاسخ : ابتدا بخش BC تیر برداشته شده و اثر آن روی تکیه‌گاه قرار داده می‌شود. بار گسترده وارد بـر بخـش BC تیر، معادل نیروی متمرکز WL و لنگر متمرکز $\frac{WL^2}{2}$ در تکیه‌گاه B می‌باشد. در نتیجه: $M=\frac{WL^2}{2}$



اما در تکیه‌گاه B به دلیل وجود تکیه‌گاه مفصلی B خیز مساوی صفر است، در نتیجه با استفاده از روش جمع آثار می‌توان نوشت:

(خیز به سمت پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود.)

$$y_B=-\frac{B_yL^3}{3EI}+\frac{(WL)L^3}{3EI}+\frac{(W\frac{L^2}{2})L^2}{2EI}=0\Rightarrow B_y=WL+\frac{3}{4}WL\Rightarrow B_y=\frac{7}{4}WL$$

مثال ۳۹: در مثال قبلی خیز نقطه C چه مقدار است؟

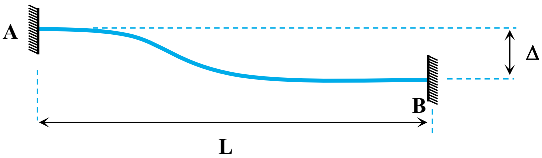
پاسخ : خیز نقطه C را می‌توان حاصل دو اثر دانست: ۱) خیز ناشی از خمش قسمت BC تیر، y_{C_1} ۲) خیز ناشی از دوران مقطع B از تیر AB، y_{C_2}

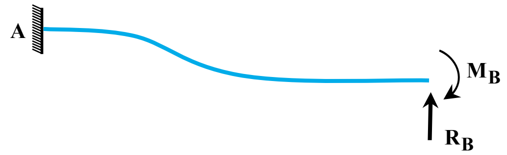
با توجه به حل مثال ۳۵ بخش (الف) می‌توان نتیجه گرفت که شیب در تکیه‌گاه B ناشی از لنگر خمشی حاصل از بار گسترده مساوی است با: $\theta_B=\frac{ML'}{4EI}$ که در آن L' طول تیر AB است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$y_C=y_{C_1}+y_{C_2}=\frac{WL^4}{8EI}+\theta_B\times L=\frac{WL^4}{8EI}+\frac{ML'}{4EI}\times L\xrightarrow{(M=\frac{WL^2}{2})}y_C=\frac{WL^4}{8EI}+\frac{(W\frac{L^2}{2})L}{4EI}\times L=\frac{WL^4}{4EI}$$

در محاسبه y_{C_1} تیر BC به صورت تیر یک سرگیردار فرض شده و خیز مقطع C ناشی از بار گسترده محاسبه می‌شود اما در محاسبه y_{C_2} فرض می‌شـود که تیر BC به صورت خطی بوده و انحنایی در آن وجود ندارد و تنها به دلیل زاویه دوران θ_B در مقطع C خیز ایجاد می‌شود.

مثال ۴۰: تیر دو سر ثابت AB در تکیه‌گاه B، به اندازه فاصله عمودی Δ پایین‌تر از تکیه‌گاه A قرار گرفته است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی B چه مقدار می‌باشد؟





پاسخ: تکیه‌گاه B را برداشته و به جای آن یک نیروی عمودی و یک لنگر تکیـه‌گـاهی گذاشته می‌شود. اما در تکیه‌گاه B، شیب به دلیل آنکه تکیه‌گاه گیردار اسـت، مسـاوی صـفر بوده اما خیز عمودی مساوی Δ می‌باشد. با توجه به اصل جمع آثار می‌توان نوشت:

(شیب ساعتگرد مثبت فرض می‌شود.)

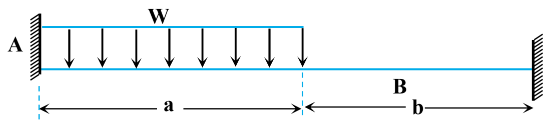
$$\theta_B=\frac{M_BL}{EI}-\frac{R_BL^2}{2EI}=0\Rightarrow M_B=\frac{R_BL}{2}\qquad(1)$$

$$y_B=\Delta=\frac{M_BL^2}{2EI}-\frac{R_BL^3}{3EI}\xrightarrow{(1)}y_B=\frac{R_BL^3}{4EI}-\frac{R_BL^3}{3EI}=-\frac{R_BL^3}{12EI}$$ (خیز به سمت پایین مثبت فرض می‌شود.)

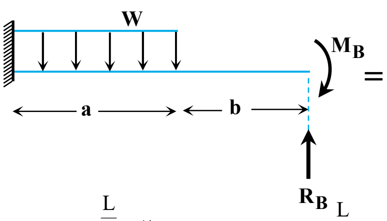
$$\Rightarrow R_B=-\frac{12EIy_B}{L^3}=\frac{-12EI\Delta}{L^3}\xrightarrow{(1)}M_B=-6\frac{EI\Delta}{L^2}$$

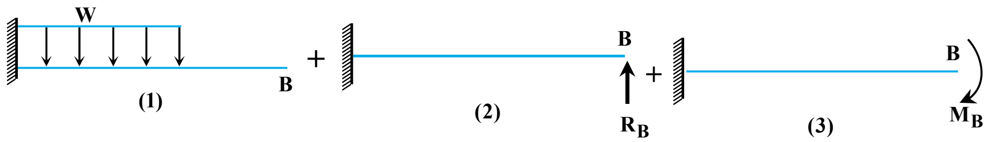
علامت منفی به دست آمده در نتایج مؤید این نکته است که جهت صحیح مؤلفه‌های R_B و M_B خلاف جهت نشان داده شده است.

مثال ۴۱: عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه B را در تیر نشان داده شده محاسبه کنید. $(a=b=\frac{L}{2})$



☑ **پاسخ:** تکیه‌گاه B را برداشته و به جای آن مؤلفه‌های تکیه‌گاهی R_B و M_B قرار داده می‌شود. اکنون با توجه به روش جمع آثار مقدار شیب و خیز را در تکیه‌گاه B محاسبه نموده و سپس مقادیر را مساوی صفر قرار می‌دهیم (به دلیل وجود تکیه‌گاه B):





اما برای تعیین خیز و شیب در تیر شماره (۱) از نتایج مثال‌های (۵) و (۱۷) می‌توان نوشت: $(dF=wdx)$

$$\theta_{B_1}=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{x^2dF}{2EI}=\frac{w}{2EI}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{L}{2}}=\frac{wL^3}{48EI}$$

با استفاده از جداول خیز و شیب می‌توان نوشت:

$$\theta_B=\theta_{B_1}+\theta_{B_2}+\theta_{B_3}=\frac{wL^3}{48EI}-\frac{R_BL^2}{2EI}+\frac{M_BL}{EI}=0\Rightarrow\frac{wL^2}{48}-\frac{R_BL}{2}+M_B=0\qquad(1)$$

$$y_{B_1}=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{x^2(3L-x)}{6EI}dF=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{x^2(3L-x)wdx}{6EI}=\frac{w}{6EI}\left[x^3L-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{L}{2}}\Rightarrow y_{B_1}=\frac{wL^4}{6EI}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\right)=\frac{7wL^4}{384EI}$$

$$y_B=y_{B_1}+y_{B_2}+y_{B_3}=0\Rightarrow\frac{7wL^4}{384EI}-\frac{R_BL^3}{3EI}+\frac{M_BL^2}{2EI}=0\Rightarrow\frac{7wL^2}{192}-\frac{2R_BL}{3}+M_B=0\qquad(2)$$

$$(1)\ ,\ (2)\Rightarrow\frac{wL^2}{48}-\frac{R_BL}{2}=\frac{7wL^2}{192}-\frac{2R_BL}{3}\Rightarrow\frac{R_B}{6}=\frac{3wL}{192}\Rightarrow R_B=\frac{6wL}{64}=\frac{3wL}{32}$$

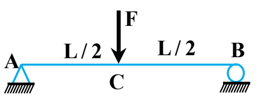
$$(1)\Rightarrow\frac{wL^2}{48}-\frac{3wL^2}{64}=-M_B\Rightarrow M_B=wL^2\left(\frac{3}{64}-\frac{1}{48}\right)=wL^2\left(\frac{18-8}{384}\right)\Rightarrow M_B=\frac{5wL^2}{192}$$

سختی خمشی تیرها تحت بارگذاری‌های مختلف

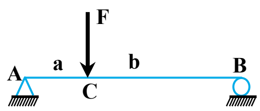
می‌توان تیرهای مختلف تحت بارگذاری‌های نیروی متمرکز را در محدوده ارتجاعی با یک فنر خطی معادل‌سازی نمود، در زیر به چندین مورد از معادل‌سازی تیرها اشاره شده که به کارگیری آن‌ها در حل مسائل می‌تواند سودمند باشد.

با توجه به جدول $y_B=\frac{FL^3}{3EI}\Rightarrow F=\frac{3EI}{L^3}y_B\Rightarrow k_{eq}=\frac{3EI}{L^3}$

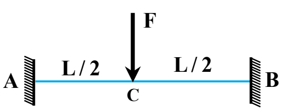
$$\theta=\frac{ML}{EI}\Rightarrow M=\frac{EI}{L}\theta\Rightarrow k_{eq}=\frac{EI}{L}$$



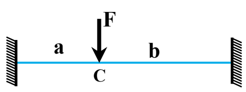
$$y_C=\frac{FL^3}{48EI}\Rightarrow k_{eq}=\frac{48EI}{L^3}$$



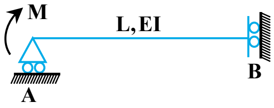
$$y_C=\frac{Fa^2b^2}{3EI}\Rightarrow k_{eq}=\frac{3EI}{a^2b^2}$$



$$y_C=\frac{FL^3}{192EI}\Rightarrow k_{eq}=\frac{192EI}{L^3}$$

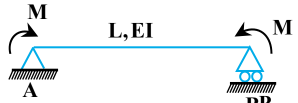


$$y_C=\frac{Fa^3b^3}{3EIL^3}\Rightarrow k_{eq}=\frac{3EIL^3}{a^3b^3}$$

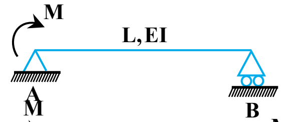


$\theta_A = \frac{ML}{EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{EI}{L}$

$\theta_A = \frac{ML}{4EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{4EI}{L}$

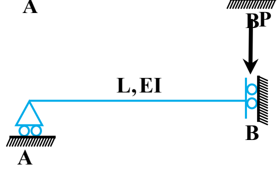


$\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{2EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{2EI}{L}$

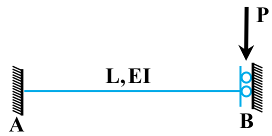


$\theta_A = \frac{ML}{3EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{3EI}{L}$

$\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{6EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{6EI}{L}$

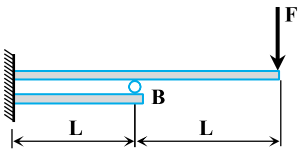


$y_B = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$



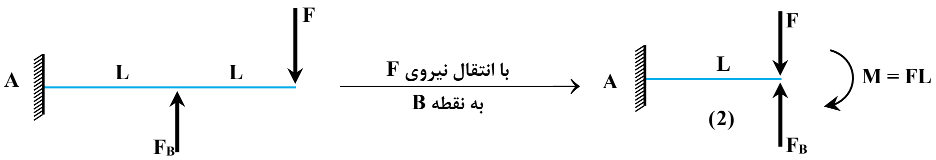
$y_B = \frac{PL^3}{12EI} \Rightarrow k_{eq} = \frac{12EI}{L^3}$

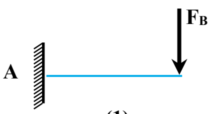
مثال ۴۲: در شکل داده شده، دو تیر دارای سختی خمشی یکسان (EI) می‌باشند. خیز نقطه B کدام است؟



۱) $\frac{FL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{FL^3}{24EI}$ ۳) $\frac{2FL^3}{3EI}$ ۴) $\frac{5FL^3}{12EI}$

پاسخ: گزینه «۴»

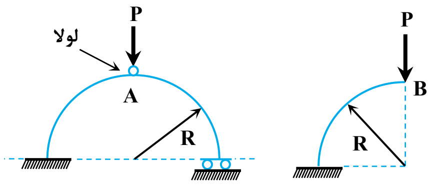




طبق رابطه سازگاری، خیز مقطع B در دو تیر یکسان می‌باشد:

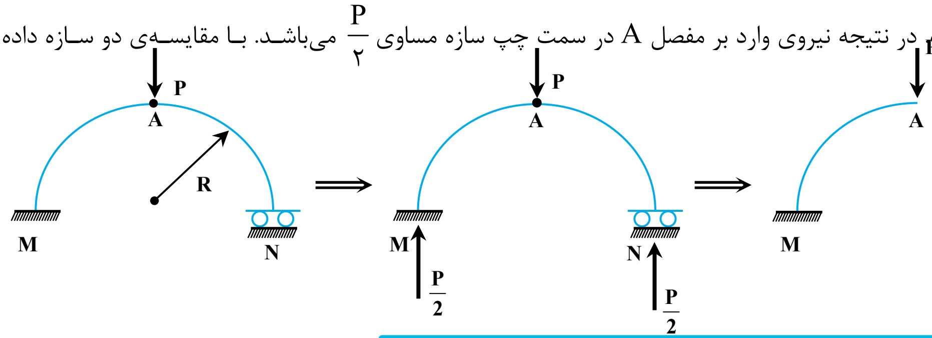
$$(y_B)_1 = (y_B)_2 \Rightarrow \frac{F_B L^3}{3EI} = \frac{(F-F_B)L^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} \xrightarrow{M=FL} F_B = \frac{5}{4}F \Rightarrow y_{B_1} = \frac{F_B L^3}{3EI} = \frac{5FL^3}{12EI}$$

مثال ۴۳: در دو سازه شکل زیر سختی خمشی تیرها مساوی EI می‌باشد. رابطه تغییر مکان‌های قائم عبارت است از:

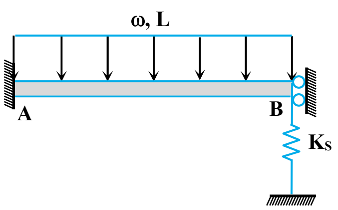


۱) $\delta_A = \frac{2}{3}\delta_B$ ۲) $\delta_A = \delta_B$ ۳) $\delta_A = \frac{5}{6}\delta_B$ ۴) $\delta_A = \frac{1}{2}\delta_B$

پاسخ: گزینه «۴» نیروی افقی در تکیه‌گاه M مساوی صفر است. در نتیجه تکیه‌گاه M و N را می‌توان مشابه یکدیگر در نظر گرفت. به دلیل تقارن، اکنون می‌توان تنها نیمی از سازه را در نظر گرفت، در نتیجه نیروی وارد بر مفصل A در سمت چپ سازه مساوی $\frac{P}{2}$ می‌باشد. با مقایسه‌ی دو سازه داده شده در صورت مسئله نتیجه می‌شود:



مثال ۴۴: در تیر زیر تغییر مکان B چقدر است؟ ($k_S = \frac{3EI}{L^3}$)



۱) $\frac{\omega l^4}{20EI}$ ۲) $\frac{\omega l^4}{30EI}$

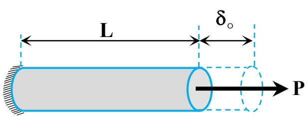
۳) $\frac{\omega l^4}{35EI}$ ۴) $\frac{\omega l^4}{25EI}$

فصل هفتم

«روش‌های انرژی»

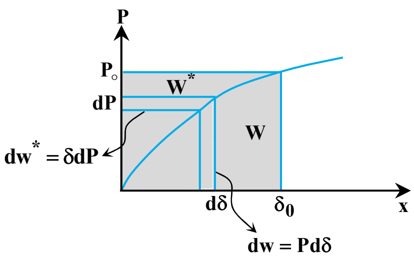
درسنامه (۱): کار و انرژی

مفهوم کار خارجی



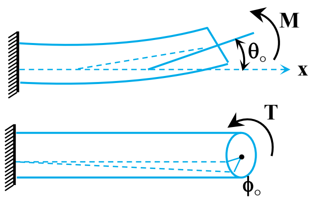
میله‌ای را تحت بار محوری در نظر بگیرید که نیروی وارده به آن به تدریج از ۰ تا $P_\circ$ افزایش می‌یابد. کار انجام گرفته ناشی از این بار از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

کار خارجی میله ناشی از نیروی محوری $W = \int_\circ^{\delta_\circ} P d\delta$



در رابطه فوق $\delta_\circ$ افزایش طول کل میله ناشی از بار محوری می‌باشد. حاصل انتگرال فوق برابر با سطح زیر منحنی نیرو ـ تغییر مکان در فاصله ۰ و $\delta_\circ$ در شکل روبرو است. نوع دیگری از مفهوم کار که تحت عنوان کار مکمل نامیده شده، به صورت مقابل تعریف می‌شود: $W^* = \int_\circ^{P_\circ} \delta dP$

حاصل انتگرال فوق برابر با سطح محصور فوقانی بین منحنی نیرو ـ تغییر مکان در فاصله ۰ و $P_\circ$ می‌باشد. همچنین $P_\circ$ مقدار نیروی نهایی وارد شده بر میله می‌باشد. در سازه‌هایی با رفتار الاستیک خطی سطح پایین و بالای منحنی نیرو و تغییر مکان برابر بوده، بنابراین $W = W^*$ خواهد بود.



اکنون اگر میله تحت گشتاور خمشی یا لنگر پیچشی باشد کار خارجی را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

(الف) کار خارجی میله تحت لنگر خمشی : $W = \int_\circ^{\theta_\circ} M d\theta$

(ب) کار خارجی میله تحت لنگر پیچشی : $W = \int_\circ^{\varphi_\circ} T d\varphi$

$\theta_\circ$ و $\varphi_\circ$ به ترتیب برابر مقدار کل تغییر زاویه‌ای ناشی از لنگر خمشی و پیچشی می‌باشند.

روابط فوق در حالت الاستیک خطی به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\boxed{W = \int_\circ^{\delta_\circ} P d\delta = \frac{1}{2} P\delta_\circ \;\text{(الف)}, \quad W = \int_\circ^{\theta_\circ} M d\theta = \frac{1}{2} M\theta_\circ \;\text{(ب)}, \quad W = \int_\circ^{\varphi_\circ} T d\varphi = \frac{1}{2} T\varphi_\circ \;\text{(ج)}}$$

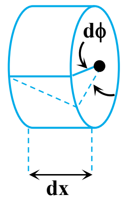
اصل کار مجازی

طبق این اصل «اگر یک جسم یا سازه در حالت تعادل، تحت اثر یک سیستم بارگذاری تغییر شکل کوچک مجازی بدهد آنگاه کار مجازی انجام گرفته به وسیله نیروهای خارجی مساوی با کار مجازی انجام گرفته بوسیله نیروهای داخلی است.»

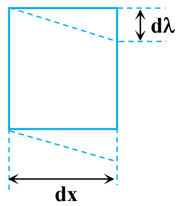
این اصل را می‌توان به صورت ریاضی توسط رابطه زیر بیان نمود:

(کار مجازی صورت گرفته توسط نیروهای داخلی) $W_{ext} = W_{int}$ (کار مجازی صورت گرفته توسط نیروهای خارجی)

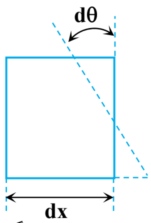
برای محاسبه کار مجازی داخلی، کافی است کار مجازی المان‌های تشکیل دهنده جسم یا سازه را تحت تغییر شکل‌های مجازی محاسبه نموده سپس از آن انتگرال‌گیری نمود. در شکل زیر انواع تغییر شکل‌های مجازی یک المان دلخواه تحت بارگذاری‌های متفاوت ترسیم شده است.



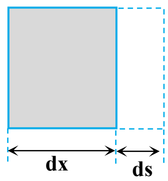
جابجایی مجازی تحت لنگر پیچشی



جابجایی مجازی تحت نیروی برشی



جابجایی مجازی توسط لنگر خمشی



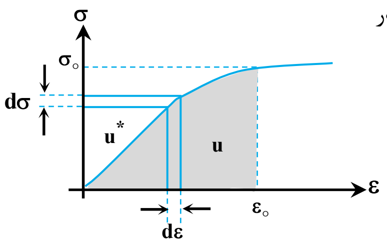
جابجایی مجازی تحت بار محوری

$$W_{int} = \int dW_{int} = \int Nd\delta + \int Md\theta + \int Vd\lambda + \int Td\phi$$

در رابطه فوق N، نیروی محوری $-$ M لنگر خمشی $-$ V نیروی برشی و T لنگر پیچشی می‌باشد.

چگالی انرژی کرنشی

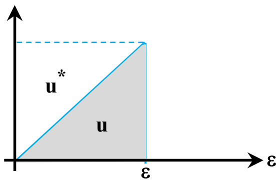
انرژی ذخیره شده بر واحد حجم در جسم، چگالی انرژی کرنشی نامیده می‌شود که برابر سطح زیر منحنی تنش ـ کرنش تا کرنش مورد نظر می‌باشد.



در شکل زیر دیاگرام تنش ـ کرنش برای یک جسم ترسیم شده است. چگالی انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم به صورت سطح هاشور زده نمایش داده شده است.

در رابطه بیانگر مقدار کرنش نهایی جسم در فرآیند بارگذاری می‌باشد. $\varepsilon_\circ$

$$u = \int_\circ^{\varepsilon_\circ} \sigma d\varepsilon$$



در یک تغییر شکل الاستیک و خطی منحنی تنش ـ کرنش به صورت خطی بوده و از قانون هوک تبعیت می‌کند و سطح زیر منحنی به صورت یک مثلث می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \ , \ \sigma = \varepsilon E \Rightarrow \boxed{u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}}$$

از رابطه‌ی فوق می‌توان برای محاسبه‌ی چگالی انرژی کرنشی الاستیک یک سازه یا عضو که تحت یک بار متمرکز بوده و رابطه‌ی تنش و کرنش خطی و معلوم باشد استفاده نمود. در منحنی تنش ـ کرنش سطح بالای نمودار تا خط $\sigma = \sigma_\circ$ در حالت کلی، تحت عنوان چگالی انرژی کرنشی تکمیلی یا مکمل u^* بیان می‌شود که مقدار آن را می‌توان توسط رابطه روبرو به دست آورد.

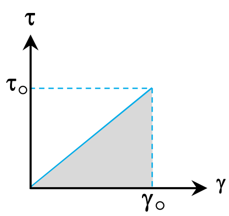
$$u^* = \int_\circ^{\sigma_\circ} \varepsilon d\sigma$$

در سازه‌هایی با رفتار الاستیک خطی سطح بالا و پایین منحنی تنش ـ کرنش مساوی بوده، بنابراین $u = u^*$ می‌باشد.

برای جسمی که در جهت x تحت بارگذاری محوری است و تنش محوری در آن برابر σ_x باشد، انرژی کرنشی برابر است با:

$$U = \int_V udV \xrightarrow{u = \frac{\sigma_x^2}{2E}} \boxed{U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV}$$

در رابطه بالا u، چگالی انرژی کرنشی و U، انرژی کرنشی و V حجم می‌باشند.



برای جسمی که تحت تنش برشی τ قرار گرفته چگالی انرژی کرنشی برشی u_s و انرژی کرنشی برشی U_s عبارتست از:

$$u_s = \int_\circ^{\gamma_\circ} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \xrightarrow{\text{در حالت الاستیک خطی}} u_s = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

$$\boxed{U_s = \int_V u_s dV = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV}$$

کلیه چگالی انرژی‌های کرنشی محاسبه شده توسط بارگذاری‌های مختلف برابر کار خارجی انجام شده بر روی جسم بر واحد حجم می‌باشند.

تذکر ۱: چگالی انرژی کرنشی موجود در یک نقطه از جسم را می‌توان به دو بخش تفکیک نمود:

۱) چگالی انرژی کرنشی مربوط به تغییر حجم ماده در آن نقطه u_V.

۲) چگالی انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل ماده در آن نقطه u_d.

اگر $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ تنش‌های اصلی در یک نقطه از ماده مورد نظر باشند، چگالی انرژی کرنشی مربوط به تغییر حجم جسم در نقطه مورد نظر توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\boxed{u_v = \frac{۱-۲\nu}{۶E}(\sigma_۱+\sigma_۲+\sigma_۳)^۲}$$

از طرفی چون مجموع تنش‌های قائم در یک نقطه همواره مقداری ثابت است، بنابراین رابطه فوق را می‌توان بر حسب تنش‌های قائم σ_x و σ_y و σ_z به صورت روبرو نوشت:

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_۱+\sigma_۲+\sigma_۳ \Rightarrow u_v=\frac{۱-۲\nu}{۶E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^۲$$

همان طور که از رابطه فوق مشخص است، در صورتی که مجموع تنش‌های قائم در یک المان مساوی صفر باشد، انرژی کرنشی مربوط به تغییر حجم ماده مساوی صفر است. اما چگالی انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل ماده بر حسب تنش‌های اصلی توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{u_d=\frac{۱}{۱۲G}[(\sigma_۱-\sigma_۲)^۲+(\sigma_۲-\sigma_۳)^۲+(\sigma_۳-\sigma_۱)^۲]}$$

طبق رابطه فوق، چگالی انرژی کرنشی تغییر شکل، وابسته به مجذور اختلاف تنش‌های اصلی است و مستقل از مجموع تنش‌های قائم اصلی می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار چگالی انرژی کرنشی بحرانی لازم برای آغاز تسلیم در جسم ضریبی از u_d می‌باشد. چرا که هر جسم قادر است یک حداکثر چگالی انرژی کرنشی واپیچشی یا برشی در خود ذخیره کند. از رابطه فوق می‌توان به معیار ون میزز (معیار انرژی برشی ماکزیمم) دست یافت. طبق این معیار جسم زمانی به تسلیم می‌رسد که رابطه مقابل برقرار باشد:

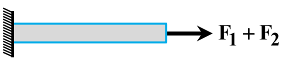
$$(\sigma_۱-\sigma_۲)^۲+(\sigma_۲-\sigma_۳)^۲+(\sigma_۳-\sigma_۱)^۲=۲\sigma_y^۲=۲(\sqrt{۳}k)^۲=۶k^۲$$

k در رابطه‌ی فوق تنش برشی تسلیم می‌باشد.

تذکر ۲: انرژی کرنشی U و چگالی انرژی کرنشی u به ترتیب تابعی غیرخطی از عامل بارگذاری و مؤلفه‌های تنش می‌باشند، بنابراین اصل جمع آثار برای آن‌ها صادق نمی‌باشد. این مسئله را می‌توان با ارائه مثال ساده زیر نشان داد. اگر $U_۱$ و $U_۲$ انرژی کرنشی ذخیره در جسم ارتجاعی تحت بارگذاری‌های محوری $F_۱$ و $F_۲$ باشند و $U_۳$ انرژی کرنشی ناشی از مجموع بارهای محوری $(F_۱+F_۲)$ باشد، آنگاه $U_۳$ برابر مجموع $U_۱$ و $U_۲$ نیست.

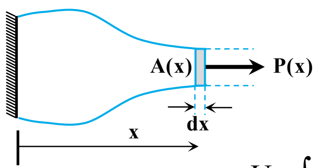
$$U_۱=\frac{۱}{۲}F_۱\delta_۱ \xrightarrow{\delta_۱=\frac{F_۱L}{AE}} U_۱=\frac{F_۱^۲L}{۲AE}$$

$$U_۲=\frac{۱}{۲}F_۲\delta_۲ \xrightarrow{\delta_۲=\frac{F_۲L}{AE}} U_۲=\frac{F_۲^۲L}{۲AE}$$



$$U_۳=\frac{۱}{۲}(F_۱+F_۲)\delta_۳ \xrightarrow{\delta_۳=\frac{(F_۱+F_۲)L}{AE}} U_۳=\frac{(F_۱+F_۲)^۲L}{۲AE}\neq U_۱+U_۲$$

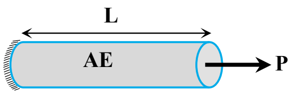
انرژی کرنشی ارتجاعی میله تحت نیروی محوری



در صورتی که میله‌ای به طول L تحت نیروی محوری $P(x)$ بوده و سطح مقطع میله برابر $A(x)$ در فاصله x از مبدأ باشد، با استفاده از رابطه زیر انرژی کرنشی برابر است با:

$$U=\int_V(\frac{\sigma_x^۲}{۲E})dV\ ,\ \sigma_x=\frac{P(x)}{A(x)}\ ,\ \text{حجم یک المان دلخواه از میله}: dV=A(x)dx \Rightarrow U=\int_۰^L\frac{P^۲(x)}{۲EA(x)}dx$$

در حالتی که در طول میله نیروی محوری ثابت و سطح مقطع یکنواخت باشد، انرژی کرنشی برابر است با:



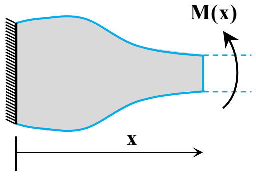
$$\boxed{U=\frac{P^۲L}{۲EA}}$$

اگر میله شامل K مقطع یکنواخت با سطح مقطع (A_i) و نیروی داخلی (P_i) متفاوت و ثابت در هر مقطع باشد، رابطه انرژی کرنشی برای کل سازه برابر است با:

$$\boxed{U=\sum_{i=۱}^{K}\frac{P_i^۲L_i}{۲E_iA_i}}$$

برای محاسبه انرژی کرنشی در خرپا ابتدا باید توسط روش مفصل یا برش، نیروی داخلی هر عضو را محاسبه کرده سپس از رابطه فوق انرژی کرنشی ذخیره شده در خرپا را به دست آورد.

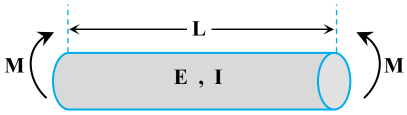
انرژی کرنشی ارتجاعی تیر تحت بار خمشی



در صورتی که لنگر خمشی ناشی از بار عرضی یا لنگر خمشی خارجی در مقطع تیری به طول L به فاصله x از مبدأ برابر M(x) باشد، با استفاده از رابطه زیر انرژی کرنشی برابر است با:

$$U=\int_V \left(\frac{\sigma_x}{2E}\right)^2 dV\ ,\ \ (\text{تنش ناشی از خمش})\ \sigma_x=\frac{M(x)y}{I}\ ,\ dV=dAdx$$

$$\Rightarrow\ U=\int_V\left(\frac{M^2(x)}{2EI^2}\right)\times(y^2dA)dx\ \Rightarrow U=\int_0^L\frac{M^2(x)}{2EI^2}\left(\int_A y^2dA\right)dx=\int_0^L\frac{M^2(x)}{2EI}dx$$



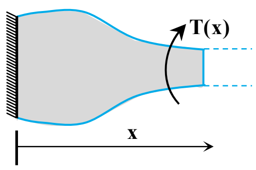
در حالتی که لنگر خمشی و سطح مقطع ثابت باشند، انرژی کرنشی برابر است با:

$$\boxed{U=\frac{M^2L}{2EI}}$$

اگر میله شامل k مقطع با لنگر خمشی M_i و ممان اینرسی I_i متفاوت و ثابت در هر مقطع باشد، رابطه انرژی کرنشی برابر می‌گردد با:

$$\boxed{U=\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i^2L_i}{2EI_i}}$$

انرژی کرنشی ارتجاعی میله تحت لنگر پیچشی



در صورتی که میله‌ای به طول L تحت اثر لنگر پیچشی T(x) و ممان اینرسی J(x) در فاصله x از مبدأ باشد، با استفاده از رابطه زیر انرژی کرنشی آن برابر است با:

$$U=\int_V\frac{\tau^2}{2G}dV\ ,\ \ (\text{تنش برشی ناشی از پیچش})\ \tau=\frac{T(x)r}{J(x)}\ ,\ dV=dAdx$$

$$\Rightarrow\ U=\int_V\left(\frac{T^2(x)}{2GJ^2(x)}\right)(r^2dA)dx=\int_0^L\left(\frac{T^2(x)}{2GJ^2(x)}\right)\left(\int_A r^2dA\right)dx=\int_0^L\left(\frac{T^2(x)}{2GJ^2(x)}\right)\times J(x)dx=\int_0^L\frac{T^2(x)}{2GJ(x)}dx$$

در حالتی که گشتاور پیچشی و سطح مقطع ثابت باشند انرژی کرنشی برابر است با:

$$\boxed{U=\frac{T^2L}{2GJ}}$$

اگر میله شامل K مقطع یکنواخت با لنگر پیچشی (T_i) و ممان اینرسی (J_i) متفاوت و ثابت در هر مقطع باشد، رابطه انرژی کرنشی برابر است با:

$$\boxed{U=\sum_{i=1}^{k}\frac{T_i^2L_i}{2GJ_i}}$$

مقادیر انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم با باربرداری از روی جسم به محیط پیرامون بازگشته و کاملاً آزاد می‌شوند.

چگالی انرژی کرنشی سه بعدی

انرژی کرنشی بر واحد حجم در مورد یک تغییر شکل الاستیک خطی و جسم ایزوتروپیک به صورت کلی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$u=\frac{U}{V}=\int\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\Rightarrow u=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})$$

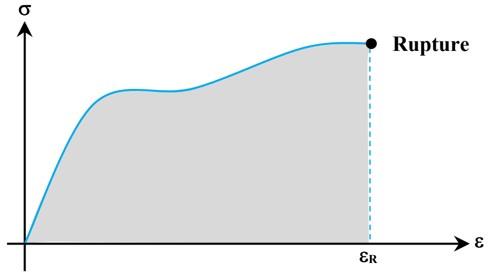
در صورتی که در رابطه‌ی فوق به جای مؤلفه‌های کرنش در یک نقطه از جسم ایزوتروپیک طبق قانون هوک، مؤلفه‌های تنش نوشته شود، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)]+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)$$

و اما رابطه فوق بر اساس مؤلفه‌های اصلی تنش، به صورت مقابل ساده می‌شود.

$$u=\frac{1}{2E}\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\}$$

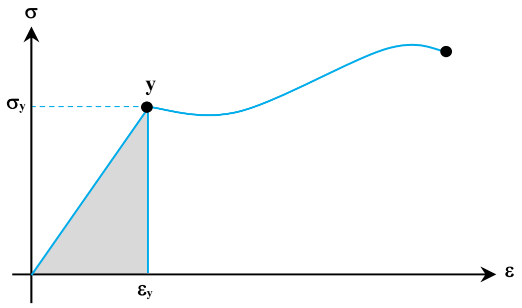
مدول سفتی (modulus of toughness)



مدول سفتی برابر با مساحت کل محصور شده در زیر دیاگرام تنش ـ کرنش جسم تا کرنش ماده در لحظه‌ی گسیختگی آن می‌باشد (مساحت هاشور خورده در شکل روبرو)، از طرفی مدول سفتی، انرژی کرنشی بر واحد حجم جسم جهت گسیختگی یک ماده را تعیین می‌کند. همان طور که از شکل آشکار است مدول سفتی یک ماده به داکتیلیته (چکش خواری) و تنش نهایی جسم بستگی دارد.

تذکر ۳: ظرفیت مقاومت یک سازه در برابر بارهای ضربه‌ای به میزان حداکثر توانایی انرژی قابل جذب در آن سازه ارتباط داشته که این نیز به نوبه‌ی خود به سختی سازه مورد نظر بستگی دارد. مواد چکش خوار، مدول سفتی بالایی داشته بنابراین مقاومت به ضربه خوبی از خود نشان می‌دهند در حالی که مواد ترد به دلیل پایین بودن مدول سفتی، در برابر بارهای ضربه‌ای بسیار حساس و شکننده هستند.

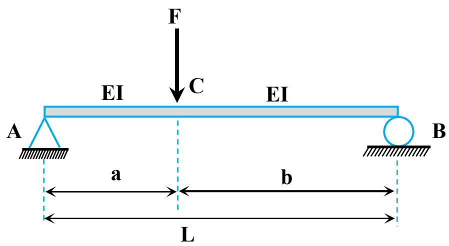
مدول جهندگی (modulus of resilience)



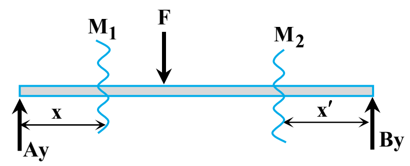
مدول جهندگی مساوی مساحت سطح زیر نمودار تنش ـ کرنش در جسم تا کرنش تسلیم بوده که این مساحت مساوی مقدار انرژی‌ای است که جسم تا لحظه تسلیم در خود جذب خواهد کرد.

ظرفیت مقاومت یک سازه بدون ایجاد تغییر شکل دائمی بستگی به مدول جهندگی ماده‌ی مورد استفاده در آن دارد.

مثال ۱: انرژی کرنشی مربوط به تیر منشوری شکل زیر را تعیین کنید (از انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل برشی صرف‌نظر شود).

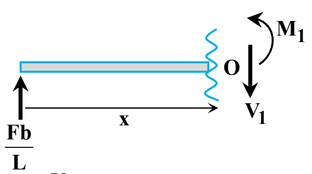


☑ **پاسخ:** انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر ناشی از بارگذاری برشی و خمشی می‌باشد که در صورت مسئله از انرژی کرنشی مربوط به بارگذاری برشی صرف‌نظر شده، در نتیجه تنها باید انرژی کرنشی ناشی از خمش محاسبه شود. ابتدا در طول تیر دو برش مطابق شکل زده و لنگر خمشی داخلی به دست آورده می‌شود.

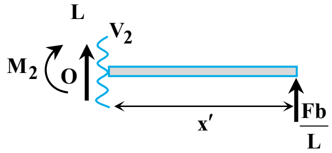


کل تیر : $\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y L + Fb = 0 \Rightarrow A_y = \dfrac{Fb}{L}$

کل تیر : $\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y L - Fa = 0 \Rightarrow B_y = \dfrac{Fa}{L}$



$$\Rightarrow \sum M_O = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{Fb}{L}x$$



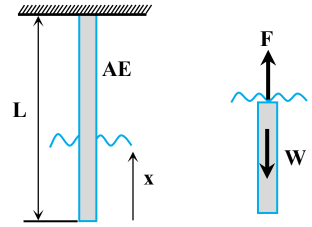
$$\Rightarrow \sum M_O = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{Fa}{L}x'$$

اکنون با توجه به روابط متن درس، انرژی کرنشی ناشی از خمش محاسبه می‌شود.

$$U = U_{AC} + U_{BC} \Rightarrow U = \int_0^a \left(\frac{M_1^2}{2EI}\right)dx + \int_0^b \left(\frac{M_2^2}{2EI}\right)dx' \Rightarrow U = \frac{1}{2EI}\left[\int_0^a \frac{F^2b^2}{L^2}x^2dx + \int_0^b \left(\frac{F^2a^2}{L^2}x'^2\right)dx'\right]$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EI}\frac{F^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{F^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b) = \frac{F^2a^2b^2}{6EIL}$$

مثال۲: یک کابل همگن به طول L و سطح مقطع ثابت A از یک انتهای خود آویزان است. اگر وزن کل کابل را توسط W نشان دهیم، انرژی کرنشی ذخیره شده در آن تحت اثر وزنش چه اندازه است؟



پاسخ: اگر وزن مخصوص کابل را با γ نشان دهیم می‌توان نیروی داخلی ناشی از وزن کابل را در هر مقطع دلخواه از کابل تعیین نمود. ابتدا یک برش دلخواه به فاصله x از انتهای کابل زده، سپس نیروی داخلی F در مقطع برش خورده محاسبه می‌شود.

$F = W$ (وزن بخش پایینی مقطع برش خورده) $\Rightarrow F = W = mg = \gamma V = \gamma A x$

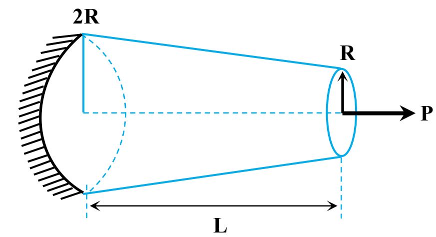
انرژی کرنشی ذخیره شده در میله، ناشی از بار محوری بوده که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \int_0^L \left(\frac{F^2}{2AE}\right)dx = \int_0^L \left(\frac{\gamma^2 A^2 x^2}{2AE}\right)dx = \int_0^L \left(\frac{\gamma^2 A}{2E}\right)x^2 dx \Rightarrow U = \frac{\gamma^2 A}{2E} \times \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^L = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E}$$

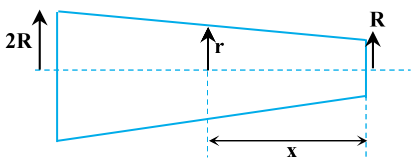
صورت و مخرج کسر فوق را در A ضرب می‌کنیم، در نتیجه:

$$U = \frac{\gamma^2 A^2 L^3}{6AE} = \frac{\gamma^2 A^2 L^2}{6AE} \times L = \frac{(\gamma V)^2}{6AE} L = \frac{W^2 L}{6AE}$$

مثال۳: میله مخروطی مطابق شکل زیر تحت اثر بار محوری P قرار گرفته است، انرژی کرنشی ذخیره شده در میله چه اندازه است؟



پاسخ: برای محاسبه انرژی کرنشی ناشی از بار محوری در میله مخروطی نشان داده شده، کافی است از رابطه زیر استفاده شود.



$$U = \int_0^L \left(\frac{P^2}{2AE}\right)dx = \frac{P^2}{2E}\int_0^L \frac{dx}{A(x)} \qquad (1)$$

برای محاسبه تغییرات مساحت سطح مقطع $A(x)$ به صورت تابعی از x، میله را در یک x دلخواه برش زده، شعاع مقطع را با r نمایش می‌دهیم. سپس مقدار r را با استفاده از رابطه تشابه مثلث به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\frac{r-R}{2R-R} = \frac{x}{L} \Rightarrow r-R = \frac{x}{L}R \Rightarrow r = R\left(1+\frac{x}{L}\right) \Rightarrow A(x) = \pi r^2 = \pi R^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 \Rightarrow \int_0^L \frac{dx}{A(x)} = \int_0^L \frac{dx}{\pi R^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2} \qquad (2)$$

از تغییر متغیر $1+\frac{x}{L} = u$ برای حل انتگرال فوق استفاده می‌شود.

$$1+\frac{x}{L} = u \Rightarrow dx = L\,du$$

حدود جدید انتگرال مطابق زیر تعیین می‌گردند:

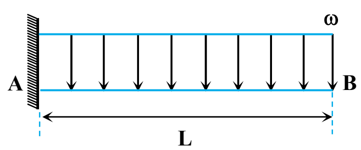
$$x = 0 \Rightarrow u = 1+\frac{x}{L} = 1+0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = L \Rightarrow u = 1+\frac{L}{L} = 2 \Rightarrow u = 2$$

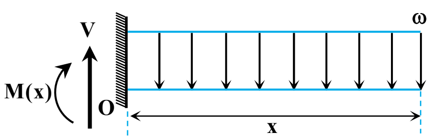
$$(2) \Rightarrow \int_1^2 \frac{L\,du}{\pi R^2 u^2} = \frac{L}{\pi R^2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{L}{\pi R^2}\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{L}{2\pi R^2} \qquad (3)$$

$$(1),(3) \Rightarrow U = \frac{P^2}{2E} \times \frac{L}{2\pi R^2} = \frac{P^2 L}{4\pi R^2 E}$$

مثال۴: فرض کنید تیر منشوری AB دارای سطح مقطع مستطیل باشد. در این صورت ثابت کنید که برای بارگذاری نشان داده شده، مقدار چگالی انرژی کرنشی این تیر به صورت $u_m = 15\frac{U}{V}$ می‌باشد که در آن U و V به ترتیب انرژی کرنشی و حجم تیر می‌باشند.



پاسخ: در یک x دلخواه از انتهای تیر برش زده، سپس مقدار لنگر داخلی M محاسبه می‌شود. با جایگذاری $M(x)$ در رابطه انرژی کرنشی، کل انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر ناشی از لنگر خمشی به دست می‌آید.



$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow -M(x) - \omega x \times \frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow M(x) = -\omega\frac{x^2}{2}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}dx = \int_0^L \left(\frac{\omega^2 x^4}{8EI}\right)dx = \frac{\omega^2}{8EI}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^L \;\Rightarrow U = \frac{\omega^2 L^5}{40EI} \qquad (1)$$

اما چگالی انرژی کرنشی ماکزیمم در تیر برابر است با:

$$u_m = \frac{\sigma_m^2}{2E} = \frac{M_m^2 C^2}{2EI^2} \qquad (2)$$

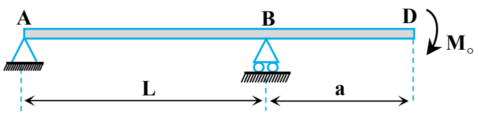
اما لنگر خمشی ماکزیمم در تکیه‌گاه به وقوع پیوسته و مقدار آن برابر است با:

$$M_m = \omega L \times \frac{L}{2} = \frac{\omega L^2}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} u_m = \frac{\left(\frac{\omega^2 L^4}{4}\right)\times\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2EI^2} = \frac{\omega^2 L^4 h^2}{32EI^2} \qquad (3)$$

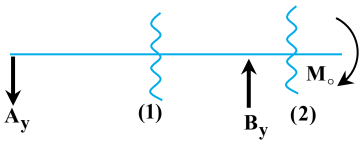
با تقسیم رابطه (۱) بر (۳) خواهیم داشت:

$$\frac{U}{u_m} = \frac{\left(\frac{\omega^2 L^5}{40EI}\right)}{\left(\frac{\omega^2 L^4 h^2}{32EI^2}\right)} = \frac{32}{40}\frac{LI}{h^2} = \frac{32}{40}\times\frac{L\times\frac{bh^3}{12}}{h^2} = \frac{4}{5}\times\frac{(bh)L}{12} = \frac{VL}{15} \;\Rightarrow \frac{U}{u_m} = \frac{V}{15}$$

مثال ۵: با استفاده از روش کار و انرژی شیب ناشی از کوپل M_0 را در نقطه D تعیین کنید.



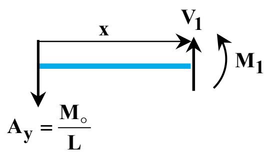
پاسخ: ابتدا نیروهای تکیه‌گاهی تعیین می‌شوند:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow +A_y \times L - M_0 = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M_0}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - A_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{M_0}{L}$$

دو برش در طول تیر زده شده و لنگر خمشی در هر برش به دست آورده می‌شود:



$$0 \le x \le L \Rightarrow M_1 = -A_y x = -\frac{M_0}{L}x$$

$$0 \le x \le a \Rightarrow M_2 = M_0$$

اکنون انرژی کرنشی ذخیره شده در طول تیر ناشی از لنگر خمشی به دست می‌آید:

$$U = \int_0^L \frac{M_1^2}{2EI}dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI}dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{M_0}{L}x\right)^2}{2EI}dx + \int_0^a \frac{(M_0)^2}{2EI}dx \Rightarrow U = \frac{M_0^2}{2EIL^2}\times\frac{L^3}{3} + \frac{M_0^2}{2EI}\times a = \frac{M_0^2}{6EI}(L+3a) \quad (1)$$

از طرفی طبق قضیه کار و انرژی برای یک تیر تحت خمش خالص می‌توان نوشت:

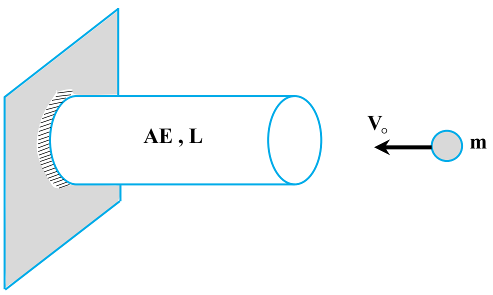
$$U = \frac{1}{2}M_0\theta_D \qquad (2)$$

از مساوی قرار دادن روابط (۱) و (۲) شیب در مقطع D محاسبه می‌شود:

$$\theta_D = \frac{M_0}{3EI}(L+3a)$$

بارگذاری ضربه‌ای

جسمی را در نظر بگیرید که با جرم m و سرعت اولیه V_0 به میله‌ای مطابق شکل برخورد کند، در صورت صرف‌نظر کردن از اتلاف انرژی و با فرض اینکه جرم m در مقایسه با جرم میله خیلی بزرگ بوده و همچنین در طی برخورد، جرم m به میله چسبیده و برگشت نکند، تمامی انرژی جنبشی جرم m به انرژی کرنشی که باعث تغییر شکل جسم می‌شود تبدیل خواهد شد.



اگر تنش ایجاد شده در میله ناشی از برخورد در محدوده ارتجاعی بوده و دارای توزیعی یکسان بدون اثر تمرکز تنش باشد، آنگاه از قانون بقای انرژی می‌توان مقدار تنش ناشی از ضربه را به صورت زیر به دست آورد:

$$\left.\begin{array}{l} U_m = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ U_m = \int \frac{F^2dx}{2AE} = \int \frac{F^2Adx}{2A^2E} = \int \frac{F^2dV}{2A^2E} = \int \frac{\sigma_m^2}{2E}dV \xrightarrow[\text{بنابراین } \sigma_m \text{ از داخل انتگرال بیرون می‌آید.}]{\text{چون توزیع تنش در میله یکسان فرض شده،}} U_m = \frac{\sigma_m^2}{2E}V \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2E}{V}}}$$

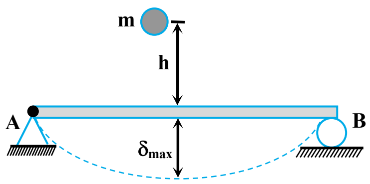
σ_m در رابطه فوق تنش قائم متوسط ایجاد شده در میله تحت بار ضربه‌ای را نشان می‌دهد.

از رابطه به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که سازه‌ی طراحی شده در برابر بارهای ضربه‌ای باید دارای ویژگی‌های زیر باشد تا تنش در آن به حد بحرانی نرسد:

۱) حجم سازه زیاد باشد.

۲) مدول الاستیسیته سازه کم و تنش تسلیم بالا باشد.

۳) شکل سازه به گونه‌ای باشد که تنش‌های موجود در آن حدالامکان به طور منظم و یکنواخت پخش گردد و اثرات تمرکز تنش در آن حداقل باشد.



تذکر ۴: تغییر شکل سازه تحت بارهای ضربه‌ای به مراتب بیشتر از تغییر شکل سازه تحت همان بار ولی به صورت استاتیکی است. به عنوان مثال اگر قطعه‌ای به وزن W از ارتفاع h بر وسط تیری افقی رها شود، تغییر شکل ماکزیمم در نقطه برخورد قطعه با تیر با استفاده از قانون بقای انرژی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (فرض می‌شود که در حین برخورد هیچ‌گونه اتلاف انرژی وجود نداشته و تمامی انرژی پتانسیل به انرژی کرشنی تبدیل می‌شود.)

انرژی پتانسیل = انرژی کرشنی　(۱)　،　$\text{انرژی کرشنی} = \text{کار} = \frac{1}{2}P\delta$　(۲)

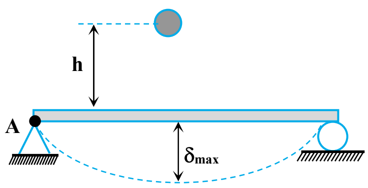
طبق جدول خیز و شیب می‌توان نوشت:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \Rightarrow P = \frac{48EI\delta}{L^3} \overset{(2)}{\Rightarrow} \text{انرژی کرشنی} = \frac{1}{2} \times \frac{48EI\delta}{L^3} \times \delta = \frac{24EI\delta^2}{L^3} \quad (3)$$

در رابطه فوق δ همان خیز ماکزیمم تیر بوده که مقدار آن مجهول می‌باشد. رابطه‌ی مذکور یک معادله درجه دوم بر حسب مجهول δ می‌باشد.

$$\text{با حل معادله درجه ۲ در رابطه (۴)} \Rightarrow \delta_{max} = \frac{WL^3}{48EI} + [(\frac{WL^3}{48EI})^2 + 2h(\frac{WL^3}{48EI})]^{\frac{1}{2}}$$

انرژی پتانسیل اولیه گلوله با توجه به سطح تراز انرژی پتانسیل در نظر گرفته شده در شکل برابر $W(h+\delta)$ می‌باشد، در نتیجه:



سطح تراز از انرژی پتانسیل در پایین‌ترین وضعیت تیر یعنی در موقعیت خیز ماکزیمم در نظر گرفته می‌شود.

$$\xrightarrow{(3),(1)} W(h+\delta) = \frac{24EI\delta^2}{L^3} \quad (4)$$

اما تغییر شکل استاتیکی تیر تحت بار W طبق جدول خیز برابر $\delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI}$ می‌باشد، بنابراین رابطه فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

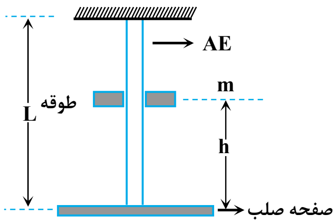
$$\boxed{\delta_{max} = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\,\delta_{st})^{\frac{1}{2}}}$$

تذکر ۵: اگر طوقه‌ای به جرم m مطابق شکل از ارتفاع h رها شده و بر روی میله بدون اصطکاکی سقوط آزاد کرده تا به صفحه صلب انتهای میله برخورد کند، میله تحت بارگذاری ضربه‌ای قرار گرفته که با در نظر گرفتن فرضیات زیر و با استفاده از قانون بقای انرژی تغییر شکل ماکزیمم به وجود آمده در آن توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

فرضیات: ۱ــ جرم طوقه در مقایسه با جرم میله بزرگ است، **۲ــ** از اتلاف انرژی صرف‌نظر شده و تمامی انرژی پتانسیل طوقه به انرژی کرشنی تبدیل می‌شود.

انرژی پتانسیل طوقه = انرژی کرشنی در میله

$$\text{انرژی کرشنی میله} = \frac{1}{2}P\delta \;,\; \delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow \text{انرژی کرشنی میله} = \frac{1}{2} \times \frac{AE}{L}\delta \times \delta = \frac{EA\delta^2}{2L}$$



اگر میله تحت اثر ضربه ناشی از برخورد طوقه حداکثر به اندازه δ به سمت پایین خیز داشته باشد و اگر سطح تراز انرژی پتانسیل در پایین‌ترین وضعیت قرارگیری صفحه صلب در نظر گرفته شود، آنگاه رابطه کار ـ انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Rightarrow W(h+\delta)=\frac{EA\delta^2}{2L} \Rightarrow \delta_{max}=\frac{WL}{AE}+\left[\left(\frac{WL}{AE}\right)^2+\frac{2WLh}{AE}\right]^{\frac{1}{2}}$$

اما تغییر طول استاتیکی میله تحت جرم طوقه برابر $\delta_{st}=\frac{WL}{AE}$ می‌باشد، بنابراین: $\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}}$

در این حالت حداکثر تنش به وجود آمده در میله را می‌توان توسط رابطه‌ی زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=\frac{E\delta_{max}}{L}=\sigma_{st}+\left(\sigma_{st}^2+\frac{2hE}{L}\sigma_{st}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

σ_{st} مقدار تنش در بارگذاری استاتیکی می‌باشد و مقدار آن مساوی است با: $\sigma_{st}=\frac{W}{A}=\frac{mg}{A}=\frac{E\delta_{st}}{L}$

اگر طوقه از ارتفاع بالایی سقوط کرده به گونه‌ای که خیز استاتیکی میله بسیار کوچک‌تر از ارتفاع سقوط باشد $(\delta_{st} << h)$، آنگاه می‌توان رابطه خیز ماکزیمم را با رابطه مقابل تقریب زد: $\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \delta_{max}\simeq\sqrt{2h\delta_{st}}$

همچنین در این حالت می‌توان تنش ماکزیمم ایجاد شده ناشی از بار محوری را توسط رابطه مقابل تعیین نمود: $\sigma_{max}=\sqrt{\frac{2hE\sigma_{st}}{L}}=\sqrt{\frac{mv_0^2E}{V}}$

v_0 در رابطه سرعت برخورد طوقه با صفحه صلب انتهای میله است.

تذکر ۶: نسبت واکنش دینامیکی یک سازه در مقابل یک نیرو به عکس‌العمل استاتیکی آن سازه، در برابر همان نیرو، ضریب ضربه نامیده می‌شود.

$$\text{ضریب ضربه}=\frac{\delta_{max}}{\delta_{st}}$$

تذکر ۷: تغییر شکل ماکزیمم به وجود آمده در میله‌ای که تحت بارگذاری ضربه‌ای محوری قرار گرفته، مساوی است با: $(k=\frac{AE}{L})$

$$\left.\begin{array}{l} U_m=\frac{1}{2}mv_0^2 \\ U_m=\frac{1}{2}P\delta_{max}\ ,\ P=K\delta_{max} \Rightarrow U_m=\frac{1}{2}K\delta_{max}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}=\frac{K}{2}\delta_{max}^2 \Rightarrow \delta_{max}=\sqrt{\frac{mv_0^2}{K}} \Rightarrow \delta_{max}=\sqrt{\frac{mv_0^2L}{AE}}$$

بنابراین ضریب ضربه را می‌توان توسط رابطه مقابل تعیین نمود: $\text{ضریب ضربه}=\frac{\delta_{max}}{\delta_{st}}=\frac{\sqrt{\frac{mv_0^2L}{AE}}}{\frac{(mg)L}{AE}}=\sqrt{\frac{EAv_0^2}{mg^2L}}$

مثال ۶: تیری به طور افقی روی تکیه‌گاه مفصلی قرار دارد. وزنه‌ای از ارتفاع ۲/۵ متری با سقوط آزاد با وسط تیر برخورد می‌کند. اگر نسبت $\frac{\delta=\text{اندازه خمش ضربه}}{\delta_{st}=\text{اندازه خمش استاتیکی}}=50$ باشد، اندازه δ تقریباً چند سانتیمتر می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۳»

$$h=2/5m \qquad (1) \qquad \text{ضریب ضربه}=50=\frac{\delta_{max}}{\delta_{st}}$$

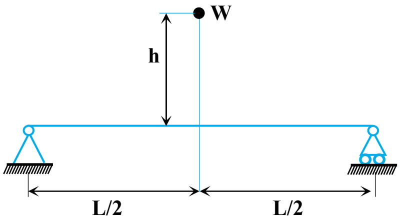
طبق توضیحات متن درس در بارگذاری ضربه‌ای خیز ماکزیمم ناشی از انرژی پتانسیل ذخیره شده در وزنه به صورت زیر به دست آمد:

$$\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 50\delta_{st}=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+5\delta_{st})^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 49\delta_{st}=(\delta_{st}^2+5\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (49^2-1)\delta_{st}^2-5\delta_{st}=0 \Rightarrow \delta_{st}=\frac{5}{2400}=\frac{1}{480} \overset{(1)}{\Rightarrow} 50=\frac{\delta_{max}}{\delta_{st}}$$

$$\Rightarrow \delta_{max}=50\times\frac{5}{2400}=\frac{250}{2400}=\frac{5}{48}m \Rightarrow \delta_{max}=\frac{500}{48}cm\simeq10\,cm$$

مثال ۷: وزنه‌ی W که ابعاد آن در مقابل تیر ناچیز است از ارتفاع h بر روی تیر سقوط کرده و به آن می‌چسبد. اگر h چهار برابر خیز وسط تیر در حالت استقرار استاتیکی W بر وسط تیر باشد، حداکثر خیز وسط تیر چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}\,WL^۳}{۲۴EI}$　　۲) $\frac{WL^۳}{۱۲EI}$

۳) $\frac{WL^۳}{۱۶EI}$　　۴) $(۱+\sqrt{۷})\frac{WL^۳}{۴۸EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه بارگذاری از نوع ضربه‌ای است بنابراین برای محاسبه خیز ماکزیمم در آن می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^۲+۲h\delta_{st})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^۲+۲\times ۴\delta_{st}\times\delta_{st})^{\frac{۱}{۲}}=۴\delta_{st}$$

از طرفی خیز استاتیکی وسط تیر ساده تحت بار متمرکز با استفاده از جدول خیز در پیوست A کتاب به دست می‌آید.

$$\delta_{max}=۴\times\frac{WL^۳}{۴۸EI}=\frac{WL^۳}{۱۲EI}$$

مثال ۸: در شکل زیر اگر وزنه W به طور آنی به انتهای تیر وارد شود تغییر مکان انتهای تیر چقدر خواهد بود؟

۱) $\frac{WL^۳}{۳EI}$　　۲) $\frac{WL^۳}{۶EI}$　　۳) $\frac{۲WL^۳}{۳EI}$　　۴) $\frac{۳WL^۳}{۲EI}$

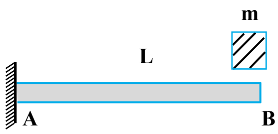
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در بارگذاری ضربه‌ای خیز ماکزیمم توسط رابطه زیر به دست می‌آید، اما از طرفی چون قطعه مماس بر تیر است بنابراین در رابطه $h=۰$ قرار داده می‌شود.

$$\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^۲+۲h\delta_{st})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^۲+۰)^{\frac{۱}{۲}}=۲\delta_{st}\xrightarrow{\text{طبق جدول خیز تیر در پیوست A کتاب}}\delta_{max}=۲\frac{WL^۳}{۳EI}=\frac{۲}{۳}\frac{WL^۳}{EI}$$

خیز استاتیکی تیری یکسر گیردار تحت نیروی متمرکز در انتهای تیر برابر $\frac{FL^۳}{۳EI}$ می‌باشد.

مثال ۹: ماکزیمم تغییر شکل تیر زیر اگر وزنه m به جرم $۳۰kg$ از فاصله ۴۰ سانتی‌متری انتهای تیر سقوط کند چقدر است؟

$$(L=۱۰۰cm, EI=۱۰^۷\ kg.cm^۲)$$



۱) $۹cm$　　۲) $۸cm$　　۳) $۱۰cm$　　۴) $۱۲cm$

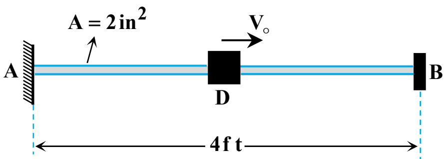
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق توضیحات متن درس، حداکثر خیز ایجاد شده ناشی از بارگذاری ضربه‌ای توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\text{خیز ناشی از بار ضربه‌ای}:\ \delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^۲+۲h\,\delta_{st})^{\frac{۱}{۲}}$$

اما خیز استاتیکی ایجاد شده طبق جدول خیز تیر در پیوست A کتاب توسط رابطه زیر قابل محاسبه است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{خیز استاتیکی}:\ \delta_{st}=\frac{WL^۳}{۳EI}=\frac{۳۰\times۱۰۰^۳}{۳\times۱۰^۷}=۱cm\Rightarrow \delta_{max}=۱+(۱^۲+۲\times۴۰\times۱)^{\frac{۱}{۲}}=۱۰cm$$

مثال ۱۰: میله یکنواخت AB از برنج با مشخصات $\sigma_y=۲۰ksi$ و $E=۱۵\times۱۰^۶\ psi$ ساخته شده است، حلقه‌ی D در طول این میله با سرعت $۱۰۰\frac{in}{sec}$ حرکت کرده تا به صفحه صلب انتهای میله برخورد نماید. حداکثر جرم مجاز حلقه D با در نظر گرفتن ضریب اطمینان ۲ چه اندازه است؟



☑ **پاسخ:** حداکثر جرم مجاز حلقه D مربوط به حالتی است که تنش حداکثر در میله AB به حد تنش تسلیم برسد. برای تعیین جرم از قانون بقای انرژی استفاده می‌شود (با فرض صرف‌نظر نمودن از اتلاف انرژی، تمامی انرژی جنبشی حلقه به انرژی کرنشی تبدیل می‌شود).

$$\text{انرژی کرنشی تحت بار محوری}=\text{انرژی جنبشی}\Rightarrow \int\frac{\sigma^۲}{۲E}dV=\frac{۱}{۲}mv_۰^۲\Rightarrow m=\frac{\sigma_y^۲V}{Ev_۰^۲}=\frac{\sigma_y^۲AL}{Ev_۰^۲}$$

$$\Rightarrow m=\frac{(۲۰\times۱۰^۳)^۲\times۲\times(۴\times۱۲)}{(۱۵\times۱۰^۶)\times(۱۰۰)^۲}=۰/۲۵۶lbm \Rightarrow m_{all}=\frac{m}{F.S.}=\frac{۰/۲۵۶}{۲}=۰/۱۲۸lbm$$