فصل اول

« تنش، کرنش، بارگذاری محوری »

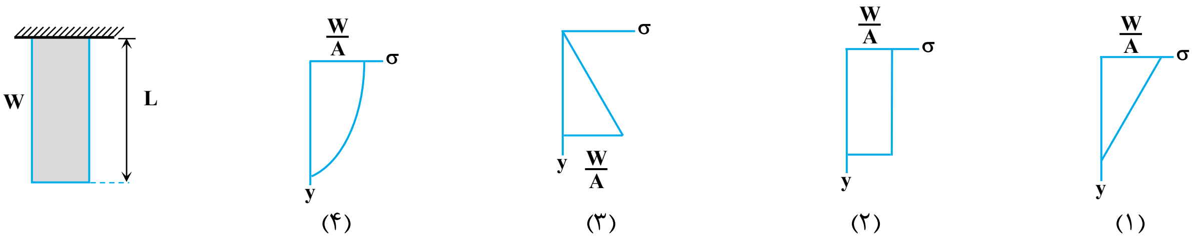
تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: **تانسور تنش، تانسوری است از مرتبهٔ:**

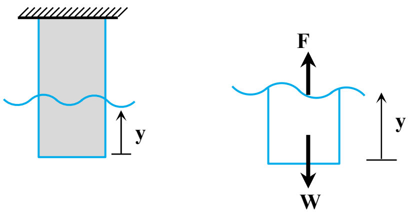
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» طبق توضیحات متن درس، تنش کمیت تانسوری و از مرتبه دو، می‌باشد. این کیفیت در هر نقطه از جسم دارای ۹ مؤلفه است که در فصل‌های بعدی به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود.

مثال۲: **نمودار توزیع تنش در طول یک میله یکنواخت به طول L و سطح مقطع A و به وزن W که از یک سقف آویزان شده است، مطابق کدام نمودار است؟**



پاسخ: گزینه «۱» اگر γ وزن مخصوص میله باشد می‌توان از رابطه زیر تنش را در یک مقطع دلخواه محاسبه کرد. (نیروی وزن برابر حاصل‌ضرب وزن مخصوص در حجم میله است.)

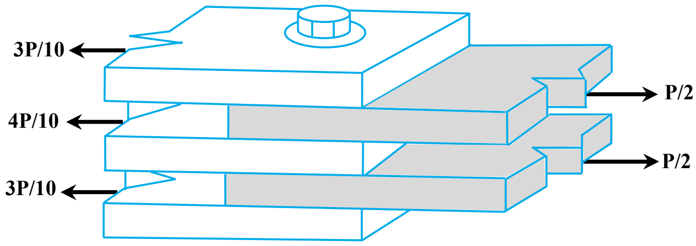


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - W = 0$$

$$\Rightarrow F = W = \gamma V = \gamma A y \Rightarrow \sigma = \frac{\gamma A y}{A} = \gamma y$$

طبق رابطه بالا تغییرات تنش بر حسب y به صورت خطی است. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

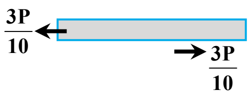
مثال۳: **در اتصال زیر مطابق شکل ۵ ورق فولادی که ضخامت هر یک t می‌باشد با یک پیچ با سطح مقطع A به همدیگر متصل شده‌اند و نیروی P را باید انتقال دهند. تنش برشی ماکزیمم در پیچ کدام است؟**



۱) $\frac{1}{4}(\frac{P}{A})$ ۲) $\frac{3}{10}(\frac{P}{A})$

۳) $\frac{2}{10}(\frac{P}{A})$ ۴) $\frac{1}{2}(\frac{P}{A})$

پاسخ: گزینه «۲» برش ماکزیمم در فصل مشترک صفحات اول و دوم ایجاد می‌شود که برابر است با:

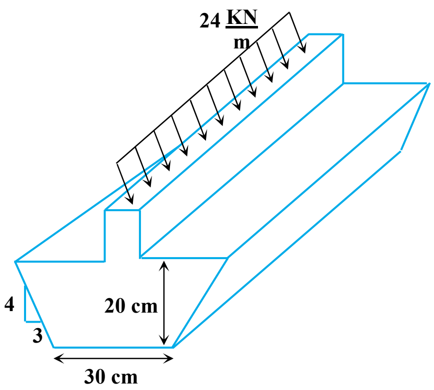


$$\tau_{max} = \frac{F_{max}}{A} = \frac{\frac{3P}{10}}{A} = \frac{3}{10}\frac{P}{A}$$

توجه کنید که صفحات میانی تحت نیروی بزرگ‌تر یعنی $\frac{4P}{10}$ قرار دارند که از $\frac{3}{10}P$ بیشتر است ولی مساحت سطح در این حالت دو برابر است و در نتیجه تنش آن‌ها از مقدار محاسبه شده بین صفحات اول و دوم کمتر است.

$$\text{تنش برشی بین صفحات دو و سه} \Rightarrow \tau = \frac{2P}{10A}$$

مثال ۴: در تکیه‌گاه متقارن زیر تنش لهیدگی چقدر است؟



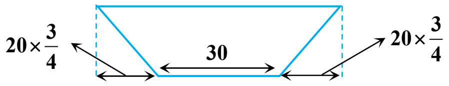
۱) $۲۵\,\frac{KN}{m^۲}$

۲) $۳۰\,\frac{KN}{m^۲}$

۳) $۸۰\,\frac{KN}{m^۲}$

۴) $۴۰\,\frac{KN}{m^۲}$

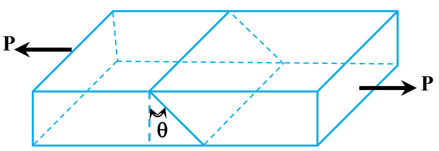
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تنش لهیدگی مساوی با نیرو تقسیم بر مساحت تصویر یافته سطح تحت تنش، بر صفحه عمود در راستای نیرو می‌باشد: (در صورتی که ضخامت ورق برابر یک متر در نظر گرفته شود.)



$$F=۲۴\frac{kN}{m}\times ۱m=۲۴kN$$

$$\sigma=\frac{F}{A}\quad;\quad A=۱m\times(۳۰+۲۰\times\frac{۳}{۴}+۲۰\times\frac{۳}{۴})\times۱۰^{-۲}\,m=۰/۶\,m^۲\ \Rightarrow \sigma=\frac{۲۴\ kN}{۰/۶}=۴۰\,\frac{kN}{m^۲}$$

مثال ۵: برای نمونه نشان داده شده، مطلوبست تعیین زاویه‌ای که حداکثر تنش برشی در آن اتفاق می‌افتد؟



۱) $۲۲/۵^\circ$

۲) ۹۰°

۳) ۴۵°

۴) ۰°

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مقدار تنش برشی در صفحه‌ای که با صفحه‌ی قائم زاویه θ می‌سازد، برابر است با:

$\tau_\theta=\frac{P}{۲A_۰}\sin۲\theta$ بنابراین τ زمانی ماکزیمم می‌شود که $\sin۲\theta$ مساوی یک می‌شود به عبارت دیگر:

$$\sin۲\theta=۱\Rightarrow ۲\theta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

مثال ۶: اطلاعات زیر از یک آزمایش کششی گرفته شده است. مطلوبست تعیین مدول الاستیسیته.

$\sigma(MPa)$	$\varepsilon(mm/mm)$
۰	۰
۲۳۲	۰/۰۰۰۸
۳۴۱	۰/۰۰۱۶

۱) ۱۱۰GPa

۲) ۵۰GPa

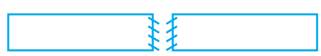
۳) ۳۵۲ GPa

۴) ۲۸۶ GPa

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدول الاستیسیته در یک جسم مساوی شیب اولیه منحنی تنش و کرنش است، بنابراین:

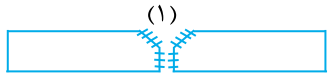
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{۲۳۲-۰}{۰/۰۰۰۸-۰}=۲۹۰۰۰۰\ MPa=۲۹۰\ GPa$$

مثال ۷: میله زیر از یک جنس نرم، تحت نیروی محوری F قرار دارد، کدامیک از سطوح زیر سطح شکست را نشان می‌دهد؟



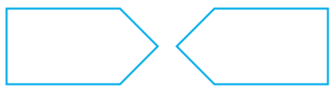
(۱)

(۲)



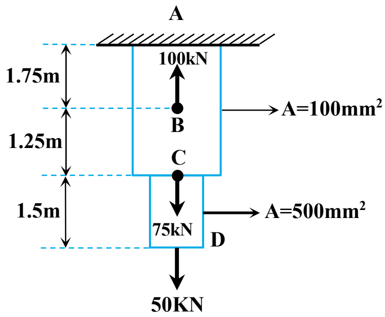
(۳)

(۴)



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جسم نرم اگر تحت کشش گسیخته شود در مقطع شکست دچار پدیده گلـویی می‌شود. یعنی تحت زاویه 45° سطح مقطعش کاهش می‌یابد تا نهایتاً گسیختگی در آن به وجود بیایـد. از بین گزینه‌ها گزینه (۳) به شکل صحیح نزدیک‌تر می‌باشد. (پدیده گلـویی شـدن در مـواد نـرم تحـت کشش را می‌توانیم در نمودار تنش ـ کرنش یک ماده نرم در فاصله DE از متن درس ببینیم.)

مثال ۸: میله ABCD آلومینیومی است و دارای مدول الاستیسیته $E = 100GPa$ است. با صرف‌نظر نمودن از وزن میله، تغییرمکان نقطهٔ D چند mm است؟



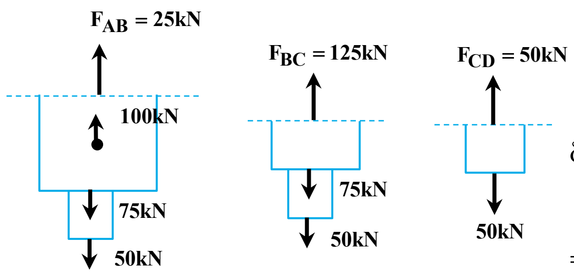
۱) ۲/۶

۲) ۷

۳) ۳/۵

۴) ۶/۱

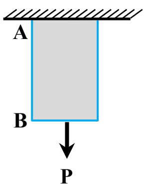
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا با برش زدن میله مرکب در مقاطع مختلف نیروی داخلی در قسمت‌های AB,BC,CD به ترتیب مساوی $25kN, 125kN, 50kN$ به دست می‌آیند.



$$\delta_D = \sum_{i=1}^{n=3} \frac{F_i L_i}{A_i E_i} = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} + \frac{F_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} + \frac{F_{AB} L_{AB}}{A_{AB} E}$$

$$= \frac{50 \times 1500}{500 \times 100} + \frac{125 \times 1250}{1000 \times 100} + \frac{25 \times 1750}{1000 \times 100} \simeq 3/5\ mm$$

مثال ۹: میله فولادی AB به طول ۱۲ متر و به وزن $800N$ تحت تأثیر نیروی $P = 1000N$ قرار گرفته است، اگر $E = 21 \times 10^9\ Pa$ و سطح مقطـع میله $4cm^2$ باشد، افزایش طول میله چند میلی‌متر است؟



۱) ۱/۱۴

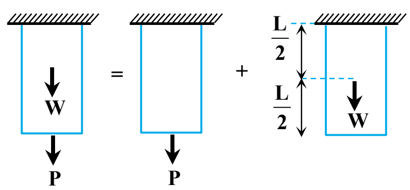
۲) ۱/۴

۳) ۲

۴) ۲/۶

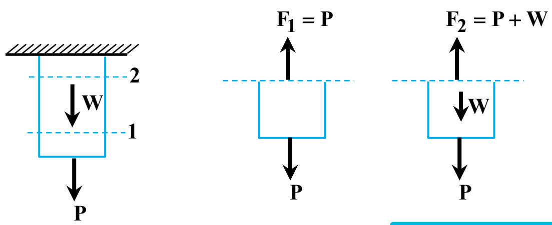
☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم. بدین معنی که تغییر طول ناشی از وزن و نیروی P برابر است با مجموع تغییر طول ناشی از نیروی P و نیروی متمرکز وزن که در وسط میله اعمال می‌شود.



$$\delta = \frac{PL}{AE} + \frac{W(\frac{L}{2})}{AE} \Rightarrow \delta = \frac{(P + \frac{W}{2})L}{AE} = \frac{(1000 + \frac{800}{2}) \times 12}{4 \times 10^{-4} \times 21 \times 10^9} = 0/002\ m = 2mm$$

روش دوم: در محل مشخص شده برش زده تا نیرو در مقاطع میله به دست آید.



سپس از رابطه $\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$ استفاده می‌کنیم.

$$\delta = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{P(\frac{L}{2})}{AE} + \frac{(P + W)(\frac{L}{2})}{AE} = \frac{(P + \frac{W}{2})L}{AE}$$

مثال۱۰: **میله‌ای به طول $۱m$ با سطح مقطعی برابر $۰/۲m^۲$ تحت نیروی محوری $۱۲KN$ قرار دارد. اگر تغییر طول این میله به اندازهٔ $۰/۳mm$ باشد، ضریب ارتجاعی برای جنس این میله مساوی کدامیک از گزینه‌های زیر است؟**

۱) $۲۰MPa$ ۲) $۳۰۰MPa$ ۳) $۲۰GPa$ ۴) $۲۰۰GPa$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون میله همگن و ساده بوده بنابراین تغییر طول آن توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

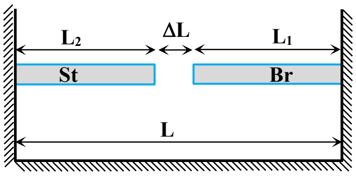
$$\delta=\frac{FL}{AE}\Rightarrow E=\frac{FL}{A\delta}=\frac{۱۲\times۱۰^۳\times۱}{۰/۲\times۳\times۱۰^{-۴}}=۳\times۱۰^۸\ Pa=۳۰۰\ MPa$$

مثال۱۱: **اگر یک تیر دو سر گیردار با طول L تحت افزایش دما ΔT قرار گیرد. مطلوب است تعیین تغییر طول این تیر:**

۱) $\alpha L\Delta T$ ۲) $\alpha\Delta T$ ۳) $\frac{\alpha\Delta T}{L}$ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون میله بین دو تکیه‌گاه صلب قرار دارد هیچ‌گونه تغییر طولی در اثر تغییرات دما نخواهد داشت.

مثال۱۲: **در شکل زیر اگر درجه حرارت محیط بالا رود به طوری که میله‌های برنجی و فولادی به یکدیگر برسند و به هم نیرو وارد کنند، کدامیک از پاسخ‌ها صحیح است؟** $A_{st}=A_{Br}$ $\alpha_{Br}>\alpha_{st}$ $E_{st}>E_{Br}$

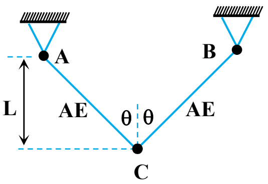


۱) تنش در میله‌ی فولادی بیشتر از میله برنجی خواهد شد.
۲) تنش در میله برنجی بیشتر از میله فولادی خواهد شد.
۳) تنش در هر دو میله مساوی خواهد شد.
۴) کرنش در هر دو میله مساوی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هرگاه در اثر حرارت دو میله به هم برسند، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که طبق قانون سوم نیوتن نیروها عمل و عکس‌العمل بوده و با یکدیگر مساویند در نتیجه با فرض مساوی بودن مساحت سطح، تنش در هر دو میله مساوی است.

$$\left.\begin{matrix}F_{st}=F_{Br}\\A_{st}=A_{Br}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sigma_{st}=\sigma_{Br}$$

مثال۱۳: **دو میله مطابق شکل در مفصل C به هم متصل شده‌اند، در اثر افزایش همزمان دمای دو میله به اندازه ΔT تنش در میله‌ها چه اندازه است؟**



۱) $-E\alpha\Delta T$
۲) $\frac{-E\alpha\Delta T}{\cos\theta}$
۳) $-E\alpha\Delta T\cos\theta$
۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا وضعیت سازه از لحاظ معینی بررسی می‌شود:

$$\left.\begin{matrix}r=۲\times۲=۴\\m=۲\\J=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow n=(m+r)-۲J=(۴+۲)-۲\times۳=۰$$

سازه معین بوده بنابراین هیچ‌گونه تنشی در اثر تغییرات دما در اعضای آن ایجاد نمی‌شود.

مثال۱۴: **یک جسم دو بعدی را مطابق شکل زیر تحت تنش σ_x در راستای x در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تغییر مکان آن در راستای y مقید شده باشد. رابطه بین σ_x و ε_x به چه صورت است؟**

۱) $\sigma_x=E\varepsilon_x$ ۲) $\sigma_x=\frac{E}{۱-\upsilon}\varepsilon_x$
۳) $\sigma_x=\frac{E}{۱+\upsilon}\varepsilon_x$ ۴) $\sigma_x=\frac{E}{۱-\upsilon^۲}\varepsilon_x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» چون جسم در راستای x فشرده شده است، بنابراین تمایل دارد در راستای y افزایش طول دهد اما تکیه‌گاه‌ها مانع این افزایش طول می‌شوند و این به دلیل اعمال نیروهای فشاری است که از طرف تکیه‌گاه بر صفحه وارد می‌شود. بنابراین بارگذاری در جسم محوری نبوده و باید از قانون هوک عمومی برای حل آن استفاده کنیم.

$$\varepsilon_x=\frac{۱}{E}\left(\sigma_x-\upsilon\sigma_y\right)\qquad(۱)$$

چون جسم دو بعدی است در نتیجه مؤلفه قائم تنش در جهت عمود بر صفحه صفر می‌باشد ($\sigma_z = 0$)، از طرفی به دلیل محدود بودن جسم بین تکیه‌گاه‌ها، $\varepsilon_y = 0$ می‌باشد و در نتیجه:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right) = 0 \Rightarrow \sigma_y = \upsilon\sigma_x \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \upsilon(\upsilon\sigma_x)] \Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}\varepsilon_x$$

مثال ۱۵: مؤلفه‌های جابجایی نقاط یک جسم الاستیک خطی در دستگاه مختصات دکارتی xyz به صورت $\omega = 2k(x+y)z$ و $v = kxy$ و $u = kxy$ داده شده‌اند. مکان هندسی نقاطی از جسم که تغییر حجم المان‌های کوچک در آن صفر باشند،کدام یک از معادلات زیر است؟ (k ثابت است)

۱) $x - y = 0$ ۲) $x + y = 0$ ۳) $xy + (x+y)z = 0$ ۴) بستگی به جنس جسم دارد.

پاسخ : گزینه «۲» تغییر حجم هرگاه مساوی صفر باشد، آنگاه کرنش حجمی برابر صفر خواهد شد.

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow ky + kx + 2k(x+y) = 0 \Rightarrow 3k(x+y) = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

کرنش‌های الاستیک در یک جسم ارتجاعی را می‌توانیم با روابط دیفرانسیلی فوق به دست آوریم.

مثال ۱۶: المانی تحت اثر تنش‌های اصلی $\sigma_2 = 2\sigma_1$ قرار گرفته است. تنش اصلی σ_3 چند برابر σ_1 باشد تا تغییر حجم المان مساوی صفر باشد؟ $(\nu = \frac{1}{3})$

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۲+

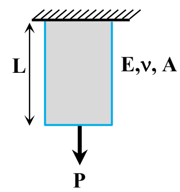
پاسخ: گزینه «۱» اگر تغییر حجم المان مساوی صفر باشد، آنگاه کرنش حجمی در آن نیز مساوی صفر است. در دو حالت کرنش حجمی برابر صفر می‌باشد.

۱) اگر ضریب پواسون $\upsilon = \frac{1}{2}$ باشد. ۲) مجموع مؤلفه‌های قائم تنش مساوی صفر باشد.

$$\Delta V = 0 \Rightarrow \varepsilon_V = 0 = \frac{1}{E}(1-2\upsilon)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\upsilon}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 + 2\sigma_1 + \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = -3\sigma_1$$

مثال ۱۷: میله‌ای مطابق شکل تحت نیروی کششی P قرار گرفته است. میزان تغییر حجم آن تحت بار وارده برابر است با: (از وزن میله صرف‌نظر شود)



۱) $\frac{1-2\upsilon}{E}PL$ ۲) $\frac{1-\upsilon}{EA}PL$ ۳) $\frac{PL}{EA}$ ۴) $\frac{EAP}{1-2\upsilon}$

پاسخ: گزینه «۱» تغییرات حجم جسم مساوی حاصل‌ضرب کرنش حجمی در حجم اولیه جسم $(V_\circ = AL)$ است، بنابراین:

$$\Delta V = V_\circ \varepsilon_V = V_\circ \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \Rightarrow \Delta V = AL \times \frac{1-2\nu}{E} \times \frac{P}{A} = \frac{PL}{E}(1-2\upsilon)$$

در رابطه فوق $\sigma_y = \sigma_z = 0$ است، چرا که نیروی خارجی تنها در راستای طولی بر میله وارد شده است.

مثال ۱۸: جسمی تحت تنش کششی σ_m در سه امتداد x و y و z قرار دارد (تنش هیدرواستاتیک). رابطه کرنش حجمی $(\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ و تنش σ_m به صورت $\varepsilon = \frac{\sigma_m}{k}$ بیان می‌شود. K مدول حجمی برابر است با:

۱) $\frac{E}{3(1-2\upsilon)}$ ۲) $\frac{E}{2(1+\upsilon)}$ ۳) $\frac{E}{3(1-\upsilon)}$ ۴) $\frac{\nu E}{3(1+\upsilon)}$

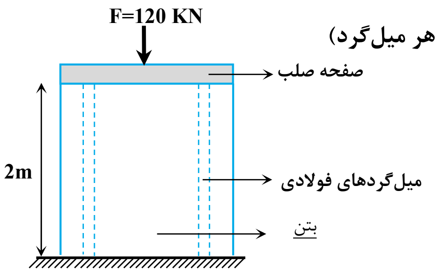
پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم مدول حجمی را به دست آوریم:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\upsilon}{E} \times (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\upsilon}{E} \times 3\sigma_m \Rightarrow \frac{\sigma_m}{\varepsilon} = K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)}$$

طبق تعریف ارائه شده در متن درس مدول حجمی عبارتست از نسبت تنش متوسط به کرنش حجمی.

مثال۱۹: نیروی $F = ۱۲۰KN$ بر صفحه صلب مطابق شکل اعمال می‌شود. صفحه صلب بر روی ستون بتنی قرار گرفته است. تنش ایجاد شده در میل‌گردهای فولادی چه اندازه است؟ (تعداد میل‌گردها شش عدد می‌باشد)

($E_c = ۲۵$ Gpa , $E_{st} = ۲۰۰$Gpa) (مساحت بتون $A_c = ۱۲۰cm^۲$ مساحت هر میل‌گرد $A_s = ۱/۵cm^۲$)



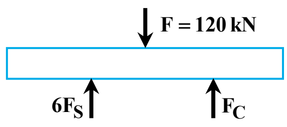
۱) ۴۲ MPa

۲) ۶۲MPa

۳) ۵۰MPa

۴) ۲۲۰MPa

پاسخ: گزینه «۳» این مثال از نوع مسائل نامعین استاتیکی است، چرا کـه نیـروی داخلـی در میـل‌گردهـای فولادی و بتن مجهول بوده در حالی که تنها یک معادله تعادل برای حل مسئله در اختیـار داریـم، بنـابراین سـعی می‌شود مسئله به روش نیرو حل شود، با توجه به شکل مسئله، تحت نیروی فشاری وارد بـر صـفحه صلـب هـر دو جنس به یک اندازه تغییر طول می‌دهند. بنابراین می‌توان رابطه سازگاری را به شکل زیر نوشت:



رابطه سازگاری : Δ_c (تغییر طول ستون بتنی)$=\Delta_s$ (تغییر طول میل‌گرد فولادی) $\Rightarrow \frac{F_cL}{A_cE_c} = \frac{F_sL}{A_sE_s} \Rightarrow \frac{F_c}{F_s} = \frac{E_cA_c}{E_sA_s}$ (۱)

از طرفی طبق معادله تعادل داریم:

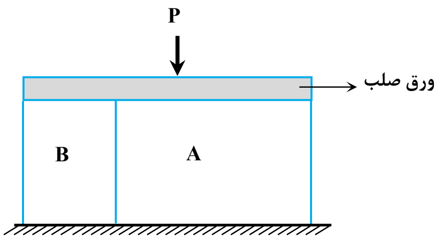
$$۶F_s + F_c = ۱۲۰۰۰۰N \overset{(۱)}{\Rightarrow} ۶F_s + \frac{E_cA_c}{E_sA_s} \times F_s = ۱۲۰۰۰۰N$$

با توجه به داده‌های مسئله نیرویی که هر میل‌گرد تحمل می‌کند برابر است با:

$$\Rightarrow F_s = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۶ + \frac{۲۵\times۱۲۰}{۲۰۰\times۱/۵}} = ۷۵۰۰N$$

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{۷۵۰۰N}{۱/۵\times۱۰^{-۴}} = ۵۰\times۱۰^۶\ Pa = ۵۰MPa$$

مثال۲۰: در شکل مقابل دو ستون A و B تحت نیروی فشاری P قرار دارند، اگر $E_B = ۴E_A$ و $A_A = ۴A_B$ باشد. مقدار σ_B چند برابر σ_A خواهد بود؟



۱) ۱

۲) ۰/۲۵

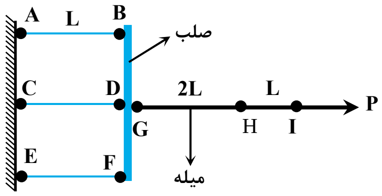
۳) ۴

۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه نیروی P از طریق صفحه صلب به دو ستون وارد مـی‌شـود، بنـابراین تغییـرات طـول آن‌هـا مسـاوی خواهـد بـود. در چنین شرایطی رابطه سازگاری بر اساس تغییر شکل‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

رابطه سازگاری: $\delta_A = \delta_B \Rightarrow \frac{F_AL}{A_AE_A} = \frac{F_BL}{A_BE_B} \Rightarrow \frac{(\frac{F_A}{A_A})}{E_A} = \frac{(\frac{F_B}{A_B})}{E_B} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{E_A} = \frac{\sigma_B}{E_B} \Rightarrow \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \frac{E_B}{E_A} = ۴$

مثال۲۱: تغییر مکان نقطه I مطابق کدامیک از گزینه‌های زیر است؟



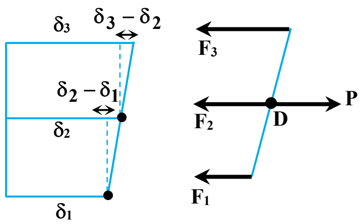
سطح مقطع میله CD و AB =2a

سطح مقطع میله EF = 4a

سطح مقطع میله‌های دیگر = a

۱) $\frac{۲۲PL}{۶۹aE}$　　۲) تغییر نمی‌کند.　　۳) $\frac{۶۹PL}{۲۲aE}$　　۴) $\frac{۸۳PL}{۲۲aE}$

پاسخ: گزینه «۳» میله‌هایی که دارای سطح مقطع بزرگ‌تری هستند، تغییر طـول کمتـری از خـود نشان می‌دهند. بنابراین تغییر طول میله EF از تغییر طول میله AB کمتر است. و در نتیجـه ایـن باعـث می‌شود که جابجایی صلب BDF به صورت زاویه‌دار شود.



معادلات تعادل برای میله صلب BDF

$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow P = F_۱ + F_۲ + F_۳ & (۱) \\ \sum M_D = ۰ \Rightarrow F_۳ \times BD = F_۱ \times FD \Rightarrow F_۳ = F_۱ & (۲) \end{cases}$$

با توجه به تشابه مثلث رسم شده و شکل فوق می‌توان رابطه سازگاری را به شکل زیر نوشت:

رابطه سازگاری : $$\frac{\delta_۲-\delta_۱}{DF}=\frac{\delta_۳-\delta_۲}{BD} \Rightarrow \delta_۳-\delta_۲=\delta_۲-\delta_۱ \Rightarrow \delta_۲=\frac{\delta_۱+\delta_۳}{۲} \Rightarrow \frac{F_۲L}{۲aE}=\frac{\frac{F_۱L}{۴aE}+\frac{F_۳L}{۲aE}}{۲}$$

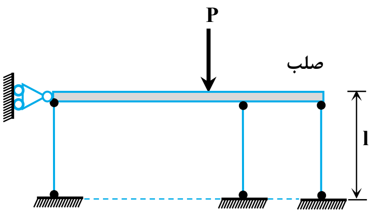
$$\Rightarrow \frac{F_۲}{۲}=\frac{F_۱}{۸}+\frac{F_۳}{۴} \Rightarrow ۴F_۲=F_۱+۲F_۳ \qquad (۳)$$

$$\Rightarrow (۱)\ ,\ (۲)\ ,\ (۳) \Rightarrow F_۱=F_۳=\frac{۴P}{۱۱} \quad , \quad F_۲=\frac{۳P}{۱۱}$$

از طرفی:

$$\delta_I=\delta_G+\delta_{I/G}=\delta_D+\delta_{I/G} \Rightarrow \delta_I=\frac{F_۲L}{۲aE}+\frac{P\times ۳L}{aE}=\frac{۳PL}{۲۲aE}+\frac{۳PL}{aE}=\frac{۶۹PL}{۲۲aE}$$

مثال۲۲: در شکل زیر میله افقی صلب و میله‌های قائم از یک جنس می‌باشند. اگر درجه حرارت هر سه میله قائم به طور مساوی تغییـر کنـد کـدام عبارت در مورد سازه درست است.



۱) سازه ایزواستاتیک است ولی در این مورد خاص تنش میله‌ها تغییر می‌کند.

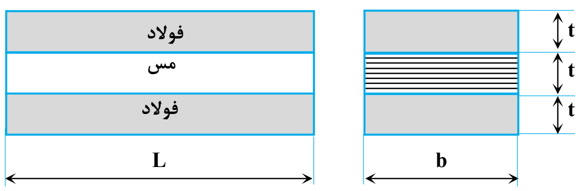
۲) سازه ایزواستاتیک است و به همین دلیل تنش میله‌ها تغییر نمی‌کند.

۳) سازه هیپراستاتیک است و مانند آن‌ها با تغییر درجه حرارت تنش میله‌ها تغییر می‌کند.

۴) سازه هیپراستاتیک است ولی با تغییر درجه حرارت تنش‌ها تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۴» سازه از لحاظ استاتیکی نامعین است، ولی در اثر تغییر درجه حرارت میله صلب به طور افقی بالا یا پایین خواهـد رفـت در نتیجه هیچ‌گونه تنشی در این میله‌ها به وجود نمی‌آید. (چون تغییرات طول سه میله یکسان است)

مثال۲۳: میله‌ای دو فلزی شامل یک هسته مسی متصل به دو نوار فولادی در بالا و پایین آن می‌باشد که به اندازه ΔT درجه به طور یکنواخت گرما داده می‌شود، پهنای میله‌ها b، طول میله‌ها L و ضخامت هر کدام t می‌باشد. تنش ایجاد شده در مس را تعیین کنید. ضرایب حرارتی برای فولاد و مس به ترتیب α_s و α_c $(\alpha_c > \alpha_s)$ و ضرایب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب E_s و E_c می‌باشد.

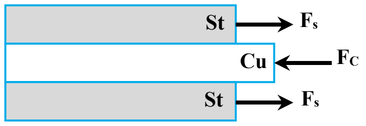


۱) $\sigma_c=\frac{E_cE_s(\alpha_c-\alpha_s)\Delta T}{۲E_s+E_c}$　　۲) $\sigma_c=\frac{۲E_cE_s(\alpha_c-\alpha_s)\Delta T}{۲E_s+E_c}$

۳) $\sigma_c=\frac{۲E_cE_s(\alpha_s-\alpha_c)\Delta T}{۲E_s+E_c}$　　۴) $\sigma_c=\frac{E_cE_s(\alpha_s-\alpha_c)\Delta T}{۲E_s+E_c}$

پاسخ: گزینه «۳» یک طرف میله مرکب را ثابت فرض می‌کنیم و طرف دیگر را آزاد در نظر می‌گیریم که با افزایش دما، تغییر طول پیدا می‌کند. از آنجا که $\alpha_c > \alpha_s$ است پس میله مسی زودتر تمایل به افزایش طول دارد، در نتیجه از طرف میله فولادی یک نیروی مقاوم به آن وارد می‌شود، لذا به میله مسی نیروی فشاری و به میله‌های فولادی نیروی کششی وارد می‌شود. طبق قانون تعادل $F_{cu}=۲F_{st} \Rightarrow F_c=۲F_s$ می‌باشد و از طرفی طبق رابطه

سازگاری می‌توانیم به این نتیجه برسیم که افزایش طول میله فولادی تحت نیروی کششی F_S و افزایش دما مساوی افزایش طول میله مسی تحت نیروی فشاری F_C و افزایش دما است. بنابراین:



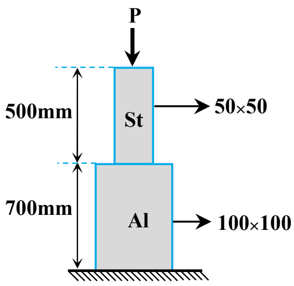
رابطه سازگاری : $\delta_S = \delta_C \Rightarrow \alpha_S L\Delta T + \dfrac{F_S L}{A_S E_S} = \alpha_C L\Delta T - \dfrac{F_C L}{A_C E_C}$

$$\Rightarrow (\alpha_C - \alpha_S)L\Delta T = \frac{F_S L}{E_S A_S} + \frac{F_C L}{A_C E_C} \xrightarrow{F_C = ۲F_S} (\alpha_C - \alpha_S)L\Delta T = \frac{F_C L}{۲A_S E_S} + \frac{F_C L}{A_C E_C}$$

$$\Rightarrow F_C = \frac{(\alpha_C - \alpha_S)\Delta T}{\dfrac{۱}{۲A_S E_S} + \dfrac{۱}{A_C E_C}} \xrightarrow{A_S = A_C} \frac{F_C}{A_C} = \frac{۲E_S E_C(\alpha_C - \alpha_S)\Delta T}{۲E_S + E_C}$$

از آنجایی که تنش ایجاد شده در مس فشاری است. $\Rightarrow \sigma_C = \dfrac{-۲E_C E_S(\alpha_C - \alpha_S)\Delta T}{۲E_S + E_C} = \dfrac{۲E_S E_C(\alpha_S - \alpha_C)\Delta T}{۲E_S + E_C}$

مثال ۲۴: میله‌ای فولادی و آلومینیومی مطابق شکل تحت بار محوری P به اندازه $۰/۲۵mm$ کاهش طول می‌دهد. بار P چه اندازه است؟ $(E_{st} = ۲\times ۱۰^۵ \dfrac{N}{mm^۲}, E_{Al} = ۰/۷\times ۱۰^۵ \dfrac{N}{mm^۲})$



۱) ۱۲۵KN
۲) ۲۵۰KN
۳) ۱۲۰KN
۴) ۱۶۰KN

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی فشاری وارد بر میله‌های آلومینیومی و فولادی مساوی بوده، بنابراین آن‌ها مانند دو فنر سری عمل می‌کنند که سختی معادل آن‌ها از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{k_{eq.}} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲} \Rightarrow k_{eq.} = \frac{k_۱.k_۲}{k_۱ + k_۲}$$

$$k_{st} = k_۱ = (\frac{EA}{L})_{st} = \frac{۲\times ۱۰^۵ \times ۵۰\times ۵۰}{۵۰۰} = ۱۰^۶ \times ۱۰^۶ \frac{N}{mm}$$

$$k_{Al} = k_۲ = (\frac{EA}{L})_{AL} = \frac{۰/۷\times ۱۰^۵ \times ۱۰۰\times ۱۰۰}{۷۰۰} = ۱۰^۶ \frac{N}{mm}$$

$$k_{eq} = ۵\times ۱۰^۵ \frac{N}{mm} \Rightarrow \quad P = k_{eq.}\times \delta \quad \Rightarrow P = ۵\times ۱۰^۵ \times ۰/۲۵ = ۱۲۵kN$$

مثال ۲۵: مساحت سطح مقطع بتن در یک ستون بتن مسلح کوتاه $۶۴۵cm^۲$ می‌باشد. در ستون مزبور چهار میله فولادی طولی که مساحت هر یک $۱۰cm^۲$ می‌باشد، به طور متقارن به کار رفته است، اگر تنش مجاز بتن $۸۰\dfrac{kg}{cm^۲}$ و تنش مجاز فولاد $۱۴۰۰\dfrac{kg}{cm^۲}$ باشد بار مجاز ستون مساوی کدام گزینه است؟ $(E_c = ۲\times ۱۰^۵ \dfrac{kg}{cm^۲}$ و $E_{st} = ۲\times ۱۰^۶ \dfrac{kg}{cm^۲})$

۱) ۱۴۰ tons　　۲) ۱۶۰ tons　　۳) ۸۰ tons　　۴) ۱۲۰ tons

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون کاهش طول ستون بتنی و میل‌گردهای فولادی تحت بار فشاری خارجی یکسان است، لذا طبق تعریفی که برای فنرهای موازی ارائه شد، می‌توانیم آن‌ها را مانند فنرهای موازی در نظر بگیریم. در این حالت برای محاسبه سختی فنر معادل، سختی میله فولادی و ستون بتنی با هم جمع می‌شوند.

$$k_{eq.} = ۴k_{st} + k_c = ۴\frac{A_S E_S}{L} + \frac{A_c E_c}{L}$$

در فنرهای موازی نیرویی که هر فنر تحمل می‌کند، متناسب با سختی آن فنر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{st} = \frac{k_{st}}{k_{eq.}}\times P = \frac{\dfrac{A_S E_S}{L}}{۴\dfrac{A_S E_S}{L} + \dfrac{A_c E_c}{L}}\times P = \frac{A_S E_S}{۴A_S E_S + A_c E_c}\times P$$

اما بار مجاز وارد بر ستون را می‌توانیم با استفاده از تنش مجاز بتن و فولاد به ترتیب زیر به دست آوریم.

$$\Rightarrow \sigma_{st} = \frac{P_{st}}{A_{st}} = \frac{E_s}{۴A_sE_s + A_cE_c} \times P \Rightarrow P = \frac{۴A_sE_s + A_cE_c}{E_s}\sigma_{st}$$

نیروی خارجی P که با توجه به تنش مجاز فشاری میله‌های فولادی به دست می‌آید، مساوی است با:

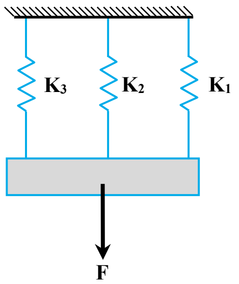
$$\Rightarrow P_۱ = \frac{۴\times۱۰\times۲\times۱۰^۶ + ۶۰۰\times۲\times۱۰^۵}{۲\times۱۰^۶}\times۱۴۰۰ = ۱۴۰۰۰۰\,kg \simeq ۱۴۰\,t$$

به همین روش می‌توانیم نیروی خارجی P را با در نظر گرفتن تنش مجاز بتن به دست آوریم:

$$P = \frac{۴A_sE_s + A_cE_c}{E_c}\times\sigma_c \Rightarrow P_۲ = \frac{۴\times۱۰\times۲\times۱۰^۶ + ۶۴۵\times۲\times۱۰^۵}{۲\times۱۰^۵}\times۸۰ \Rightarrow P_۲ = ۸۰۰۰۰\,kg \simeq ۸۰\,t$$

از دو جواب به دست آمده نیروی حداقل جواب مورد نظر می‌باشد، چرا که نیروی خارجی باید طوری باشد که تنش در هر دو جنس از حد مجاز فراتر نرود.

مثال ۲۶: شکل مقابل یک گروه فنر را که به طور موازی به هم وصل شده‌اند، نشان می‌دهد. اگر نیروی وارده $۷۰۰N$ و فنرها دارای سختی‌های زیر باشند، افزایش طول را محاسبه کنید.



$$k_۱ = ۵۲۵۰\frac{N}{m} \quad , \quad k_۲ = ۷۰۰۰\frac{N}{m} \quad , \quad k_۳ = ۸۷۵۰\frac{N}{m}$$

۱) $۷۶\ mm$
۲) $۳۰۰\,mm$
۳) $۳۳/۳\,mm$
۴) $۱۲/۷\ mm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون فنرها موازی هستند، پس سختی آن‌ها جمع شده و تغییر طول آن‌ها توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{۷۰۰}{۵۲۵۰+۷۰۰۰+۸۷۵۰} = \frac{۱}{۳۰}m = \frac{۱۰۰}{۳}mm = ۳۳/۳$$

فصل دوم

« پیچش »

تست‌های تألیفی فصل دوم

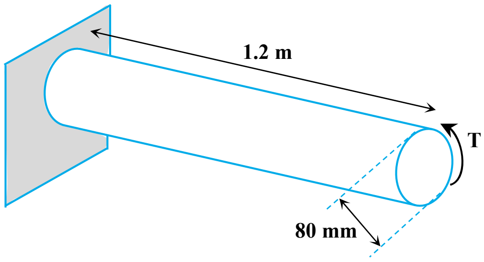
مثال ۱: مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی محوری به قطر ۱۰ mm که تحت لنگر پیچشی ۳۰ N.m قرار گرفته است؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۱۶۰ MPa ۲) ۲۰۰MPa ۳) ۳۰۰ MPa ۴) ۱۰۰۰ MPa

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2\times 30\times 10^3}{\pi \times 5^3} = 160\ \text{MPa}$$

مثال ۲: به شفتی با قطر ۸۰ mm، گشتاور پیچشی $T = 6(\text{KN.m})$ وارد می‌شود. در نقطه‌ای به فاصله‌ی ۲۰ mm از مرکز شفت تنش برشی برابر است با: $(\pi \simeq 3)$



۱) ۲۰/۱۲ MPa
۲) ۳۱/۲۵ MPa
۳) ۶۰/۵MPa
۴) ۸۰/۴۸ MPa

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنش برشی در یک نقطه دلخواه از مرکز محور مساوی است با:

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{(6\times 10^3 \times 10^3\ \text{N.mm})\times 20}{\frac{\pi}{2}\times 40^4} = \frac{125}{4}\ \text{MPa} = 31/25\text{MPa}$$

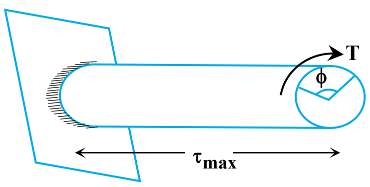
مثال ۳: یک لوله به قطر خارجی ۲۰cm و قطر داخلی ۴۰cm تحت پیچش قرار دارد. در صورتی که تنش پیچشی وارده برابر $100\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ باشد، مقدار گشتاور چقدر بوده است؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۱۱۲۵ KN.m ۲) ۳۲۵۰ KN.m ۳) ۳۳۷۵ KN.m ۴) ۲۵۰۰ KN.m

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در صورتی که تنش پیچشی داده شده حداکثر تنش پیچشی باشد، می‌توان نوشت:

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \frac{100\times 10^6 \times \frac{\pi}{32}(40^4 - 20^4)\times 10^{-8}}{20\times 10^{-2}} = 1125\times 10^3\ \text{N.m} \Rightarrow \tau_{max} = 1125\ \text{KN.m}$$

مثال ۴: میله یک سرگیردار نشان داده شده در انتهای خود تحت لنگر پیچشی قرار گرفته است، زاویه پیچش ϕ در اثر اعمال گشتاور T به چه میزان خواهد بود؟ $(J = 10^{-6}\ \text{m}^4\ ,\ L = 1/5\ \text{m}\ ,\ T = 2\ \text{KN.m}\ ,\ G = 30\ \text{GPa})$

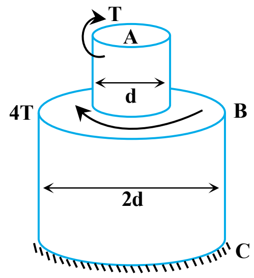


۱) ۰/۰۱ رادیان
۲) ۰/۰۱ درجه
۳) ۰/۱ رادیان
۴) ۰/۰۰۱ رادیان

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» میله داده شده، محور ساده است در نتیجه برای محاسبه زاویه پیچش مقطع انتهایی آن می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

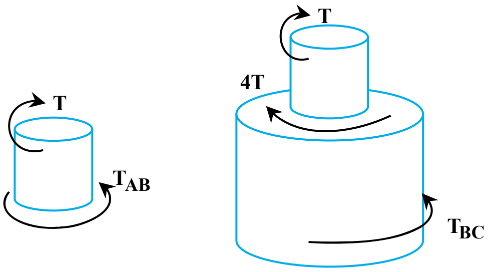
$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{2000\times 1/5}{30\times 10^9 \times 10^{-6}} = \frac{3\times 10^3}{30000} = 0/1\ \text{rad}$$

مثال۵: محور مرکبی مطابق شکل تحت تأثیر دو لنگر پیچشی T و 4T به ترتیب در مقاطع A و B قرار گرفته است، مقدار تنش برشی ماکزیمم در محور مساوی کدام گزینه است؟



۱) $\frac{10T}{\pi d^3}$　　۲) $\frac{16T}{\pi d^3}$

۳) $\frac{80T}{\pi d^3}$　　۴) $\frac{32T}{\pi d^3}$



پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه تنش برشی ماکزیمم در بخش‌های مختلف محور مرکب، کافی است در محورهای AB و BC به ترتیب دو برش زده و با رسم دیاگرام آزاد بخش‌های جدا شده، مقدار لنگر پیچشی داخلی به دست آورده شود. با توجه به معادله تعادل گشتاور، می‌توان نوشت:

برای مقطع AB: $\sum T = 0 \Rightarrow T - T_{AB} = 0 \Rightarrow T = T_{AB}$

برای مقطع BC: $\sum T = 0 \Rightarrow T + 4T - T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 5T$

از طرفی تنش برشی ماکزیمم در محورهای توپر مساوی است با:

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{محور AB}: \tau_{max} = \frac{16T_{AB}}{\pi d_{AB}^3} = \frac{16T}{\pi d^3} \\ &\text{محور BC}: \tau_{max} = \frac{16T_{BC}}{\pi d_{BC}^3} = \frac{16\times 5T}{\pi\times(2d)^3} = \frac{10T}{\pi d^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

با مقایسه تنش‌های برشی ماکزیمم در دو محور، حداکثر مطلق تنش برشی در محور مرکب به دست می‌آید. همچنین با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان گفت تنش برشی ماکزیمم در محور AB به وقوع می‌پیوندد.

مثال۶: اگر تنش برشی محور توربینی که با سرعت 1000 rpm می‌چرخد معادل 60MPa باشد، قطر لازم برای محور جهت انتقال توان 9(kW) چند میلی‌متر است؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۳۶　　۲) ۲۰　　۳) ۵۴　　۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۲»

$$\left.\begin{aligned} &P = T\omega = \frac{2\pi n}{60}\times T \\ &\tau = \frac{TR}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \frac{\pi d^3}{16}\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \frac{2\pi n}{60}\times\frac{\pi d^3}{16}\tau \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60P}{2n\pi^2\tau}}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60\times 9000}{2\times 1000\times\pi^2\times 60\times 10^6}} = \sqrt[3]{\frac{16\times 6\times 9\times 10^4}{2\times 9\times 6\times 10^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{8}{10^6}} = \frac{1}{50}m = 20\,mm$$

مثال۷: محور فولادی توپری به قطر D را داخل محور فولادی دیگری به قطر داخلی D و قطر خارجی 2D قرار می‌دهیم و دو محور را به صفحه صلبی جوش می‌دهیم به صورتی که در پیچش، پیچش هر دو محور مقدار یکسانی است. تحت اثر کوپل پیچشی T نسبت تنش برشی ماکزیمم محور توخالی به محور توپر چقدر است؟

۱) ۱/۵　　۲) ۲　　۳) ۳/۵　　۴) ۷/۵

پاسخ : گزینه «۲» τ_{max_2} : تنش برشی ماکزیمم محور توخالی τ_{max_1} : ماکزیمم تنش برشی در محور توپر

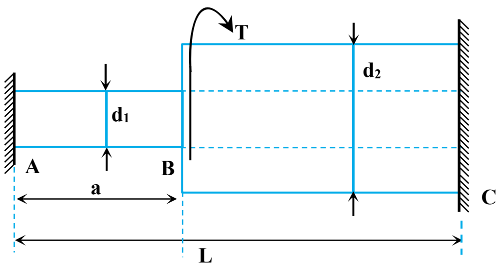
$$\frac{\tau_{max_2}}{\tau_{max_1}} = \frac{\frac{T_2R_2}{J_2}}{\frac{T_1R_1}{J_1}} = \frac{T_2}{T_1}\times\frac{J_1}{J_2}\times\frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

چون زاویه پیچش برای دو محور مساوی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{T_1L_1}{G_1J_1} = \frac{T_2L_2}{G_2J_2} \xrightarrow[\text{جنس و طول دو محور}]{\text{با توجه به یکی بودن}} \frac{T_2}{T_1} = \frac{J_2}{J_1} \quad (2)$$

$$(1)\,,\,(2) \Rightarrow \frac{\tau_{max_2}}{\tau_{max_1}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2D}{D} = 2$$

مثال ۸: نسبت $\frac{a}{L}$ چه مقدار باشد تا عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها برای محور با مقطع گرد و اقطار نشان داده شده در شکل برابر باشد؟
(محور در فاصله BC توخالی بوده و اتصال محور AB و BC در B صلب فرض می‌شود)



۱) $\frac{(d_2-d_1)^4}{d_1^4}$ ۲) $\frac{(d_2-d_1)^2}{d_1^2}$

۳) $(\frac{d_1}{d_2})^2$ ۴) $(\frac{d_1}{d_2})^4$

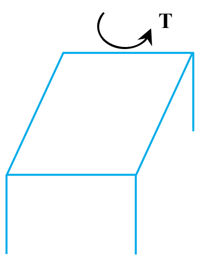
پاسخ : گزینه «۴» به دلیل آنکه اتصال دو محور AB و BC یک اتصال صلب می‌باشد بنابراین زاویه پیچش دو محور در فصل مشترکشان یعنی مقطع B برابر می‌باشد. بنابراین مطابق رابطه سازگاری می‌توان نوشت:

$$\phi_{B/A} = \phi_{B/C} \Rightarrow \frac{T_AL_{AB}}{GJ_{AB}} = \frac{T_CL_{BC}}{GJ_{BC}} \Rightarrow \frac{T_Aa}{G\frac{\pi}{32}d_1^4} = \frac{T_C(L-a)}{G\frac{\pi}{32}(d_2^4-d_1^4)}$$

با ساده‌سازی طرفین رابطه فوق و مطابق فرض مسئله $T_A = T_C$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{L-a}{a} = \frac{d_2^4-d_1^4}{d_1^4} \Rightarrow \frac{L}{a}-1 = \frac{d_2^4}{d_1^4}-1 \Rightarrow \frac{a}{L} = (\frac{d_1}{d_2})^4$$

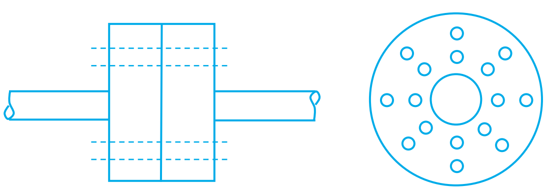
مثال ۹: در حالت استفاده از تشابه غشایی (Membrane analogy) برای تعیین کیفی توزیع تنش برشی در یک میله تحت پیچش با مقطع مربع مستطیل، کدام‌یک از جملات زیر وضعیت تنش برشی در یک نقطه فرضی A از مقطع را به طور صحیح بیان می‌کند؟



۱) در نقطه‌ای از غشاء متناظر با نقطه A کمترین شیب متناسب با مقدار تنش و بیشترین شیب نشان‌دهنده جهت آن است.
۲) بزرگی تنش در هر نقطه A از مقطع، متناسب با کمترین شیب نقطه متناظر A در روی غشاء می‌باشد.
۳) تشابه غشائی فقط قادر به پیش‌بینی مقدار پیچش بوده و در خصوص توزیع تنش اطلاعاتی به دست نمی‌دهد.
۴) در نقطه‌ای از غشاء متناظر با نقطه A بیشترین شیب متناسب با مقدار تنش برشی و کمترین شیب نشان‌دهنده جهت آن است.

پاسخ: گزینه «۴» مقدار تنش برشی در هر نقطه متناسب با بیشترین شیب در آن نقطه می‌باشد و کمترین شیب در آن نقطه نیز جهت تنش برشی را نمایش می‌دهد.

وظیفه کوپلینگ‌ها اتصال محورهای کوچک به یکدیگر می‌باشد. در کوپلینگ‌های صلب، دو نیمه کوپلینگ توسط تعدادی پیچ به هم متصل می‌شوند. در این کوپلینگ‌ها فرض بر این است که تغییر شکل‌های برشی در پیچ‌ها مستقیماً با فاصله پیچ از محور شفت متناسب می‌باشد. در صورتی که پیچ‌ها از یک جنس باشند تنش برشی در هر پیچ نیز با فاصله پیچ تا محور مرکزی شفت متناسب می‌باشد.



تنش برشی در هر پیچ متناسب با فاصله شعاعی در آن پیچ است ⇐ کرنش برشی در هر پیچ متناسب با فاصله شعاعی پیچ است

$$\frac{\tau_1}{r_1}=\frac{\tau_2}{r_2}=\dots=\frac{\tau_n}{r_n}=C \quad (\text{مقدار ثابت}) \qquad (1)$$

از طرفی، نیرو در هر پیچ با حاصل‌ضرب فاصله شعاعی در مساحت مقطع پیچ رابطه مستقیم دارد. اگر پیچ‌ها دارای مساحت یکسان باشند، بنابراین رابطه نیروی وارد بر هر پیچ را می‌توان به این صورت نوشت.

$$F=\tau A \Rightarrow \tau=\frac{F}{A} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \frac{F_1}{r_1}=\frac{F_2}{r_2}=\dots=\frac{F_n}{r_n}=C\ (\text{مقدار ثابت}) \Rightarrow \begin{cases} F_1=Cr_1\\ F_2=Cr_2\\ .\\ .\\ .\\ F_n=Cr_n\end{cases} \Rightarrow F_i=Cr_i \qquad (3)$$

از طرفی، نیرو در هر پیچ یک گشتاور پیچشی مقاوم در برابر لنگر پیچشی خارجی ایجاد می‌کند، که مجموع گشتاورهای مقاوم باید مساوی لنگر پیچشی خارجی باشد.

$$\sum F_i r_i=T \xrightarrow{F_i=Cr_i} \sum Cr_i^2=T\Rightarrow C=\frac{T}{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \xrightarrow{(3)} F_j=\frac{Tr_j}{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \qquad (4)$$

از رابطه فوق، نیرو در هر پیچ بر حسب گشتاور پیچشی خارجی، مشخص شده و بنابراین برش در هر پیچ نیز به دست می‌آید:

$$\tau_j=\frac{F_j}{A}\Rightarrow \tau_j=\frac{Tr_j}{A\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \qquad (5)$$

A در رابطه فوق بیانگر مساحت سطح مقطع هر پیچ است.

اگر جنس و مساحت پیچ‌ها از ردیفی به ردیف دیگر تغییر کند، آنگاه از تناسب کرنش برشی با شعاع هر ردیف پیچ نمی‌توان تناسب تنش برشی با شعاع را نتیجه گرفت، بنابراین:

$$\gamma\propto r \rightarrow \frac{\tau}{G}\propto r \rightarrow \frac{\tau_1}{G_1 r_1}=\frac{\tau_2}{G_2 r_2}=\dots=\frac{\tau_n}{G_n r_n}=C\ (\text{مقدار ثابت}) \qquad (6)$$

اگر در کوپلینگ‌ها n ردیف پیچ با A و G یکسان در هر ردیف موجود باشد رابطه فوق در هر ردیف پیچ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\tau=\frac{F}{A} \xrightarrow{(6)} \frac{F_1}{A_1G_1r_1}=\frac{F_2}{A_2G_2r_2}=\dots=\frac{F_n}{A_nG_nr_n}=C\ (\text{مقدار ثابت}) \Rightarrow \begin{cases} F_1=CA_1G_1r_1\\ F_2=CA_2G_2r_2\\ F_n=CA_nG_nr_n\end{cases} \Rightarrow F_i=CA_iG_ir_i \qquad (7)$$

گشتاور مقاومی که پیچ‌ها ایجاد می‌کنند، عبارتست از:

$$\sum n_iF_ir_i=T\rightarrow \sum_{i=1}^{n} Cn_iA_iG_ir_i^2=T\Rightarrow C=\frac{T}{\sum_{i=1}^{n} n_iA_iG_ir_i^2} \xrightarrow{(3)} F_j=\frac{A_jG_jr_jT}{\sum_{i=1}^{n} n_iA_iG_ir_i^2} \qquad (8)$$

از رابطه فوق می‌توان تنش برشی در هر ردیف پیچ را به صورت مقابل محاسبه کرد:

$$\tau_j=\frac{F_j}{A_j}\Rightarrow \tau_j=\frac{G_jr_jT}{\sum_{i=1}^{n} n_iA_iG_ir_i^2} \qquad (9)$$

در روابط بالا:

G_i : مدول برشی ردیف i ام

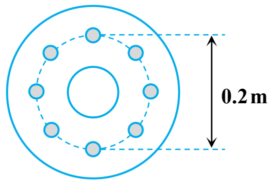
r_i: فاصله پیچ‌ها در ردیف i ام از مرکز دیسک

A_i : مساحت مقطع پیچ‌ها در ردیف i ام

n_i : تعداد پیچ‌ها در ردیف i ام

T : گشتاور پیچشی خارجی وارد بر کوپلینگ

مثال۱۰: دو نیمه کوپلینگ توسط هشت پیچ با قطر ۳۰mm به هم متصل شده‌اند، در صورتی که تنش برشی مجاز هر پیچ مساوی ۴۰MPa باشد، ظرفیت انتقال گشتاور به وسیله این کوپلینگ مساوی کدام گزینه است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) ۲۷۱ kN.m

۲) ۲۱۶ kN.m

۳) ۲۱/۶ kN.m

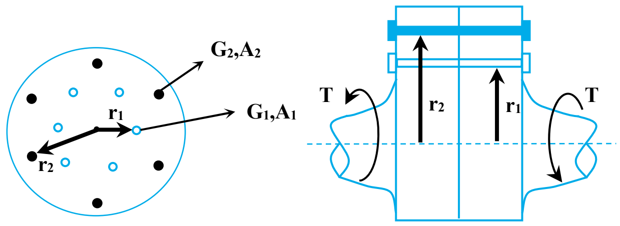
۴) ۲۷/۱ kN.m

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه جنس پیچ‌ها و سطح مقطع آن‌ها برابر است و تمامی پیچ‌ها در یک ردیف واقع می‌باشند $(n = ۱)$ می‌توان ظرفیت انتقال گشتاور کوپلینگ را توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$\tau_j = \frac{Tr_j}{A\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲} \Rightarrow T = \tau_j \frac{A\sum_{i=۱}^{۸} r_i^۲}{r_j} = \frac{۴۰\times۱۰^۶ \times \frac{\pi}{۴}\times ۰/۰۳۰^۲ \times (۸\times ۰/۱^۲)}{۰/۱} \Rightarrow T = ۲۱۶۰۰\,\text{N.m} \simeq ۲۱/۶\,\text{kN.m}$$

r_i در رابطه فوق، فاصله هر پیچ تا مرکز پیچ‌ها می‌باشد. $(r_i = ۱۰۰\text{mm} = ۰/۱\text{m})$

مثال۱۱: در کوپلینگ زیر هر دو سری پیچ که از جنس‌های متفاوت و مشخص انتخاب شده‌اند، دارای تنش برشی مجاز برابر هستند. برای اینکه کوپلینگ حداکثر گشتاور را انتقال دهد، (کوپلینگ ایده‌آل باشد) نسبت $\frac{r_۱}{r_۲}$ باید برابر با کدامیک از عبارات زیر انتخاب شود؟



۱) $\frac{G_۲}{G_۱}$

۲) $\frac{A_۲}{A_۱}$

۳) $\frac{G_۱}{G_۲}$

۴) $\frac{A_۱}{A_۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $r_۱\phi = \gamma_۱ L$ و $r_۲\phi = \gamma_۲ L$ در نتیجه:

$$\frac{r_۱}{r_۲} = \frac{\gamma_۱}{\gamma_۲} \quad (۱)$$

از طرفی طبق فرض صورت مسئله، تنش برشی مجاز پیچ‌ها یکسان می‌باشد، بنابراین:

$$\tau_۱ = \tau_۲ \Rightarrow G_۱\gamma_۱ = G_۲\gamma_۲ \Rightarrow \frac{\gamma_۱}{\gamma_۲} = \frac{G_۲}{G_۱} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{G_۲}{G_۱}$$

فصل سوم

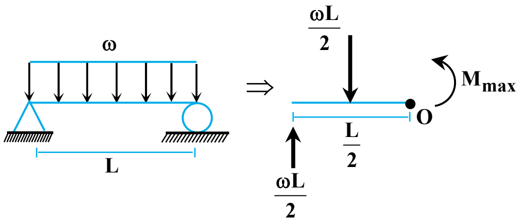
« خمش »

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: **تیر ساده‌ای به طول ۸ متر و با سطح مقطع مربع مستطیل، بار یکنواخت به شدت $600 kg/m$ را تحمل می‌کند، اگر تنش خمشی مجاز برابر $90 kg/cm^2$ و نسبت $\frac{h}{b}=2$ باشد، سطح مقطع این تیر چند cm^2 است؟**

۱) ۴۰۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۹۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت مساوی $\frac{\omega L^2}{8}$ است. چرا که در تیر بارگذاری شده به دلیل تقارن در بارگذاری، گشتاور خمشی در وسط تیر حداکثر است. بنابراین می‌توان در وسط تیر برشی زده و گشتاور خمشی را در وسط تیر محاسبه نموده تا M_{max} به دست آید.

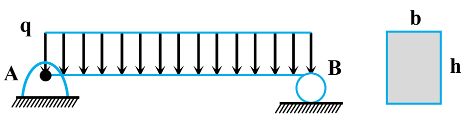


$$\sum M_O=0 \Rightarrow M_{max}-\frac{\omega L}{2}\times\frac{L}{2}+\frac{\omega L}{2}\times\frac{L}{4}=0 \Rightarrow M_{max}=\frac{\omega L^2}{8}$$

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}\xrightarrow{\frac{I}{C}=\frac{Ah}{6}}\sigma_{max}=\frac{6M}{Ah}\Rightarrow 90=\frac{6\times(\frac{600}{100}kg/cm\times\frac{(800)^2}{8})}{(b\times 2b)\times 2b}\Rightarrow 4\times 90 b^3=6\times 6\times\frac{800^2}{8}$$

$$\Rightarrow b^3=8000 \Rightarrow b\cong 20\ cm \quad ; \quad h=2b \Rightarrow h\simeq 40 \Rightarrow A=bh\simeq 800\ cm^2$$

مثال۲: **تیر AB به طول ۴ متر تحت تأثیر نیروی پخشی به شدت $q=8000\frac{N}{m}$ قرار گرفته است. اگر ابعاد سطح مقطع 6×10 سانتیمتر باشد. تنش خمشی ماکزیمم چند مگاپاسکال است؟**

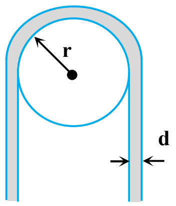


۱) ۴۰ ۲) ۸۰
۳) ۱۶۰ ۴) ۲۴۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت لنگر خمشی در وسط تیر ماکزیمم بوده که مقدار آن طبق مثال‌های ۷ و ۸ مساوی $\frac{qL^2}{8}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{max}=\dfrac{MC}{I}\\ \dfrac{I}{C}=\dfrac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\dfrac{bh^2}{6}=\dfrac{Ah}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{6M}{Ah}=\frac{6\times\frac{8000\times 4^2}{8}}{6\times 10\times 10\times 10^{-6}}=160\times 10^6\ Pa=160\ MPa$$

مثال ۳: حداکثر تنش خمشی ایجاد شده بر روی سیم فولادی خمیده بر روی یک پولی به شعاع r برابر است با:



۱) $\frac{Ed}{۲(r+d)}$　　۲) $\frac{Ed}{r+d}$

۳) $\frac{۲Ed}{۲r+d}$　　۴) $\frac{Ed}{۲r+d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ρ فاصله مرکز انحناء (مرکز پولی) تا تار خنثی می‌باشد، که مقدار آن برابر $r+\frac{d}{۲}$ می‌باشد. از طرفی طبق قانون هوک تنش خمشی ماکزیمم در سیم فولادی برابر است با:

$$\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{C}{\rho}=E\times\frac{\frac{d}{۲}}{r+\frac{d}{۲}}=\frac{Ed}{۲r+d}$$

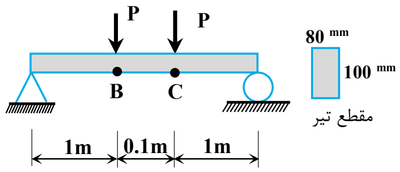
مثال ۴: مقدار P بر حسب kN چقدر باشد، تا افزایش طول BC برابر با $۰/۱mm$ شود؟ (فرض کنید: $BC=۱۰۰\ mm$, $E=۱۲\times۱۰^{۴}\ N/mm^{۲}$)

۱) ۸kN

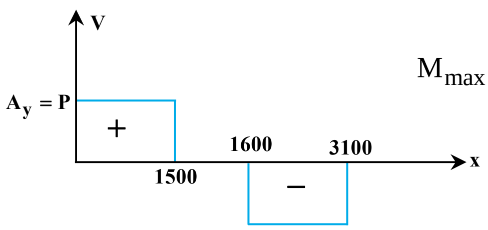
۲) ۱۶kN

۳) ۱۲kN

۴) ۲۴kN



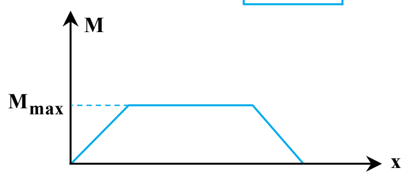
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق نمودار رسم شده در فاصله BC لنگر خمشی داخلی ثابت است، بنابراین برای محاسبه تغییر طول تار BC می‌توان نوشت:



$$M_{max}=A_y\times۱۰۰۰=P\times۱۰۰۰$$

(مقدار لنگر خمشی ماکزیمم در تیر برابر مساحت سطح زیر نمودار نیروی برشی است.)

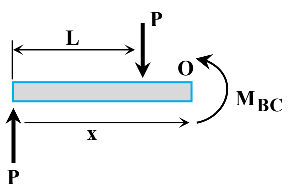
کرنش مقطع BC برابر است با:



$$\varepsilon_{BC}=\frac{\delta_{BC}}{L_{BC}}\Rightarrow\delta_{BC}=\varepsilon_{BC}L_{BC}=\frac{\sigma_{BC}}{E}L_{BC}=\frac{MC}{EI}L_{BC}$$

$$\Rightarrow ۰/۱mm=\frac{(P\times۱۰۰۰)\times۵۰\times۱۰۰}{۱۲\times۱۰^{۴}\frac{N}{mm^{۲}}\times\frac{۱}{۱۲}\times۸۰\times۱۰۰^{۳}mm^{۴}}\Rightarrow P=۱۶۰۰۰\ \ N=۱۶\ KN$$

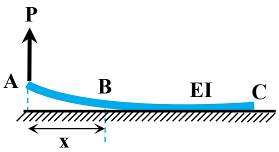
توجه: برای محاسبه لنگر خمشی در قسمت BC می‌توان به روشی دیگر نیز عمل نمود. به این صورت که در این ناحیه یک برش می‌زنیم. (با توجه به تقارن شکل، نیرو در هر تکیه‌گاه برابر P می‌باشد.)



$$\sum M_O=۰\Rightarrow Px-P(x-L)-M_{BC}=۰\Rightarrow M_{BC}=PL\Rightarrow M_{BC}=۱۰۰۰P$$

پس در فاصله BC، لنگر خمشی ثابت است.

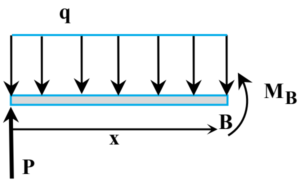
مثال۵: در شکل مقابل مقدار فاصله‌ای که تیر از روی تکیه‌گاه افقی بلند می‌شود مساوی کدام گزینه است؟ (وزن کل تیر مساوی W است.)



۱) $\frac{PL}{W}$ ۲) $\frac{PL}{۲W}$

۳) $\frac{۲PL}{W}$ ۴) $\frac{۳PL}{W}$

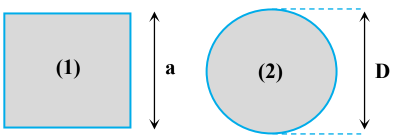
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در صورتی که وزن کل تیر مساوی W باشد، وزن واحد طول آن q، مساوی $\frac{W}{L}$ است. تیر در فاصله AB تحت بار متمرکز P در انتهای A و بارگسترده q در فاصله AB است. از طرفی، طبق مثال قبلی لنگر خمشی در نقطه B مساوی صفر است، بنابراین:



$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow -Px + q\frac{x^۲}{۲} = ۰ \Rightarrow x(\frac{qx}{۲} - P) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲P}{q}$$ جواب قابل قبول

$$\Rightarrow x = \frac{۲P}{\frac{W}{L}} = \frac{۲PL}{W}$$

مثال۶: ممان خمشی مجاز تیر با مقطع مربع چند برابر ممان مجاز تیر دایره‌ای از جنس مشابه و سطح مقطع یکسان می‌باشد.



۱) $\frac{۳}{۲}\sqrt{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{\pi}$

۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$ ۴) π

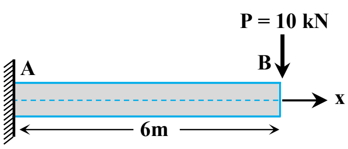
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مساحت‌های دو مقطع ۱ و ۲ طبق فرض مسئله باهم برابرند، لذا :

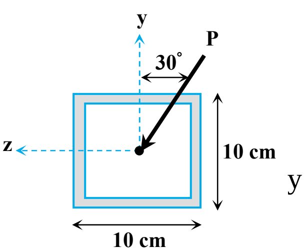
$$A_۱ = A_۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{\pi}{۴}D^۲ \Rightarrow \frac{a}{D} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} \qquad (۱)$$

از طرفی نسبت ممان خمشی قابل تحمل توسط دو مقطع طبق رابطه $\sigma = \frac{MC}{I}$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{M_{\text{مربع}}}{M_{\text{دایره}}} = \frac{\sigma(\frac{I}{C})_{\text{مربع}}}{\sigma(\frac{I}{C})_{\text{دایره}}} = \frac{I_۱ \times C_۲}{I_۲ \times C_۱} = \frac{\frac{۱}{۱۲}a^۴ \times \frac{D}{۲}}{\frac{\pi}{۶۴}D^۴ \times \frac{a}{۲}} \xrightarrow{(۱)} \frac{M_{۱\,\text{مربع}}}{M_{۲\,\text{دایره}}} = \frac{۶۴}{۱۲\pi} \times (\frac{a}{D})^۳ = \frac{۶۴}{۱۲\pi} \times (\frac{\sqrt{\pi}}{۲})^۳ = \frac{۲}{۳}\sqrt{\pi}$$

مثال۷: تیر طره‌ای AB تحت اثر بار متمرکز برابر با $P = ۱۰kN$ مطابق شکل قرار دارد ، با توجه به سطح مقطع تیر که یک قوطی به ضخامت جدار یک سانتی‌متر می‌باشد، شیب محور خنثی (نسبت به محور z ها) و محل تقاطع آن با جداره‌های مقطع، در مقطع A کدام است؟

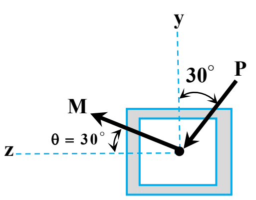




۱) $y = \pm ۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}cm \; , \; \psi = ۳۰°$ ۲) $y = \pm ۵cm \; , \; \psi = ۶۰°$

۳) $y = \pm ۵cm \; , \; \psi = \frac{\pi}{۴}$ ۴) $y = \pm ۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۳} \; , \; \psi = -۶۰°$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» لنگر M ناشی از بار P، بر نیروی مذکور عمود است، در نتیجه زاویه بردار M با محور z، °۳۰ می‌باشد. از طرفی مطابق تقارن مقطع $I_y = I_z$ می‌باشد. اگر فرض شود زاویه تار خنثی با محور z ، ψ باشد مقدار آن برابر است با:

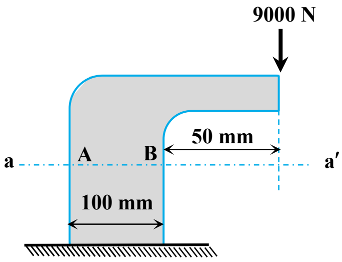


$$\tan\psi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \xrightarrow{I_y = I_z} \tan\psi = \tan ۳۰ \Rightarrow \psi = ۳۰°$$

از طرفی معادله تار خنثی را می‌توان طبق رابطه مقابل نوشت:

$$\tan\psi = \frac{y}{z} \Rightarrow y = \tan\psi \times z \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times z = \pm ۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال۸: ماکزیمم تنش در مقطع aa' در عضوی به شکل زیر چند MPa است؟ (ضخامت ۶۰mm است)



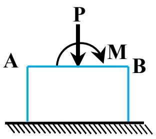
۱) ۷/۵

۲) ۹

۳) ۱۰/۵

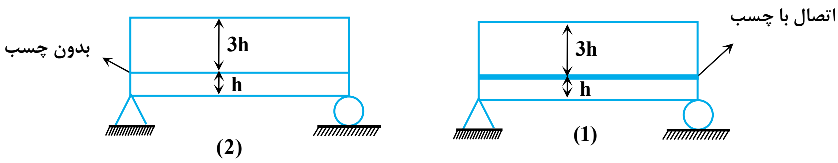
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا نیروی ۹۰۰۰ N به مرکز مقطع منتقل شده که در اثر آن یک لنگر خمشی نیز ایجاد می‌شود. تنش ماکزیمم فشاری در مقطع، ناشی از نیروی P و گشتاور خمشی $\frac{MC}{I}$ می‌باشد، این تنش در نقطه B اتفاق می‌افتد.



$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{۶M}{Ah} = -\frac{۹۰۰۰}{۱۰۰\times۶۰} - \frac{۶\times۹۰۰۰\times(۵۰+۵۰)}{(۱۰۰\times۶۰)\times۱۰۰} = -۱۰/۵\ \text{MPa}$$

مثال۹: از دو الوار چوبی به ارتفاع‌های h و 3h در دو حالت دو تیر ساخته می‌شود. تیر اولی دو الوار در کنار هم قرار گرفته و به یکدیگر چسبیده شده‌اند ولی در تیر دومی الوارها به هم نچسبیده‌اند، در صورتی که تنش مجاز چوب مساوی σ_{all} باشد، نسبت لنگر مجاز تیر (۱) به تیر (۲) مساوی چه مقداری است؟ (عرض مقطع الوارها مساوی b می‌باشد).



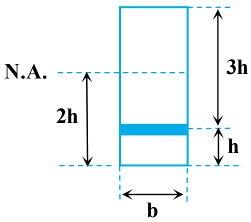
۱) $\frac{۸}{۳}$

۲) $\frac{۸}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۲}{۷}$

۴) $\frac{۱۴}{۹}$

پاسخ: گزینه «۳» در تیر شماره (۱) الوارها به هم چسبیده شده و تیر یکپارچه‌ای تشکیل می‌دهد در این حالت تار خنثی از مرکز سطح مقطع کل تیر عبور می‌کند. بنابراین:



$$\sigma_{max} = \frac{M_۱C_۱}{I_۱} = \frac{M_۱}{S_۱} \Rightarrow M_۱ = \sigma_{max} \times S_۱ = S_۱ \times \sigma_{all} = \frac{۱}{۶}A_۱h_۱ \times \sigma_{all}$$

$$= \frac{۱}{۶}(b\times۴h)\times۴h\times\sigma_{all} \Rightarrow M_۱ = \frac{۸}{۳}bh^۲\sigma_{all} \qquad (۱)$$

اما در تیر شماره (۲) هر الوار به طور جداگانه بخشی از لنگر خمشی خارجی را تحمل می‌کند. در این حالت، هر الوار تار خنثی جداگانه داشته که از مرکز سطح مقطع عرضی‌اش می‌گذرد. اما چون دو الوار تحت بارگذاری عرضی دارای تغییر مکان‌های (خیزهای) مساوی است پس می‌توان آن دو را مانند دو فنر موازی در نظر گرفت که هر الوار متناسب با سختی خمشی EI لنگر خارجی تحمل می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

سهم لنگر خارجی وارد بر الوار به ارتفاع h $\quad M_a = \frac{EI_a}{EI_a + EI_b}M = \frac{\frac{bh^۳}{۱۲}}{\frac{bh^۳}{۱۲} + \frac{b(۳h)^۳}{۱۲}}M = \frac{M}{۲۸} \qquad (۲)$

سهم لنگر خارجی وارد بر الوار به ارتفاع ۳h $\quad M_b = \frac{EI_b}{EI_a + EI_b}M = \frac{\frac{b\times(۳h)^۳}{۱۲}}{\frac{bh^۳}{۱۲} + \frac{b(۳h)^۳}{۱۲}}M = \frac{۲۷M}{۲۸} \qquad (۳)$

اما از طرفی تنش حداکثر در دو الوار همزمان با هم به حد مجاز نمی‌رسند و ممکن است در یک الوار تنش زودتر به حد مجاز برسد، بنابراین لنگر مجاز در تیر دومی به صورت زیر کنترل می‌شود:

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} \Rightarrow M_a = \frac{I_a}{C_a}\times\sigma_{all} = S_a\sigma_{all} = \frac{۱}{۶}bh^۲\sigma_{all} \xrightarrow{(۲)} \frac{M}{۲۸} = \frac{۱}{۶}bh^۲\sigma_{all} \Rightarrow M_۲ = \frac{۱۴}{۳}bh^۲\sigma_{all} \qquad (۴)$$

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} \Rightarrow M_b = \frac{I_b}{C_b}\times\sigma_{all} = \frac{۱}{۶}b(۳h)^۲\sigma_{all} = \frac{۳}{۲}bh^۲\sigma_{all} \xrightarrow{(۳)} \frac{۲۷}{۲۸}M = \frac{۳}{۲}bh^۲\sigma_{all} \Rightarrow M_۲ = \frac{۱۴}{۹}bh^۲\sigma_{all} \qquad (۵)$$

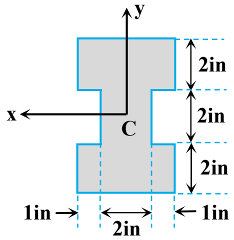
از بین دو جواب به دست آمده برای تیر شماره (۲) جواب کوچک‌تر قابل قبول است.

$$(۴),(۵) \Rightarrow M_۲ = \frac{۱۴}{۹}bh^۲\sigma_{all} \qquad (۶)$$

$$\Rightarrow \frac{(۱)}{(۶)} = \frac{M_۱}{M_۲} = \frac{\frac{۸}{۳}bh^۲\sigma_{all}}{\frac{۱۴}{۹}bh^۲\sigma_{all}} = \frac{۱۲}{۷}$$

مثال ۱۰: اگر ضخامت ناحیه پلاستیک در بالا و پایین مقطع 2in باشد، لنگر خمشی وارد بر مقطع را تعیین کنید.

(مصالح الاستوپلاستیک با $E = ۳۰\times۱۰^۶$ psi و $\sigma_y = ۴۰$ksi است.)

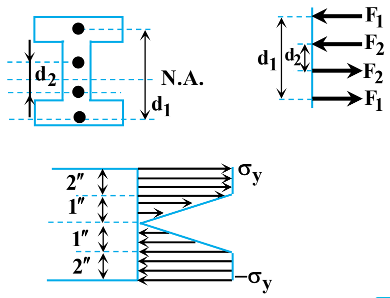


۱) $\frac{۴۰۰۰}{۳}$ kip.in
۲) $\frac{۵۰۰۰}{۳}$ kip.in
۳) $\frac{۱۰۰۰}{۳}$ kip.in
۴) $\frac{۲۰۰۰}{۳}$ kip.in

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$M_P = F_۱d_۱ + F_۲d_۲$$

$F_۱$ نیروی حاصل از تنش در منطقه پلاستیک و $F_۲$ نیروی حاصل از تنش در منطقه الاستیک است. به دلیل تقارن سطح مقطع نیروهای کششی و فشاری با هم برابر می‌باشند.



$$M_P = \sigma_y A_۱ d_۱ + \frac{\sigma_y A_۲}{۲}d_۲$$

$$d_۱ = ۶-(۱+۱) = ۴ \quad , \quad d_۲ = \frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

$$M_P = ۴۰۰۰۰(۲\times۴\times۴ + \frac{۲\times۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}) = ۴\times۱۰^۴\ (۳۲+\frac{۴}{۳}) = ۴\times\frac{۱۰۰}{۳}\times۱۰^۴$$

$$\Rightarrow M_P = \frac{۴۰۰۰}{۳}\text{kip}-\text{in}$$

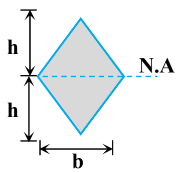
مثال ۱۱: یک تیر با مقطع مستطیل به عرض b، ارتفاع h و طول L تحت اثر ممان خالص مفروض است. چنانچه رفتار ماده تشکیل دهنده آن الاستیک، کاملاً پلاستیک باشد، مطلوب است محاسبه ممانی که کل مقطع به حالت پلاستیک رسیده باشد. (تنش تسلیم ماده را برابر σ_y فرض کنید)

۱) $M_P = \sigma_y\frac{bh^۲}{۸}$
۲) $M_P = \sigma_y\frac{bh^۲}{۲}$
۳) $M_P = \sigma_y\frac{bh^۲}{۴}$
۴) $M_P = ۲\sigma_y bh^۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ضریب شکل که نسبت بین ممان پلاستیک و ممان آغاز تسلیم را مشخص می‌کند برای مقطع مستطیلی مساوی $\frac{۳}{۲}$ است.

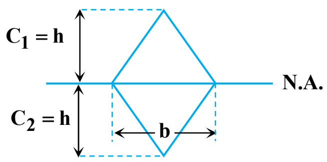
$$K = \frac{M_P}{M_y} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow M_P = \frac{۳}{۲}\times\sigma_y\frac{I}{C} = \frac{۳}{۲}\times\sigma_y\frac{\frac{۱}{۱۲}bh^۳}{\frac{h}{۲}} = \frac{۱}{۴}\sigma_y bh^۲$$

مثال ۱۲: نسبت ممان پلاستیک به ممان خمشی تسلیم لوزی چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه لنگر خمشی آغاز تسلیم می‌توان همچنان از رابطه محاسبه تنش در محدوده ارتجاعی یعنی $\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$ استفاده نمود.

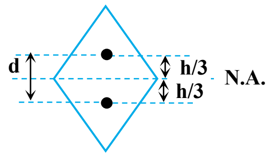


$$M_y = \sigma_y\frac{I}{C} = \sigma_y\times\frac{[۲\times\frac{bh^۳}{۱۲}]}{h} = \sigma_y\frac{bh^۲}{۶}$$

برای محاسبه لنگر خمشی پلاستیک M_P، کافی است نیروهای حاصل از تنش‌های کششی و فشاری را محاسبه کنیم. نیروهای به دست آمده یک زوج نیرو بوده که تولید کوپل خمشی می‌کنند. برای محاسبه کوپل خمشی باید یکی از نیروها در فاصله بین نقاط اثر نیروها به صورت زیر ضرب شود:

$$M_P = Fd = (\sigma_y A)d$$

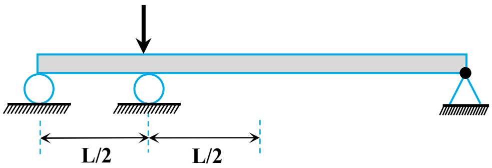
در رابطه فوق A مساحت سطح بالا یا پایین تار خنثی بوده که مقدار آن برابر نصف مساحت یک لوزی می‌باشد. از طرفی d فاصله بین نقاط اثر نیروهای کششی و فشاری است، چون نقطه اثر نیروهای کششی و فشاری بر مرکز سطح مثلث منطبق می‌باشد، بنابراین $d = \frac{2h}{3}$ است.



$$M_P = (\sigma_y b \times \frac{h}{2})\frac{2h}{3} = \sigma_y \frac{bh^2}{3}$$

$$K = \frac{M_P}{M_y} = 2$$

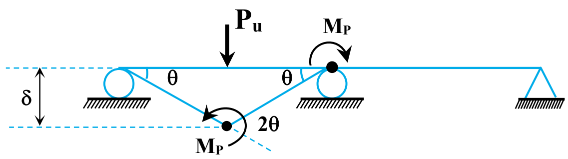
مثال ۱۳: **در تیر پیوسته شکل مقابل مقدار بار نهایی شکست خمشی عبارت است از :**



۱) $\frac{4M_P}{L}$ ۲) $\frac{6M_P}{L}$

۳) $\frac{8M_P}{L}$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ : گزینه «۲» تیر نامعین استاتیکی درجه یک است، بنابراین برای فروپاشی آن نیاز به دو مفصل پلاستیک در طول تیر است. این دو مفصل پلاستیک در طول تیر، تحت بار نهایی P_u ایجاد می‌شود که باعث شکست خمشی تیر می‌شود.

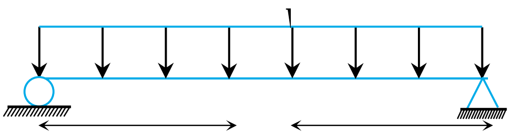


مکان مفصل پلاستیک اول در زیر بار متمرکز بوده و محل مفصل پلاستیک دوم در روی تکیه‌گاه وسطی در نظر گرفته می‌شود. همچنین کار ناشی از نیروی متمرکز مساوی حاصل‌ضرب نیرو در خیز بوده و کار ناشی از ممان پلاستیک مساوی حاصل‌ضرب لنگر در زاویه می‌باشد. با استفاده از کار مجازی، نیروی نهایی به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{L}{2}tg\theta \quad \text{زاویه خیلی کوچکی است} \quad \theta \Rightarrow tg\theta \simeq \theta \Rightarrow \delta = \frac{L}{2}\theta$$

$$P_u \times \delta - M_P(2\theta) - M_P(\theta) = 0 \Rightarrow (P_u)(\frac{\theta L}{2}) - (M_P)(2\theta) - M_P(\theta) = 0 \Rightarrow P_u = \frac{6M_P}{L}$$

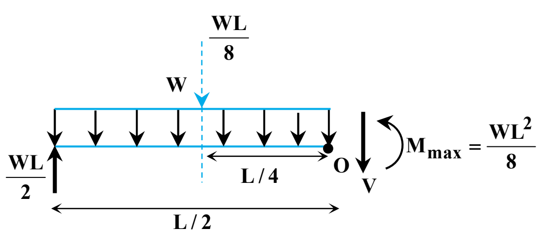
مثال ۱۴: **اگر M_P کل ممان خمشی پلاستیک تیر باشد، حد شدت بارگذاری تیر شکل زیر برابر است با:**



۱) $\frac{8M_P}{L^2}$ ۲) $\frac{4M_P}{L^2}$

۳) $\frac{M_P}{4L^2}$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ : گزینه «۱» گشتاور خمشی ایجاد شده در تیر تحت بارگذاری گسترده در وسط تیر ماکزیمم خواهد شد. برای محاسبه مقدار آن کافی است در وسط تیر برش زده و با نوشتن معادله تعادل برای دیاگرام آزاد نیمی از تیر، لنگر خمشی داخلی را به دست آورد. این لنگر برابر ماکزیمم لنگر خمشی است.

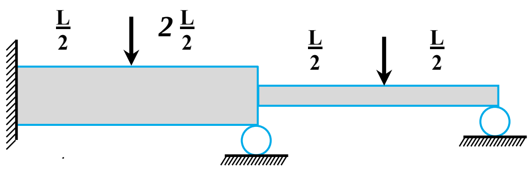


$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M_{max} + \frac{WL}{2}(\frac{L}{4}) - \frac{WL}{2}(\frac{L}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow M_{max} = \frac{WL^2}{8} \Rightarrow W = 8\frac{M_{max}}{L^2} \Rightarrow W_u = \frac{8M_P}{L^2}$$

توجه: بار متمرکز معادل بار گسترده به صورت خطچین در شکل نشان داده شده است.

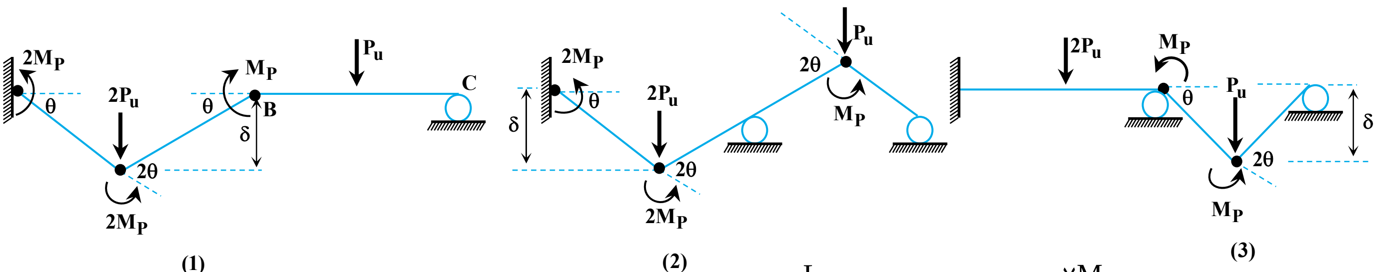
مثال ۱۵: تیری مطابق شکل در یک انتها گیردار است و در دو محل B و C روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد. ممان کامل پلاستیک مقطع در قسمت BC برابر M_P و در قسمت AB برابر $2M_P$ می‌باشد، بار حد تیر برابر است با:



۱) $\frac{8M_P}{L}$ ۲) $\frac{6M_P}{L}$

۳) $\frac{16M_P}{L}$ ۴) $\frac{4M_P}{L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تیر نشان داده شده در صورت مسئله، دارای دو درجه نامعینی است، بنابراین برای ناپایدار شدن نیاز به سه لولای پلاستیک دارد. محل قرارگیری لولاهای پلاستیک در طول تیر می‌تواند متفاوت باشد. برای ناپایداری یا فروپاشی سازه می‌توان سه مکانیزم مختلف زیر را در نظر گرفت، در نهایت مکانیزمی قابل قبول خواهد بود که کمترین بار فروپاشی را پیش‌بینی کند.



حالت (۱) : $2P_u \times \delta + P_u \times 0 = 2M_P \times \theta + 2M_P \times 2\theta + M_P \times \theta \;\Rightarrow\; 2P_u \times \frac{L}{2}\theta = 7M_P\theta \Rightarrow P_u = \frac{7M_P}{L}$

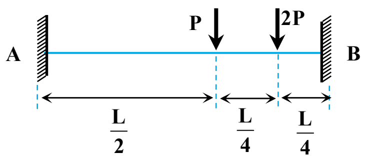
حالت (۲): $2P_u \times \delta - P_u \times \delta = 2M_P \times \theta + 2M_P \times 2\theta + M_P \times 2\theta \;\Rightarrow\; P_u \times \frac{L}{2}\theta = 8M_P\theta \;\Rightarrow\; P_u = \frac{16M_P}{L}$

دلیل منفی شدن جمله دوم عبارت سمت چپ تساوی، آن است که خیز ایجاد شده در محل اثر نیروی P_u خلاف جهت نیروی P_u است به عبارت دیگر خیز به سمت بالا بوده در حالی که نیرو به سمت پایین می‌باشد.

حالت (۳): $2P_u \times 0 + P_u \times \delta = M_P \times \theta + M_P \times 2\theta \;\Rightarrow\; p_u \times \frac{L}{2}\theta = 3M_P\theta \Rightarrow P_u = \frac{6M_P}{L}$

از بین جواب‌های فوق حالت ۳ کمترین بار فروپاشی را پیش‌بینی می‌کند. بنابراین پاسخ مسئله $P_u = \frac{6M_P}{L}$ می‌باشد.

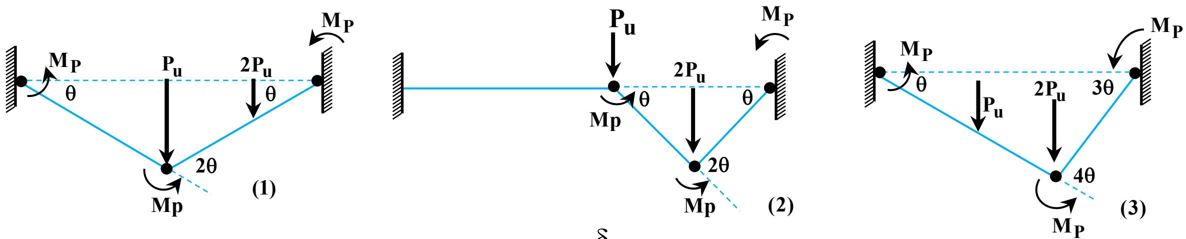
مثال ۱۶: تیر دو سرگیرداری مطابق شکل مفروض می‌باشد، بار بحرانی (نهایی) تیر مساوی کدام گزینه است؟



۱) $\frac{4M_P}{L}$ ۲) $\frac{16M_P}{L}$

۳) $\frac{6M_P}{L}$ ۴) $\frac{8M_P}{L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» سازه نامعین بوده و درجه معینی آن برابر ۲ می‌باشد در نتیجه برای ناپایداری نیاز به ایجاد سه لولای پلاستیک دارد. بنابراین برای فروپاشی سازه شکل فوق می‌توان سه مکانیزم مطابق شکل در نظر گرفت:



در مکانیزم (۱) اگر نیروی P_u خیزی برابر δ دارد، نیروی $2P_u$ خیزی برابر $\frac{\delta}{2}$ خواهد داشت. از طرفی δ ضلع روبروی زاویه θ بوده و برابر است با:

$$\delta = \frac{L}{2}tg\theta = \frac{L}{2}\theta$$

$$\text{حالت (۱)}: M_P\times\theta+M_P\times ۲\theta+M_P\times\theta=P_u\times\theta\frac{L}{۲}+۲P_u\times\theta\frac{L}{۴}\Rightarrow ۴M_P\theta=P_u\theta L\Rightarrow P_u=\frac{۴M_P}{L}$$

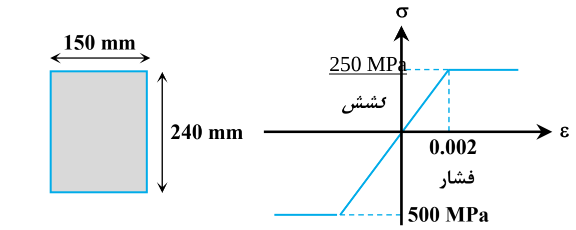
در مکانیزم (۲) نیروی P_u خیزی نداشته و کاری انجام نمی‌دهد در حالی که نیروی $۲P_u$ خیزی برابر δ خواهد داشت و مقدار δ برابر $\delta=\frac{L}{۴}\theta$ خواهد بود.

$$\text{حالت (۲)}: M_P\times\theta+M_P\times ۲\theta+M_P\times\theta=P_u\times ۰+۲P_u\times\theta\frac{L}{۴}\Rightarrow ۴M_P\theta=P_u\times\theta\frac{L}{۲}\Rightarrow P_u=\frac{۸M_P}{L}$$

در مکانیزم (۳) نیروی P_u خیزی برابر δ داشته در حالی که $۲P_u$ خیزی برابر $۱/۵\delta$ دارد.

$$\text{حالت (۳)}: M_P\times\theta+M_P\times ۴\theta+M_P\times ۳\theta=P_u\times\frac{L}{۲}\theta+۲P_u\times ۳\theta\frac{L}{۴}\Rightarrow ۸M_P\theta=۲P_uL\theta\Rightarrow P_u=\frac{۴M_P}{L}$$

مثال ۱۷: مقطع مربع مستطیل نشان داده شده در شکل (الف) تحت تأثیر لنگر خمشی M به طوری قرار گرفته که تنش فشاری ایجاد شده در تار بالایی مقطع MPa ۵۰۰ می‌باشد، چنانچه منحنی تنش ـ کرنش برای ماده مطابق شکل (ب) باشد، محل محور خنثی از تار بالایی کدامیک از مقادیر زیر می‌باشد؟

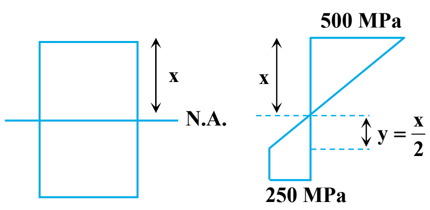


(الف)　　(ب)

۱) $\frac{۴۰۰}{۳}$ mm　　۲) $\frac{۳۲۰}{۳}$ mm

۳) $\frac{۵۰۰}{۳}$ mm　　۴) $\frac{۴۱۰}{۳}$ mm

پاسخ: گزینه «۲» چون تیر تحت خمش خالص قرار گرفته است در نتیجه برآیند نیروی محوری وارد بر مقطع تیر صفر بوده و $\sum F=۰$ می‌باشد. به دلیل آن که تنش تسلیم در کشش و فشار متفاوت است، از این‌رو توزیع تنش متقارن نمی‌باشد اما با وجود این برآیند نیروها باید صفر باشد. اگر فاصله تار خنثی از تار بالایی x باشد در نتیجه داریم:



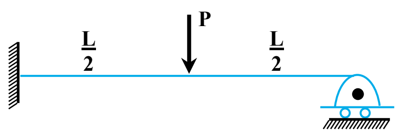
$$\sum F=۰\Rightarrow\sum\sigma_iA_i=۰\qquad \frac{۵۰۰}{۲۵۰}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰۰\times(\frac{۱}{۲}\times ۱۵۰\times x)-(\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{۲}\times ۱۵۰)\times ۲۵۰-۲۵۰\times(۲۴۰-x-\frac{x}{۲})\times ۱۵۰=۰$$

$$\Rightarrow ۵۰۰\times ۷۵x-\frac{۱}{۴}\times ۲۵۰\times ۱۵۰x+۲۵۰\times ۱۵۰\times\frac{۳}{۲}x=۲۵۰\times ۲۴۰\times ۱۵۰$$

$$\Rightarrow x(۵۰۰\times ۷۵-\frac{۱}{۴}\times ۲۵۰\times ۱۵۰+۲۵۰\times ۱۵۰\times\frac{۳}{۲})=۲۵۰\times ۲۴۰\times ۱۵۰\Rightarrow x=\frac{۳۲۰}{۳}\text{mm}$$

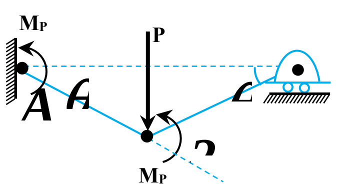
مثال ۱۸: بار حد تیر نشان داده شده کدام است؟



۱) $\frac{M_P}{L}$　　۲) $\frac{۴M_P}{L}$

۳) $\frac{۶M_P}{L}$　　۴) $\frac{۸M_P}{L}$

پاسخ: گزینه «۳» چون تیر نامعین از درجه یک است برای ناپایداری تیر کافی است دو مفصل پلاستیک در طول تیر در نقاط A و B ایجاد شود. (نقاط B,A نقاطی هستند که لنگر خمشی در آن‌ها ماکزیمم است.) اگر خیز تیر در نقطه اثر نیروی P ، برابر δ باشد، می‌توان نوشت:



$$\delta=\frac{L}{۲}\tan\theta\xrightarrow{\text{به دلیل کوچکی زاویه }\theta\text{ می‌توان نوشت: }tg\theta\simeq\theta}\delta=\frac{L}{۲}\theta$$

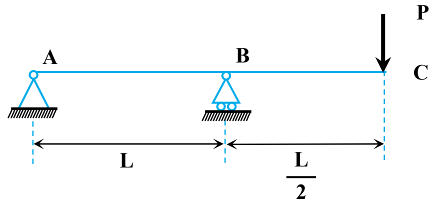
$$\text{رابطه کار مجازی}: M_P\times ۲\theta+M_P\times\theta-P_u\frac{L}{۲}\times\theta=۰\Rightarrow P_u=\frac{۶M_P}{L}$$

فصل چهارم

« برش »

تست‌های تألیفی فصل چهارم

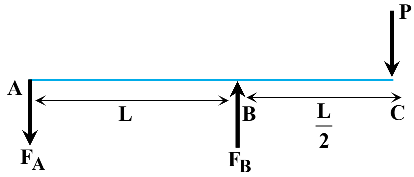
مثال ۱: مقطع تیر شکل زیر I می‌باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم در قسمت AB به تنش برشی ماکزیمم در قسمت BC چقدر است؟



۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$

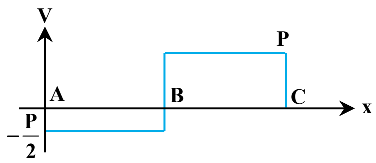
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون سطح مقطع تیر ثابت است، بنابراین نسبت تنش برشی ماکزیمم در قسمت AB بـه قسـمت BC مسـاوی نسـبت نیروهـای برش آن‌ها می‌باشد. برای تعیین نسبت تنش برشی در مقاطع مذکور بهتر است نمـودار تغییـرات نیـروی برشـی مطـابق شـکل رسـم شـود. ابتـدا نیروهـای تکیه‌گاهی تعیین می‌شوند:



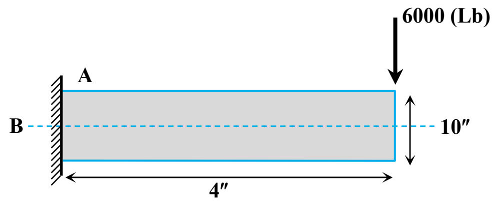
$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow P\times\frac{L}{۲} = F_A \times L \Rightarrow F_A = \frac{P}{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow P + F_A = F_B \Rightarrow F_B = \frac{۳P}{۲}$$



$$\frac{\tau_{max_{AB}}}{\tau_{max_{BC}}} = \frac{\frac{V_{AB}Q}{It}}{\frac{V_{CD}Q}{It}} \Rightarrow \frac{\tau_{max_{AB}}}{\tau_{max_{BC}}} = \frac{V_{AB}}{V_{BC}} = \frac{\frac{P}{۲}}{P} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۲: قطعه‌ی یک سر درگیری به طول $4''$ دارای سطح مقطع مربع مستطیل به ابعاد $10''\times 2''$ باری معادل ۶۰۰۰ پوند را تحمل می‌کند، حداکثر تـنش برشی در مقطع $A-A$ معادل چند PSI است؟

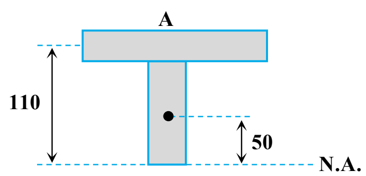


۱) صفر

۳) ۳۶۰

۲) ۳۰۰

۴) ۴۵۰



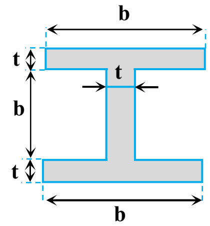
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل در روی تار خنثی به وقوع پیوسته و مقدار آن برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} = \frac{۳}{۲}\times\frac{۶۰۰۰}{۲\times۱۰} = ۴۵۰$$

مثال ۳: در کدامیک از مقاطع زیر حداکثر تنش برشی در روی محور خنثی ظاهر نمی‌شود؟

۱) ناودانی‌شکل   ۲) تی‌شکل   ۳) دایره‌شکل توخالی   ۴) لوزی‌شکل توپر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در بین مقاطع مرسوم، مثلث و لوزی جزء مقاطعی هستند که تنش برشی بر روی تار خنثی آن‌ها ماکزیمم نیست. (به متن درس رجوع شود)



مثال۴: مقدار تنش برشی ماکزیمم در مقطع I، شکل مقابل برابر کدامیک از گزینه‌ها است؟

۱) $\frac{15}{8}\frac{V}{A}$ ۲) $\frac{45}{8}\frac{V}{A}$

۳) $\frac{45}{4}\frac{V}{A}$ ۴) $\frac{15}{4}\frac{V}{A}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنش برشی در مقطع I شکل، در روی تار خنثی به حداکثر مقدار خود می‌رسد، چـرا کـه در روی تـار خنثـی، ممـان اسـتاتیک Q دارای حداکثر مقدار بوده از طرفی ضخامت مقطع در روی تار خنثی حداقل می‌باشد.

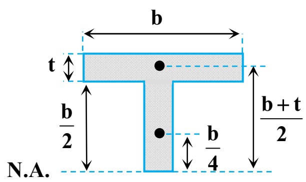
بنابراین با یک محاسبه ساده می‌توان مقدار تنش برشی ماکزیمم را به دست آورد. ابتدا ممان اینرسی کل مقطع حول تار خنثی با اسـتفاده از قضیـه انتقـال محاسبه می‌شود.

$$I=\frac{1}{12}tb^3+2[\frac{1}{12}bt^3+(bt)(\frac{b}{2}+\frac{t}{2})^2]\Rightarrow I=\frac{1}{12}tb^3+\frac{1}{6}bt^3+\frac{1}{4}bt(b+t)^2=\frac{1}{12}tb^3+\frac{1}{6}bt^3+\frac{1}{4}b^3t+\frac{b^2t^2}{2}+\frac{bt^3}{4}$$

به دلیل کوچکی مقدار ضخامت مقطع t، از جملات شامل توان‌های بالاتر از یک آن صرف‌نظر می‌شود. بنابراین نتیجه ساده شده ممان اینرسی برابر است با:

$$I=\frac{1}{3}tb^3 \qquad (1)$$

اما برای محاسبه ممان استاتیک Q، سطح بالای تار خنثی هاشور زده شده سپس توسط رابطه زیر مقدار آن محاسبه می‌گردد.



$$Q_{max}=A_1\bar{y}_1+A_2\bar{y}_2=(\frac{b}{2}t)\frac{b}{4}+(bt)\frac{(b+t)}{2}$$

می‌توان از مقدار $\frac{bt^2}{2}$ به دلیل کوچکی مقدار t صرفنظر نمود. $(\frac{bt^2}{2}\to 0)$

$$\Rightarrow Q_{max}=\frac{b^2t}{8}+\frac{b^2t}{2}+\frac{bt^2}{2}\simeq\frac{5}{8}b^2t$$

با جایگذاری مقادیر (۱) و (۲) در رابطه زیر مقدار تقریبی تنش برشی ماکزیمم به دست می‌آید:

$$\tau_{max}=\frac{VQ_{max}}{It}=\frac{V\times\frac{5}{8}b^2t}{\frac{1}{3}tb^3\times t}=\frac{15}{8}\frac{V}{bt}$$

اما مساحت سطح مقطع کل برابر $A=3bt$ می‌باشد بنابراین نتیجه ساده شده را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$\tau_{max}=\frac{15}{8}\times\frac{V}{\frac{A}{3}}=\frac{45}{8}\frac{V}{A}$$

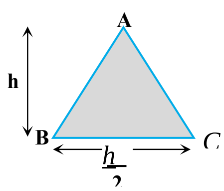
مثال۵: در یک مقطع مستطیل شکل به عرض b و ارتفاع h نیروی برشی قائم V وارد می‌آید. نسبت تنش برشی ماکزیمم به تنش برشـی متوسـط برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق توضیحات متن درس، تنش برشی ماکزیمم در یک مقطع مستطیلی برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{V}{A}=\frac{3}{2}\tau_{ave}\Rightarrow\frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}}=\frac{3}{2}$$

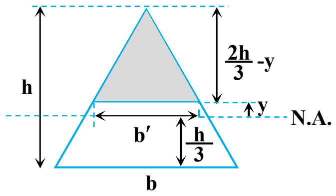
مثال۶: مقطع یک تیر به صورت یک مثلث متساوی‌الساقین است، که ابعاد آن روی شکل داده شده است. محل حداکثر تنش برشی ناشی از نیروی برشی قائم V کدامیک از مقادیر داده شده می‌باشد؟ $(\tau=\frac{VQ}{It})$



۱) به فاصله $\frac{2h}{It}$ از A   ۲) به فاصله‌ی $\frac{h}{2}$ از BC

۳) به فاصله‌ی $\frac{h}{3}$ از BC   ۴) به فاصله‌ی $\frac{2h}{3}$ از BC

پاسخ: گزینه «۲» تنش برشی ناشی از نیروی برش در هر نقطه از یک مقطع برابر است با:



$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

در رابطه فوق مقادیر V و I در یک مقطع ثابت می‌باشد، اما Q و t متغیرهای رابطه می‌باشند.

چون ضخامت t متغیر است، تنش برشی در صورتی ماکزیمم خواهد بود که نسبت $\frac{Q}{t}$ ماکزیمم شود. به این منظور در یک فاصله دلخواه y از تار خنثی این نسبت برابر خواهد بود با $\frac{Q}{t} = \frac{A\bar{y}}{t}$.

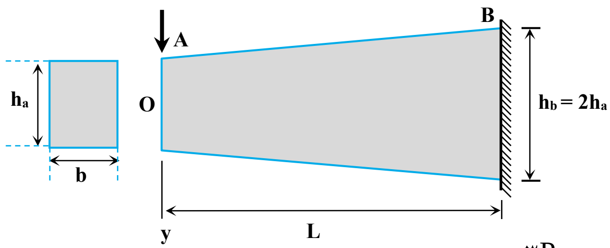
اما چون ارتفاع مثلث برابر $\frac{2h}{3} - y$ می‌باشد، بنابراین فاصله مرکز سطح مثلث هاشور خورده از تار خنثی برابر $y + \frac{\frac{2h}{3} - y}{3}$ می‌باشد.

از طرفی عرض مثلث هاشور خورده در روی قاعده، t برابر b' می‌باشد. در نتیجه:

$$\frac{Q}{t} = \frac{A\bar{y}}{t} = \frac{(b' \times \frac{\frac{2h}{3} - y}{2}) \times (y + \frac{\frac{2h}{3} - y}{3})}{b'} = \frac{(\frac{2h}{3} - y)}{2} \times \frac{(\frac{2h}{3} + 2y)}{3} \Rightarrow \frac{Q}{t} = \frac{\frac{4h^2}{9} + \frac{2hy}{3} - 2y^2}{6}$$

$$\frac{d(\frac{Q}{t})}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{2h}{3} - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{6}\ (\text{فاصله از تار خنثی}) \Rightarrow \frac{h}{6} + \frac{h}{3} = \frac{h}{2}\ (\text{فاصله از قاعده})$$

مثال ۷: **تیر غیرمنشوری نشان داده شده دارای مقطع عرضی ثابت و ارتفاع متغیر در طول خود می‌باشد. چنانچه ارتفاع تیر به صورت خطی تغییر کند کدام عبارت درباره توزیع تنش‌های برشی در این تیر نادرست می‌باشد؟**



۱) در مقطع A تنش حداکثر برشی در نصف ارتفاع مقطع رخ داده و مقدار آن برابر $\frac{3P}{2bh_a}$ می‌باشد.

۲) در مقطع B تنش حداکثر برشی در نصف ارتفاع مقطع رخ داده و مقدار آن برابر $\frac{2P}{3bh_a}$ می‌باشد.

۳) توزیع تنش برشی در وسط دهانه تیر به صورت یکنواخت بوده و مقدار آن برابر $\frac{2P}{3bh_a}$ می‌باشد.

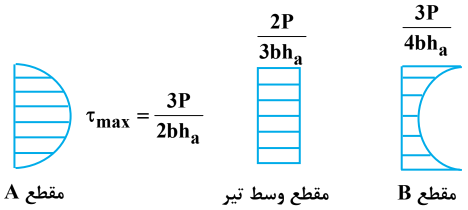
۴) به طور کلی توزیع تنش در این تیر نه تنها به نیروی برشی بلکه به لنگر خمشی M و شدت تغییر h نسبت به x نیز بستگی دارد.

پاسخ: گزینه «۲» توزیع تنش برشی در مقاطع با ارتفاع متغیر (تیرهای غیرمنشوری) توسط رابطه $\tau = \frac{VQ}{It} + \frac{Mh}{4I}(1 - \frac{Qh}{I})\frac{dh}{dx}$ به دست می‌آید.

تنش برشی در مقطع A مساوی است با: $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh_a}$

و تنش برشی در مقطع B مساوی است با: $\tau_{max} = \frac{3P}{4bh_a}$

و تنش برشی ماکزیمم در وسط تیر مساوی است با: $\tau_{max} = \frac{2P}{3bh_a}$



از طرفی تنش برشی در این تیرها به مقدار لنگر خمشی بستگی دارد. لذا در بین گزینه‌ها، تنها گزینه (۲) صحیح نمی‌باشد.