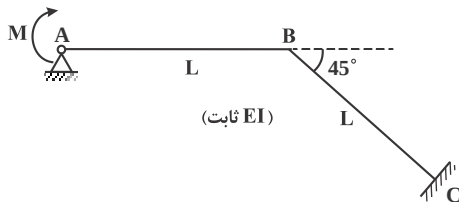


فصل هشتم

« بررسی سازه‌های نامعین به روش نیرو و استفاده از روابط حفظی »

مثال ۱: دوران نقطه A در اثر لنگر M در نقطه A چقدر است؟ (از تغییر شکل محوری اعضا صرف نظر می شود) (مهندسی عمران - آزاد ۸۰)

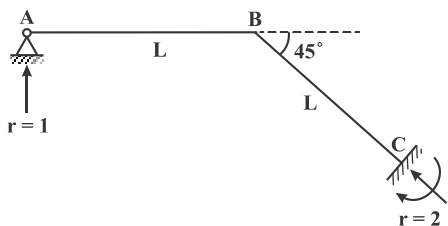


$$\frac{2ML}{3EI} \quad (2) \quad \frac{2ML}{5EI} \quad (1)$$

$$\frac{2ML}{7EI} \quad (4) \quad \frac{2ML}{7EI} \quad (3)$$

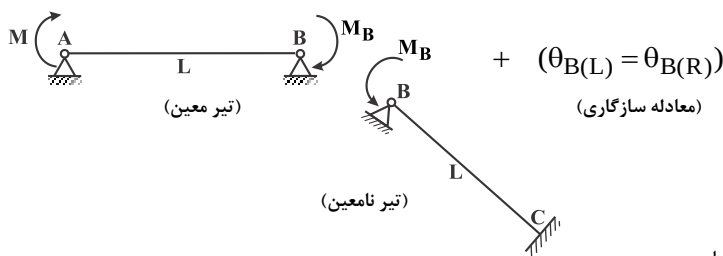
پاسخ: گزینه «۳» همان طور که مشاهده می شود این تیر از اتصال دو قسمت AB و BC به صورت پیوسته در نقطه B تشکیل شده است. بنابراین تیر نامعین است و با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی تیر را بدست می آوریم:



$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + 2) \Rightarrow DI = 3 - (0 + 2) = 1$$

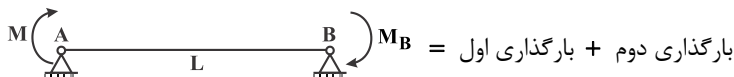
بنابراین تیر یک درجه نامعین است.



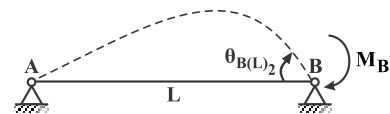
مرحله دوم: برای تبدیل تیر یک درجه نامعین ABC به یک تیر معین AB و یک تیر نامعین BC که به صورت پیوسته در نقطه B اتصال دارند، می توان تیرها را از نقطه B جدا نمود و برای هر دو تیر در این نقطه یک تکیه گاه مفصلی با لنگرهای مختلف الجهد M در نظر گرفت و معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف نمود:

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)}$ به صورت زیر داریم:

تیر AB:

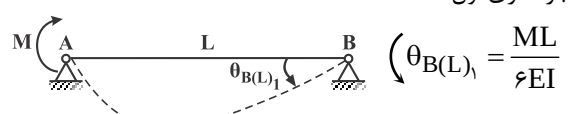


بارگذاری دوم:



$$\theta_{B(L)2} = \frac{M_B L}{2EI}$$

بارگذاری اول:

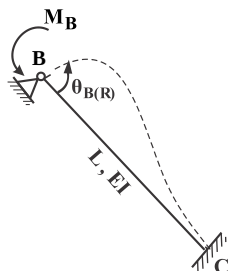


$$\theta_{B(L)1} = \frac{ML}{6EI}$$

$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(L)1} + \theta_{B(L)2} \Rightarrow \theta_{B(L)} = \frac{-ML}{6EI} + \frac{M_B L}{2EI}$$

بنابراین دوران نقطه B در تیر AB برابر است با:

تیر BC:

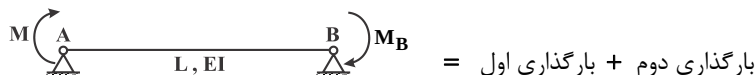


$$\theta_{B(R)} = \frac{M_B L}{4EI} \quad \text{روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار}$$

بنابراین با حل معادله سازگاری به صورت زیر مقدار لنگر M_B برابر است با:

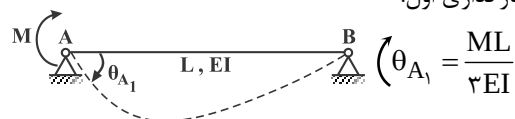
$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)} \Rightarrow \frac{-ML}{6EI} + \frac{M_B L}{2EI} = \frac{M_B L}{4EI} \Rightarrow \frac{7M_B L}{12EI} = \frac{ML}{6EI} \Rightarrow M_B = \frac{2M}{7}$$

در نهایت مقدار دوران در نقطه A به صورت زیر تعیین می شود:

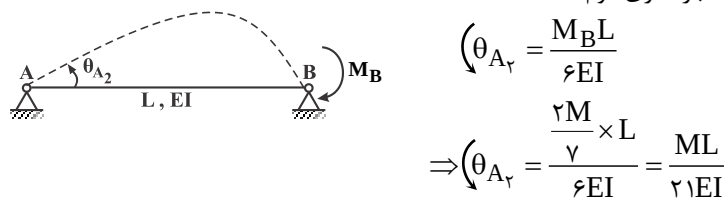




بارگذاری اول:



بارگذاری دوم:

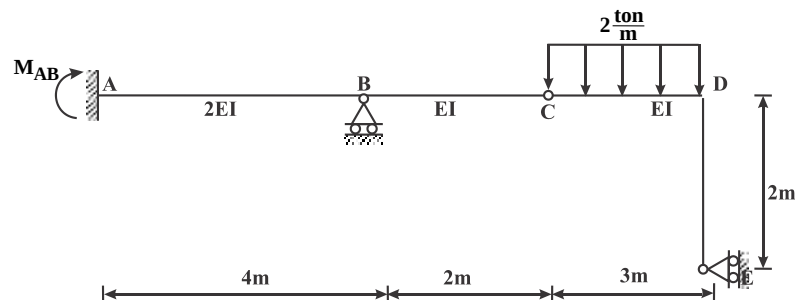


$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{Ar} \Rightarrow \theta_A = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{3EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{2ML}{3EI}$$

بنابراین دوران نقطه A برابر است با:

(مهندسی عمران - سراسری ۸۱)

مثال ۲: میزان M_{AB} بر حسب ton.m چقدر است؟



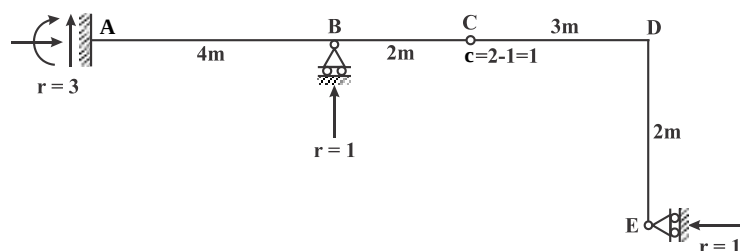
(۱) ۱۲

(۲) ۶

(۳) ۴/۵

(۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشخص است که این سازه نامعین است. سپس برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} می‌توان با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر نوشت:



مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

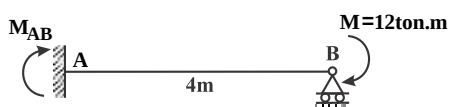
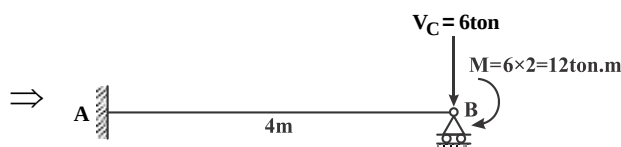
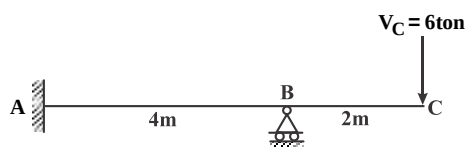
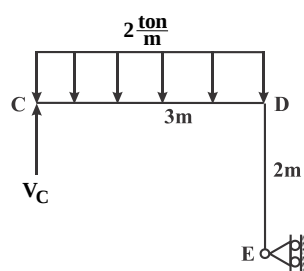
$$\begin{cases} c = 1 \\ k = 0 \\ r = 3 + 1 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) = (5 + 0) - (1 + 3) = 1$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: حال برای محاسبه مقدار لنگر تکیه‌گاه گیردار A می‌توان ابتدا سازه را از نقطه C جدا نمود و سپس نیروی برش در نقطه C را به نقطه B انتقال داد تا بارگذاری‌های وارد بر تیر نامعین یک سر گیردار و یک سر مفصل AB مشخص گردد:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - (3 \times 2) = 0 \Rightarrow V_C = 6 \text{ ton}$$

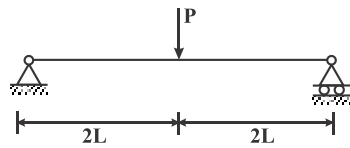


مرحله سوم: بنابراین برای تیر نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار با استفاده از روابط حفظی مربوطه به آن، می‌توان مقدار لنگر M_{AB} را تعیین کرد:

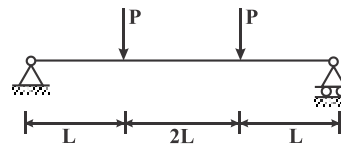
$$M_{AB} = \frac{M}{2} \Rightarrow M_{AB} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ton.m}$$

توجه داشته باشید به علت اینکه نیروی V_C دقیقاً روی تکیه‌گاه غلتکی B اعمال شده است و تمام سهم آن به عکس‌العمل تکیه‌گاه C یعنی R_C می‌رسد، بنابراین در محاسبه لنگر تکیه‌گاه A نقشی ندارد.

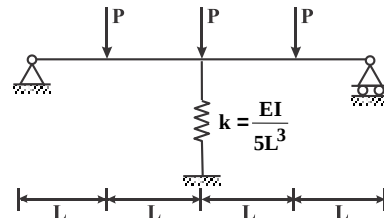
مثال ۳: اگر تغییر شکل حداکثر مربوط به حالت‌های (الف) و (ب) مطابق زیر داده شده باشد، نیروی به وجود آمده در تکیه‌گاه فنی در حالت (ج) چقدر خواهد بود؟



$$\Delta_{\max} = \frac{4PL^3}{3EI} \quad (ب)$$



$$\Delta_{\max} = \frac{11PL^3}{6EI} \quad (الف)$$



(ج)

$$\frac{3P}{2} \quad (۴)$$

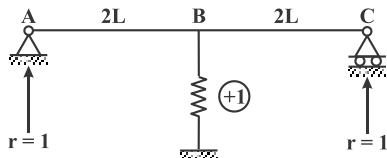
$$\frac{P}{2} \quad (۳)$$

$$2P \quad (۲)$$

$$P \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در شکل (ج) مشاهده می‌شود که این سازه نامعین است و از اتصال تیر معین و فنر انتقالی تشکیل شده است. از طرفی مشاهده می‌شود که بارگذاری (ج) برابر با مجموع بارگذاری‌های (الف) و (ب) می‌باشد. پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

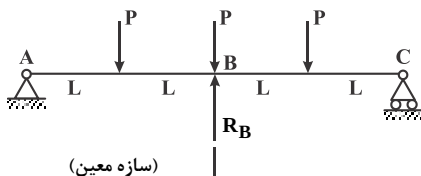
مرحله اول: درجه نامعینی سازه برابر است با:



$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow DI = [r - (c + 2)] + 1 \Rightarrow DI = [2 - (0 + 2)] + 1 = 1$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به یک سازه معین کافی است فنر انتقالی را از سازه جدا کرده و معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف نماییم:

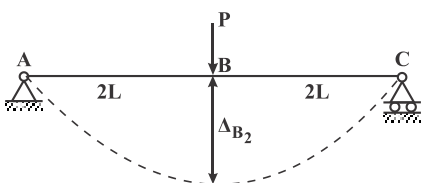


$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{R_B}{k}$$

$$+ \quad (\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}) \quad \text{(معادله سازگاری)}$$

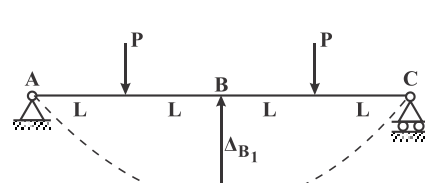
مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری فنر $\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}$ به صورت زیر داریم:

$$= \text{بارگذاری } R_B + \text{بارگذاری (ب)} + \text{بارگذاری (الف)}$$



بارگذاری (ب):

$$\downarrow \Delta_{B_2} = \frac{4PL^3}{3EI}$$



بارگذاری (الف):

$$\downarrow \Delta_{B_1} = \frac{11PL^3}{6EI}$$

بارگذاری R_B :

$$\uparrow \Delta_{B_3} = \frac{R_B(4L)^3}{48EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{B_3} = \frac{R_B(64L^3)}{48EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{B_3} = \frac{4R_B L^3}{3EI}$$

بنابراین تغییر مکان نقطه B برابر است با:

$$\Delta_B = \downarrow \Delta_{B_1} + \downarrow \Delta_{B_2} + \uparrow \Delta_{B_3} \Rightarrow \Delta_B = \frac{11PL^3}{6EI} + \frac{4PL^3}{3EI} - \frac{4R_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{11PL^3}{6EI} + \frac{8PL^3}{3EI} - \frac{4R_B L^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{11PL^3}{6EI} - \frac{4R_B L^3}{3EI}$$

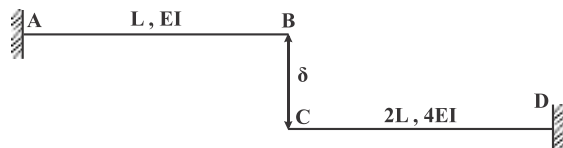


حال معادله سازگاری را به صورت زیر حل می‌نماییم:

$$\Delta_B = \Delta_{\text{فتر}} \Rightarrow \frac{19PL^3}{6EI} - \frac{4R_B L^3}{3EI} = \frac{R_B}{EI} \Rightarrow \frac{19PL^3}{6EI} = \frac{\Delta_B R_B L^3}{EI} + \frac{4R_B L^3}{3EI} \Rightarrow \frac{19PL^3}{6EI} = \frac{19R_B L^3}{3EI} \Rightarrow R_B = \frac{P}{2}$$

مثال ۴: تیر طره‌ای AB و CD مطابق شکل فاصله $\delta = 0.1L$ از یکدیگر دارند، اگر با استفاده از جک دو تیر به یکدیگر مفصل شوند، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A کدام است؟

(مهندسی عمران - آزاد ۸۱)



$$\frac{0.02EI}{L^2} \quad (2)$$

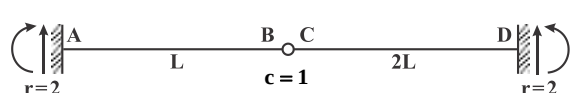
$$\frac{0.01EI}{L^2} \quad (1)$$

$$\frac{0.01EI}{3L^2} \quad (4)$$

$$\frac{0.03EI}{L^2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود دو تیر معین AB و CD به فاصله δ از هم قرار دارند و اگر نقاط B و C به هم متصل شوند یک مفصل ایجاد می‌گردد و در این صورت سازه ABCD نامعین می‌شود. پس با انجام مراحل زیر و با استفاده از روش نیرو داریم:

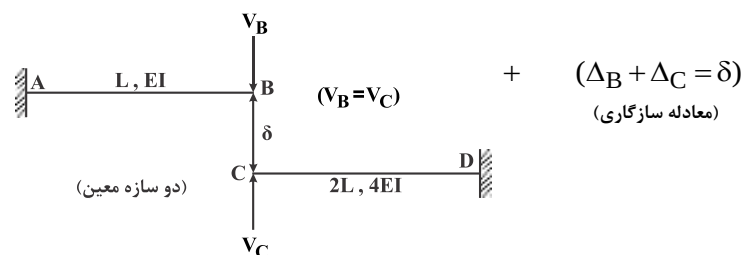
مرحله اول: درجه نامعینی سازه ABCD را بعد از اتصال مفصلی در نقطه‌های B و C به صورت زیر به دست می‌آوریم:



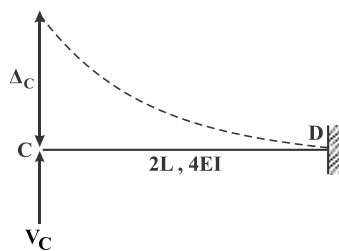
$$\begin{cases} c=1 \\ r=2+2=4 \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c+2) \Rightarrow DI = 4 - (1+2) = 1$$

بنابراین سازه حاصل یک درجه نامعین است.

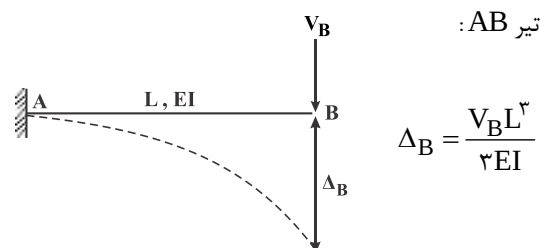
مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به دو سازه معین که با فاصله δ از هم قرار دارند، معادله سازگاری زیر را تعریف می‌نماییم:



مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_B + \Delta_C = \delta$ به صورت زیر داریم:

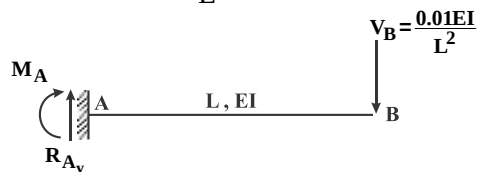


$$\Delta_C = \frac{V_C (2L)^3}{3(4EI)} \Rightarrow \Delta_C = \frac{V_C (8L^3)}{12EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{2V_C L^3}{3EI}$$



بنابراین با حل معادله سازگاری، مقدار نیروی V_B یا V_C به دست می‌آید:

$$\Delta_B + \Delta_C = \delta \Rightarrow \frac{V_B L^3}{3EI} + \frac{2V_C L^3}{3EI} = \delta \xrightarrow{\delta = 0.1L} \frac{V_B L^3}{3EI} + \frac{2V_B L^3}{3EI} = 0.1L \Rightarrow \frac{V_B L^3}{EI} = 0.1L \Rightarrow V_B = V_C = \frac{0.1EI}{L^2}$$



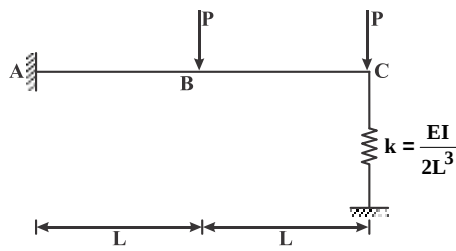
حال برای محاسبه عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A می‌توان نوشت:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - V_B = 0 \Rightarrow R_{Ay} = V_B = \frac{0.1EI}{L^2}$$



(مهندسی عمران - سراسری ۸۳)

مثال ۵: در شکل زیر نیروی ایجاد شده در فنر کدام است؟ (EI ثابت است)



$$\frac{3P}{2} \quad (2)$$

(1) P

$$\frac{3P}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3P}{8} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه نامعین از اتصال یک سازه معین و پایدار ABC با یک فنر انتقالی تشکیل شده است.

بنابراین با استفاده از روش نیرو سازه نامعین را به صورت زیر تحلیل می‌نماییم:

مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

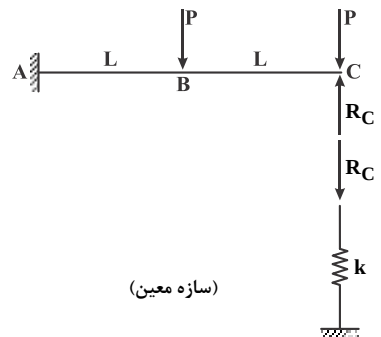


$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow DI = [r - (c + 2)] + 1 \Rightarrow DI = [2 - (0 + 2)] + 1 = 1$$

بنابراین سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل این سازه یک درجه نامعین به سازه معین کافی است قید فنر

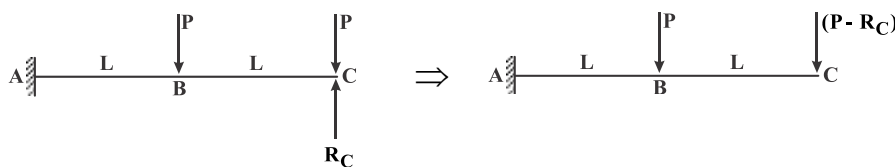
انتقالی را حذف کرده و با قرار دادن عکس‌العمل آن در نقطه C، معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف کنیم:



$$\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}} \quad (\text{معادله سازگاری})$$

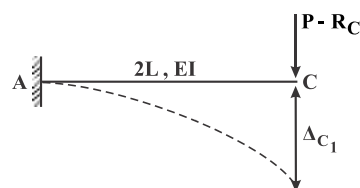
$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{R_C}{k}$$

مرحله سوم: حال معادله سازگاری ($\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}}$) را براساس سازه معین حاصل شده به صورت زیر حل می‌کنیم:



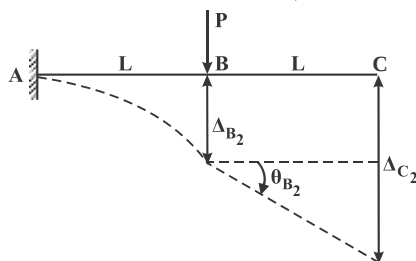
$$= \text{بارگذاری دوم} + \text{بارگذاری اول}$$

بارگذاری اول:



$$\downarrow \Delta_{C_1} = \frac{(P - R_C)(2L)^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_1} = \frac{8(P - R_C)L^3}{3EI}$$

بارگذاری دوم:



$$\Delta_{B_2} = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{و} \quad \theta_{B_2} = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\downarrow \Delta_{C_2} = \Delta_{B_2} + (\theta_{B_2} \times L)$$

$$\downarrow \Delta_{C_2} = \frac{PL^3}{3EI} + \left(\frac{PL^2}{2EI} \times L \right) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_2} = \frac{5PL^3}{6EI}$$

پس تغییر مکان نقطه C برابر است با:

$$\Delta_C = \downarrow \Delta_{C_1} + \downarrow \Delta_{C_2} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{8(P - R_C)L^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{6EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{8PL^3}{3EI} - \frac{8R_C L^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{6EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{8R_C L^3}{3EI}$$

حال با قرار دادن Δ_C بدست آمده در معادله سازگاری، مقدار نیروی فنر (R_C) تعیین می‌شود:

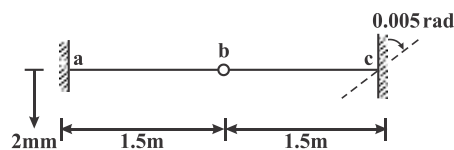
$$\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}} \xrightarrow{\Delta_{\text{فنر}} = \frac{R_C}{k}} \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{8R_C L^3}{3EI} = \frac{R_C}{\frac{EI}{2L^3}} \Rightarrow \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{8R_C L^3}{3EI} = \frac{2R_C L^3}{EI} \Rightarrow \frac{7PL^3}{2EI} = \frac{14R_C L^3}{3EI} \Rightarrow R_C = \frac{3P}{4}$$



مثال ۶: در تیر شکل زیر نشست و چرخش تکیه‌گاهی نشان داده شده بر سازه اثر کرده است. لنگر در تکیه‌گاه a چند kg.m است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۸۳)

$$(EI = 135 \text{ ton.m}^2)$$



$$405 \text{ (۱)}$$

$$495 \text{ (۲)}$$

$$855 \text{ (۳)}$$

$$945 \text{ (۴)}$$

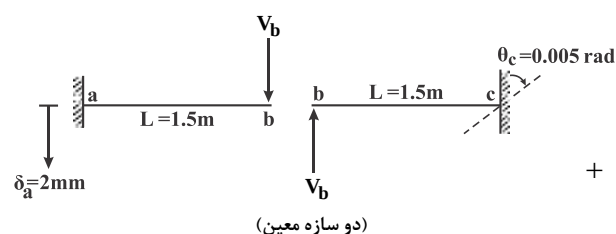
پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در شکل صورت سؤال می‌توان گفت که این تیر نامعین است و از اتصال دو تیر معین ab و bc توسط مفصل خمشی b تشکیل شده است. از طرفی تکیه‌گاه a دارای نشست و تکیه‌گاه c دارای دوران است. بنابراین با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی این سازه برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ r = 2 + 2 = 4 \end{array} \right. \Rightarrow DI = r - (c + 2) \Rightarrow DI = 4 - (1 + 2) = 1$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به دو سازه معین ab و bc کافی است این دو سازه معین را از نقطه c جدا کرده و معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف کنیم:

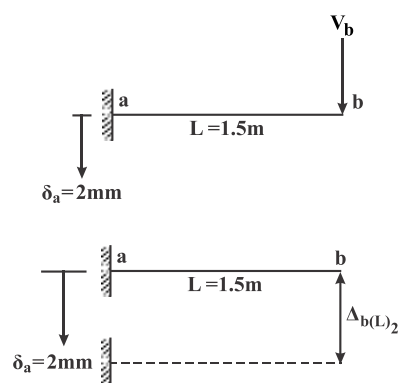


$$(\Delta_{b(L)} = \Delta_{b(R)})$$

(معادله سازگاری)

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_{b(L)} = \Delta_{b(R)}$ به صورت زیر داریم:

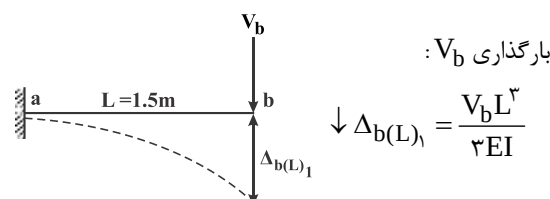
تیتر ab: نشست تکیه‌گاه a + بارگذاری V_b



نشست تکیه‌گاه a:

$$\downarrow \Delta_{b(L)_r} = \delta_a = 2 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \downarrow \Delta_{b(L)_r} = 0.002 \text{ m}$$



بارگذاری V_b :

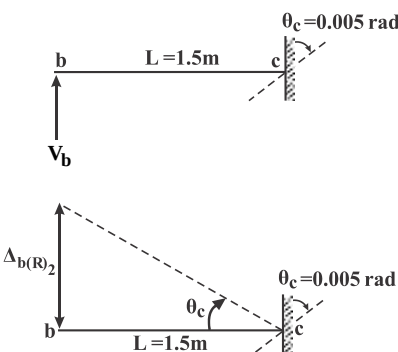
$$\downarrow \Delta_{b(L)_1} = \frac{V_b L^3}{3EI}$$

پس تغییر مکان نقطه b در تیر ab برابر است با:

$$\Delta_{b(L)} = \downarrow \Delta_{b(L)_1} + \downarrow \Delta_{b(L)_r} \Rightarrow \downarrow \Delta_{b(L)} = \frac{V_b L^3}{3EI} + 0.002 \text{ m}$$

دوران تکیه‌گاه c + بارگذاری V_b

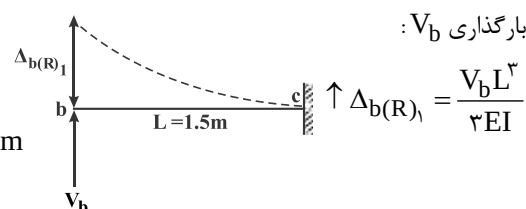
تیتر bc:



دوران تکیه‌گاه c:

$$\uparrow \Delta_{b(R)_r} = \theta_c \times L$$

$$\Rightarrow \uparrow \Delta_{b(R)_r} = 0.005 \times 1.5 = 0.0075 \text{ m}$$



بارگذاری V_b :

$$\uparrow \Delta_{b(R)_1} = \frac{V_b L^3}{3EI}$$

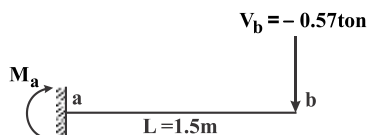
در نهایت با حل معادله سازگاری به صورت زیر مقدار نیروی V_b بدست می‌آید:

$$\downarrow \Delta_{b(L)} = \uparrow \Delta_{b(R)} \Rightarrow \frac{V_b L^3}{3EI} + 0.002 = \frac{-V_b L^3}{3EI} - 0.0075 \Rightarrow \frac{2V_b L^3}{3EI} = -0.0095$$

$$\frac{EI = 135 \text{ ton.m}^2}{L = 1.5 \text{ m}} \rightarrow \frac{2 \times V_b \times (1.5)^3}{3 \times 135} = -0.0095 \Rightarrow V_b = -0.57 \text{ ton}$$



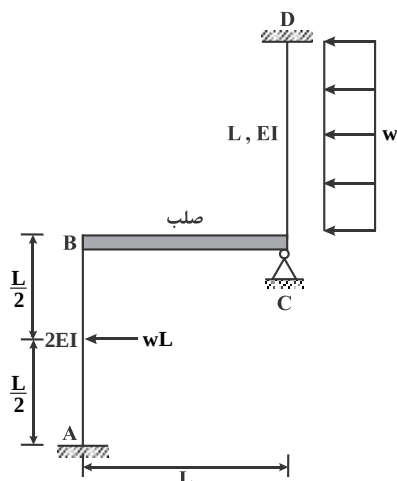
بنابراین لنگر در تکیه‌گاه a برابر است با:



$$+\left(\sum M_a = 0 \Rightarrow M_a + (V_b \times L) = 0 \Rightarrow M_a = -V_b \times L\right. \\ \Rightarrow M_a = -(-0.57\text{ton}) \times 1.5\text{m} = 0.855\text{ton.m} \Rightarrow M_a = 855\text{kg.m}$$

(مهندسی عمران - آزاد ۸۷)

مثال ۷: لنگر در تکیه‌گاه‌های گیردار A و D کدام است؟



$$M_A = M_D = \frac{wL^2}{8} \quad (1)$$

$$M_A = \frac{wL^2}{8}, M_D = \frac{wL^2}{12} \quad (2)$$

$$M_A = \frac{3wL^2}{8}, M_D = \frac{3wL^2}{16} \quad (3)$$

$$M_A = M_D = \frac{wL^2}{12} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» با کمی دقت در شکل صورت سوال مشاهده می‌شود که این قاب نامعین است.

پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 3 + 3 + 2 = 8 \\ k = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \\ \Rightarrow DI = (8 + 0) - (0 + 3) = 5$$

بنابراین سازه پنج درجه نامعین است.

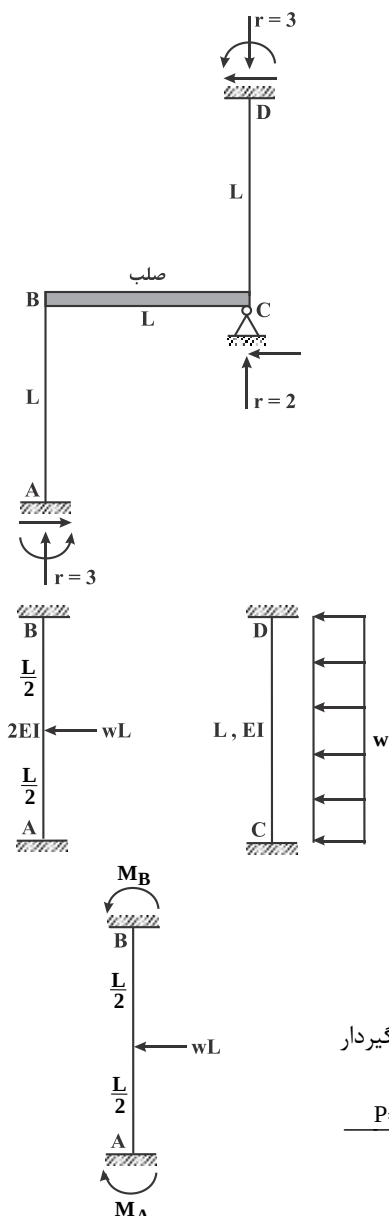
مرحله دوم: با کمی دقت در شکل می‌توان گفت نقاط B و C به علت وجود عضو صلب BC و شرایط تکیه‌گاهی در نقاط D و C و همچنین نقطه A، امکان تغییرمکان افقی و قائم و دوران را ندارد و بنابراین می‌توان عضو صلب BC را از سازه حذف و تکیه‌گاه گیردار را برای نقاط B و C به صورت روبه‌رو در نظر گرفت:

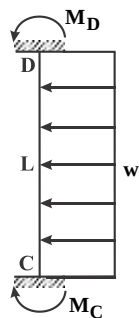
همان‌طور که مشاهده می‌شود تیرهای نامعین AB و CD به صورت دوسرگیردار می‌باشند.

مرحله سوم: بنابراین برای محاسبه لنگر در نقاط A و D داریم:

لنگر M_A :

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} \quad \text{روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار} \\ \xrightarrow{P=wL} M_A = M_B = \frac{wL \times L}{8} \Rightarrow M_A = M_B = \frac{wL^2}{8}$$



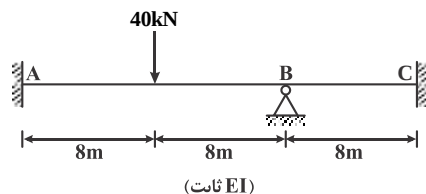
لنگر M_D :

$$M_C = M_D = \frac{wL^2}{12}$$

روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار

(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۱)

مثال ۸: در سازه شکل مقابل مقدار شیب تیر در محل B کدام گزینه است؟



$$\frac{16^\circ}{3EI} \quad (2)$$

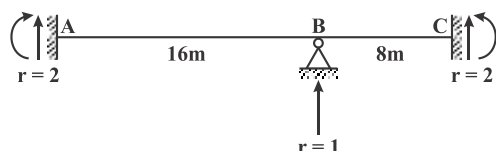
$$\frac{8^\circ}{3EI} \quad (1)$$

$$\frac{32^\circ}{3EI} \quad (4)$$

$$\frac{24^\circ}{3EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» تیر نشان داده شده نامعین است، پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

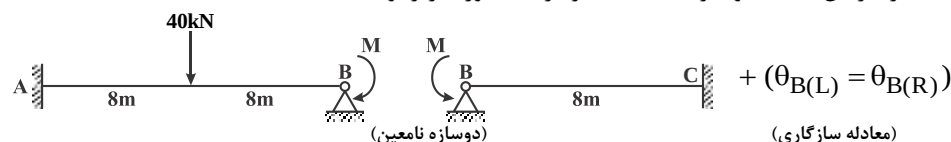
مرحله اول: درجه نامعینی تیر به صورت زیر بدست می‌آید:



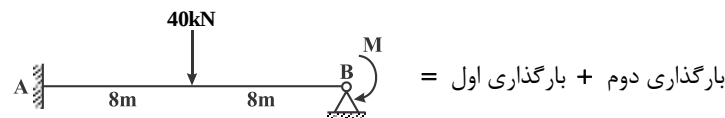
$$\begin{cases} r = 2 + 2 + 1 = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + 2) \Rightarrow DI = 5 - (0 + 2) \Rightarrow DI = 3$$

بنابراین تیر سه درجه نامعین است.

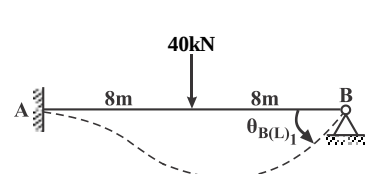
مرحله دوم: با توجه به اینکه تیر پیوسته است، می‌توان این تیر سه درجه نامعین را به دو تیر نامعین یکسر مفصل و یکسر گیردار AB و BC تبدیل نمود. کافی است با اعمال لنگرهای مختلف الجهت M در طرفین نقطه B و تعریف معادله سازگاری به صورت زیر نوشت:

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)}$ به صورت زیر داریم:

تیر AB:



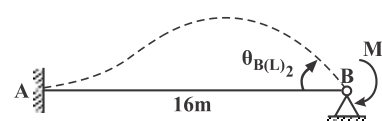
بارگذاری اول:



$$\theta_{B(L)_1} = \frac{PL^2}{32EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{B(L)_1} = \frac{40 \times (16)^2}{32EI} \Rightarrow \theta_{B(L)_1} = \frac{32^\circ}{EI}$$

بارگذاری دوم:



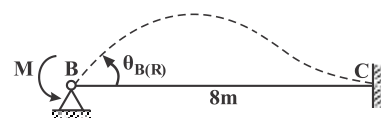
$$\theta_{B(L)_2} = \frac{ML}{4EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{B(L)_2} = \frac{M \times 16}{4EI} \Rightarrow \theta_{B(L)_2} = \frac{4M}{EI}$$

پس دوران نقطه B در تیر AB برابر است با:

$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(L)_1} + \theta_{B(L)_2} \Rightarrow \theta_{B(L)} = -\frac{32^\circ}{EI} + \frac{4M}{EI}$$

تیر BC:



$$\theta_{B(R)} = \frac{ML}{4EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{B(R)} = \frac{M \times 8}{4EI} \Rightarrow \theta_{B(R)} = \frac{2M}{EI}$$

بنابراین با حل معادله سازگاری، مقدار M برابر است با:

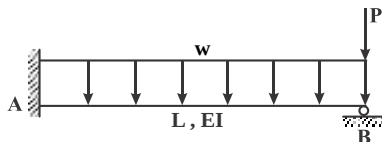
$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)} \Rightarrow -\frac{32^\circ}{EI} + \frac{4M}{EI} = \frac{-2M}{EI} \Rightarrow \frac{6M}{EI} = \frac{32^\circ}{EI} \Rightarrow M = \frac{32^\circ}{6} = \frac{16^\circ}{3} \text{ kN.m}$$

$$\theta_B = \theta_{B(L)} = \theta_{B(R)} \Rightarrow \theta_B = \theta_{B(R)} = \frac{2M}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{2 \times \frac{16^\circ}{3}}{EI} = \frac{32^\circ}{3EI}$$

حال برای محاسبه مقدار شیب در نقطه B داریم:

(مهندسی در سوانح طبیعی - سراسری ۹۲)

مثال ۹: مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟



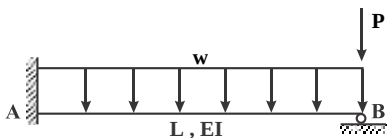
$$\frac{wL}{2} + P \quad (2)$$

$$\frac{3wL}{8} + P \quad (1)$$

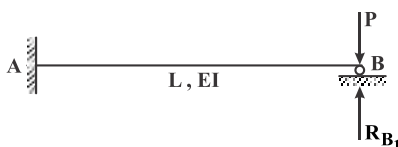
$$\frac{3wL}{2} + P \quad (4)$$

(۳) صفر

پاسخ: گزینه «۱» تیر نشان داده شده تیر نامعین یکسر مفصل و یکسرگیردار است که تحت اثر دوبارگذاری مختلف قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین یکسر مفصل و یکسرگیردار به صورت زیر داریم:

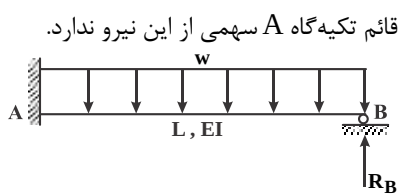


بارگذاری دوم + بارگذاری اول =



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{B1} - P = 0 \Rightarrow \uparrow R_{B1} = P$$

بارگذاری اول:



دقت داشته باشید در این حالت به علت اینکه بار P دقیقاً روی تکیه‌گاه غلتکی B اعمال شده است، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A سهمی از این نیرو ندارد.

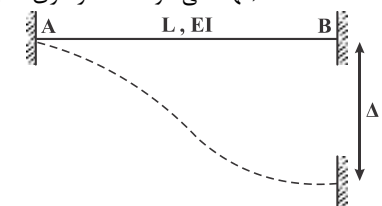
$$\uparrow R_{B2} = \frac{3wL}{8} \quad \text{روابط حفظی تیرهای نامعین یکسر مفصل و یکسرگیردار}$$

$$R_B = \uparrow R_{B1} + \uparrow R_{B2} \Rightarrow R_B = P + \frac{3wL}{8}$$

بنابراین مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر است با:

مثال ۱۰: در صورتی که به تیر دوسرگیردار زیر یک جابه‌جایی قائم Δ اعمال شود، گشتاور تکیه‌گاهی ایجاد شده چقدر خواهد بود؟

(مهندسی هوافضا - سراسری ۹۲)



$$\frac{2EI\Delta}{L^2} \quad (2)$$

$$\frac{3EI\Delta}{L^2} \quad (1)$$

$$\frac{EI\Delta}{L^2} \quad (4)$$

$$\frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۳» تیر نشان داده شده دوسرگیردار و نامعین است. بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر ایجاد شده از تکیه‌گاه‌ها تحت‌اثر نشست تکیه‌گاهی Δ ، می‌توان از روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار به صورت زیر استفاده نمود:

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad \text{روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار}$$

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

بنابراین مقدار لنگر در تکیه‌گاه‌های A و B برابر است:

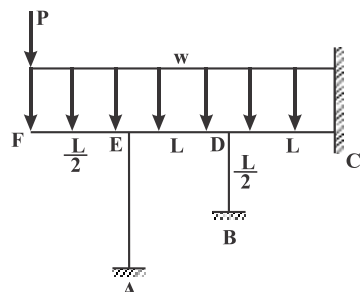


فصل نهم

«بررسی سازه‌های نامعین به روش تغییر مکان (روش شیب افت)»

(مهندسی عمران - سراسری ۷۹)

مثال ۱: مقدار لنگر در تکیه‌گاه B با کدام رابطه برابر است؟ (EI ثابت است)

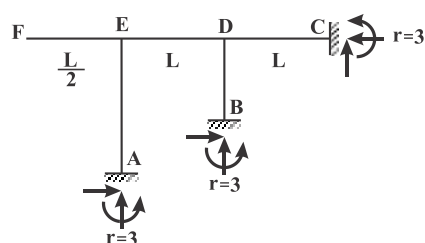


$$\frac{2EI\theta_B}{L} \quad (2)$$

$$\frac{2EI\theta_D}{L^2} \quad (1)$$

$$\frac{4EI\theta_D}{L} \quad (4)$$

$$\frac{4EI\theta_B}{L^2} \quad (3)$$



پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل صورت سؤال به نظر می‌رسد که سازه نامعین است، پس ابتدا درجه نامعینی سازه را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} r = 3 + 3 + 3 = 9 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \Rightarrow DI = (9 + 0) - (0 + 3) = 6$$

بنابراین سازه ۶ درجه نامعین است.

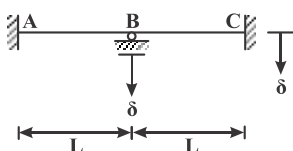
$$\begin{cases} \theta_B = 0 & (\text{تکیه‌گاه‌گیردار (B)}) \\ FEM_{BD} = 0 & (\text{قسمت BD فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BD} = 0 & (\text{نقاط B و D تغییر مکان افقی ندارند}) \\ (EI)_{BD} = EI \text{ و } L_{BD} = \frac{L}{2} \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده شد درجه نامعین سازه زیاد است، پس برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه B از روش شیب افت به صورت مقابل داریم:
با توجه به اینکه نقطه B در قسمت BD قرار دارد، پس قسمت BD را به صورت مقابل از سازه جدا کرده و داریم:
بنابراین براساس رابطه روش شیب افت داریم:

$$M_{BD} = \frac{2(EI)_{BD}}{L_{BD}} (2\theta_B + \theta_D - 3\psi_{BD}) + FEM_{BD} \Rightarrow M_{BD} = \frac{2EI}{\frac{L}{2}} (0 + \theta_D - 0) + 0 \Rightarrow M_{BD} = \frac{4EI\theta_D}{L}$$

مثال ۲: در تیر ممتد شکل مقابل با صلبیت خمشی ثابت EI تحت نشست‌های تکیه‌گاهی نشان داده شده، لنگر M_{AB} کدام است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۸۱)



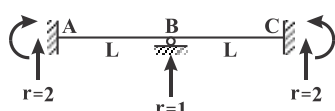
$$\frac{6EI\delta}{L^2} \quad (2)$$

$$\frac{3EI\delta}{L^2} \quad (1)$$

$$\frac{4/\delta EI\delta}{L^2} \quad (4)$$

$$\frac{7/\delta EI\delta}{L^2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا درجه نامعینی تیر را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 2 + 2 + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + 2) \Rightarrow DI = 5 - (0 + 2) = 3$$

بنابراین تیر ۳ درجه نامعین است. پس برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} در این تیر می‌توان از روش شیب افت به صورت زیر استفاده نمود:

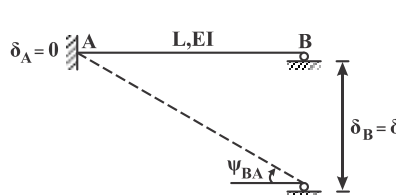
توجه داشته باشید تیر در نقطه B پیوسته است، پس با تعریف معادله تعادل لنگر در نقطه B به صورت زیر، ابتدا مقدار دوران نقطه B را به دست می‌آوریم:

$$M_{BA} \left(\frac{B}{A} \right) M_{BC} + \left(\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0 \right)$$



حال برای محاسبه مقادیر لنگر M_{BA} و M_{BC} با استفاده از رابطه شیب افت می‌توان نوشت:

قسمت BA:

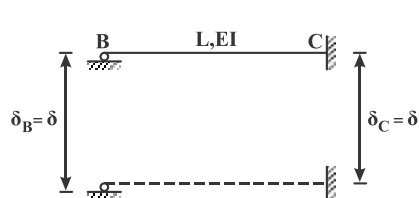


$$\begin{cases} \theta_A = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار A}) \\ FEM_{BA} = 0 & (\text{قسمت BA فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BA} = \frac{\delta_B - \delta_A}{L_{BA}} \Rightarrow \psi_{BA} = \frac{\delta - 0}{L} = \frac{\delta}{L} & (\text{جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است}) \\ L_{BA} = L \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{2(EI)_{BA}}{L_{BA}} (2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + 0 - 3(\frac{\delta}{L})) + 0$$

$$\Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + 0 - 3(\frac{\delta}{L})) + 0 \Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B - \frac{3\delta}{L})$$

قسمت BC:



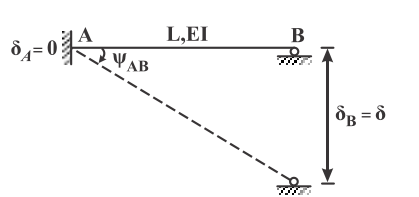
$$\begin{cases} \theta_C = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار C}) \\ FEM_{BC} = 0 & (\text{قسمت BC فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BC} = \frac{\delta_B - \delta_C}{L_{BC}} \Rightarrow \psi_{BC} = \frac{\delta - \delta}{L} = 0 \\ L_{BC} = L \text{ و } (EI)_{BC} = EI \end{cases}$$

$$M_{BC} = \frac{2(EI)_{BC}}{L_{BC}} (2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + 0 - 0) + 0 \Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B)$$

در نهایت با حل معادله تعادل لنگر در نقطه A به صورت زیر مقدار θ_B تعیین می‌شود:

$$M_{BC} + M_{BA} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L} (2\theta_B) + \frac{2EI}{L} (2\theta_B - \frac{3\delta}{L}) = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L} (2\theta_B - \frac{3\delta}{L} + 2\theta_B) = 0 \Rightarrow 4\theta_B - \frac{3\delta}{L} = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{3\delta}{4L}$$

حال برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} مطابق شکل زیر داریم:



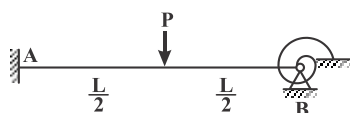
$$\begin{cases} \theta_A = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار A}) \quad \theta_B = \frac{3\delta}{4L} \\ FEM_{AB} = 0 & (\text{قسمت AB فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{AB} = \frac{\delta_B - \delta_A}{L_{AB}} \Rightarrow \psi_{AB} = \frac{\delta - 0}{L} = \frac{\delta}{L} & (\text{جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است}) \\ L_{AB} = L \text{ و } (EI)_{AB} = EI \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{2(EI)_{AB}}{L_{AB}} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{AB} \Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI}{L} (0 + \frac{3\delta}{4L} - 3(\frac{\delta}{L})) + 0 \Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI}{L} (\frac{3\delta}{4L} - \frac{3\delta}{L})$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI}{L} (\frac{-9\delta}{4L}) \Rightarrow M_{AB} = \frac{-9EI\delta}{2L^2} = -\frac{4}{5} \frac{EI\delta}{L^2}$$

(مهندسی عمران - سراسری ۸۲)

مثال ۳: در تیر مقابل لنگر در فنر پیچشی واقع در تکیه‌گاه B کدام است؟ ($k_\theta = \frac{2EI}{L}$ و EI ثابت است)



$$\frac{PL}{16} \quad (2)$$

$$\frac{PL}{8} \quad (4)$$

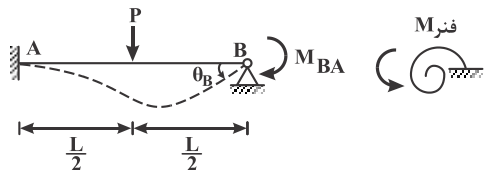
$$\frac{PL}{12} \quad (1)$$

$$\frac{PL}{24} \quad (3)$$



✓ پاسخ: گزینه «۳» همان طور که مشاهده می‌شود این تیر نامعین است. از طرفی فنر دورانی در تکیه‌گاه مفصلی B قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از روش شیب افت به صورت زیر داریم:

ابتدا فنر دورانی را از نقطه B جدا کرده و معادله تعادل لنگر و دوران را در نقطه B تعریف می‌کنیم:



$$\begin{cases} M_{BA} = M_{\text{فنر}} & (\text{جهت ساعتگرد}) \\ \theta_B = -\theta_{\text{فنر}} & (\text{جهت پادساعتگرد}) \end{cases}$$

حال برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} با استفاده از روش شیب افت داریم:

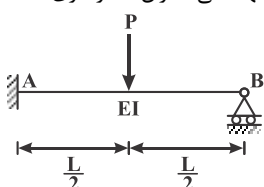
$$\begin{cases} \theta_A = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار A}) \\ \theta_B = -\theta_{\text{فنر}} \\ FEM_{BA} = \frac{PL}{8} \\ \psi_{BA} = 0 & (\text{نقاط A و B تغییر مکان قائم ندارند}) \\ L_{BA} = L \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{2(EI)_{BA}}{L_{BA}} (2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2(-\theta_{\text{فنر}}) + 0 - 0) + \frac{PL}{8}$$

$$\Rightarrow M_{BA} = \frac{-2EI\theta_{\text{فنر}}}{L} + \frac{PL}{8} \quad \begin{matrix} \theta_{\text{فنر}} = \frac{M_{\text{فنر}}}{k_{\theta}} \\ M_{BA} = M_{\text{فنر}} \end{matrix} \Rightarrow M_{\text{فنر}} = -\frac{4EI}{k_{\theta}L} M_{\text{فنر}} + \frac{PL}{8} \Rightarrow M_{\text{فنر}} = \frac{-4EIM_{\text{فنر}}}{k_{\theta}L} + \frac{PL}{8}$$

$$\frac{k_{\theta} = \frac{2EI}{L}}{\Rightarrow M_{\text{فنر}} = \frac{-4EIM_{\text{فنر}}}{\frac{2EI}{L} \times L} + \frac{PL}{8} \Rightarrow M_{\text{فنر}} = -2M_{\text{فنر}} + \frac{PL}{8} \Rightarrow 3M_{\text{فنر}} = \frac{PL}{8} \Rightarrow M_{\text{فنر}} = \frac{PL}{24}$$

(مهندسی عمران - سراسری ۸۳)

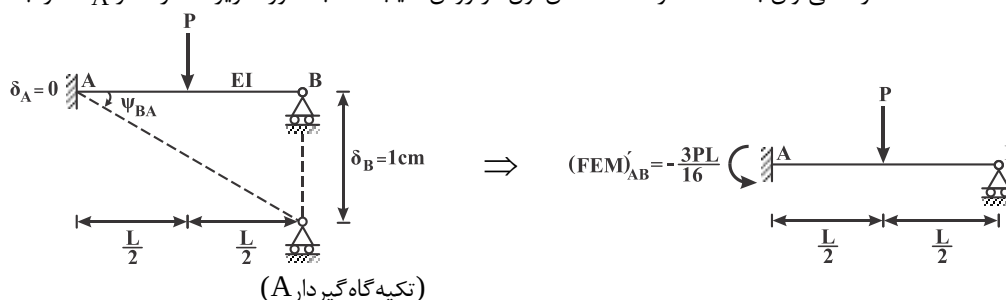


✓ مثال ۴: اگر تکیه‌گاه B به اندازه ۱cm نشست پیدا کند، لنگر M_A را حساب کنید.

$$M_A = \frac{-3PL}{16} - \frac{6EI}{L^2} \quad (2) \quad M_A = \frac{-PL}{8} - \frac{3EI}{L^2} \quad (1)$$

$$M_A = \frac{-PL}{8} - \frac{6EI}{L^2} \quad (4) \quad M_A = \frac{-3PL}{16} - \frac{3EI}{L^2} \quad (3)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» همان طور که مشاهده می‌شود این تیر یک سرگیردار و یک سر مفصل است که نامعین می‌باشد. بنابراین با توجه به اینکه تکیه‌گاه B به اندازه ۱cm نشست دارد، می‌توان با استفاده از حالت خاص اول در روش شیب افت به صورت زیر مقدار لنگر M_A را به دست آورد:

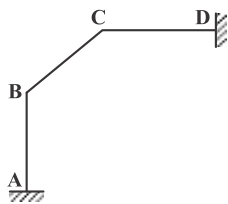


$$\begin{cases} \theta_A = 0 \\ (FEM)'_{AB} = \frac{-3PL}{16} \\ \psi_{AB} = \frac{\delta_B - \delta_A}{L_{AB}} \Rightarrow \psi_{AB} = \frac{1 - 0}{L} = \frac{1}{L} \quad (\text{جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است}) \\ L_{AB} = L \text{ و } (EI)_{AB} = EI \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{2(EI)_{AB}}{L_{AB}} (\theta_A - \psi_{AB}) + (FEM)'_{AB} \Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI}{L} (0 - \frac{1}{L}) + (\frac{-3PL}{16}) \Rightarrow M_{AB} = \frac{-2EI}{L^2} - \frac{3PL}{16}$$



(مهندسی عمران - سراسری ۸۴)

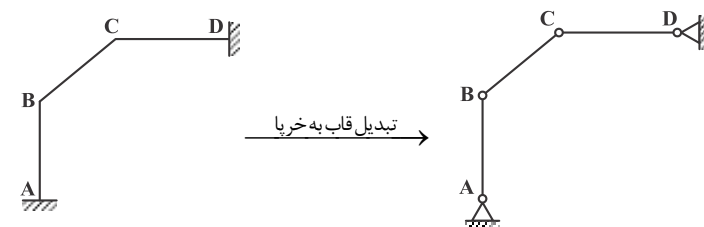
مثال ۵: سازه شکل مقابل کلاً چند Δ مستقل دارد؟ (جابه‌جایی هر گره: Δ)

(۱) صفر

(۲) یک

(۳) دو

(۴) سه

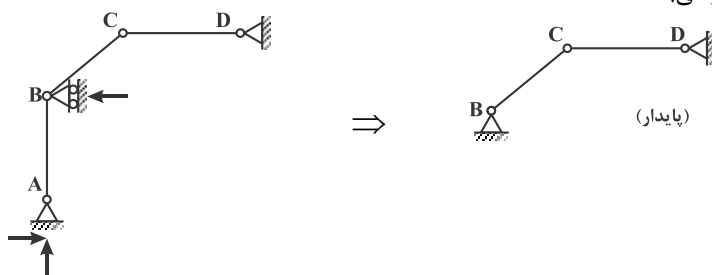


پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه تعداد درجه آزادی انتقالی در این قاب، باید این قاب را به یک خرپا تبدیل کنیم. برای این منظور کافی است تمام نقاط اتصال داخلی و تکیه‌گاهی قاب را به مفصل تبدیل نماییم:

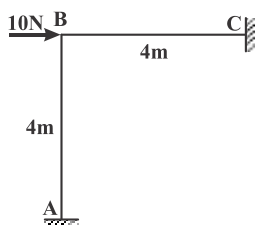
همان‌طور که مشاهده می‌شود خرابی حاصل شده ناپایدار است، بنابراین برای پایدار شدن این خرپا می‌توان یک تکیه‌گاه غلتکی به نقطه B اضافه نمود. پس قسمت AB توسط سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل شده و پایدار است. حال می‌توان این قسمت را به صورت زمین فرض نمود. قسمت BCD سه مفصل بوده و توسط عکس‌العمل‌های مناسب به زمین متصل شده و پایدار می‌باشد.

بنابراین درجه آزادی انتقالی این سازه برابر یک است:

$$(N_{\Delta} = 1)$$

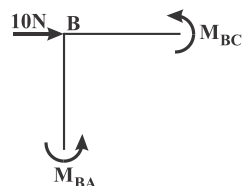


(مهندسی عمران - آزاد ۹۳)

مثال ۶: لنگر در C کدام است؟ (EI ثابت)(۱) -۱۶ kN.m (۲) ۱۶ kN.m (۳) -۸ kN.m

(۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود قاب نامعین است. بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه C (M_{CB})، با استفاده از روش شیب افت به صورت زیر داریم:

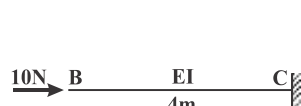


با توجه به اینکه نقطه B در قاب پیوسته است، معادله تعادل لنگر را حول نقطه B به صورت زیر تعریف نموده و داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0$$

حال با استفاده از رابطه روش شیب افت مقادیر M_{BC} و M_{BA} را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

قسمت BC:

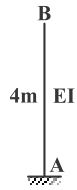


$$\begin{cases} \theta_C = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار C}) \\ FEM_{BC} = 0 & (\text{قسمت BC فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BC} = 0 & (\text{نقاط B و C تغییر مکان قائم ندارند}) \\ L_{BC} = 4 \text{ m و } (EI)_{BC} = EI \end{cases}$$

$$M_{BC} = \frac{2(EI)_{BC}}{L_{BC}} (2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{4} (2\theta_B + 0 - 0) + 0 \Rightarrow M_{BC} = EI\theta_B$$



قسمت BA:



$$\begin{cases} \theta_A = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار A}) \\ FEM_{BA} = 0 & (\text{قسمت BA فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BA} = 0 & (\text{نقاط A و B تغییر مکان افقی ندارند}) \\ L_{BA} = 4\text{m} \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{2(EI)_{BA}}{L_{BA}}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{4}(2\theta_B + 0 - 0) + 0 \Rightarrow M_{BA} = EI\theta_B$$

حال با حل معادله تعادل لنگر در نقطه B داریم:

$$M_{BC} + M_{BA} = 0 \Rightarrow EI\theta_B + EI\theta_B = 0 \Rightarrow 2EI\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = 0$$

در نهایت با توجه به شرایط یکسان BC و CB، مقدار لنگر در نقطه C یعنی M_{CB} برابر است با:

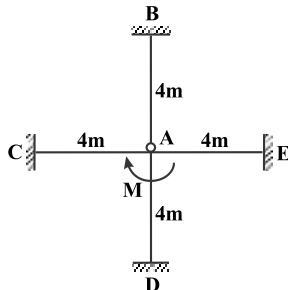
$$M_{CB} = \frac{2(EI)_{CB}}{L_{CB}}(2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{CB}) + FEM_{CB} \Rightarrow M_{CB} = \frac{2EI}{4}(0 + 0 - 0) + 0 \Rightarrow M_{CB} = 0$$



فصل دهم

« بررسی تحلیل سازه‌ها به روش مدلسازی با فنر »

(مهندسی عمران - سراسری ۷۹)

مثال ۱: در سازه مقابل لنگر M_{DA} کدام است؟ (EI ثابت)

$$\frac{M}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{M}{6} \quad (۲)$$

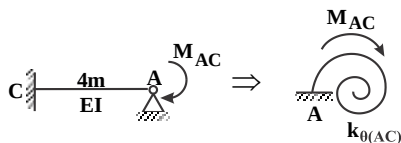
$$\frac{M}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{M}{3} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه از اعضای تشکیل شده است که در نقطه A به یکدیگر متصل شده‌اند و از طرفی لنگر خمشی متمرکز M در محل اتصال اعضای سازه یعنی نقطه A اعمال شده است، بنابراین می‌توان این سازه را به صورت اتصال موازی چهار فنر دورانی در نظر گرفت. پس سختی دورانی هر یک از اعضای سازه را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

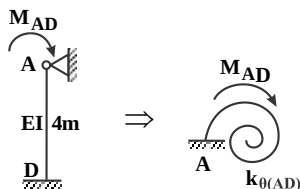
قسمت AB: محل اتصال این قسمت و لنگر متمرکز M به صورت مفصلی است، بنابراین این قسمت از سازه در تحمل لنگر خمشی نقشی نداشته و سختی دورانی ندارد پس مقدار لنگر و سختی فنر دورانی آن برابر صفر است:

قسمت AC: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی M (نقطه A) به صورت پیوسته است، بنابراین در قسمت AC، در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت برابر است با:



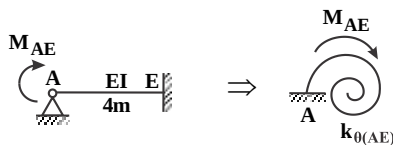
$$k_{\theta(AC)} = \frac{4(EI)_{AC}}{L_{AC}} \Rightarrow k_{\theta(AC)} = \frac{4EI}{4} \Rightarrow k_{\theta(AC)} = EI$$

قسمت AD: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی (نقطه A) به صورت پیوسته است، بنابراین در قسمت AD، در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت به صورت زیر تعیین می‌شود:



$$k_{\theta(AD)} = \frac{4(EI)_{AD}}{L_{AD}} \Rightarrow k_{\theta(AD)} = \frac{4EI}{4} \Rightarrow k_{\theta(AD)} = EI$$

قسمت AE: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی M (نقطه A) به صورت پیوسته است بنابراین در قسمت AE در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت برابر است با:

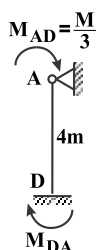


$$k_{\theta(AE)} = \frac{4(EI)_{AE}}{L_{AE}} \Rightarrow k_{\theta(AE)} = \frac{4EI}{4} \Rightarrow k_{\theta(AE)} = EI$$

حال برای تعیین مقدار لنگر در نقطه D (M_{DA}) ابتدا باید مقدار لنگر در قسمت AD یعنی نقطه A را به دست آوریم، پس با توجه به اتصال موازی فنرهای دورانی داریم:

$$M_{AD} = \frac{k_{\theta(AD)}}{k_{\theta(AD)} + k_{\theta(AE)} + k_{\theta(AC)} + k_{\theta(AB)}} \times M \Rightarrow M_{AD} = \frac{EI}{EI + EI + EI + 0} \times M \Rightarrow M_{AD} = \frac{M}{3}$$

بنابراین برای قسمت AD می‌توان نوشت:



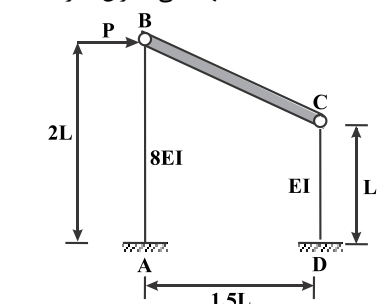
$$M_{DA} = \frac{M_{AD}}{2} \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{M}{3}}{2} \Rightarrow M_{DA} = \frac{M}{6}$$

روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار:



(مهندسی عمران - آزاد ۸۱)

مثال ۲: انرژی ذخیره شده در سازه مقابل کدام است؟

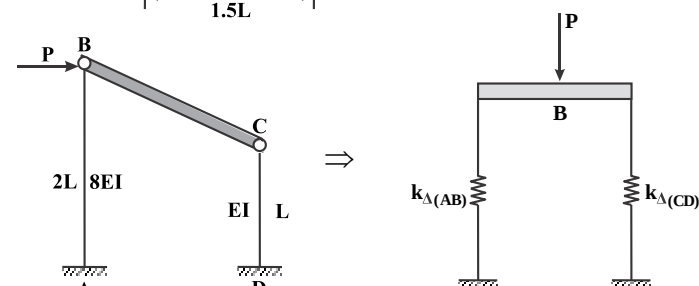


$$\frac{P^2 L^3}{6EI} \quad (۲)$$

$$\frac{P^2 L^3}{3EI} \quad (۱)$$

$$\frac{P^2 L^3}{24EI} \quad (۴)$$

$$\frac{P^2 L^3}{12EI} \quad (۳)$$



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل صورت سؤال برای محاسبه انرژی کرنشی در این سازه کافی است تغییر مکان محل اثر نیروی P یعنی نقطه B را به دست آوریم. همان‌طور که مشاهده می‌شود می‌توان این سازه را از اتصال دو ستون معین و پایدار AB و CD توسط میله صلب BC در نظر گرفت. البته دقت داشته باشید به علت وجود عضو صلب BC نقاط B و C تغییر مکان افقی یکسانی دارند. پس می‌توان این سازه را به صورت اتصال دو فنر موازی فرض نمود:

حال برای محاسبه مقادیر سختی فنرهای انتقالی AB و CD می‌توان نوشت:

فنر انتقالی AB:

$$k_{\Delta(AB)} = \frac{3(EI)_{AB}}{L_{AB}^3} \Rightarrow k_{\Delta(AB)} = \frac{3(8EI)}{(2L)^3} = \frac{3EI}{L^3}$$

فنر انتقالی CD:

$$k_{\Delta(CD)} = \frac{3(EI)_{CD}}{L_{CD}^3} = \frac{3EI}{L^3}$$

در نهایت برای محاسبه تغییر مکان نقطه B به صورت زیر داریم:

$$\Delta_B = \frac{P}{k_{\Delta(AB)} + k_{\Delta(CD)}} \Rightarrow \Delta_B = \frac{P}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{3EI}{L^3}} \Rightarrow \Delta_B = \frac{P}{\frac{6EI}{L^3}} \Rightarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{6EI}$$

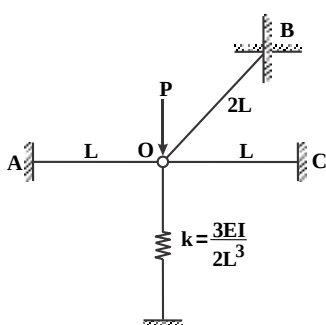
بنابراین انرژی کرنشی این سازه برابر است با:

$$U = \frac{P \times \Delta_B}{2} \Rightarrow U = \frac{P \times \frac{PL^3}{6EI}}{2} \Rightarrow U = \frac{P^2 L^3}{12EI}$$

مثال ۳: در سازه مسطح شکل مقابل بار عمود بر صفحه سازه در نقطه O به آن اعمال می‌شود. لنگر خمشی ایجاد شده در تکیه‌گاه B چقدر

(مهندسی عمران - سراسری ۸۲)

است؟ (صلبیت خمشی اعضا AO و CO برابر با $\frac{EI}{۲}$ و صلبیت خمشی عضو BO برابر ۴EI است.)



$$\frac{PL}{2} \quad (۱)$$

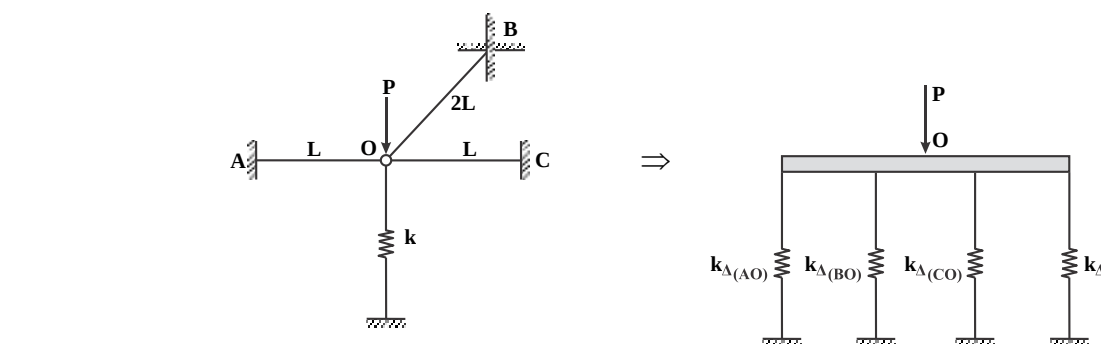
$$\frac{PL}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3PL}{4} \quad (۳)$$

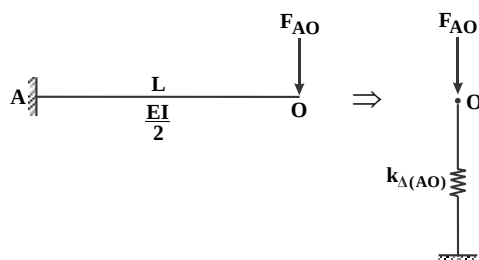
$$\frac{3PL}{2} \quad (۴)$$



✓ پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه از اتصال سه تیر معین و پایدار AO، CO و BO به همراه یک فنر انتقالی تشکیل شده است که در نقطه O نیروی P بر آن اعمال می‌گردد. بنابراین تغییر مکان نقطه اعمال بار P که محل اتصال است، برای تمام اعضا یکسان می‌باشد و می‌توان این سازه را به صورت اتصال چهار فنر انتقالی موازی در نظر گرفت. پس داریم:

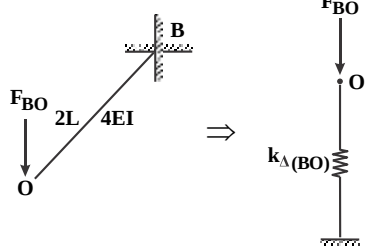


فنر انتقالی AO:



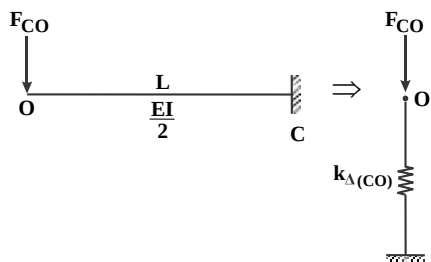
$$k_{\Delta(AO)} = \frac{\delta(EI)_{AO}}{L_{AO}^3} \Rightarrow k_{\Delta(AO)} = \frac{\delta\left(\frac{EI}{L}\right)}{L^3} = \frac{\delta EI}{L^3}$$

فنر انتقالی BO:



$$k_{\Delta(BO)} = \frac{\delta(EI)_{BO}}{L_{BO}^3} \Rightarrow k_{\Delta(BO)} = \frac{\delta(4EI)}{(\sqrt{2}L)^3} = \frac{\delta EI}{\sqrt{2}L^3}$$

فنر انتقالی CO:

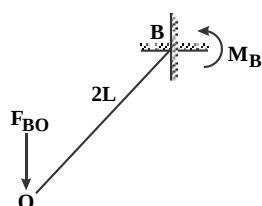


$$k_{\Delta(CO)} = \frac{\delta(EI)_{CO}}{L_{CO}^3} \Rightarrow k_{\Delta(CO)} = \frac{\delta\left(\frac{EI}{L}\right)}{L^3} = \frac{\delta EI}{L^3}$$

بنابراین به علت اینکه در اتصال موازی فنرها، نیروی هر فنر به نسبت سختی فنرها توزیع می‌شود، پس نیروی فنر انتقالی BO برابر است با:

$$F_{BO} = \frac{k_{\Delta(BO)}}{k_{\Delta(BO)} + k_{\Delta(CO)} + k_{\Delta(AO)} + k_{\Delta}} \times P \Rightarrow F_{BO} = \frac{\frac{\delta EI}{\sqrt{2}L^3}}{\frac{\delta EI}{\sqrt{2}L^3} + \frac{\delta EI}{L^3} + \frac{\delta EI}{L^3} + \frac{\delta EI}{L^3}} \times P \Rightarrow F_{BO} = \frac{P}{4}$$

در نهایت برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه B داریم:

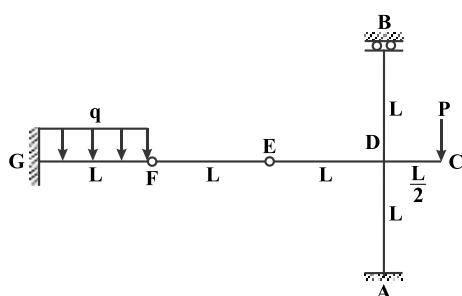


$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \Rightarrow (F_{BO} \times \sqrt{2}L) + M_B = 0 \\ \Rightarrow M_B + \left(\frac{P}{4} \times \sqrt{2}L\right) &= 0 \Rightarrow M_B = -\frac{PL}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



(مهندسی عمران - آزاد ۸۷)

مثال ۴: در قاب مقابل لنگر تکیه‌گاه گیردار A کدام است؟ (EI ثابت است)



$$\frac{PL}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{PL}{4} \quad (۲)$$

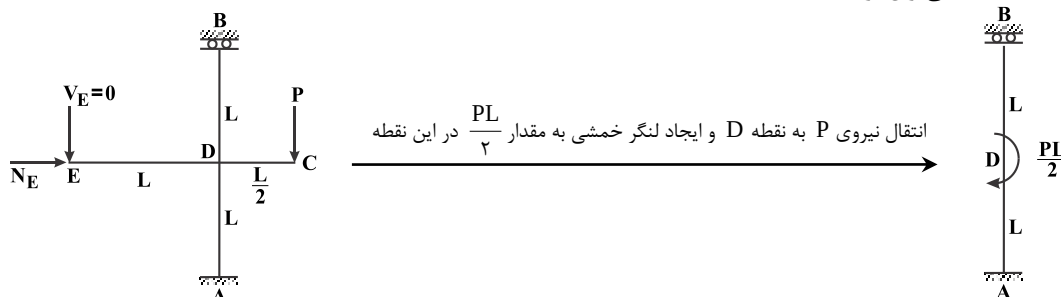
$$\frac{PL}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{PL}{10} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل صورت سؤال، سمت راست مفصل E را در نظر بگیرید. ابتدا باید مقدار نیروی برشی در نقطه E را به دست آوریم. توجه داشته باشید سمت چپ نقطه E از دو قسمت GF و EF تشکیل شده است. پس برای تعیین مقدار نیروی برشی در نقطه E قسمت EF را در نظر می‌گیریم:

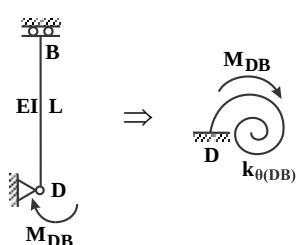
$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \quad \text{E} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ V_F \quad \quad V_E \end{array} \quad + \left(\sum M_F = 0 \Rightarrow V_E \times L = 0 \Rightarrow V_E = 0 \right)$$

بنابراین برای سمت راست نقطه E می‌توان نوشت:



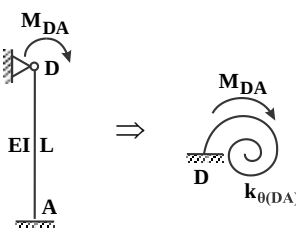
حال می‌توان این سازه را به صورت اتصال دو عضو DB و DA در نظر گرفت که در محل اتصال یعنی نقطه D لنگر متمرکز $\frac{PL}{2}$ اعمال شده است.

بنابراین می‌توان گفت این سازه به صورت اتصال موازی دو فنر دورانی فرض می‌شود. پس مقدار سختی دورانی هر فنر دورانی به صورت زیر تعیین می‌شود:



قسمت DB: محل اتصال این قسمت و لنگر $\frac{PL}{2}$ به صورت پیوسته است، بنابراین با فرض تکیه‌گاه مفصلی در نقطه D، مقدار سختی فنر دورانی این قسمت را به دست می‌آوریم:

$$k_{\theta(DB)} = \frac{(EI)_{DB}}{L_{DB}} \Rightarrow k_{\theta(DB)} = \frac{EI}{L}$$



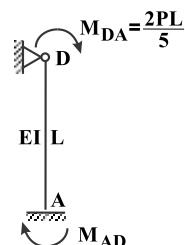
قسمت DA: محل اتصال این قسمت و لنگر $\frac{PL}{2}$ به صورت پیوسته است، بنابراین با فرض تکیه‌گاه مفصلی در نقطه D، مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت تعیین می‌شود:

$$k_{\theta(DA)} = \frac{4(EI)_{DA}}{L_{DA}} \Rightarrow k_{\theta(DA)} = \frac{4EI}{L}$$

بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه A (M_{AD}) باید ابتدا مقدار لنگر M_{DA} را به دست آوریم. پس با توجه به اتصال موازی فنرهای دورانی داریم:

$$M_{DA} = \frac{k_{\theta(DA)}}{k_{\theta(DA)} + k_{\theta(DB)}} \times \left(\frac{PL}{2} \right) \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{4EI}{L} + \frac{EI}{L}} \times \left(\frac{PL}{2} \right) \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{5EI}{L}} \times \left(\frac{PL}{2} \right) \Rightarrow M_{DA} = \frac{4PL}{5}$$

در نهایت برای قسمت DA داریم:



$$M_{AD} = \frac{M_{DA}}{2} \Rightarrow M_{AD} = \frac{\frac{4PL}{5}}{2} \Rightarrow M_{AD} = \frac{2PL}{5}$$

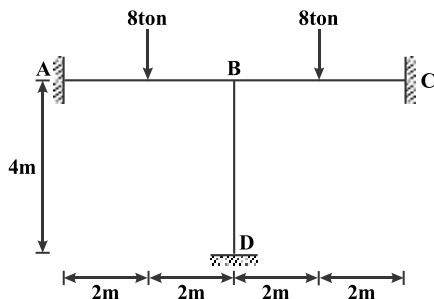
روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار: $M_{AD} = \frac{M_{DA}}{2}$



فصل یازدهم

«تحلیل سازه‌ها با استفاده از خواص تقارن»

(مهندسی عمران - سراسری (۸۱))

مثال ۱: M_A را بر حسب ton.m حساب کنید. (EI ثابت است)

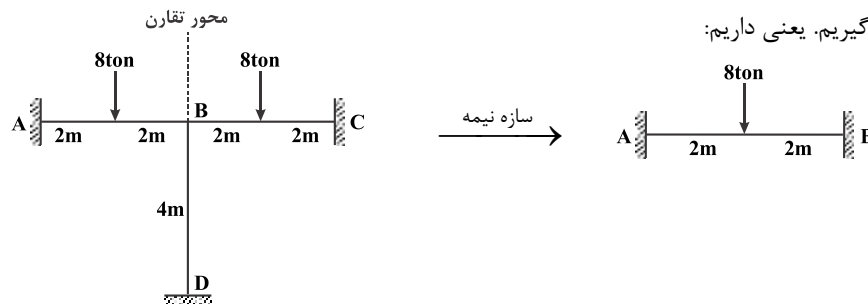
(۱) -۲

(۲) -۴

(۳) -۸

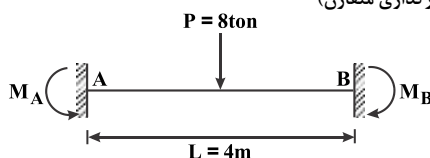
(۴) -۱۶

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری متقارن قرار دارد. با توجه به اینکه محور تقارن سازه بر روی عضو BD با صلبیت خمشی (EI) و فاقد صلبیت محوری ($EA = \infty$) قرار دارد، بنابراین برای سازه نیمه، عضو BD را حذف کرده و به جای آن در نقطه B، تکیه‌گاه گیردار در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:



(سازه متقارن تحت بارگذاری متقارن)

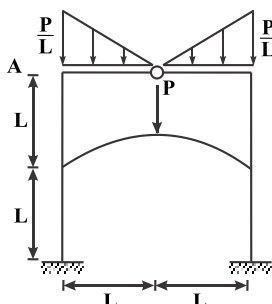
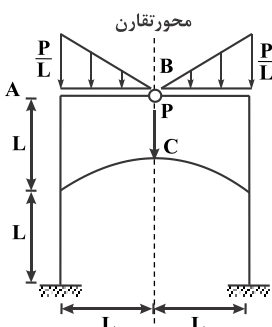
حال با استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین دو سرگیردار مطابق شکل زیر داریم:



$$M_A = -\frac{PL}{\lambda} \Rightarrow M_A = -\frac{8 \times 4}{\lambda} \Rightarrow M_A = -4 \text{ ton.m}$$

(مهندسی عمران - آزاد (۹۰))

مثال ۲: لنگر داخلی در گره A کدام است؟

(۱) $\frac{PL}{3}$ (۲) $\frac{PL}{6}$ (۳) PL (۴) $\frac{PL}{2}$ 

سازه نیمه

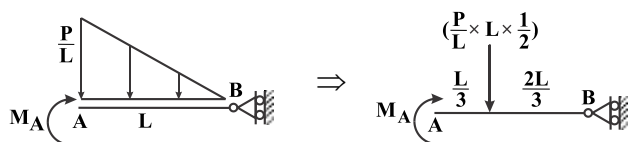
پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شکل صورت سؤال مشخص است که این قاب متقارن و بارگذاری وارد بر آن نیز متقارن می‌باشد. پس ابتدا محور تقارن را رسم می‌کنیم. توجه داشته باشید در محل برخورد محور تقارن در نقطه B، به علت وجود مفصل خمشی و در نقطه C برای سازه نیمه به ترتیب تکیه‌گاه غلتکی در جهت عمود بر محور تقارن و تکیه‌گاه لغزنده گیردار در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:

(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری متقارن)



حال برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه A سازه نیمه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

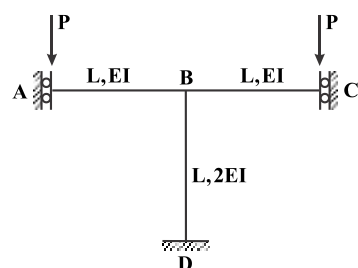
بنابراین با در نظر گرفتن قسمت AB به صورت زیر داریم:



$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + \left(\frac{P}{L} \times L \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow M_A + \frac{PL}{6} = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{PL}{6}\right.$$

(مهندسی عمران - آزاد ۹۱)

مثال ۳: تغییر مکان تکیه‌گاه غلتکی برشی A کدام است؟



$$\frac{PL^3}{6EI} \quad (۲)$$

$$\frac{PL^3}{3EI} \quad (۱)$$

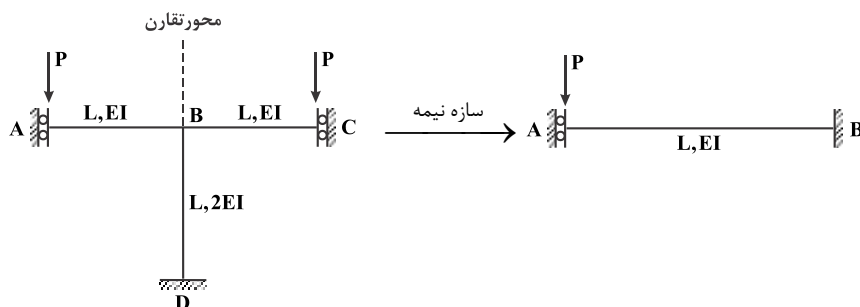
$$\frac{PL^3}{24EI} \quad (۴)$$

$$\frac{PL^3}{12EI} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که این سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری متقارن قرار دارد. بنابراین محور

تقارن آن را رسم کرده و به علت اینکه روی محور تقارن، عضو BD با صلبیت خمشی ۲EI وجود دارد، برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه گیردار به جای این

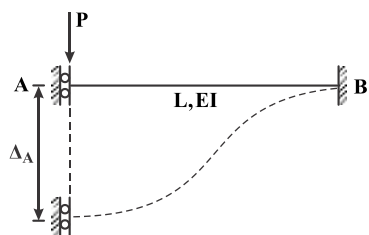
عضو در نظر گرفته و داریم:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری متقارن)

پس در ادامه کافی است سازه نیمه AB را مورد بررسی قرار دهیم. حال برای محاسبه مقدار تغییر مکان تکیه‌گاه A به صورت زیر با استفاده از روابط حفظی تیرهای

نامعین یک سرگیردار و یک سر لغزنده گیردار داریم:

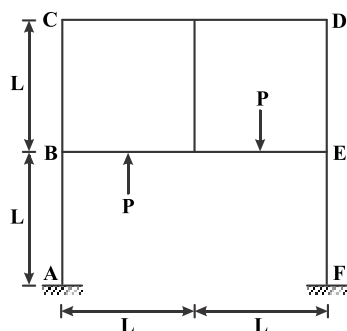


$$\Delta_A = \frac{PL^3}{12EI}$$



(مهندسی عمران - دکتری ۹۲)

مثال ۴: در سیستم سازه‌ای زیر، عکس‌العمل افقی در تکیه‌گاه A کدام است؟ (صلبیت همه اعضا یکسان است.)

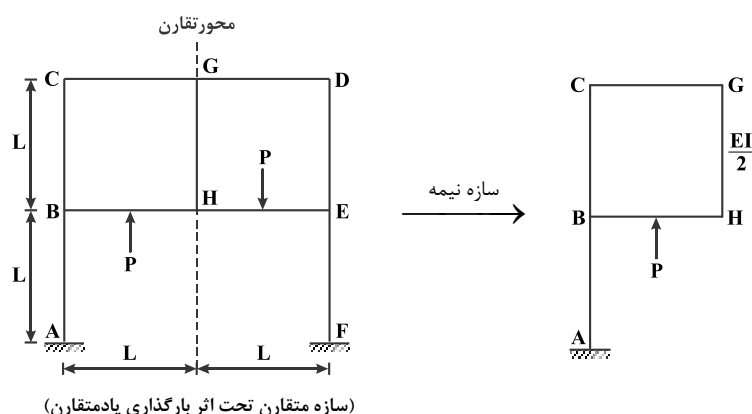


(۱) صفر

(۲) $\frac{P}{2}$ (۳) $\frac{P}{4}$

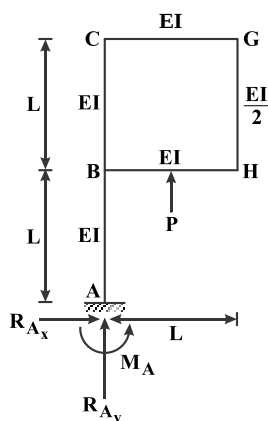
(۴) P

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که این سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرار دارد. پس با رسم محور تقارن سازه برای سازه نیمه فقط عضو GH صلبیت خمشی‌اش نصف می‌شود و به صورت مقابل داریم:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

بنابراین برای محاسبه مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A، سازه نیمه ABCGH را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه سازه ABCGH را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

بنابراین مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر صفر است.

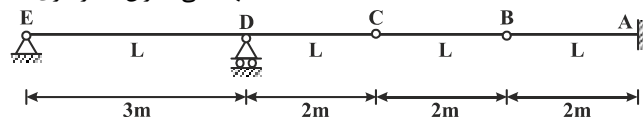


فصل دوازدهم

«بررسی خط تأثیر در سازه‌ها»

مثال ۱: اگر یک بار منفرد ۳ تن بر روی تیر شکل زیر حرکت کند، اندازه ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه D چند تن است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۷۷)



۵ (۲)

۳ (۱)

$\frac{10}{3}$ (۴)

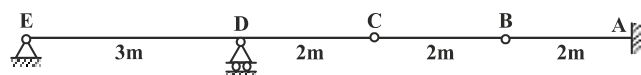
$\frac{5}{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه یک بار متمرکز ۳ تن بر روی تیر حرکت می‌کند و می‌خواهیم حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D را به دست آوریم، گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: رسم نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D

برای این منظور کافی است مراحل زیر را انجام دهیم:

مرحله اول: حذف تکیه‌گاه D از سازه



مرحله دوم: اعمال تغییر مکان واحد در نقطه D و رسم تغییر شکل سازه

با اعمال بار فرضی در نقطه D و تغییر مکان واحد در این نقطه به صورت زیر داریم:

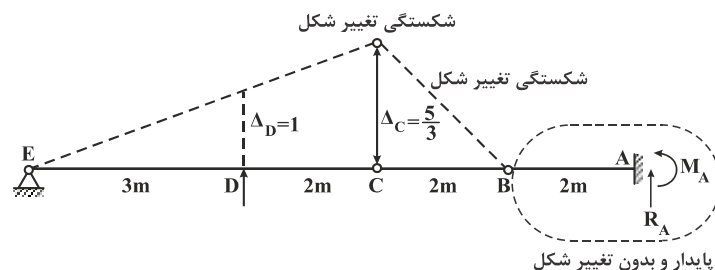
- مفصل خمشی C: به علت اینکه در نقطه D تغییر مکان واحد اعمال شده است، بنابراین مقدار بالا آمدن مفصل خمشی C به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta_D}{L_{ED}} = \frac{\Delta_C}{L_{EC}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\Delta_C}{5} \Rightarrow \Delta_C = \frac{5}{3}$$

توجه داشته باشید در مفصل خمشی همواره شکستگی تغییر شکل ایجاد می‌شود.

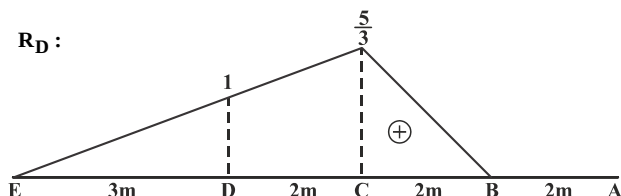
- مفصل خمشی B: در یک مفصل خمشی همواره شکستگی در تغییر شکل داریم. توجه داشته باشید قسمت AB دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب

است، پس این قسمت پایدار و بدون تغییر شکل می‌باشد. بنابراین تغییر شکل سازه به صورت زیر رسم می‌شود:



مرحله سوم: رسم تغییر شکل سازه به عنوان نمودار خط تأثیر

نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D به صورت مقابل رسم می‌گردد:



گام دوم: تعیین محل و مقدار حداکثر ارتفاع خط تأثیر در نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D

با توجه به نمودار خط تأثیر رسم شده در گام اول، مشاهده می‌شود که در نقطه C حداکثر ارتفاع خط تأثیر ایجاد شده است که مقدار آن برابر است با:

$$h_{\max} = \frac{5}{3}$$

گام سوم: تعیین حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D

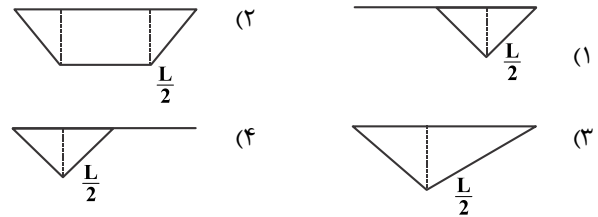
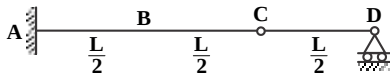
$$R_{D(\max)} = P \times h_{\max} \Rightarrow R_{D(\max)} = 3 \times \frac{5}{3} = 5 \text{ ton}$$

با استفاده از رابطه زیر برای حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D داریم:



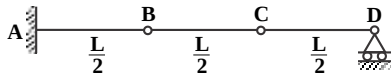
(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۵)

مثال ۲: منحنی خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه B چگونه است؟



پاسخ: گزینه «۱» برای رسم خط تأثیر لنگر در نقطه B از روش مولر برسلو به صورت زیر داریم

مرحله اول: قراردادن مفصل خمشی در نقطه B



مرحله دوم: اعمال دوران در طرفین مفصل خمشی B به نحوی که مجموع دوران طرفین برابر واحد باشد و رسم تغییر شکل سازه

- قسمت AB: این قسمت دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب است، پس پایدار و بدون تغییر شکل می‌باشد.

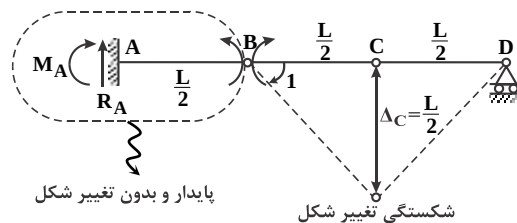
- مفصل خمشی B: به علت اینکه سمت چپ مفصل خمشی B ثابت و بدون تغییر شکل است، بنابراین تمام دوران واحد به سمت راست مفصل خمشی B اعمال می‌گردد.

- مفصل خمشی C: در مفصل خمشی همواره شکستگی مشاهده می‌شود. به علت اینکه سمت راست مفصل خمشی B به اندازه واحد دوران داشته است،

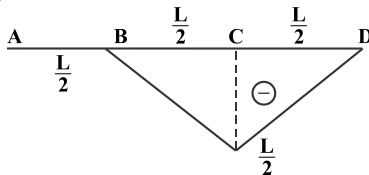
$$\Delta_C = 1 \times \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

پس مقدار تغییر مکان نقطه C به صورت مقابل به دست می‌آید:

بنابراین تغییر شکل سازه به صورت زیر رسم می‌گردد:



M_B :



مرحله سوم: رسم تغییر شکل سازه به عنوان نمودار خط تأثیر

نمودار خط تأثیر لنگر در نقطه B به صورت مقابل رسم می‌گردد: