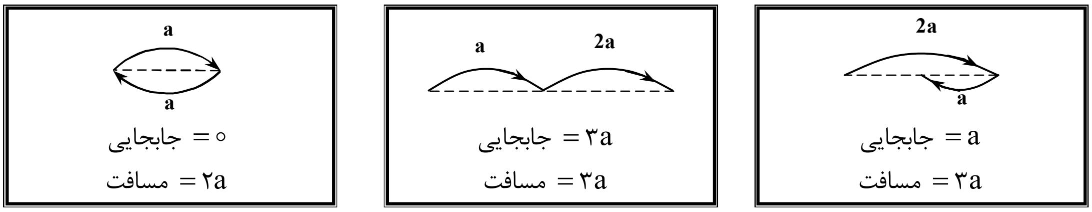
# فصل اول

## « سینماتیک»

### حرکت

حرکت یک امر نسبی است و هنگامی رخ می‌دهد که بردار مکان جسم تغییر کرده باشد. بردار مکان برداری است که از مبدأ مختصات آغاز شده و به مکان جسم ختم می‌گردد.

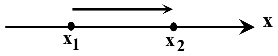
**نکته ۱:** جابجایی با مسافت تفاوت دارد جابجایی به فاصله مستقیم بین مکان اولیه و مکان ثانویه بستگی دارد اما مسافت به طول مسیر حرکت متحرک گفته می‌شود. جابجایی می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد اما مسافت همواره مثبت است.




حرکت به طور کلی در سه بعد ممکن است رخ دهد.

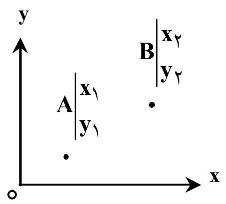
**حرکت**

**در محور :**




جابجایی : $|\overrightarrow{\Delta r}| = x_۲ - x_۱$

**در صفحه :**




جابجایی :$|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$

**در فضا :** $A\begin{vmatrix} x_۱ \\ y_۱ \\ z_۱ \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} x_۲ \\ y_۲ \\ z_۲ \end{vmatrix}$

جابجایی :$|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}$

**مثال ۱ : جسمی از نقطه $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ به نقطه $B\begin{vmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۱۵ \end{vmatrix}$ می‌رود اندازه جابجایی جسم چند متر است؟**

۱) ۱۷    ۲) ۱۹    ۳) ۱۳    ۴) ۱۵

**پاسخ :** گزینه «۳» از فرمول جابجایی در فضا کمک می‌گیریم .

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲} = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۶-۲)^۲ + (۱۵-۳)^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳\ m$$

**سرعت** $(V)$ **:** سرعت یک متحرک یک کمیت برداری است و راستا و جهت واندازه دارد. از نظر مفهومی همان تغییر مکان متحرک بر واحد زمان است. اگر بازهٔ زمانی کوتاه و لحظه‌ای نباشد سرعت، سرعت متوسط است و اگر بازهٔ زمانی کوتاه و لحظه‌ای باشد سرعت، سرعت لحظه‌ای است.

| | |
|---|---|
| سرعت لحظه‌ای : $V = \frac{dx}{dt}$ | سرعت متوسط : $\bar{V} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ |

**نکته ۲:** اگر جابجایی‌های متحرکی در زمان‌های یکسان با هم برابر باشند و بردار سرعت هم تغییر نکند، حرکت با سرعت ثابت است.

**نکته ۳:** واحدهای سرعت $\frac{m}{s}$ و $\frac{km}{h}$ می‌باشند. البته واحدهای دیگری هم برای سرعت برشمرده‌اند که در تست‌های ما مطرح نیست. برای تبدیل این واحدها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\square\,\frac{m}{s} \times ۳/۶ = \square\,\frac{km}{h}$$

$۵ \longrightarrow ۱۸$

$۱۰ \longrightarrow ۳۶$

$۲۰ \longrightarrow ۷۲$

$۳۰ \longrightarrow ۱۰۸$

**نکته ۴:** اگر بردار سرعت در هر لحظه در حال تغییر باشد کمیتی تعریف می‌کنیم که شتاب نام دارد.

**شتاب** $(a)$ : همان تغییرات سرعت بر واحد زمان است واحد آن $\frac{m}{s^۲}$ می‌باشد. شتاب نیز یک پدیدهٔ برداری است و تمام قوانین بردارها برای آن صادق است.

| | |
|---|---|
| شتاب لحظه‌ای : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^۲x}{dt^۲}$ | شتاب متوسط : $\bar{a} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{کل زمان}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ |

به طور کلی هدف ما در نگارش فصلی چون حرکت بیان مطالب کلی و طبقه‌بندی شده می‌باشد به صورتی که در زمان کوتاه داوطلب بتواند بهترین بهره را ببرد.

به نمودار آموزشی که در برخورد با تست‌های فصل حرکت باید به آن توجه کرد دقت کنید.

حرکت:

- سرعت ثابت: جابجایی $\Delta x = Vt \Rightarrow x_۲ - x_۱ = vt \Rightarrow$ مکان ثانویه $x_۲ = vt + x_۱$
- شتاب ثابت:
  - ۱) $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$ ۲) $v = at + v_۰$
  - ۳) $\Delta x = (\frac{v_۰ + v}{۲})t$ ۴) $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x$

**تکنیک tax**

در مسائل حرکت شتابدار با شتاب ثابت ابتدا دقت می‌کنیم و می‌بینیم که آیا زمان $(t)$ در مسأله موجود می‌باشد یا خیر اگر زمان نبود از فرمول(۴) مسأله را حل می‌کنیم و اگر زمان در مسأله بود شتاب $(a)$ را بررسی می‌کنیم اگر $a$ در مسأله نبود از فرمول(۳) مسأله را حل می‌کنیم اگر بود به سراغ $x$ می‌رویم و ...

$t$ — اگر زمان بود — $a$ — اگر شتاب بود — $x$ — اگر مکان بود — (۱) $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$

- $t$: اگر زمان جزء داده‌ها و جزء خواسته‌ها نبود ← (۴) $V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta x$
- $a$: نبود ← (۳) $\Delta x = \frac{(v_۱ + v_۲)}{۲}t$
- $x$: نبود ← (۲) $v = at + v_۰$

در اینجا ابتدا چند صفحه‌ای در مورد حرکت سرعت ثابت مثال حل می‌کنیم و سپس به بررسی مثالهای حرکت شتابدار و تکنیک tax می‌پردازیم.

**مثال ۲: متحرکی که حرکت سرعت ثابت دارد معادله مکان زمان $x = ۵t + ۳$ در SI دارد. متحرک در مدت ۲ ثانیه چند متر جابجا می‌شود؟**

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

**پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به معادله درمی‌یابیم که سرعت $۵\frac{m}{s}$ است. $\Delta x = vt \Rightarrow \Delta x = ۵ \times ۲ = ۱۰\,m$

**مثال ۳: متحرکی که حرکت سرعت ثابت دارد در $t = 1\,s$ در مکان $-2\,m$ و در $t = 3\,s$ در مکان $+4\,m$ می‌باشد. مکان اولیه متحرک کدام گزینه است ؟**

۱) ۱-  ۲) ۱  ۳) ۵-  ۴) ۷

**پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه متحرک در مدت ۲ ثانیه به اندازه $6\,m$ در جهت مثبت محور $x$ جابجا شده است بنابراین در هر ثانیه متحرک ۳ متر در جهت مثبت محور $x$ جلو می‌آید. بنابراین در ۱ ثانیه اول هم ۳ متر جلو آمده و به مکان ۲- رسیده است پس در ابتدا در $-5\,m$ بوده است.

به کمک معادله مکان ـ زمان هم می‌توان به جواب فوق رسید.

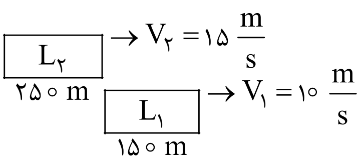
$$x = vt + x_0$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{4-(-2)}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3\,\dfrac{m}{s} \qquad \underset{-2m}{\underset{\downarrow}{x}} = 3\underset{1s}{\underset{\downarrow}{t}} + x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 = 3\times 1 + x_0 \Rightarrow x_0 = -5m$$

**مثال ۴: دو قطار با طول‌های $150\,m$ و $250\,m$ با سرعت‌های $10\,\frac{m}{s}$ و $15\,\frac{m}{s}$ در یک جهت در حال حرکت هستند، زمان سبقت قطار سریعتر چند ثانیه است؟**

۱) ۱۲۰  ۲) ۸۰  ۳) ۴۰  ۴) ۱۰۰

**پاسخ :** گزینه «۲» در یک سبقت قطار عقبی باید هم طول قطار جلویی را طی کند و هم به اندازه طول خود جلوتر برود.



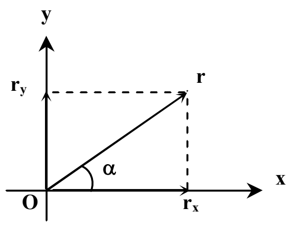

عمل سبقت یک عمل نسبی است و در سرعت‌های نسبی درست برعکس برآیند عمل می‌کنیم یعنی سرعت نسبی در شکل مقابل $V_2 - V_1$ می‌باشد.

$$\Delta x = v_{\text{نسبی}}\, t_{\text{سبقت}}$$

$$L_1 + L_2 = (V_2 - V_1)\, t_{\text{سبقت}} \qquad t_{\text{سبقت}} = \frac{L_1 + L_2}{t_2 - t_1} = \frac{250+150}{15-10} = \frac{400}{5} = 80\,s$$

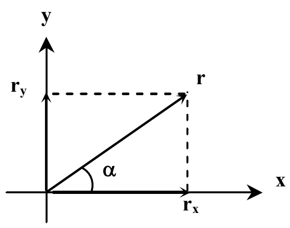
**یادآوری ریاضی:**

**تجزیه بردار**




$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$$

بردار $r$ با جهت مثبت محور $x$ زاویه $\alpha$ می‌سازد. این بردار در حل مسائل کاربردی نیست و باید به مؤلفه‌هایی در راستای محور $x$ و $y$ تجزیه شود با توجه به تعریف $\sin$ و $\cos$ در مثلث قائم‌الزاویه مؤلفه‌های افقی و قائم را به دست می‌آوریم .




$$\cos\alpha = \frac{r_x}{r} \Rightarrow \boxed{r_x = r\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{r_y}{r} \Rightarrow \boxed{r_y = r\sin\alpha}$$

**نکته ۵:** در فیزیک برای به دست آوردن زاویه ، بیشتر از $\tan$ و یا سایر نسبت‌های مثلثاتی کمک می‌گیریم.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{r_y}{r_x}}$$

**نکته ۶:** برای به دست آوردن اندازه بردارهایی که دو مؤلفه عمود بر هم دارند از فیثاغورس کمک می‌گیریم.

$$\boxed{r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

**مثال ۵: اندازه سرعت متحرکی با بردار سرعت $\vec{V} = 3\cos(2\pi t)\vec{i} + 3\sin(2\pi t)\vec{j}$ کدام گزینه است ؟**

۱) $3\tan(2\pi t)$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $3\cot(2\pi t)$

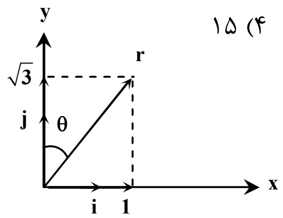
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از فرمول اندازه بردار کمک می‌گیریم.

$$|\vec{V}| = \sqrt{\underbrace{(3\cos(2\pi t))^2 + (3\sin(2\pi t))^2}} = \sqrt{9\cos^2(2\pi t) + 9\sin^2(2\pi t)}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{9\underbrace{(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))}_{1}} = 3\frac{m}{s}$$

**مثال ۶: بردار سرعت متحرکی در SI به صورت $\vec{V} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ می‌باشد زاویه بردار با جهت مثبت محور y چند درجه است ؟**

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۵

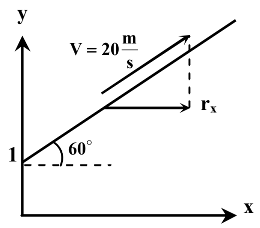



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا بردار را به صورت مختصر رسم می‌کنیم و سپس از $\tan\theta$ کمک می‌گیریم.

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

**مثال ۷: متحرکی با سرعت $20\frac{m}{s}$ بر روی خط $y = \sqrt{3}x + 1$ در مدت ۳ ثانیه چند متر در راستای محور x جابجا می‌شود؟**

۱) ۳۰ ۲) $30\sqrt{3}$ ۳) $60\sqrt{3}$ ۴) ۶۰




☑ **پاسخ :** گزینه «۱» شیب خط $\sqrt{3}$ می‌باشد یعنی tan زاویه‌ای که خط با افق می‌سازد $\sqrt{3}$ می‌باشد.

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

بنابراین خط با افق زاویه $60^\circ$ درجه می‌سازد برای اینکه جابجایی در راستای محور x را به دست آوریم نیاز به سرعت در راستای محور x داریم. بنابراین سرعت $20\frac{m}{s}$ را در راستای محور x تجزیه می‌کنیم.

$$V_x = V\cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\frac{m}{s}$$

با داشتن سرعت در راستای محور x به سادگی به جابجایی خواهیم رسید.

$$\Delta x = V_x t = 10 \times 3 = 30\,m$$

**مثال ۸: بردار سرعت متحرکی در SI به صورت $\vec{V} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ می باشد جابجایی متحرک در راستای محور x در مدت ۲ ثانیه چند متر است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون جابجایی در راستای محور x خواسته شده است از مولفه سرعت در راستای محور x کمک می گیریم.

$$\Delta x = V_x t = 3 \times 2 = 6m$$

**نکته ۷:** سعی کنید در ضمن حل تست نماد فیزیکی اعدادی که در سؤال مطرح هستند و همچنین نماد خواسته تست را بالای متن بنویسید این عمل کمک می‌کند که بتوانید فرمول تست را به سادگی بدست آورید؟!

**مثال ۹: متحرکی با شتاب ثابت $a = 2\frac{m}{s^2}$ در مدتی که سرعت خود را از $V_1 = 10\frac{m}{s}$ به $V_2 = 20\frac{m}{s}$ می‌رساند چند متر جابجا می‌شود؟**

۱) ۱۰۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۳۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر نکته قبل را رعایت کنیم می‌بینیم که در این مثال نه زمان داده شده و نه خواسته شده بنابراین بر طبق روش $t\ a\ x - 1$ (۴ ۳ ۲) از فرمول (۴) که همان مستقل از زمان است کمک می‌گیریم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 20^2 - 10^2 = 2 \times 2\Delta x \Rightarrow \Delta x = 75\ m$$

**مثال ۱۰: متحرکی با شتاب ثابت در $t = 2$ ثانیه‌ای که سرعت خود را از $V_1 = 10\frac{m}{s}$ به $V_2 = 20\frac{m}{s}$ می‌رساند چند متر جابجا می‌شود؟**

۱) ۱۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

**پاسخ :** گزینه «۳» چون t در مثال داریم بر طبق روش $\underset{۴}{t}-\underset{۳}{a}-\underset{۲}{x}-۱$ به سراغ a می‌رویم چون شتاب در مثال نه داده شده و نه خواسته شده بنابراین مسأله با فرمول شماره (۳) مستقل از شتاب حل می‌شود. $\Delta x=(\frac{v_۱+v_۲}{۲})t \Rightarrow \Delta x=(\frac{۱۰+۲۰}{۲})۲ \Rightarrow \Delta x=۳۰\ m$

**مثال ۱۱: متحرکی با شتاب ثابت $a=۲\frac{m}{s^۲}$ در چه مدت سرعت خود را از $V_۱=۱۰\frac{m}{s}$ به $V_۲=۲۰\frac{m}{s}$ می‌رساند؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

**پاسخ :** گزینه «۴» زمان t جزء خواسته‌های مسأله است. بر طبق روش tax به سراغ شتاب a می‌رویم. شتاب a هم جزء داده‌های مسأله است به سراغ مکان x می‌رویم. چون نه مکان داده و نه مکان خواسته، از فرمول (۲) مثال حل می‌شود.

$v=at+v_۰ \Rightarrow ۲۰=۲\times t+۱۰ \Rightarrow ۲t=۱۰ \Rightarrow t=۵\ s$

**مثال ۱۲: متحرکی با شتاب ثابت $a=۲\frac{m}{s^۲}$ از مکان $x_۰=۳m$ با سرعت اولیه $V_۰=۱\frac{m}{s}$ حرکت خود را آغاز می‌کند. در لحظه $t=۲s$ در چه مکانی است؟**

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۳

**پاسخ :** گزینه «۲» در مثال t داریم به سراغ a می‌رویم a هم دیده می‌شود. به سراغ x می‌رویم x هم دیده می‌شود. بنابراین بر طبق tax مسأله با فرمول (۱) حل می‌شود. $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v.t \Rightarrow x-x_۰=\frac{۱}{۲}at^۲+v.t \Rightarrow x-۳=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲^۲+۱\times ۲$

$x-۳=۶ \Rightarrow x=۹\ m$

**مثال ۱۳: متحرکی با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون براه می افتد ، ۳s ثانیه پس از شروع حرکت متحرک چند متر جابجا می‌شود؟**

۱) ۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

**پاسخ :** گزینه «۳» به کمک روش tax از فرمول یک به سادگی حل می شود.

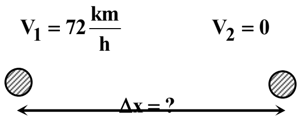
$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t$

$\Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳^۲+۰=۹m$

**مثال ۱۴: متحرکی با سرعت $۷۲\frac{km}{h}$ در حال حرکت است با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می کند تا لحظه توقف چند متر جابجا می‌شود؟**

۱) ۱۰۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰

**پاسخ :** گزینه «۲»




با توجه به اینکه $۷۲\frac{km}{h}$ همان $۲۰\frac{m}{s}$ می باشد، به کمک فرمول مستقل از زمان و صفر قرار دادن سرعت ثانویه می توانیم جابجایی تا لحظه توقف را بدست آوریم. دقت کنید شتاب ترمز منفی است.

$V^۲-V_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-۲۰^۲=۲\times(-۴)\Delta x \Rightarrow -۴۰۰=-۸\Delta x \Rightarrow \Delta x=۵۰\ m$

**نکته ۸:** چنانچه از معادله مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم به معادله سرعت بر حسب زمان می‌رسیم.

**نکته ۹:** چنانچه از معادله سرعت بر حسب زمان مشتق بگیریم به معادله شتاب بر حسب زمان می‌رسیم.

**مثال ۱۵: در مثالهای زیر سرعت و شتاب لحظه‌ای را بدست آورید؟**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vec{r}=(۳t^۲)\vec{i}+(۴t^۲+۵)\vec{j}$ | $x=t$ | $x=t^۲$ | $x=t^۳$ |

**پاسخ :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vec{V}=(۶t)\vec{i}+(۸t+۰)\vec{j}$ | $V=۱$ | $V=۲t$ | $V=۳t^۲$ |
| $\vec{a}=۶\vec{i}+۸\vec{j}$ | $a=۰$ | $a=۲$ | $a=۶t$ |
| شتاب ثابت در صفحه مختصات | سرعت ثابت | شتاب ثابت | شتاب متغیر |

در مثالهایی که در ادامه می‌خوانید به بررسی موضوعات مهم سرعت لحظه‌ای، سرعت متوسط و شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط می‌پردازیم:

**مثال ۱۶: متحرکی ۲ ثانیه با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ و ۳ ثانیه با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در یک جهت حرکت می‌کند سرعت متوسط متحرک در مدت ۵ ثانیه چند متربرثانیه است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

**پاسخ :** گزینه «۳» برای سرعت متوسط باید کل جابجایی را بدست آورد در این مثال هر دو سرعت مثبت هستند یعنی هر دو جابجایی پیرو هم رخ داده‌اند.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۲۰+۶۰}{۲+۳}=\frac{۸۰}{۵}=۱۶\frac{m}{s} \qquad \xrightarrow{\Delta x_۲=v_۲t_۲=۲۰\times۳}\xrightarrow{\Delta x_۱=v_۱t_۱=۱۰\times۲}$$

**مثال ۱۷: متحرکی $۲۰\,s$ با سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و سپس $۱۰\,s$ با سرعت $-۳۰\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند سرعت متوسط متحرک در مدت ۳۰ ثانیه چند متربرثانیه است؟**

۱) $-۲/۵$ ۲) $-۱۰$ ۳) ۵ ۴) ۰

**پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال یک سرعت مثبت و یک سرعت منفی است در مشخص کردن جابجایی دقت کنید.

$$\Delta x_۱=v_۱t_۱=۱۵\times۲۰=۳۰۰m$$

$$\Delta x_۲=-۳۰\times۱۰=-۳۰۰m$$

همانطور که مشاهده می‌شود متحرک $۳۰۰\,m$ به جلو رفته و سپس بازگشته است. بنابراین کل جابجایی‌اش صفر است.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۳۰۰-۳۰۰}{۳۰}=۰\frac{m}{s}$$

**مثال ۱۸: متحرکی در مدت ۲ ثانیه از نقطه $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ به نقطه $B\left|\begin{matrix}۵\\۹\end{matrix}\right.$ می‌رود. اندازه سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟**

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲/۵ ۴) ۰

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}}{t}=\frac{\sqrt{(۵-۲)^۲+(۹-۵)^۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}{۲}=۲/۵\frac{m}{s}$$

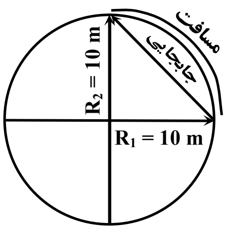
**مثال ۱۹: متحرکی ربع دایره‌ای به قطر $۲۰\,m$ را در مدت $۱۰\,s$ می‌پیماید. اندازه سرعت متوسط چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}$




**پاسخ :** گزینه «۲» چون قطر $۲۰\,m$ است شعاع $۱۰\,m$ است. ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس جابجایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta r=\sqrt{۱۰^۲+۱۰^۲}=\sqrt{۲\times۱۰^۲}=۱۰\sqrt{۲}\,m$$

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۱۰}=\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

**مثال ۲۰: بردار مکان متحرکی در SI در مدت ۲ ثانیه از $\vec{r}_۱=\vec{i}+۳\vec{j}$ به $\vec{r}_۲=۶\vec{i}+۱۵\vec{j}$ می‌رسد. بردار سرعت متوسط کدام گزینه است؟**

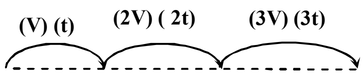
۱) $\vec{V}=۵\vec{i}+۳\vec{j}$ ۲) $\vec{V}=۲/۵\vec{i}+۶\vec{j}$ ۳) $\vec{V}=۵\vec{i}+۶\vec{j}$ ۴) $\vec{V}=۲/۵\vec{i}+۳\vec{j}$

**پاسخ :** گزینه «۲»

$$\vec{V}=\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{t}=\frac{(۶-۱)\vec{i}+(۱۵-۳)\vec{j}}{۲}=۲/۵\vec{i}+۶\vec{j}$$

**نکته ۱۰:** اگر در مسأله $v,t$ را به ما دادند آنها را کنار هم می‌نویسم تا ضرب آنها $vt$ همان جابجایی $\Delta x$ باشد.

**مثال ۲۱: متحرکی در زمان‌های متوالی t و ۲t و ۳t به ترتیب با سرعت‌های ۳V , ۲V , V حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟**



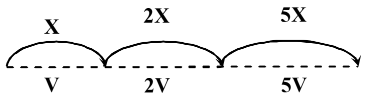

۱) $\frac{۶}{۱۴}V$  ۲) $\frac{۹}{۱۴}V$  ۳) $\frac{۱۴}{۹}V$  ۴) $\frac{۱۴}{۶}V$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{vt+۴vt+۹vt}{t+۲t+۳t}=\frac{۱۴vt}{۶t}=\frac{۱۴}{۶}V$$

**نکته ۱۱:** اگر در مسأله‌ای $V,x$ ها را به ما دادند نسبت $\frac{x}{v}$ های هر مرحله معرف همان زمان آن مرحله است.

**مثال ۲۲: متحرکی جابه‌جایی‌های متوالی x و ۲x و ۵x را بترتیب با سرعت‌های ۵V,۲V,V طی می کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟**

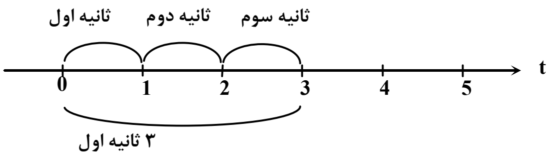



۱) ۲v  ۲) ۸v  ۳) $\frac{۸}{۳}v$  ۴) $\frac{۳}{۸}v$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x+۲x+۵x}{\frac{x}{v}+\frac{۲x}{۲v}+\frac{۵x}{۵v}}=\frac{\frac{۸x}{۱}}{\frac{۳x}{v}}=\frac{۸}{۳}v$$

**نکته ۱۲:** ثانیه nام بین لحظات $n-۱$ و n می‌باشد .




به توضیح مقابل توجه کنید : ⇐
- ثانیه اول بین لحظات صفر تا یک می‌باشد.
- ثانیه دوم بین لحظات یک تا دو می باشد.
- ثانیه سوم بین لحظات دو تا سه می باشد.

**مثال ۲۳: معادله مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^۲$ می باشد. سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۶  ۲) ۵  ۳) ۹  ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{x_{t=۳}-x_{t=۰}}{۳-۰}=\frac{۳^۲-۰^۲}{۳-۰}=\frac{۹}{۳}=۳\frac{m}{s}$$

**مثال ۲۴: معادله مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^۲$ می باشد. سرعت متوسط متحرک در ثانیه سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵  ۲) ۶  ۳) ۹  ۴) ۵

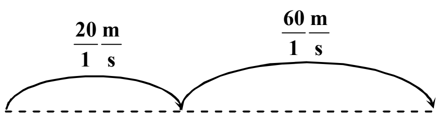
☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال سرعت متوسط در ثانیه سوم خواسته شده است بنابراین مساله بین لحظات $t=۲s$ تا $t=۳s$ طرح شده است.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{x_{t=۳}-x_{t=۲}}{۳-۲}=\frac{۳^۲-۲^۲}{۳-۲}=\frac{۹-۴}{۱}=۵\frac{m}{s}$$

**مثال ۲۵: متحرکی $\frac{۲}{۵}$ مسیر خود را با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و ما بقی را با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ می پیماید. سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $\frac{۲۰۰}{۳}$  ۲) $\frac{۱۰۰}{۳}$  ۳) $\frac{۴۰۰}{۳}$  ۴) $\frac{۵۰}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای محاسبه زمان در هر قسمت از نسبت $\frac{x}{V}$ استفاده می‌کنیم.




$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\frac{۲}{۵}x+\frac{۳}{۵}x}{\frac{\frac{۲}{۵}x}{۲۰}+\frac{\frac{۳}{۵}x}{۶۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰}+\frac{۳x}{۳۰۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰}+\frac{x}{۱۰۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۳x}{۱۰۰}}=\frac{۱۰۰}{۳}\frac{m}{s}$$

**مثال ۲۶:** متحرکی با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ با سرعت $3\frac{m}{s}$ حرکت خود را آغاز می کند سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۱۴ ۳) ۷ ۴) ۱۰

**پاسخ :** گزینه «۳» چون حرکت با شتاب ثابت است بنابراین جابجایی را از فرمول شماره (۱) حرکت‌های شتاب ثابت می‌نویسیم .

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\Delta x}{t}=\frac{\frac{1}{2}at^2+V_0t}{t}=\frac{1}{2}at+V_0=\frac{1}{2}\times2\times4+3=7\frac{m}{s}$$

**مثال ۲۷:** متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=-2t^2+20t+40$ در SI داریم. متحرک درچه مکانی متوقف می‌شود؟

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۴۰

**پاسخ :** گزینه «۲»

**نکته ۱۳:** برای اینکه لحظه توقف بدست آید ، ابتدا معادله سرعت ـ زمان را بدست می آوریم و آنرا برابر صفر قرار می دهیم.

$$V=-4t+20=0\Rightarrow-4t=-20\Rightarrow t=5s$$

**نکته ۱۴:** برای بدست آوردن مکان توقف لحظه توقف را در معادله مکان ـ زمان قرار می دهیم.

$$X=-2(5)^2+20(5)+40=-50+100+40=90m$$

**مثال ۲۸:** متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=2t^3+4t^2+10$ در SI داریم ، شتاب متوسط در ثانیه دوم چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۱۳ ۲) ۴۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۰

**پاسخ :** گزینه «۳» برای بدست آوردن شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را به تغییرات زمان تقسیم کنیم. بنابراین به معادله سرعت ـ زمان نیاز داریم. از تابع مکان ـ زمان مشتق می گیریم.

$$V=6t^2+8t \qquad \bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}=\frac{V_{t=2}-V_{t=1}}{2-1}=\frac{40-14}{1}=26\frac{m}{s^2}$$

**مثال ۲۹:** متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=2t^3+4t^2+10$ در SI داریم، شتاب متحرک در لحظه $t=2s$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

**پاسخ :** گزینه «۳» چون شتاب لحظه‌ای خواسته است ابتدا با ۲ بار مشتق گیری از تابع مکان ـ زمان به تابع شتاب ـ زمان می رسیم. ولحظهٔ مربوطه را قرار می‌دهیم.

$$x=2t^3+4t^2+10$$

$$V=6t^2+8t+0$$

$$a=12t+8\Rightarrow a_{t=2}=12\times2+8=32\frac{m}{s^2}$$

**مثال ۳۰:** بردار سرعت متحرک در SI در مدت ۲ ثانیه از $\vec{V}_1=2\vec{i}+5\vec{j}$ به $\vec{V}_2=8\vec{i}+13\vec{j}$ می رسد اندازه شتاب متوسط چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

**پاسخ :** گزینه «۲» برای بدست آوردن شتاب متوسط اندازه تغییرات سرعت را به زمان تقسیم می‌کنیم .

$$|\bar{\vec{a}}|=\frac{|\overline{\Delta V}|}{t}=\frac{|6\vec{i}+8\vec{j}|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+8^2}}{2}=\frac{10}{2}=5\frac{m}{s^2}$$

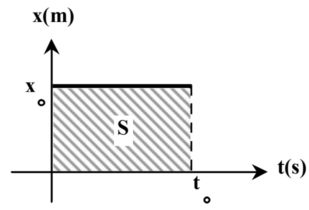
**مثال ۳۱:** متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=-2t^2+8t+40$ در SI داریم. اندازه سرعت اولیه کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

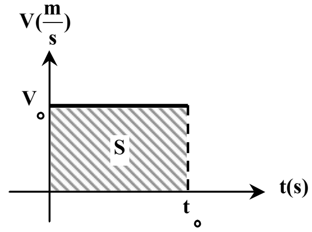
**پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا از تابع مکان ـ زمان مشتق می گیریم تا به معادله سرعت ـ زمان برسیم و برای بدست آوردن سرعت اولیه در تابع سرعت ـ زمان، زمان را صفر قرار می‌دهیم.

$$X=-2t^2+8t+40\Rightarrow V=-4t+8\Rightarrow V_0=8\frac{m}{s}$$

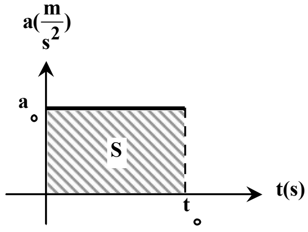
**سطح زیر نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان و شتاب ــ زمان:**




$S = x_\circ t_\circ =$ هیچی




$S = V_\circ t_\circ = \Delta x$



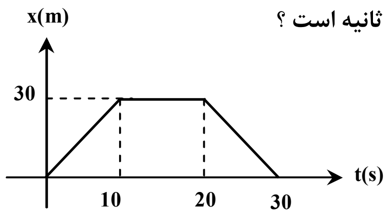

$S = a_\circ t_\circ = \Delta V$

**نکته ۱۵:** همانطور که در نمودارهای فوق مشخص شده است سطح زیر نمودار مکان ـ زمان معرف هیچ پدیدهٔ مشخص فیزیکی نمی‌باشد و باید دقت کرد که از سطح زیر این نمودار استفاده نکرد .

**نکته ۱۶:** سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان همان جابجایی یا تغییر مکان می‌باشد تا زمانی که مساحت در قسمت مثبت محور V باشد، جابجایی در جهت مثبت محور x رخ می‌دهد و هنگامی که مساحت در قسمت منفی محور V باشد جابجایی در جهت منفی محور x می‌باشد.

**نکته ۱۷:** سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان همان تغییرات سرعت می‌باشد. تا زمانی که نمودار شتاب ـ زمان در قسمت مثبت محور شتاب باشد تغییرات سرعت مثبت و اگر نمودار در قسمت منفی محور شتاب باشد تغییرات سرعت منفی است.

**مثال ۳۲: با توجه به نمودار مکان ــ زمان مقابل سرعت متوسط پس از ۳۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است ؟**

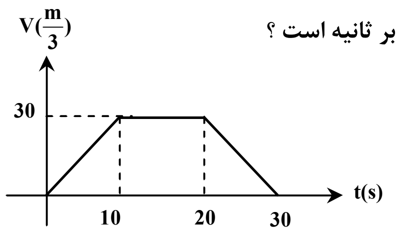



۱) ۳۰
۲) ۰
۳) ۱۵
۴) ۱

**پاسخ:** گزینه «۲» در این مثال از سطح نمودار نمی‌توان کمک گرفت چون پدیدهٔ مشخص فیزیکی نیست. برای سرعت متوسط به مکان اولیه و ثانویه نیاز داریم که می‌توان از محور عمودی که همان محور x ها می‌باشد استفاده کرد. در لحظهٔ صفر مکان صفر و در لحظه ۳۰s هم مکان صفر است.

$$\bar{V} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{0-0}{30-0} = 0\frac{m}{s}$$

**مثال ۳۳: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان مقابل سرعت متوسط پس از ۳۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است ؟**

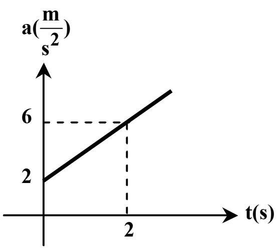



۱) ۱۰
۲) ۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

**پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال برای سرعت متوسط نیاز به کل جابجایی داریم و کل جابجایی را می‌توانیم از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان به دست آوریم. مساحت ذوزنقه حاصلضرب مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع می‌باشد.

$$\bar{V} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{S}{t} = \frac{(30+10)\frac{30}{2}}{30} = 20\frac{m}{s}$$

**مثال ۳۴: با توجه به نمودار شتاب ــ زمان مقابل اگر اندازه سرعت اولیه $-5\frac{m}{s}$ باشد اندازه سرعت در لحظه $t = 2s$ چند متر بر ثانیه است؟**




۱) ۸
۲) ۱۳
۳) ۳
۴) ۰

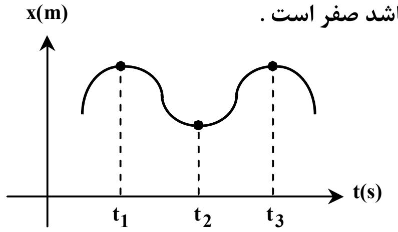
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان همان تغییرات سرعت می‌باشد .

$$S=\Delta V \Rightarrow S=V_۲-V_۱$$

$$\frac{(۲+۶)۲}{۲}=V_۲-(-۵) \Rightarrow ۸=V_۲+۵ \Rightarrow V_۲=۳\frac{m}{s}$$

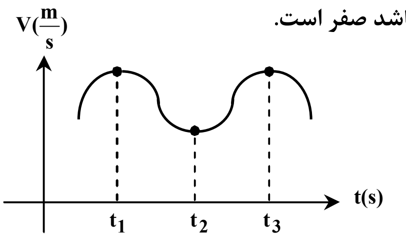
**نکته ۱۸:** در نمودارهای فصل حرکت که محور افقی زمان است. در نقاط اکسترمم $(Min\,,Max)$ مشتق اول از نمودار صفر است .

**مثال ۳۵: در نمودار مقابل در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ و $t_۳$ مشتق اول از مکان که همان سرعت می‌باشد صفر است .**




$$V_۱=V_۲=V_۳=۰$$

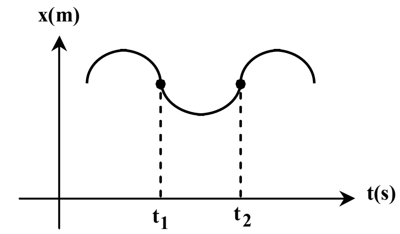
**مثال ۳۶: در نمودار مقابل در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ و $t_۳$ مشتق اول از سرعت که همان شتاب می‌باشد صفر است.**




$$a_۱=a_۲=a_۳=۰$$

**نکته ۱۹:** در نمودارهای فصل حرکت که محور افقی زمان است در نقاط عطف (جایی که گودی نمودار تغییر می‌کند) مشتق دوم از نمودار صفر است .

**مثال ۳۷: در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ مشتق دوم از مکان یعنی شتاب صفر می‌باشد.**




$$a_۱=a_۲=۰$$

با توجه به رابطه $(F=ma)$ هر جا شتاب صفر باشد نیرو هم صفر است.

$$F_۱=F_۲=۰$$

**بحث تند شونده و کند شونده بودن حرکت شتابدار**

**نکته ۲۰:** هرگاه بردار سرعت و شتاب با هم، هم جهت باشند همدیگر را تقویت می‌کنند و حرکت تند شونده است.

$$\left.\begin{array}{l} a>۰ \\ v>۰ \\ \\ a<۰ \\ v<۰ \end{array}\right\} av>۰$$

**نکته ۲۱:** هرگاه بردار سرعت و شتاب در خلاف جهت هم باشند همدیگر را تضعیف می کنند. بنابراین حرکت کند شونده است.

$$\left.\begin{array}{l} a>۰ \\ v<۰ \\ \text{یا} \\ a<۰ \\ v>۰ \end{array}\right\} av<۰$$

**مثال ۳۸: متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=-t^۲+۸t+۴۰$ در چه لحظاتی حرکت تند شونده و در چه لحظاتی حرکت کند شونده دارد؟**

☑ **پاسخ :** برای تند و کند شونده بودن حرکت ابتدا معادلات سرعت و شتاب را بدست می‌آوریم.

$$V=-۲t+۸ \quad , \quad a=-۲\frac{m}{s^۲}$$

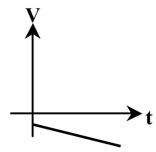
شتاب در این مثال همواره منفی است. بنابراین به سراغ $V$ می رویم و آنرا تعیین علامت می کنیم.

$$V<۰ \Rightarrow -۲t+۸<۰ \Rightarrow -۲t<-۸ \Rightarrow t>۴ \Rightarrow \begin{cases} v<۰ \\ a<۰ \end{cases}$$ حرکت تندشونده است

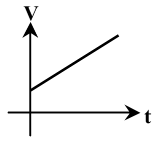
$$V>۰ \Rightarrow -۲t+۸>۰ \Rightarrow -۲t>-۸ \Rightarrow t<۴ \Rightarrow \begin{cases} v>۰ \\ a<۰ \end{cases}$$ حرکت کندشونده است

بنابراین حرکت این متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

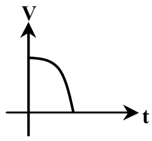
**نکته ۲۲:** در نمودارهای سرعت ـ زمان اگر اندازه سرعت کم شده یا به عبارت دیگرنمودار به محور زمان نزدیک شود ، حرکت کند شونده و در غیر این صورت حرکت تند شونده است.



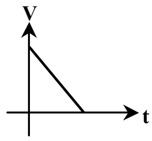
تندشونده



تندشونده

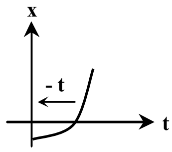


کندشونده

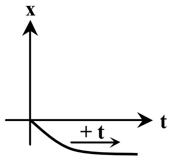


کندشونده

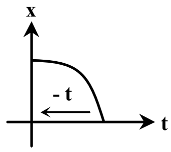
**نکته ۲۳:** در نمودارهای مکان ـ زمان اگر گودی نمودار در راستای محور t رو به سوی مثبت محور t بود حرکت کند شونده و اگر گودی در راستای محور t رو به سوی منفی محور t بود ، حرکت تند شونده است.



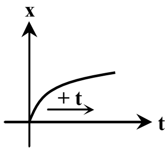
تند شونده



کند شونده



تند شونده

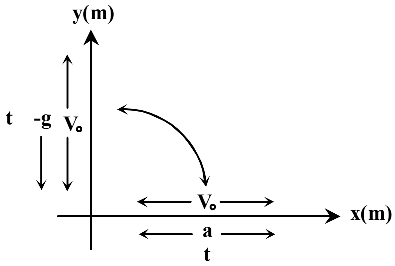


کند شونده

## حرکت در راستای قائم

حرکت در راستای قائم نوعی حرکت شتاب ثابت با شتاب گرانش زمین است.

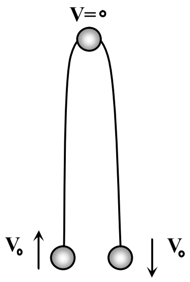
با دو تغییر متغیر به سادگی به فرمولهای این بخش می رسیم. $\begin{cases} x \to y \\ a \to -g \end{cases}$




## فرمولهای مهم حرکت سقوط آزاد در راستای قائم

| | | | |
|---|---|---|---|
| $V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$ <br> $\downarrow$ <br> $V^2 - V_0^2 = -2g\,\Delta y$ | $\Delta x = (\frac{V_0 + V}{2})t$ <br> $\downarrow$ <br> $\Delta y = (\frac{V_0 + V}{2})t$ | $V = at + v_0$ <br> $\downarrow$ <br> $V = -gt + v_0$ | $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$ <br> $\downarrow$ <br> $y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + y_0$ |

## بررسی نقطه اوج




گلوله‌ای که از سطح زمین با سرعت $V_0$ در شرایط خلاء به بالا پرتاب کرده ایم در بالاترین نقطه از مسیر حرکت سرعتش به صفر می‌رسد که به آن نقطه، نقطه اوج می گوییم.

| ارتفاع اوج | زمان رفتن و بازگشتن به افق پرتاب | زمان اوج |
|---|---|---|
| $V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$ <br> $0 - V_0^2 = -2gh$ اوج <br> $h = \frac{V_0^2}{2g}$ اوج | دو برابر زمان اوج است <br> $t = 2t$ اوج رفت و برگشت <br> $t = \frac{2V_0}{g}$ رفت و برگشت | $V = -gt + V_0$ <br> $0 = -gt + V_0$ <br> $-V_0 = -gt$ اوج <br> $t = \frac{V_0}{g}$ اوج |

**نکته ۲۴:** در این بخش هر پرتابی که به سمت بالا باشد مثبت و هر پرتابی که به سمت پائین باشد منفی است.

**مثال ۳۹: گلوله‌ای در شرایط خلاء با سرعت $30\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود چند ثانیه بعد، سرعت گلوله $20\frac{m}{s}$ رو به پائین خواهد بود؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۵

**پاسخ :** گزینه «۴» سرعت ثانویه را $-20\frac{m}{s}$ در فرمول قرار می دهیم چون رو به پائین است.

$$V = -gt + V_0 \Rightarrow -20 = -10t + 30 \Rightarrow -50 = -10t \Rightarrow t = 5s$$

**مثال ۴۰: گلوله‌ای را از سطح زمین در شرایط خلاء با سرعت $30\frac{m}{s}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می کنیم زمان رسیدن به نقطه اوج چند ثانیه است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

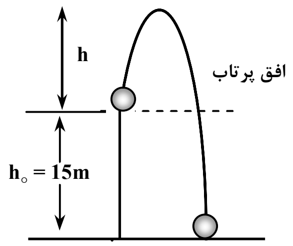
☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$t_{اوج} = \frac{V_0}{g} = \frac{30}{10} = 3s$$

**مثال ۴۱: گلوله‌ای را از ارتفاع ۱۵ متری سطح زمین در شرایط خلاء با سرعت $40\frac{m}{s}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می کنیم بیشترین ارتفاع گلوله از سطح زمین چند متر است؟**

۱) ۶۵ ۲) ۸۰ ۳) ۹۵ ۴) ۷۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا بیشترین فاصله گلوله از افق پرتاب را به کمک فرمول ارتفاع اوج محاسبه می‌کنیم و سپس ۱۵ m را به آن اضافه می کنیم تا بیشترین فاصله از سطح زمین محاسبه شود.

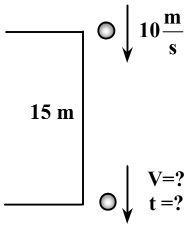



اوج نسبت به افق پرتاب $h = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{40^2}{2\times 10} = \frac{1600}{20} = 80m$

$$H = h + h_0 = 80 + 15 = 95m$$

**مثال ۴۲: گلوله‌ای را از ارتفاع 15m سطح زمین با سرعت $10\frac{m}{s}$ رو به پائین پرتاب می کنیم گلوله چند ثانیه بعد و با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟**

☑ **پاسخ :** ابتدا به کمک فرمول (۱) زمان را بدست می آوریم :




$\Delta y$ چون رو به پائین است، $-15m$ می باشد.

$V_0$ چون رو به پائین است، $-10\frac{m}{s}$ می باشد.

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

$$-15 = -5t^2 - 10t$$

$$0 = -5t^2 - 10t + 15 \Rightarrow t = 1s$$

با داشتن زمان می توانیم سرعت برخورد به زمین را از فرمول $V = -gt + V_0$ بدست آوریم البته به کمک رابطهٔ مستقل از زمان $V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$ هم می‌توانیم سرعت برخورد به زمین را بدست آوریم.

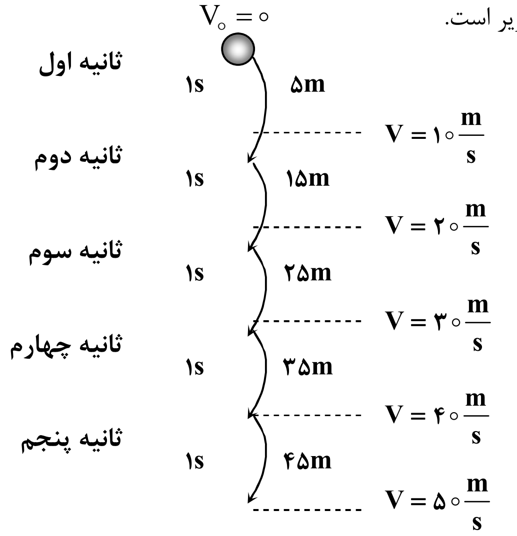
$$V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$$
$$V^2 - (-10)^2 = -20(-15)$$
$$V^2 - 100 = +300 \Rightarrow V^2 = 400 \Rightarrow V = -20\frac{m}{s}$$

یا

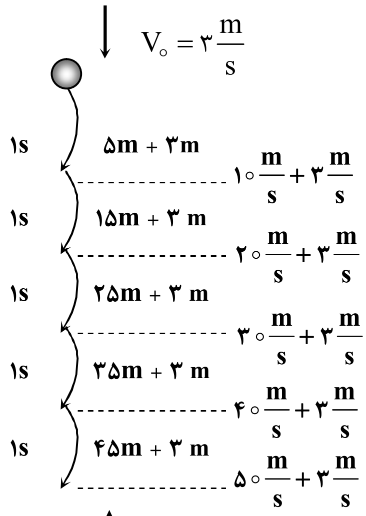
$$V = -gt + V_0$$
$$V = -10\times 1 + (-10)$$
$$V = -20\frac{m}{s}$$

**نکته فوق سفارشی**

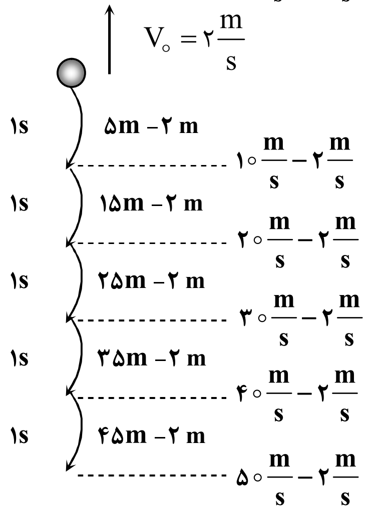
اگر گلوله‌ای از ارتفاعی رها شود در ثانیه‌های متوالی جابجایی و سرعت‌هایش به صورت زیر است.



اگر سرعت اولیه داشته باشیم به تمام عددهای جابجایی و سرعت عدد سرعت اولیه را اضافه می کنیم. به شکل روبرو توجه کنید! این موضوع بدین معنی است که مثلاً اگر گلوله ای با سرعت $۳\frac{m}{s}$ به پائین پرتاب شود در ثانیه دوم ۳+۱۵ متر سقوط می کند. یا به عنوان مثال در آخر ثانیه سوم سرعتش به $۳+۳۰\frac{m}{s}$ می‌رسد. یا در ۲ ثانیه اول جمعاً (۳+۵) متر و(۳+۱۵) متر سقوط می کند که به اندازه ۲۶m سقوط خواهد کرد.




**نکته ۲۵:** اگر سرعت اولیه رو به بالا باشد عدد سرعت اولیه را از تمام سرعت‌ها و جابجایی ها کم می کنیم. این موضوع بدین معنی است که مثلاً اگر گلوله‌ای با سرعت $۲\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب شود در ثانیه دوم ۲ m-۱۵ سقوط خواهد کرد.یا در آخر ثانیه سوم سرعتش به $۳۰-۲\frac{m}{s}$ می رسد.




به مثالی که قبلا حل کردیم دوباره توجه کنید.

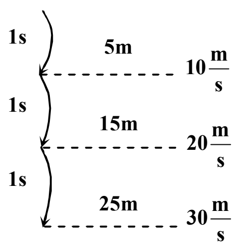
**مثال ۴۳: گلوله‌ای از ارتفاع ۱۵ m سطح زمین با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ روبه پائین پرتاب می‌کنیم. گلوله چند ثانیه بعد و با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟**

☑ **پاسخ :** با خود می‌گوئیم اگر سرعت اولیه نداشت به صورت ۵ ، ۱۵ ، ۲۵ متر سقوط می کرد و چون سرعت اولیه $۱۰\frac{m}{s}$ روبه پائین دارد بنابراین به صورت ۱۰+۵ ، ۱۰+۱۵ ، ۱۰+۲۵ متر سقوط می کند. مشخص می‌شودکه این متحرک ۱۵ m را در یک ثانیه سقوط کرده و نیازی به حل معادله درجه ۲ نداریم.

اگر سرعت اولیه نداشت سرعتش به صورت ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۰ متر بر ثانیه می بود و حال که سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ رو به پائین دارد سرعتش به صورت ۱۰+۱۰ ، ۱۰+۲۰ ، ۱۰+۳۰ متر بر ثانیه است. بنابراین در پایان ثانیه اول سرعتش $۲۰\frac{m}{s}$ می باشد.

**مثال ۴۴: گلوله‌ای از ارتفاع ۴۵m سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود. گلوله چند ثانیه بعد و با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟**

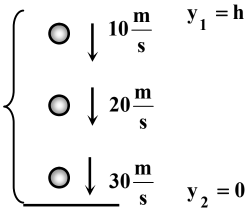
☑ **پاسخ :** گلوله در ثانیه اول ۵ m و در ثانیه دوم ۱۵ mودر ثانیه سوم ۲۵ m می‌پیماید و در ۳ ثانیه به زمین برخورد می‌کند و۴۵m را سقوط می‌کند و در ضمن در پایان ثانیه اول سرعت به $۱۰\frac{m}{s}$ در پایان ثانیه دوم سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و پایان ثانیه سوم سرعت به $۳۰\frac{m}{s}$ می‌رسد.



**مثال ۴۵: گلوله‌ای با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می کند. گلوله ۲ ثانیه قبل در چه ارتفاعی از سطح زمین بوده است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

**پاسخ :** گزینه «۳»




چنانچه سرعت گلوله رو به پائین باشد در هر ثانیه اندازه سرعت ۱۰ تا ۱۰ تا زیاد می‌شود.

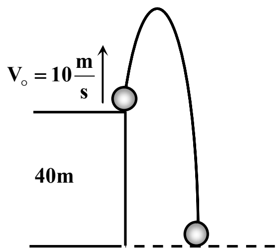
چنانچه سرعت گلوله رو به بالا باشد در هر ثانیه اندازه سرعت ۱۰ تا ۱۰ تا کم می‌شود.

در این مثال چون با $۳۰\frac{m}{s}$ به زمین بر خورد کرده ۲ ثانیه قبل سرعتش $۱۰\frac{m}{s}$ بوده است.

به کمک فرمول مستقل از زمان ارتفاع بدست می آید.

$$V^۲ - V_۰^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow (-۳۰)^۲ - (-۱۰)^۲ = -۲۰\Delta y \Rightarrow ۸۰۰ = -۲۰\Delta y \Rightarrow \Delta y = -۴۰\,m \Rightarrow y_۱ = h = ۴۰\,m$$

**مثال ۴۶: گلوله‌ای از ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود گلوله چند ثانیه بعد به زمین برخورد می کند؟**




۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۳

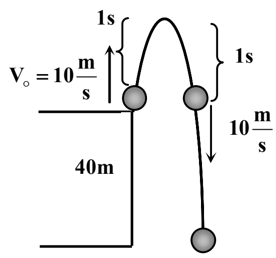
**پاسخ :** گزینه «۲»

**روش اول:** اگر از معادله مکان ـ زمان کمک بگیریم خواهیم داشت:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_۰t$$

$$-۴۰ = -۵t^۲ + ۱۰t \Rightarrow ۰ = -۵t^۲ + ۱۰t + ۴۰ \Rightarrow t = ۴s$$

**روش دوم:** اگر از روش سفارشی کمک بگیریم، خواهیم داشت:

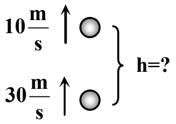



گلوله‌ای که سرعت اولیه $۱۰\frac{m}{s}$ دارد ۱ ثانیه‌ای به اوج می رسد و ۱ ثانیه‌ای به افق پرتاب با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ باز می‌گردد. پس تا اینجا 2s زمان صرف کرده و ۴۰ m راه در پیش دارد. اگر سرعت اولیه نداشت از اینجا به بعد
۵
۱۵
۲۵
متر سقوط می‌کرد حال که سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ رو به پائین دارد، بنابراین
۵+۱۰
۱۵+۱۰
۲۵+۱۰
متر سقوط می‌کند. مشاهده می‌شود که ۴۰ m باقیمانده را در ۲ ثانیه خواهد رفت و بنابراین کل زمان حرکت ۴ ثانیه خواهد بود.

**مثال ۴۷: گلوله‌ای را از سطح زمین با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌کنیم. در چه ارتفاعی از سطح زمین اندازه سرعت به $۱۰\frac{m}{s}$ می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۵

**پاسخ :** گزینه «۲» به کمک فرمول مستقل از زمان مساله را حل می‌کنیم چون نه زمان داده شده و نه زمان خواسته شده است.



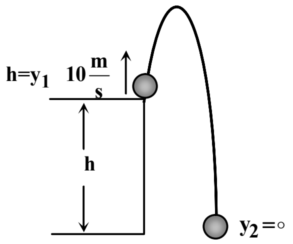

$$V^۲ - V_۰^۲ = -۲g\Delta y$$

$$۱۰^۲ - ۳۰^۲ = -۲۰\Delta y$$

$$-۸۰۰ = -۲۰\Delta y \Rightarrow \Delta y = ۴۰\,m$$

**مثال ۴۸: گلوله‌ای را از بالای برجی با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می کنیم و گلوله ۵s بعد به زمین برخورد می‌کند ارتفاع برج چند متر است؟**

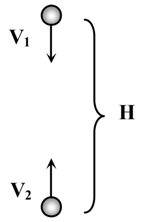
۱) ۱۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۲۰۰




☑ **پاسخ :** گزینه «۳» سرعت اولیه را باید مثبت قرار دهیم چون رو به بالا است.چون هم $t$ و هم $g$ و هم $y$ مطرح است، از فرمول شماره (۱) کمک می گیریم.

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+V_{\circ}t+y_{\circ}$$

$$\circ=-\frac{۱}{۲}\times ۱\circ\times ۵^{۲}+۱\circ\times ۵+h \Rightarrow h=۷۵m$$
چون سطح زمین مکان ثانویه است.




**نکته ۲۶:** اگر دو گلوله در شرایط خلاء همزمان از بالا و پایین یک بلندی به سمت هم پرتاب شوند حرکتشان نسبت به هم یکنواخت است و خواهیم داشت:

$$\Delta y_{\text{نسبی}}=V_{\text{نسبی}}\,t \Rightarrow \boxed{H=(V_۱+V_۲)t}$$

**مثال ۴۹: دو گلوله به ترتیب با سرعت‌های $۱\circ\frac{m}{s}$ و $۲\circ\frac{m}{s}$ همزمان از بالا و پایین برجی به ارتفاع ۳۰۰ متر به سمت هم پرتاب می‌شوند پس از چند ثانیه به هم می‌رسند؟**

۱) ۵　　۲) ۱۰　　۳) ۱۵　　۴) ۲۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

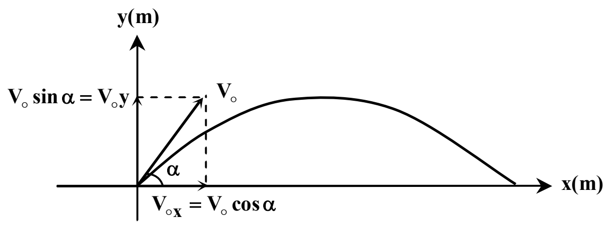
$$\Delta y_{\text{نسبی}}=V_{\text{نسبی}}\,t \Rightarrow ۳\circ\circ=(۱\circ+۲\circ)t \Rightarrow t=\frac{۳\circ\circ}{۳\circ}=۱\circ\ (s)$$

### حرکت پرتابی

حرکت‌های پرتابی در صفحه قائم رخ می دهند و بر خلاف فرمولهای به ظاهر پیچیده خود، فوق العاده ساده می باشند دقت کنید و بدانید که حرکت پرتابی در راستای دو محور مؤلفه دارد. در راستای محور $x$ سرعت ثابت است و جابجایی اش از فرمول حرکت‌های سرعت ثابت بررسی می‌شود و در راستای قائم حرکت با شتاب $g$ می باشد و جابجایی اش از فرمول حرکت‌های شتاب ثابت بررسی می‌شود.

**حرکت پرتابی**
- **محور $x$** : حرکت سرعت ثابت $\begin{cases} V_x=V_{\circ x} \\ \Delta x=V_x t \end{cases}$
- **محور $y$** : حرکت شتابدار با شتاب $g$ $\begin{cases} V_y=-gt+V_{\circ y} \\ \Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+V_{\circ y}t \end{cases}$

در شکل زیر مسیر سهمی شکل یک حرکت پرتابی رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود $V_{\circ}$ دارای دو مولفه افقی و قائم می‌باشد به کمک درس تجزیه بردار به سادگی می‌توان $V_{\circ x}$ و $V_{\circ y}$ را بدست آورد.



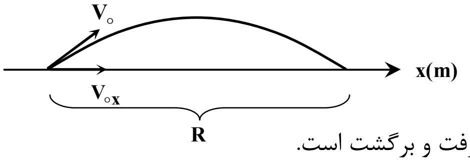

$$V_{\circ x}=V_{\circ}\cos\alpha \qquad V_{\circ y}=V_{\circ}\sin\alpha$$

$$\tan\alpha=\frac{V_{\circ y}}{V_{\circ x}} \qquad V_{\circ}=\sqrt{V_{\circ x}^{۲}+V_{\circ y}^{۲}}$$

بدست آوردن زمان اوج ، زمان رفت و برگشت و ارتفاع اوج در حرکت پرتابی برای اینکه فرمولهای حرکت پرتابه را راحت‌تر فرا بگیریم ابتدا تمام فرمولهایی که در مورد حرکت سقوط آزاد در راستای قائم را می‌دانستیم می‌نویسیم و در آن فرمولها به جای $V_{\circ}$ عدد $V_{\circ y}$ را قرار می‌دهیم. به موارد زیر توجه کنید:

| | | |
|---|---|---|
| اوج پرتابی $t=\frac{V_{\circ}\sin\alpha}{g}$ | اوج پرتابی $t=\frac{V_{\circ y}}{g}\Rightarrow$ | اوج قائم $t=\frac{V_{\circ}}{g}\Rightarrow$ |
| رفت و برگشت پرتابی $t=\frac{۲V_{\circ}\sin\alpha}{g}$ | رفت و برگشت پرتابی $t=\frac{۲V_{\circ y}}{g}\Rightarrow$ | رفت و برگشت قائم $t=\frac{۲V_{\circ}}{g}\Rightarrow$ |
| اوج پرتابی $h=\frac{V_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g}$ | اوج پرتابی $h=\frac{V_{\circ y}^{۲}}{۲g}\Rightarrow$ | اوج قائم $h=\frac{V_{\circ}^{۲}}{g}\Rightarrow$ |

**برد پرتابی (R)**

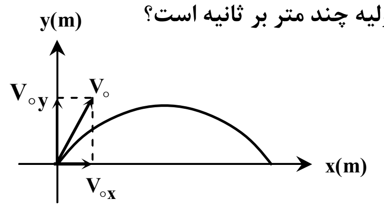



به جابجایی افقی پرتابه در راستای محور x برد R می گوییم .

پس R نوعی $\Delta x$ است که به صورت سرعت ثابت رخ می دهد. و زمان انجام آن همان زمان رفت و برگشت است.

$$R = \Delta x = V_x t = V_{\circ x} \times \frac{۲V_{\circ y}}{g} = \frac{۲V_{\circ x} V_{\circ y}}{g} = \frac{۲V_\circ Cos\alpha \ V_\circ Sin\alpha}{g} = \frac{V_\circ^۲ Sin۲\alpha}{g}$$

**مثال ۵۰: مولفه‌های افقی و قائم سرعت اولیه پرتابه‌ای $۳۰\frac{m}{s}$ و $۴۰\frac{m}{s}$ است. اندازه سرعت اولیه چند متر بر ثانیه است؟**




۱) ۷۰
۲) ۱۰
۳) ۵۰
۴) ۳۵

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$V_\circ = \sqrt{V_{\circ x}^۲ + V_{\circ y}^۲} = \sqrt{۳۰^۲ + ۴۰^۲} = ۵۰\frac{m}{s}$$

**مثال ۵۱: مولفه‌های افقی و قائم سرعت اولیه پرتابه‌ای $۳۰\frac{m}{s}$ و $۴۰\frac{m}{s}$ است. اندازه برد پرتابه چند متر است؟**

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۱۸۰

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$R = \frac{۲V_{\circ x} V_{\circ y}}{g} = \frac{۲\times۳۰\times۴۰}{۱۰} = ۲۴۰\,m$$

**مثال ۵۲: پرتابه‌ای از سطح زمین با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می کنیم ، زمان رفت و برگشت گلوله به افق پرتاب چند ثانیه است؟**

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

**پاسخ :** گزینه «۱»

$$t_{\text{رفت و برگشت}} = \frac{۲V_{\circ y}}{g} = \frac{۲V_\circ Sin\alpha}{g} = \frac{۲\times۲۰\times Sin۶۰}{۱۰} = ۴\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}s$$

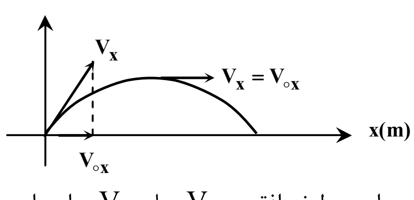
**مثال ۵۳: پرتابه‌ای از سطح زمین با سرعت $۱۰\sqrt{۳}\frac{m}{s}$ تحت زاویه ۳۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می کنیم، ارتفاع اوج پرتابه نسبت به زمین چند متر است؟**

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۱/۵

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$h = \frac{V_\circ^۲ Sin^۲\alpha}{۲g} = \frac{(۱۰\sqrt{۳})^۲ \times (Sin۳۰)^۲}{۲۰} = \frac{۱۰۰\times۳\times(\frac{۱}{۲})^۲}{۲۰} = ۳/۷۵m$$

**مثال ۵۴: گلوله‌ای از سطح زمین با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می گردد. اندازه سرعت گلولـه در اوج کدام گزینه است؟**




۱) ۵
۲) ۲۰
۳) ۰
۴) ۱۰

**پاسخ :** گزینه «۴» همانطور که دیده می‌شود در نقطه اوج فقط مولفه افقی سرعت را داریم و این مولفه افقی $V_x$ با $V_{\circ x}$ برابر است چون سرعت در راستای افقی ثابت است. $V_{\text{اوج}} = V_x = V_{\circ x} = V_\circ \cos\alpha = ۲۰\times\cos۶۰ = ۲۰\times\frac{۱}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$

**بدست آوردن معادله مسیر حرکت**

به طور کلی برای بدست آوردن معادله مسیر حرکت باید زمان را بین x و y حذف کرد. اگر در فرمول $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_{\circ y}t + y_\circ$ به جای زمان مقدار $\frac{x}{V_{\circ x}}$ قرار دهیم به معادله مسیر حرکت می‌رسیم .

$$\left.\begin{array}{l} x = V_{\circ x}t \\ y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_{\circ y}t + y_\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{-gx^۲}{۲V_\circ^۲\cos^۲\alpha} + x\tan\alpha + y_\circ$$

معادله مسیر حرکت یک سهمی می‌باشد و در تست‌هایی که مختصات نقطه‌ای از مسیر داده می‌شود کاربرد دارد.

**مثال ۵۵: پرتابه‌ای از سطح زمین با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق از مبدأ مختصات پرتاب می‌شود و از نقطه $\left|\begin{matrix}۲۴\\۱۴\end{matrix}\right.$ می‌گذرد اندازه سرعت اولیه کدام گزینه است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

**پاسخ :** گزینه «۳» چون نقطه‌ای از مسیر حرکت را داده اند از معادله مسیر کمک می‌گیریم.

$$y=\frac{-gx^۲}{۲V_\circ^۲\cos^۲\alpha}+x\tan\alpha+y_\circ \Rightarrow ۱۴=\frac{-۱۰\times ۲۴^۲}{۲V_\circ^۲\cos^۲(۴۵)}+۲۴\tan(۴۵)+\circ$$

$$۱۴=\frac{-۱۰\times ۲۴^۲}{۲V_\circ^۲\times\frac{۱}{۲}}+۲۴\times۱+\circ\Rightarrow -۱۰=\frac{-۱۰\times ۲۴^۲}{V_\circ^۲}\Rightarrow V_\circ^۲=۲۴^۲\Rightarrow V_\circ=۲۴\frac{m}{s}$$

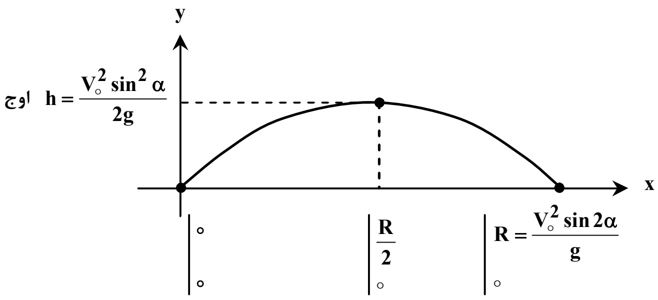
**مثال ۵۶: پرتابه‌ای با سرعت $V_\circ$ تحت زاویه $\alpha$ نسبت به افق به بالا پرتاب می‌شود، سرعت متوسط پرتابه پس از زمان $\frac{۲V_\circ \text{Sin}\,\alpha}{g}$ کدام گزینه است؟**

۱) $V_\circ\cos\alpha$ ۲) $V_\circ\sin\alpha$ ۳) $V_\circ\tan\alpha$ ۴) $V_\circ\cot\alpha$

**پاسخ :** گزینه «۱» زمان یاد شده در سوال همان زمان رفت و برگشت به افق پرتاب می باشد. در این زمان جابجایی همان برد در افق پرتاب است.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{R}{t}=\frac{V_{\circ x}t}{t}=V_{\circ x}=V_\circ\cos\alpha$$

**بررسی نقطه اوج**




در نقطه اوج سرعت پرتابه صفر نیست بلکه به کمترین مقدار خود می رسد که همان $V_{\circ x}$ است. سرعت در اوج کاملاً افقی است و سرعت در اوج بر شتاب حرکت پرتابه که همان g است عمود می باشد.

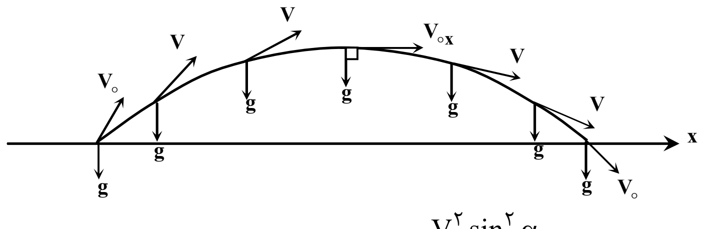
$$\text{اوج}\ x\left|\frac{R}{۲}=\frac{V_\circ^۲\sin۲\alpha}{۲g}\right.$$

$$\text{اوج}\ y\left|h_{\text{اوج}}=\frac{V_\circ^۲\sin^۲\alpha}{۲g}\right.$$

$$\frac{y_{\text{اوج}}}{x_{\text{اوج}}}=\frac{\frac{V_\circ^۲\sin^۲\alpha}{۲g}}{\frac{V_\circ^۲\sin۲\alpha}{۲g}}=\frac{\text{Sin}^۲\alpha}{\text{Sin}۲\alpha}=\frac{\text{Sin}\alpha\ \text{Sin}\alpha}{۲\text{Sin}\alpha\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}\tan\alpha$$

**نکته ۲۷:** بردار سرعت به طور کلی بر مسیر حرکت مماس است.

**نکته ۲۸:** زاویه بین بردار سرعت پرتابه وشتاب پرتابه قبل از اوج و پس از اوج در حال کاهش است.




**نکته ۲۹:** با توجه به فرمول ارتفاع اوج $\frac{V_\circ^۲\sin^۲\alpha}{۲g}$ هنگامی ارتفاع اوج با $V_\circ$ ثابت به بیشترین مقدار خود می رسد که $\text{Sin}^۲\alpha=۱$ باشد یا به عبارت دیگر $\text{Sin}\alpha=۱$ باشد و زاویه ای که با $V_\circ$ ثابت بیشترین ارتفاع اوج حاصل می‌شود $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. در ضمن بیشترین h اوج به اندازه $\frac{V_\circ^۲}{۲g}$ خواهد بود.

$$h_{\max\,\text{اوج}}=\frac{V_\circ^۲}{۲g}$$

**بررسی برد پرتابه**

با توجه به فرمول برد $R=\frac{V_\circ^{۲}Sin۲\alpha}{g}$ می توان گفت تا زاویه ۴۵ درجه $Sin۲\alpha$ در حال افزایش است بنابراین برد افزایش می‌یابد اما از زاویه ۴۵ درجه تا ۹۰ درجه $Sin۲\alpha$ در حال کاهش است بنابراین بردکاهش می‌یابد.

برای اینکه برد بیشینه باشد باید $Sin۲\alpha=۱$ یعنی $۲\alpha=\frac{\pi}{۲}$ و $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ باشد. بنابراین برای اینکه پرتابه با $V_\circ$ ثابت بیشترین برد را داشته باشد باید تحت زاویه $\frac{\pi}{۴}$ پرتاب شود و مقدار این برد بیشینه از فرمول $\frac{V_\circ^{۲}\times۱}{g}$ محاسبه می‌شود. $R_{max}=\frac{V_\circ^{۲}}{g}$

**نکته ۳۰:** برد پرتابه هایی که زاویه‌های پرتاب آنها با هم متمم باشند به ازای سرعت پرتاب یکسان برابر است.

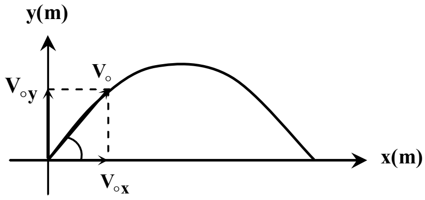
**مثال ۵۷: پرتابه ای را یک بار با زاویه ۳۰ درجه و بار دیگر با همان سرعت اولیه تحت زاویه ۶۰ درجه به بالا پرتاب می‌کنیم برد حالت دوم چند برابر برد حالت اول است؟**

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**پاسخ :** گزینه «۲» چون زاویه‌های پرتاب متمم هستند بردها با هم برابر می‌شوند.

$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\frac{V_\circ^{۲}}{g}Sin(۲\times۶۰)}{\frac{V_\circ^{۲}}{g}Sin(۲\times۳۰)}=\frac{Sin(۱۲۰)}{Sin(۶۰)}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۱$$

**مثال ۵۸: مولفه‌های افقی و قائم اولیه سرعت پرتابه‌ای به ترتیب $۱۰\frac{m}{s}$ و $۱۰\sqrt{۳}\frac{m}{s}$ می باشند. زاویه سرعت اولیه با افق چند درجه است؟**




۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۱۵

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$\tan\alpha=\frac{V_{\circ y}}{V_{\circ x}}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۱۰}=\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

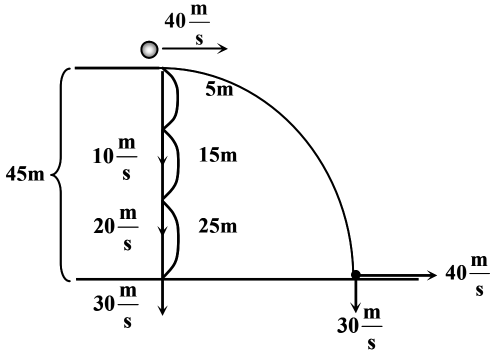
**مثال ۵۹: پرتابه‌ای از سطح زمین با سرعت $V_\circ$ تحت زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می کنیم. برد پرتابه چند برابر ارتفاع اوج می‌باشد؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

**پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{R}{h}=\frac{\frac{V_\circ^{۲}Sin۲\alpha}{g}}{\frac{V_\circ^{۲}Sin^{۲}\alpha}{۲g}}=\frac{۲\sin۲\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۲\times۲Sin\alpha\cos\alpha}{Sin\alpha\sin\alpha}=۴Co\tan\alpha\Rightarrow\frac{R}{h}=۴\,co\tan(۴۵)=۴\times۱=۴$$

**مثال ۶۰: پرتابه ای از ارتفاع 45 m با سرعت افقی $۴۰\frac{m}{s}$ پرتاب می‌شود. گلوله با چه سرعتی به زمین بر خورد می کند؟**



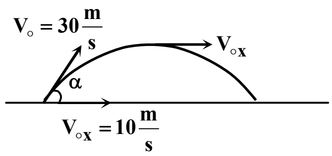

۱) ۲۵
۲) ۷۰
۳) $۴۰\sqrt{۲}$
۴) ۵۰

**پاسخ :** گزینه «۴»

گلوله در ۳ ثانیه ۴۵ m سقوط را انجام می دهد. بنابراین اندازه مولفه قائم سرعت در لحظه برخورد، به $۳۰\frac{m}{s}$ می‌رسد مولفه افقی اولیه $۴۰\frac{m}{s}$ است که همان $۴۰\frac{m}{s}$ باقی می‌ماند. سرعت برخورد دو مولفه افقی و قائم دارد بنابراین: $V=\sqrt{۳۰^۲+۴۰^۲}=\sqrt{۲۵۰۰}=۵۰\frac{m}{s}$ برخورد زمین

حال به حل چند مثال دیگر می‌پردازیم:

**مثال ۶۱: سرعت اولیه پرتابه ای ۲ برابر سرعت پرتابه در اوج است. زاویه پرتاب چند درجه است؟**

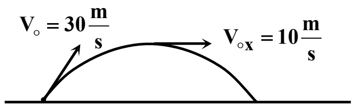



۱) ۳۰ ۲) ۶۰
۳) ۴۵ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اطلاعات مساله $V_\circ = ۲V_{\circ x}$ می‌باشد. با توجه به شکل می‌توانیم بگوئیم:

$$\cos\alpha = \frac{V_{\circ x}}{V_\circ} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_{\circ x}}{۲V_{\circ x}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

**مثال ۶۲: سرعت اولیه و سرعت پرتابه‌ای در اوج به ترتیب $۳۰\frac{m}{s}$ و $۱۰\frac{m}{s}$ می باشند. ارتفاع اوج پرتابه چند متر است؟**




۱) ۴۵ ۲) ۴۰
۳) ۲۰ ۴) ۲۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

**روش اول:** چون در شرایط خلا هستیم اصطکاک نداریم با توجه به ثابت بودن انرژی مکانیکی پرتابه ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{۲}mV_\circ^۲ = mgh + \frac{۱}{۲}mV_{\circ x}^۲ \Rightarrow V_\circ^۲ - V_{\circ x}^۲ = ۲gh$$

$$۳۰^۲ - ۱۰^۲ = ۲۰h \Rightarrow h = ۴۰m$$

**روش دوم:**

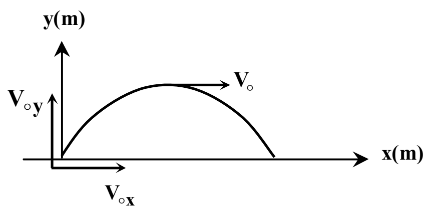
$$V_\circ^۲ = V_{\circ x}^۲ + V_{\circ y}^۲ \Rightarrow ۹۰۰ = ۱۰۰ + V_{\circ y}^۲ \Rightarrow \boxed{V_{\circ y}^۲ = ۸۰۰}$$

$$V_y^۲ - V_{\circ y}^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow ۰ - ۸۰۰ = -۲۰h \Rightarrow \boxed{h = ۴۰m}$$

**مثال ۶۳: در یک حرکت پرتابی هنگامی که برد پرتابه بیشینه است ، اندازه سرعت اولیه قائم چند برابر اندازه سرعت اولیه افقی است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» هنگامی برد بیشینه است که زاویه پرتاب ۴۵ درجه باشد.




$$\frac{V_{\circ y}}{V_{\circ x}} = \frac{V_\circ \text{Sin}۴۵}{V_\circ \text{Cos}۴۵} = ۱$$

**مثال ۶۴: انرژی جنبشی پرتابه ای که از سطح زمین با زاویه $۶۰^\circ$ پرتاب شده در نقطه اوج چند برابر انرژی جنبشی اولیه گلوله است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{k_{اوج}}{k_\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}mV_{اوج}^۲}{\frac{۱}{۲}mV_\circ^۲} = \frac{V_\circ^۲\cos^۲\alpha}{V_\circ^۲} = \cos^۲(\alpha) = \cos^۲(۶۰) = \frac{۱}{۴}$$

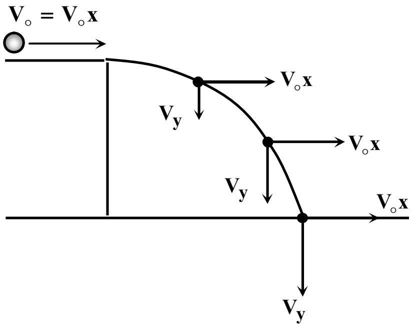
**مثال ۶۵: دو پرتابه را از سطح زمین با سرعت اولیه برابر تحت زاویه های $۶۰^\circ, ۳۰^\circ$ نسبت به افق به بالا پرتاب می کنیم ارتفاع اوج پرتابه دوم چند برابر ارتفاع اوج پرتابه اول است؟**

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**پاسخ** : گزینه «۱»

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{\frac{V_\circ^2 \sin^2 60}{2g}}{\frac{V_\circ^2 \sin^2 30}{2g}}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

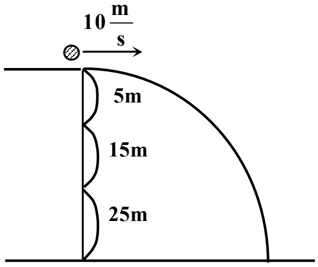
**پرتاب افقی :**




در پرتاب افقی تمام سرعت اولیه به صورت $V_{\circ x}$ می باشد و $V_{\circ y}$ به اندازه صـفر مـی باشـد. اندازه مولفه قـائم سرعت به مانند حرکت سقوط آزاد رفته رفته زیاد می گردد در راستای قائم، تمام نکات حرکت سقوط آزاد صدق می‌کند.

به شکل مقابل توجه کنید و ببینید که چگونه اندازه $V_y$ در حال افزایش می‌باشد. و مقدار سرعت در هر لحظه از رابطه $V=\sqrt{V_\circ^2+g^2t^2}$ به دست می‌آید. باید توجه شود زمان رسیدن پرتابه به زمین در پرتاب افقی به سرعت اولیهٔ آن بستگی ندارد، زیرا $\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2$ است.

**مثال ۶۶: پرتابه‌ای را از ارتفاع $45\,m$ سطح زمین با سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ پرتاب می کنیم گلوله چند ثانیه بعد به زمین برخورد می‌کند؟**




۱) ۲

۲) ۳

۳) ۲/۵

۴) ۱/۵

**پاسخ** : گزینه «۲» چون در راستای قائم سرعت اولیه صفر است بنابراین در ثانیه اول $5m$ و ثانیه دوم $15\,m$ و ثانیه سوم $25\,m$ می‌پیماید و $45\,m$ را در ۳ ثانیه سقوط می‌کند درست به مانند حرکت‌های سقوط آزاد و سرعت اولیه $10\frac{m}{s}$ افقی هیچ تاثیری بر روی سقوط قائم نـدارد. اثـر این سرعت اولیه $10\frac{m}{s}$ در برد پرتابه است.

**مثال ۶۷: پرتابه‌ای را از ارتفاع $45\,m$ سطح زمین با سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ پرتاب می کنیم گلوله برد چند متری دارد؟**

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۰

**پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مثال قبل این گلوله ۳ ثانیه‌ای به زمین بر خورد می‌کند و در هر ثانیه سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ را دارد. بنابراین:

$$R=\Delta x=V_x t=10\times 3=30\,m$$