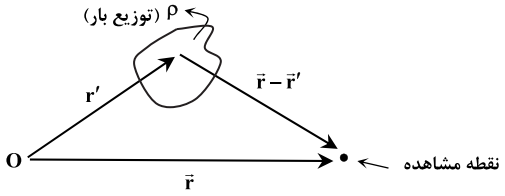
فصل اول

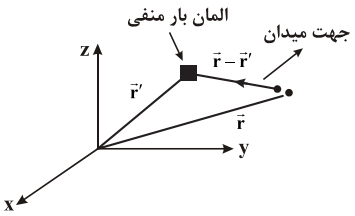
«میدان الکتریکی ساکن»

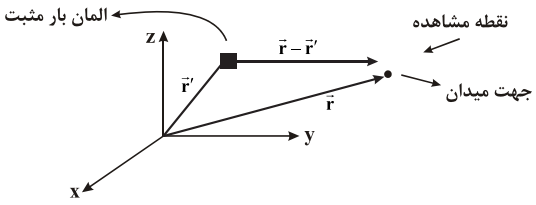
درسنامه ۱: تقارن



میدان الکتریکی ناشی از یه توزیع بار از رابطه $\vec{E}=\int\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')dV'}{۴\pi\varepsilon_{\circ}|r-r'|^{۳}}$ به دست میاد که $\vec{r}$ بردار مکانیه که در اون مکان می‌خوایم میدان رو حساب کنیم و r' مکان توزیع باره. توزیع بار به صورت توزیع حجمی، سطحی و خطی هستش.

معلومه که میدان الکتریکی با $\frac{۱}{r^{۲}}$ متناسبه. از رابطه بالا می‌فهمیم که جهت میدان ناشی از هر المان توزیع بار در مکان r در راستای $\vec{r}-\vec{r}'$ هستش که از همین نکته می‌خوایم در مفهوم تقارن استفاده کنیم. به این معنی که اگه المان بار در مکان r' باشه و مکانی که می‌خوایم میدان رو حساب کنیم r باشه، آنگاه جهت میدان ناشی از این المان در راستای خط واصل $\vec{r}-\vec{r}'$ هستش که اگه المان بار مثبت باشه، جهت میدان به سمت بیرونه و اگه بار منفی باشه، جهت میدان به سمت درونه.





بردار $\vec{r}$ تو مختصات دکارتی به صورت $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ هستش. اگه توزیع بار حجمی باشه، از رابطه زیر میدان الکتریکی خواسته شده تو نقطه موردنظر رو حساب می‌کنیم:

$$\vec{E}=\int_{V}\frac{\rho dV'(\vec{r}-\vec{r}')}{۴\pi\varepsilon_{\circ}|\vec{r}-\vec{r}'|^{۳}}$$

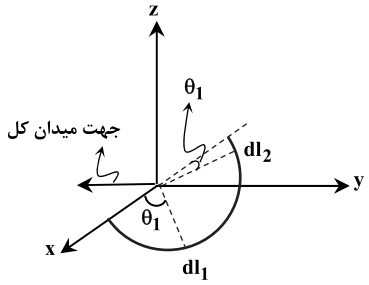
ρ توزیع بار حجمی و V حجم توزیع باره. اگه توزیع بار سطحی باشه، از رابطه $\vec{E}=\int_{S}\frac{\sigma ds'(\vec{r}-\vec{r}')}{۴\pi\varepsilon_{\circ}|\vec{r}-\vec{r}'|^{۳}}$ استفاده کرده، که σ توزیع بار سطحی و S سطحیه که بار روی اون توزیع شده، همچنین اگه توزیع بار خطی داشته باشیم، میدان الکتریکی از رابطه $\vec{E}=\int_{L}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{۴\pi\varepsilon_{\circ}|\vec{r}-\vec{r}'|^{۳}}$ به دست میاد، که λ توزیع بار خطیه و L طول توزیع بار خطیه.

تو بعضی از سؤالات کنکور میدان الکتریکی ناشی از یه توزیع بار رو تو یه نقطه می‌خواد حساب کنیم که در گزینه‌های داده شده تست، جهت میدان‌ها با هم فرق داره. در این جا دیگه لازم نیست خودمون رو با محاسبات زمانبر درگیر کنیم. فقط کافیه جهت میدان الکتریکی رو تو نقطه‌ی موردنظر تشخیص بدیم. به قول شاعر: چشم‌ها را باید شست، جور دیگر باید دید.

پس اگر در تستی جهت‌های میدان داده شده تو گزینه‌ها با هم متفاوت بود، با استفاده از تشخیص جهت میدان، سؤال رو حل کنید.

استفاده از مفهوم تقارن برای تشخیص جهت میدان الکتریکی کمک زیادی می‌کنه.

حالا تقارن یعنی چی؟ یه توزیع بار در فضا رو در نظر بگیرید. می‌خوایم میدان ناشی از این توزیع بار رو تو نقطه‌ای مانند P به دست بیاریم. اگه روی توزیع بار بتونیم دو المان پیدا کنیم که نسبت به نقطه P متقارن باشن، به این معنیه که این دو المان فاصله یکسانی از نقطه P داشته باشن و تو زاویه یکسانی نسبت به P واقع شده باشن و همچنین اندازه بار این دو المان یکسان باشه، آنگاه میدان ناشی از این دو المان تو نقطه P ممکنه هم‌دیگر رو خنثی کنن یا بعضی مؤلفه‌های میدانی‌شان اثر همدیگه رو خنثی کنن و بعضی مؤلفه‌های میدانی‌شان همدیگر رو تقویت کنن.



مثلاً یه نیم‌دایره رو در نظر بگیرید که بار خطی روی اون به طور یکنواخت توزیع شده باشه و می‌خوایم میدان رو در مبدأ حساب کنیم. حال روی نیم‌دایره المان‌های dl_1 و dl_2 رو که نسبت به مبدأ متقارن هستند در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی ناشی از المان dl_1 در راستای $-\hat{x}-\hat{y}$ است و جهت میدان ناشی از المان dl_2 در راستای $\hat{x}-\hat{y}$ هستش. پس میدان ناشی از این دو المان تو مبدأ در راستای $-\hat{y}$ است و مؤلفه‌های $\hat{x}$ اثر همدیگه رو خنثی می‌کنن. به همان ترتیب، اگه تمام المان‌های متناظر رو دوبه‌دو در نظر بگیریم، میدان برآیندشون راستای $-\hat{y}$ میشه، نتیجه میشه که جهت میدان کل در راستای $-\hat{y}$ هستش.

تذکر: در سراسر کتاب اندازه میدان الکتریکی رو با $|\vec{E}|=E$ نشان خواهیم داد.

مثال۱: روی خط به معادلهٔ $\vec{r}\times\hat{x}=-5\hat{z}$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت به اندازهٔ $\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ کولن بر متر توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در فضای آزاد در نقطه‌ای به مختصات (۴ , ۵ , ۲) با کدام رابطهٔ زیر داده می‌شود؟(می‌دانیم $\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\frac{F}{M}$)

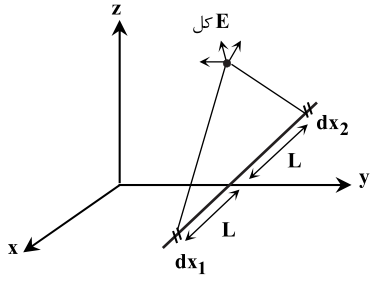
(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{1}{8\pi}\hat{z}$ ۲) $-\frac{1}{10\pi}\hat{y}$ ۳) $\frac{1}{10\pi}\hat{y}$ ۴) $\frac{1}{8\pi}\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا معادله خط رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\Rightarrow\vec{r}\times\hat{x}=-5\hat{z}\Rightarrow[x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}]\times\hat{x}=-5\hat{z}\Rightarrow x(\hat{x}\times\hat{x})+y(\hat{y}\times\hat{x})+z(\hat{z}\times\hat{x})=-5\hat{z}$$
$$\Rightarrow y(-\hat{z})+z(\hat{y})=-5\hat{z}$$

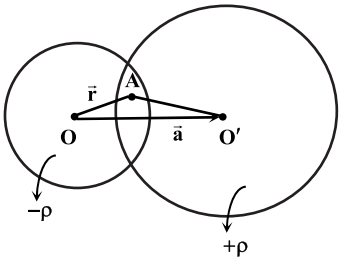
پس از معادله بالا خواهیم داشت: $\left.\begin{matrix}y=5\\z=0\end{matrix}\right\}$



حالا میدان ناشی از این خط تو نقطه (۲,۵,۴) در راستای $\hat{z}$ خواهد بود، زیرا خط $\begin{cases}y=5\\z=0\end{cases}$ و نقطه (۲,۵,۴) هر دو تو صفحه $y=5$ واقع شده‌اند. بنابراین می‌تونیم دو المان متناظر dx_1 و dx_2 رو روی توزیع بار در نظر بگیریم که میدان ناشی از المان dx_1 در راستای $-\hat{x}+\hat{z}$ و میدان ناشی از المان dx_2 در راستای $\hat{x}+\hat{z}$ هستش که اگه به همین صورت تمام المان‌های متناظر رو روی خط $y=5$ و $z=0$ دوبه‌دو در نظر بگیریم، میدان کل دو المان در راستای $\hat{z}$ خواهد بود. پس گزینه (۴) جوابه، به همین سادگی.

مثال۲: دو کره باردار یکی به شعاع R و چگالی بار $-\rho$ و دیگری به شعاع 2R و چگالی بار $+\rho$ مطابق شکل با هم همپوشانی دارند. میدان الکتریکی در نقطه A داخل ناحیهٔ همپوشانی دو کره و به فاصله r از مرکز کرهٔ به شعاع R کدام است؟ ($\vec{a}$ برداری است که مرکز کره به شعاع R را به مرکز کره به شعاع 2R وصل می‌کند).

(فیزیک ـ سراسری ۸۵)

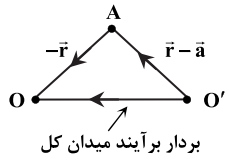


۱) $-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$ ۲) $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

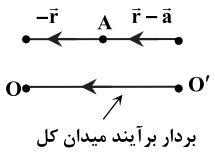
۳) $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{a})$ ۴) $\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}-\frac{\vec{r}-\vec{a}}{(r-a)^2}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون بار کره به شعاع R منفیه، پس میدانی که تو نقطه A ایجاد می‌کنه در راستای شعاعی و به سمت داخله، یعنی در خلاف جهت $\vec{r}$ هستش و کره به شعاع ۲R بارش مثبته؛ پس میدانی که تو نقطه A ایجاد می‌کنه در راستای شعاعی و به سمت خارجه؛ بنابراین از جمع برداری می‌فهمیم که میدان کل به سمت چپ خواهد بود و چون گزینه (۲) جهت میدانش به طرف راست است باید مرخص شود.

$\vec{r}$ را در حالت خاص روی خط واصل oo' در نظر بگیرید، به علت تقارن میدان در راستای $-\vec{a}$ خواهد بود. در نتیجه گزینه (۴) غلط و گزینه (۱) یا (۳) جوابه. خطوط میدان الکتریکی در نقطه A به صورت مقابله:



پس برآیند میدان کل به سمت چپ خواهد بود. حال اگه نقطه خاص رو روی خط واصل $\vec{OO'}$ قرار بدیم، شکل مقابل رو خواهیم داشت:



در نتیجه جهت میدان کل به سمت چپ خواهد بود. از طرفی $(\vec{r}-\vec{a})$ فقط بردار شعاعی کره بزرگتره، پس گزینه (۳) هم نمیتونه صحیح باشه.

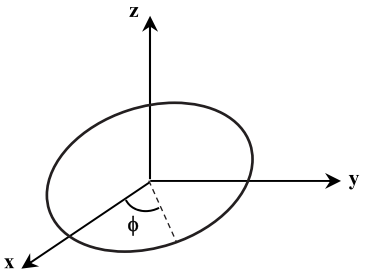
مثال۳: حلقه‌ای به شعاع a در صفحه xy قرار دارد و دارای بار الکتریکی با چگالی بار خطی $\lambda = A\sin\phi$ می‌باشد که ϕ زاویه سمتی و A عددی ثابت است. میدان الکتریکی در مرکز حلقه کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر

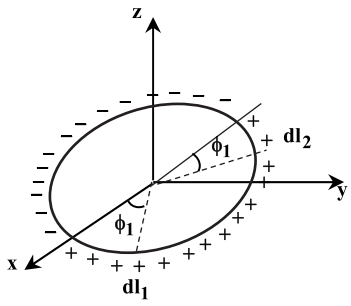
۲) $-\frac{A\hat{j}}{۴\varepsilon_{\circ}a}$

۳) $-\frac{A\hat{i}}{۴\varepsilon_{\circ}a}$

۴) $\frac{A}{۴\varepsilon_{\circ}}(\hat{i}-\hat{j})$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» روی حلقه در $\circ<\phi<\pi$، داریم: $\sin\phi>\circ$؛ پس در $\pi<\phi<\circ$ توزیع بار مثبته و در $\pi<\phi<۲\pi$ توزیع بار منفیه. باز هم از تقارن کمک می‌گیریم. در $\circ<\phi<\pi$ دو المان طول متناظر $dl_۱$ و $dl_۲$ میدانی که تو مبدأ ایجاد می‌کنن در راستای $-\hat{j}$ هستش. به همان ترتیب اگه تمام المان‌های متناظر رو روی $\circ<\phi<\pi$ در نظر بگیریم، میدان ناشی از نیم حلقه‌ی $\circ<\phi<\pi$ در راستای $-\vec{j}$خواهد بود. به همان ترتیب، میدان ناشی از نیم حلقه $\pi<\phi<۲\pi$ در راستای $-\hat{j}$ خواهد بود؛ پس میدان کل در جهت $-\hat{j}$ است.



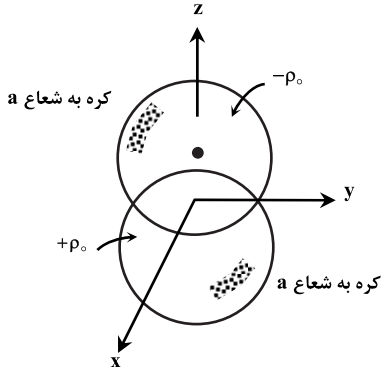
مثال۴: دو کره به شعاع‌های مساوی a و مراکز $(\circ,\circ,d)$ و $(\circ,\circ,-d)$ (در مختصات دکارتی) و $d>a$ دارای بارهای حجمی ثابت به ترتیب با چگالی $-\rho_{\circ}$ و $+\rho_{\circ}$ می‌باشند. در ناحیه مشترک بین دو کره میدان الکتریکی $(\vec{E})$ چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $\circ$

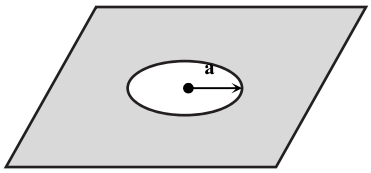
۲) $\frac{۲\rho_{\circ}d}{۳\varepsilon_{\circ}}\hat{z}$

۳) $\frac{\rho_{\circ}d}{۳\varepsilon_{\circ}}(\hat{x}+\hat{y})$

۴) $\frac{\rho_{\circ}d}{\varepsilon_{\circ}}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$



مثال۲۷: یک ورقه بسیار بزرگ مسطح کاغذی دارای بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ است. سوراخی به شعاع a در وسط این ورقه ایجاد می‌شود. میدان الکتریکی در مرکز این سوراخ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

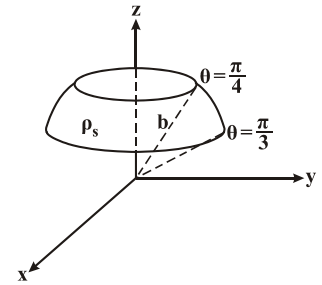


۱) $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}$

۳) $\frac{\sigma}{۳\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{\sigma}{۴\varepsilon_\circ}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توجه کنید که اگه شعاع a رو به صفر میل بدیم، انگار میدان رو برای یه صفحه نامتناهی به دست میاریم. اصلاً چون a تو گزینه‌ها نیستش، پس $a = \circ$ قرار میدیم و کسی هم نباید به ما گیر بده. پس با این کار یه صفحه نامحدود خواهیم داشت که میدانش برابره با $\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}$ و این یعنی گزینه (۲). این سؤال رو از یه راه دیگه هم میشه حل کرد. این که اول میدان ناشی از یه صفحه نامحدود با بار سطحی σ رو حساب کنیم، بعد میدان ناشی از یه دیسک با بار $(-\sigma)$ رو به دست بیاریم و از جمع آثار استفاده کنیم.

مثال۲۸: روی بخشی از پوسته کروی با $r = b$، $\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۳}$ و $\circ \le \varphi < ۲\pi$، مانند شکل زیر بار الکتریکی با چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s توزیع شده است. میدان الکتریکی $\vec{E}$ در مبدأ مختصات کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۷)

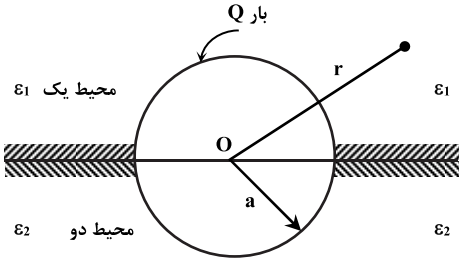


۱) $\vec{E} = \hat{z}\frac{\rho_s b}{۲\varepsilon_\circ}$ ۲) $\vec{E} = \hat{z}\frac{\rho_s b^۲}{۴\varepsilon_\circ}$

۳) $\vec{E} = \hat{z}(-\frac{\rho_s}{۱۶\varepsilon_\circ})$ ۴) $\vec{E} = \hat{z}(-\frac{\rho_s b^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگه پوسته رو به صورت حلقه حلقه در نظر بگیریم (محور و مرکز این حلقه‌ها بر محور z منطبقه)، میدان ناشی از تک تک این حلقه‌ها در مبدأ مختصات در راستای $(-\hat{z})$ هست، پس واضحه که برآیند میدان کل حلقه‌ها هم در راستای $(-\hat{z})$ میشه. در نتیجه گزینه‌های (۳) یا (۴) می‌تونن صحیح باشن. از بین این دو گزینه هم فقط گزینه (۳) می‌تونه دیمانسیون میدان الکتریکی رو داشته باشه. (توجه کنید که واحدهای $\varepsilon_\circ$ و ρ_s به ترتیب $\frac{F}{m}$ (فاراد بر متر)، $\frac{C}{m^۲}$ (کولن بر متر مربع) هستن و واحد میدان الکتریکی $\frac{V}{m}$ یا $\frac{C}{F.m}$ است.)

مثال۲۹: یک کره رسانا به شعاع a با بار الکتریکی Q به‌نحوی قرار گرفته که مرکز آن در مبدأ مختصات است. شدت (توانایی) میدان الکتریکی در نقطه‌ای به‌فاصله r از مرکز کره، $r > a$، چقدر است ؟ (در محیط یک) (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۱ r^۲}$ ۲) $\frac{Q}{۲\pi(\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲)r^۲}$

۳) $\frac{Q\varepsilon_۱}{۲\pi(\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲)r^۲}$ ۴) $\frac{Q\varepsilon_۱}{۲\pi\varepsilon_۲(\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲)r^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگه کل فضا رو همگن کنیم، یعنی $\varepsilon_۲ = \varepsilon_۱$. طبق قانون گاوس میدان برابره با $E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۱ r^۲}$؛ پس با گزینه (۳) خداحافظی می‌کنیم. اگه دو تا محیط رو عوض کنیم، یعنی نیم صفحه بالایی رو از $\varepsilon_۲$ و محیط پایینی رو از $\varepsilon_۱$ پر کنیم، نباید میدان تو فاصله r تغییر کنه، چون محیط موازیه و در محیط‌های موازی داشتیم: $E_۱ = E_۲ = \frac{Q}{۲(\alpha_۱\varepsilon_۱ + \alpha_۲\varepsilon_۲)r^۲}$ و چون $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \pi$، پس با عوض کردن جای $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ میدان بدون تغییر می‌مونه. پس گزینه‌های (۱) و (۴) هم مرخص میشن.

نکات تکمیلی

تو بعضی از تست‌ها می‌توان از روش دیمانسیون به گزینه درست رسید. پس حواستون رو جمع کنید که خیلی ساده بدون اینکه سؤال رو حل کنیم، می‌تونیم از روش دیمانسیون از پس سؤال بربیایم. تست‌هایی رو که گزینه‌هاشون از لحاظ ساختاری با هم تفاوت داشت، می‌توانیم با روش دیمانسیون حل کنیم. برای حل این مسائل به چند نکته توجه کنید:

۱ـ میدان الکتریکی برای یه توزیع بار در حالت کلی از رابطه $\vec{E}=\int_V \frac{\vec{\rho}(V')dV'}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon_r r^۲}$ به دست میاد. پس بدیهیه که میدان الکتریکی با گذردهی محیط رابطه عکس داره و با بار الکتریکی رابطه مستقیم داره.

۲ـ ارتباط چگالی شار الکتریکی با میدان الکتریکی به صورت $\vec{D}=\varepsilon_\circ\varepsilon_r\vec{E}$ هستش و چگالی بار سطحی از رابطه $\sigma=\vec{D}_۱-\vec{D}_۲$ به دست میاد.

۳ـ در حالت تعادل نیروی الکتریکی با نیروی وزن برای یه بار نقطه‌ای داریم: $Eq=mg$، پس معلومه که میدان الکتریکی با جرم بار نقطه‌ای و شتاب گرانش رابطه مستقیم داره.

۴ـ پریود نوسانات برابره با $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ که m جرم بار و k ثابت فنره. برای یافتن k، اول نیروی الکتریکی رو حساب می‌کنیم و از رابطه $F=kx$، k رو به دست میاریم.

۵ـ واحد بار الکتریکی نقطه‌ای کولن (C)، واحد چگالی بار خطی، کولن بر متر $(\frac{C}{m})$، واحد چگالی بار سطحی، کولن بر مترمربع $(\frac{C}{m^۲})$ و واحد چگالی بار حجمی کولن بر مترمکعبه $(\frac{C}{m^۳})$.

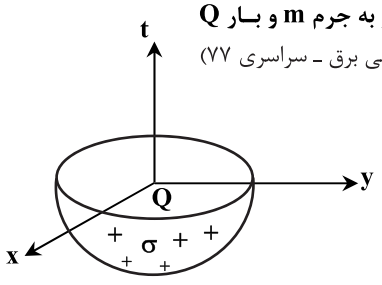
۶ـ واحد میدان الکتریکی E، ولت بر متره $(\frac{V}{m})$، واحد چگالی شار الکتریکی کولن بر مترمکعبه $(\frac{C}{m^۲})$.

مثال۳۰: روی سطح کره‌ای رسانا به شعاع a در محدوده $a<R\le ۲a$ عایق با ثابت عایقی یکنواخت ε قرار دارد. اگر در ناحیهٔ فضای آزاد $R>۲a$ میدان الکتریکی برابر $\bar{E}=\frac{E_\circ}{r^۲}\hat{r}$ باشد، چگالی بار سطحی ρ_s روی کره چند $C/m^۲$ است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\varepsilon E_\circ}{a^۲}$ ۲) $\frac{\varepsilon E_\circ}{\varepsilon_\circ a^۲}$ ۳) $\frac{\varepsilon_\circ E_\circ}{\varepsilon a^۲}$ ۴) $\frac{\varepsilon_\circ E_\circ}{a^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\sigma=D.\hat{n}$ و $D=\varepsilon_\circ\vec{E}$ پس $\sigma=\varepsilon_\circ\vec{E}.\hat{n}$ و چون در فرمول E جمله ε یا $\varepsilon_\circ$ تو مخرج نداریم، نباید تو مخرج ρ_s جمله ε وجود داشته باشه. پس گزینه‌های (۲) و (۳) حذف میشن و گزینه (۴) درسته یا این‌طور می‌تونیم استدلال کنیم که از قانون گاوس میدان الکتریکی در $R>۲a$ از رابطه $۴\pi\varepsilon_\circ r^۲=Q_{in}$ به دست میاد که Q بار سطحی روی کره هستش که به ε بستگی نداره.

مثال۳۱: پوسته نیم‌کروی شکل مقابل دارای بار سطحی یکنواخت با چگالی σ می‌باشد. یک ذره باردار به جرم m و بار Q همنام با σ را در مرکز این نیم‌کره قرار می‌دهیم. جرم m چقدر باشد تا ذره سقوط نکند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)



۱) $\frac{Q\sigma}{۴g\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{Q\varepsilon_\circ}{۲g\sigma}$ ۳) $\frac{۲Qg}{\varepsilon_\circ\sigma}$ ۴) $\frac{۴Qg}{\varepsilon_\circ\sigma}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $Eq=mg$ پس g با جرم m رابطه عکس داره، یعنی گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن. از طرفی $\varepsilon_\circ$ در فرمول E تو مخرج قرار داره و $m\propto E\propto\frac{۱}{\varepsilon_\circ}$، یعنی جرم m با میدان الکتریکی E متناسبه؛ پس جرم با ضریب دی‌الکتریک رابطه عکس داره. یعنی گزینه (۲) غلطه و فقط گزینه (۱) صحیحه.

عالم همیشه در برابر دیدگان ماست، اما تا زمانی که درک زبان آن و تفسیر حروفی که با آن نوشته شده است را نیاموزیم، نمی‌توانیم آن را به درستی بشناسیم. عالم به زبان ریاضی نوشته شده است و الفبای آن شکل‌های هندسی است، که بدون آنها درک یک کلمه از آن برای انسان امکان‌پذیر نیست، بدون آن در هزارتویی تاریک سرگردان می‌مانیم.

«گالیلئو گالیله»

درسنامه ۲: پیدا کردن پتانسیل الکتریکی از روی قضیه میانگین

این قضیه میگه که مقدار یه تابع همساز تو مرکز یه ناحیه بسته برابره با میانگین اون تابع روی محیط یا سطح اون ناحیه. دقت کنید که مینیمم و ماکزیمم پتانسیل الکتریکی نمی‌تونه درون ناحیه رخ بده و روی مرز ناحیه ایجاد میشه.
دو حالت خاص هم داریم که تو حل تست‌ها مفیدن.

پتانسیل الکتریکی در مرکز یه حلقه به شعاع a برابره با:

$$V(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(a,\phi)\,d\phi$$

پتانسیل در مرکز یه پوسته کروی به شعاع a برابره با:

$$V(0,0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}V(a,\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta d\phi$$

فقط توجه کنید که قضیه میانگین زمانی به کار می‌ره که داخل ناحیه بسته هیچ بار الکتریکی وجود نداشته باشه.

مثال۱۳: بر روی یک سطح رسانای کروی به شعاع R پتانسیل الکتریکی برابر با $\phi = V_0\cos^2\theta$ است که در آن V_0 ضریبی ثابت و θ زاویه قطبی در دستگاه مختصات کروی است. مبدأ مختصات بر مرکز کره و محور z بر یکی از قطرهای کره منطبق است. درون این سطح باری وجود ندارد. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟ (فیزیک ـ دکتری ۹۷)

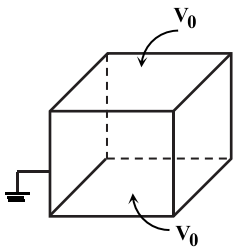
۱) صفر ۲) V_0 ۳) $\frac{1}{3}V_0$ ۴) $\frac{1}{2}V_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این مسئله، قضیه میانگین یادآوری میکنه که پتانسیل در مرکز کره برابر با میانگین پتانسیل روی سطح کره هست.

$$V(0,0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}V_0\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta d\phi=\frac{V_0}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\sin\theta d\theta=\frac{V_0}{2}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{V_0}{3}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیحه.

مثال۱۴: چهار وجه جانبی یک مکعب توخالی سطوح فلزی هستند که همگی با هم به یکدیگر و به زمین متصل‌اند و دو وجه قاعده‌های بالا و پایین دو سطح فلزی که مجزا هستند به پتانسیل الکتریکی ثابت V_0 متصل‌اند. پتانسیل در مرکز این مکعب کدام است؟ (فیزیک ـ دکتری ۹۲)



۱) V_0
۲) $\frac{V_0}{2}$
۳) $2V_0$
۴) $\frac{1}{3}V_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» پتانسیل وجه قاعده‌های بالا و پایین مثبته، پس نباید پتانسیل مرکز بزرگتر از پتانسیل مرز بشه، پس گزینه (۲) شوت میشه و طبق قضیه میانگین گزینه (۴) جوابه.

$$V(0,0,0)=\frac{2V_0}{6}=\frac{V_0}{3}\leftarrow V(0,0,0)=\frac{0+0+0+0+V_0+V_0}{6}$$

مثال۱۵: پتانسیل الکتریکی بر روی وجوه یک مکعب ثابت و برابر V می‌باشد. اگر هیچ بار الکتریکی درون این مکعب وجود نداشته باشد، پتانسیل در مرکز مکعب کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۱)

۱) صفر ۲) $\frac{V}{8}$ ۳) $\frac{V}{6}$ ۴) V

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قضیه میانگین میگه که $V(0,0,0)=\frac{6V}{6}=V$، پس گزینه (۴) درسته.

درسنامه ۳: به دست آوردن پتانسیل الکتریکی از طریق موارد خاص

توضیحات مختصری در مورد معادله لاپلاس میدیم. در یه فضای همگن که توزیع بار داشته باشیم، از فرم نقطه‌ای قانون گاوس به معادله پواسون زیر می‌رسیم:

$$\nabla^2V=-\frac{\rho}{E}$$

حالا اگه فضا بدون بار الکتریکی باشه، معادله لاپلاس به دست میاد:

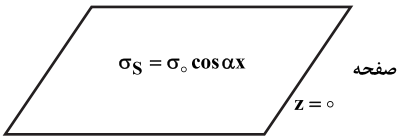
$$\nabla^2V=0$$

در مختصات دکارتی: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

نکته مهم: پاسخ معادله لاپلاس یکتاست. به این معنی که اگه پاسخی به دست آوردید که تو معادله لاپلاس صدق کنه و شرایط مرزی رو نیز اقناع کنه، این پاسخ تنها پاسخ مسأله است.

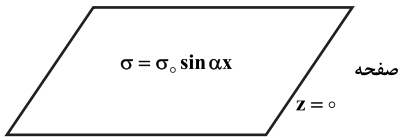
چند حالت خاص داریم، فرم کلی اونا رو بلد باشید که کمک زیادی برای حل مسائل پتانسیل می‌کنن. این حالات خاص با استفاده از حل معادله لاپلاس به دست میان.

۱ـ تو مختصات دکارتی اگه روی یه صفحه نامحدود بار غیریکنواخت مثلثاتی یا نمایی داشته باشیم، پتانسیل الکتریکی به فرم زیر به‌دست میاد:



$$\rightarrow V(x,z) = Ae^{-\alpha z}\cos\alpha x \quad : \quad z > \circ$$

دقت کنید که اگه $\alpha = \circ$ باشه، بار سطحی یکنواخت داریم، بنابراین به ازای $\alpha = \circ$، پتانسیل خواهیم داشت؛ پس چون فرم بار سطحی کسینوسیه، پتانسیل نیز این فرم رو حفظ می‌کنه، یعنی باید به فرم کسینوسی باشه.



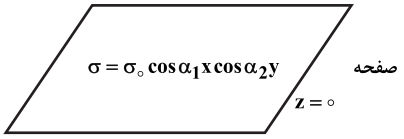
$$\rightarrow V(x,z) = Ae^{-\alpha z}\sin\alpha x \quad : \quad z > \circ$$

تو این حالت نیز، به ازای $\alpha = \circ$، هیچ بار سطحی نداریم، پس بدیهیه که نباید پتانسیل داشته باشیم، به همین خاطر پتانسیل به فرم بار سطحی درمیاد.

ضرایب A رو از شرط مرزی تو $z = \circ$ به دست میاریم. دو تا شرط مرزی $z = \circ$ داریم:

۱) پیوستگی پتانسیل الکتریکی در $z = \circ$ ۲) $D_{2Z} - D_{1Z} = \sigma$

که σ بار سطحیه.

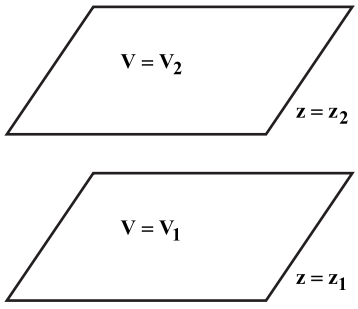


$$\rightarrow V = Ae^{-\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}z}\cos\alpha_1 x.\cos\alpha_2 y \quad : \quad z > \circ$$

$$A = \frac{\sigma_\circ}{2\varepsilon_\circ(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2})}$$

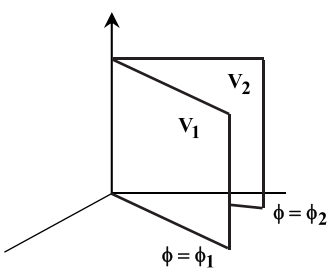
نکته۵: در بررسی سه نمونه بالا متوجه می‌شید که در $z \rightarrow +\infty$ پتانسیل باید صفر بشه، پس فرم نمایی میراشونده به خود می‌گیره و در کل پتانسیل فرم کلی بار سطحی رو حفظ می‌کنه.

۲ـ در مختصات دکارتی اگه پتانسیل فقط تابع یه متغیر باشه، فرم پتانسیل به صورت زیر درمیاد: $V = AZ + B$



با جایگذاری شرایط مرزی: $V(z) = \frac{V_2 - V_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + V_1$

۳ـ در مختصات استوانه‌ای، اگه پتانسیل الکتریکی فقط تابعی از ϕ باشه:



$$V = A\phi + B$$

و با جایگذاری شرایط مرزی: $V(\phi) = \frac{V_2 - V_1}{\phi_2 - \phi_1}[\phi - \phi_1] + V_1$

مدرسان شریف

فصل سوم

«خواص هادی‌ها»

درسنامه ۱: اثر القایی

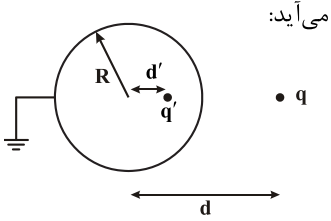
تو بعضی از سؤالات یه کره رسانا یا یه پوسته کروی رسانا داده شده که یه بار نقطه‌ای در فاصله‌ای از آن قرار گرفته و یا کره به پتانسیلی متصله و از ما می‌خوان که بارهای سطحی رو به‌دست بیاریم و یا میدان الکتریکی و یا پتانسیل الکتریکی ناشی از این سیستم رو در نقطه‌ای حساب کنیم. برای حل این سؤالات به نکات زیر دقت کنید.

۱ـ اگه یه جسم رسانا داشته باشیم که حفره‌ای توش ایجاد شده و داخل حفره بار Q قرار داده شده باشه و این جسم رسانا به پتانسیل V متصل باشه، واسه پیدا کردن میدان بیرون رسانا، فقط پتانسیل V تأثیر داره و بار Q هیچ نقشی نداره و باری که رو سطح خارجی رسانا القا میشه، طوری خواهد شد که پتانسیل رسانا در V حفظ بشه. همچنین بار القا شده روی سطح داخلی رسانا $-Q$ خواهد شد. چون میدان الکتریکی داخل رسانا صفره، طبق قانون گاوس باید بار $-Q$ روی سطح داخلی القا بشه. همچنین کل بار القاشده روی سطح خارجی آن برابر $۴\pi\varepsilon_{۰}V$ خواهد بود.

۲ـ اگه یه جسم رسانا داشته باشیم که حفره‌ای توش ایجاد شده و یا یه پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b داشته باشیم، آنگاه توزیع بار رو سطح خارجی رسانا به شعاع داخلی رسانا و مکان بار داخل رسانا بستگی نداره و فقط به شعاع خارجی رسانا و مکان بار بیرون رسانا بستگی داره.
و توزیع بار رو سطح داخلی رسانا به شعاع خارجی رسانا و بارهای بیرون بستگی نداره و فقط تابع شعاع داخلی و بارهای داخلی رسانا هستش.

۳ـ اگه یه جسم رسانا داشته باشیم که حفره‌ای توش ایجاد شده و بار Q داخل آن قرار داده شده و خود رسانا بار q داشته باشه، وقتی که از بیرون به رسانا نگاه کنیم، بار $q+Q$ رو خواهیم دید. بار القاشده روی سطح داخلی حفره، $-Q$ خواهد شد.

۴ـ اگه بار نقطه q را در نزدیکی یک کره رسانای زمین شده قرار بدیم، آنگاه تصویر بار q از رابطه زیر به دست می‌آید:

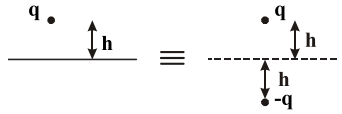


$$\text{بار تصویر } q' = -\frac{R}{d}q$$

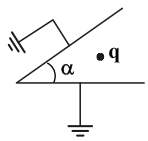
$$d' = \frac{R^{۲}}{d}$$

پس در حل مسأله، کره رسانا را دور می‌اندازیم و مسأله را در حضور بار q و q' حل می‌نماییم.

۵ـ تصویر بار نقطه‌ای q در نزدیکی یک صفحه تخت نامحدود زمین شده.

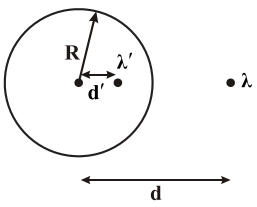


نکته۱: در صورتی که بار نقطه‌ای q بین دو صفحه رسانای زمین‌شده قرار گیرد که با هم زاویه α می‌سازند تعداد بارهای تصویرشده به‌صورت زیر به دست میاد:



$$n = \frac{۳۶۰^{\circ}}{\alpha} - ۱$$

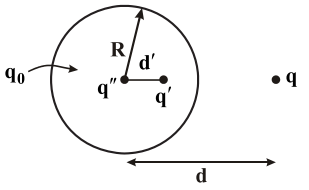
۶ـ اگه یه بار خطی λ در مجاورت یه استوانه نامحدود قرار بگیره، تصاویر ایجادشده از رابطه زیر به دست میاد:



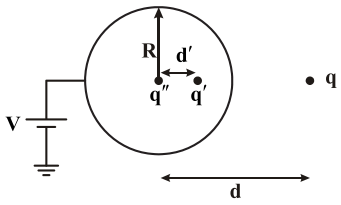
$$\text{بار خطی تصویرشده } \lambda' = -\lambda$$

$$d' = \frac{R^{۲}}{d}$$

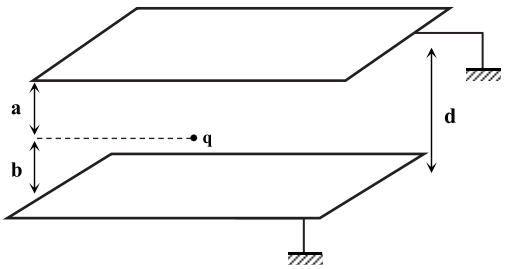
۷ـ اگه بار نقطه q رو به نزدیکی یه کره رسانا با بار اولیه q_0 بیاریم، آنگاه تصویر ناشی از بار q برابر با q' است که $q' = -\frac{R}{d}q$ و $d' = \frac{R^2}{d}$. حال چون کره ایزوله است باید یه بار نقطه دیگه‌ای (q'') در مرکز کره در نظر بگیریم، به طوری‌که: $q'' + q' = q_0 \Rightarrow q'' = Q_0 - q'$



۸ـ اگه بار نقطه‌ای q در نزدیکی یه کره رسانا که به منبع ولتاژ V متصله، قرار بگیره، اولاً تصویر بار q، یعنی $q' = -\frac{R}{d}q$ در فاصله $d' = \frac{R^2}{d}$ از مرکز کره تشکیل میشه، ثانیاً به علت پتانسیل V یه بار $q'' = 4\pi\varepsilon_0 V$ به مرکز کره اضافه میشه.



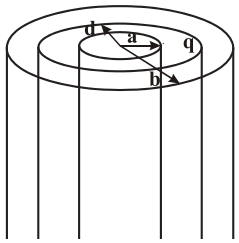
۹ـ اگه دو صفحه رسانای تخت نامحدود زمین شده در فاصله d از هم قرار گرفته باشن و بار q مطابق شکل مقابل در فاصله بین دو صفحه واقع شده باشه، بارهای القایی رو صفحات بالایی و پایینی از روابط زیر به‌دست میاد.



بار القا شده روی صفحه پایینی $Q'_1 = -\frac{a}{d}q$

بار القا شده روی صفحه بالایی $Q'_2 = -\frac{b}{d}q$

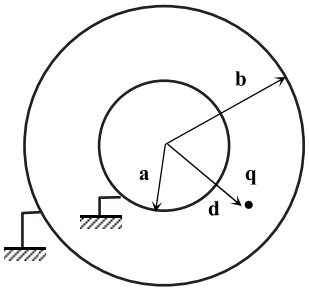
اگه یه پوسته استوانه‌ای، به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b داشته باشیم، که بار q روی استوانه‌ای به شعاع d که $0 < d < b$ توزیع شده باشه، آنگاه بارهای القا شده به صورت زیر به دست میاد:



بار القاشده روی استوانه داخلی $q'_1 = -\frac{\text{Ln}(\frac{b}{d})}{\text{Ln}(\frac{b}{a})}q$

بار القاشده روی استوانه خارجی $q'_2 = -\frac{\text{Ln}(\frac{d}{a})}{\text{Ln}(\frac{b}{a})}q$

و برای پوسته کروی زمین شده به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b:

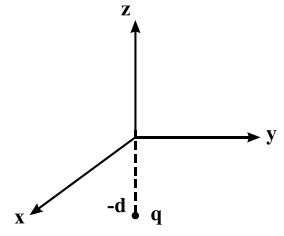


بار القا شده روی کره داخلی $Q'_1 = -\frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}q$

بار القا شده روی کره خارجی $Q'_2 = -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}q$

توجه کنید که اگه بار نقطه‌ای q روی کره‌ای به شعاع d که $0 < d < b$ به طور یکنواخت توزیع شده باشه باز هم فرمول‌های بالا برقراره.

مثال۱: فضای $z < 0$ محیطی است عایق با ثابت دی‌الکتریک K_d و فضای $z > 0$ محیطی است عایق با ثابت دی‌الکتریک K_u، بار نقطه‌ای q در نقطه $z = -d$ واقع است. چگالی بار قطبشی سطحی در مرز دو دی‌الکتریک، صفحه $z = 0$، کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۸)



۱) $\frac{1}{2\pi K_d}\frac{K_d + K_u}{K_d - K_u}\frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$

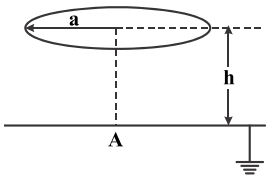
۲) $\frac{1}{2\pi K_u}\frac{K_d - K_u}{K_d + K_u}\frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳) $\frac{1}{2\pi K_u}\frac{K_d + K_u}{K_d - K_u}\frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴) $\frac{1}{2\pi K_d}\frac{K_d - K_u}{K_d + K_u}\frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر محیط رو همگن بگیریم یعنی $k_u = k_d$، هیچ باری در صفحه $z = 0$ تشکیل نمیشه، پس گزینه (۲) یا (۴) می‌تونه درست باشه. اگر صفحه بالایی را رسانای کامل بگیریم یعنی $(k_u \to \infty)$، بار منفی روی صفحه $z = 0$ القا خواهد شد که با $k_u \to \infty$ گزینه (۲) به صفر میل میکنه و گزینه (۴) منفی خواهد شد.

مثال۲: حلقه عایقی به شعاع a و چگالی بار خطی یکنواخت λ مطابق شکل موازی یک صفحه تخت رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. اگر فاصله مرکز حلقه با صفحه تخت رسانا h باشد، چگالی بار الکتریکی سطحی در نقطه A زیر مرکز حلقه روی صفحه تخت رسانا چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۹)



۱) $-\frac{\lambda ah}{۲(a^۲+h^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

۲) $-\frac{\lambda h}{(a^۲+h^۲)}$

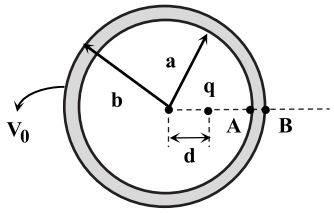
۳) $-\frac{\lambda ah}{(a^۲+h^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

۴) $-\frac{\lambda h}{۲(a^۲+h^۲)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حلقه رو می‌تونیم به‌صورت یه بار نقطه‌ای با بار $q=\lambda(۲\pi a)$ معادل بگیریم. میدان ناشی از بار نقطه‌ای q و تصویر اون در $h=۰$ برابره با $\vec{E}\Big|_{h=۰}=\frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_۰h^۲}(-\hat{z})$. از طرفی چگالی بار سطحی تو $h=۰$ برابره با:

$$\sigma=\varepsilon_۰E_۰\hat{z}=\frac{-q}{۲\pi h^۲}=\frac{-\lambda a}{h^۲}$$

مثال۳: یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع داخلی a و خارجی b، مطابق شکل، در پتانسیل $V_۰$ نگه‌داشته شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی d(d < a) از مرکز پوسته‌های کروی واقع است. چگالی بار سطحی در نقاط A و B به ترتیب کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)



۱) $\frac{۲\varepsilon_۰V_۰}{a+b}\ ,\ \frac{-q}{۴\pi a(a-d)}$

۲) $\frac{۲\varepsilon_۰V_۰}{a+b}\ ,\ \frac{-q}{۴\pi b(b-d)}$

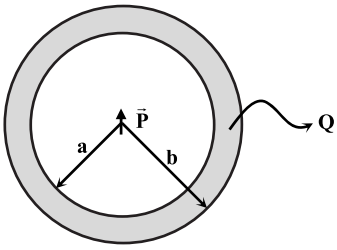
۳) $\frac{\varepsilon_۰V_۰}{a+b}\ ,\ \frac{-q(b+d)}{۴\pi b(b-d)^۲}$

۴) $\frac{\varepsilon_۰V_۰}{b}\ ,\ \frac{-q(a+d)}{۴\pi a(a-d)^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** بارهای سطحی روی شعاع خارجی مستقل از شعاع داخلی پوسته هستن، پس بار سطحی در نقطه B به شعاع داخلی (a) وابسته نیست که فقط گزینه (۴) میتونه صحیح باشه. چقدر خوبه این روش‌های کلک‌زنی، همچنین بارهای سطحی روی شعاع داخلی به شعاع خارجی کره وابسته نیستن که گزینه (۳) از اول معلومه غلطه.

روش دوم: اگه $d=۰$ باشه یعنی بار q در مرکز کره قرار داره و باید بار سطحی $-\frac{q}{۴\pi a}$ روی سطح داخلی کره تشکیل بشه که تنها تو گزینه (۴) این ویژگی دیده میشه.

مثال۴: مطابق شکل زیر، یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $\vec{P}=P_۰\hat{z}$ در مرکز یک پوسته کروی رسانا به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b قرار گرفته است. کره‌ی رسانا حاوی بار خالص Q می‌باشد. چگالی بار سطحی ρ_s، در سطح درونی پوسته‌ی کروی کدام است؟ (مهندسی برق، مخابرات میدان ـ دکتری ۹۲)



۱) $\frac{Q}{۴\pi a^۲}-\frac{۳P_۰}{۴\pi a^۳}\cos\theta$

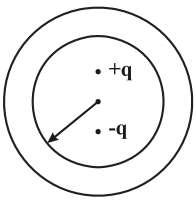
۲) $\frac{Q}{۴\pi a^۲}+\frac{۳P_۰}{۴\pi a^۳}\cos\theta$

۳) $-\frac{۳P_۰}{۴\pi a^۳}\cos\theta$

۴) $\frac{۳P_۰}{۴\pi a^۳}\cos\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بار سطحی روی سطح داخلی رسانا به بار بیرون و شعاع بیرون وابسته نیستش؛ چون بار Q به سمت لایه بیرونی پوسته میره و برای شعاع داخلی بار بیرونی محسوب میشه پس خداحافظ ای گزینه‌های (۱) و (۲). از طرفی میدان الکتریکی داخل رسانا صفره پس طبق قانون گاوس باید باری که روی سطح داخلی القا می‌شه مخالف بار دوقطبی بشه و چون میدان ناشی از دوقطبی به طرف بیرونه، پس بار منفی باید القا بشه تا اثر میدان ناشی از دوقطبی را خنثی کنه یعنی فقط گزینه (۳).

روش دوم: اولاً میدان داخل پوسته کروی صفره پس طبق قانون گاوس نباید باری داشته باشیم پس گزینه‌های (۱) و (۲) رو می‌زنیم. از طرفی می‌تونیم دوقطبی رو به صورت دو بار $+q$ و $-q$ دربیاریم، طبق شکل مقابل. حال چون بار $+q$ به ناحیه بالایی $(۰<\theta<\frac{\pi}{۲})$ نزدیکتره، پس اثر القایی‌اش نسبت به بار $-q$ بیشتره و باید تو ناحیه $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ بار منفی القا بشه که فقط گزینه (۳) این ویژگی رو داره.



مثال ۳: پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره‌ای عایق به شعاع R و ضریب دی الکتریک ε، برابر است با:

$$V(r,\theta)=\begin{cases}-\dfrac{3\varepsilon_\circ}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}E_\circ r\cos\theta & r<R\\ [\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_\circ}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}(\dfrac{R}{r})^3-1]E_\circ r\cos\theta & r>R\end{cases}$$

چگالی بار القایی روی سطح کره کدام است؟ (مبدأ مختصات منطبق بر مرکز کره است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\dfrac{3(\varepsilon^2-\varepsilon_\circ^2)}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}E_\circ\cos\theta$ ۲) $\dfrac{3(\varepsilon-\varepsilon_\circ)}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta$ ۳) $\dfrac{4\varepsilon_\circ\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}E_\circ\cos\theta$ ۴) $\dfrac{3\varepsilon_\circ\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_\circ}E_\circ\cos\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بیایید $\varepsilon=\varepsilon_\circ$ قرار بدیم، در دو محیط پتانسیل یکسان می‌شه و $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ پس E در دو محیط یکسانه که در نتیجه E عمودی هم در دو محیط یکسانه؛ یعنی $E_{1r}=E_{2r}$ پس یعنی بار سطحی نداریم که فقط گزینه (۱) یا (۲) درسته زیرا $(\sigma=\varepsilon_2E_{2r}-\varepsilon_1E_{1r})$.
حالا بیایید ε را به بی‌نهایت میل بدیم، پتانسیل در فضا محدود می‌شه و بی‌نهایت نمی‌شه؛ پس میدان الکتریکی نیز محدود می‌شه، پس بار سطحی هم باید محدود بشه زیرا $(\sigma=\vec{D}_2-\vec{D}_1)$ به این معنی که گزینه (۱) دیگه جایی برای موندن نداره و فقط گزینه (۲) صحیحه.

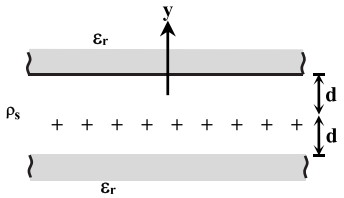
مثال ۴: در یک کره عایق چگالی حجمی بارهای پلاریزه (قطبی شده) یکنواخت و برابر با ρ_b می‌باشد، بردار قطبی شدگی $\vec{P}$ داخل کره کدام است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\dfrac{-\rho_b}{3}r\hat{r}$ ۲) $\dfrac{-\rho_b}{3}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}$ ۳) $\dfrac{-\rho_b}{3}\dfrac{1}{r^3}\hat{r}$ ۴) $\dfrac{-\rho_b}{3r}\dfrac{1}{r}\hat{r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با دو روش مسئله رو حساب می‌کنیم:

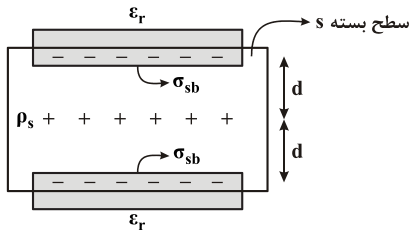
روش اول: قبلاً گفتیم که میدان الکتریکی ناشی از یه کره با بار حجمی آزاد یکنواخت برای نقاط درون کره برابر با $\dfrac{\rho_\circ r}{3\varepsilon_\circ}\hat{r}$ و برای نقاط خارج کره $\dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}$ می‌باشه؛ پس طبیعیه که گزینه (۱) صحیح باشه. چرا که دو رابطه بالا از قانون گاوس ناشی می‌شدن و فرم نقطه‌ای قانون گاوس به صورت $\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho_f$ بود و در بارهای مقید نیز رابطه $\vec{\nabla}.\vec{P}=\rho_b$ داریم که شبیه معادله بالاییه و میدان‌هایی هم که ایجاد می‌کنه شبیه میدان‌های ناشی از بارهای آزاده.
روش دوم: بار حجمی یکنواخته و باید تو نقاط داخل کره $\vec{p}$ محدود باشه که در $r=\circ$ فقط گزینه (۱) جواب محدود می‌ده.
روش سوم: فقط دیمانسیون گزینه (۱) با بردار قطبی‌شدگی هم‌خوانی داره.

مثال ۵: ناحیه $|y|>d$ در شکل صفحه بعد با عایقی به ضریب دی‌الکتریک نسبی ε_r پر شده است. در صفحه $y=\circ$ بار سطحی نامتناهی به چگالی ثابت ρ_s وجود دارد که باعث قطبی‌شدگی فضای $y>d$ و $y<-d$ شده است. مطلوب است چگالی بار سطحی مقید ρ_{sb} ناشی از این قطبی‌شدگی بر روی فصل مشترک $y=d$. (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱) $\rho_{sb}=\dfrac{1-\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\rho_s$ ۲) $\rho_{sb}=\dfrac{-1}{\varepsilon_r}\rho_s$ ۳) $\rho_{sb}=-\rho_s$ ۴) $\rho_{sb}=\dfrac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\rho_s$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگه $\varepsilon_r=1$ یعنی عایق نداریم، پس بارهای مقید صفر هستن؛ در نتیجه فقط گزینه (۱) یا (۴) درسته. از طرفی اگه $\varepsilon_r\to\infty$، میدان درون دی‌الکتریک صفر میشه. پس طبق قانون گاوس روی سطح بسته S داریم:



$$\rho_s+\sigma_{sb}+\sigma_{sb}=\circ\Rightarrow\sigma_{sb}=-\frac{\rho_s}{2}$$

که فقط در گزینه (۱) این ویژگی دیده میشه. توجه کنید که اندازه و علامت بارهای مقید روی عایق بالایی و پایینی یکسانن.

درسنامه ۲: حل مسائل قطبی‌شدگی با استفاده از تشخیص محیط‌های سری و موازی

اگه میدان الکتریکی عمود بر فصل مشترک دو محیط باشه، آن‌گاه محیط‌ها سری هستن و در محیط‌های سری چگالی شار الکتریکی $\vec{D}$ یکسانه، پس برای محاسبه بردار قطبش از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\vec{D}=\varepsilon_{\circ}\vec{E}+p \Rightarrow p=\vec{D}-\varepsilon_{\circ}\vec{E} \Rightarrow \vec{p}=\vec{D}-\frac{\varepsilon_{\circ}\vec{D}}{\varepsilon}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}$$

پس:

$$\boxed{\frac{\vec{p}_2}{\vec{p}_1}=\frac{1-\frac{1}{\varepsilon_{r_2}}}{1-\frac{1}{\varepsilon_{r_1}}}} \qquad (1)$$

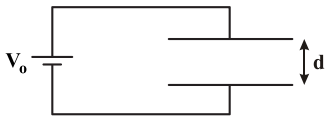
و اگه میدان الکتریکی موازی فصل مشترک دو محیط باشه، میدان موازیه و میدان الکتریکی E در دو محیط یکسانه و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{p}=\vec{D}-\varepsilon_{\circ}\vec{E}=\varepsilon\vec{E}-\varepsilon_{\circ}\vec{E}=(\varepsilon-\varepsilon_{\circ})\vec{E}$$

$$\boxed{\frac{\vec{p}_2}{\vec{p}_1}=\frac{\varepsilon_{\circ}(\varepsilon r_2-1)}{\varepsilon_{\circ}(\varepsilon r_1-1)}=\frac{\varepsilon r_2-1}{\varepsilon r_1-1}} \qquad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ می‌فهمیم که هرچه گذردهی نسبی محیط بزرگ‌تر باشه، بردار قطبش بزرگ‌تری داره و نسبت $\frac{p_2}{p_1}$ در محیط موازی بزرگ‌تر از نسبت $\frac{p_2}{p_1}$ در محیط سریه. به شرط آن‌که گذردهی محیط ۲ بزرگ‌تر از گذردهی محیط ۱ باشه.

نکته: بارهای آزاد مثبت، بارهای مقید منفی را به سمت خود جذب می‌کنند و بارهای آزاد منفی، بارهای مقید مثبت را به سمت خود جذب می‌کنن. مثلاً اگر دو صفحه موازی مطابق شکل زیر که به پتانسیل $V_{\circ}$ وصل شدن، رو صفحه بالایی بارهای آزاد مثبت و رو صفحه پایین بارهای آزاد منفی داریم؛ حالا اگه محیط با یه عایقی پر بشه، بارهای مقید سطحی رو صفحه بالایی منفی می‌شن و بارهای مقید سطحی رو صفحه پایینی مثبت می‌شن.



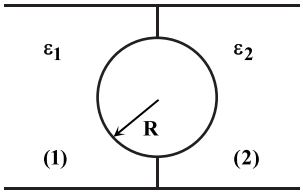
مثال ۶: لایه‌ی عایقی به ضخامت d متر بین $z=d, z=\circ$ در فضای آزاد قرار دارد. ضریب گذردهی الکتریکی عایق $\varepsilon=\varepsilon_{\circ}e^{\frac{z}{d}}$ است. اگر عایق در معرض میدان خارجی ثابت $\vec{E}=E_{\circ}\hat{z}$ قرار گیرد، آنگاه چگالی بار مقید حجمی چند کولن بر متر مکعب است؟ (مهندسی برق، مخابرات میدان ـ دکتری ۹۱)

۱) $-\frac{E_{\circ}}{d}e^{-\frac{z}{d}}$ ۲) $\frac{-\varepsilon_{\circ}E_{\circ}}{d}e^{-\frac{z}{d}}$ ۳) $\frac{E_{\circ}}{d}e^{-\frac{z}{d}}$ ۴) $\frac{\varepsilon_{\circ}E_{\circ}}{d}e^{-\frac{z}{d}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» میدان، عمود بر عایقه، پس محیط سریه. از رابطه $\vec{p}=(1-\frac{1}{\varepsilon r})\vec{D}$ استفاده می‌کنیم و $\varepsilon_r=e^{\frac{z}{d}}$.

حالا از طرفی $D=\varepsilon_r\varepsilon_{\circ}\vec{E}_{\circ}$ پس در رابطه p، جمله $\varepsilon_{\circ}$ وجود داره و چون $\rho_b=-\vec{\nabla}.\vec{p}$، پس در رابطه چگالی بار مقید نیز $\varepsilon_{\circ}$ وجود داره و گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شن. حالا $\vec{D}$ یکنواخته و فقط ε_r تابعیت z داره و چون $\frac{\partial}{\partial z}(1-\frac{1}{\varepsilon_r})>\circ$ پس $\vec{\nabla}.\vec{p}>\circ$ و $\rho_b<\circ$ $(\rho_b=-\vec{\nabla}.\vec{P})$، پس گزینه (۲) درسته.

مثال ۷: مطابق شکل، کره‌ای رسانا با بار Q و شعاع R بین دو محیط با ضرایب گذردهی $\varepsilon_2=2\varepsilon_1=4\varepsilon_{\circ}$ قرار دارد. به‌طوری که امتداد فصل مشترک تحت این دو محیط از مرکز کره می‌گذرد. چگالی سطحی بار القایی در دو نیمکره ۱ و ۲ کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\sigma_1=-\frac{Q}{8\pi R^2}, \sigma_2=-\frac{Q}{4\pi R^2}$ ۲) $\sigma_1=-\frac{Q}{12\pi R^2}, \sigma_2=-\frac{Q}{4\pi R^2}$

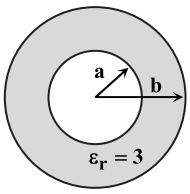
۳) $\sigma_1=\sigma_2=-\frac{Q}{4\pi R^2}$ ۴) $\sigma_1=\sigma_2=-\frac{Q}{12\pi R^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اول و مقدم بر هرچیز میدان الکتریکی موازی فصل مشترکه پس محیط موازیه. هر محیطی که گذردهی بزرگ‌تری داشته باشه، بردار قطبش بزرگ‌تری داره طبق درسنامه ($\frac{p_2}{p_1}=\frac{\varepsilon_{r_2}-1}{\varepsilon_{r_1}-1}$) و چون بار سطحی رابطه مستقیم با بردار قطبش داره ($\sigma=\vec{p}.\hat{n}$) پس هر محیطی که گذردهی بزرگ‌تر داشته باشه، بار سطحی بزرگ‌تر داره $|\sigma_1|>|\sigma_2|$. پس گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن. از طرفی داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{\varepsilon_{r_2}-1}{\varepsilon_{r_1}-1}=\frac{4-1}{2-1}=3 \Rightarrow$$ گزینه (۲) برقراره

✍ **مثال ۸: فضای داخل یک کابل هم محور با یک عایق با ضریب عایق نسبی $\varepsilon_r=3$ پر شده است. اگر q_b کل بار مقید در واحد طول کابل روی سطح عایق در $r=b$ باشد و $\rho_L(\frac{L}{m})$ کل بار آزاد در واحد طول کابل روی سطح رسانای داخلی به شعاع a باشد، کدام گزینه برابر نسبت $\frac{q_b}{\rho_L}$ است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» محیط سریه، چون میدان الکتریکی عمود بر سطح r ثابته. پس $\vec{p}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}$. از قانون گاوس داریم: $\rho_L=\int \vec{D}.\vec{ds}$ و $q_b=\int \vec{p}.ds$ و چون بارهای مقید حجمی روی سطح $r=a$ و $r=b$ اندازه یکسانی دارن پس می‌تونیم به جای محاسبه بارهای مقید روی سطح $r=b$ بارهای مقید روی سطح $r=a$ رو حساب کنیم که در این صورت مساحت در صورت و مخرج رابطه حذف میشه:

$$\Rightarrow \frac{q_b}{\rho_L}=\frac{\vec{p}.s}{\vec{D}.s}=\frac{\vec{p}}{\vec{D}}=1-\frac{1}{\varepsilon_r}=\frac{2}{3}$$

پس گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) باید برن به‌کار و زندگیشون برسن و گزینه (۴) پاسخ مسئله است. بارهای آزاد مثبت بارهای مقید منفی رو جذب می‌کنن و بارهای آزاد منفی بارهای مقید مثبت رو جذب می‌کنن. اگه روی کره به شعاع a بارهای آزاد مثبت قرار بگیره، روی کره به شعاع b بارهای آزاد منفی القا میشه، پس روی کره به شعاع a، بارهای مقید منفی و روی کره به شعاع b بارهای مقید مثبت جمع میشه، پس نسبت خواسته شده در مسأله باید مثبت باشه و گزینه‌های (۱) و (۲) از همون ابتدا باید حذف بشن.

✍ **مثال ۹: دو نیم‌صفحه رسانا واقع در $\phi=0$ و $\phi=\frac{\pi}{2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب دارای پتانسیل‌های صفر و V_0 می‌باشند. ناحیه $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$ را عایقی کامل با ضریب دی‌الکتریک ε_1 و ناحیه $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ را عایق دیگری با ضریب دی‌الکتریک ε_2 فراگرفته است. با فرض آنکه تابع پتانسیل فقط تابع ϕ باشد، چگالی بارهای سطحی مقید حاصل از دوقطبی شدن عایق‌ها در مرز $\phi=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)

۱) $\sigma_{sb}=\frac{V_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r}$
۲) $\sigma_{sb}=\frac{V_0\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2\pi(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r}$
۳) $\sigma_{sb}=\frac{V_0\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r}$
۴) $\sigma_{sb}=\frac{6V_0\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}$

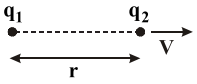
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً اگه $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$ باشه بار مقید نخواهیم داشت؛ پس گزینه‌های (۱) و (۲) می‌پرن. اگه ε_2 رو به بی‌نهایت میل بدیم، ناحیه $\frac{\pi}{3}<\phi<\frac{\pi}{2}$ مانند اتصال کوتاه عمل می‌کنه، پس ولتاژ صفحه $\phi=\frac{\pi}{3}$ هم V_0 می‌شه. پس میدان در ناحیه $0<\phi<\frac{\pi}{3}$ برابر با $E=\frac{V_0}{\phi r}$ بوده و روی صفحه $\phi=\frac{\pi}{3}$، $E=\frac{3V_0}{\pi r}$ و $\sigma_{sb}\Big|_{\phi=\frac{\pi}{3}}=3\frac{V_0\varepsilon_0}{\pi r}$ که با این شرط فقط گزینه (۴) صحیحه.

درسنامه ۲: به‌دست آوردن نیرو و انرژی الکتریکی از طریق دیمانسیون

اگه ساختار و پیکربندی گزینه‌ها با هم متفاوت بود، از طریق دیمانسیون سعی می‌کنیم گزینه درست را مشخص کنیم.
چند نکته در زیر توضیح خواهیم آورد که برای رد گزینه‌ها مفیدند.

۱ـ در بعضی مسائل سؤال میشه که دو بار الکتریکی داریم، حال نیرویی که یکی از بارها به دیگری وارد میکنه، باعث میشه که بار چه شتابی بگیره، در این مواقع ابتدا نیروی الکتریکی بین دو بار رو به دست میاریم و مساوی قانون دوم نیوتن قرار می‌دیم، یعنی:

$$\frac{q_1 q_2 \hat{r}}{4\pi\varepsilon_\circ r^2} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_\circ m r^2}\vec{r}}$$



می‌بینیم که شتاب با بارها رابطه مستقیم و با جرم بار و گذردهی رابطه عکس داره.

۲ـ در بعضی از مسائل، بار نقطه‌ای q_1 به جرم m حول بار نقطه‌ای q_2 با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخه. در حال تعادل، نیروی الکتریکی بین آن دو بار با اندازه نیروی گشتاور $F = mr\omega^2$ برابره:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2} = mr\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_\circ r^3 m}}$$

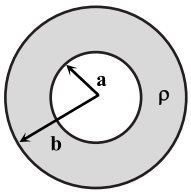
از رابطه بالا معلومه که فرکانس نوسانات با بارهای الکتریکی رابطه مستقیم داره و با گذردهی محیط و جرم بار رابطه عکس داره.

۳ـ اگه بار q در معرض یه میدان الکتریکی خارجی به صورت معلق قرار بگیره و سؤال بشه که جرم بار رو طوری تعیین کنید که بار سقوط نکنه. در این حالت نیروی الکتریکی وارد بر بار رو حساب کرده و از رابطه $|\vec{F}_e| = mg$، جرم به دست میاد.

۴ـ تو بعضی مسائل نیروی الکتریکی باعث نوسان یه بار الکتریکی میشه، در این حالت برای پیدا کردن پریود نوسانات، ابتدا نیروی الکتریکی وارد بر بار رو حساب کرده و از قانون هوک $\vec{F} = k\vec{x}$، k رو به دست آورده و $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. پس پریود نوسانات با جرم جسم و گذردهی محیط رابطه مستقیم داره.

مثال ۱۳: انرژی لازم برای ایجاد یک لایه کروی بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ در ناحیه $a < r < b$ چقدر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $W = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_\circ}(b^3 - a^3)$

۲) $W = (\frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_\circ})(b^3 - a^3)\varepsilon_\circ$

۳) $W = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\left[(\frac{4\pi}{3\varepsilon_\circ})(b^3 - a^3)\rho\right]^2$

۴) $W = (\frac{2\pi\rho^2}{15\varepsilon_\circ})(3a^5 - 2b^5 - 5a^3b^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً اگه $a = b$ باشه، بار حجمی صفر میشه و انرژی نیز صفر میشه که تو همه گزینه‌ها این نکته برقراره. از طرفی فقط دیمانسیون گزینه (۴) با انرژی هم‌خوانی داره.

انرژی با $\varepsilon E^2 V$ متناسبه که V حجمه و میدان الکتریکی با $\frac{\rho V}{\varepsilon}$ متناسبه که ρ چگالی باره. از طرفی حجم با r^3 متناسبه پس انرژی با $\omega \propto \frac{\rho^2 r^5}{\varepsilon}$ متناسبه که فقط گزینه (۴) این ویژگی رو داره.

مثال ۱۴: دیپل الکتریکی با گشتاور دوقطبی p به فاصله d بالای یک صفحه هادی بزرگ قرار دارد. اندازه نیروی وارد بر صفحه برابر است با:

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۴)

۱) $\frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_\circ d^4}$

۲) صفر

۳) $\frac{p^2 d^2}{18\pi\varepsilon_\circ}$

۴) $\frac{p^2}{16\pi\varepsilon_\circ d^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی الکتریکی از جنس $\frac{Q^2}{r^2}$ می‌باشه و $P = Qd$؛ پس $F \propto \frac{P^2}{r^2 d^2}$، که فقط دیمانسیون گزینه (۱) با دیمانسیون نیرو هم‌خوانی داره.

با استفاده از نکات گفته شده قبلی می‌تونیم ۳ مثال زیر رو با رد کردن حداقل ۲ تا از گزینه‌ها حل کنیم.

مثال۱۵: یک بار نقطه‌ای به جرم m و بار $-q$ در مرکز یک حلقهٔ بار دایروی به شعاع a و چگالی خطی λ کولن بر متر قرار گرفته است. پریود نوسانات این بار نقطه‌ای برای جابجائی‌های بسیار کوچک در راستای محور حلقهٔ بار کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\pi a\sqrt{\frac{۴m\varepsilon_۰}{\lambda q}}$ ۲) $\pi a\sqrt{\frac{\lambda m\varepsilon_۰}{\lambda q}}$ ۳) $\pi a\sqrt{\frac{\lambda\varepsilon_۰}{m\lambda q}}$ ۴) $\pi a\sqrt{\frac{\lambda m}{\varepsilon_۰\lambda q}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق رابطه $w=\frac{۲\pi}{T}\leftarrow T=\frac{۲\pi}{w}\leftarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ که k ثابت فنر بوده و با بار الکتریکی رابطه مستقیم داره و با $\varepsilon_۰$ رابطه عکس داره. پس پریود نوسانات با جرم رابطه مستقیم داره، پس گزینه (۳) غلطه و با گذردهی رابطه مستقیم داره، پس گزینه (۴) هم غلطه.

مثال۱۶: فضای درون یک پوسته کروی رسانا که به زمین متصل است؛ به شعاع داخلی $R_۱$ و شعاع خارجی $R_۲$ توسط چگالی بار یکنواخت ρ پر شده است. انرژی الکترواستاتیکی سیستم کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۳\rho^۲}{۴۷\pi\varepsilon_۰}R_۱^۵$ ۲) $\frac{۲\rho^۲}{۴۵\varepsilon_۰}R_۱^۵$ ۳) $\frac{۳\rho^۲}{۴۵}(R_۱^۵-R_۲^۵)$ ۴) $\frac{۳\rho^۲}{۴۷\pi\varepsilon_۰}(R_۲^۵-R_۱^۵)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون پوسته کروی به زمین وصل شده، پس میدان الکتریکی خارج پوسته صفره و شعاع $R_۲$ تأثیری در انرژی نداره، چون فقط انرژی کره‌ای به شعاع $R_۱$ را حساب می‌کنیم. گزینه (۱) یا گزینه (۲) صحیح است.

مثال۱۷: یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $\vec{P}$ در مرکز یک کره فرضی بزرگ به شعاع a واقع شده است. انرژی الکتریکی در ناحیه خارج از کره کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{P^۲}{۶\pi^۲\varepsilon_۰a^۳}$ ۲) $\frac{P^۲}{۶\pi\varepsilon_۰a^۳}$ ۳) $\frac{P^۲}{۱۲\pi\varepsilon_۰a^۳}$ ۴) $\frac{P^۲}{۱۲\pi^۲\varepsilon_۰a^۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» انرژی یک دوقطبی از رابطه $w=-\vec{P}.\vec{E}$ به‌دست می‌آید که در رابطه E ضریب $\frac{۱}{\pi}$ داریم؛ پس یا گزینه (۲) یا گزینه (۳) صحیح است.

او قادر بود بدون همسر، خانه و فرزند زندگی بگذراند، قادر بود بدون عشق، دوستی و سلامتی سر کند، قادر بود بدون سرپناه، آسایش و غذا سر کند، اما نمی‌توانست بدون آنچه که بزرگتر از خود او بود، آنچه تمام زندگی‌اش بود سر کند و آن قدرت و توانایی خلق کردن بود.

«از کتاب شور زندگی در توصیف ونسان ون‌گوگ»

مدرسان شریف

فصل هشتم

«پتانسیل مغناطیسی»

درسنامه ۱: پیدا کردن پتانسیل از طریق جریان

رابطه کلی پتانسیل برداری $\vec{A}=\iiint\frac{\mu_\circ\vec{J}(r')}{4\pi|r-r'|}dv'$ است. رابطه پتانسیل برداری برای توزیع خطی و سطحی به صورت زیره:

توزیع بار سطحی: $\vec{A}=\int_s\frac{\mu_\circ\vec{k}ds}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$

توزیع بار خطی: $\vec{A}=\int_c\frac{\mu_\circ I\vec{dl}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$

از روابط بالا درمی‌یابیم که جهت پتانسیل برداری مغناطیسی در جهت جریانه.

حال پتانسیل برداری چند حالت خاص رو بررسی می‌کنیم.

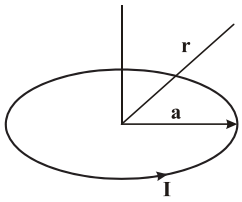
۱ـ پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از یک سیم بی‌نهایت حامل جریان I:

$$\vec{A}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}Ln(\frac{\rho_\circ}{\rho})\hat{z}$$

که $\rho_\circ$ مبدأ پتانسیله.

در $\rho=\rho_\circ$ پتانسیل صفره. با افزایش فاصله پتانسیل کاهش پیدا میکنه.

۲ـ پتانسیل برداری ناشی از یک حلقه به شعاع a و حامل جریان (دوقطبی مغناطیسی) در فواصل دور:



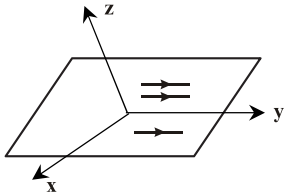
$$\vec{A}=\frac{\mu_\circ(\pi a^2 I)\hat{n}\times\hat{r}}{4\pi r^2}$$

که در اینجا $\hat{n}=\hat{z}$.

حال اگر نقطه مشاهده روی محور حلقه باشه $\vec{A}=\circ$؛ زیرا در این حالت $\hat{n}=\hat{z}$ و $\hat{r}=\hat{z}$، پس $\hat{z}\times\hat{z}=\circ$.

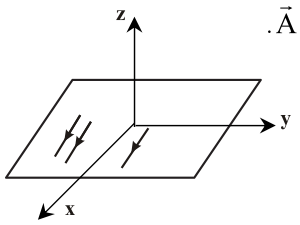
توجه کنید که پتانسیل برداری مغناطیسی دوقطبی مغناطیسی با $\frac{1}{r^2}$ متناسبه.

۳ـ پتانسیل ناشی از یک صفحه نامحدود جریان‌دار:



اگه چگالی جریان به‌صورت $\vec{J}_s=J_\circ e^{-\alpha x}\hat{y}$ روی صفحه توزیع شده باشه، (توجه کنید که در این‌جا جریان در راستای $\hat{y}$ است و تابعیت x دارد).

این توزیع جریان باید دو شرط رو اقناع کنه. یکی اینکه باید $\left.\frac{\partial A^+}{\partial Z}-\frac{\partial A^-}{\partial Z}\right|_{z=\circ}=-\mu_\circ\vec{J}\Big|_{z=\circ}$، پس باید تابعیت z پتانسیل برداری به فرم سینوسی باشد.



از طرفی $\vec{\nabla}.\vec{J}=\circ$ باید پتانسیل برداری در راستای $\hat{z}$ باشد تا این شرط اقناع شود، پس در کل $\vec{A}=\left[e^{-\alpha x}\sin\alpha z\right]\hat{y}$.

حال اگه جریان سطحی در جهت یکی از مؤلفه‌ها باشد و تابعیت دو مؤلفه فضایی دیگه باشد، یعنی اگه $\vec{J}=J_\circ\cos\alpha y\,\hat{x}$ با همان توضیحات بالا باید $\vec{A}=e^{-\alpha z}\cos\alpha y\,\hat{x}$.

درکل پتانسیل مغناطیسی از چگالی جریان سطحی تبعیت می‌کند.

به این معنی که اگه $\alpha = 0$ باشه، بازم توزیع جریان خواهیم داشت که یکنواخته، پس پتانسیل مغناطیسی نیز خواهیم داشت؛ پس فرم کلی پتانسیل شبیه جریان سطحیه. دقت کنید که در $z > 0$ و برای $z \to \infty$ باید پتانسیل محدود باشه، پس به همین خاطر پتانسیل باید فرم نمایی میراشونده بگیره.

۴ـ در مرز مشترک دو محیط پتانسیل مغناطیسی برداری یکسانه $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$.

۵ـ رابطه چگالی شار مغناطیسی B و پتانسیل برداری A به صورت $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ می‌باشه.

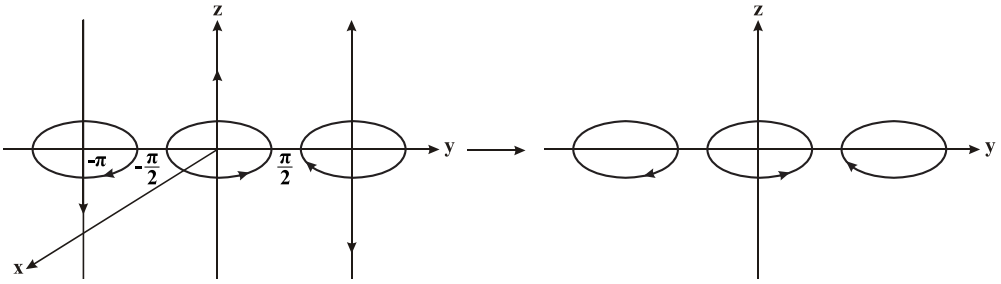
۶ـ در محیط‌های همگن و خطی معادله پواسون به صورت $\nabla^2 A = -\mu \vec{J}$ خواهیم داشت که اگه مرز مشترک دو محیط شامل چگالی جریان سطحی $\vec{J}_S$ باشه، معادله پواسون به فرم $\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu \vec{J}_S$ درمیاد.

مثال۱: در فضای خالی جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_S = \cos(\beta y)\hat{a}_z$ بر روی صفحه $x = 0$ قرار دارد. معادله خطوط میدان مغناطیسی در نیم فضای $x > 0$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $e^{\beta x}\left|\cos \beta y\right| = \text{const.}$ ۲) $e^{-\beta x}\left|\sin \beta y\right| = \text{const.}$ ۳) $e^{-\beta x}\left|\cos \beta y\right| = \text{const.}$ ۴) $e^{\beta x}\left|\sin \beta y\right| = \text{const.}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** جریان سطحی در راستای $\hat{z}$ است. پس طبق $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ باید جریان سطحی تابعیت x و y داشته باشه. تابعیت خود جریان سطحی مسأله نسبت به y به صورت $\cos \beta y$ است و از آن‌جا که پتانسیل برداری فرم جریان سطحی را حفظ می‌کنه، در فرمول پتانسیل برداری باید جمله $\cos \beta y$ وجود داشته باشه. پس گزینه (۱) یا (۳) درسته. از طرفی صفحه جریان در راستای x نامحدوده، پس باید تابعیت x پتانسیل برداری به‌فرم نمایی میراشونده باشه، پس فقط گزینه (۳) درسته.

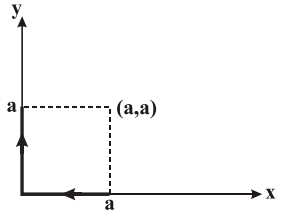
روش دوم: برطبق توزیع جریان سطحی $\vec{J}_S = \cos \beta y \hat{z}$ المان‌های جریان در راستای y به صورت کسینوسی توزیع شده که در جهت $\hat{z}$ هستن. از قانون دست راست توزیع خطوط به صورت زیره:



پس خطوط میدان در $y > 0$ و $y < 0$ متقارن‌اند و فرم کسینوسی دارن؛ یعنی گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیحن. از طرفی راستای x نامحدوده و باید میدان در $x \to \infty$ میرا شود. پس گزینه (۳) درسته.

همچنین اگه $\beta = 0$ قرار بدید باز هم جریان سطحی خواهیم داشت که یکنواخت میشه و میدان نیز خواهیم داشت. در نتیجه، نباید فرم سینوسی داشته باشیم و باید کسینوسی باشه.

مثال۲: دو قطعه سیم نازک مستقیم با جریان I به طول a مطابق شکل دو ضلع یک مربع را تشکیل می‌دهند. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ در گوشه مقابل چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)



۱) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{Ln}(1+\sqrt{2})(\hat{y} - \hat{x})$

۲) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}(\hat{y} + \hat{x})$

۳) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\hat{y} + \hat{x})$

۴) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I \text{Ln}(1+\sqrt{2})}{4\pi a}(\hat{y} - \hat{x})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جهت پتانسیل برداری مغناطیسی در راستای جریانه. جهت جریان در دو شاخه در جهت $\hat{y} - \hat{x}$ است، پس باید جهت پتانسیل برداری نیز در همان راستا باشه. در نتیجه گزینه (۱) یا (۴) درسته. همچنین واحد پتانسیل برداری وبر بر متره، ولی در گزینه (۴) واحد پتانسیل برداری وبر بر مترمربع می‌باشه؛ پس گزینه (۴) هم غلطه و گزینه (۱) جواب تسته.

درسنامه ۲: پیدا کردن پتانسیل مغناطیسی از طریق میدان مغناطیسی

رابطه میدان مغناطیسی با پتانسیل برداری به‌صورت $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ است، پس اگه مسأله‌ای پتانسیل برداری یک ساختار را خواسته بود که به‌دست آوردن آن سخت بود و ما میدان مغناطیسی آن ساختار را بلد نبودیم، از رابطه بالا گزینه‌ها را چک می‌کنیم. ذکر چند نکته خالی از لطف نیست.

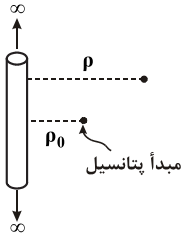
نکته۱: پتانسیل برداری مغناطیسی در مرز مشترک دو محیط مختلف پیوسته است. $\vec{A}_1=\vec{A}_2$

نکته۲: میدان مغناطیسی یک استوانه نامحدود حامل جریان یکنواخت I در خارج استوانه برابره با $\frac{I}{2\pi r}\hat{\phi}$ و در داخل استوانه برابره با: $\frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\phi}$

در فصل مشترک یعنی $r=a$، معلومه که میدان‌های خارج و داخل استوانه پیوسته است، چون میدان‌های داخل و خارج، در فصل مشترک مماسن.

نکته۳: میدان مغناطیسی یک سلونوئید نامتناهی در داخل سلونوئید برابر nI و در خارج سیملوله برابر صفره.

نکته۴: پتانسیل مغناطیسی برداری در اطراف سیم بلند جریان‌دار از رابطه زیر به دست میاد:



$$\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\text{Ln}\frac{\rho_0}{\rho}\hat{z}$$

دقت کنید که طبق این رابطه، در فواصل دور از سیم، پتانسیل صفره و در فاصله‌های نزدیک پتانسیل مقدار محدودی به دست میاد.

مثال۳: استوانه توپری از جنس یک ماده مغناطیسی رسانا با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r=4\pi$ در دست است. محور این استوانه بر محور z منطبق می‌باشد. شعاع استوانه a طول آن بی‌نهایت کل جریان عبوری از آن در جهت $\hat{z}$ برابر I است. بردار پتانسیل مغناطیسی A با فرض یکنواخت بودن توزیع جریان در داخل استوانه کدام است؟ فرض کنید در $r=a$ داشته باشیم $\vec{A}=0$. (مهندسی برق ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\mu_0 I}{\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$ ۲) $\mu_0 I(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$ ۳) $\frac{\mu_0 I}{4}(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$ ۴) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» میدان مغناطیسی در داخل استوانه از رابطه $\frac{\mu_0\mu_r Ir}{2\pi a^2}\hat{\phi}$ به‌دست میاد که با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ فقط در گزینه (۲) این شرط اقناع میشه.

مثال۴: پتانسیل برداری برای نقاط داخل و خارج یک سیملوله استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع a که محور آن بر محور z منطبق است و در واحد طول آن n دور سیم حامل جریان I پیچیده شده، در مختصات استوانه‌ای کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $\vec{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 nI}{3}\rho\hat{\phi} & \rho<a\\ 0 & \rho>a\end{cases}$

۲) $\vec{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 nI\rho}{3}\hat{\phi} & \rho<a\\ \frac{\mu_0 nI}{3}\frac{a^3}{\rho^2}\hat{\phi} & \rho>a\end{cases}$

۳) $\vec{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 nI}{2}\rho\hat{\phi} & \rho<a\\ 0 & \rho>a\end{cases}$

۴) $\vec{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 nI\rho}{2}\hat{\phi} & \rho<a\\ \frac{\mu_0 nI}{2}\frac{a^2}{\rho}\hat{\phi} & \rho>a\end{cases}$

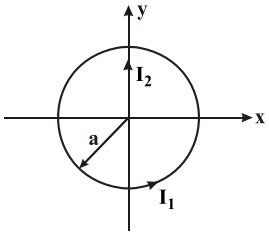
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً باید در مرز مشترک $(\rho=a)$ پتانسیل پیوسته باشه، پس (۱) و (۳) غلطن. میدان مغناطیسی خارج سیملوله صفره، پس از روی $\vec{A}$ داده شده تو گزینه‌ها برای $\rho>a$ میدان مغناطیسی باید صفر به‌دست بیاد که فقط گزینه (۴) درسته. از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ استفاده می‌کنیم.

مثال۵: از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ خارج از سیم‌پیچ و در فاصله‌ی r از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (شعاع سیم‌پیچ را a و جهت جریان آن را $\hat{\varphi}$ فرض کنید.)
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2r}\hat{a}_\varphi$ ۲) $\frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{a}_\varphi$ ۳) $\frac{\mu_0 nIa}{2}\hat{a}_\varphi$ ۴) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

مثال۸: در صفحه xy حلقه‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات که حامل جریان I_1 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد وجود دارد و محور y حامل جریان I_z در جهت $\hat{y}$ است و دو جریان از هم مستقل‌اند. نیرویی که جریان I_2 به حلقه وارد می‌کند عبارت است از:

(مهندسی برق ـ سراسری ۶۷)



۱) $-\mu_0 I_1 I_2 \hat{z}$

۲) $\mu_0 I_1 I_2 \hat{y}$

۳) $-\mu_0 I_1 I_2 \hat{x}$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا نیروی وارد بر جریان I_2 را حساب می‌کنیم؛ زیرا راحت‌تره. میدانی که حلقه تولید می‌کنه در راستای $\hat{z}$ است (۴ انگشت رو در جهت جریان قرار بدید. انگشت شست جهت میدان را نشان میده). حال ۴ انگشت رو در جهت $\hat{y}$ بگیرید و خم ۴ انگشت در جهت میدان ($\hat{z}$). پس انگشت شست جهت نیرو را به ما میده که راستای $\hat{x}$ به‌دست میده. در نتیجه نیروی وارد بر جریان I_1 خلاف $\hat{x}$ یعنی $-\hat{x}$ است. گزینه (۳) جواب موردنظره.

درسنامه۲: روش‌های حدی

دیگه به آخر داستان رسیدیم. پس با روش‌های حدی آشنایی دارید که چه‌طوری تست‌ها را با این روش‌ها درهم می‌شکنیم. فقط چند نکته ذکر می‌کنم و به حل تست‌ها می‌پردازیم.

۱ـ چگالی انرژی مغناطیسی به‌صورت $w_m = \frac{1}{2}\mu |\vec{H}|^2 = \frac{1}{2\mu}|\vec{B}|^2$ می‌باشه و انرژی ذخیره‌شده در یک ناحیه $w = \int_v \frac{1}{2}\mu |\vec{H}|^2 dv$ به‌دست میاد.

طبق رابطه بالا انرژی با مجذور میدان مغناطیسی رابطه داره و میدان مغناطیسی با جریان الکتریکی رابطه مستقیم داره. پس انرژی با مجذور جریان الکتریکی متناسبه.

۲ـ اگر در جهت نیرو حرکت کنیم آن‌گاه کار انجام گرفته توسط عامل خارجی منفی خواهد شد و برعکس.

۳ـ کار نیروی مغناطیسی همواره صفره.

۴ـ اگر دو محیط با نفوذپذیری‌های متفاوت داشته باشیم، چگالی انرژی مغناطیسی در محیطی بیشتره که خطوط میدان آن به هم نزدیک‌تر باشن و هرچه نفوذپذیری محیط بیشتر باشه خطوط میدان به هم نزدیک‌ترن.

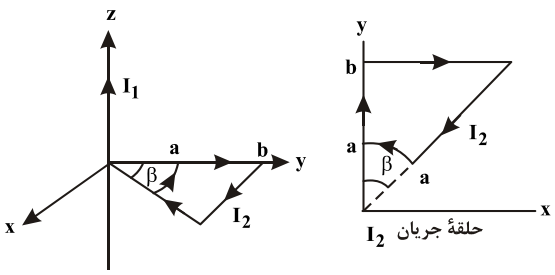
۵ـ انرژی ذخیره شده برای یک سیستم $w_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$ خواهد شد که L_1 و L_2 اندوکتانس خودی و M ضریب القایی متقابله.

۶ـ اگه نفوذپذیری محیط را تغییر بدیم، انرژی نیز تغییر خواهد کرد. پس اگه نفوذپذیری محیط جدید را مساوی نفوذپذیری محیط قبلی قرار بدیم انرژی مغناطیسی بدون تغییر می‌مونه.

۷ـ انرژی ذخیره شده مغناطیسی برای یه دوقطبی مغناطیسی با ممان $\vec{m}$ که در معرض میدان $\vec{B}$ قرار گرفته، به‌صورت $w_m = -\vec{m}.\vec{B}$ می‌باشه.

مثال۹: سیم جریان با طول بی‌نهایت با جریان I_1 منطبق بر محور zها قرار دارد. حلقه جریان در صفحه xy با جریان I_2 مطابق شکل زیر داده شده است. گشتاور وارد بر حلقه جریان I_2 کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۸)



۱) $\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}[(a\cos\beta - \ln\cos\beta)\hat{a}_x + (b\beta - a\sin\beta)\hat{a}_y]$

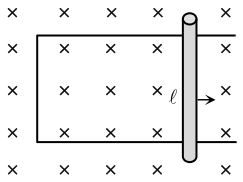
۲) $\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}[(a\cos\beta - a - \ln\cos\beta)\hat{a}_x + (b\beta - a\sin\beta)\hat{a}_y]$

۳) $\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}[\cos\beta\hat{a}_x + \sin\beta\hat{a}_y]$

۴) $\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}[(\cos\beta\hat{a}_x - \sin\beta\hat{a}_y]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از حالت حدی استفاده می‌کنیم. اگه $\beta = 0$ انتخاب کنیم، حلقه‌ای در کار نخواهد بود تا شاری از آن عبور کنه در نتیجه گشتاوری هم در کار نخواهد بود.

مثال ۱۰: میله‌ای رسانا به جرم m، طول ℓ و مقاومت الکتریکی R مطابق شکل می‌تواند بر روی دو ریل رسانای بدون اصطکاک حرکت کند. میدان مغناطیسی یکنواخت B بر صفحه ریل‌ها اعمال شده است. از مقاومت الکتریکی ریل صرف‌نظر کنید. در لحظه $t = 0$ به میله سرعت اولیه‌ای موازی ریل داده می‌شود. نسبت سرعت لحظه‌ای به شتاب لحظه‌ای میله در لحظه t چقدر است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۷)



۱) $\frac{mR}{\ell^2 B^2}$

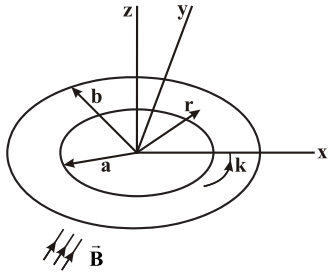
۲) $\frac{\ell^2 B^2}{mR}$

۳) $-\frac{\ell^2 B^2}{mR}$

۴) $-\frac{mR}{\ell^2 B^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دونیم که $\vec{F} = m\vec{a}$، پس شتاب با جرم رابطه عکس داره. اینجا هم، نسبت سرعت لحظه‌ای به شتاب لحظه‌ای خواسته شده. پس m باید در صورت گزینه‌ها ظاهر بشه (گزینه‌های (۲) و (۳)، رد!) اگه خوب به قانون لنز توجه کنیم، متوجه می‌شیم نیرو در جهتی به میله وارد میشه که با تغییرات شار مقابله کنه. حرکت میله در جهت نشان داده شده در صورت سؤال، باعث افزایش شار در سطح حلقه میشه پس نیرو در جهت خلاف حرکت به میله وارد خواهد شد و به همین دلیل، شتاب میله کند شونده خواهد بود. در نتیجه علامت جواب باید منفی باشه و گزینه (۴) صحیحه.

مثال ۱۱: یک طوق به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b با چگالی سطحی جریان متغیر $\vec{k} = r\hat{a}_\varphi$ در میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_0(\hat{a}_x + 2\hat{a}_z)$ مطابق شکل زیر قرار دارد. انرژی ذخیره شده‌ی مغناطیسی کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)



۱) $\frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)B_0$

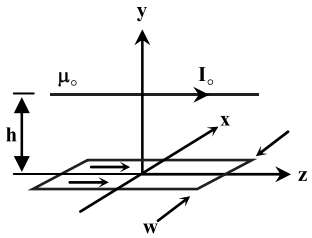
۲) $\frac{\pi}{2}(b^4 - a^4)B_0$

۳) $\frac{\pi}{2}(b^3 - a^3)B_0$

۴) $\frac{\pi}{2}(b - a)B_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» انرژی از رابطه $w = -\vec{m}.\vec{B}$ تعیین می‌شه. جهت ممان مغناطیسی $\hat{z}$ است. از طرفی $\vec{m} = \int (\pi r^2).rdr\hat{z} \rightarrow \vec{m} = \int \pi r^3 dr\hat{z}$. و چون میدان مغناطیسی $\vec{B}$ میدان ثابتیه، پس در کل w متناسب با r^4 است که فقط دیمانسیون گزینه (۲) با انرژی هم‌خوانی داره.

مثال ۱۲: همانند شکل جریان خطی $\vec{I} = I_0\hat{a}_z$ به فاصله h بالا و موازی محور تقارن یک نوار جریان سطحی با پهنای w و چگالی جریان $\vec{J}_s = J_0\hat{a}_z(\frac{A}{m})$ قرار دارد. نیروی وارد بر واحد طول جریان خطی یعنی $\frac{d\vec{F}}{dz}$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)



۱) $-\frac{\mu_0 I_0 J_0}{\pi}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})\hat{a}_y$

۲) $-\frac{\mu_0 I_0 J_0}{2\pi h}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})\hat{a}_y$

۳) $-\frac{\mu_0 I_0 J_0}{\pi h}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})\hat{a}_y$

۴) $-\frac{\mu_0 I_0 J_0}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})\hat{a}_y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بیایید ساده‌سازی کنید $w \rightarrow \infty$ میشه یک صفحه نامحدود. میدان صفحه نامحدود $\frac{1}{2}\vec{J}_s \times \hat{n}$ هستش پس $\frac{1}{2}J_0\hat{z} \times \hat{y} = -\frac{1}{2}J_0\hat{x}$.

حالا از قاعده دست راست ۴ انگشت رو در جهت $\hat{z}$ قرار داده و خم چهار انگشت رو در جهت $-\hat{x}$ قرار میدیم که نیرو در جهت $(-\hat{y})$ خواهد بود و خداروشکر تمام گزینه‌ها این شرط رو اقناع می‌کنن. حالا باید اندازه نیرو بشه $\frac{\mu_0}{2} = \mu_0\frac{I_0 J_0}{2}$ حالا در گزینه‌ها $w \rightarrow \infty$ قرار بدید:

$(\tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2})$

که گزینه (۱) درسته. کیف کردید واقعاً؟