

**PART A: Grammar**

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

🔍 1- The rate that bright comets enter the solar system implies there should be around 3000 of them buzzing around, only 25 are known.

- 1) nonetheless 2) regardless of the fact 3) and yet 4) as there are

🔍 2- Contemporary theories of interpretation require that, in our analyses of texts, we consider not only what the text says “made.”

- 1) also its meaning gets and 2) but also gets the meaning of it
3) but its meaning also gets 4) but how its meaning gets

🔍 3- individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

- 1) That 2) An 3) The 4) It is that

🔍 4- Plant scientists have been trying for years to genetically modify flowers for aesthetic purposes. The first to go on sale were blue carnations in Australia, in 1996.

- 1) were produced 2) produced 3) had been produced 4) to produce

🔍 5- Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, weapon platforms.

- 1) they are often called 2) often called 3) called they are often 4) that are called often

🔍 6- Articulating what the difference between humans and other creatures consists of behind it have formed a large and difficult project tackled by biologists, anthropologists, psychologists, and philosophers.

- 1) uncovering the biology 2) the biology of uncovering
3) the biology uncovering 4) and uncovering the biology

🔍 7- Most healthcare professionals view depression as “just part of getting old and argue that this illness,, can have serious, even fatal consequences.

- 1) untreated then 2) untreated whether it is 3) if untreated 4) that is untreated

🔍 8- Ted had a terrible habit of boasting so much about his smallest accomplishments his vainglory became renowned throughout the small college campus.

- 1) that 2) as 3) in that 4) as though

**PART B: Vocabulary**

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

9- Dogs growl and show their teeth in an attempt to frighten the animal or person they perceive as a

- 1) habitat 2) prey 3) suspicion 4) threat

10- Based on his recent poor decisions, it was obvious that Seth lacked even a modicum of good

- 1) sentiment 2) sense 3) sensation 4) sensitivity

11- The judge the extraneous evidence because it was not pertinent to the trial.

- 1) disclosed 2) distended 3) dismissed 4) distorted

12- The more frequently employees take time to exercise during working hours each week, the fewer sick days they

- 1) expend 2) save 3) take 4) recall

13- Classic psychology experiments have shown that when rats are first with an electrical shock to fear a tone when it sounds, they later fear the tone even without the associated shock.

- 1) conditioned 2) sparkled 3) displayed 4) intended

14- In 1998 Gordon Sinclair, the owner of a well-known restaurant, was struggling with a problem that all restaurateurs. Patrons frequently reserve a table but, without notice, fail to appear.

- 1) delegates 2) afflicts 3) intensifies 4) evades

15- Despite what the scientist said, the volcano eruption is not , so do not be concerned!

- 1) impassive 2) negotiable 3) vulnerable 4) imminent

16- At the landfill, the process is in full swing, turning much of the garbage into gasses.

- 1) conversion 2) restoration 3) decomposition 4) pressurization

17- Because I am an extreme planner who needs to control everything, I never engage in

- 1) justification 2) pretention 3) coincidence 4) spontaneity

18- The roads in our town already have too much traffic; building a new shopping mall will the problem.

- 1) frustrate 2) exacerbate 3) preserve 4) exploit

19- The movie *Close Encounters of the Third Kind* tells the story of the first contact between beings from outer space and creatures, that is, those living on earth.

- 1) terrestrial 2) dominant 3) ingenious 4) affable

20- There is agreement that an airport is needed; no one disputes that, but there is fundamental disagreement about where to build it.

- 1) uniform 2) utilitarian 3) unique 4) unanimous

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۱- گزینه «۳» با توجه به سرعت و تعداد ورود ستاره‌های دنباله‌دار به منظومه شمسی می‌توان حدس زد که باید تقریباً ۳۰۰۰ مورد از آن‌ها وجود داشته؛ یا این حال تنها ۲۵ عدد از آنها شناسایی شده‌اند.

توضیح: همان‌طور که می‌دانید nonetheless قید ربط است؛ یعنی قبل از آن باید نقطه یا نقطه‌ویرگول و بعد از آن باید حتماً کاما بیاید. با این حساب گزینه (۱) نادرست است. گزینه (۲) در صورتی ارزش بررسی کردن دارد که طراح بعد از fact از حرف ربط that استفاده می‌کرد. گزینه (۳) صحیح است، هم با توجه به مفهوم جمله و هم با توجه به اینکه قبل از and کاما می‌آید. و گزینه (۴) نادرست است چون بعد از as دو تا فعل داریم؛ یکی are و یکی know.

۲- گزینه «۴» نظریه‌پردازان معاصر در زمینه ترجمه شفاهی باور دارند ما در آنالیز متن، علاوه بر چیزی که متن می‌گوید، باید به نحوه شکل‌گیری معنی آن نیز توجه داشته باشیم.

توضیح: همان‌طور که می‌بینیم این تست با مبحث not only ...but also سروکار دارد. اول از همه اینکه در این ساختار but also می‌تواند به صورت but یا also هم به کار برود. پس امیدوارم فوری گزینه (۲) را نزنه باشید.

ضمناً می‌دانیم ساختار (also) butnot only مستلزم رعایت ساختار موازی است؛ بنابراین چون بعد از not only کلمه پرسشی what را داریم باید بعد از (also) but هم از کلمه‌ی پرسشی how استفاده کنیم:

.... not only what the text says but how its meaning gets made.

۳- گزینه «۱» اینکه شبکه‌های اجتماعی بر روی رفتار افراد تاثیرگذار هستند، قابل تردید نمی‌باشد.

توضیح: تست بسیار ساده‌ای است. توی مبحث جمله‌واره‌ی اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که قبل از فعل be به عنوان فاعل استفاده شوند. گفتیم در این موارد that به صورت «اینکه» ترجمه می‌شود:

That individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

مثال بیشتر:

That coffee grows in Brazil is well known.

۴- گزینه «۲» گیاه‌شناسان سال‌هاست که با استفاده از اصلاح ژنتیک به دنبال زیباتر ساختن گل‌ها هستند. گل میخک آبی اولین موردی بود که برای فروش عرضه شد. این گل در سال ۱۹۹۶ در استرالیا تولید شد.

توضیح: این تست از دو جمله تشکیل شده که برای پاسخگویی به آن فقط به جمله دوم نیاز داریم. جمله دوم دارای فعل اصلی were می‌باشد، با این حساب به هیچ فعل اصلی دوم دیگری نیاز نداریم چون هر جمله فقط و فقط باید یک فعل اصلی داشته باشد. این یعنی حذف همزمان گزینه‌های (۱) و (۳). گزینه (۴) نادرست است چون قصد بیان هدف نداریم. ضمناً شکل اولیه گزینه (۲) این‌طوری بوده:

The first to go on sale were blue carnations that were produced in Australia, in 1996.

اگر that were را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.



۵- گزینه «۲» سلاح‌ها از طریق وسایل نقلیه مختلفی حمل و تحویل داده می‌شوند. این وسایل نقلیه اغلب با نام پلتفرم سلاح شناخته می‌شوند. توضیح: تقریباً هر سال از این بحث سؤال می‌آید و ما هم هر سال می‌گوییم بعد از کاما کاربرد that ممنوع است. (این یعنی حذف گزینه (۴)). گزینه (۱) در صورتی صحیح است که کاما به نقطه تبدیل بشود و they هم به They. مهم‌ترین دلیل رد گزینه (۳) کاربرد they بعد از called است. ضمناً شکل اولیه‌ی گزینه‌ی ۲ این طوری بوده:

Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, **which are often called** weapon platforms. اگر which are حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۶- گزینه «۴» درک تفاوت بین انسان و سایر موجودات و مسائل بیولوژیکی نهفته در آن باعث بوجود آمدن مباحث و تحقیقات دشوار و گسترده‌ای شده است که دانشمندانی از رشته‌های مختلف مانند زیست‌شناسی، انسان‌شناسی، روانشناسی و فلسفه به آن می‌پردازند. توضیح: توی تست‌هایی که این‌قدر طولانی هستند، اولین کار این است که به دنبال فعل اصلی باشیم. فعل اصلی سوال ما have formed است. پس به خاطر حضور have باید فاعلمون جمع باشد. اما articulating به تنهایی به فعل مفرد نیاز دارد، این یعنی باید articulating را با and به یک ساختار ing دار موازی دیگر متصل کنیم تا آن موقع کاربرد فعل have هم معنی پیدا کند. و چون فقط گزینه (۴) است که دارای and می‌باشد، می‌توانیم باقی گزینه‌ها را رد کنیم.

۷- گزینه «۳» اکثر متخصصین حوزه بهداشت و درمان، افسردگی را بخشی از پروسه افزایش سن می‌دانند و اعتقاد دارند که در صورت عدم درمان می‌تواند عواقب بسیار وخیمی داشته و یا حتی باعث مرگ بیمار شود. توضیح: اول از همه اینکه طراح سؤال ظاهراً یادش رفته آن (") را که باز کرده ببندد. باید این علامت را قبل از and بیاورد. حالا می‌رسیم به رد گزینه‌ها. کاربرد that بعد از کاما ممنوع است (یعنی رد گزینه (۴)). گزینه ۱ نادرست است چون معلوم نیست طراح سوال آن then را بابت چی استفاده کرده. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون بعد از is هیچ عبارت کامل‌کننده‌ای نداریم. اما برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۳) صحیح است باید اصل جمله را پیدا کنیم.

Most healthcare professionals argue that this illness, **if it is untreated**, can have serious, even fatal consequences. چون it به this illness برمی‌گردد، می‌توانیم با فرض اینکه فاعل‌ها یکسان هستند، فاعل جمله‌واره‌ی وابسته یعنی it و فعل is را حذف کنیم و یک وجه وصفی بسازیم:

Most healthcare professionals argue that this illness, **if untreated**, can have serious, even fatal consequences.

۸- گزینه «۱» تد اخلاق بسیار زشتی داشت و به خاطر کوچک‌ترین موفقیت‌هایش به قدری فخرفروشی می‌کرد که عادت خودستایی او در سرتاسر محوطه‌ی کوچک دانشگاه زبازد عام و خاص بود. توضیح: از ساختار that so استفاده شده.so much about that

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سوالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۹- گزینه «۴» سگ‌ها در هنگام مواجهه با خطر / تهدید، پارس می‌کنند و دندان‌های خود را نشان می‌دهند تا حیوان یا شخص مورد نظر را بترسانند.

(۱) زیستگاه، زیست‌بوم (۲) طعمه (۳) سوءظن، تردید (۴) خطر، تهدید

۱۰- گزینه «۲» ضعفِ تصمیماتِ اخیرِ سِت نشان می‌دهد که کوچکترین درکی نسبت به مسائل مختلف ندارد.

- (۱) تمایل، گرایش، احساس (۲) شعور، معنی، ادراک (۳) احساس، هیجان (۴) حساسیت

۱۱- گزینه «۳» قاضی شواهد غیرضروری را مردود اعلام کرد زیرا ارتباط چندانی با روال دادرسی نداشت.

- (۱) افشاء کردن، فاش کردن (۲) بزرگ کردن، منبسط کردن (۳) مردود شمردن، رد کردن (۴) کج کردن، تحریف کردن

۱۲- گزینه «۳» کارمندان هرچقدر در طول هفته بیشتر ورزش کنند، کمتر به مرخصی استعلاجی نیاز پیدا می‌کنند.

توضیح: جواب این سؤال عیناً توی خود سؤال آمده. یعنی اول بوده take time حالا شده take days.

اصطلاح take sick days یعنی «استعلاجی گرفتن».

۱۳- گزینه «۱» طبق آزمایشات روانشناسی کلاسیک، وقتی موش‌ها برای ترسیدن از یک صدای بخصوص به وسیله شوک الکتریکی شرطی شوند، بعدها

بدون وجود شوک الکتریکی هم از آن صدا می‌ترسند.

- (۱) شرطی کردن (۲) درخشیدن، برق زدن (۳) نمایش دادن (۴) قصد داشتن

۱۴- گزینه «۲» گوردن سینکلر، صاحب یکی از رستوران‌های مشهور، در سال ۱۹۹۸ با یکی از مشکلاتی که تمامی صاحب رستوران‌ها را آزار می‌داد، دست

و پنجه نرم می‌کرد. مشتریان، میز رزرو می‌کردند اما بدون اطلاع در رستوران حاضر نمی‌شدند.

- (۱) تفویض کردن، سپردن (۲) رنجاندن، آزردن (۳) تشدید کردن (۴) طفره رفتن، شانه خالی کردن

۱۵- گزینه «۴» علیرغم دیدگاه آن دانشمند، فوران آتشفشان در آینده‌ای نزدیک اتفاق نخواهد افتاد. بنابراین جایی برای نگرانی نیست!

- (۱) خونسرد، بی‌عاطفه (۲) قابل مذاکره (۳) آسیب‌پذیر (۴) قریب‌الوقوع

۱۶- گزینه «۳» در مکان دفن زباله، پروسه‌ی تجزیه با قدرت در حال اجرا است. در این پروسه بخش زیادی از زباله به گاز تبدیل می‌شود.

- (۱) تبدیل، تغییر (۲) ترمیم، بازسازی (۳) تجزیه (۴) تحت فشار قرار دادن

۱۷- گزینه «۴» من، به دلیل اینکه برنامه‌ریز بسیار دقیقی هستم، باید همه چیز را تحت نظر داشته باشم. بنابراین در زندگی من هرگز چیزی

بدون برنامه‌ریزی (فی‌البداهه) اتفاق نمی‌افتد.

- (۱) توجیه، دلیل آوردن (۲) تظاهر، وانمود (۳) اتفاق، تصادف، تقارن (۴) بدون برنامه، خودبخودی

۱۸- گزینه «۲» خیابان‌های شهر ما در حال حاضر هم ترافیک سنگینی دارد و ساخت پاساژ این مشکل را بدتر خواهد کرد.

- (۱) خنثی کردن، مختل کردن (۲) بدتر کردن، تشدید کردن (۳) حفظ کردن، نگه داشتن (۴) استخراج کردن، بهره‌برداری کردن

۱۹- گزینه «۱» فیلم «برخورد نزدیک از نوع سوم» داستان اولین برخورد بین موجودات فضایی و موجودات زمینی را روایت می‌کند.

- (۱) زمینی، دنیوی، خاکی (۲) غالب، مسلط (۳) باهوش، ماهر (۴) مهربان، خوش‌برخورد

توجه: در گزینه (۳) ingenious به معنی «باهوش، ماهر، ماهرانه» است که از واژه genius به معنای «نبوغ، ذکاوت» گرفته شده. اکثر داوطلبان این واژه را با واژه ingenuous به معنی «صاف‌وساده، بی‌ریا» اشتباه می‌گیرند.

۲۰- گزینه «۴» همه افراد با ساخت فرودگاه موافق هستند، اما در مورد مکان ساخت آن اختلاف نظر شدیدی وجود دارد.

- (۱) یک‌شکل، یک‌دست (۲) سوداگر، سودمند، کاربردی (۳) منحصربه‌فرد (۴) متفق‌القول، به‌اتفاق آرا

توجه: لغت unanimous معمولاً با واژگان consent, agreement, decision, vote و ... می‌آید.

سؤالات فیزیک

مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکتروپدینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)

کله ۱- تابع موج یک سیستم کوانتومی که در راستای x حرکت می‌کند در لحظه به شکل زیر است:

$$\psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

که در آن λ ، A و ω ضرایب‌های ثابت مثبتی هستند. مقدار چشم‌داشتی عملگر $\hat{x}$ در این حالت، کدام است؟

$$(1) -\frac{1}{4\lambda} \quad (2) -\frac{1}{2\lambda} \quad (3) \frac{1}{2\lambda} \quad (4) \frac{1}{4\lambda}$$

کله ۲- اگر در مسئله یک بعدی، انرژی پتانسیل تابع زوجی از مختصه مکان x باشد، کدام عبارت در مورد حل‌های معادله شرودینگر مستقل از زمان درست است؟

- (۱) این حل‌ها را می‌توان توابعی زوج یا فرد از مختصه x اختیار کرد.
 (۲) این حل‌ها را می‌توان فقط توابعی زوج از مختصه x اختیار کرد.
 (۳) این حل‌ها همواره توابعی زوج یا فرد از مختصه x هستند.
 (۴) این حل‌ها همواره توابعی زوج از مختصه x هستند.

کله ۳- کدام عبارت در مورد ویژه مقدار متناظر با هر ویژه تابع بهنجارش‌پذیر عملگر انرژی درست است؟

- (۱) این ویژه مقدار از مقدار بیشینه مطلق تابع انرژی پتانسیل همواره بیشتر است.
 (۲) این ویژه مقدار از مقدار بیشینه مطلق تابع انرژی پتانسیل همواره کمتر است.
 (۳) این ویژه مقدار از مقدار کمینه مطلق تابع انرژی پتانسیل می‌تواند کمتر باشد.
 (۴) این ویژه مقدار از مقدار کمینه مطلق تابع انرژی پتانسیل همواره بیشتر است.

کله ۴- تابع موج یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی با بسامد زاویه‌ای ω در لحظه $t = 0$ به شکل $\psi(x, 0) = A[2u_1 - 2u_2]$ است که در آن A ضریبی ثابت و $u_n(x)$ ها ویژه توابع بهنجار انرژی این نوسانگر با انرژی E_n هستند. احتمال آن که در لحظه $t > 0$ در اندازه‌گیری انرژی نوسانگر مقدار E_1 به دست آید، کدام است؟

$$(1) \frac{16}{25} \cos^2(2\omega t) \quad (2) \frac{4}{5} \cos(2\omega t) \quad (3) \frac{16}{25} \quad (4) \frac{4}{5}$$

کله ۵- نوسانگر هماهنگ یک بعدی در لحظه $t = 0$ در یک حالت همدوس قرار دارد. کدام ویژگی برای تابع حالت نوسانگر در لحظه دلخواه $t > 0$ نادرست است؟

- (۱) این تابع در تمام زمان‌ها ویژه تابع عملگر تعداد $N = a^\dagger a$ نیست.
 (۲) تابع حالت نوسانگر در تمام زمان‌ها ویژه تابع عملگر پایین‌بر a است.
 (۳) رابطه عدم قطعیت مکان و ممنتوم خطی در تمام لحظه‌ها مقدار کمینه خود را دارد.
 (۴) مقدار چشم‌داشتی عملگر مکان در تمام لحظه‌ها برابر صفر است.

کله ۶- اگر A عملگر تانسور کروی از مرتبه ۳ و B عملگر تانسور کروی از مرتبه ۱ باشد، کدام عبارت درست است؟

- (۱) عملگر AB تانسوری کروی از مرتبه ۴ است.
 (۲) عملگر AB تانسوری کروی از مرتبه ۲ است.
 (۳) از مجموع حاصل ضرب مؤلفه‌های این دو عملگر با ضرایب کلیش - گوردن مناسب می‌توان فقط تانسور کروی از مرتبه ۴ ساخت.
 (۴) از مجموع حاصل ضرب مؤلفه‌های این دو عملگر با ضرایب کلیش - گوردن مناسب می‌توان فقط تانسورهای کروی از مرتبه‌های ۲، ۳ و ۴ ساخت.

کله ۷- یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ در حالت $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix}$ قرار دارد. مقدار عدم قطعیت در اندازه‌گیری عملگر S_x در این حالت کدام است؟

$$(1) \frac{\hbar\sqrt{2}}{5} \quad (2) \frac{\hbar\sqrt{11}}{2} \quad (3) \frac{\hbar\sqrt{13}}{10} \quad (4) \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}$$



۸- دو ذره غیربرهمکنشی یکسان در داخل یک چاه بی‌نهایت یک بعدی قرار دارند. اگر دو ذره بوزون باشند، کدام عبارت در مورد تابع حالت پایه و اولین حالت برانگیخته این مجموعه درست است؟

- (۱) حالت پایه و حالت برانگیخته اول هر دو غیرتبهگن هستند.
 (۲) حالت پایه غیرتبهگن و حالت برانگیخته اول تبهگن مرتبه ۲ است.
 (۳) حالت پایه تبهگن مرتبه ۲ و حالت برانگیخته اول غیرتبهگن است.
 (۴) حالت پایه و حالت برانگیخته اول هر دو تبهگن مرتبه ۲ هستند.

۹- کدام عبارت در مورد فرمول‌بندی انتگرال مسیری مکانیک کوانتومی نادرست است؟

- (۱) در این فرمول‌بندی کمیت‌های فیزیکی، کمیت‌هایی کلاسیکی و نه عملگرهایی در فضای هیلبرت هستند.
 (۲) این فرمول‌بندی کاملاً معادل فرمول‌بندی شرودینگری نیست و فقط در مواردی که هامیلتونی سیستم مستقل از زمان است کاربرد دارد.
 (۳) در محاسبه انتشارگر از نقطه $\vec{x}_i t_i$ به نقطه $\vec{x}_f t_f$ تنها مسیر کلاسیک بلکه تمام مسیرها میان این دو نقطه سهم دارند.
 (۴) برای انجام محاسبات در سیستم‌های کوانتومی با بی‌نهایت درجه آزادی این فرمول‌بندی بسیار مناسب‌تر است.

۱۰- حاصل جابه‌جاگر $[L^2, z]$ چیست؟ z و y, x عملگرهای مکان، و $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ مربع عملگر ممنتوم زاویه مداری است.

- (۱) $i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$ (۲) $i\hbar(xL_y - yL_x + i\hbar z)$ (۳) $i\hbar(xL_y + yL_x - i\hbar z)$ (۴) $i\hbar(xL_y + yL_x + i\hbar z)$

۱۱- عملگر وارونی زمان چه نوع عملگری است؟

- (۱) پادیکانی (۲) یکانی (۳) هرمیتی (۴) پادهرمیتی

۱۲- اگر جمله اصلاح نسبیتی به هامیلتونی اتم هیدروژن به شکل $H_r = -\frac{p^4}{8m^2c^2}$ باشد، مقدار تغییر تراز انرژی E_n در اولین مرتبه اختلال، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 - 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$ (۲) $-\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$
 (۳) $-\frac{1}{2mc^2} \left[2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$ (۴) $-\frac{1}{2mc^2} \left[2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle - \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$

۱۳- هامیلتونی یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ به شکل $H = \hbar\Omega\sigma_z + \hbar\omega(\sigma_x \cos\alpha t + \sigma_y \sin\alpha t)$ است. اگر بردار حالت ذره در لحظه $t = 0$ برابر $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

باشد، احتمال آن که در لحظه $t > 0$ بردار حالت ذره $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{4\omega^2}{(2\Omega + \alpha)^2} \sin^2((2\Omega + \alpha)t)$ (۲) $\frac{2\omega^2}{(\Omega + \alpha)^2} \sin^2((\Omega + \alpha)t)$
 (۳) $\frac{2\omega^2}{(\Omega - \alpha)^2} \sin^2(\sqrt{(\Omega - \alpha)^2 + 4\omega^2} t)$ (۴) $\frac{4\omega^2}{(\Omega + \alpha)^2 + 4\omega^2} \sin^2(\sqrt{(\Omega + \alpha)^2 + 4\omega^2} t)$

۱۴- در نظریه پراکندگی (scattering)، کدام عبارت درباره قضیه اپتیکی $\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(\theta = 0))$ درست است؟

- (۱) این قضیه فقط در تقریب اول بورن برقرار است و در پراکندگی از هر نوع پتانسیل کاربرد دارد.
 (۲) قضیه‌ای دقیق است که در پراکندگی از هر نوع پتانسیل کاربرد دارد.
 (۳) این قضیه فقط در تقریب اول بورن برقرار است و فقط در پراکندگی از پتانسیل‌های مرکزی صادق است.
 (۴) قضیه‌ای دقیق است اما فقط در پراکندگی از پتانسیل‌های مرکزی (با تقارن کروی) صادق است.

۱۵- اگر χ یک اسپینور دو مؤلفه‌ای دلخواه و σ_k ها ($k = 1, 2, 3$) ماتریس‌های پاولی باشند، کدام عبارت درست است؟

- (۱) مجموعه سه ماتریس σ_k تحت دوران یک عملگر تانسور دکاریتی مرتبه یک تشکیل می‌دهند.
 (۲) مجموعه سه کمیت $\chi^\dagger \sigma_k \chi$ تحت دوران یک عملگر تانسور کروی مرتبه دو تشکیل می‌دهند.
 (۳) مجموعه سه کمیت $\chi^\dagger \sigma_k \chi$ تحت دوران یک عملگر تانسور دکاریتی مرتبه یک تشکیل می‌دهند.
 (۴) مجموعه سه ماتریس σ_k تحت دوران یک عملگر تانسور کروی مرتبه دو تشکیل می‌دهند.

پاسخنامه فیزیک

مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکتروپدینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)

۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در این گونه مسائل برای به دست آوردن مقدار چشمداشتی عملگرها، لازم است ابتدا تابع موج بهنجار شده و ضریب بهنجارش آن تعیین شود. با استفاده از قانون جمع احتمال‌ها داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-\lambda|x|} e^{+i\omega t} A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 e^{-2\lambda|x|} dx = 1$$

حال کافی است انتگرال فوق محاسبه شود. به دلیل حضور تابع قدرمطلق در عبارت انتگرال ده لازم است حدود انتگرال گیری شکسته شود.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 e^{-2\lambda|x|} dx = \int_{-\infty}^0 |A|^2 e^{-2\lambda|x|} dx + \int_0^{+\infty} |A|^2 e^{-2\lambda|x|} dx$$

برای محدوده $x < 0$ می‌دانیم که $|x| = -x$ و برای $x > 0$ می‌دانیم که $|x| = x$ است. پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 e^{-2\lambda|x|} dx = \int_{-\infty}^0 |A|^2 e^{-2\lambda(-x)} dx + \int_0^{+\infty} |A|^2 e^{-2\lambda x} dx$$

$$= |A|^2 \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{2\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x} dx \right\} = |A|^2 \left\{ \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{-1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} \Big|_0^{+\infty} \right\}$$

$$= |A|^2 \left\{ \frac{1}{2\lambda} - 0 + 0 - \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \right\} = |A|^2 \left\{ \frac{1}{\lambda} \right\} = 1 \Rightarrow |A|^2 = \lambda$$

حال می‌توانیم مقدار چشمداشتی عملگر X را به دست آوریم.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2\lambda|x|} dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2\lambda|x|} dx$$

دوباره به دلیل حضور قدرمطلق حدود انتگرال گیری را به دو قسمت مثبت و منفی تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \lambda \left\{ \int_{-\infty}^0 x e^{-2\lambda(-x)} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-2\lambda x} dx \right\} = \lambda \left\{ \int_{-\infty}^0 x e^{2\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-2\lambda x} dx \right\}$$

لازم است هر یک از انتگرال‌ها جداگانه محاسبه شوند.

$$\int_{-\infty}^0 x e^{2\lambda x} dx = \frac{x}{2\lambda} e^{2\lambda x} - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda x} dx = \frac{x}{2\lambda} e^{2\lambda x} - \frac{1}{4\lambda^2} e^{2\lambda x} \Big|_{-\infty}^0 = 0 - \frac{1}{4\lambda^2} = -\frac{1}{4\lambda^2}$$

برای حل انتگرال فوق از روش جز به جز با کمک تغییر متغیر زیر بهره برده‌ایم.

$$x = U \Rightarrow dx = dU, \quad e^{2\lambda x} dx = dV \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda x} = V$$

برای انتگرال دوم نیز داریم:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2\lambda x} dx = \frac{-x}{2\lambda} e^{-2\lambda x} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x} dx = \frac{-x}{2\lambda} e^{-2\lambda x} - \frac{1}{4\lambda^2} e^{-2\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{4\lambda^2}\right) = \frac{1}{4\lambda^2}$$

در این مورد نیز از روش جز به جز با کمک تغییر متغیر مقابل بهره برده‌ایم:

$$x = U \Rightarrow dx = dU, \quad e^{-2\lambda x} dx = dV \Rightarrow \frac{-1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} = V$$

حال که حاصل هر دو انتگرال محاسبه شده است کافی است با جایگذاری مقداری نهایی $\langle x \rangle$ را تعیین کنیم.

$$\langle x \rangle = \lambda \left\{ -\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} \right\} = 0$$

سازمان سنجش گزینه «۲» را به عنوان گزینه صحیح اعلام کرده است. احتمالاً طراح محترم سؤال در محاسبه انتگرال‌ها به اشتباه هر دو را $-\frac{1}{4\lambda^2}$

به دست آورده و به نتیجه مقابل برای $\langle x \rangle$ رسیده است.

$$\langle x \rangle = \lambda \left\{ -\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} \right\} = -\frac{1}{2\lambda}$$

۲- گزینه «۱» برای مشاهده‌پذیرهای زوج، عملگر معرف آن با عملگر پارته جابه‌جا می‌شود. بنابراین ویژه توابع این مشاهده‌پذیرها، ویژه توابع عملگر پارته هم هستند. پس یا زوج هستند و یا فرد.

۳- گزینه «۴» طبق قضیه وردش، ویژه مقادیر متناظر با ویژه توابع بهنجارپذیر عملگر انرژی همواره از یک مقدار کمینه بیشتر هستند.

۴- گزینه «۳» ابتدا باید تابع $\psi(x, t)$ را به دست آوریم. می‌دانیم که $\psi(x, t) = \psi(x, 0) e^{-iHt/\hbar}$ ، برای این کار باید تابع موج بهنجار شده و ضریب بهنجارش A تعیین شود. چون u_i ها ویژه توابع بهنجار انرژی نوسانگر هستند پس طبق قانون جمع احتمال‌ها داریم:

$$\sum_i |C_i|^2 = 1 \Rightarrow |A|^2 \left\{ (3)^2 + (-4)^2 \right\} = 1 \Rightarrow |A|^2 \times 25 = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

ضمناً با توجه به اینکه $\psi(x, 0)$ از ترکیب خطی ویژه توابع بهنجار نوسانگر تولید شده است، برای $\psi(x, t)$ داریم:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{5} \left\{ 3u_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - 4u_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right\}$$

برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی می‌دانیم که $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. بنابراین داریم $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ و $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ و بنابراین داریم:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{5} \left\{ 3u_1 e^{-\frac{3}{2}i\omega t} - 4u_2 e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \right\}$$

حال می‌توانیم احتمال اینکه پس از اندازه‌گیری انرژی نوسانگر مقدار E_2 به دست آید یعنی احتمال حضور در ویژه تابع u_2 را به دست آوریم.

$$P = \left| \langle u_2 | \psi(x, t) \rangle \right|^2 = \left| \langle u_2 | \frac{1}{5} \left\{ 3u_1 e^{-\frac{3}{2}i\omega t} - 4u_2 e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \right\} \right|^2 = \left| \frac{3}{5} e^{-\frac{3}{2}i\omega t} \langle u_1 | u_2 \rangle - \frac{4}{5} e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \langle u_2 | u_2 \rangle \right|^2 = \frac{16}{25}$$

توجه داشته باشید که با توجه به قانون راست هنجاری $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$.

۵- گزینه «۴» حالت‌های همدوس در نوسانگر هماهنگ یک بعدی به صورت ویژه توابع عملگر غیرهرمیتی پایین‌برنده a تعریف می‌شوند. $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

که در آن $|\alpha\rangle$ حالت همدوس و α ویژه مقدار متناظر با آن برای عملگر پایین‌برنده a است. این ویژه توابع چون غیرهرمیتی هستند بنابراین در همه زمان‌ها ویژه توابع عملگر تعداد نخواهند بود، بلکه فقط همواره ویژه توابع عملگر پایین‌برنده a هستند. در مورد این حالت‌های همدوس می‌توان نشان داد که همواره در رابطه عدم قطعیت مکان و تکانه خطی صادق هستند و در تمام لحظه‌ها مقدار کمینه خود را دارند.

مقدار چشمداشتی عملگر مکان برای این حالت‌های همدوس عبارت است از:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{\text{coherent}} &= \langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \alpha(t) | a + a^\dagger | \alpha(t) \rangle \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \times 2 \operatorname{Re}(\alpha(t)) = \sqrt{2} x_0 \operatorname{Re}(\alpha(t)) = \sqrt{2} x_0 |\alpha| \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که از تعریف $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} = |\alpha| e^{-i(\omega t - \varphi)}$ استفاده کرده‌ایم.

و این امر نشان می‌دهد که مقدار چشمداشتی مکان در حالت‌های همدوس رابطه‌ای نوسانی با زمان دارد و در همه لحظه‌ها صفر نمی‌شود.

۶- گزینه «۴» قاعده گزینش عنصر ماتریسی عملگر تانسوری را با استفاده از قاعده گزینش جمع تکانه‌های زاویه‌ای به دست می‌آوریم. از آنجایی که ضرایب کلبش - گوردون وارد شده در محاسبات ضرب تانسوری باید غیرصفر باشند، قاعده گزینش مرتبه تانسوری که از حاصل ضرب دو تانسور کروی با مرتبه‌های

$$|j_1 - j_2| \leq k \leq j_1 + j_2$$

j_1 و j_2 به دست می‌آید عبارت است از:

$$|3 - 1| \leq k \leq 3 + 1 \rightarrow 2 \leq k \leq 4$$

برای این مثال $j_1 = 3$ و $j_2 = 1$ هستند. بنابراین داریم:

بنابراین تانسور حاصل ضرب با توجه به ضرایب کلبش - گوردون می‌تواند از مرتبه ۲، ۳ یا ۴ باشد.

۷- گزینه «۳» برای یافتن مقدار عدم قطعیت در اندازه‌گیری عملگر S_x از رابطه $\Delta S_x = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2}$ استفاده می‌شود. باید توجه داشت که برای محاسبه مقدار چشمداشتی عملگرها در یک حالت خاص تابع حالت باید بهنجار باشد. پس در قدم اول $|\chi\rangle$ را بهنجار می‌کنیم.

$$|\tilde{\chi}\rangle = A|\chi\rangle = A \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

شرط بهنجارش تابع حالت عبارت است از:

$$\langle \tilde{\chi} | \tilde{\chi} \rangle = 1 \Rightarrow A^* (\sqrt{3} + i) A \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix} = |A|^2 \{3 + 1 + 1\} = 5 |A|^2 = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|\tilde{\chi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین تابع حالت بهنجار شده عبارت است از:

$$\langle S_x \rangle = \langle \tilde{\chi} | S_x | \tilde{\chi} \rangle \quad \text{حال می‌توانیم مقدار چشمداشتی} \langle S_x \rangle \text{ و} \langle S_x^2 \rangle \text{ را به دست آوریم:}$$

$$\text{چون } S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{3} + i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{10} (\sqrt{3} + i) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{10} \{ \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i \} = \frac{\sqrt{3}\hbar}{5}$$

در قدم بعد عملگر S_x^2 را تعیین کرده و سپس $\langle S_x^2 \rangle$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle S_x^2 \rangle = \langle \tilde{\chi} | S_x^2 | \tilde{\chi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{3} + i) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar^2}{20} (\sqrt{3} + i) \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{20} \{ (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) + 1 \} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta S_x = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - \frac{3\hbar^2}{25}} = \sqrt{\frac{13\hbar^2}{100}} = \frac{\sqrt{13}\hbar}{10}$$

به این ترتیب عدم قطعیت در اندازه‌گیری عملگر S_x برابر است با:

۸- گزینه «۱» چون ذرات غیر برهم‌کنشی هستند پس تمیزناپذیرند، بنابراین نمی‌توان آن‌ها را شماره‌گذاری کرد. یعنی تفاوتی بین $n_1 = 1$ ، $n_2 = 2$ و $n_1 = 2$ و $n_2 = 1$ وجود ندارد.

در مورد دو بوزون که در چاه بینهایت یک بعدی قرار دارند انرژی ترازهای مختلف از رابطه $E_{n_1, n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2)$ محاسبه می‌شود.

برای حالت پایه بوزون در تراز اول یعنی تراز $n = 1$ قرار می‌گیرند. پس $E_{11} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (1+1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ که غیرتبهگن است.

برای اولین حالت برانگیخته یک بوزون در تراز $n = 1$ و بوزون دوم در تراز $n = 2$ قرار می‌گیرند. ولی چون تمیزناپذیر هستند فرقی بین حالت‌های $n_1 = 1$ و $n_2 = 2$ با $n_1 = 2$ و $n_2 = 1$ وجود ندارد.

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (1+4) = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

پس انرژی اولین حالت برانگیخته برابر است با:

که باز هم غیرتبهگن است.

پس حالت پایه و اولین حالت برانگیخته هر دو غیرتبهگن هستند.

۹- گزینه «۲» در فرمول‌بندی انتگرال مسیری مکانیک کوانتومی برخلاف مکانیک کلاسیک که فقط یک مسیر مشخص و یکتا نقطه اولیه را به نقطه نهایی متصل می‌کند، همه مسیرها نقش دارند، از جمله آنهایی که هیچ شباهتی به مسیر کلاسیک ندارند. در این فرمول‌بندی کنش کلاسیک نقش بسیار مهمی بازی می‌کند به‌طوری‌که کمیت‌های فیزیکی کمیت‌های کلاسیکی هستند و به صورت عملگرهایی در فضای هیلبرت تعریف نمی‌شوند. روش انتگرال مسیر فاینمن برای سیستم‌های کوانتومی که درجات آزادی زیادی دارند بسیار کاربردی است و با فرمول‌بندی شرودینگری کاملاً معادل است و در همه موارد چه هامیلتونی مستقل از زمان باشد و چه وابستگی زمانی داشته باشند کاملاً جوابگو است.

۱۰- گزینه «۱» با استفاده از رابطه $L^{\vee} = L_x^{\vee} + L_y^{\vee} + L_z^{\vee}$ خواهیم داشت.

$$[L^{\vee}, z] = [L_x^{\vee} + L_y^{\vee} + L_z^{\vee}, z] = [L_x^{\vee}, z] + [L_y^{\vee}, z] + [L_z^{\vee}, z]$$

$$[L_x^{\vee}, z] = [L_x L_x, z] = L_x [L_x, z] + [L_x, z] L_x$$

باید هر یک از روابط جابه‌جایی به دست آمده را جداگانه تعیین کنیم.

که در آن از رابطه $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ استفاده کرده‌ایم.

$$[L_x^{\vee}, z] = L_x (-i\hbar y) + (-i\hbar y) L_x = -i\hbar (L_x y + y L_x) \quad [L_i, x_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} x_k \quad \text{و به این ترتیب داریم:}$$

از طرفی برای $[L_x, y]$ داریم:

$$[L_x, y] = i\hbar \epsilon_{xyz} z = i\hbar z \Rightarrow L_x y - y L_x = i\hbar z \Rightarrow L_x y = y L_x + i\hbar z$$

$$[L_x^{\vee}, z] = -i\hbar (y L_x + i\hbar z + y L_x) = i\hbar (-i\hbar z - 2y L_x)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

به همین ترتیب برای رابطه جابه‌جایی دوم داریم:

$$[L_y^{\vee}, z] = [L_y L_y, z] = L_y [L_y, z] + [L_y, z] L_y = L_y (i\hbar x) + (i\hbar x) L_y = i\hbar (L_y x + x L_y)$$

دوباره با استفاده از $[L_y, x]$ داریم:

$$[L_y, x] = i\hbar \epsilon_{yxz} z = -i\hbar z \Rightarrow L_y x - x L_y = -i\hbar z \Rightarrow L_y x = x L_y - i\hbar z$$

$$[L_y^{\vee}, z] = i\hbar (x L_y - i\hbar z + x L_y) = i\hbar (2x L_y - i\hbar z)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$[L_z^{\vee}, z] = [L_z L_z, z] = L_z [L_z, z] + [L_z, z] L_z = 0$$

در نهایت برای سومین رابطه جابه‌جایی داریم:

پس در نهایت برای حاصل جابه‌جایی $[L^{\vee}, z]$ خواهیم داشت:

$$[L^{\vee}, z] = i\hbar (-i\hbar z - 2y L_x) + i\hbar (2x L_y - i\hbar z) = i\hbar (-2i\hbar z - 2y L_x + 2x L_y) = 2i\hbar (x L_y - y L_x - i\hbar z)$$

۱۱- گزینه «۱» عملگر وارونی زمان یک عملگر پادیکانی است.

۱۲- گزینه «۲» بنا بر نظریه اختلال مستقل از زمان غیرتبهگن، تصحیح مرتبه اول انرژی معادل مقدار چشمداشتی پتانسیل اختلالی نسبت به حالت مختل نشده است.

$$E^{(1)} = \langle \hat{H}' \rangle$$

$$H' = -\frac{P^{\vee}}{\lambda m^{\vee} c^{\vee}}$$

اما حالت‌های مختل نشده اتم هیدروژن را با $|n\ell m\rangle$ نمایش می‌دهیم و اختلال H' عبارت است از:

$$E^{(1)} = \left\langle n\ell m \left| -\frac{P^{\vee}}{\lambda m^{\vee} c^{\vee}} \right| n\ell m \right\rangle = -\frac{1}{\lambda m^{\vee} c^{\vee}} \langle n\ell m | P^{\vee} | n\ell m \rangle = -\frac{1}{\lambda m^{\vee} c^{\vee}} \langle n\ell m | P^{\vee} P^{\vee} | n\ell m \rangle$$

بنابراین داریم:

اما تأثیر $P^{\vee}$ بر ویژه حالت‌های $|n\ell m\rangle$ معلوم است. طبق معادله شرودینگر داریم:

$$\left(\frac{P^{\vee}}{2m} + V \right) |n\ell m\rangle = E |n\ell m\rangle \Rightarrow \frac{P^{\vee}}{2m} |n\ell m\rangle + V |n\ell m\rangle = E |n\ell m\rangle \Rightarrow P^{\vee} |n\ell m\rangle = 2m(E - V) |n\ell m\rangle$$

بنابراین تصحیح مرتبه اول انرژی به دست می‌آید:

$$E^{(1)} = -\frac{1}{\lambda m^{\vee} c^{\vee}} \{ \langle n\ell m | 2m(E - V) 2m(E - V) | n\ell m \rangle \} = -\frac{1}{2mc^{\vee}} \langle (E - V)^{\vee} \rangle = -\frac{1}{2mc^{\vee}} \{ E^{\vee} + \langle V^{\vee} \rangle - 2E \langle V \rangle \}$$

در اتم هیدروژن $V = \frac{-e^{\vee}}{4\pi\epsilon_0 r}$ و $E = E_n$ ، بنابراین داریم:

$$E^{(1)} = -\frac{1}{2mc^{\vee}} \left\{ E_n^{\vee} - 2E_n \left\langle \frac{-e^{\vee}}{4\pi\epsilon_0 r} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{-e^{\vee}}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^{\vee} \right\rangle \right\} = -\frac{1}{2mc^{\vee}} \left\{ E_n^{\vee} + 2E_n \left(\frac{e^{\vee}}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^{\vee}}{4\pi\epsilon_0} \right)^{\vee} \left\langle \frac{1}{r^{\vee}} \right\rangle \right\}$$

۱۳- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه احتمال اینکه ذره در لحظه $t > 0$ در حالت $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد باید مقدار کمیت زیر محاسبه شود.

$$P = \left| \langle \phi | \psi(t) \rangle \right|^2$$

به این منظور با توجه به اینکه $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ است ابتدا به کمک معادله شرودینگر وابسته به زمان باید $|\psi(t)\rangle$ محاسبه شود.

$$H = \hbar\Omega\sigma_z + \hbar\omega(\sigma_x \cos \alpha t + \sigma_y \sin \alpha t)$$

ابتدا هامیلتونی ذره را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های پائولی داریم:

بنابراین هامیلتونی عبارت است از:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\omega \left\{ \cos \alpha t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin \alpha t \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\Omega & 0 \\ 0 & -\hbar\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \cos \alpha t \\ \hbar\omega \cos \alpha t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\omega \sin \alpha t \\ i\hbar\omega \sin \alpha t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\Omega & \hbar\omega(\cos \alpha t - i \sin \alpha t) \\ \hbar\omega(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) & -\hbar\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & \hbar\omega e^{-i\alpha t} \\ \hbar\omega e^{i\alpha t} & -\hbar\Omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar \dot{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & \hbar\omega e^{-i\alpha t} \\ \hbar\omega e^{i\alpha t} & -\hbar\Omega \end{pmatrix} \psi(t)$$

حال معادله شرودینگر وابسته به زمان را برای این سیستم حل می‌کنیم.

برای حل مسئله تابع موج $\psi(t)$ را به صورت یک بردار دو مؤلفه‌ای $\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & \hbar\omega e^{-i\alpha t} \\ \hbar\omega e^{i\alpha t} & -\hbar\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{a}(t) = \hbar\Omega a(t) + \hbar\omega e^{-i\alpha t} b(t) \\ i\hbar \dot{b}(t) = \hbar\omega e^{i\alpha t} a(t) - \hbar\Omega b(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i\dot{a}(t) = \Omega a(t) + \omega e^{-i\alpha t} b(t) \\ i\dot{b}(t) = \omega e^{i\alpha t} a(t) - \Omega b(t) \end{cases}$$

$$a(t) = A e^{-i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t}, \quad b(t) = B e^{i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t}$$

در این مرحله یک جواب آزمایشی برای این دستگاه در نظر می‌گیریم:

سپس با قراردادن این جواب‌ها در دستگاه معادلات، متغیرهای A ، B و γ را تعیین می‌کنیم.

$$iA(-i\frac{\alpha}{\gamma} + i\gamma) e^{-i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t} = \Omega A e^{-i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t} + \omega e^{-i\alpha t} B e^{i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t} \Rightarrow A(\frac{\alpha}{\gamma} - \gamma) = \Omega A + \omega B \Rightarrow A(-\gamma + \frac{\alpha}{\gamma} - \Omega) = \omega B$$

$$\Rightarrow B = \frac{A}{\omega} (-\gamma + \frac{\alpha}{\gamma} - \Omega) \quad (1)$$

$$iB(i\frac{\alpha}{\gamma} + i\gamma) e^{i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t} = \omega e^{i\alpha t} A e^{-i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t} - \Omega B e^{i\alpha \frac{t}{\gamma} + i\gamma t}$$

به همین ترتیب با استفاده از معادله دوم داریم:

$$\Rightarrow -B(\frac{\alpha}{\gamma} + \gamma) = \omega A - \Omega B \Rightarrow B(\Omega - \frac{\alpha}{\gamma} - \gamma) = \omega A \quad (2)$$

حال با قراردادن B از معادله اول در معادله دوم به دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{\omega} (-\gamma + \frac{\alpha}{\gamma} - \Omega)(\Omega - \frac{\alpha}{\gamma} - \gamma) = \omega A \Rightarrow (\frac{\alpha}{\gamma} - \Omega - \gamma)(\frac{\alpha}{\gamma} - \Omega + \gamma) = -\omega^2$$

$$\Rightarrow (\frac{\alpha}{\gamma} - \Omega)^2 - \gamma^2 = -\omega^2 \Rightarrow \gamma^2 = (\frac{\alpha}{\gamma} - \Omega)^2 + \omega^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{\gamma^2} [(\alpha - \gamma\Omega)^2 + \omega\gamma^2] \Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{(\alpha - \gamma\Omega)^2 + \omega\gamma^2}$$

با معلوم بودن γ می‌توانیم ضرایب A و B را تعیین کنیم. چون دو γ با علامت‌های مختلف به دست آمده است لازم است ضرایب A_+ و A_- و همچنین B_+ و B_- را دوباره تعریف کرده و عبارت $a(t)$ و $b(t)$ را دوباره بازنویسی کنیم.

$$a(t) = e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} (A_+ e^{i\gamma t} + A_- e^{-i\gamma t})$$

$$b(t) = e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} (B_+ e^{i\gamma t} + B_- e^{-i\gamma t})$$

$$B_+ = \frac{(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{2\omega} A_+ \quad ; \quad B_- = \frac{(\alpha - 2\Omega) - 2\gamma}{2\omega} A_-$$

با استفاده از رابطه‌ای که بین A و B به دست آمده بود می‌توانیم بنویسیم:

حال به کمک شرایط اولیه که $|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ بوده می‌توانیم ضرایب $A_{\pm}$ و $B_{\pm}$ را به صورت کامل تعیین کنیم.

$$a(0) = 0 \Rightarrow A_+ + A_- = 0 \Rightarrow A_+ = -A_-$$

$$b(0) = 1 \Rightarrow A_+ \left(\frac{(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{2\omega} \right) - A_+ \left(\frac{(\alpha - 2\Omega) - 2\gamma}{2\omega} \right) = 1 \Rightarrow \frac{4\gamma A_+}{2\omega} = 1 \Rightarrow A_+ = \frac{\omega}{2\gamma} \Rightarrow A_- = \frac{-\omega}{2\gamma}$$

$$B_+ = \frac{(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{2\omega} \times \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{4\gamma} \quad , \quad B_- = \frac{(\alpha - 2\Omega) - 2\gamma}{2\omega} \times \frac{-\omega}{2\gamma} = \frac{-(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{4\gamma}$$

حال می‌توانیم رابطه نهایی $a(t)$ و $b(t)$ را تعریف کنیم.

$$a(t) = e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \left\{ \frac{\omega}{2\gamma} e^{i\gamma t} - \frac{\omega}{2\gamma} e^{-i\gamma t} \right\} = i e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \cdot \frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{e^{i\gamma t} - e^{-i\gamma t}}{2i} \right) = i \frac{\omega}{\gamma} \sin \gamma t e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t}$$

$$b(t) = e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \left\{ e^{i\gamma t} \left(\frac{(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{4\gamma} \right) + e^{-i\gamma t} \left(\frac{-(\alpha - 2\Omega) + 2\gamma}{4\gamma} \right) \right\}$$

$$= e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \left\{ \frac{\alpha - 2\Omega}{4\gamma} (e^{i\gamma t} - e^{-i\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} (e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}) \right\} = e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \left\{ \left(\frac{i(\alpha - 2\Omega)}{4\gamma} \right) \sin \gamma t + \cos \gamma t \right\}$$

به این ترتیب تابع موج وابسته به زمان $|\Psi(t)\rangle$ عبارت خواهد بود از:

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\omega}{\gamma} \sin \gamma t e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \\ \left[\frac{i(\alpha - 2\Omega)}{4\gamma} \sin \gamma t + \cos \gamma t \right] e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} \end{pmatrix}$$

حال که بردار حالت $|\Psi(t)\rangle$ تعیین شده است می‌توانیم احتمال اینکه در لحظه $t > 0$ بردار حالت ذره $|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد را به صورت زیر به دست آوریم.

$$P = \left| \langle \Phi | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \right|^2 = |a(t)|^2 = a^*(t) a(t) = -\frac{i\omega}{\gamma} \sin \gamma t e^{i\frac{\alpha}{\gamma}t} \times \frac{i\omega}{\gamma} \sin \gamma t e^{-i\frac{\alpha}{\gamma}t} = \frac{\omega^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma t$$

$$\Rightarrow P = \frac{4\omega^2}{(\alpha - 2\Omega)^2 + 4\omega^2} \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - 2\Omega)^2 + 4\omega^2} t$$

تنها کافی است مقدار $\gamma^2 = \frac{1}{4} [(\alpha - 2\Omega)^2 + 4\omega^2]$ را جایگزین کنیم:

۱۴- گزینه «۲» قضیه اپتیک در نظریه پراکندگی قضیه‌ای دقیق است که مسائل پراکندگی از هر نوع پتانسیلی را پاسخ می‌دهد.

۱۵- گزینه «۳» $\chi^\dagger \sigma_k \chi$ به ازای $k = 1, 2, 3$ سه مؤلفه متفاوت ایجاد می‌کند که تحت دوران ناورد هستند. بنابراین مجموعه این مؤلفه‌ها می‌توانند یک بردار تشکیل دهند که از نوع تانسور مرتبه اول دیکارتی است.

سؤالات فیزیک

مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته

۱- کدام یک از توابع موج زیر، ویژه تابع عملگر پاریته است؟ $\psi_{nlm}(\vec{r})$ ها ویژه توابع اتم هیدروژن و C ها مقادیر ثابتی هستند.

$$\psi(\vec{r}) = C_1 \psi_{4,2,2}(\vec{r}) + C_2 \psi_{2,0,0}(\vec{r}) + C_3 \psi_{1,0,0}(\vec{r}) + C_4 \psi_{3,2,1}(\vec{r}) \quad (۱)$$

$$\psi(\vec{r}) = C_1 \psi_{4,2,1}(\vec{r}) + C_2 \psi_{4,3,3}(\vec{r}) + C_3 \psi_{3,1,1}(\vec{r}) + C_4 \psi_{2,1,1}(\vec{r}) \quad (۲)$$

$$\psi(\vec{r}) = C_1 \psi_{4,3,2}(\vec{r}) + C_2 \psi_{4,2,1}(\vec{r}) + C_3 \psi_{3,1,0}(\vec{r}) + C_4 \psi_{2,0,0}(\vec{r}) \quad (۳)$$

$$\psi(\vec{r}) = C_1 \psi_{5,4,3}(\vec{r}) + C_2 \psi_{4,3,2}(\vec{r}) + C_3 \psi_{3,2,1}(\vec{r}) + C_4 \psi_{2,1,0}(\vec{r}) \quad (۴)$$

۲- $|2\rangle$ و $|3\rangle$ ویژه حالت‌های هامیلتونی نوسانگر ساده به جرم m و فرکانس زاویه‌ای ω هستند. اگر x عملگر مکان باشد، مقدار عبارت $\langle 3 | x^2 | 2 \rangle$ کدام است؟

$$\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} (\sqrt{3}) \quad (۱) \quad \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} (6\sqrt{3}) \quad (۳) \quad \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} (9\sqrt{3}) \quad (۲) \quad \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} (5\sqrt{3}) \quad (۴)$$

۳- اگر $x(t)$ عملگر مکان یک ذره آزاد در فضای یک‌بعدی در تصویر هایزنبرگ باشد، حاصل جابه‌جاگر $[x(t), x(0)]$ کدام است؟

$$\frac{i\hbar t}{m} \quad (۱) \quad \frac{-i\hbar t}{2m} \quad (۲) \quad \frac{-i\hbar t}{m} \quad (۳) \quad \frac{i\hbar t}{m} \quad (۴)$$

۴- ذره‌ای تحت تأثیر پتانسیل مرکزی در حالت مداری ۲ و حالت اسپینی $s=1$ قرار دارد. تبهگنی ترازهای انرژی ناشی از اندرکنش اسپین مدار کدام است؟

$$۷ \quad (۱) \quad ۹ \quad (۲) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۵ \quad (۴)$$

۵- الکترونی که اسپین آن در جهت $+\hat{k}$ است به مدت t ثانیه تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ قرار می‌گیرد. پس از گذشت این زمان، احتمال اینکه اسپین الکترون در جهت $-\hat{k}$ باشد، کدام است؟ $(\omega = \frac{B_0 \mu_B \hbar}{2})$

$$1 - \cos^2 \omega t \quad (۱) \quad \cos^2 \omega t \quad (۲) \quad 1 - \sin^2 \omega t \quad (۳) \quad \sin^2 \omega t \quad (۴)$$

۶- عملگرهای زیر را در فضای هیلبرت در نظر بگیرید:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{L}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حالتی را در نظر بگیرید که ویژه مقدار عملگر L_z برابر با $+1$ باشد، در این حالت عدم قطعیت عملگر L_x چقدر است؟

$$1 \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (۳) \quad 1 \quad (۴)$$

۷- ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در حالتی است که با اسپینور $\chi = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ مشخص می‌گردد. احتمال یافتن ذره در حالت با اسپین پایین $(S_z = -\frac{1}{2}\hbar)$ چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad 1 \quad (۴)$$

۸- عملگر هامیلتونی یک سیستم دو حالتی $H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$ است که در آن a عددی با بعد انرژی است. ویژه مقادیر انرژی سیستم کدامند؟

$$\pm \sqrt{2}a \quad (۱) \quad \pm \sqrt{2}a + (\text{دو حالت تبهگن}) \quad (۲) \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad (۳) \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a + (\text{دو حالت تبهگن}) \quad (۴)$$



که ۹- هامیلتونی دستگاهی با سه الکترون، برابر با $-\frac{e_0}{\hbar}(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3)$ است که $\vec{S}_i$ اسپین الکترون i ام را نشان می‌دهد. اسپین کل دستگاه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}, 0$ (۲) $1, 0$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (۴) $1, \frac{3}{2}$

که ۱۰- سه ذره کوارک هر یک با اسپین $\left|S = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}\right\rangle$ با تکانه زاویه‌ای مداری صفر با هم ترکیب شده و یک ذره باریونی با اسپین

$\left|S = \frac{3}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\right\rangle$ تولید کرده‌اند. کدام یک از حالات زیر توصیف درست این ترکیب است؟

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle|+\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle|+\rangle)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle|+\rangle)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle|+\rangle)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+\rangle|+\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle|+\rangle - 2|-\rangle|+\rangle|+\rangle)$$

- (۱) فقط $|\psi_2\rangle$ (۲) $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_4\rangle$ (هر دو) (۳) فقط $|\psi_3\rangle$ (۴) $|\psi_2\rangle$ و $|\psi_3\rangle$ (هر دو)

که ۱۱- الکترون آزادی با گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}_e = -\mu_B \vec{\sigma}$ در معرض میدان مغناطیسی وابسته به زمان $\vec{B}(t) = B_0 [\sqrt{3}(\cos \omega_0 t \hat{e}_x + \sin \omega_0 t \hat{e}_y) - \hat{e}_z]$

قرار دارد. $\vec{\sigma}$ بردار سه مؤلفه‌ای ماتریس‌های «پائولی» است. در لحظه $t = 0$ ، این الکترون در حالت اسپین $|S_z = \uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ قرار دارد. در لحظه $t > 0$ این الکترون با چه

احتمالی در حالت اسپین $|S_z = \downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ یافت می‌شود؟ $(\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e})$ و $(\frac{eB_0}{2m_e} = \Omega)$

- (۱) $\frac{3}{8}(1 - \cos 2\Omega t)$ (۲) $\frac{3}{8}(1 - \cos 4\Omega t)$ (۳) $\frac{5}{8}(1 - \cos 4\Omega t)$ (۴) $\frac{5}{8}(1 - \cos 2\Omega t)$

که ۱۲- هامیلتونی سامانه‌ای، با اسپین یک، برابر است با $H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2)$. انرژی این سامانه کدام است؟ (A و B ثابت‌های حقیقی هستند.)

- (۱) صفر و $\pm \hbar^2 \sqrt{A^2 - B^2}$ (۲) صفر و $\pm \hbar^2 \sqrt{A^2 + B^2}$ (۳) صفر و $\pm \hbar^2 (A + B)$ (۴) صفر و $\hbar^2 (A \pm B)$

که ۱۳- اگر عملگر A با هامیلتونی H جابه‌جا شود، کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) $\langle A \rangle$ ثابت حرکت است و $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ ثابت حرکت است. (۲) $\langle A \rangle$ ثابت حرکت است و $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ ثابت حرکت نیست. (۳) $\langle A \rangle$ ثابت حرکت نیست و $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ ثابت حرکت است. (۴) $\langle A \rangle$ ثابت حرکت نیست و $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ ثابت حرکت نیست.

که ۱۴- بردار حالت اولیه سیستمی $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است. اگر هامیلتونی این سیستم $H = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، حالت سیستم در زمان $t = \frac{\pi\hbar}{2a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (۳) $\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$

که ۱۵- در زمان $t = 0$ ، حالت ذره‌ای به شکل $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ است. اگر هامیلتونی این ذره به شکل $H = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ باشد، که E مقدار ثابتی است، احتمال اینکه

در زمان t ذره در حالت $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ باشد، کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2} \sin^2 \frac{Et}{\hbar}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2} \cos^2 \frac{Et}{\hbar}$

پاسخنامه فیزیک

مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته

۱- گزینه «۱» کافی است از نکته زیر استفاده کنیم:

نکته: اثر عملگر پاریته بر روی حالت $|n, \ell, m\rangle$ به صورت مقابل داده می‌شود:
 بنابراین ترکیب خطی از $|n, \ell, m\rangle$ ها قابل قبول است که ℓ های آنها همه زوج یا فرد باشد، چرا که در این صورت کل ویژه حالت تحت پاریته بر حسب اینکه ℓ ها زوج یا فرد باشند بدون تغییر می‌ماند و یا در -1 ضرب می‌شود. با بررسی گزینه‌ها دیده می‌شود که تنها گزینه (۱) چنین خاصیتی دارد (همه ℓ ها در گزینه «۱» زوج هستند).

۲- گزینه «۲» **نکته:** توجه کنید که اثر عملگرهای a و $a^\dagger$ روی $|n\rangle$ ، ویژه حالت نوسانگر ساده، بصورت زیر داده می‌شود:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

بنابراین با استفاده از نکته بالا کافی است عملگر x را بر حسب a و $a^\dagger$ بنویسیم. داریم: $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ و آنگاه:

$$x^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (a + a^\dagger)^2$$

از طرفی داریم:

$(a + a^\dagger)^2 = (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) = (a^2 + a^\dagger^2 + aa^\dagger + a^\dagger a)(a + a^\dagger) = a^2 + a^\dagger^2 + a^\dagger a + a^\dagger a + aa^\dagger + aa^\dagger + a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a^\dagger$
 توجه کنید a و $a^\dagger$ با هم جابجا نمی‌شوند و بنابراین در رابطه بالا از جابجا کردن آنها با هم و ساده‌تر کردن عبارت خودداری کنید. توجه کنید که با توجه به نکته ابتدای پاسخ، تنها ترکیبی از a و $a^\dagger$ مجاز است که $|2\rangle$ را به $|3\rangle$ ببرد تا حاصل غیرصفر باشد. تنها حالت‌هایی که مجاز هستند حضور دو عملگر $a^\dagger$ و یک عملگر a است و بنابراین در $\langle 3|x^2|2\rangle$ تنها موارد مقابل سهم غیرصفر می‌دهند:

$$aa^\dagger|2\rangle = aa^\dagger\sqrt{2}|2\rangle = 2\sqrt{2}a|1\rangle = 2\sqrt{2}\sqrt{1}|0\rangle = 2\sqrt{2}|0\rangle$$

$$a^\dagger a|2\rangle = a^\dagger a\sqrt{2}|2\rangle = 2a^\dagger|1\rangle = 2\sqrt{1}|0\rangle = 2|0\rangle$$

$$a^\dagger a^\dagger|2\rangle = a^\dagger a^\dagger\sqrt{2}|2\rangle = 2a^\dagger a^\dagger|1\rangle = 2\sqrt{2}|3\rangle$$

$$\langle 3|x^2|2\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 9\sqrt{2} \langle 3|3\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 9\sqrt{2}$$

که در محاسبه فوق از نکته ابتدای پاسخ استفاده شده است. بنابراین داریم:

$$A(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

۳- گزینه «۲» در حالت کلی $A(t)$ در تصویر هایزنبرگ بصورت مقابل داده می‌شود:

که در رابطه بالا $A \equiv A(t=0)$ و فرض کرده‌ایم که H هامیلتونی و مستقل از زمان است. در این مسئله $A = X$ که $(X \equiv X(0))$ و $H = \frac{p^2}{2m}$

$$X(t) = e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t}$$

هامیلتونی ذره آزاد است. با توجه به مستقل از زمان بودن این هامیلتونی داریم:

$$[X(t), X(0)] = \left[e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t}, X \right]$$

بنابراین داریم:

$$[f(P), x] = -i\hbar \frac{df(P)}{dP}$$

از طرفی در حالت کلی این نکته را داریم:

پس با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\left[e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t}, X \right] = -i\hbar \frac{d}{dP} \left(e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} \right) = -i\hbar \left(\frac{iPt}{m\hbar} e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} - e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} \frac{iPt}{m\hbar} \right) (*)$$

با توجه به اینکه $[P, e^{\pm \frac{iP^2}{2m\hbar}t}] = 0$ ، رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(*) = \frac{t}{m} \left(e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} P X e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} - e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} X P e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} \right) = \frac{t}{m} e^{\frac{iP^2}{2m\hbar}t} [P, X] e^{-\frac{iP^2}{2m\hbar}t} = -\frac{i\hbar t}{m}$$



۴- گزینه «۴» چنانچه j تکانه زاویه‌ای کل باشد، می‌دانیم که:
 ℓ و s به ترتیب تکانه زاویه‌ای مداری و اسپینی هستند. پس با $\ell = 2$ و $s = 1$ داریم:
 از طرفی به‌ازای j مشخص می‌دانیم که حالات $|j, m\rangle$ با $j = 1, -1, 0, \dots$ دارای انرژی یکسان هستند و بنابراین تبهگنی $|j, m\rangle$ با $2j+1$ داده می‌شود. پس داریم:

$$\begin{cases} j=1 \Rightarrow 2 \times 1 + 1 = 3 \\ j=2 \Rightarrow 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow \text{تبهگنی کل} = 3 + 5 + 7 = 15 \\ j=3 \Rightarrow 2 \times 3 + 1 = 7 \end{cases}$$

۵- گزینه «۱ و ۴»

روش تستی: در $t = 0$ می‌بایست این احتمال برابر صفر باشد که تنها گزینه‌های (۱) و (۴) این خاصیت را دارند. از طرفی همواره داریم:
 $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \Rightarrow \sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t$
 پس گزینه‌های «۱» و «۴» با هم برابرند و هر کدام از آنها می‌تواند صحیح باشد. روش تشریحی: به نظر می‌رسد منظور سؤال از ω بصورت زیر است:

$$\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar}$$

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_B \frac{B_0}{r} \vec{\sigma} \cdot \hat{x} = \frac{-\mu_B B_0 \sigma_x}{r}$$

$$\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$$

$$\hat{H} = -\mu_B \frac{1}{r} B_0 \sigma_x$$

$$\hat{H} = -\frac{\mu_B B_0}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_0\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{+i\mu_B \frac{B_0}{\hbar} \sigma_x t} |\psi_0\rangle$$

$$\sigma_x^{rn} = I, \sigma_x^{rn+1} = \sigma_x$$

چنانچه الکترونی در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گیرد، هامیلتونی آن بصورت مقابل داده می‌شود:

که منظور از $\vec{\sigma}$ همان ماتریس‌های پاولی است که به صورت مقابل تعریف می‌شود:

با توجه به $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ داریم:

که $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ بنابراین داریم:

اگر ذره در حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ باشد، در t دلخواه داریم:

در رابطه بالا فرض کرده‌ایم $\hat{H}$ مستقل از زمان است، بنابراین در این مسئله داریم:

از طرفی دقت کنید که:

از تعریف $e^{\hat{A}}$ داریم:

$$e^{\hat{A}} = \sum \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{rn+1}}{(rn+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{rn}}{(rn)!}$$

$$\hat{e}(-i\hbar t / f_L) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i \frac{(\mu_B B_0 t)^{rn+1}}{(rn+1)!} \sigma_x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu_B B_0 t)^{rn}}{(rn)!} I = \cos \omega t I + i \sin \omega t \sigma_x$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \omega t & i \sin \omega t \\ i \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \sin \omega t \end{pmatrix}$$

در رابطه فوق از تعریف ω در سؤال استفاده کرده‌ایم، پس داریم:

در رابطه بالا از اینکه حالت در جهت $\hat{k}$ با $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ داده می‌شود، استفاده کرده‌ایم.

$$\left| \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \sin \omega t \end{pmatrix} \right|^2 = \sin^2 \omega t$$

حالت با اسپین در جهت $-\hat{k}$ با $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ داده می‌شود و داریم:

سازمان سنجش گزینه (۴) را به عنوان پاسخ اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق گزینه‌های (۱) و (۴) صحیح هستند.

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

۶- گزینه «۳» در حالت کلی عدم قطعیت عملگر A بصورت مقابل داده می‌شود:

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

به راحتی می‌توان دید حالت متناظر با ویژه مقدار +۱، با $\langle + \rangle = 1$ داده می‌شود و داریم:

$$L_x^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همچنین:

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{2} (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

پس:

$$\Delta L_x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

بنابراین داریم:

$$|\chi\rangle = (1-i, 2) \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = 4+2i = 2\sqrt{5} \Rightarrow |\chi| = \sqrt{5}$$

۷- گزینه «۳» ابتدا اسپینور را بهنجار می‌کنیم، داریم:

$$|\hat{\chi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

پس داریم:

$$|\hat{\chi}\rangle \equiv \frac{\chi}{|\chi|}$$

در رابطه بالا $\hat{\chi}$ را بصورت مقابل تعریف کرده‌ایم:

$$\langle - | \hat{\chi} \rangle^2 = \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

حالت $S_z = -\frac{h}{2}$ با $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ داده می‌شود و داریم:

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۸- گزینه «۱» راحت‌تر است H را بصورت ماتریسی بنویسیم. تعریف کنید:

و آنگاه:

$$|1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\det(H - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & a \\ a & -a - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

حال کافی است تا معادله مشخصه $\hat{H}$ را برای بدست آوردن ویژه مقادیر تشکیل دهیم. داریم:

$$-(a - \lambda)(a + \lambda) - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}a$$

پس داریم:

$$\hat{H} = \frac{-\epsilon_0}{\hbar^2} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot \vec{S}_3$$

۹- گزینه «۳» توجه کنید $\hat{H}$ ، هامیلتونی را می‌توان بصورت مقابل نوشت:

چنانچه اسپین کل ذره‌های ۱ و ۳ را با $\vec{S}_3 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ نشان دهیم، رابطه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{H} = -\frac{\epsilon_0}{\hbar^2} \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_3 = -\frac{\epsilon_0}{2\hbar^2} ((\vec{S}_3)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$$

چنانچه ویژه بردارهای هامیلتونی فوق را بصورت $|S, m, S_1, S_2\rangle$ تعریف کنیم، S در رابطه مقابل صدق خواهد کرد:

$|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$ چنانچه ویژه بردارهای هامیلتونی فوق را بصورت $|S, m, S_1, S_2\rangle$ تعریف کنیم، S در رابطه مقابل صدق خواهد کرد: $|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$ که S_1 اسپین کل ذره‌های اول و سوم و S_2 اسپین کل ذره دوم است. ابتدا مقادیر ممکن S_1 را می‌یابیم. داریم:

$$|S_1 - S_2| \leq S_1 \leq S_1 + S_2 \Rightarrow 0 \leq S_1 \leq 1$$



که در آن از $S_1 = S_3 = \frac{1}{2}$ استفاده کرده‌ایم. حال داریم:

$$S_{13} = 0 \Rightarrow S_2 \leq S \leq S_2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

$$S_{13} = 1 \Rightarrow |S_2 - S_{13}| \leq S \leq S_2 + S_{13} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq S \leq \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

که در آن از $S_2 = \frac{1}{2}$ استفاده کرده‌ایم. پس داریم:

۱۰- گزینه «۲» با توجه به اینکه تکانه زاویه‌ای مداری هر کدام از ذره‌ها برابر صفر است، از رابطه $J_i = S_i + \ell_i$ و $\ell_i = 0$ به $J_i = S_i$ می‌رسیم و تکانه زاویه‌ای کل هر ذره برابر با اسپین آن است. حال چنانچه تعریف کنیم $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ به دنبال ویژه حالت‌هایی هستیم که همزمان ویژه حالت S^2 و S_z باشند. به‌طور خاص دنبال ویژه حالتی با $m_z = \frac{1}{2}$ و $S = \frac{3}{2}$ هستیم. بدین منظور از حالت $|+++\rangle$ به $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ شروع می‌کنیم. داریم: (برای راحتی محاسبات در واحد $\hbar$ کار می‌کنیم):

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |+++\rangle$$

$$S_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = (S_-^{(1)} + S_-^{(2)} + S_-^{(3)}) |+++\rangle$$

با عمل دادن عملگر $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)} + S_-^{(3)}$ در طرفین رابطه بالا داریم:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

از طرفی می‌دانیم در حالت کلی رابطه مقابل برقرار است:

پس داریم:

$$S_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{3} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$S_-^{(1)} |+++\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} | -++\rangle$$

همچنین داریم:

$$S_-^{(2)} |+++\rangle = |+-+\rangle \quad S_-^{(3)} |+++\rangle = |-++\rangle$$

و به‌طور مشابه برای $S_-^{(2)}$ و $S_-^{(3)}$ داریم:

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|+-+\rangle + |-++\rangle + |--+\rangle)$$

پس داریم:

پس حالت $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ با $|\psi_1\rangle$ قابل توصیف است. نشان می‌دهیم حالت $|\psi_4\rangle$ که در گزینه «۲» معرفی شده است ویژه حالت S^2 با $S = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |++\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} | -++\rangle \right)$$

بدین منظور $|\psi_4\rangle$ را بصورت مقابل می‌نویسیم:

$$|S_2 - S_3| \leq S_{23} \leq S_2 + S_3 \Rightarrow 0 \leq S_{23} \leq 1$$

ابتدا ذره‌های ۲ و ۳ را در نظر بگیرید، داریم:

پس $S_{23} = 0$ یا $S_{23} = 1$. به سادگی و مشابه آنچه که برای سه ذره نشان دادیم می‌توان نشان داد که:

$$|S_{23} = 1, m_{23} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-+\rangle + |-++\rangle)$$

$$|S_{23} = 1, m_{23}^Z = 1\rangle = |++\rangle$$

و همچنین:

بنابراین چنانچه تعریف کنیم $|0\rangle \equiv |S_{23} = 1, m_{23}^Z = 0\rangle$ و $|1\rangle \equiv |S_{23} = 1, m_{23}^Z = 1\rangle$ ، آنگاه $|\psi_4\rangle$ بصورت زیر قابل بیان است:

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} |0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle \right)$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{S}_1 + \vec{S}_{23}$$

حال داریم:

$$S^2 = S_1^2 + S_{23}^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_{23} = S_1^2 + S_{23}^2 + 2S_1^x S_{23}^x + 2S_1^y S_{23}^y + 2S_1^z S_{23}^z$$

پس داریم:

$$J_x = \frac{J_- + J_+}{2}, J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

از طرفی در حالت کلی می‌دانیم که:

پس S^2 را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$S^2 = S_1^2 + S_{23}^2 + 2S_1^z S_{23}^z + 2\left(\frac{S_1^+ + S_1^-}{2}\right)\left(\frac{S_{23}^+ + S_{23}^-}{2}\right) + 2\left(\frac{S_1^+ - S_1^-}{2i}\right)\left(\frac{S_{23}^+ - S_{23}^-}{2i}\right) = S_1^2 + S_{23}^2 + 2S_1^z S_{23}^z + S_1^+ S_{23}^- + S_1^- S_{23}^+$$

$$S_y^- S_z^+ |\psi_F\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$$

داریم:

$$S_y^+ S_z^- |\psi_F\rangle = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle$$

$$S_y^2 |\psi_F\rangle = \frac{3}{4} |\psi_F\rangle, S_z^2 |\psi_F\rangle = 2 |\psi_F\rangle$$

از طرفی به راحتی دیده می‌شود که:

$$S_y^z S_z^z |\psi_F\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$$

$$S_y^2 |\psi_F\rangle = \frac{3}{4} |\psi_F\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |\psi_F\rangle$$

پس:

دیده می‌شود که $|\psi_F\rangle$ ویژه حالت S^2 با $S = \frac{1}{2}$ است و بنابراین متعلق به $|S = \frac{3}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle$ نیست و از این نظر گزینه (۲) ایراد دارد، اما نزدیک‌ترین گزینه همان گزینه (۲) است. مشابهاً می‌توان دید که سایر گزینه‌ها نیز متعلق به حالت داده شده در سؤال نیستند.

۱۱- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B} = \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \gamma \mu_B B_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega_0 t \sigma_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega_0 t \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right)$$

می‌دانیم که هامیلتونی الکترون با رابطه مقابل داده می‌شود:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{k}$$

که:

$$\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -\frac{iH}{\hbar} |\psi\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i \int_0^t H(t) dt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$$

از طرفی از معادله شرودینگر می‌دانیم که:

توجه کنید که در این مسئله $\hat{H}$ تابعی از زمان است و می‌بایست در رابطه بالا صورت انتگرال وارد شود. پس داریم:

$$\int_0^t \hat{H} dt = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) \hat{j} - \frac{t}{2} \hat{k} \right) \cdot \gamma \mu_B B_0 \vec{\sigma}$$

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) \hat{j} - \frac{t}{2} \hat{k}$$

حال تعریف کنید:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{\hbar} \gamma \mu_B B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}} |\psi(0)\rangle$$

پس داریم:

$$e^{ib(n, \vec{\sigma})} = I \cos b + i(n, \vec{\sigma}) \sin b$$

حال توجه کنید، در حالت کلی داریم:

$$e^{ib(n, \vec{\sigma})} = \begin{pmatrix} \cos b - i \sin b, n_z & i n_x + n_y \\ i n_x - n_y & \cos b - i \sin b, n_z \end{pmatrix}$$

در رابطه بالا $\hat{n}$ بردار یکه است. با تعریف $b = -\frac{\gamma \mu_B B_0 |\vec{\alpha}|}{\hbar}$ داریم:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos b + i \sin b, n_z & (i n_x + n_y) \sin b \\ (i n_x - n_y) \sin b & \cos b - i n_z \sin b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b + i \sin b, n_z \\ (i n_x - n_y) \sin b \end{pmatrix}$$

و داریم:

$$\langle - | \psi(t) \rangle^2 = (n_x^2 + n_y^2) \sin^2 b$$

و بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$|\vec{\alpha}|^2 = \left(\frac{3}{4} \frac{\sin^2 \omega_0 t}{\omega_0^2} + \frac{3}{4} \frac{(1 + \cos^2 \omega_0 t - 2 \cos \omega_0 t)}{\omega_0^2} + \frac{t^2}{4} \right) = \left(\frac{3}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{t^2}{4} \right)$$

در اینجا می‌بایست b و n_x و n_y را بیابیم. داریم:

$$\langle - | \psi(t) \rangle^2 = \frac{\frac{3}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{3}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{t^2}{4}} \sin^2 \frac{3}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{t^2}{4} \left(\frac{\gamma \mu_B B_0}{\hbar} \right)$$

بنابراین با توجه به اینکه $\hat{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ داریم:



این پاسخ در هیچ گزینه‌ای نیامده است و به نظر می‌رسد سوال اشتباهاً $|\psi(t)\rangle$ را به صورت مقابل نوشته است:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle$$

و آنگاه در حالت فوق داریم:

$$|\vec{a}| = \gamma t \Rightarrow b = -\frac{\gamma \mu_B B_0 t}{\hbar} = -\gamma \Omega t$$

همچنین در این حالت داریم:

$$n_x^\gamma + n_y^\gamma = \frac{\gamma}{\epsilon} \Rightarrow (n_x^\gamma + n_y^\gamma) \sin^2 \gamma \Omega t = \frac{\gamma}{\lambda} (1 - \cos 4 \Omega t)$$

که برابر با گزینه «۲» است. در حد $\omega_0 \rightarrow 0$ پاسخ همان گزینه «۲» است اما در صورت سؤال چنین حدی ذکر نشده است.

سازمان سنجش گزینه (۲) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق، هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۱۲- گزینه «۴» کافی است H را ابتدا به صورت ماتریسی نوشته و سپس ویژه مقادیر آن را محاسبه کنیم. همچنین S_x و S_y را برای راحتی بر حسب $S_{\pm}$ عملگرهای نردبانی در فضای اسپین می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \text{ و } S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_x^\gamma = \frac{S_+^\gamma + S_-^\gamma + S_+ S_- + S_- S_+}{4} \text{ و } S_y^\gamma = \frac{S_+^\gamma + S_-^\gamma - S_+ S_- - S_- S_+}{-4}$$

پس داریم:

$$S_x^\gamma - S_y^\gamma = \frac{S_+^\gamma + S_-^\gamma}{2}$$

و آنگاه داریم:

$$H = A S_z^\gamma + \frac{B}{2} (S_+^\gamma + S_-^\gamma)$$

و بنابراین داریم:

صورت ماتریس H را در پایه $|\ell=1, m\rangle$ برای $m = \pm 1, 0$ که $|\ell, m\rangle$ ها ویژه بردارهای همزمان S_z^γ و S^2 هستند می‌نویسیم. بدین منظور می‌بایست مؤلفه‌های مقابل را به دست آوریم:

$$a_{m,m'} = \langle \ell=1, m | H | \ell=1, m' \rangle$$

$$S_{\pm} | \ell, m \rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} | \ell, m \pm 1 \rangle (*)$$

همچنین از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$S_+ | 1, 0 \rangle = S_- | 1, 0 \rangle = 0$$

از تعریف عملگرهای نردبانی و رابطه بالا دیده می‌شود که:

بنابراین به راحتی دیده می‌شود که تنها حالت‌های ناصفر که به جمله دوم سهم می‌دهد به صورت زیر هستند:

$$\frac{B}{2} \langle 1, 1 | (S_+^\gamma + S_-^\gamma) | 1, -1 \rangle = \frac{B}{2} \langle 1, -1 | (S_+^\gamma + S_-^\gamma) | 1, 1 \rangle$$

$$\frac{B}{2} \langle 1, 1 | (S_+^\gamma + S_-^\gamma) | 1, -1 \rangle = \hbar^2 B \quad (**)$$

که در رابطه بالا از هرمیتی بودن جمله دوم هامیلتونی استفاده شده است. با استفاده از (*) داریم:

با استفاده از (**) و اینکه $|\ell, m\rangle$ ها ویژه حالت‌های S_z هستند، داریم:

$$a_{1,0} = a_{0,1} = a_{-1,0} = a_{0,-1} = a_{0,0} = 0$$

$$a_{1,1} = A \hbar^2, a_{1,-1} = a_{-1,1} = B \hbar^2 a_{-1,-1} = \hbar^2 A$$

$$H = \hbar^2 \begin{pmatrix} A & \gamma & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & A \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} A - \frac{\lambda}{\hbar^2} & 0 & B \\ 0 & -\frac{\lambda}{\hbar^2} & 0 \\ B & 0 & A - \frac{\lambda}{\hbar^2} \end{pmatrix} = 0$$

پس داریم:

که معادله دوم همان معادله مشخصه H می‌باشد.

$$(A - \lambda')^\gamma (-\lambda') + B^\gamma \lambda' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda' = 0 \\ \lambda' = A \pm B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \hbar^2 (A \pm B) \end{cases}$$

از تعریف $\lambda' \equiv \frac{\lambda}{\hbar}$ داریم:

نکته: در محاسبه فوق روشی را به کار بردیم که برای هر اسپینی قابل استفاده است. اما اگر S_x و S_y را برای $\ell=1$ حفظ باشید خیلی سریع تر می‌توانید به جواب برسید و توصیه می‌شود صورت S_x و S_y را برای $\ell=1$ حفظ کنید.

۱۳- گزینه «۱» در تصویر هایزنبرگ داریم:

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_S}{\partial t}$$

که منظور از A_H عملگر در تصویر هایزنبرگ و منظور از A_S عملگر در تصویر شرودینگر است. چنانچه A_S در تصویر شرودینگر وابستگی صریح به زمان

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_H(t), A_H(t)] = 0$$

نداشته باشد رابطه بالا به صورت مقابل نوشته می‌شود:

که تساوی دوم از فرض جابجا شدن H و $A_H(t)$ نوشته شده است.

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = 0$$

از رابطه بالا دیده می‌شود که:

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \psi | A_H | \psi \rangle$$

حال برای $|\psi\rangle$ دلخواه داریم:

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle \psi | \frac{dA_H}{dt} | \psi \rangle = 0$$

در تصویر هایزنبرگ $|\psi\rangle$ وابسته به زمان نیست و داریم:

$$\frac{d\langle A^r \rangle}{dt} = \langle \psi | \frac{dA_H^r}{dt} | \psi \rangle = \langle \psi | r A_H \frac{dA_H}{dt} | \psi \rangle = 0$$

همچنین داریم:

$$\frac{d\langle \Delta A^r \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle A_H^r \rangle - \langle A_H \rangle^2} = 0$$

بنابراین دیده می‌شود که:

و ΔA نیز مستقل از زمان است. توجه کنید که در صورت سؤال می‌بایست ذکر می‌شد A در تصویر شرودینگر وابستگی صریح به زمان ندارد و در غیر این صورت گزینه «۴» می‌توانست صحیح باشد.

۱۴- گزینه «۳» می‌دانیم که اگر H یک هامیلتونی مستقل از زمان باشد و سیستم در $t=0$ در $|\psi_0\rangle$ باشد آنگاه داریم:

$$u(t) = e^{-\frac{iat}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

در این مسئله به راحتی داریم:

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{iHt}{\hbar})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{iHt}{\hbar})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{iHt}{\hbar})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

از طرفی داریم:

$$H^{2n} = a^{2n} I, H^{2n+1} = a^{2n+1} H$$

همچنین:

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{\hbar^{2n} (2n)!} t^{2n} I - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{\hbar^{2n+1} (2n+1)!} t^{2n+1} H = \cos at I - i \sin at H = \begin{pmatrix} \cos a \frac{t}{\hbar} & -i \sin a \frac{t}{\hbar} \\ -i \sin a \frac{t}{\hbar} & \cos a \frac{t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

در لحظه داده‌شده داریم:

۱۵- گزینه «۳» کافی است $|\psi(t)\rangle$ را در t دلخواه محاسبه کنیم و چون H مستقل از زمان است، داریم:

با توجه به قطری بودن H ، $u(t)$ به راحتی به صورت زیر درمی‌آید:

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{iHt}{\hbar})^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{iEt}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |\psi(t=0)\rangle$$

و بنابراین داریم:

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

از طرفی داریم: