مدرسان شریف

فصل اول

«آنالیز برداری»

مقدمه

دوستان و همراهان عزیز، قرار است از الان تا آخر کتاب یکدیگر را همراهی کنیم و با جزئیات الکترومغناطیس به طور کامل آشنا شویم. همان‌طور که می‌دانید، الکترومغناطیس یک کلمه ترکیبی از دو کلمه الکتریسیته و مغناطیس است. از آنجا که الکتریسیته زودتر از مغناطیس کشف شد، ما هم بر این اساس، ابتدا الکتریسیته و سپس مغناطیس را آموزش می‌دهیم.

درسنامه (۱): بردار

محور مختصات

محور مختصات متعامد: برای تعیین مکان دقیق یک نقطه در فضا از دستگاه مختصات متعامد استفاده می‌کنیم. یک دستگاه مختصات متعامد، از سه رویه تشکیل شده که این سه رویه دوبه‌دو برهم عمودند. همچنین برای تعیین مکان، یک نقطه به نام مبدأ مختصات لازم است که از تقاطع این سه رویه به‌دست می‌آید. اگر این سه رویه را با معادلات $u_1 = f(x,y,z)$ و $u_2 = g(x,y,z)$ و $u_3 = k(x,y,z)$ توصیف نماییم، مختصات هر نقطه دلخواه در فضا را با (u_1, u_2, u_3) نمایش می‌دهند. در این کتاب با سه دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین)، استوانه‌ای و کروی سروکار خواهیم داشت که در ادامه فصل مشخصات هرکدام را توصیف خواهیم نمود.

کمیت

جوهر و بنیاد پدیده‌های فیزیکی و مخصوصاً الکترومغناطیس با دو نوع کمیت ساخته می‌شود که عبارتند از:

۱ـ کمیت‌های اسکالر که فقط با اندازه مشخص می‌شوند؛ مانند جرم (m)، دما (T). برای توصیف این کمیت‌ها کافی است یک عدد ارائه کنید؛ مثل $1\,kg$، $30^\circ C$ و ... .

۲ـ کمیت‌های برداری که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز می‌باشند و از قواعد جمع برداری پیروی می‌کنند (برای مثال جریان الکتریکی I نیز جهت دارد ولی بردار نیست، چون مثل بردارها جمع نمی‌شود)، مانند نیرو $(\vec{F})$، شتاب $(\vec{a})$.

برای تشخیص کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، از علامت پیکان $\rightarrow$ روی کمیت‌های برداری استفاده می‌کنیم. اندازه یک بردار را نیز با استفاده از علامت قدرمطلق نشان می‌دهیم. مثلاً بردار $\vec{A}$ را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{a}_A$

$|\vec{A}|$ اندازه بردار و $\hat{a}_A$ جهت بردار را نشان می‌دهد.

بردار واحد (یکه)

بردار یکه، برداری است که اندازه آن یک می‌باشد و فقط جهت را نشان می‌دهد. اگر بردار $\vec{A}$ را بر اندازه آن تقسیم کنیم، برداری به دست می‌آید که اندازه آن برابر واحد بوده و جهت آن با جهت بردار $\vec{A}$ یکسان است. به این بردار، بردار واحد (یکّه) می‌گوییم. بردارهای یکه را معمولاً با حرف a که روی آن کلاه $(\wedge)$ قرار دارد و زیرنویس آن جهت را مشخص می‌کند، نشان می‌دهند.

$$\boxed{\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$$

توجه: در برخی کتاب‌ها برای نمایش بردار یکه به‌صورت مقابل عمل می‌کنند: $\hat{x} = \hat{a}_x \;,\; \hat{y} = \hat{a}_y$

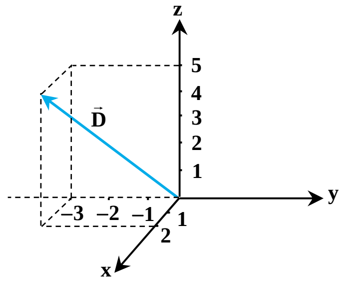
اگر بردار $\vec{C}$ به‌صورت $\vec{C}=\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y$ نوشته شود اندازه و جهت آن به این روش به دست می‌آید:

$$|\vec{C}|=\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}$$

$$\hat{a}_C=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y}{\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}}\hat{a}_x+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}}\hat{a}_y$$

مثال ۱: بردار $\vec{D}$ نشان داده شده در شکل مقابل را به تفکیک اندازه و جهت بنویسید.

$$\vec{D}=۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_z$$



پاسخ: اگر بخواهیم اندازه چنین برداری با فرمت $\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y+\gamma\hat{a}_z$ را به دست آوریم، مقدار آن برابر است با:

$$|\vec{D}|=\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}}$$

و جهت آن هم به صورت مقابل است:

$$\hat{a}_D=\frac{\vec{D}}{|\vec{D}|}=\frac{\alpha\hat{a}_x+\beta\hat{a}_y+\gamma\hat{a}_z}{\sqrt{\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}}}$$

بنابراین $\vec{D}$ را به این شکل هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases}|\vec{D}|=\sqrt{۲^{۲}+(-۳)^{۲}+۵^{۲}}=\sqrt{۴+۹+۲۵}=\sqrt{۳۸}\\ \hat{a}_D=\frac{۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_x}{\sqrt{۳۸}}\end{cases}\quad,\quad \vec{D}=|\vec{D}|\hat{a}_D=\sqrt{۳۸}\left(\frac{۲\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۵\hat{a}_z}{\sqrt{۳۸}}\right)$$

قواعد ساده برداری

تساوی بردارها

اگر اندازه و جهت دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یکسان باشد، می‌گوییم که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مساویند. اگر اندازه بردارها یکسان ولی جهت آنها خلاف یکدیگر است، آن دو بردار قرینه یکدیگر هستند.

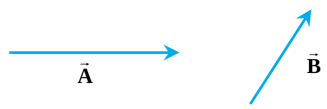
ضرب بردار در کمیت اسکالر

اگر بردار $\vec{A}$ را در کمیت اسکالری مانند k ضرب کنیم، اندازه بردار $\vec{A}$، k برابر شده و برحسب اینکه k مثبت یا منفی باشد، جهت بردار $k\vec{A}$ همان جهت قبلی یا خلاف جهت اولیه خواهد بود.

جمع و تفریق بردارها

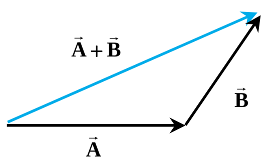
جمع بردارها

فرض کنید که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به‌صورت مقابل داریم:



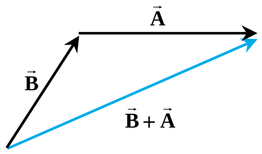
دو روش برای جمع کردن این دو بردار وجود دارد، به نام‌های روش مثلثی و روش متوازی‌الاضلاع.

روش مثلثی: در این روش، ابتدای یکی از بردارها به انتهای بردار دیگر متصل می‌شود. پس ضلع سوم می‌ماند که باید سعی کنید آن را طوری رسم کنید که ابتدای آن ابتدای بردار اول و انتهای آن انتهای بردار دوم باشد.

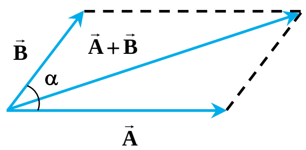


جمع بردارها **خاصیت جابجایی** دارند، یعنی:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



روش متوازی‌الاضلاع: در این روش دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. حاصل جمع دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند و از رأس مشترک دو بردار رسم می‌شود.



این روش‌ها، روش‌های هندسی بودند، اگر بردارها را برحسب مؤلفه‌هایشان داشتیم چه می‌کنیم؟ اگر بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z\quad,\quad \vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$$

در حاصل‌جمع آنها، مؤلفه‌های متناظر با یکدیگر جمع می‌شوند؛ یعنی:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{a}_x+(A_y+B_y)\hat{a}_y+(A_z+B_z)\hat{a}_z$$

اندازه بردار $|\vec{A}+\vec{B}|$ از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^۲+|\vec{B}|^۲+۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

تفریق بردارها

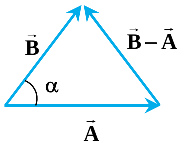
در تفریق دو بردار به روش هندسی، دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم و از انتهای بردار اولی به انتهای بردار دومی رسم می‌کنیم.

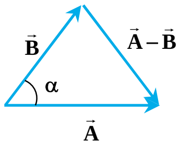
تفریق برداری را نیز برحسب جمع برداری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

به عبارتی می‌توانیم بگوییم که تفریق بردار $\vec{B}$ از $\vec{A}$ $(\vec{A}-\vec{B})$ یعنی مجموع بردار $\vec{A}$ و قرینه بردار $\vec{B}$.

اندازه بردار $|\vec{A}-\vec{B}|$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:





$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^۲+|\vec{B}|^۲-۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

مثال ۲: زاویه بین دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}+۳\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ را با استفاده از رابطه اندازه مجموع دو بردار بیابید.

☑ **پاسخ:** حاصل جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با:

$$\vec{A}+\vec{B}=۳\hat{i}+۴\hat{j}-۴\hat{k}\Rightarrow|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{۳^۲+۴^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۴۱}$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{۲^۲+۳^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۲۲}\ ,\ |\vec{B}|=\sqrt{۱^۲+۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^۲+|\vec{B}|^۲+۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}\Rightarrow\sqrt{۴۱}=\sqrt{۲۲+۳+۲\sqrt{۲۲}\sqrt{۳}\cos\alpha}\Rightarrow ۴۱=۲۵+۲\sqrt{۶۶}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۸}{\sqrt{۶۶}}\Rightarrow\alpha\approx ۱۰^\circ$$

ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با علامت «۰» نشان می‌دهیم که یک کمیت اسکالر است و اندازه آن برابر بـا حاصل‌ضـرب انـدازه‌هـای دو بردار و کسینوس زاویه بین آنها است. با فرض اینکه θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد، ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

توجه: در ضرب داخلی بردارها، قوانین جابجایی و توزیع‌پذیری صادق است.

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}\qquad,\qquad\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$$

در مختصات دکارتی اگر دو بردار $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$ و $\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$ را داده باشند، مـی‌تـوان ضـرب داخلـی آنها را از رابطه زیر نیز به دست آورد:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

به نکات زیر در مورد ضرب داخلی توجه کنید:

۱ـ ضرب داخلی علاوه بر ضرب اسکالر به ضرب نقطه‌ای هم معروف است و دلیل آن هم، استفاده از علامت نقطه در میان دو بردار بـه جـای علامـت ضـرب می‌باشد $(\vec{A}.\vec{B})$.

۲ـ ضرب داخلی یک بردار با خودش برابر مربع اندازه آن بردار است.

$$\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^۲$$

دلیل آن، این است که زاویه یک بردار با خودش صفر درجه می‌باشد و بنابراین می‌توانیم اینگونه بنویسیم:

$$\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^۲\cos(۰)=|\vec{A}|^۲$$

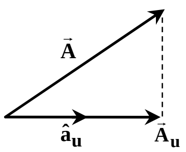
۳ـ ضرب داخلی دو بردار، کوچکتر یا برابر با حاصل‌ضرب اندازه‌های آنهاست، زیرا همواره $\cos\theta\le ۱$ است.

$$\vec{A}.\vec{B}\le|\vec{A}|.|\vec{B}|$$

فرض کنید $\hat{a}_u$ یک بردار یکه در یک جهت دلخواه باشد که ضرب داخلی آن با بردار $\vec{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A}.\hat{a}_u=|\vec{A}||\hat{a}_u|\cos(\vec{A},\hat{a}_u)=|\vec{A}|\cos(\vec{A},\hat{a}_u)=|\vec{A}_u|$$

به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این‌جا $\cos(\vec{A},\hat{a}_u)$، کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\hat{a}_u$ است و $\vec{A}_u$ تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار یکه $\hat{a}_u$ می‌باشـد. پـس بردار $\vec{A}_u$ را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد که این رابطه یک نتیجه ساده ولی مهم است.



$$\vec{A}_u=|\vec{A}_u|\hat{a}_u=(\vec{A}.\hat{a}_u)\hat{a}_u$$

حالا با کمی تأمل می‌توان بردار مربوط به تصویر بردار $\vec{A}$ در امتداد بردار دلخواه $\vec{B}$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$(\vec{A}.\hat{a}_B)\hat{a}_B = (\vec{A}.\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|})\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{B}(\vec{A}.\vec{B})}{|\vec{B}|^۲}$$

پس مؤلفه دیگر بردار $\vec{A}$ در امتداد عمود بر بردار $\vec{B}$ برابر است با:

$$\vec{A} - \frac{\vec{B}(\vec{A}.\vec{B})}{|\vec{B}|^۲}$$

بنا بر مطالب فوق، می‌توان هر بردار را (نسبت به بردار یا جهتی خاص) به دو مؤلفه مماسی (افقی) و قائم تجزیه کرد.

تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر

مطلبی را که در بالا گفتیم، همین مفهوم را می‌رساند. یعنی برای پیدا کردن طول تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$، اول باید بردار یکه‌ای که جهت $\vec{B}$ را نشان می‌دهد به دست آوریم و سپس ضرب داخلی آن را با بردار $\vec{A}$ محاسبه کنیم. حاصل این ضرب داخلی، طول تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ می‌باشد که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{\mathbf{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}} = \vec{A}.\hat{a}_B = \vec{A}.\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}} \qquad (۱)$$

فراموش نکنید که $\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}$ یک اسکالر است و بردار نیست. چرا؟ به این دلیل که هم حاصل‌ضرب $\vec{A}.\vec{B}$ اسکالر است و هم اندازه بردار $\vec{B}$. پس اگر تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ را از ما بخواهند، باید مقدار $\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}$ را در جهت بردار $\vec{B}$ (که همان بردار یکه $\vec{B}$ می‌باشد) ضرب کنیم.
پس به این صورت می‌توان نوشت:

$$\boxed{\mathbf{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}\ \hat{a}_B = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^۲}\vec{B}} \qquad (۲)$$

مثال ۳: تصویر بردار $\vec{A} = -\hat{i} + ۲\hat{j} + ۳\hat{k}$ بر روی بردار $\vec{B} = ۲\hat{i} - \hat{j} + ۲\hat{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\hat{i} - \frac{۱}{۴}\hat{j} + \frac{۱}{۲}\hat{k}$
۲) $\frac{۴}{۹}\hat{i} - \frac{۲}{۹}\hat{j} + \frac{۴}{۹}\hat{k}$
۳) $\frac{-۲}{۹}\hat{i} - \frac{۴}{۹}\hat{j} + \frac{۶}{۹}\hat{k}$
۴) $\frac{-۱}{۴}\hat{i} - \frac{۱}{۴}\hat{j} + \frac{۳}{۴}\hat{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این مثال بردار تصویر را از ما خواسته است. پس ابتدا باید طول تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ را به دست آوریم و سپس آن را در بردار یکّه بردار $\vec{B}$ ضرب می‌کنیم. یا این که می‌توانیم مستقیم از رابطه (۲) در صفحه قبل استفاده کنیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{Proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}} = (\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|})\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = (\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^۲})\vec{B} = (\frac{(-۱)\times ۲ + ۲\times(-۱) + ۳\times ۲}{(\sqrt{(۲)^۲ + (-۱)^۲ + (۲)^۲})^۲})(۲,-۱,۲) = \frac{۲}{۹}(۲,-۱,۲) = \frac{۴}{۹}\hat{i} - \frac{۲}{۹}\hat{j} + \frac{۴}{۹}\hat{k}$$

نکته۱: در صورتی دو بردار $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ و $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ بر هم عمودند که حاصل‌ضرب داخلی آنها برابر صفر گردد.

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = ۰$$

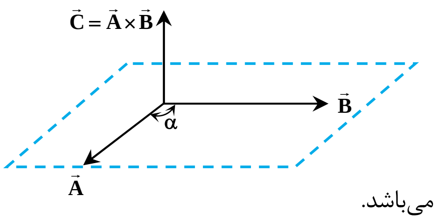
همچنین در صورتی دو بردار $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ و $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ با هم موازی‌اند که نسبت مؤلفه‌های متناظر آنها با هم برابر باشد، یعنی:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

ضرب خارجی دو بردار

ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که با علامت «×» نشان داده می‌شود، بردار دیگری مانند $\vec{C}$ است که اندازه آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha}$$



واضح است که $|\vec{A}\times\vec{B}|$ مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.
همان‌طور که در شکل هم می‌بینید، بردار $\vec{C}$ برداری عمود بر صفحه‌ای است که شامل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

جهت بردار $\vec{C}$ با توجه به قاعده دست راست تعیین می‌شود. یعنی اگر جهت بسته شدن انگشتان دست راست از بردار $\vec{A}$ به طرف بردار $\vec{B}$ باشد، انگشت شست جهت بردار $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ را نشان می‌دهد. در ضرب خارجی بردارها، قوانین جابجایی و شرکت‌پذیری صادق نیست، ولی قانون توزیع‌پذیری صادق است.

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}\quad,\quad\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\quad,\quad\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

نکته۲: در مختصات دکارتی اگر دو بردار $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$ و $\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$ را داشته باشیم، ضرب خارجی آنها را می‌توان از رابطه زیر نیز به دست آورد:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=[(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z]}$$

مثال۴: مختصات بردار واحد (یکه) عمود بر دو بردار $\vec{A}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{B}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ کدام است؟

۱) $(1,-2,2)$ ۲) $(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(-1,2,2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم، بردار عمود بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر حاصل‌ضرب خارجی آن دو بردار می‌باشد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{N}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -1 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-1,2,2)$$

حالا بردار واحد متناظر با $\vec{N}$ را به دست می‌آوریم:

$$\hat{a}_N=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}}=(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$

نکته۳: ضرب سه‌گانه برداری: برای ضرب سه گانه برداری قاعده‌ای معروف به قاعده $BAC-CAB$ داریم:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

مثال۵: اگر $\vec{A}=\vec{a}_x+\vec{a}_y-\vec{a}_z$ و $\vec{B}=-2\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$ باشد، با در نظر گرفتن رابطه: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=-\vec{a}_x-9\vec{a}_y-5\vec{a}_z$، مطلوب است محاسبه $\vec{C}$ را. (مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $\vec{C}=3\vec{a}_x+2\vec{a}_y-\vec{a}_z$ ۲) $\vec{C}=2\vec{a}_x-3\vec{a}_y+\vec{a}_z$ ۳) $\vec{C}=-2\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$ ۴) $\vec{C}=-3\vec{a}_x-\vec{a}_y-2\vec{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» روش استاندارد حل این سؤال‌ها، فرض کردن بردار $\vec{C}$ به صورت کلی مقابل است:

$$\vec{C}=C_1\hat{a}_x+C_2\hat{a}_y+C_3\hat{a}_z$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(-2C_2+2C_3)\hat{a}_x+(4C_1+3C_2-3C_3)\hat{a}_y+(3C_2+C_3)\hat{a}_z$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(-3C_2+C_3)\hat{a}_x+(3C_1-2C_3)\hat{a}_y+(-C_1+2C_2)\hat{a}_z$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(-5C_2+3C_3)\hat{a}_x+(4C_1+3C_2-3C_3)\hat{a}_y+(3C_2+C_3)\hat{a}_z=-\hat{a}_x-9\hat{a}_y-5\hat{a}_z$$

مقادیر C_1، C_2 و C_3 به سادگی به دست می‌آیند:

$$C_1=-3\ ,\ C_2=-1\ ,\ C_3=-2$$

و نهایتاً:

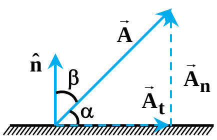
$$\vec{C}=-3\hat{a}_x-\hat{a}_y-2\hat{a}_z$$

با جایگذاری گزینه‌ها در عبارت سؤال نیز می‌توان به جواب رسید که البته احتمالاً زمان بیشتری نیاز دارد.

تجزیه بردار

اگر بردار $\vec{A}$ با سطح مشخصی زاویه α بسازد، در این صورت می‌توانیم آن را به دو راستای مماس بر سطح $(\vec{A}_t)$ و عمود بر سطح $(\vec{A}_n)$ تجزیه کنیم که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\vec{A}=\vec{A}_t+\vec{A}_n$$



در صورتی که بردار واحد عمود بر سطح $\hat{n}$ باشد، اندازه تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\hat{n}$ را چگونه به دست می‌آورید؟ بسیار ساده است. با توجه به روابطی که در قسمت قبل گفتیم، به صورت مقابل به دست می‌آید: $|\vec{A}_n| = \vec{A}.\hat{n}$

همچنین تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\hat{n}$ به صورت مقابل است: $\vec{A}_n = |\vec{A}_n|\hat{n} = (\vec{A}.\hat{n})\hat{n}$

و اگر بردار واحد مماس بر سطح را به صورت $\hat{t}$ در نظر بگیریم، $\vec{A}_t$، مانند رابطه‌ی بالا به صورت $(\vec{A}.\hat{t})\hat{t}$ به دست می‌آید. البته بدون داشتن بردار $\hat{t}$ هم می‌توان بردار $\vec{A}_t$ را به صورت مقابل به‌دست آورد: $\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_t \Rightarrow \vec{A}_t = \vec{A} - \vec{A}_n$

$tg\alpha$ هم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$tg\alpha = \frac{|\vec{A}_n|}{|\vec{A}_t|}$$

و اگر β زاویه بین بردار $\vec{A}$ و بردار عمود بر سطح باشد، خواهیم داشت:

$$tg\beta = \frac{|\vec{A}_t|}{|\vec{A}_n|}$$

مثال ۶: بردار $\vec{A} = ۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ با صفحه xy زاویه ۳۰° می‌سازد. مقدار z تقریباً چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲/۱ ۳) ۳/۲ ۴) ۴/۲

پاسخ: گزینه «۲» تجزیه بردار $\vec{A}$ روی صفحه xy به صورت زیر است:

$$\hat{n}:\hat{a}_z : \vec{A}_n = (\vec{A}.\hat{a}_z)\hat{a}_z = z\hat{a}_z \xrightarrow{\vec{A}_t = \vec{A} - \vec{A}_n} \vec{A}_t = ۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y$$

$$tg\alpha = \frac{|\vec{A}_n|}{|\vec{A}_t|} \Rightarrow |\vec{A}_n| = |\vec{A}_t|\, tg\alpha \Rightarrow z = \sqrt{۱۳}\, tg۳۰^\circ \Rightarrow z = \sqrt{۱۳}.\frac{۱}{\sqrt{۳}} \approx ۲/۱$$

نکته ۴: مؤلفه‌ی مماسی بردار را می‌توان از رابطه روبه‌رو حساب کرد. برای اثبات این رابطه از قاعده $BAC - CAB$ استفاده کنید.

$$\vec{A}_t = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{A})$$

اثبات:

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{A} = \overbrace{\hat{n}(\hat{n}.\vec{A})}^{\vec{A}_n} - \overbrace{\vec{A}(\hat{n}.\hat{n})}^{\vec{A}} \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_n + (-\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{A}) \xrightarrow{\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_t} \vec{A}_t = -\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{A}$$

معادله صفحه و خط در فضا

فرض کنید $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ مختصات یک نقطه از صفحه و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ عمود بر صفحه باشد. در این صورت معادله صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = ۰$$

بنابراین در معادله این صفحه که به صورت $ax + by + cz = d$ است، ضرایب a و b و c مؤلفه‌های بردار عمود بر صفحه هستند. پس بردار واحد (یکه) عمود بر چنین صفحه‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\hat{a}_n = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{a\hat{a}_x + b\hat{a}_y + c\hat{a}_z}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}}$$

همچنین اگر $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ مختصات یک نقطه از خط و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ موازی خط باشد ($\vec{N}$ را بردار هادی خط نیز می‌نامند)، معادله خط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} = \frac{z - z_\circ}{c}$$

تذکر ۱: اگر $\vec{N}_۱(a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\vec{N}_۲(a_۲, b_۲, c_۲)$ بردارهای عمود بر دو صفحه باشند، آنگاه بردار هادی خط مربوط به فصل مشترک دو صفحه برابر حاصل‌ضرب خارجی $\vec{N}_۱$ و $\vec{N}_۲$ خواهد بود. $(\vec{V} = \vec{N}_۱ \times \vec{N}_۲)$

نکته ۵: اگر معادله $f(x,y,z) = ۰$ بیانگر یک سطح (رویه) فضایی باشد، بردار واحد عمود بر این رویه در هر نقطه دلخواه مانند $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بر روی رویه از رابطه زیر به دست می‌آید:

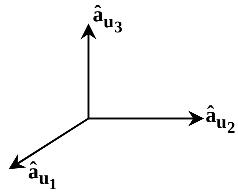
$$\hat{a}_n = \left. \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial f}{\partial y})^۲ + (\frac{\partial f}{\partial z})^۲}} \right|_{\substack{x = x_\circ \\ y = y_\circ \\ z = z_\circ}}$$

درسنامه (۲): دستگاه‌های مختصات متعامد

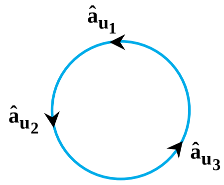
در فضای سه بعدی یک نقطه می‌تواند از محل تقاطع سه سطح حاصل شود. فرض کنید این سطوح با معادلات $u_1=$ ثابت و $u_2=$ ثابت و $u_3=$ ثابت تعریف شوند که در آن u_iها لزوماً دارای بعد طول نیستند.

اگر سه سطح دو به دو بر هم عمود باشند، یک دستگاه مختصات متعامد داریم. در دستگاه دکارتی، u_1 و u_2 و u_3 به ترتیب متناظر با x و y و z هستند.

اگر بردار عمود بر سطح ثابت $=u_i$ را با $\hat{a}_{u_i}$ نشان دهیم، روابط زیر برقرار خواهند بود:



$$\begin{cases}\hat{a}_{u_1}.\hat{a}_{u_2}=\hat{a}_{u_2}.\hat{a}_{u_3}=\hat{a}_{u_3}.\hat{a}_{u_1}=0\\ \hat{a}_{u_1}.\hat{a}_{u_1}=\hat{a}_{u_2}.\hat{a}_{u_2}=\hat{a}_{u_3}.\hat{a}_{u_3}=1\end{cases}$$



$$\begin{cases}\hat{a}_{u_1}\times\hat{a}_{u_2}=\hat{a}_{u_3}\\ \hat{a}_{u_2}\times\hat{a}_{u_3}=\hat{a}_{u_1}\\ \hat{a}_{u_3}\times\hat{a}_{u_1}=\hat{a}_{u_2}\end{cases}$$

هر بردار $\vec{A}$ می‌تواند به صورت مجموع مؤلفه‌های خود در سه جهت متعامد به صورت مقابل نوشته شود: $\vec{A}=A_{u_1}\hat{a}_{u_1}+A_{u_2}\hat{a}_{u_2}+A_{u_3}\hat{a}_{u_3}$

و این هم اندازه بردار $\vec{A}$:

$$|\vec{A}|=\sqrt{(A_{u_1})^2+(A_{u_2})^2+(A_{u_3})^2}$$

عنصر دیفرانسیلی طول

تغییر دیفرانسیلی طولی متناظر با تغییر دیفرانسیلی du_i را با dl_i نشان می‌دهیم. بعضی از مؤلفه‌های مختصاتی ممکن است از جنس طول نباشند و ضرایبی با ابعاد مناسب لازم است تا تغییر دیفرانسیلی du_i را به تغییر طول dl_i تبدیل کند.

اگر ضریب طولی متناسب با تغییر دیفرانسیلی du_i را با h_i نشان دهیم، خواهیم داشت: $dl_i=h_i du_i$

ضریب طولی h_i، خودش می‌تواند تابعی از u_1، u_2 و u_3 باشد. یک تغییر جهت‌دار دیفرانسیلی طول در یک جهت دلخواه می‌تواند به صورت جمع برداری تغییرات طول مؤلفه‌ها نوشته شود: $\vec{dl}=dl_1\hat{a}_{u_1}+dl_2\hat{a}_{u_2}+dl_3\hat{a}_{u_3}=(h_1du_1)\hat{a}_{u_1}+(h_2du_2)\hat{a}_{u_2}+(h_3du_3)\hat{a}_{u_3}$

عنصر دیفرانسیلی سطح

فرض کنید می‌خواهیم عنصر دیفرانسیلی سطحی را بنویسیم که بردار واحد عمود بر آن سطح $\hat{a}_{u_1}$ باشد. بدیهی است که در چنین سطحی مقدار u_1 ثابت بوده و u_2 و u_3 تغییر می‌کنند. با توجه به اینکه ضرایب طولی متناظر با du_2 و du_3 برابر h_2 و h_3 می‌باشند، می‌توان چنین نوشت:

$$ds_{u_1}=h_2h_3du_2du_3$$

به همین ترتیب برای سایر سطح‌ها نیز روابط مقابل را داریم: $ds_{u_3}=h_1h_2du_1du_2$, $ds_{u_2}=h_1h_3du_1du_3$

عنصر دیفرانسیلی حجم

حجم دیفرانسیلی dv که به وسیله تغییرات دیفرانسیلی du_1 و du_2 و du_3 به ترتیب در جهت‌های $\hat{a}_{u_1}$ و $\hat{a}_{u_2}$ و $\hat{a}_{u_3}$ تشکیل می‌شود، توسط رابطه زیر بیان می‌شود: $dv=h_1h_2h_3du_1du_2du_3$

به طور کلی سه دستگاه مختصات متعامد بسیار مهم در دنیای فیزیک تعریف می‌شود. این سه دستگاه عبارتند از:

۱ـ دستگاه مختصات کارتزین (قائم یا دکارتی) ۲ـ دستگاه مختصات استوانه‌ای ۳ـ دستگاه مختصات کروی

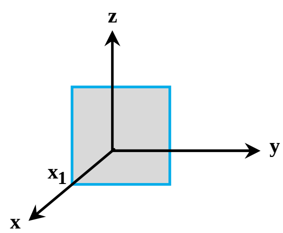
در ادامه به بررسی این سه دستگاه می‌پردازیم.

دستگاه مختصات کارتزین

در دستگاه کارتزین، نقطه $P(x_1,y_1,z_1)$ محل تقاطع سه صفحه با مشخصه $x=x_1$ و $y=y_1$ و $z=z_1$ است.

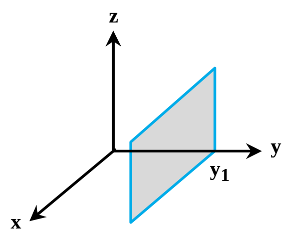
۱ـ صفحه $u_1=x=x_1$

صفحه‌ای است عمود بر محور x و موازی صفحه yz.



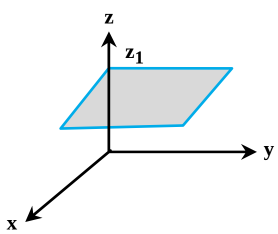
۲ـ صفحه $u_2=y=y_1$

صفحه‌ای است عمود بر محور y و موازی صفحه xz.



۳ـ صفحه $u_3=z=z_1$

صفحه‌ای است عمود بر محور z و موازی صفحه xy.



مدرسان شریف

فصل ششم

«معادله پواسون و لاپلاس»

مقدمه

در این فصل به بررسی معادلات پواسون و لاپلاس در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی می‌پردازیم. هدف از این معادلات به دست آوردن توزیع پتانسیل در نقاط مختلف است. به این منظور، علاوه بر استفاده از معادلات پواسون یا لاپلاس لازم است شرایط مرزی پتانسیل را نیز بدانیم. این معادلات فقط در محیط‌های همگن صادق هستند.

درسنامه (۱): معرفی معادلات پواسون و لاپلاس

شکل دیفرانسیلی (نقطه‌ای) قانون گاوس به صورت مقابل می‌باشد: $(\vec{\nabla}.\vec{D})=\rho$

با استفاده از رابطه $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ می‌توان چنین نوشت: $\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\rho$

اگر محیط اطراف توزیع بار الکتریکی همگن باشد (ε تابع مکان نباشد) خواهیم داشت: $\varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E}=\rho$

با توجه به رابطه $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$، می‌توانیم رابطه بالا را به این شکل بنویسیم:

$$\varepsilon[-\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}V)]=\rho \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

معادله بالا به معادله پواسون موسوم است. در صورتی که فضای مورد نظر بدون بار الکتریکی باشد، معادله پواسون را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\nabla^2 V=0}$$

این معادله به معادله لاپلاس معروف است. معادلات لاپلاس و پواسون، معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی هستند که توأم با شرایط مرزی مشخص شده باید حل شوند. شرایط مرزی موردنیاز برای حل این معادله از روی شرایط مرزی حاکم بر میدان‌های الکتریکی نتیجه می‌شوند و به‌صورت مقادیر معینی برای خود پتانسیل یا مشتق عمودی آن روی مرزهای مسأله یا مشخص بودن پتانسیل در بی‌نهایت بیان می‌شوند. مثلاً اگر توزیع بار محدودی داشته باشیم، پتانسیل نمی‌تواند در بی‌نهایت مقدار داشته باشد؛ پس شرط صفر بودن پتانسیل در بی‌نهایت را داریم.

توجه داشته باشید که پاسخ معادله لاپلاس منحصر بفرد است. یعنی اگر پاسخی به دست آوردید که در معادله لاپلاس یا پواسون صدق می‌کرد و شرایط مرزی را هم برآورده می‌ساخت، آن پاسخ، تنها پاسخ ممکن مسأله خواهد بود.

همان‌طور که در مقدمه نیز گفتیم، معادلات لاپلاس و پواسون تنها در محیط **همگن** صادق هستند و حتماً حواستان به این مورد باشد. اگر صحبتی از همگن یا ناهمگنی محیط نشده بود، خودمان آن را همگن در نظر می‌گیریم.

اگر محیط **ناهمگن** بود به طریق زیر عمل می‌کنیم:

۱) معادله $\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho_V$ را نوشته و بردار $\vec{D}$ را به دست می‌آوریم.

۲) به کمک $\vec{D}$ و رابطه $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ میدان الکتریکی $\vec{E}$ را محاسبه می‌کنیم.

۳) از رابطه بین میدان الکتریکی $\vec{E}$ و پتانسیل الکتریکی استفاده کرده و با در نظر گرفتن شرایط مرزی، پتانسیل را در نقاط مختلف فضا به‌دست می‌آوریم.

$$(V(x)-V(a)=-\int_a^x \vec{E}.d\vec{l})$$

تذکر۱: همیشه قبل از شروع به حل، شرایط مرزی را در گزینه‌ها چک کنید.

در بخش‌های بعدی قرار است معادلات لاپلاس و پواسون را در دستگاه‌های مختصات مختلف که معمولاً به صورت یک بعدی و دو بعدی مطرح می‌شوند، بررسی کنیم.

مثال۱: بین صفحات مسطح خازنی که در $z=0$, $z=d$ قرار دارند، ماده‌ای عایق بـا $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})$ قـرار دارد. اگـر چگـالی بـار سـطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s(\frac{C}{m^2})$ باشد، اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_s d}{2\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{\pi\rho_s d}{4\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}d^2\ln(2)$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: چون نسبت به x و y تقارن داریم، میدان‌ها فقط مؤلفه‌ی z دارند. از طرفی باید در همه جا شرط $\vec{\nabla}.\vec{D}=0$ برقرار باشد $(0<z<d)$، بنابراین باید $\vec{D}$ یک بردار ثابت باشد.

$$\vec{D}=D_0\hat{a}_z \xrightarrow{\text{شرط مرزی در } z=0 \text{ و } z=d} \begin{cases} D_0-0=\rho_s & : z=0 \\ 0-D_0=-\rho_s & : z=d \end{cases} \Rightarrow D_0=\rho_s \Rightarrow \vec{D}=\rho_s\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})} \Rightarrow \Delta V=V(0)-V(d)=\int_{z=0}^{z=d}\vec{E}.\hat{a}_z\hat{d}z=\int_0^d\frac{\rho_s dz}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})}=\frac{\rho_s d}{\varepsilon_0}\tan^{-1}(\frac{z}{d})\Big|_0^d=\frac{\rho_s d\pi}{4\varepsilon_0}$$

روش دوم: ابتدا ظرفیت بر واحد سطح را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه $V=\frac{\rho_s}{C_s}$، اختلاف پتانسیل را به‌دست می‌آوریم.

برای محاسبه‌ی C_s از المان‌های سری با ارتفاع dz بهره می‌بریم:

$$\frac{1}{C}=\int d(\frac{1}{C})=\int_0^d\frac{dz}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})(1)}=\frac{d\pi}{4\varepsilon_0} \Rightarrow V=\frac{\rho_s d\pi}{4\varepsilon_0}$$

مثال۲: یک خازن استوانه‌ای طویل دارای عایقی ناهمگن با گذردهی نسبی متغیر (نسبت به شعاع r)، $\varepsilon_r=\frac{a}{b+r}$ می‌باشد (b,a اعداد ثابت اند). اختلاف پتانسیل بین صفحات V_0 فرض می‌شود. تغییرات پتانسیل بین صفحات به کدامیک از شکل‌های زیر است؟ (A , B , C ثابت‌های غیرصفرند).

۱) $A+B\ln r$ ۲) $A+Br+C\ln r$ ۳) $A+Br+C\ln(r+b)$ ۴) $A+B\ln r+C\ln(r+b)$

پاسخ: گزینه «۲» خود سوال داد می‌زند که من ناهمگنم. یعنی نمی‌توان از معادلات لاپلاس و پواسون استفاده کرد. پس چه باید کرد؟ درسته از الگوریتم خودمان استفاده می‌کنیم.

۱) پیدا کردن $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0 \to \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,D_r)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rD_r)=0 \Rightarrow rD_r=k_1 \Rightarrow D_r=\frac{k_1}{r} \Rightarrow \vec{D}=\frac{k_1}{r}\hat{a}_r$$

۲) پیدا کردن $\vec{E}$:

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\frac{k_1}{r}}{\varepsilon_0\frac{a}{b+r}}\hat{a}_r=\frac{k_1(b+r)}{\varepsilon_0\,ar}\hat{a}_r$$

۳) پیدا کردن V: ولی به خاطر اینکه در اینجا شرایط مرزی داده نشده از فرمول $\frac{V(x)-V(a)}{V(b)-V(a)}$ استفاده نمی‌کنیم و مستقیماً خود تابع V را به دست می‌آوریم.

$$V=-\int_r^{r_0}\vec{E}\,.\,d\vec{l}=-\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a}\int_r^{r_0}(\frac{b}{R}+1)dR=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}\left[b\ln R+R\right]_r^{r_0} \Rightarrow V=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}\left[b\ln r_0+r_0-b\ln r-r\right]=A+Br+C\ln r$$

که به ترتیب ثابت‌های A، B و C عبارتند از:

$$A=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}(b\ln r_0+r_0) \qquad B=\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a} \qquad C=\frac{bk_1}{\varepsilon_0\,a}$$

دقت کنید که در این مسئله r_0 ثابت و یک عدد است، در حالی‌که r یک متغیر است.

مثال۳: ناحیه $۳ < \rho < ۵$ متر بین دو هادی استوانه‌ای شامل عایق غیرهمگن با $\varepsilon_r = \frac{۱}{\rho^۲}$ می‌باشد. a) آیا معادله لاپلاس در ناحیه بین دو استوانه صادق است؟ b) اگر پتانسیل هادی داخلی ۱۰۰ ولت و پتانسیل هادی خارجی ۲۰ ولت باشد معادله پتانسیل را به‌دست آورید.

۱) معادله لاپلاس صادق است $V = ۱۴۵ - ۵\rho^۲$

۲) معادله لاپلاس صادق نیست $V = ۲۷۲ - ۱۵۶/۶\ln\rho$

۳) معادله لاپلاس صادق نیست $V = ۱۴۵ - ۵\rho^۲$

۴) معادله لاپلاس صادق است $V = ۲۷۲ - ۱۵۶/۶\ln\rho$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به صورت مسأله می‌دانیم که محیط همگن نیست، پس نمی‌توانیم از معادله لاپلاس استفاده کنیم؛ بلکه باید از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس استفاده کنیم. با توجه به شرایط مرزی می‌توان نتیجه گرفت که $\vec{D}$ فقط مؤلفه شعاعی دارد. بنابراین شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت زیر می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) = ۰ \Rightarrow \rho D_\rho = k \Rightarrow D_\rho = \frac{k}{\rho} \Rightarrow \vec{D} = \frac{k}{\rho}\hat{a}_\rho$$

(با توجه به تقارن، میدان فقط در راستای ρ می‌باشد)

$$\vec{E} = \frac{k\rho}{\varepsilon_0}\hat{a}_\rho \rightarrow \frac{V(\rho) - V(۳)}{V(۵) - V(۳)} = \frac{-\int_۳^\rho \frac{k\rho}{\varepsilon_0}d\rho}{-\int_۳^۵ \frac{k\rho}{\varepsilon_0}d\rho} = \frac{\frac{۱}{۲}\rho^۲ - ۴/۵}{۱۲/۵ - ۴/۵} \Rightarrow V(\rho) = -۵\rho^۲ + ۱۴۵$$

به نظر شما اگر پتانسیل در راستای دو مؤلفه تغییر کند، تابع آن به چه صورت خواهد بود؟

در درس ریاضی مهندسی به بحث پیرامون آنها پرداخته شده است. در اینجا فقط نکات مفید و مهم را به شما می‌گوییم.

فرض کنید تابع پتانسیل شامل دو متغیر y, x باشد. از حل معادله لاپلاس به یک تابع بر حسب توابع مثلثاتی و یا نمائی و یا هیپربولیکی می‌رسیم.

$$\frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲} = ۰$$

مثال۴: بار الکتریکی $\rho = \rho_0 \frac{x}{(1+x^۲)^۲}$ در فضا توزیع شده است. پتانسیل ناشی از این توزیع بار در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0}tg^{-۱}x$

۲) $\frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0}\ln x$

۳) $\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{۱}{۱+x^۲}$

۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه «۱» چون بار تابع x دارد، پس پتانسیل هم فقط تابعیت x را دارد و از معادله پواسون داریم:

$$\frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{x}{(۱+x^۲)^۲} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int\frac{x dx}{(۱+x^۲)^۲} + A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0(۱+x^۲)} + A \Rightarrow V = \frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0}tg^{-۱}x + Ax + B$$

به دلیل تقارن موجود در توزیع بار: در $x = ۰$ باید $V = ۰ \Leftarrow \boxed{B = ۰}$

از طرفی میدان در بی‌نهایت صفر است. بنابراین:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -[\frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0(۱+x^۲)} + A)\hat{x} \Rightarrow \vec{E}(\infty) = ۰ \Rightarrow \boxed{A = ۰} \Rightarrow V = \frac{\rho_0}{۲\varepsilon_0}tg^{-۱}x$$

مثال۵: در فضای خالی تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه داخل کره‌ای به شعاع ۳ متر به صورت $V(x,y,z) = ۶x^۲ - ۵y + ۴z^۲$ داده شده است. کل بار موجود در داخل این کره کدام است؟ $(\varepsilon_0 = \frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}\frac{F}{m})$

۱) $-۸۰nc$

۲) $-۲۰nc$

۳) $-۱۰nc$

۴) $-۴۰nc$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\nabla^۲ V = \frac{-\rho_V}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial z^۲} = \frac{-\rho_V}{\varepsilon_0} \Rightarrow ۱۲ + ۸ = \frac{-\rho_V}{\varepsilon_0} \Rightarrow ۲۰ = \frac{-\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_V = -۲۰\varepsilon_0 \Rightarrow Q = \rho_V V = \rho_V(\frac{۴}{۳}\pi a^۳) = -۲۰\times\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}\times\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = -۲۰nc$$

حیف تست به این راحتی نیست که در کنکور زده نشود؟!!

مثال ۶: در ناحیه $-d < z < d$ باری با چگالی $\rho = \rho_\circ \sin\frac{\pi z}{d}$ قرار دارد، پتانسیل در ناحیه $|z|< d$ کدام است؟ (پتانسیل در $z = \circ$ برابر صفر است).

۱) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \cos\frac{\pi z}{d}$　۲) $-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \cos\frac{\pi z}{d}$　۳) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d}$　۴) $-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d}$

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که چون بار فقط تابعیت z را دارد، پس پتانسیل فقط تابع z است. در ناحیه $|z|> d$ که باری وجود ندارد، معادله لاپلاس برقرار است و در ناحیه $|z|< d$ معادله پواسون برقرار است.

$$|z|> d \Rightarrow \frac{\partial^۲ V}{\partial z^۲} = \circ \Rightarrow V = Az + B$$

$$|z|< d \Rightarrow \frac{\partial^۲ V}{\partial z^۲} = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\sin\frac{\pi z}{d} \Rightarrow V(z) = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d} + A_۳ z + A_۴$$

پس معادله پتانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V(z) = \begin{cases} z > d & A_۱ z + B_۱ \\ |z|< d & \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d} + A_۳ z + A_۴ \\ z < -d & A_۲ z + B_۲ \end{cases}$$

حال با اعمال شرایط مرزی مجهولات را به‌دست خواهیم آورد. ۶ مجهول داریم. اولاً پتانسیل در $|z|\to \infty$ باید متناهی باشد، پس $\boxed{A_۱ = A_۲ = \circ}$.

پتانسیل الکتریکی در فصل مشترک $|z|= d$، پیوسته است، یعنی:

$$z = d \ : \ B_۱ = A_۳ d + A_۴ \quad (۱) \qquad , \qquad z = -d : \ B_۲ = -A_۳ d + A_۴ \quad (۲)$$

در فصل مشترک $|z|= d$ بار سطحی وجود ندارد، پس چگالی شار الکتریکی در $|z|= d$ پیوسته است:

$$D_{۱z} = D_{۲z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=d^-} = \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=d^+} \Rightarrow \circ = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi}) + A_۳ \Rightarrow \boxed{A_۳ = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})}$$

$$V(z) = \begin{cases} z > d & B_۱ \\ |z|< d & \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d} + \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi}) z + A_۴ \\ z < -d & B_۲ \end{cases}$$

از طرفی تقارن فرد داریم، پس در $z = \circ$ باید $V(\circ) = \circ$، بنابراین: $A_۴ = \circ$

حال طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$B_۱ = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{d^۲}{\pi} \qquad , \qquad B_۲ = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{d^۲}{\pi}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$|z|< d \Rightarrow V(z) = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^۲ \sin\frac{\pi z}{d} + \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi}) z$$

مثال ۷: ناحیه $d < x < ۲d$ از عایقی با ضریب گذردهی غیر یکنواخت به صورت $\varepsilon(x) = ۴\varepsilon_\circ \frac{x}{d}$ پر شده است. اگر پتانسیل الکتریکی در صفحه $x = d$ و $x = ۲d$ به ترتیب صفر و $V_\circ$ باشد، آن‌گاه تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه $d < x < ۲d$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۱)

۱) $V_\circ(\frac{x}{d} - ۱)$　۲) $V_\circ \frac{۱}{\ln ۲} \ln\frac{x}{d}$　۳) $\frac{V_\circ}{\ln(\frac{۷}{۳})} \ln(\frac{۴}{۳}\frac{x}{d} - \frac{۱}{۳})$　۴) $\frac{V_\circ}{۳}((\frac{x}{d})^۲ - ۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون ضریب گذردهی غیریکنواخت می‌باشد، نمی‌توانیم از معادله لاپلاس استفاده کنیم، بنابراین از رابطه $V=-\int Edx$ استفاده می‌کنیم:

$$V=\int\frac{k_1dx}{\varepsilon}=\int\frac{k_1dx}{\frac{4\varepsilon_0 x}{d}}=\frac{k_1d}{4\varepsilon_0}Lnx+k_2$$

با استفاده از شرایط مرزی ضرایب k_1 و k_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{matrix}x=d\Rightarrow V=0\\ x=2d\Rightarrow V=V_0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\dfrac{4\varepsilon_0V_0}{dLn2}\\ k_2=-\dfrac{V_0}{Ln2}Lnd\end{cases}$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در V داریم:

$$V=\frac{V_0}{Ln2}Ln\frac{x}{d}$$

مثال۸: خازن مسطحی دارای پتانسیل $V=0$ در $x=0$ و $V=20$ در $x=1$ می‌باشد. بین دو صفحه خازن، دی‌الکتریک غیرهمگن با ضریب دی‌الکتریکی نسبی $\varepsilon_r=1+x^2$ پر شده است. توزیع پتانسیل را بین دو صفحه خازن به دست آورید. (مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $V=\frac{20}{\pi}\tan^{-1}x+\frac{30}{\pi}\sin^{-1}x$

۲) $V=\frac{40}{\pi}\tan^{-1}x+\frac{20}{\pi}\sin^{-1}x$

۳) $V=\frac{80}{\pi}\tan^{-1}x$

۴) $V=\frac{40}{\pi}\tan^{-1}x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون که محیط ناهمگن است، نمی‌توان از معادلات لاپلاس و پواسون استفاده کرد. چون باری در محیط وجود ندارد، خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0\Rightarrow\frac{\partial\vec{D}}{\partial x}=0\Rightarrow\vec{D}=C\hat{a}_x\quad,\quad\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{C}{\varepsilon_0(1+x^2)}\hat{a}_x$$

برای به دست آوردن پتانسیل به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{V(x)-V(0)}{V(1)-V(0)}=\frac{-\int_0^x\vec{E}.d\vec{l}}{-\int_0^1\vec{E}.d\vec{l}}=\frac{\int_0^x\frac{C}{\varepsilon_0(1+x^2)}dx}{\int_0^x\frac{C}{\varepsilon_0(1+x^2)}dx}=\frac{\left.\tan^{-1}x\right]_0^x}{\left.\tan^{-1}x\right]_0^1}=\frac{-4\tan^{-1}x}{\pi}$$

$$\frac{V(x)-0}{20-0}=\frac{4\tan^{-1}x}{\pi}\Rightarrow V(x)=\frac{80}{\pi}\tan^{-1}x$$

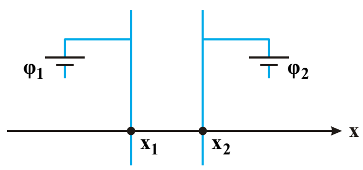
مثال۹: دو صفحه‌ی تخت باردار موازی با ابعاد بی‌نهایت در نقاط x_1 و x_2 قرار دارند، که به ترتیب دارای پتانسیل‌های φ_1 و φ_2 هستند. فضای بین دو صفحه با توزیع یکنواخت بار، با چگالی حجمی ρ، پر شده است. میدان الکتریکی E_1 در نقطه‌ی x_1 با کدام‌یک از عبارت‌های زیر داده می‌شود؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1)$

۲) $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(x_2-x_1)$

۳) $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1)$

۴) $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}+\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(x_2-x_1)$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مطابق شکل، با توجه به تقارن مسأله، میدان الکتریکی تنها تابعیت از x دارد.

معادله‌ی دیفرانسیل میدان $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\rightarrow\frac{\partial E(x)}{\partial x_0}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\rightarrow E_{(x)}=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}+C$ که C یک عدد ثابت است و باید پیدا شود. اما طبق تعریف پتانسیل داریم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\Rightarrow\varphi_2-\varphi_1=-\int_{x_1}^{x_2}\vec{E}.dx=-[\int_{x_1}^{x_2}\frac{\rho x}{\varepsilon_0}dx+\int_{x_1}^{x_2}C\,dx]=\frac{-\rho(x_2^2-x_1^2)}{E_0}-C(x_2-x_1)\Rightarrow C=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}+(-\rho\frac{x_1+x_2}{\varepsilon_0})$$

$$E(x=x_1)=\frac{\rho x_1}{\varepsilon_0}+C=\frac{\rho x_1}{\varepsilon_0}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}-\rho\frac{x_1+x_2}{\varepsilon_0}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_2-x_1}-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1)$$

مثال۱۰: فضای بین صفحه‌های $z=-H$ و $z=H$ با بار حجمی با چگالی $\rho(z)=\rho_0(1-\frac{z^2}{H^2})$ پر شده است. اگر $V(z)$ پتانسیل الکتریکی این توزیع بار، در نقطه‌ای از فضا به فاصله‌ی z از صفحه‌ی $x-y$ باشد، $V(0)-V(H)$ کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\rho_0 H^2}{3\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{3\rho_0 H^2}{8\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{5\rho_0 H^2}{8\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{5\rho_0 H^2}{12\varepsilon_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجا که چگالی بار تنها تابعی از z است، پس در این صورت، پتانسیل هم تنها تابع z خواهد بود.

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(1-\frac{Z^2}{H^2})\Rightarrow V(z)=\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}\frac{Z^4}{H^2}-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2+az+b$$

که a و b اعداد ثابت‌اند. پتانسیل یک کمیت پیوسته است، پس انتظار داریم که مقدار آن در نقاط مرزی یکی شود. در بیرون از صفحات که چگالی بار نداریم، پس می‌شود مقادیر a و b را از شرایط مرزی پیدا کرد، اما این موضوع را می‌توان ساده‌تر حل کرد. از تقارن فضا که بین $z=H$ و $z=-H$ وجود دارد و این چگالی بار نسبت $z=0$ متقارن است، پس انتظار داریم پتانسیل هم شبیه چگالی بار، تابعی زوج باشد. پس جمله‌ی درجه‌ی فرد، پتانسیل یعنی $a=0$ است. اما مقدار b مهم نیست، چرا که اختلاف پتانسیل در نقاط ۰ و H خواسته شده است.

$$V_{(0)}-V_{(H)}=\left[\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}(0)-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(0)+b\right]-\left[\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}\frac{H^4}{H^2}-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}H^2+b\right]=\frac{-\rho_0}{12\varepsilon_0}H^2+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}H^2=\frac{5\rho_0 H^2}{12\varepsilon_0}$$

مثال۱۱: در فضایی که سطوح رسانا وجود ندارد، معادله‌ی پواسون عبارت است از $\nabla^2\phi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})+\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-d\hat{i})$، کدام گزینه جواب معادله‌ی پواسون در مختصات کروی است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)

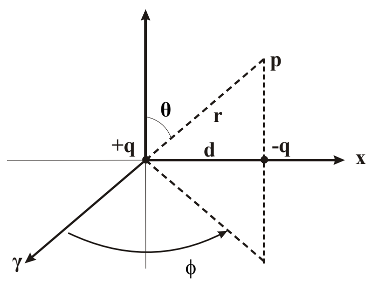
۱) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r}-\frac{d}{r}\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\sin\theta\cos\varphi}}]$

۲) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r}+\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\sin\theta\cos\varphi}}]$

۳) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\sin\theta\cos\varphi}}]$

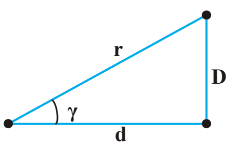
۴) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r}+\frac{d}{r\sqrt{r^2+d^2-2rd\sin\theta\cos\varphi}}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چگالی بار به‌صورت $+q\delta(\vec{r})-q\delta(\vec{r}-d\vec{i})$ است؛ یعنی دوبار نقطه‌ای به اندازه‌ی $+q$ و $-q$ در نقاط مبدأ و d روی محور xها داریم. پس کافی است پتانسیل این بارهای ذره‌ای را در مختصات کروی در نقطه‌ی (r,θ,φ) پیدا کنیم.



$$\Phi(x=p)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\gamma}}$$

در بالا فاصله‌ی نقطه‌ی p از بار $-q$ به وسیله قضیه کسینوس‌ها نوشته شده است که:



$$D^2=d^2+r^2-2rd\cos\gamma$$

از طرفی داریم:

$$\cos\gamma=\cos\varphi\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta\cos\varphi$$

پس می‌توان نوشت:

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\sin\theta\cos\varphi}}\right]$$

درسنامه (۲): حل معادله لاپلاس

معادله لاپلاس در دستگاه‌های مختصات مختلف به صورت زیر می‌باشد:

(دستگاه دکارتی)
$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(دستگاه استوانه‌ای)
$$\nabla^2 V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(دستگاه کروی)
$$\nabla^2 V=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial V}{\partial R})+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta})+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

مثال ۱۲: اگر V تابع پتانسیل الکتریکی و c عدد ثابتی باشد کدامیک از توابع زیر معادله لاپلاس را ارضاء می‌کند؟

۱) در مختصات کروی $V=cR\varphi\theta$

۲) در مختصات استوانه‌ای $V=c\rho\varphi z$

۳) در مختصات دکارتی $V=cxyz$

۴) در مختصات کروی $V=cR^2\sin\theta\cos\varphi$

پاسخ: گزینه «۳» در مختصات دکارتی داریم:

$$V=cxyz\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial x}=cyz\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0\\ \frac{\partial V}{\partial y}=cxz\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\\ \frac{\partial V}{\partial z}=cxy\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\end{cases}$$

مثال ۱۳: اگر $\phi_1(x,y,z)$ و $\phi_2(x,y,z)$ دو پاسخ مستقل معادله لاپلاس باشند، کدام عبارت نادرست است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}$ نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

۲) $\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}$ نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

۳) حاصل ضرب این دو تابع نیز همواره در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

۴) هر ترکیب خطی این دو تابع نیز همواره پاسخ معادله لاپلاس است.

پاسخ: گزینه «۳» گزینه‌ها را چک می‌کنیم. گزاره گزینه ۲ درست است. چون طبق معادله‌ی لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}=0\rightarrow\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}\quad(*)$$

اما از $\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}$ لاپلاس می‌گیریم تا صفر بودنش را تحقیق کنیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2})=$$

با جابجایی ترتیب مشتق‌ها در دو جمله‌ی اول داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_2)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2)=$$

از دو جمله اول فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_2)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2)=$$

با جایگذاری $(*)$ به جای عبارت داخل پرانتز اولی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}(0)=0$$

پس لاپلاس (∇^2)، $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2$ صفر است.

گزاره گزینه ۳ نادرست است، به عبارتی جواب سؤال گزینه ۳ است.

$$\nabla^2(\phi_1\phi_2)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi_1.\phi_2=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_1)\phi_2+(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_2)\phi_1+\cdots+(\frac{\partial}{\partial x}\phi_1)(\frac{\partial}{\partial x}\phi_2)+\cdots$$

$$=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_1+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_1)\phi_2+(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_2)\phi_1+\text{جملات اضافی}=(\nabla^2\phi_1)\phi_2+(\nabla^2\phi_2)\phi_1+\text{جملات اضافی غیرصفر}$$

$$=0+0+2\nabla\phi_1.\nabla\phi_2$$

گزاره گزینه ۴ درست است.

$$\nabla^2(a\phi_1+b\phi_2)=\nabla^2(a\phi_1)+\nabla^2(b\phi_2)=a\nabla^2\phi_1+b\nabla^2\phi_2=0+0=0$$

گزاره گزینه ۱ درست است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial\phi_1}{\partial x})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial\phi_1}{\partial x})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial\phi_1}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_1+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_1)=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0$$

در بالا مشتق‌ها را جابجا کردیم.

روش کلی حل معادله لاپلاس در درس ریاضیات مهندسی مطرح می‌شود. در این قسمت به برخی حالت‌های خاص اشاره می‌کنیم.

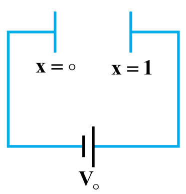
حل معادله لاپلاس در حالتی که پتانسیل فقط تابعی از یک متغیر باشد:

الف) در دستگاه دکارتی در صورتی که پتانسیل فقط تابع x (یا y و یا z) باشد:

$$\nabla^2V=0\Rightarrow\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=0\Rightarrow\boxed{V=Ax+B}$$

A و B از روی شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

مثال ۱۴: طبق شکل مقابل، یک خازن تخت به پتانسیل V_0 وصل شده است. مقدار $\frac{V(x=\frac{2}{3})}{V(x=\frac{1}{3})}$ چقدر است؟



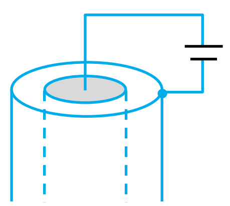
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» این مسأله یک بعدی است و پتانسیل بین صفحات خازن تخت فقط تابع x است:

$$V=Ax+B\qquad\begin{cases}V(x=0)=0\\V(x=1)=V_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0)+B=0\\A(1)+B=V_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=V_0\\B=0\end{cases}\Rightarrow V=V_0x\Rightarrow\frac{V(x=\frac{2}{3})}{V(x=\frac{1}{3})}=2$$

ب) در دستگاه استوانه‌ای در حالتی که پتانسیل فقط تابعی از یک متغیر باشد:

۱) در صورتی که پتانسیل فقط تابع r باشد:

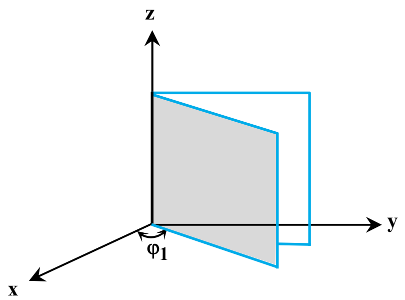


$$\nabla^2V=0\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r})=0\Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r}=k$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{k}{r}\Rightarrow\boxed{V=k_1\ln r+k_2}$$

$$E=-\vec{\nabla}V=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r=\frac{-k_1}{r}\hat{a}_r$$

۲) در صورتی که پتانسیل فقط تابع φ (به صورت کتابی) باشد:



$$\nabla^2V=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0\Rightarrow\boxed{V=k_1\varphi+k_2}$$

k_1 و k_2 با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi)=\frac{-k_1}{r}\hat{a}_\varphi$$

مثال ۱۵: دو صفحه شعاعی هادی کامل در $\varphi=\varphi_1$ و $\varphi=\varphi_2$ دارای پتانسیل‌های V_1 و V_2 هستند. بین این دو صفحه توسط یک دی‌الکتریک با ثابت ε_r پر شده است. بردار قطبی شدگی به کدام صورت است؟

۱) $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\varphi}$

۲) $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\dfrac{1}{r}\hat{\varphi}$

۳) $\vec{P}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\varphi}$

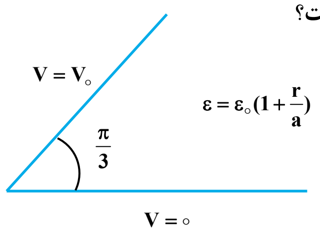
۴) $\vec{P}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\dfrac{1}{r}\hat{\varphi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» پاسخ معادله لاپلاس در حالتی که پتانسیل فقط تابعی از φ باشد، به صورت زیر است:

$$V=k_1\varphi+k_2\begin{cases}V(\varphi_1)=V_1\\V(\varphi_2)=V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1\varphi_1+k_2=V_1\\k_1\varphi_2+k_2=V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\\k_2=\dfrac{\varphi_1V_2-\varphi_2V_1}{\varphi_1-\varphi_2}\end{cases}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\frac{k_1}{r}\hat{\varphi}\Rightarrow\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$$

مثال ۱۶: دو نیم‌صفحه هادی در $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{3}$ داریم، در $\varphi=0$ پتانسیل صفر و در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ پتانسیل V_0 است. ناحیه بین این دو صفحه با عایقی با گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\frac{r}{a})$ پر شده است. انرژی ذخیره شده برای $a<r<2a$ و واحد طول عایق چقدر است؟



۱) $\dfrac{9}{4}\dfrac{V_0^2}{\pi}\varepsilon_0(1+\text{Ln}4)$

۲) $\dfrac{3}{2}V_0^2(1+\text{Ln}4)\varepsilon_0$

۳) $\dfrac{3}{2}\dfrac{V_0^2}{\pi}\varepsilon_0(1+\text{Ln}2)$

۴) $\dfrac{9}{4}V_0^2(1+\text{Ln}2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پتانسیل فقط تابعیت φ دارد، پس می‌توان نوشت:

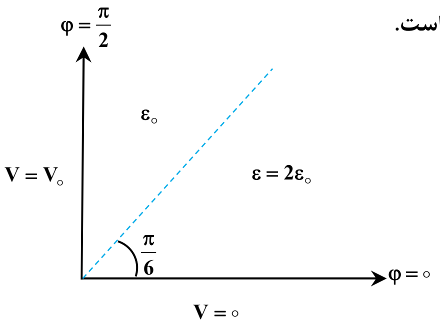
$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}V=A\varphi+B\\V(0)=0\ \Rightarrow B=0\end{array}$$

$$V(\frac{\pi}{3})=V_0\ \Rightarrow A\frac{\pi}{3}=V_0\ \Rightarrow A=\frac{3V_0}{\pi}\ \Rightarrow V=\frac{3V_0}{\pi}\varphi\quad,\quad\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{3V_0}{\pi}\hat{\varphi}$$

$$W_e=\iiint\frac{1}{2}\varepsilon|E|^2dv=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{z=0}^{1}\int_{r=a}^{2a}\frac{1}{2}\varepsilon_0(1+\frac{r}{a}).\frac{1}{r^2}\frac{9V_0^2}{\pi^2}rdrd\varphi dz$$

$$=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{z=0}^{1}\int_{r=a}^{2a}\frac{9V_0^2}{2\pi^2}\varepsilon_0(\frac{1}{r}+\frac{1}{a})drd\varphi dz=\frac{\pi}{3}.\frac{9V_0^2}{2\pi^2}\varepsilon_0\int_{r=a}^{2a}(\frac{1}{r}+\frac{1}{a})dr=\frac{9V_0^2}{6\pi}\varepsilon_0(\text{Ln}r|_a^{2a}+\frac{1}{a}(a))\ \Rightarrow W_e=\frac{3}{2}\frac{V_0^2}{\pi}\varepsilon_0(\text{Ln}2+1)$$

مثال ۱۷: دو نیم‌صفحه در $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$ در دستگاه استوانه‌ای داریم. ناحیه $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$ با گذردهی $\varepsilon=2\varepsilon_0$ پر کرده‌ایم. پتانسیل V را در $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$ حساب کنید. توجه کنید که پتانسیل در $\varphi=\frac{\pi}{2}$ برابر V_0 و در $\varphi=0$ برابر صفر است.



۱) $\dfrac{12}{5\pi}V_0+\dfrac{\pi}{6}$

۲) $\dfrac{24}{5\pi}V_0+\dfrac{\pi}{6}$

۳) $\dfrac{12}{5\pi}V_0$

۴) $\dfrac{6}{5\pi}V_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در امتداد ρ و z، صفحات نامحدود هستند، پس پتانسیل فقط تابعیت φ دارد.

$$\nabla^2 V=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0 \Rightarrow V=A\varphi+B \Rightarrow V(\varphi)=\begin{cases} A_1\varphi+B_1 & 0<\varphi<\frac{\pi}{6} \\ A_2\varphi+B_2 & \frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

۴ تا مجهول داریم، دو تا شرط مرزی داریم و شرطهای دیگر، پیوستگی پتانسیل و مؤلفه عمودی $\vec{D}$ در $\varphi=\frac{\pi}{6}$ است.

$$V(\varphi=0)=0 \Rightarrow \boxed{B_1=0} \qquad V(\varphi=\frac{\pi}{2})=\boxed{A_2\frac{\pi}{2}+B_2=V_0} \qquad (1)$$

$$V_1(\varphi=\frac{\pi}{6}^-)=V(\varphi=\frac{\pi}{6}^+) \Rightarrow \boxed{A_1\frac{\pi}{6}=A_2\frac{\pi}{6}+B_2} \qquad (2)$$

از طرفی در $\varphi=\frac{\pi}{6}$ بار سطحی نداریم، پس:

$$D_1=D_2 \Rightarrow -\varepsilon\frac{\partial V_1}{r\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}^-}=-\varepsilon_0\frac{\partial V}{r\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}^+} \Rightarrow +\frac{2\varepsilon_0 A_1}{r}=\frac{\varepsilon_0}{r}A_2 \Rightarrow \boxed{2A_1=A_2} \qquad (3)$$

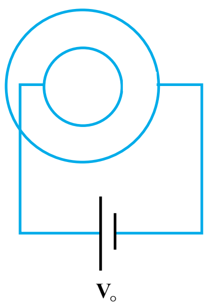
از (۱) و (۲) و (۳):

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}A_2+B_2=V_0\\ \frac{\pi}{12}A_2+B_2=0\end{cases} \Rightarrow B_2=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\pi}{2} & V_0\\ \frac{\pi}{12} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\pi}{2} & 1\\ \frac{\pi}{12} & 1\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{V_0\pi}{12}}{\frac{5\pi}{12}}=-\frac{V_0}{5} \Rightarrow A_2=-\frac{12}{\pi}(-\frac{V_0}{5}) \Rightarrow A_2=\frac{12}{5\pi}V_0 \Rightarrow A_2=2A_1 \Rightarrow A_1=\frac{6}{5\pi}V_0$$

$$V=\frac{6}{5\pi}V_0\varphi \quad , \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{6}$$

ج) در دستگاه کروی در حالتی که پتانسیل فقط تابعی از یک متغیر باشد:

۱) در دستگاه کروی در صورتی که پتانسیل فقط تابع R باشد: (فضای بین دو پوسته کروی)



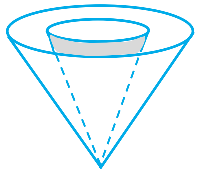
$$\nabla^2 V=0 \Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial V}{\partial R})=0$$

$$\Rightarrow R^2\frac{\partial V}{\partial R}=k_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial R}=\frac{k_1}{R^2} \Rightarrow \boxed{V=\frac{-k_1}{R}+k_2}$$

k_1 و k_2 از روی شرایط مرزی تعیین می‌شوند:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\frac{\partial V}{\partial R}\hat{a}_R=\frac{k_1}{R^2}\hat{a}_R$$

۲) در صورتی که پتانسیل فقط تابع θ باشد (فضای بین دو مخروط).



$$\nabla^2 V=0 \Rightarrow \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})=0 \Rightarrow \sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}=k_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{k_1}{\sin\theta}$$

$$\boxed{V=k_1\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|+k_2}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{a}_\theta)=\frac{-k_1}{R\sin\theta}\hat{a}_\theta$$

درسنامه (۲): مقاومت الکتریکی

شیوه‌ی محاسبه‌ی مقاومت الکتریکی در محیط‌های همگن و غیرهمگن با دو روش متفاوت محاسبه می‌شود. در محیط‌های همگن ابتدا بین دو سر مقاومت الکتریکی یک پتانسیل فرضی V_0 اختیار می‌کنیم، سپس با حل معادله لاپلاس در ناحیه داخل مقاومت، توزیع پتانسیل الکتریکی را محاسبه می‌کنیم. در مرحله بعد از روی پتانسیل، میدان الکتریکی را استخراج می‌کنیم و چگالی جریان الکتریکی را از رابطه $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ محاسبه می‌کنیم. در نهایت مقاومت از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{V_0}{\iint \vec{J}.d\vec{s}}$$

در محیط‌های غیرهمگن، ابتدا فرض می‌کنیم که جریان I از مقاومت عبور می‌کند و سپس از روی رابطه $I_0=\int \vec{J}.d\vec{s}$ چگالی جریان را استخراج می‌کنیم. در ادامه با استفاده از رابطه $\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}$، شدت میدان الکتریکی را در داخل مقاومت محاسبه می‌کنیم. در مرحله بعد اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت را از رابطه $V_0=-\int \vec{E}.d\vec{l}$ محاسبه می‌کنیم. در نهایت مقاومت الکتریکی از رابطه مقابل تعیین می‌شود:

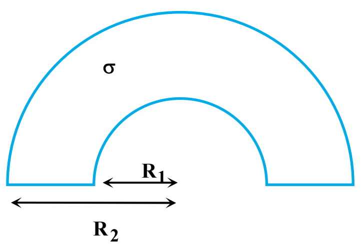
$$R=\frac{V_0}{I_0}$$

نکته ۲: برای ساختارهایی که هندسه آنها با دستگاه‌های مختصات تطبیق دارد از رابطه زیر می‌توان سریع‌تر مقاومت الکتریکی را محاسبه کرد:

$$R=\int \frac{du_1}{\iint \sigma \frac{h_2h_3}{h_1}du_2du_3}$$

در این رابطه فرض بر این است که جهت جریان الکتریکی در راستای u_1 و سطح مقطع $h_2h_3du_2du_3$ بر راستای جریان عمود است.

مثال ۷: مقاومتی به صورت کروی شکل نیمی از یک کره را با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 تشکیل می‌دهد. اگر رسانایی این کره به صورت $\sigma=\sigma_0\frac{R_1}{r^2}$ باشد، مقاومت این دو سطح نیم‌کره‌ای را حساب کنید.



۱) $\frac{1}{4\pi\sigma_0}\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1}$　　۲) $\frac{Ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\sigma_0}$

۳) $\frac{1}{4\pi\sigma_0}\frac{R_2-R_1}{R_1}$　　۴) $\frac{1}{2\pi\sigma_0}\frac{R_2-R_1}{R_1}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه کلی مقاومت داریم:

$$R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta}\Rightarrow R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma_0R_1}{r^2}r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\sigma_0R_1(2\pi)\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}$$

$$\Rightarrow R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{2\pi\sigma_0R_1(2)}=\frac{1}{4\pi R_1\sigma_0}(R_2-R_1)$$

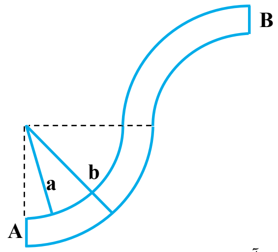
مثال ۸: استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h داریم که رسانایی $\sigma=\sigma_0(\frac{r}{R})(1+\frac{z}{h})$ در آن قرار داده‌ایم. مقاومت بین سطح $z=0$ و $z=h$ کدام است؟

۱) $\frac{3h}{2\pi\sigma_0R^2}$　　۲) $\frac{3hLn2}{4\pi\sigma_0R^2}$　　۳) $\frac{3h}{4\pi\sigma_0R^2}$　　۴) $\frac{3hLn2}{2\pi\sigma_0R^2}$

پاسخ: گزینه «۴» مقاومت بین دو سطح را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$R=\int_0^h\frac{dz}{\int_0^{2\pi}\int_0^R\sigma r dr d\varphi}=\int_0^h\frac{dz}{\int_0^{2\pi}\int_0^R\sigma_0(\frac{r}{R})(1+\frac{z}{h})r dr d\varphi}=\frac{h}{2\pi\sigma_0\frac{R^2}{3}}\int_0^h\frac{dz}{h+z}=\frac{3h}{2\pi\sigma_0R^2}Ln(h+z)\Big|_0^h=\frac{3hLn2}{2\pi\sigma_0R^2}$$

مثال ۹: مطابق شکل دو میله ربع دایروی با شعاع‌های داخلی و خارجی a و b، و ضخامت d به هم متصل شده‌اند. این میله‌ها از ماده‌ای با رسانایی σ تشکیل شده‌اند. مقاومت الکتریکی بین دو نقطه A و B چقدر است؟



۱) $\dfrac{\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$ ۲) $\dfrac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$

۳) $\dfrac{2\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$ ۴) $\dfrac{3\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از فرمول ساختاری، مقاومت الکتریکی یک میله ربع دایروی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\int_a^b\int_0^d\frac{\sigma}{r}dzdr}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$$

اگر از دهنه AB به این ساختار نگاه کنیم، دو میله ربع دایروی با هم سری شده‌اند پس مقاومت کل، برابر مجموع مقاومت آن‌هاست:

$$R_{\text{کل}}=2\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$$

مثال ۱۰: بین دو پوسته‌ی کروی رسانا $(a<r<b)$ از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r)=\frac{\sigma_0}{r^2}$ پر شده است، که در آن r شعاع دستگاه کروی و a، b و σ_0 مقادیر ثابتی هستند، اگر سطح $r=a$ در پتانسیل صفر و سطح $r=b$ در پتانسیل V_0 باشد، چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)

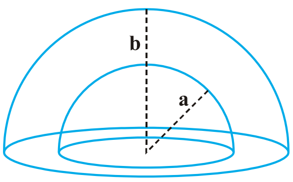
۱) $\vec{J}=\dfrac{-\sigma_0V_0}{r^2(b-a)}\hat{a}_r$ ۲) $\vec{J}=\dfrac{-\sigma_0V_0}{r\ln(\frac{b}{a})}\hat{a}_r$ ۳) $\vec{J}=\dfrac{-\sigma_0V_0}{r^2\ln(\frac{b}{a})}\hat{a}_r$ ۴) $\vec{J}=\dfrac{-\sigma_0V_0}{r(b-a)}\hat{a}_r$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقاومت محیط را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از قانون اهم جریان الکتریکی و سپس چگالی آن را به دست می‌آوریم:

$$R=\int_a^b\frac{dv}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma_0}{r^2}r^2\sin\theta d\theta d\phi}=\int_a^b\frac{dr}{\sigma_0 4\pi}=\frac{1}{4\pi\sigma_0}r\Big]_a^b=\frac{b-a}{4\pi\sigma_0}$$

$$I=\frac{V}{R}=-\frac{V_0 4\pi\sigma_0}{b-a}\Rightarrow j=\frac{-V_0 4n\sigma_0}{4\pi r^2(b-a)}=\frac{-V_0\sigma_0}{r^2(b-a)}\hat{a}_r$$

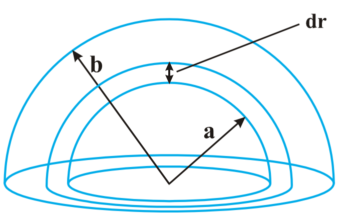
مثال ۱۱: یک قطعه فلزی به شکل پوسته نیم‌کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با ضریب هدایت الکتریکی ویژه g مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر اختلاف پتانسیلی میان نیمکره داخلی و نیمکره خارجی ایجاد شود، مقاومت الکتریکی این قطعه کدام است؟ فرض کنید جریان الکتریکی بین دو پوسته شعاعی است. (فیزیک ـ سراسری ۹۲)



۱) $\dfrac{1}{2\pi g}(\dfrac{b-a}{ab})$ ۲) $\dfrac{1}{4\pi g}(\dfrac{b-a}{ab})$

۳) $\dfrac{1}{2\pi ga}\ln(\dfrac{b}{a})$ ۴) $\dfrac{1}{2\pi gb}\ln(\dfrac{b}{a})$

پاسخ: گزینه «۱» این مسأله را به سادگی و تنها با دانستن این نکته که مقاومت معادل برای تعدادی مقاومت سری، با مجموع آن‌ها برابر خواهد بود می‌توان حل کرد. می‌توان بین دو پوسته‌ی با شعاع a و b، تعداد زیادی المان مقاومت در نظر گرفت که با استفاده از رابطه‌ی مقاومت یک رسانا به طول r، مساحت A و رسانندگی الکتریکی g خواهیم داشت:



$$R=\frac{1}{g}\frac{r}{A}\rightarrow dR=\frac{dr}{gA}$$

حال تعداد زیادی المان مقاومت با مقاومت‌های $\frac{dr}{gA}$ خواهیم داشت که می‌توان برای محاسبه‌ی مقاومت معادل، انتگرال‌گیری را از شعاع $r=a$ تا $r=b$ انجام داد.

$$R_T=\int_a^b\frac{dr}{gA}$$

از طرفی می‌دانیم که المان‌های مقاومت دارای مساحت یک نیم‌کره به شعاع r می‌باشند، بنابراین داریم: $A = 2\pi r^2$

حال با جای‌گذاری A در رابطه‌ی مربوط به R_T به دست خواهیم آورد:

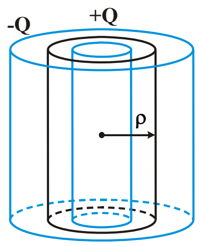
$$R_T = \int_a^b \frac{dr}{2\pi g r^2} = \frac{1}{2\pi g}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi g}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

مثال ۱۲: مقاومت الکتریکی یک خازن استوانه‌ای به شعاع داخلی 1cm و شعاع خارجی 2/72cm و طول 20cm که فضای میان دو استوانه هم محور از ماده‌ای با مقاومت ویژه $10^8\ \Omega.m$ و ثابت دی‌الکتریک ۲/۵ پر شده است چند مگا اهم است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۲)

۱) ۸۰ ۲) ۲ ۳) ۰/۸ ۴) ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق تعریف، مقاومت برابر است با نسبت ولتاژ به جریان.

$V = \int \vec{E}.d\vec{l}$, $\vec{E} = \sigma\vec{J}$ و $I = \oint \vec{J}.d\vec{s}$. که J چگالی سطحی جریان، $d\vec{s}$ دیفرانسیل سطح و σ رسانندگی (عکس مقاومت ویژه) است. سطح گاوسی با شعاع ρ را در نظر بگیرید.



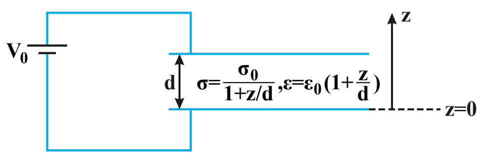
$$\vec{E} = \frac{Q}{2/5 \times 2\pi\varepsilon_0 \rho l}\hat{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \underset{\text{بین دو استوانه}}{\Delta V} = -\int \vec{E}.d\vec{\rho} = -\int_{1cm}^{2/72cm} \frac{Q}{5\pi\varepsilon_0 \rho l}d\rho = \frac{-Q}{5\pi\varepsilon_0}\times 5 = \frac{-Q}{\pi\varepsilon_0}$$

$$I = \int_0^{20cm}\int_0^{2\pi} \sigma^{-1}\frac{Q}{5\pi\varepsilon_0 \rho l}\rho d\phi dz = \frac{Q\sigma^{-1}}{2/5\,\varepsilon_0(0/2)}(0/2) = 4\times 10^{-9}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

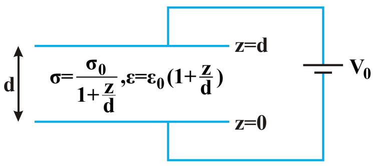
$$\Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{\frac{-Q}{\pi\varepsilon_0}}{4\times 10^{-9}\frac{Q}{\varepsilon_0}} = 79/58\,M\Omega$$

مثال ۱۳: مقدار چگالی بار سطحی مقید القا شده (ρ_{ps}) در $z = d$، برای ساختار زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)



۱) $\frac{4\varepsilon_0 V_0}{3d}$ ۲) $\frac{2\varepsilon_0 V_0}{3d}$ ۳) $-\frac{4\varepsilon_0 V_0}{3d}$ ۴) $-\frac{8\varepsilon_0 V_0}{3d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مقاومت را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه قانون اهم، جریان و در نتیجه چگالی جریان را می‌یابیم:



$$R = \int \frac{dl}{\sigma A} = \int_0^d \frac{1}{\sigma_0 A}(1+\frac{z}{d})dt = \frac{3d}{2\sigma_0 A} \Rightarrow \vec{J} = \frac{I}{A} = \frac{V_0}{RA} = \frac{2\sigma_0 V_0}{3d}$$

حال با استفاده از فرم نقطه‌ای قانون اهم، میدان الکتریکی و بردار گشتاور قطبی‌شدگی را می‌یابیم:

$$E = \frac{J}{\sigma} \Rightarrow E = \frac{2V_0(1+\frac{z}{d})}{3d}(-\hat{a}_z) \Rightarrow \bar{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)E = \varepsilon_0\frac{z}{d}\frac{2V_0}{3d}(1+\frac{z}{d})(-\hat{a}_z)$$

در نهایت چگالی بار سطحی مقید به صورت مقابل محاسبه خواهد شد:

$$\rho_{sp}\Big|_{z=d} = \bar{P}.(\hat{a}_z)\Big|_{z=d} = \varepsilon_0\frac{2V_0}{3d}(2)(-1) \Rightarrow \rho_{sp}\Big|_{z=d} = -\frac{4V_0\varepsilon_0}{3d}$$

مثال ۱۴: فضای بین دو پوسته فلزی استوانه‌ای هم‌محور و بسیار طویل به شعاع‌های a و 3a از یک ماده دی‌الکتریک با ضریب رسانش الکتریکی σ_0 و ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_0 K$ پر شده است. مقاومت الکتریکی عرضی (شعاعی) در واحد طول کابل هم‌محور کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{\ln 3}{2\pi\sigma_0}$ ۲) $\frac{3}{2\pi\sigma_0}$ ۳) $\frac{\ln 3}{4\pi\sigma_0}$ ۴) $\frac{3}{4\pi\sigma_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مقاومت بین دو پوسته فلزی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$R = \int_a^{3a}\frac{d\rho}{\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sigma_0\rho d\phi dz} \Rightarrow R = \int_a^{3a}\frac{d\rho}{\sigma_0[-(2\pi)\rho]} = \frac{1}{2\pi\sigma_0}Ln\rho\Big|_a^{3a} = \frac{1}{2\pi\sigma_0}Ln3$$

درسنامه (۳): اصل بقای بار الکتریکی و معادله پیوستگی بار الکتریکی

طبق اصل بقای بار الکتریکی، جریان خروجی از هر سطح بسته، برابر با آهنگ کاهش بار نسبت به زمان در حجم محصور شده توسط آن سطح می‌باشد:

$$I=-\frac{dQ}{dt}$$

از طرفی جریان گذرنده از یک سطح بسته را می‌توان به‌صورت $I=\oint_S \vec{J}.d\vec{s}$ نوشت پس خواهیم داشت:

$$\oint_S \vec{J}.d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$$

انتگرال سمت چپ در رابطه بالا را می‌توانیم با استفاده از قضیه دیورژانس به انتگرال حجمی تبدیل کنیم:

$$\int_V (\vec{\nabla}.\vec{J})dv=-\int_V \frac{d\rho}{dt}dv$$

که از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

به معادله فوق معادله پیوستگی بار می‌گوییم. این معادله را (در محیط رسانا) می‌توانیم به صورت مقابل بازنویسی کنیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=\vec{\nabla}.(\sigma\vec{E})=\vec{\nabla}.(\frac{\sigma\vec{D}}{\varepsilon})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

با فرض همگن بودن محیط می‌توانیم این‌گونه بنویسیم:

$$\vec{\nabla}.(\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D})=\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{\nabla}.\vec{D}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

بنابراین داریم:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0}$$

همان‌طور که می‌دانید معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که جواب آن با در نظر گرفتن شرط اولیه $\rho(t=0)=\rho_0$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\boxed{\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}}$$

مثال ۱۵: مرکز مکعب به اضلاع ۲ متر نقطه $P(0,0,0)$ است. در داخل حجم این مکعب، چگالی جریان $\vec{J}=6xyz\hat{x}-6y^2\hat{y}+2zy\hat{z}$ برقرار است. جریان خارج شده از این مکعب چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۸− ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم: $\oiint_{s=\partial V}\vec{J}.d\vec{s}=\iiint_V(\vec{\nabla}.\vec{J})dv$. پس به جای آنکه جریان I را روی ۶ سطح جانبی مکعب به دست آوریم، $\vec{\nabla}.\vec{J}$ را پیدا می‌کنیم و روی حجم مکعب از آن انتگرال می‌گیریم.

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=6yz-12y+2y\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(6yz-10y)dx\,dydz=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}6yz(2)dydz-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2)10\,ydydz=0$$

مثال ۱۶: در مختصات کروی، چگالی بار حجمی $\rho_V=\frac{\cos\omega t}{r^2}$ داده شده است. به دست آورید چگالی جریان الکتریکی $\vec{J}\,\frac{A}{m^2}$ را در صورتی که در $t=0$، $\vec{J}=0$ باشد. (مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $\vec{J}=\frac{\omega}{r}\sin\omega t\bar{a}_r$ ۲) $\vec{J}=\frac{\omega}{r}\sin^2\omega t\bar{a}_r$ ۳) $\vec{J}=\frac{\omega}{2r}\sin\omega t\bar{a}_r$ ۴) $\vec{J}=\frac{\omega}{2r}\sin^2\omega t\bar{a}_r$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا کل بار Q درون حجم یک کره به شعاع r را به دست می‌آوریم:

$$Q=(\frac{4}{3}\pi r^3)\rho_V=\frac{4}{3}\pi r\cos\omega t$$

طبق اصل بقای بار الکتریکی، جریان خروجی از سطح این کره برابر است با:

$$I=-\frac{dQ}{dt}=\frac{4}{3}\pi r\omega\sin\omega t$$

چگالی جریان الکتریکی روی سطح کره برابر است با:

$$\vec{J}=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{a}_r=\frac{\omega}{3r}\sin\omega t$$

مثال۱۷: محیط دی‌الکتریکی غیرکاملی با گذردهی ε و ضریب رسانندگی g مفروض است. اگر بار q در مرکز این محیط قرار دهیم، مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار بار در مرکز این محیط به نصف کاهش یابد، کدام است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{۲\varepsilon}{g}$　۲) $\frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon}{g}$　۳) $\frac{\varepsilon}{g}e^{-۲}$　۴) $\frac{۳}{g}\ln ۲$

پاسخ: گزینه «۲» از معادله‌ی پیوستگی داریم:
$$\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
در این رابطه J چگالی جریان الکتریکی و ρ چگالی بار الکتریکی است. از قانون اهم داریم $J=gE$. پس می‌توان نوشت:
$$g\vec{\nabla}.\vec{E}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
اما طبق قانون گاوس (دیورژانسی) داریم:
$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$
به این ترتیب با استفاده از دو رابطه‌ای که برای میدان الکتریکی E نوشتیم، خواهیم داشت:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{g}{\varepsilon}\rho=۰\ \Rightarrow\rho=\rho_۰e^{-(\frac{g}{\varepsilon})t}$$
یعنی چگالی بار، به صورت نمایی، داخل ماده پخش می‌شود.

به این ترتیب مدت زمانی که طول می‌کشد تا بار در محیط نصف شود، برابر است با:
$$e^{-(\frac{g}{\varepsilon})T}=\frac{۱}{۲}\rightarrow-(\frac{g}{\varepsilon})T=-\ln ۲\rightarrow T=\frac{\varepsilon}{g}\ln^{۲}$$

مثال۱۸: معادله پیوستگی بار و جریان الکتریکی به صورت $\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=۰$ در الکترومغناطیس چه جایگاهی دارد؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۲)

۱) نتیجه معادله اول ماکسول (قانون گاوس) و معادله سوم ماکسول (قانون فاراده) است.
۲) خود یک معادله بنیادی الکترومغناطیس و مستقل از هر چهار معادله ماکسول است.
۳) نتیجه چهار معادله ماکسول به علاوه رابطه نیروی لورنتس است.
۴) نتیجه معادله اول ماکسول (قانون گاوس) و معادله چهارم ماکسول (قانون آمپر ـ ماکسول) است.

پاسخ: گزینه «۴» از معادله‌ی اول ماکسول (قانون گاوس) داریم:
$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\qquad \text{رابطه‌ی (۱)}$$
و از معادله‌ی چهارم ماکسول (قانون آمپر ـ ماکسول) داریم:
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\qquad \text{رابطه‌ی (۲)}$$
از سوی دیگر می‌دانیم که دیورژانس هر تاوی، صفر است یعنی همگی تاوها، سیملوله‌ای هستند. می‌توان از طرفین رابطه‌ی (۲) دیورژانس گرفت که در این صورت طبق گفته‌ی فوق، سمت چپ تساوی صفر خواهد شد.
$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{H})=\vec{\nabla}.\vec{J}+\vec{\nabla}.(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{D})=۰\qquad \text{رابطه‌ی (۳)}$$
حال با جایگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۳) نتیجه می‌شود که:
$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=۰$$

مثال۱۹: بار الکتریکی با چگالی یکنواخت حجمی $\rho_۰$ در لحظه $t=۰$ درون یک کره هادی با شعاع a و رسانایی ویژه σ و نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_۰$ قرار دارد. پس از گذشت $t=\frac{\varepsilon_a}{\sigma}\ln ۲(sec)$ چقدر بار درون کره باقی می‌ماند؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۹۲)

۱) $۴\pi a^۳\rho_۰$　۲) $\frac{۲\pi a^۳\rho_۰}{۳}$　۳) $۲\pi a^۳\rho_۰$　۴) $\frac{۸\pi a^۳\rho_۰}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» بار اولیه درون کره برابر است با:
$$Q_۰=\frac{۴}{۳}\pi a^۳\rho_۰$$
بار Q در زمان t به صورت مقابل به دست می‌آید:
$$Q=Q_۰e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}t}=Q_۰e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\frac{\varepsilon_۰}{\sigma}\ln ۲}=Q_۰e^{\ln\frac{۱}{۲}}=\frac{Q_۰}{۲}\Rightarrow Q=\frac{۲}{۳}\pi a^۳\rho_۰$$

مثال۲۰: بار $Q_۰$ به طور یکنواخت در لحظه $t=۰$ در حجم کره رسانایی به شعاع a و رسانایی ویژه $\sigma_۰$ توزیع شده است. بار سطحی موجود در سطح کره پس از گذشت زمان $t=\frac{\varepsilon_۰}{\sigma_۰}$، کدام است؟ (دکتری ۹۴)

۱) $Q_۰\frac{e-۱}{e}$　۲) $Q_۰\frac{e}{e+۱}$　۳) $Q_۰\frac{e-۱}{e+۱}$　۴) $Q_۰\frac{۱}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یک دی‌الکتریک ناقص دارای ثابت زمانی $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ می‌باشد. اگر فرض کنیم در این دی‌الکتریک بار اولیه $Q_\circ$ وجود داشته باشد، با استفاده از جواب معادله دیفرانسیل که با استفاده از اصل بقای بار الکتریکی و معادله پیوستگی بار الکتریکی به‌دست می‌آید، می‌توان مقدار بار درون محیط بعد از گذشت زمان t را به‌دست آورد:

$$Q = Q_\circ e^{-\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}t} \Rightarrow \text{روی سطح } Q\Big|_{t=\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ}} = Q_\circ - Q_\circ e^{-\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}\times\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ}} = Q_\circ\left(\frac{e-1}{e}\right)$$

مثال ۲۱: اگر در لحظه $t = \circ$، کره‌ای به شعاع a و رسانایی ویژه σ و گذردهی $\varepsilon_\circ$ به‌طور یکنواخت و با چگالی حجمی $\rho_\circ$ باردار شود، بار سطحی روی کره در لحظه $t = 5s$، کدام است؟ $(\tau = \frac{\varepsilon_\circ}{\sigma})$ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{\rho_\circ a}{3\varepsilon_\circ}(1-e^{-\frac{5}{\tau}})$ ۲) $\frac{\rho_\circ a}{3}(1-e^{-\frac{5}{\tau}})$ ۳) $\frac{\rho_\circ a}{3\varepsilon_\circ}(1+e^{-\frac{5}{\tau}})$ ۴) $\frac{\rho_\circ a}{3}(1+e^{-\frac{5}{\tau}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قانون پایستگی بار الکتریکی استفاده می‌کنیم.

$$\sigma_S(t) = K(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(Q_1 روی سطح کره و Q_2 داخل حجم کره است)

$$\sigma_S(\circ) = \circ \quad , \quad Q_1 = Q_2$$

در لحظه $t = \circ$ هیچ باری روی سطح کره نداریم، در زمان‌های زیاد، تمامی بار به سطح کره می‌آید، یعنی:

$$\Rightarrow (4\pi a^2)\sigma_\circ = \rho_\circ(\frac{4}{3}\pi a^3) \Rightarrow \sigma_S = \frac{\rho_\circ a}{3}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} \sigma_S(t) = K(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ \sigma_S(\circ) = \circ \\ \sigma_S(\infty) = \frac{\rho_\circ a}{3} \end{cases} \rightarrow \sigma_S(t) = \frac{\rho_\circ a}{3}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$$

در نتیجه در $t = 5s$ خواهیم داشت:

$$\sigma_S(5) = \frac{\rho_\circ a}{3}(1-e^{-\frac{5}{\tau}})$$

روش رد گزینه: طبق قانون بقای بار الکتریکی داریم:

$$\rho_V(t) = \rho_V(t\to\infty)[1-e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

با توجه به این فرم، فقط گزینه‌های (۱) و (۲) می‌تونن درست باشن. از طرفی میدونیم که کل بار تزریق شده ($q(t=\circ) = \rho_\circ(\frac{4}{3}\pi a^3)$) باید در نهایت روی سطح کره پخش بشه؛ یعنی در زمان بی‌نهایت، باید بار روی سطح کره با کل بار تزریق شده به کره برابر باشه که فقط برای گزینه (۲) چنین اتفاقی می‌افته. ($q_S(t=\infty) = \rho_\circ\frac{a}{3}(4\pi a^2) = q(t=\circ)$)

به دلیل دیگه: طبق شرایط مرزی در فصل مشترک دو عایق با گذردهی متفاوت (منظورم فصل مشترک کره و محیط اطراف کره هستش.)، رابطه زیر برای چگالی بار سطحی در فصل مشترک، برقراره: $\hat{n}.(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_S$

و چون میدونیم $\vec{D} = \varepsilon_\circ\varepsilon_r\vec{E}$ و $\vec{E}$ هم با $\varepsilon_\circ$ متناسبه، پس در $\vec{D}$ پارامتر $\varepsilon_\circ$ ظاهر نمی‌شه و به تبع اون رابطه چگالی بار سطحی هم فاقد پارامتر $\varepsilon_\circ$ خواهد بود و گزینه (۲) صحیحه.

مثال ۲۲: محیط دی‌الکتریکی با ضریب گذردهی ε و ضریب هدایت g مفروض است. بار Q را در مرکز این محیط قرار می‌دهیم. مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار بار در مرکز این محیط به نصف کاهش یابد، کدام است؟

۱) $\frac{\varepsilon}{g}\ln 2$ ۲) $\frac{2\varepsilon}{g}$ ۳) $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{g}$ ۴) $\frac{\varepsilon}{g}e^{-2}$

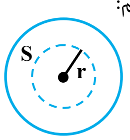
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی کاهش بار در یک محیط با رسانندگی g و گذردهی ε (رابطه‌ی واهلش) داریم:

$$Q' = Qe^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \quad ; \quad \frac{1}{2}Q = Qe^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \Rightarrow t = \frac{\varepsilon}{g}\ln 2$$

مثال ۲۳: یک جسم کروی همگن و خطی دارای ضریب رسانندگی g و گذردهی ε و چگالی حجمی بار آزاد اولیه ρ_0 است. میدان الکتریکی در نقاط داخل جسم برحسب زمان چگونه است؟ (مبدأ مختصات در مرکز کره قرار دارد).

۱) $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon}e^{-\frac{gt}{\varepsilon}}$
۲) $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_0 \vec{r}}{6\varepsilon}e^{-\frac{gt}{\varepsilon}}$
۳) $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon t}{g}}$
۴) $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_0 \vec{r}}{6\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon t}{g}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا میدان الکتریکی درون کره را به دست می‌آوریم. اما قبل از آن باید بار داخل سطح گاوسی (S) را پیدا کنیم:



$$Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

حال می‌توانیم میدان الکتریکی درون کره را با استفاده از قانون گاوس به دست آوریم: $(\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = Q_0)$

$$\vec{E} = \frac{Q_0 \hat{a}_r}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon}$$

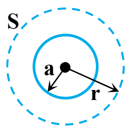
با جایگذاری $\rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$ در رابطه $\vec{E}$ داریم:

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-gt}{\varepsilon}} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon}e^{\frac{-gt}{\varepsilon}}$$

مثال ۲۴: در مثال قبل، میدان الکتریکی در نقاط خارج جسم، برحسب زمان چگونه تغییر می‌کند؟ (شعاع جسم کروی را a در نظر بگیرید.)

۱) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\hat{r}$
۲) $\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r^2}\hat{r}$
۳) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\hat{r}e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$
۴) $\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r}\hat{r}e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با گذر زمان، بارهای الکتریکی به سطح جسم کروی منتقل می‌شوند. بنابراین در طول زمان، کل بار داخل سطح گاوسی S همواره برابر با مقدار بار اولیه داخل کره است $(Q_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0)$. بنابراین طبق قانون گاوس داریم:

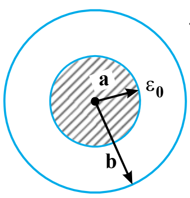


$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = Q_0 \Rightarrow D_r = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r^2}\hat{r}$$

مثال ۲۵: نیمی از فضا با یک ماده رسانا با مشخصات $\sigma = \sigma_0 \sin^2\theta(\frac{S}{m})$ و $\varepsilon = \varepsilon_0$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ در مختصات کروی) پر شده و نیم دیگر $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ فضای آزاد است. یک الکترود رسانای کامل کروی به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات بین این دو نیم فضا قرار گرفته است؛ به نحوی که دقیقاً نیمی از آن درون رسانا است. اگر بار آزاد Q به الکترود تزریق شود، چه مدت طول می‌کشد تا بار کل الکترود به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه کاهش یابد؟ (دکتری ۹۷)

۱) $\frac{3\varepsilon_0}{2\sigma_0}$
۲) $\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}$
۳) $3\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}$
۴) $\frac{\varepsilon_0}{2\sigma_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قانون پایستگی بار الکتریکی، میزان تغییرات بار الکتریکی در زمان t از رابطه $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ به‌دست می‌آید که τ ثابت زمانی است و معادل است با $\tau = RC$ که R مقاومت الکتریکی و C ظرفیت الکتریکی است. ابتدا R و C ساختار را تعیین می‌کنیم.



ظرفیت الکتریکی یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از رابطه روبرو به‌دست می‌آید:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

اگر $b \to \infty$ آنگاه $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ و مقاومت الکتریکی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$R = \int_a^\infty \frac{dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sigma_0 \sin^2\theta r^2 \sin\theta d\theta d\phi} \Rightarrow R = \int_a^\infty \frac{dr}{\sigma_0 r^2 (2\pi)(\frac{2}{3})} = \int_a^\infty \frac{dr}{\frac{4\pi}{3}\sigma_0 r^2} = \frac{3}{4\pi\sigma_0}(-\frac{1}{r}\Big|_a^\infty) \Rightarrow R = \frac{3}{4\pi\sigma_0}(\frac{1}{a})$$

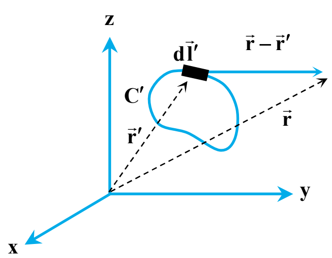
فصل نهم

«میدان مغناطیسی ساکن»

مقدمه

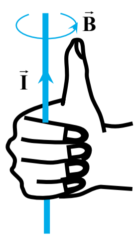
همراهان عزیز می‌دانیم که منشأ کلیه پدیده‌های الکترومغناطیسی، بارهای الکتریکی هستند. بارهای الکتریکی ساکن فقط تولید میدان الکتریکی می‌کنند. حرکت بارهای الکتریکی باعث به وجود آمدن پدیده دیگری به نام میدان مغناطیسی می‌شود. اگر بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت حرکت کنند، میدان مغناطیسی ساکن را تولید می‌کنند و اگر حرکت شتابدار داشته باشند، میدان‌های متغیر با زمان و پدیده تشعشع را به وجود می‌آورند که در فصل‌های بعد و پس از معرفی معادلات ماکسول آن‌ها را توضیح می‌دهیم؛ اما در این فصل مهم‌ترین قانون در دنیای مغناطیس، یعنی قانون بیوساوار را یاد خواهیم گرفت.

درسنامه: قانون بیوساوار



قانون بیوساوار در دنیای مغناطیس مانند قانون کولن در دنیای الکتریسیته است. با استفاده از این قانون می‌توانیم میدان مغناطیسی یا چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ را به دست آوریم. میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی یکنواخت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{B(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{Id\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$



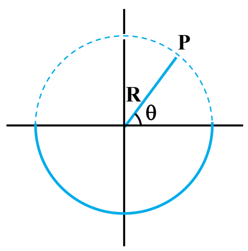
با توجه به ضرب خارجی بین بردار $\vec{r}-\vec{r}'$ و $Id\vec{l}'$ نتیجه می‌گیریم که جهت میدان مغناطیسی توسط قانون دست راست مشخص می‌شود. اگر انگشت شست دست راست در جهت جریان و بقیهٔ انگشتان به سمت نقطهٔ میدان (مشاهده) باشد، جهت بسته شدن انگشت‌ها، جهت میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد. ضرب خارجی و قانون دست راست را در فصل اول توضیح دادیم.

جریان‌های با توزیع سطحی و حجمی را به صورت مجموعه‌ای از جریان‌های خطی در نظر می‌گیریم و میدان حاصل از کل مجموعه را با استفاده از اصل جمع آثار به دست می‌آوریم. میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های سطحی و حجمی میدان مغناطیسی به ترتیب از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{J}_s\times\hat{a}_R}{R^2}ds' \quad \text{(جریان سطحی)}}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\times\hat{a}_R}{R^2}dv' \quad \text{(جریان حجمی)}}$$

مثال ۱: مطابق شکل، از یک سیم نیم‌دایره به شعاع R جریان ثابت I می‌گذرد. میدان مغناطیسی در نقطه P کدام است؟



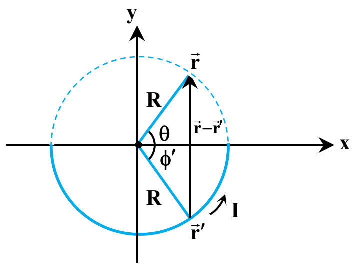
۱) $\frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left\|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{4})}{\tan(\frac{\theta}{4})}\right\|\hat{z}$

۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\ln\left\|\frac{\tan(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{4})}{\tan(\frac{\theta}{4})}\right\|\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\ln\left\|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{4})}{\cot(\frac{\theta}{4})}\right\|\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left\|\frac{\tan(\frac{\theta}{4})}{\tan(\frac{\theta+\pi}{4})}\right\|\hat{z}$

پاسخ: گزینه «۱» نقاط منبع و مشاهده به صورت زیر هستند:



$$\vec{r}' = R\cos\phi'\hat{x} - R\sin\phi' y \ , \ \vec{r} = R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}' = R[(\cos\theta-\cos\phi')\hat{x} + (\sin\theta+\sin\phi')\hat{y}]$$

جزء طول برای محاسبه انتگرال بیوساوار برابر است با:

$$d\vec{l}' = R\sin\phi' d\phi'\hat{x} + R\cos\phi' d\phi'\hat{y} = Rd\phi'(\sin\phi'\hat{x} + \cos\phi'\hat{y})$$

با اندکی محاسبات (خودتان انجام دهید!) می‌توان به نتیجه مقابل رسید:

$$d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}') = R^2[1-\cos(\theta-\phi')]d\phi'\hat{z}$$

بنابراین میدان $\vec{B}$ برابر است با:

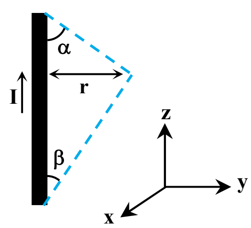
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}R^2\hat{z}\int_0^{\pi}\frac{[1-\cos(\theta+\phi')]}{[2R^2-2R^2\cos(\theta+\phi')]^{3/2}}d\phi'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(2R^2)^{3/2}}\hat{z}\int_0^{\pi}\frac{d\phi'}{\sqrt{1-\cos(\theta+\phi')}} = \frac{\mu_0 I}{8\sqrt{2}\pi R}\hat{z}\int_0^{\pi}\frac{d\phi'}{\sqrt{2}\sin[\frac{(\theta+\phi')}{2}]}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{16\pi R}\hat{z}\left\{2\ln\left|\tan(\frac{\theta+\phi'}{4})\right|\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left\|\frac{\tan(\frac{\theta+\pi}{4})}{\tan(\frac{\theta}{4})}\right\|\hat{z}$$

مهم‌ترین کاربردهای قانون بیوساوار به شرح زیر می‌باشد.

۱) میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم حامل جریان I در راستای $+\hat{z}$ عبارت است از:

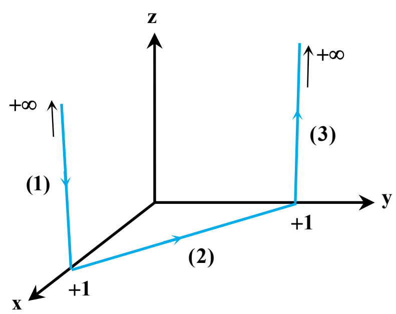


$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha+\cos\beta)\hat{a}_{\varphi}}$$

میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم بسیار بلند حامل جریان I با جایگذاری $\alpha=\beta=0$ در رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_{\varphi}$$

مثال ۲: برای سیم نامحدود حامل جریان I در شکل زیر، میدان $\vec{B}$ در مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{x}+\hat{y})$

۳) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z})$

۴) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای سیم (۱) داریم:

$$r=۱\ ,\ \alpha=۰\ ,\ \beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \vec{B}_۱=\frac{\mu_۰ I}{۴\pi}(+\hat{y})$$

برای سیم (۲) می‌توان نوشت: $(\beta=\alpha=\frac{\pi}{۴})$

$$r=\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \vec{B}_۲=\frac{\mu_۰ I}{۴\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}[\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}](\hat{z})=\frac{۲\mu_۰ I}{۴\pi}\hat{z}$$

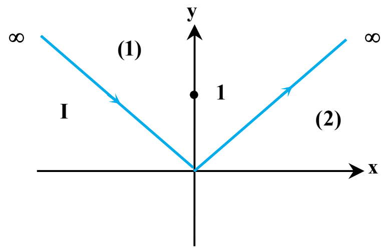
و برای سیم (۳) خواهیم داشت:

$$\vec{B}_۳=\frac{\mu_۰ I}{۴\pi(۱)}\hat{x}$$

حال داریم: (جمع آثار ناشی از سیم‌ها)

$$\vec{B}=\vec{B}_۱+\vec{B}_۲+\vec{B}_۳\Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_۰ I}{۴\pi}[\hat{x}+\hat{y}+۲\hat{z}]$$: میدان کل

مثال ۳: روی خط $y=|x|$ جریان I به شکل زیر قرار دارد. میدان $\vec{B}$ در نقطه $(x,y)=(۰,۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{\mu_۰ I}{۴\pi}(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})\hat{z}$

۲) $\frac{\mu_۰ I}{۴\pi}(۱+\sqrt{۲})\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_۰ I}{۲\pi}(۱+\sqrt{۲})\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_۰ I}{۲\pi}Ln(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» میدان ناشی از سیم (۱) برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \beta=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \alpha=۰\quad\Rightarrow \vec{B}_۱=\frac{\mu_۰ I}{۲\sqrt{۲}\pi}[۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}]\hat{z}$$

میدان ناشی از سیم (۲) برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \beta=۰\ ,\ \alpha=\frac{\pi}{۴}\quad\Rightarrow \vec{B}_۲=\frac{\mu_۰ I}{۲\sqrt{۲}\pi}[۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}]\hat{z}$$

$$:\vec{B}=\vec{B}_۱+\vec{B}_۲=\frac{\mu_۰ I}{۲\pi}(۱+\sqrt{۲})\hat{z}$$ میدان کل

مثال ۴: یک صفحه هادی با ابعاد $-\infty<x<\infty\ ,\ -۱<y<۱$ متر حامل چگالی جریان سطحی $\vec{k}=۱\hat{a}_x$ آمپر بر متر می‌باشد. القاء مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطه $(۰,۰,۱)$ برابر است با:

۱) $\vec{B}=-\mu_۰\hat{a}_y$

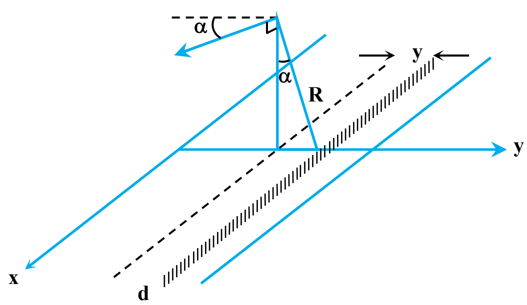
۲) $\vec{B}=\frac{-\mu_۰}{۴}\hat{a}_y$

۳) $\vec{B}=\mu_۰\hat{a}_y$

۴) $\vec{B}=-\frac{\sqrt{۲}\mu_۰}{۴\pi}\hat{a}_y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» جریان سطحی را می‌توان به المان‌های جریان خطی با مقدار $I=|\vec{k}|\,dy=dy$ تجزیه نمود.

$$|d\vec{B}|=\frac{\mu_۰ I}{۲\pi R}=\frac{\mu_۰ dy}{۲\pi\sqrt{۱+y^۲}}$$

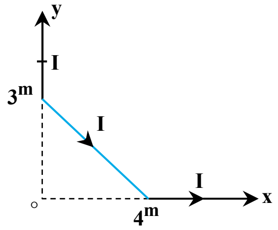


هر المان جریان خطی، میدان مغناطیسی در راستای $\hat{a}_z$ (یا $-\hat{a}_z$) و $-\hat{a}_y$ ایجاد می‌کند. مؤلفه‌های مربوط به المان‌های مختلف در راستای $\hat{a}_z(-\hat{a}_z)$ همدیگر را خنثی و در راستای $-\hat{a}_y$ همدیگر را تقویت می‌کنند.

$$\vec{B}=\int_{-۱}^{۱}\frac{\mu_۰ dy}{۲\pi\sqrt{۱+y^۲}}(-\cos\alpha)\hat{a}_y=\frac{-\mu_۰}{۲\pi}\int_{-۱}^{۱}\frac{dy}{\sqrt{۱+y^۲}}(\frac{۱}{\sqrt{۱+y^۲}})\hat{a}_y$$

$$\vec{B}=-\frac{\mu_۰}{۲\pi}[\mathrm{Arctgy}]_{-۱}^{۱}\,\hat{a}_y=\frac{-\mu_۰}{۴}\hat{a}_y$$

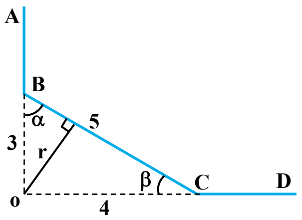
مثال۵: از سیمی مطابق شکل جریان ثابت I عبور می‌کند. چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز مختصات چقدر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۹۲)



۱) $-\frac{5\mu_0 I}{24\pi}\hat{a}_z$		۲) $-\frac{\mu_0 I}{36\pi}\hat{a}_z$

۳) $-\frac{7\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$		۴) $-\frac{\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۳» شدت میدان مغناطیسی در امتداد سیم صفر است:

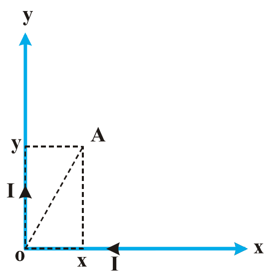


$$\bar{B}_{AB} = \bar{B}_{CD} = 0$$

در نتیجه چگالی شار مغناطیسی برابر است با:

$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \times \frac{12}{5}}(\frac{7}{5}) \Rightarrow \vec{B} = -\frac{7\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$$

مثال۶: سیم خمیده حامل جریان I مطابق شکل زیر از بی‌نهایت در امتداد x محور تا مبدأ مختصات و سپس در امتداد محور y تا بی‌نهایت ادامه دارد. میدان مغناطیسی در نقطه A در صفحه xy با مختصات $(x, y, 0)$ واقع در ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۴)



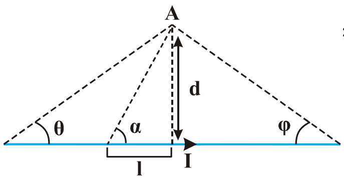
۱) $\frac{\mu_0 I}{2\pi xy}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2})$

۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi xy}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2})$

۳) $\frac{\mu_0 I}{2\pi xy}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$

۴) $\frac{\mu_0 I}{4\pi xy}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$

پاسخ: گزینه «۴» علی‌رغم این که سیم از یک طرف تا بی‌نهایت کشیده شده است، اما از یک طرف هم متناهی است، اما میدان مغناطیس برای یک سیم که خط واصل آن تا نقطه‌ی A (محل مشاهده میدان) زاویه‌های θ و φ می‌سازد، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dL \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{بیوساوار}$$

$$dl = d(1 + \cot^2\alpha)d\alpha \leftarrow L = r\cos\alpha = d\cot\alpha \quad \text{که}$$

$$|\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}| = \frac{dl\sin\alpha}{d^2 + l^2} = \frac{d(1 + \cot^2\alpha)d\alpha\sin\alpha}{d^2 + d^2\cot^2\alpha} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\theta^{\pi-\varphi}\frac{d\sin\alpha d\alpha}{d^2} = \frac{\mu_0 I}{d}(\cos\varphi + \cos\theta)$$

پس برای سیمی که در محور افقی، روی محور x، کشیده شده است، میدان در نقطه A درون‌سو و با مقدار زیر برابر است:

$$B_x^A = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d = y)}(\cos 0^\circ + (\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})) = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

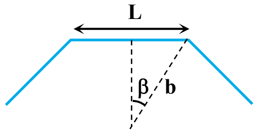
اما میدان ناشی از سیم روی محور y، باز هم درون‌سو و این بار به اندازه‌ی زیر است:

$$B_y^A = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d = x)}(\cos 0^\circ + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

پس مجموع میدان دو قطعه سیم برابر است با:

$$B_x^A + B_y^A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\frac{x + y}{xy} + \frac{x^2 + y^2}{xy\sqrt{x^2 + y^2}}) = 0 \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi xy}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

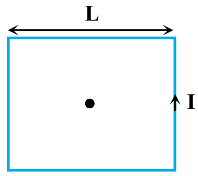
۲) میدان مغناطیسی در مرکز یک N ضلعی منتظم با شعاع دایره محیطی b عبارت است از:



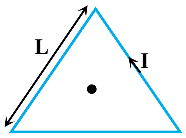
$$\boxed{B=\frac{\mu_\circ NI}{2\pi b}tg\frac{\pi}{N}}$$

شعاع دایره محیطی را از رابطه $b=\frac{L}{2\sin\beta}$ به‌دست می‌آوریم که در آن $\beta=\frac{\pi}{N}$ می‌باشد.

به طور مثال میدان مغناطیسی در مرکز یک مربع و مرکز یک مثلث متساوی‌الاضلاع به صورت زیر خواهد بود:



$$B=\frac{4\mu_\circ I}{2\pi\left(\frac{L}{2\sin\frac{\pi}{4}}\right)}tg\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}\mu_\circ I}{\pi L}$$



$$B=\frac{3\mu_\circ I}{2\pi\left(\frac{L}{2\sin\frac{\pi}{3}}\right)}tg\frac{\pi}{3}=\frac{9\mu_\circ I}{2\pi L}$$

با توجه به جهت جریان و استفاده از قانون دست راست، جهت $\vec{B}$ در درون حلقه به سمت خارج صفحه و در بیرون حلقه به سمت داخل صفحه می‌باشد.

مثال ۷: با استفاده از رابطه میدان مغناطیسی در مرکز یک N ضلعی منتظم، میدان مغناطیسی مرکز یک دایره را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** میدان مغناطیسی در مرکز یک N ضلعی منتظم برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ NI}{2\pi b}tg\frac{\pi}{N}$$

که در آن b شعاع دایره محیطی N ضلعی می‌باشد.

یک دایره را می‌توان یک N ضلعی منتظم با $N\to\infty$ در نظر گرفت:

$$B=\lim_{N\to\infty}\frac{\mu_\circ NI}{2\pi b}tg\frac{\pi}{N}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi b}\lim_{N\to\infty}Ntg\frac{\pi}{N}\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi b}\left(N\frac{\pi}{N}\right)\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{2b}$$

در رابطه به دست آمده، b در واقع شعاع دایره است.

مثال ۸: سیمی به صورت مثلث متساوی‌الاضلاع به اضلاع a در صفحه $z=0$ با مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات در دست است. از این سیم جریان I عبور می‌کند. مطلوب است محاسبه قدرمطلق شدت میدان مغناطیسی را در مبدأ مختصات. (مهندسی برق ـ آزاد ۹۱)

۱) $|\vec{H}|=\frac{3I}{2\pi^2 a}$ ۲) $|\vec{H}|=\frac{9I}{2\pi a}$ ۳) $|\vec{H}|=\frac{9I}{2\pi^2 a}$ ۴) $|\vec{H}|=\frac{3I}{2\pi a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق مطالب آورده شده در این فصل، اندازه شدت میدان مغناطیسی در مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$|\vec{H}|=\frac{9I}{2\pi a}$$

مثال ۹: یک سیم نازک هادی به شکل N ضلعی منتظم خم شده است و جریان I از سیم می‌گذرد. شعاع محیطی چندضلعی را b و $\hat{a}_n$ را بردار یکه واحد عمود بر سطح آن فرض کنید. چگالی شار مغناطیسی در مرکز کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۹۲)

۱) صفر ۲) $\hat{a}_n\frac{\mu_\circ IN}{2\pi b}\tan\frac{\pi}{N}$ ۳) $\hat{a}_n\frac{2\mu_\circ IN}{\pi b\cos\frac{\pi}{N}}$ ۴) $\hat{a}_n\frac{\mu_\circ IN}{\pi b\cos\frac{\pi}{N}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مطابق رابطه مطرح شده در متن درس، چگالی شار مغناطیسی در مرکز این N ضلعی منتظم برابر است با:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ NI}{2\pi b}\tan\frac{\pi}{N}\hat{a}_n$$

درسنامه (۲): معادلات ماکسول

معادلات ماکسول در درس الکترومغناطیس اهمیت زیادی دارند. چون هر چیزی که ماهیت الکتریکی یا مغناطیسی دارد به نحوی با معادلات ماکسول در ارتباط است و توسط این معادلات توصیف می‌شود. ماکسول، قانون آمپر را اصلاح کرد. وی با افزودن جریان جابه‌جایی $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ به قانون آمپر، آن را برای حالت‌های متغیر با زمان نیز به کار برد. از این معادلات می‌توان چنین استدلال کرد که یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان، همیشه با یک میدان الکتریکی متغیر با زمان همراه خواهد بود.

شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول به صورت زیر است:

۱) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ۲) $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ۳) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_V$ ۴) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

چون در الکترومغناطیس با اشیاء دارای شکل‌ها و مرزهای مشخص سروکار داریم بهتر است شکل دیفرانسیلی معادلات فوق را به شکل انتگرالی تبدیل کنیم.

شکل انتگرالی معادلات ماکسول به صورت زیر است:

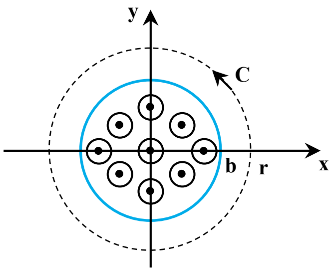
۱) قانون فاراده $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ ۲) قانون آمپر - ماکسول $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$

۳) قانون گاوس الکتریکی $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s}=Q$ ۴) قانون گاوس مغناطیسی $\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$

همان‌طور که می‌دانید، $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l}$ نیروی محرکه الکتریکی (emf) است. همچنین $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}$ در معادله دوم، نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) می‌باشد.

مثال ۲۴: یک سلونوئید بسیار بلند و با شعاع b، دارای n دور سیم در واحد طول است. اگر این سلونوئید حامل جریان $i=i_\circ \sin\omega t$ باشد، آنگاه میدان الکتریکی خارج سلونوئید کدام است؟

۱) $-\frac{b^2}{2r}\mu_\circ n i_\circ \omega \sin\omega t\,\hat{a}_\varphi$ ۲) $-\frac{b^2}{2r}\mu_\circ n i_\circ \omega \cos\omega t\,\hat{a}_\varphi$ ۳) $-\frac{b^2}{r}\mu_\circ n i_\circ \omega \cos\omega t\,\hat{a}_\varphi$ ۴) $-\frac{b^2}{r}\mu_\circ n i_\circ \omega \sin\omega t\,\hat{a}_\varphi$



پاسخ: گزینه «۲» در داخل سلونوئید میدان ثابت $\vec{B}(t)=\mu_\circ n i(t)\hat{z}$ داریم. حال با استفاده از رابطه $\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$ برای $r>b$:

$$E_\varphi(2\pi r)=-\pi b^2.\mu_\circ n i_\circ \omega\cos\omega t \Rightarrow \vec{E}(t)=-\frac{b^2}{2r}\mu_\circ n i_\circ \omega\cos\omega t\,\hat{a}_\varphi$$

مثال ۲۵: در یک سیملوله با تعداد دورهای واحد طول n، جریان متناوب $I=I_\circ \sin(\omega t)$ برقرار است. اندازه میدان الکتریکی القایی درون سیملوله چقدر است؟

۱) $rI_\circ\omega|\sin(\omega t)|$ ۲) $\frac{rI_\circ\omega}{2}|\sin(\omega t)|$ ۳) $rI_\circ\omega|\cos(\omega t)|$ ۴) $\frac{rI_\circ\omega}{2}|\cos(\omega t)|$

پاسخ: گزینه «۴» اندازه میدان مغناطیسی درون سیملوله به صورت $|\vec{B}|=\mu_\circ nI$ می‌باشد. از آنجا که $\vec{B}$ نسبت به مکان یکنواخت است و مسئله تقارن استوانه‌ای دارد، اندازه میدان الکتریکی از رابطه مقابل حاصل می‌شود: $(\int_C \vec{E}.d\vec{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}.d\vec{s})$

$$E_\varphi(2\pi r)=(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t})(\pi r^2) \Rightarrow |\vec{E}|=\frac{r}{2}|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}|=\frac{r}{2}I_\circ\omega|\cos(\omega t)|$$

مثال ۲۶: یک سیم لوله‌ی طویل به شعاع a دارای n حلقه در واحد طول و حامل جریان $i(t)=I\cos\omega t$ می‌باشد. یک پوسته‌ی استوانه‌ای رسانا با رسانایی ویژه‌ی σ و شعاع داخلی b و شعاع خارجی $c(b>a)$ و ارتفاع d، سیم لوله را احاطه کرده است. متوسط زمانی توان تلف شده در پوسته‌ی استوانه‌ای رسانا چقدر است؟ فرکانس جریان خیلی پایین فرض می‌شود. (دکتری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{4}\omega^2\mu_\circ^2 n^2 a^3 d\sigma I^2(c-b)$ ۲) $\frac{\pi}{4}\omega^2\mu_\circ^2 n^2 a^4 d\sigma I^2 Ln\frac{c}{b}$ ۳) $\frac{\pi}{12}\omega^2\mu_\circ^2 n^2 a d\sigma I^2(c^3-b^3)$ ۴) $\frac{\pi}{8}\omega^2\mu_\circ^2 n^2 a^2 d\sigma I^2(c^2-b^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» میدان مغناطیسی داخل سیم لوله برابر است با: $B = \mu_0 nI\cos\omega t$. از معادلات ماکسول داریم:

$$\int \vec{E}.d\ell = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}.\vec{ds} \Rightarrow E_\varphi(r) = \frac{\mu_0 n\omega a^2 I\sin\omega t}{2r}$$

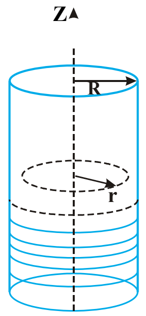
در نتیجه توان تلفشده در طول d در هادی استوانه‌ای برابر است با:

$$P = d\int\int 6|\vec{E}|^2\, ds = y_4 6a^4\mu_0^2 n^2\omega^2 Id^2\sin^2\omega t\int_0^{2\pi}\int_b^c \frac{1}{r^2} rdrdp \Rightarrow P = \frac{\pi}{2}\omega^2\mu_0^2 n^2 a^4 d\sigma I^2 \mathrm{Ln}\frac{c}{b}\sin^2\omega t$$

بنابراین متوسط زمانی این توان برابر است با:

$$P_{avg} = \frac{\pi}{4}\omega^2\mu_0^2 n^2 a^4 d\sigma I^2 \mathrm{Ln}\frac{c}{b}$$

مثال ۲۷: یک سیم لوله بسیار طویل به شعاع R و با N حلقه در واحد طول، حامل جریان الکتریکی تابع زمان به‌صورت $\vec{I} = I_0 \exp(\frac{-t}{\tau})\hat{\phi}$ مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان الکتریکی القایی در نقاط به فاصله r از محور سیم لوله $(r < R)$ کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)



۱) $\vec{E} = \frac{\mu_0 NI_0 r}{2\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})\hat{\phi}$

۲) $\vec{E} = \frac{\mu_0 NI_0 r}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})\hat{\phi}$

۳) $\vec{E} = \frac{\mu_0 NI_0 r}{2\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})\hat{k}$

۴) $\vec{E} = \frac{\mu_0 NI_0 r}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})\hat{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» میدان مغناطیسی یک سیم لوله به وسیله‌ی جریان برابر است با: $\vec{B} = \mu_0 NI\hat{z}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 NI_0(\frac{-1}{\tau})\exp(\frac{-t}{\tau})\hat{z} = \frac{\mu_0 NI_0}{\tau}\exp(\frac{-t}{\tau})\hat{z}$$

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\phi & E_z \end{vmatrix} = \cdots + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}E_r]\hat{z} + \cdots$$

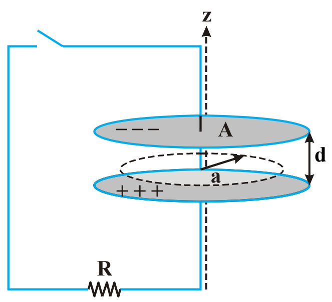
از آنجایی که ما تنها با مؤلفه‌ی $\hat{z}$ کار داریم و بقیه مؤلفه‌ها باید صفر باشند تا نتیجه با $\vec{B}$ هم‌جهت باشد، می‌توان نوشت:

$$[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}E_r] = \frac{r\mu_0 NI_0}{\tau}\exp(\frac{-t}{\tau})$$

صفر بودن بقیه مؤلفه‌های $\vec{\nabla}\times\vec{E}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(E_z) - \frac{\partial}{\partial\phi}E_r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\phi}E_z - \frac{\partial}{\partial z}(rE_\phi) = 0 \end{cases} \Rightarrow E_r = E_z = 0\ ,\ E_\phi = \frac{\mu_0 NI_0}{2\tau}r\exp(\frac{-t}{\tau}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu_0 NI_0 r}{2\tau}\exp(\frac{-t}{\tau})\hat{\phi}$$

مثال ۲۸: دو صفحه رسانا به مساحت A و چگالی بار سطحی $\pm\sigma_0$ به فاصله d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این خازن مطابق شکل در مدار قرار داده شده است. اگر کلید S در مدار بسته شود، میدان مغناطیسی در لحظه‌ی t در فاصله a از محور z و بین صفحات خازن، کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)



۱) $\vec{B} = \frac{\mu_0 a\sigma_0 d}{2R\varepsilon_0 A}\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_0 A})\hat{k}$

۲) $\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2\sigma_0}{2R\varepsilon_0 A}\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_0 A})\hat{k}$

۳) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 a^2\sigma_0}{R\varepsilon_0 A}\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_0 A})\hat{\phi}$

۴) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 a\sigma_0 d}{2R\varepsilon_0 A}\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_0 A})\hat{\phi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یک میدان الکتریکی در جهت $+\hat{z}$ خواهیم داشت، در نتیجه یک جریان جابه‌جایی درجهت $+\hat{z}$ داریم که منجر به میدان مغناطیس در جهت $\hat{\varphi}$ می‌شود. از رابطه‌ی خازن و جریان داریم $i=-C\frac{dv}{dt}$ که C ظرفیت خازن و برای $\varepsilon_\circ\frac{A}{d}$ است. اما از رابطه‌ی اهمی داریم $Ri=v$.

با ترکیب این دو معادله $-RC\frac{di}{dt}=i$ پس $i=i_\circ\exp(-\frac{t}{RC})$، به این ترتیب $i(t)=i_\circ\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_\circ A})$. اما $Ri_\circ=V_\circ$ و $V_\circ=\frac{Q_\circ}{C}$

پس $V_\circ=\frac{\sigma_\circ A}{C}=\frac{\sigma_\circ d}{\varepsilon_\circ}$.

بنابراین:

$$i_\circ\frac{V_\circ}{R}=\frac{\sigma_\circ d}{R\varepsilon_\circ}$$

از قانون آمپر، برای اینکه میدان را پیدا کنیم، یک حلقه‌ی فرضی با شعاع a رسم می‌کنیم. مقدار جریان از $i(t)$ که از این حلقه می‌گذرد، با نسبت مساحت این دایره و کل خازن که از آن $i(t)$ می‌گذرد، متناسب است.

$$I=i(t)\frac{\pi a^2}{A}\to\vec{B}=\frac{\mu_\circ\pi a^2(i(t))}{A\underbrace{(2\pi a)}_{\text{محیط دایره}}}(-\hat{\varphi})$$

از آنجایی که i در جهت خلاف v یعنی در جهت $-\hat{z}$ است، خواهیم داشت:

$$\vec{B}=\frac{-\mu_\circ a}{2A}(i_\circ=\frac{\sigma_\circ d}{R\varepsilon_\circ})\exp(-\frac{td}{R\varepsilon_\circ A})\hat{\varphi}=\frac{-\mu_\circ a\sigma_\circ d}{2R\varepsilon_\circ A}\exp(\frac{-td}{R\varepsilon_\circ A})\hat{\varphi}$$

مثال ۲۹: میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود برابر $\vec{E}=E_\circ\cos(\omega t+\beta z)\hat{x}$ است. القاء مغناطیسی $\vec{B}$ این موج کدام است؟ $E_\circ$، ω و β ضرایب ثابتی هستند. (فوتونیک ـ سراسری ۹۶)

۱) $\vec{B}=\frac{\beta}{\omega}E_\circ\cos(\omega t+\beta z)\hat{z}$

۲) $\vec{B}=\beta\omega E_\circ\sin(\omega t+\beta z)\hat{z}$

۳) $\vec{B}=+\frac{\omega}{\beta}E_\circ\cos(\omega t+\beta z)\hat{y}$

۴) $\vec{B}=-\frac{\beta}{\omega}E_\circ\sin(\omega t+\beta z)\hat{y}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق معادلات کرل ماکسول داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

که کرل میدان الکتریکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ E_\circ\cos(\omega t+\beta z)&\circ&\circ\end{vmatrix}=-\hat{y}E_\circ\beta\sin(\omega t+\beta z)$$

پس با جایگذاری در معادله بالا جواب به صورت زیر ساده می‌شود:

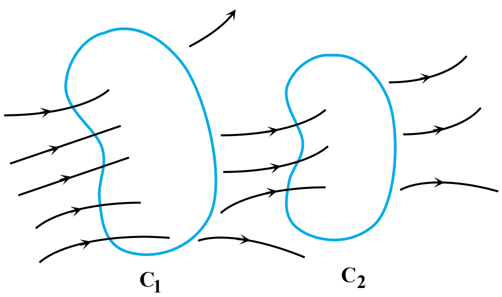
$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-E_\circ\beta\sin(\omega t+\beta z)\hat{y}\Rightarrow\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=E_\circ\beta\sin(\omega t+\beta z)\Rightarrow\vec{B}=-\frac{E_\circ\beta}{\omega}\cos(\omega t+\beta z)$$

توضیح: در صورت سؤال به جای کسینوس، سینوس گذاشته شود، جواب سنجش که گزینه (۴) است، به دست می‌آید.

$$E=E_\circ\sin(\omega t+\beta z)\hat{y}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{\partial}{\partial z}E_n\hat{a}_y=\beta E_\circ\hat{a}_y\cos(\omega t+\beta z)\Rightarrow\vec{B}=-\frac{\beta}{\omega}E_\circ\hat{a}_y\sin(\omega t+\beta z)$$

درسنامه (۳): ضرایب خودالقایی و القای متقابل

دو مدار تک حلقه‌ای C_1 و C_2 را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر مدار C_1 حامل جریان I_1 باشد، میدان مغناطیسی $\vec{B}_1$ را تولید می‌کند که کاملاً با مدار C_1 و بخشی از آن با مدار C_2 پیوند پیدا می‌کند.



اگر شار کل گذرنده از مدار C_1 و ناشی از جریان I_1 را با ϕ_{11} و شار کل گذرنده از مدار C_2 و ناشی از جریان مدار C_1 را با ϕ_{21} نشان دهیم، ضرایب خودالقایی (مدار C_1) و القای متقابل (بین مدارهای C_1 و C_2) به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boxed{L_{11}=\frac{N_1\phi_{11}}{I_1}} \quad , \quad \boxed{M_{21}=\frac{N_2\phi_{21}}{I_1}}$$

در این روابط N_1 و N_2 به ترتیب تعداد دورهای مدارهای C_1 و C_2 هستند.

ضرایب خود القایی و القای متقابل وابسته به آرایش فیزیکی مدار هستند که یکای آن‌ها هانری (H) و معادل وبر بر آمپر $(\frac{Wb}{A})$ است. با توجه به این که هانری یکای نسبتاً بزرگی است، این ضرایب را معمولاً برحسب میلی هانری (mH) بیان می‌کنیم. همان‌طور که ضریب القای متقابل M_{21} را معرفی کردیم می‌توانیم ضریب القای متقابل M_{12} را هم تعریف کنیم. اگر فرض کنیم مدار C_2 حامل جریان I_2 باشد و از مدار C_1 شار کل ϕ_{12} ناشی از جریان I_2 بگذرد، آن‌گاه M_{12} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_{12}=\frac{N_1\phi_{12}}{I_2}$$

در این رابطه N_1 تعداد دورهای مدار C_1 می‌باشد. اگر محیطی که مدارهای C_1 و C_2 در آن قرار گرفته‌اند خطی باشد (یعنی ماده فرومغناطیس در کار نباشد) آن‌گاه داریم:

$$M_{12}=M_{21}$$

در محاسبه ضریب خودالقایی موارد زیر را در نظر داشته باشید.

۱ـ برای محاسبه ضریب خودالقایی یک مدار، جریان I (با توزیع خطی، سطحی یا حجمی برحسب موقعیت مسئله) را در مسیر بسته مدار در نظر بگیرید و میدان مغناطیسی حاصل از آن را حساب کنید. سپس مقدار کل شار گذرنده از سطح مسیر جریان را از رابطه $\phi=\iint N\vec{B}.d\vec{s}$ به‌دست آورید. ضریب خود القایی مدار از رابطه $L=\frac{\phi}{I}$ حساب می‌شود.

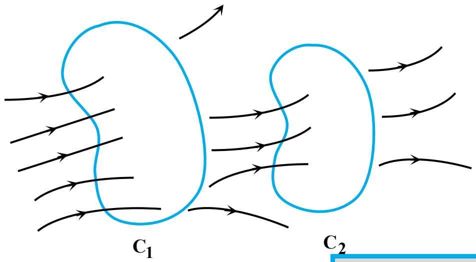
۲ـ برای محاسبه ضریب القای متقابل بین دو مدار یکی از مدارها را انتخاب کنید و جریان I_1 را برای آن در نظر بگیرید. معمولاً مداری را برای این منظور در نظر بگیرید که محاسبه میدان آن ساده‌تر باشد. سپس میدان مغناطیسی حاصل از آن مدار را محاسبه کنید. در مرحله بعد شار کل گذرنده از مدار دیگر (ϕ_{21}) را به‌دست آورده و سرانجام نسبت $\frac{\phi_{21}}{I_1}$، ضریب القای متقابل بین دو مدار را تعیین می‌کند.

۳ـ ضرائب خودالقایی و القای متقابل مثل ظرفیت و مقاومت فقط به شکل و ابعاد هندسی مدارها و پارامترهای محیط بستگی دارند و مستقل از جریانهای مدارها هستند. البته لازم است بدانید که ضرائب خودالقایی یا القای متقابل مستقل از چگالی جریان نخواهد بود. در واقع چگالی جریان به نوعی ویژگی‌های ساختاری مدار مورد نظر را بیان می‌کند. مثلاً اگر جریان I با چگالی یکنواخت $\vec{J}=\frac{I}{\pi a^2}\hat{a}_z$ از یک هادی استوانه‌ای شکل طویل به شعاع a که محور آن در امتداد محور z قرار دارد رد شود، ضریب خودالقایی داخلی آن در واحد طول $\frac{\mu_0}{8\pi}$ خواهد بود. اما اگر جریان I با چگالی غیر یکنواخت $\vec{J}=J_0\frac{r}{a}\hat{a}_z$ از همین هادی عبور کند، ضریب خود القایی داخلی آن در واحد طول مقدار $\frac{\mu_0}{12\pi}$ را اختیار می‌کند.

۴ـ ضریب القای متقابل بین دو مدار C_1 و C_2 را می‌توانید از رابطه مقابل، موسوم به فرمول نویمن نیز به دست آورید:

$$M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1.d\vec{l}_2}{r}$$

اگر مثل شکل روبرو دو مدار $C_۱$ و $C_۲$ داشته باشیم که بین آن‌ها القای متقابل وجود داشته باشد، آنوقت کل انرژی مغناطیسی ذخیره شده در این دو مدار برابر مجموع انرژی‌های ناشی از $L_۱$ و $L_۲$ و $M_{۱۲}$ (یا $M_{۲۱}$) است:



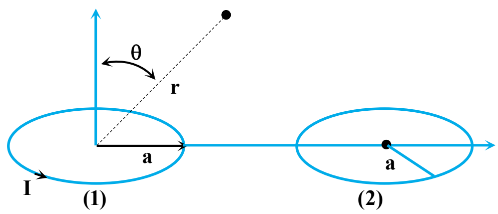
$$\boxed{W_m = W_۱ + W_۲ + W_۳ \Rightarrow W_m = \frac{۱}{۲}L_۱I_۱^۲ + \frac{۱}{۲}L_۲I_۲^۲ \pm M_{۱۲}I_۱I_۲}$$

می‌دانید علامت مثبت مربوط به چه حالتی است؟ حالتی که جهت جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ به صورتی باشد که میدان‌های مغناطیسی ناشی از آن‌ها همدیگر را تقویت کنند؛ ولی اگر جهت جریان طوری باشد که میدان مغناطیسی ناشی از آن‌ها در جهت خلاف همدیگر باشند، باید علامت منفی را به کار ببریم.

مثال ۳۰: دو حلقهٔ رسانای نازک به شعاع a در صفحه xy به فاصلهٔ r از همدیگر قرار دارند. در صورتی که $r >> a$ باشد، القای متقابل آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\mu_۰\pi a^۳}{۲r^۳}$ ۲) $\frac{\mu_۰\pi a^۳}{r^۲}$ ۳) $\frac{\mu_۰\pi a^۴}{۴r^۳}$ ۴) $\frac{\mu_۰ a^۲}{۴r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجایی که $r >> a$ از تقریب دو قطبی مغناطیسی استفاده می‌کنیم.



$$\vec{B}_۱ = \frac{\mu_۰\pi a^۲ I}{۴\pi r^۳}(۲\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta)$$

چون دو حلقه در صفحه xy قرار دارند بنابراین داریم:

$$\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \vec{B}_۱ = \frac{\mu_۰\pi a^۲ I}{۴\pi r^۳}\hat{a}_\theta$$

همان‌طور که می‌بینیم در $\theta = \frac{\pi}{۲}$ میدان در جهت $\hat{a}_\theta$ خواهد بود که در این زاویه $\hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$ می‌باشد. بنابراین شار گذرنده از حلقه دوم برابر است با:

$$\phi_{۲۱} = \vec{B}.\vec{S} = \frac{\mu_۰\pi a^۲ I}{۴\pi r^۳}\times\pi a^۲ = \frac{\mu_۰\pi a^۴}{۴r^۳}I$$

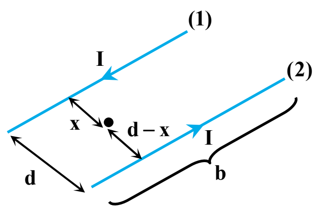
حال می‌توانیم با استفاده از رابطه $M_{۲۱} = \frac{\phi_{۲۱}}{I}$ القای متقابل دو حلقه را به دست آوریم:

$$M_{۲۱} = \frac{\phi_{۲۱}}{I} \Rightarrow M_{۲۱} = \frac{\mu_۰\pi a^۴}{۴r^۳}$$

مثال ۳۱: دو سیم طویل به موازات یکدیگر قرار گرفته‌اند. فاصلهٔ دو محور آنها d و شعاع هر یک برابر a است. چنانچه دو سیم حامل جریان‌های با شدت مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند و از شار درون سیم‌ها صرف‌نظر کنیم، کدام گزینه ضریب القاء سیستم در واحد طول را به درستی بیان می‌کند؟

۱) $L = \frac{\mu_۰}{\pi}\ln\frac{d^۲}{a}$ ۲) $L = \frac{\mu_۰}{\pi}\ln\frac{d}{a^۲}$ ۳) $L = \frac{\mu_۰}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$ ۴) $L = \frac{۲\mu_۰}{\pi}\ln\frac{d}{a}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» فرض می‌کنیم که دو سیم مطابق شکل قرار گرفته باشند. برای به دست آوردن ضریب القای سیستم ابتدا باید میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم را به دست آوریم. با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی در یک نقطه بین دو سیم به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\oint\vec{B}_۱.d\vec{l} = \mu_۰ I \Rightarrow B_۱(۲\pi x) = \mu_۰ I \Rightarrow B_۱ = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi x}$$

$$\oint\vec{B}_۱.d\vec{l} = \mu_۰ I \Rightarrow B_۲(۲\pi(d-x)) = \mu_۰ I \Rightarrow B_۲ = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi(d-x)}$$

چون جریان‌ها در جهت خلاف هم هستند بنابراین میدان‌های آن‌ها در بین دو سیم با هم جمع می‌شوند:

$$B = B_۱ + B_۲ = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi}(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{d-x})$$

حال با گرفتن انتگرال سطحی از میدان روی سطح بین دو سیم، شار مغناطیسی گذرنده از این سطح را به دست می‌آوریم:

$$\phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{s} = b\frac{\mu_۰ I}{۲\pi}[\int_a^{d-a}\frac{dx}{x} + \int_a^{d-a}\frac{dx}{d-x}] \Rightarrow \phi = \frac{\mu_۰ Ib}{\pi}Ln\frac{d-a}{a}$$

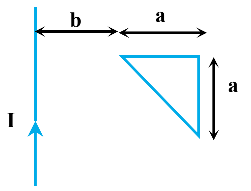
حال که مقدار شار را به دست آوردیم، پس می‌توانیم با استفاده از رابطه $L=\frac{\phi}{I}$ مقدار اندوکتانس را محاسبه کنیم:

$$L=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_\circ b}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

از آنجایی که اندوکتانس در واحد طول خواسته شده است L را بر طول سیم‌ها تقسیم می‌کنیم:

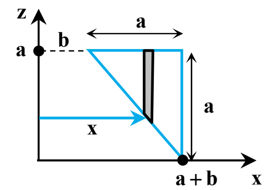
$$L'=\frac{L}{b}=\frac{\mu_\circ}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

مثال ۳۲: **سیم بلندی با جریان دائم I و حلقه‌ای به صورت مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل زیر مفروض‌اند. ضریب القای متقابل این دو در کدام یک از گزینه‌های زیر به درستی بیان شده است؟**



۱) $\frac{\mu_\circ}{۲\pi}[a-b\ln(۱+\frac{a}{b})]$
۲) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}[a-b\ln(۱+\frac{a}{b})]$
۳) $\frac{\mu_\circ}{۲\pi}[a-b\ln(۱+\frac{b}{a})]$
۴) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}[a-b\ln(۱+\frac{b}{a})]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون محیط خطی است، اندوکتانس متقابل بین دو سیم یکسان می‌باشد $(M_{۲۱}=M_{۱۲})$. برای به دست آوردن اندوکتانس متقابل آن‌ها باید شار مغناطیسی گذرنده از سیم به صورت مثلث قائم‌الزاویه را به دست آوریم. برای این کار اول میدان مغناطیسی ناشی از سیم بلند را با استفاده از قانون آمپر حساب می‌کنیم:



$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi x}\hat{a}_\varphi$$

برای به دست آوردن شار گذرنده از مثلث قائم‌الزاویه، طبق شکل از میدان مغناطیسی روی سطح مثلث انتگرال می‌گیریم. توجه کنید که برای به دست آوردن بازه‌های انتگرال باید معادله خط مورب را به دست آوریم که برابر با $z=-x+a+b$ می‌باشد؛ بنابراین داریم: $-x+a+b<z<a\ ,\ b<x<b+a$

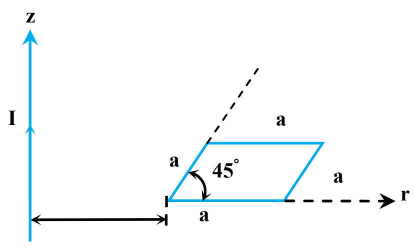
حال با انتگرال‌گیری روی بازه‌های بالا می‌توان نوشت:

$$\phi=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_b^{b+a}\int_{-x+a+b}^{a}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi x}dz\,dx \Rightarrow \phi=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\{-b\int_b^{b+a}\frac{dx}{x}+\int_b^{b+a}dx\}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\{a-b\ln\frac{a+b}{b}\}$$

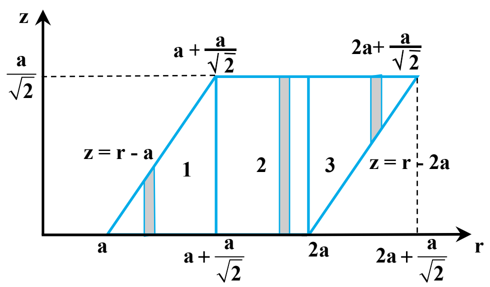
با استفاده از رابطه $M=\frac{\phi}{I}$ داریم:

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\{a-b\ln\frac{a+b}{b}\}$$

مثال ۳۳: **جریان $I_۱$ روی محور zها و حلقه سیم نازکی به شکل متوازی‌الاضلاع که طول هر ضلع آن برابر a می‌باشد مطابق شکل در فضای آزاد مفروض است. ضریب القاء متقابل را به دست آورید.**



۱) $L_{۲۱}=\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}[\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}\ln(۴+\sqrt{۲})-۳\ln۲]$
۲) $L_{۲۱}=\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}[۳\ln۲-\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}\ln(۲+\sqrt{۲})]$
۳) $L_{۲۱}=\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}[\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}\ln(۴+\sqrt{۲})-\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}\ln(۲+\sqrt{۲})-۳\ln۲]$
۴) $L_{۲۱}=\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}[۳\ln۲-\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}\ln(۲+\sqrt{۲})+\ln(۴+\sqrt{۲})]$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا میدان مغناطیسی حاصل از جریان سیم را به دست می‌آوریم. سپس مطابق شکل، متوازی‌الاضلاع را به سه بخش تقسیم می‌کنیم و با استفاده از رابطه $\phi=\iint_S \vec{B}.d\vec{s}$ شار گذرنده از هر قسمت را به دست می‌آوریم. کل شار گذرنده از متوازی‌الاضلاع برابر جمع شار گذرنده از همه قسمت‌ها می‌باشد. در پایان با تقسیم کل شار بر جریان I ضریب القای متقابل را به دست می‌آوریم. با استفاده از قانون آمپر، اندازه میدان مغناطیسی ناشی از سیم جریان برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}$$

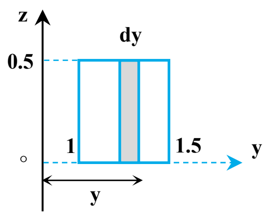
$$\phi_1=\int_a^{a+\frac{a\sqrt{2}}{2}}\int_0^{r-a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}dz\,dr=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}-a\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\ ;\ \phi_2=\int_{a+a\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2a}\int_0^{a\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}dzdr=\frac{\mu_0 I_1 a\sqrt{2}}{4\pi}\ln\frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

$$\phi_3=\int_{2a}^{2a+a\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{r-2a}^{a\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}dzdr=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[\left(2a+a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ln\frac{4+\sqrt{2}}{4}-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\phi_{21}=\phi_1+\phi_2+\phi_3\Rightarrow M_{21}=\frac{\phi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}\ln(4+\sqrt{2})-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\ln(2+\sqrt{2})-3\ln 2\right]$$

مثال ۳۴: **اندوکتانس متقابل مابین حلقه فیلامان مربعی شکل در صفحه $x=0$ با رأس‌های $(0,1,0),(0,1/5,0),(0,1/5,0/5),(0,1,0/5)$ و یک فیلامان بی‌نهایت در امتداد محور z ها کدام است؟**

۱) $0/02\mu H$ ۲) $0/04\mu H$ ۳) $0/08\mu H$ ۴) $0/12\mu H$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون دو فیلامان در محیط خطی هستند، بنابراین اندوکتانس متقابل آن‌ها با هم مساوی می‌باشد $M_{12}=M_{21}$. برای به دست آوردن اندوکتانس متقابل آن‌ها مانند شکل فرض می‌کنیم که جریان I از فیلامان بی‌نهایت عبور می‌کند. سپس با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی آن را به‌دست می‌آوریم. با دانستن مقدار میدان مغناطیسی می‌توانیم شار گذرنده از فیلامان مربعی را به دست آوریم. در نهایت با استفاده از رابطه $M=\frac{\phi}{I}$ مقدار اندوکتانس متقابل را به دست می‌آوریم.

اندازه میدان مغناطیسی فیلامان بی‌نهایت با استفاده از قانون آمپر برابر می‌باشد با:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

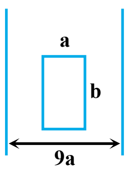
با استفاده از رابطه $\phi=\iint_S\vec{B}.d\vec{s}$ شار گذرنده از فیلامان مربعی را به دست می‌آوریم. توجه شود که میدان مغناطیسی در امتداد ضلعی از مربع که روی محور y قرار گرفته است، تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\phi=\iint_S\vec{B}.d\vec{s}=\int_0^{0/5}\int_1^{1/5}\frac{\mu_0 I}{2\pi y}dydz=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{Ln}(1/5)$$

حال که مقدار شارگذرنده از فیلامان مربعی را به دست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از رابطه $M=\frac{\phi}{I}$ اندوکتانس متقابل بین آن‌ها را به دست آوریم:

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{Ln}(1/5)=0/04\mu H$$

مثال ۳۵: **دو سیم بلند به فاصلهٔ 9a از یکدیگر و یک سیم مستطیل شکل در وسط این دو سیم و به ابعاد a و b در یک صفحه افقی قرار دارد. القای متقابل آن‌ها برابر است با:**



۱) $\frac{a\mu_0}{\pi}\ln\frac{10}{9}$ ۲) $\frac{b\mu_0}{2\pi}\ln\frac{10}{9}$

۳) $\frac{b\mu_0}{\pi}\ln\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{a\mu_0}{\pi}\ln\frac{5}{4}$

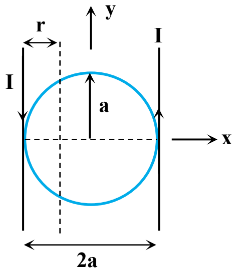
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر فرض کنیم که در سیم‌ها جریان I و در جهت خلاف هم وجود داشته باشد شار گذرنده از سطح مستطیل شکل دو برابر شار ناشی از هر سیم می‌باشد. بنابراین شار گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\phi=2\int_{4a}^{5a}\frac{\mu_0 Ibdr}{2\pi r}=\frac{\mu_0 bI}{\pi}\ln\frac{5}{4}$$

بدین ترتیب القای متقابل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0 b}{\pi}\ln\frac{5}{4}$$

مثال ۳۶: **دو سیم بسیار طویل به موازات هم و حامل جریان مخالف هم هستند و در فاصله ۲a از هم قرار گرفته‌اند. یک حلقه هادی دایره‌ای به شعاع a در صفحه بین دو سیم قرار می‌دهیم. اندوکتانس متقابل بین حلقه دایره‌ای و دو سیم هادی چقدر است؟**



۱) $\frac{۳}{۲}\mu_\circ a$

۲) $۳\mu_\circ a$

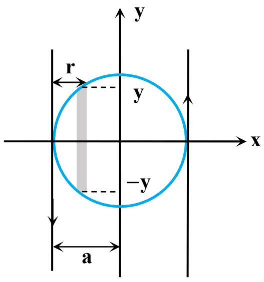
۳) $۲\mu_\circ a$

۴) $\mu_\circ a$

پاسخ: گزینه «۳» میدان مغناطیسی در نقطه‌ای بین دو سیم هادی در فاصله r از یکی از دو سیم برابر است با:

$$\vec{B}(r)=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\left(\frac{۱}{r}+\frac{۱}{۲a-r}\right)\hat{z}$$

شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه برابر است با:



$$\phi=\int\vec{B}(r).d\vec{s}=۲\int_\circ^a\vec{B}(r).۲yd r\hat{z}$$

$$=۲\int_\circ^a\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\left(\frac{۱}{r}+\frac{۱}{۲a-r}\right)\hat{z}.(۲\sqrt{a^۲-(a-r)^۲}\,dr\hat{z})$$

با تغییر متغیر $a-r=u$:

$$\phi=۲\int_\circ^a\frac{\mu_\circ I}{\pi}\left(\frac{۱}{a-u}+\frac{۱}{a+u}\right)\sqrt{a^۲-u^۲}\,du=\frac{۲\mu_\circ I}{\pi}\int_\circ^a\frac{۲adu}{\sqrt{a^۲-u^۲}}\quad\Rightarrow\phi=\frac{۴\mu_\circ Ia}{\pi}\sin^{-۱}\frac{u}{a}\Big|_\circ^a=۲\mu_\circ Ia\;\Rightarrow M=\frac{\phi}{I}=۲\mu_\circ a$$

ضرایب القایی را می‌توانیم مانند خازن، معیاری از میزان انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک القاگر در نظر بگیریم. انرژی ذخیره شده در یک القاگر در نظریه مدار به صورت مقابل بیان می‌شود:

$$W_m=\frac{۱}{۲}LI^۲$$

بنابراین با استفاده از رابطه بالا می‌توانیم ضریب خود القایی یک القاگر را به صورت مقابل به دست آوریم:

$$L=\frac{۲W_m}{I^۲}$$

نکته: انرژی مغناطیسی ذخیره شده در حجم V را می‌توان از طریق میدان مغناطیسی موجود در فضا و طبق روابط زیر محاسبه نمود:

$$W_m=\frac{۱}{۲}\int_V\mu|\vec{H}|^۲\,dv=\frac{۱}{۲}\int_V\frac{|\vec{B}|^۲}{\mu}dv$$

مثال ۳۷: **از یک سیملوله با شعاع a و n دور در واحد طول، جریان I می‌گذرد. ضریب القای خودی در واحد طول سیملوله چقدر است؟**

۱) $\frac{\mu_\circ}{۲}n\pi a^۲$ 　 ۲) $\frac{\mu_\circ}{۲}n^۲\pi a^۲$ 　 ۳) $\mu_\circ n^۲\pi a^۲$ 　 ۴) $\mu_\circ n\pi a^۲$

پاسخ: گزینه «۳» با فرض آنکه محور سیملوله در راستای محور z است، میدان مغناطیسی درون سیملوله از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{H}=nI\hat{a}_z$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده را می‌توان به صورت مقابل تعیین کرد:

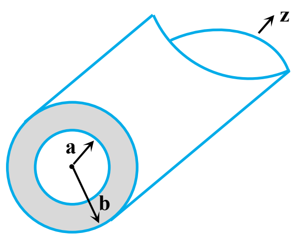
$$W_m=\frac{\mu_\circ}{۲}\int_V|\vec{H}|^۲\,dv=\frac{\mu_\circ}{۲}\int_\circ^۱\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^a n^۲I^۲rdrd\varphi dz$$

$$W_m=\frac{\mu_\circ n^۲I^۲}{۲}(۲\pi)\int_\circ^a rdr=\frac{\mu_\circ n^۲I^۲a^۲\pi}{۲}$$

در نتیجه ضریب خودالقایی برابر است با:

$$L=\frac{۲W_m}{I^۲}=\mu_\circ n^۲\pi a^۲$$

مثال ۳۸: **درون یک کابل هم محور به شعاع‌های a و b $(a<b)$ از یک رسانای غیرمغناطیسی پر شده است. جریانی با چگالی $\vec{J}=\frac{J_\circ}{r}\hat{a}_z$ در این رسانا جاری است. اندوکتانس داخلی واحد طول چقدر است؟**



۱) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi(b-a)^۲}[(b^۲-a^۲)-۴a(b-a)+۲a^۲\ln\frac{b}{a}]$ 　 ۲) $\frac{\mu_\circ}{۶\pi}(b-a)$

۳) $\frac{\mu_\circ}{۳\pi(b-a)^۲}[(b^۲-a^۲)-۴a(b-a)+۲a^۲\ln\frac{b}{a}]$ 　 ۴) $\frac{\mu_\circ}{۳\pi}(b-a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از قانون آمپر، میدان $\vec{H}$ را به دست می‌آوریم:

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = I_{in} \quad \Rightarrow H_{\varphi}(2\pi r) = \int_{0}^{2\pi}\int_{a}^{r}\frac{J_0}{r'}r'dr'd\varphi' \quad \Rightarrow \vec{H} = J_0(1-\frac{a}{r})\hat{a}_{\varphi}$$

همچنین کل جریان عبوری از داخل کابل برابر است با:

$$I = 2\pi J_0(b-a)$$

با استفاده از میدان $\vec{H}$، انرژی مغناطیسی ذخیره شده در کابل را محاسبه می‌کنیم:

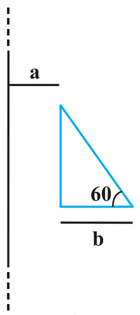
$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0\int_V |\vec{H}|^2 dv = \frac{1}{2}\mu_0 J_0^2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_a^b(1-\frac{a}{r'})^2 r'dr'd\varphi'dz'$$

$$\Rightarrow W_m = \pi\mu_0 J_0^2\int_a^b(r'-2a+\frac{a^2}{r'})dr' \Rightarrow W_m = \mu_0\pi J_0^2[\frac{(b^2-a^2)}{2}-2a(b-a)+a^2\ln\frac{b}{a}]$$

در نتیجه اندوکتانس داخلی برابر است با:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{4\pi(b-a)^2}[(b^2-a^2)-4a(b-a)+2a^2\ln\frac{b}{a}]$$

مثال ۳۹: ضریب القای متقابل بین یک حلقه رسانای مثلثی شکل و یک سیم رسانای مستقیم بسیار بلند که مطابق شکل زیر در کنار هم قرار دارند، کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۲)



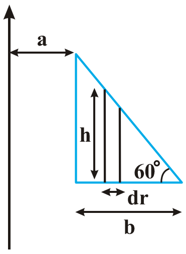
۱) $\frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}((a+b)\ln(1+\frac{a}{b}))$

۲) $\frac{\mu_0}{2\sqrt{3}\pi}((a+b)\ln(1+\frac{b}{a})-b)$

۳) $\frac{\mu_0}{2\sqrt{3}\pi}((a+b)\ln(\frac{b}{a})+b)$

۴) $\frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}((a+b)\ln(1+\frac{b}{a})-b)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا شار عبوری از مثلث را در صورت عبور جریان از سیم راست، به دست می‌آوریم. برای محاسبه‌ی شار، می‌دانیم که میدان مغناطیسی اطراف یک سیم حامل جریان I، به صورت $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ می‌باشد که r فاصله از سیم حامل جریان می‌باشد.



المان سطح را با توجه به شکل به دست می‌آوریم. $dA = dr \times h$

از طرفی با توجه به اینکه زاویه‌ی مثلث معلوم است می‌توان h را بر حسب r نوشت:

$$\text{tg}60 = \frac{h}{(a+b-r)} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{(a+b-r)} \Rightarrow h = \sqrt{3}(a+b-r)$$

با انتگرال‌گیری، می‌توانیم شار عبوری از کل مثلث را به دست آوریم.

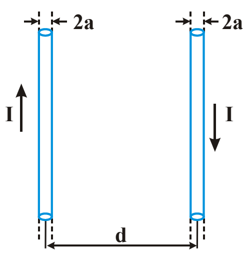
$$\phi = \int BdA = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sqrt{3}(a+b-r)dr \Rightarrow \phi = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{a+b}(\frac{a+b}{r}-1)dr \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}((a+b)\int_a^{a+b}\frac{dr}{r}-\int_a^{a+b}dr) \Rightarrow \phi = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}((a+b)\ln(\frac{a+b}{a})-b) \Rightarrow \phi = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}[(a+b)\ln(1+\frac{b}{a})-b]$$

حال می‌توان ضریب القای متقابل را با داشتن ϕ و استفاده از رابطه‌ی مقابل، به دست آورد.

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}[(a+b)\ln(1+\frac{b}{a})-b]$$

مثال ۴۰: در شکل زیر دو سیم بسیار باریک موازی به فاصله d از هم قرار دارند و هر دو حامل شدت جریانی به شدت I در دو جهت مخالف هستند. ضریب خودالقایی در واحد طول این مجموعه کدام است؟ شعاع هر سیم را a بگیرید و $a \ll d$. (فوتونیک ـ سراسری ۹۲)



۱) $\frac{\mu_0}{\pi}\ln(\frac{d}{a})$

۲) $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln(\frac{d}{a})$

۳) $\frac{\mu_0}{\pi}\ln(\frac{d}{a}-1)$

۴) $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln(\frac{d}{a}-1)$

مدرسان شریف

فصل هجدهم

«موجبرها و تشدیدکننده‌های حفره‌ای»

مقدمه

در این فصل، اول به صورت کلی مشخصات امواج منتشرشونده در طول ساختارهای هدایتی یکنواخت را بررسی می‌کنیم. پس از بررسی دو نوع موجبر صفحه موازی و مستطیلی به بحث تشدیدکننده‌ی حفره‌ای که وسیله‌ای برای ذخیره انرژی الکترومغناطیسی است، می‌رسیم.

درسنامه (۱): موجبرها

انتشار امواج در موجبرها

برای انتقال مؤثر نقطه به نقطه توان و اطلاعات موج انرژی، منبع باید جهت‌دار یا هدایت شده باشد. ساختارهای هدایت موج را موجبر می‌گوییم. در این بخش موج‌هایی را بررسی می‌کنیم که در راستای موجبرهای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت نشر می‌شوند. فرض می‌کنیم موج‌ها در راستای z و با ثابت انتشار $\gamma = \alpha + j\beta$ حرکت می‌کنند. وابستگی به z و t برای تمام مؤلفه‌های میدان با فرکانس زاویه‌ای ω به صورت زیر است:

$$H\,,\,E \;\propto\; e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}$$

برای مثال داریم:

$$E(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[E^{\circ}(x,y)e^{(j\omega t-\gamma z)}]$$

حال با توجه به معادلات هلمهولتز (در محیط بدون بار و منبع) می‌دانیم که:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\nabla_{xy}^2\vec{E}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla_{xy}^2\vec{H}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\nabla_{xy}^2\vec{E}+(\gamma^2+k^2)\vec{E}=0 & (1)\\ \nabla_{xy}^2\vec{H}+(\gamma^2+k^2)\vec{H}=0 & (2)\end{cases}$$

در بالا ∇^2 را به دو قسمت تبدیل کردیم. هر کدام از ۲ معادله انتهایی، ۳ معادله دیفرانسیل درجه ۲ برای مؤلفه‌های E و H است. تمام مؤلفه‌های E و H از هم مستقل نیستند. از روابط کرل میان میدان‌ها به روابط زیر می‌رسیم: $(\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}\,,\;\vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E})$

$$H_x^{\circ} = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial x} - j\omega\in\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\right) \quad (3)$$

$$H_y^{\circ} = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial y} + j\omega\in\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x}\right) \quad (4)$$

$$E_x^{\circ} = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\right) \quad (5)$$

$$E_y^{\circ} = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial H_z^{\circ}}{\partial x}\right) \quad (6)$$

که در بالا $h^{2}=\gamma^{2}+k^{2}$. (k عدد موج و γ ثابت انتشار موج در موجبر)

برای تحلیل موجبرها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) اول با توجه به نوع موج $(TM, TE، TEM)$ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱) یا (۲) را برای مؤلفه E_z و H_z حل می‌کنیم.

ب) با محاسبه E_z یا H_z از معادلات (۱) و (۲)، سایر کمیت‌های عرضی موج (E_y, E_x, H_y, H_x) را از طریق معادلات ۳، ۴، ۵ و ۶ به‌دست می‌آوریم.

انتشار TEM در موجبر

از آنجا که برای موج‌های TEM، $H_z=0$ و $E_z=0$ (با توجه به معادلات ۳ تا ۶) برای آنکه موج در آن منتشر شود باید $h=0$ باشد، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\gamma_{TEM}^{2}+k^{2}=0 \to \gamma_{TEM}=jk=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

سرعت فاز برای موج‌های TEM اینگونه است:

$$v_p(TEM)=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

از روی روابط کرل بین میدان‌ها هم می‌توانیم امپدانس موج را به دست آوریم:

$$\boxed{Z_{TEM}=\frac{E_x^{\circ}}{H_y^{\circ}}=\frac{j\omega\mu}{\gamma_{TEM}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta \qquad (\Omega)}$$

Z_{TEM} همان امپدانس ذاتی محیط دی‌الکتریک است. می‌توان فرمول کلی زیر را برای موج TEM منتشر شونده در راستای Z به دست آوریم:

$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{Z_{TEM}}\vec{a}_z\times\vec{E}(\frac{A}{m})}$$

نکته۱: دقت کنید که موجبرهای تک رسانا نمی‌توانند موج‌های TEM را منتشر کنند. زیرا مؤلفه E_z نداریم. در غیاب رسانای داخلی جریان هدایتی طولی هم نداریم. با توجه قانون آمپر انتگرال خطی میدان مغناطیسی روی صفحه عرضی برابر جمع جریان‌های طولی است. از آنجا که این جمع صفر است، پس هیچ حلقه‌ی بسته‌ای از میدان مغناطیسی روی صفحه عرضی نداریم. بنابراین TEM نمی‌تواند در یک موجبر تک رسانایی منتشر شود.

انتشار امواج TM (مغناطیسی عرضی) در موجبر

در این امواج $H_z=0$ است، پس اول باید E_z را با توجه به معادلات مرزی از رابطه‌ی زیر باید به دست بیاوریم: $\nabla_{xy}^{2}E_z^{\circ}+h^{2}E_z^{\circ}=0 \quad (h^{2}=\gamma^{2}+k^{2})$

با قرار دادن $H_z=0$ در معادلات (۳ تا۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}H_x^{\circ}=\dfrac{j\omega\varepsilon}{h^{2}}\dfrac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\\[2ex] H_y^{\circ}=-\dfrac{j\omega\varepsilon}{h^{2}}\dfrac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x}\end{cases} \qquad \begin{cases}E_x^{\circ}=-\dfrac{\gamma}{h^{2}}\dfrac{\partial E_z^{\circ}}{\partial x}\\[2ex] E_y^{\circ}=-\dfrac{\gamma}{h^{2}}\dfrac{\partial E_z^{\circ}}{\partial y}\end{cases}$$

حالا با توجه به معادلات بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{Z_{TM}=\frac{E_x^{\circ}}{H_y^{\circ}}=-\frac{E_y^{\circ}}{H_x^{\circ}}=\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}} \quad , \quad \boxed{\vec{H}=\frac{1}{Z_{TM}}(\vec{a}_z\times\vec{E})}$$

وقتی معادله هلمهولتز را برای شرایط مرزی خاص یک موجبر حل می‌کنیم، متوجه می‌شویم که جواب برای مقادیر گسسته‌ای از h وجود دارد.

هر کدام از این مقادیر h برای آن مؤلفه‌ی موج یک ثابت انتشار خاص می‌دهد: $\gamma=\sqrt{h^{2}-k^{2}}=\sqrt{h^{2}-\omega^{2}\mu\varepsilon}$

فرکانسی که در آن $\gamma=0$ است را فرکانس قطع می‌گوییم. مقدار f_c برای یک مد خاص به مقدار ویژه آن مد (h) بستگی دارد: $f_c=\dfrac{h}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

حالا می‌توانیم دو حالت زیر را برای γ درنظر بگیریم $(\gamma=h\sqrt{1-(\frac{f}{f_c})^{2}})$:

الف) $(\frac{f}{f_c})^{2}>1$: در این حالت، ثابت فاز γ موهومی است و داریم $(\gamma=j\beta)$: $\beta=k\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^{2}}$

طول موج هدایت کننده، برابر است با:

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}>\lambda$$

در رابطه بالا $\lambda=\frac{u}{f}=\frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{2\pi}{k}$، رابطه $\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda_g^2}+\frac{1}{\lambda_c^2}$ هم داریم که λ_c برابر $\frac{u}{f_c}$ است و طول موج قطع نامیده می‌شود. سرعت فاز موج منتشر شده در موجبر هم برابر است با:

$$u_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{u}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}=\frac{\lambda_g}{\lambda}u>u$$

سرعت فاز موجود در یک موجبر همیشه بزرگتر از سرعت فاز در محیط نامحدود است و وابسته به فرکانس می‌باشد. اما ایـن مسـأله نـاقض نسـبیت خـاص نیست چون سرعت گروه است که سرعت انتقال انرژی است.

موجبرهای تک هادی، سیستم انتقال پراکنده‌ساز هستند، هر چند محیط دی‌الکتریک بی‌اتلاف نامحدود، پراکنده‌ساز نمی‌باشد.

سرعت گروه موج منتشر شوند. در یک موجبر را از رابطه مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$u_g=u\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}=\frac{\lambda}{\lambda_g}u<u$$

$$u_g=\frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}$$

بنابراین داریم:

$$\boxed{u_g.u_p=u^2}$$

ب) $(\frac{f}{f_c})^2<1$: تضعیف موج خواهیم داشت مؤلفه‌های میدان شامل ضریب تضعیف $e^{-\alpha z}$ بوده و موج به سرعت با z تضعیف شده و میرا می‌شود. پس موجبر خاصیت یک فیلتر بالاگذر را به نمایش می‌گذارد. به عبارت دیگر در یک مد مشخص فقط امواجی با فرکانس بالاتر از فرکانس قطع آن مد می‌توانند در هدایت‌کننده انتشار یابند.

مثال ۱: امپدانس موج را در فرکانس دو برابر فرکانس قطع و در فرکانس نصف فرکانس قطع مدهای TM در موجبر را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** بر طبق گفته مثال فرکانس‌ها به صورت مقابل می‌باشند:

$$f_1=2f_c$$

$$f_2=\frac{f_c}{2}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z_{TM}=\eta\sqrt{1-(\frac{f_c}{f_1})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\eta=0/866\,\eta<\eta$$

$$Z_{TM}=-j\frac{h}{\omega\varepsilon}\sqrt{1-(\frac{f_2}{f_c})^2}=-j\,0/276\frac{h}{f_c\varepsilon}$$

مشاهده می‌شود که برای مدهای غیرانتشاری امپدانس موج عددی مختلط شده است.

انتشار موج TE در موجبر

در این حالت $E_z=0$ است، برای H_z معادله $\nabla^2\times yH_z+h^2H_z=0$ را با توجه به شرایط مرزی خاص حل می‌کنیم و H_z را در معادلات ۳ تا ۶ قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases}E_x^\circ=-\frac{j\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_z^\circ}{\partial y}\\ E_y^\circ=\frac{j\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_z^\circ}{\partial x}\end{cases}\qquad\begin{cases}H_x^\circ=-\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_z^\circ}{\partial x}\\ H_y^\circ=-\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_z^\circ}{\partial y}\end{cases}$$

حالا با توجه به معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\boxed{Z_{TE}=\frac{E_x^\circ}{H_y^\circ}=-\frac{E_y^\circ}{H_x^\circ}=\frac{j\omega\mu}{\gamma}}$$

$$\boxed{\vec{E}=-Z_{TE}(\vec{a}_z\times\vec{H})}$$

فرکانس قطع f_c درست مثل حالت TM است و روابط دقیقاً تکرار می‌شود:

الف) $(\frac{f}{f_c})^2 > 1$: در این حالت γ موهومی و مد انتشار شونده است. β، λ_g، u_p و u_g همان‌هایی به دست می‌آید که برای مد TM بـه دسـت آمـد. فقط امپدانس Z_{TE} تفاوت دارد.

ب) $(\frac{f}{f_c})^2 < 1$: در این حالت γ حقیقی و مد ناپدید شونده یا غیرانتشاری است.

امپدانس موج و طول موج‌های هدایت به ازای بسامدهای بزرگتر از بسامد قطع $(f > f_c)$ را می‌توانید در جدول زیر ببینید:

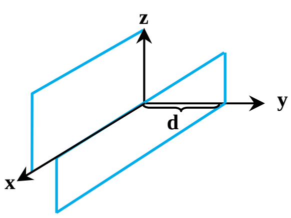
مد	امپدانس موج	طول موج هدایت‌کننده (λ_g)
TEM	$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$
TM	$\eta\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}$	$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$
TE	$\frac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$	$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$

نکته۲: امپدانس موج مدهای $\left.\begin{matrix}\text{TM}\\ \text{TE}\end{matrix}\right\}$ انتشاری در یک موجبر با دی‌الکتریک بی‌اتلاف، دو محدوده‌ی $f > f_c$ حقیقی است. پس مقاومتی خالص بوده و همیشه از امپدانس ذاتی محیط دی‌الکتریک $\left\{\begin{matrix}\text{کمتر}\\ \text{بیشتر}\end{matrix}\right.$ می‌باشد. امپدانس موج مدهای $\left.\begin{matrix}\text{TM}\\ \text{TE}\end{matrix}\right\}$ میراشونده $(f < f_c)$ هم موهومی است، پس راکتیو خالص است و نشان می‌دهد که هیچ گذران توانی همراه امواج میرا وجود ندارد.

چگالی مد (شیوه)های مجاز در یک کاواک تشدیدی: $\frac{dN}{d\omega} = \frac{4V}{\pi^2 C^3}\omega^2$

مثال۲: یک موج الکترومغناطیسی با میدان الکتریکی $\vec{E} = \hat{i}E_0[e^{iky\cos\theta} - e^{-iky\cos\theta}]e^{i(kz\sin\theta-\omega t)}$ بین دو صفحه رسانای بـی‌نهایـت بـزرگ موازی (یکی صفحه xz و دیگری به فاصله d از آن) منتشر می‌شود. بزرگترین طول موجی که این موج می‌تواند داشته باشد کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $d\cos\theta$ ۲) $d\sin\theta$ ۳) d ۴) $2d$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\vec{E} = \hat{i}E_0[e^{iky\cos\theta} - e^{-iky\cos\theta}]e^{i(kz\sin\theta-\omega t)}$$

می‌دانیم در موجبرها رابطه زیر بین طول موجها برقرار است:

$$(\frac{1}{\lambda_g})^2 + (\frac{1}{\lambda_c})^2 = (\frac{1}{\lambda_0})^2 \quad , \quad \frac{d}{\lambda_c} = \frac{n}{2}$$

همچنین، λ_c طول موج قطع است یعنی بزرگترین طول موجی است که برای یک مد مفروض (n) می‌تواند در موجبر انتشار یابد. از طرفی اگر $\lambda_0 > \lambda_c$ باشد موج به جـای اینکه انتشار یابد به طور نمایی میرا می‌شود، پس بزرگترین طول موجی که می‌تواند بدون میرایی انتشار یابد $(n=1) \Leftarrow \lambda_c = 2d$ می‌باشد چون ابعاد موجبر نیز d است.

مثال۳: در یک موجبر که دیواره های آن رسانای ایده‌آل و سطح مقطع آن مربعی به ضلع a است، نسبت کوچکترین بسامد قطع TE به کوچکترین بسامد قطع TM چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» کوچکترین بسامد قطع (بزرگترین طول موج) موج TE در مد TE_{10} اتفاق می‌افتد یعنی:

$$TE_{mn} \to m=1,\ n=0 \Rightarrow (\frac{1}{\lambda_c})^2 = (\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2a})^2 \Rightarrow (\frac{1}{\lambda_c})^2 = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{2a}$$

$$\nu_1 = \frac{C}{\lambda} \Rightarrow \nu_1 = \frac{C}{\lambda_c} = \frac{C}{2a}$$

و کوچکترین بسامد قطع موج TM در مد TM_{11} روی می‌دهد پس طبق روش بالا داریم:

$$TM_{11} \to m=1,\ n=1 \Rightarrow (\frac{1}{\lambda_c})^2 = (\frac{1}{2a})^2 + (\frac{1}{2a})^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_c} = \frac{\sqrt{2}}{2a} \Rightarrow \nu_2 = \frac{\sqrt{2}c}{2a} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال ۴: اگر ω_c فرکانس قطع یک موجبر و ω فرکانس موج هدایت شده باشد سرعت فاز در داخل موجبر کدام است؟

۱) c ۲) $c\dfrac{\omega}{\omega_c}\sqrt{1-(\dfrac{\omega_c}{\omega})^2}$ ۳) $\dfrac{c}{\sqrt{1-(\dfrac{\omega_c}{\omega})^2}}$ ۴) $c\sqrt{1-(\dfrac{\omega_c}{\omega})^2}$

پاسخ: گزینه «۳» رابطه میان سرعت انتشار انرژی یا سرعت گروه به صورت روبرو است: $v_g = c\dfrac{\lambda_\circ}{\lambda_g}$

بنابراین برای سرعت فاز به دست می‌آید: $v_g v_p = c^2 \Rightarrow v_p = \dfrac{c^2}{v_g}$

با توجه به رابطه‌ی طول موج قطع برای موجبرها داریم:

$$(\frac{2\pi}{\lambda_g})^2+(\frac{2\pi}{\lambda_c})^2=(\frac{2\pi}{\lambda_\circ})^2 \quad , \quad TV=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2\pi}{\omega}V=\lambda\\ V=c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}=\frac{\omega}{2\pi c} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$$

با بازنویسی رابطه‌ی فوق برای بسامد خواهیم داشت:

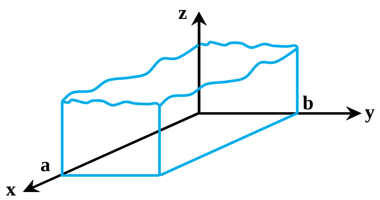
$$(\frac{2\pi}{\lambda_g})^2+\frac{\omega_c^2}{c^2}=\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow (\frac{2\pi}{\lambda_g})^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega_c^2}{c^2} \Rightarrow \lambda_g=\frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}$$

پس برای سرعت فاز می‌توان نوشت:

$$v_g=c\frac{\lambda_\circ}{\lambda_g}=c\frac{(\dfrac{2\pi c}{\omega})}{(\dfrac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}})}=c\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\omega} \Rightarrow v_p=\frac{c^2}{v_g}=\frac{c^2}{c(\dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\omega})}=c\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

مثال ۵: شکل روبه‌رو یک موجبر مکعب مستطیلی شکل با طول a و عرض b $(a>b)$ را نشان می‌دهد. موج عرضی TE الکترومغناطیسی (یعنی $B_x = B_y = \circ$ ولی $E_z = \circ$) گذرنده از این موجبر را به صورت مقابل: $B_z(x,y,z,t)=X(x).Y(y)e^{i(k_\circ z-\omega_\circ t)}$ در نظر بگیرید. سرعت انتقال انرژی الکترومغناطیسی در این موجبر بر حسب $\omega_{MN}=c\pi\sqrt{\left(\dfrac{M}{a}\right)^2+\left(\dfrac{N}{b}\right)^2}$ برای اعداد M و N کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $\dfrac{c}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_{MN}}{\omega}\right)^2}}$ ۲) $c\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_{MN}}{\omega}\right)^2}$ ۳) $c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_{MN}}{\omega}\right)^2}$ ۴) $\dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_{MN}}{\omega}\right)^2}}$

پاسخ: گزینه «۳» سرعت انتشار انرژی عبارت است از: $V_g = c\dfrac{\lambda_\circ}{\lambda_g}$

همچنین داریم: $\dfrac{1}{\lambda_g^2}+\dfrac{1}{\lambda_c^2}=\dfrac{1}{\lambda_\circ^2}$

کافی است از این رابطه نسبت $\dfrac{\lambda_\circ}{\lambda_g}$ را به دست آوریم و در رابطه V_g قرار دهیم.

$$\frac{1}{\lambda_g^2}=\frac{1}{\lambda_\circ^2}-\frac{1}{\lambda_c^2} \to \frac{\lambda_\circ^2}{\lambda_g^2}=1-\frac{\lambda_\circ^2}{\lambda_c^2}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\lambda_\circ=\dfrac{2\pi c}{\omega}\\ \lambda_c=\dfrac{2\pi c}{\omega_{MN}}\end{cases} \to (\frac{\lambda_\circ}{\lambda_g})^2=1-(\frac{\omega_{MN}}{\omega})^2 \to \frac{\lambda_\circ}{\lambda_g}=\sqrt{1-(\frac{\omega_{MN}}{\omega})^2} \Rightarrow V_g=c\sqrt{1-(\frac{\omega_{MN}}{\omega})^2}$$