فصل اول

«آنالیز ترکیبی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ در ظرف n توپ شماره‌دار سیاه و سفید موجود است، به چند طریق آنها را می‌توان دور یک دایره قرار داد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $(n-2)!$ ۲) $(n-2)!\times 2$ ۳) $(n-2)!(n-3)$ ۴) $(n-2)!(n-1)$

۲ـ یک تابع k متغیری را در نظر می‌گیریم اگر این تابع همواره مشتق‌پذیر باشد، چند مشتق مرتبه n ام برای این تابع وجود دارد به طوری که نسبت به یک متغیر بخصوص همواره k بار $(k \le n)$ مشتق گرفته شود؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\binom{n-2}{k-2}$ ۲) $\binom{n-1}{k-2}$ ۳) $\binom{n-1}{k}$ ۴) $\binom{n-1}{k+2}$

۳ـ برای تابع $f(x_1, x_2, ..., x_{10})$ چند مشتق جزئی از مرتبه ۵ وجود دارد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۲۰۰۲ ۳) ۳۰۰۳ ۴) ۳۰۰۳۰

۴ـ ۱۰ سکه بهار آزادی را به چند طریق می‌توان میان ۳ نفر تقسیم تصادفی نمود؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۶۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۰۰۰

۵ـ برای یک تابع n متغیره مانند $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ چند مشتق جزئی از مرتبه‌ی k ممکن است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) C_n^{k+n} ۲) C_n^{k} ۳) C_{n-1}^{k+n-1} ۴) C_{n-1}^{k-1}

۶ـ به چند طریق مختلف می‌توان تعداد ۵ کلید مشابه میله‌ای و ۱۰ کلید مشابه دکمه‌ای را در یک پانل کنترل کنار هم چید طوری که کلید چهارم از نوع میله‌ای باشد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۲۰۰۲ ۳) ۳۰۰۳ ۴) ۴۰۰۴

۷ـ به چند طریق می‌توان ۱۵ پلیس را در سه خیابان A و B و C قرار داد هرگاه تنها تعداد پلیس‌های هر خیابان مهم باشد و اشیاء یکسان در نظر گرفته می‌شوند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۳۶ ۲) ۶۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱

۸ـ مقدار عبارت $\binom{n}{i}$ $\sum_{\text{فرد}}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) 2^{n-1} ۲) $2^n - 1$ ۳) 2^n ۴) $2^{n-1} - 1$

۹ـ تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$ به طوری که k تا از x_i ها برابر صفر باشند، چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{r-1}$ ۲) $\binom{n-1}{r-k-1}$ ۳) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r+k}$ ۴) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{r+k-1}$

۱۰ـ به چند طریق می‌توان ۵ پلیس را در سه خیابان A و B و C قرار داد به طوری که در هر خیابان حداقل یک پلیس قرار گیرد؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) ۹۹ ۲) ۴۴ ۳) ۲۴۳ ۴) ۹۶

۱۱ـ عبارت $\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$ با کدام یک از عبارات زیر برابر است؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $\binom{n}{k}$ ۲) $\binom{n-1}{k-1}$ ۳) $\binom{n}{k-1}$ ۴) k^n

۱۲ـ $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r-1}{i}$ با کدام یک از عبارات زیر برابر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $\binom{n}{r}$ ۲) $\binom{n+r-1}{n}$ ۳) $\binom{n+r}{r}$ ۴) $\binom{n}{i}$

۱۳ـ می‌خواهیم ۳۰ واحد پول را بین ۵ پروژه تقسیم کنیم (با تخصیص مقادیر صحیح و نامنفی). به چند حالت می‌توان این مبلغ را تقسیم نمود که به پروژه دوم حتماً سرمایه‌ای تعلق گیرد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) $\binom{34}{4}$ ۲) $\binom{33}{3}$ ۳) $\binom{33}{4}$ ۴) $\binom{32}{4}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ گزینه «۴» تعداد جایگشت‌های مختلف n شیء روی محیط دایره برابر با $(n-1)!$ است.

$$(n-1)!=(n-1)(n-2)!$$

۲ـ گزینه «۱» اگر تعداد دفعاتی که از متغیر iام مشتق گرفته می‌شود، x_i در نظر گرفته شود $(i=1,\cdots,k)$، آنگاه:

$$x_1+\cdots+x_k=n \quad , \quad x_i\ge 0, i=10,\cdots,k$$

اگر بخواهیم نسبت به یک متغیر همواره k بار مشتق گرفته شود، $n-k$ مرتبه دیگر از $k-1$ متغیر باقی‌مانده مشتق گرفته می‌شود. بنابراین:

$$y_1\cdots+y_{k-1}=n-k \quad , \quad y_i\ge 0 \quad , \quad i=1,\cdots,k-1$$

معادله فوق بیانگر این است که نسبت به یک متغیر k بار مشتق گرفته شده و $n-k$ مشتق دیگر نسبت به $k-1$ متغیر دیگر گرفته می‌شود.

با توجه به این‌که تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $(x_i\ge 0 \quad \forall i=1,\cdots,r)x_1+\cdots+x_r=n$ برابر است با: $\binom{n+r-1}{r-1}$

ملاحظه می‌شود که تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $y_1+\cdots+y_{k-1}=n-k$ برابر است با: $\binom{n-k+(k-1)-1}{(k-1)-1}=\binom{n-2}{k-2}$

۳ـ گزینه «۲» مشتقات جزئی مرتبه ۵ به فرم $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}......\partial x_{10}^{\alpha_{10}}}$ می‌باشد. در واقع تقسیم ۵ مشتق بین ۱۰ متغیر می‌باشد.

تعداد راه‌های قرار دادن r شیء مشابه در n ظرف برابر است با: $\binom{r+n-1}{n-1}$

$$\binom{r+n-1}{n-1}=\binom{10+5-1}{10-1}=2002$$

۴ـ گزینه «۱» تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1+\cdots x_n=r \quad , \quad i=1,\cdots,n \quad x_i\ge 0$ عبارت است از $\binom{n+r-1}{r}$

x_i: تعداد سکه‌هایی که به فرد i ام می‌رسد

$$x_1+x_2+x_3=10 \qquad i=1,2,3$$

لذا تعداد کل حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{10}=\frac{12!}{10!2!}=\frac{12\times 11}{2}=66$$

۵ـ گزینه «۳» مانند تقسیم k مشتق در بین n متغیر متفاوت حالت (۸ جدول) در متن کتاب. $\binom{k+n-1}{n-1}$

۶ـ گزینه «۱» کلید چهارم را از نوع میله‌ای قرار دهیم (انتخاب یک کلید از ۵ کلید مشابه تنها به یک صورت انجام می‌گیرد) اکنون جایگشت ۱۴ کلید را داریم که ۴ کلید آن مشابه میله‌ای و ۱۰ تای آن مشابه دکمه‌ای است: (جایگشت با تکرار) $\dfrac{14!}{10!4!}=(1001)$: تعداد جایگشت‌ها

یادآوری : تعداد جایگشت n شیء که n_1 تا از نوع اول و ... و n_k تا از نوع k ام است برابر است با: $\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}=\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$

۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. دقیقاً حالت ۸ در متن کتاب است:

$$r=15\ ,\ n=3 \Rightarrow \binom{r+n-1}{n-1}=\binom{15+3-1}{3-1}=\binom{17}{2}=\frac{14!}{2!15!}=136$$

۸ـ گزینه «۱» طبق خاصیت (۸) ترکیب می‌دانیم:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0 \Rightarrow \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\ldots(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

و این به مفهوم آن است که $\sum_{i\ \text{فرد}}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i\ \text{زوج}}^{n}\binom{n}{i}$ از طرفی مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای نیز برابر است با 2^n بنابراین:

$$\sum_{i}^{n\ \text{زوج}}\binom{n}{i}+\sum_{i}^{n\ \text{فرد}}\binom{n}{i}=2^n \Rightarrow \begin{cases}\sum_{i\ \text{زوج}}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i\ \text{فرد}}^{n}\binom{n}{i}\\ \sum_{i\ \text{زوج}}^{n}\binom{n}{i}+\sum_{i\ \text{فرد}}^{n}\binom{n}{i}=2^n\end{cases} \Rightarrow \sum_{i\ \text{فرد}}^{n}\binom{n}{i}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

۹ـ گزینه «۳» ابتدا k تا از x_iها را که تعداد x_iها، r می‌باشد برابر با صفر قرار می‌دهیم: بنابراین $r-k$ تا x_i باقی می‌ماند:

$$\binom{r}{k}\binom{n-1}{(r-k)-1}=\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r+k}$$

۱۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. دقیقاً حالت (۳) گفته شده در متن است. تقسیم r مهره متمایز در n جعبه متمایز به طوری که در هر جعبه حداقل یک مهره قرار گیرد.

$$n=3\ ,\ r=5 \quad ; \quad 3^5-\binom{3}{1}2^5+\binom{3}{2}1^5-0=243-96+3=150$$

۱۱ـ گزینه «۱» می‌توانیم از اتحاد چوشی ـ چی استفاده کنیم.

اتحاد چوشی ـ چی : $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

که این مقدار برابر با $\binom{n}{k}$ است.

۱۲ـ گزینه «۳» همانطور که در مثال (۶۴) کتاب ثابت کردیم عبارت $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r-1}{i}$ تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی نامعادله $x_1+x_2+\ldots+x_r\le n$ می‌باشد. از طرفی از روش دیگر با تبدیل نامساوی با مساوی نشان دادیم تعداد جوابها به صورت $\binom{n+r}{r}$ می‌باشند بنابراین:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r-1}{i}=\binom{n+r}{r}$$

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا به پروژه دوم یک واحد سرمایه تعلق می‌گیرد که شرط مسأله رعایت شود. اکنون ۲۹ واحد پول باقیمانده را بین ۵ پروژه تقسیم می‌کنیم:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{29+5-1}{5-1}=\binom{33}{4}$$

فصل دوم

«اصول احتمال و احتمال‌های شرطی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ برای تولید روبات‌های صنعتی دو خط تولید (II, I) در کارخانه‌ای وجود دارد که نرخ تولید ضایعات هر دو یکسان است. ۵ روبات از هر یک از خطوط تولید انتخاب و آزمایش می‌شوند. در بین این ۱۰ روبات چهار عدد ناسالم پیدا می‌شود. احتمال این‌که دقیقاً دو عدد از ناسالم‌ها از خط تولید I آمده باشند، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $\frac{2}{5}$　۳) $\frac{2}{10}$　۴) $\frac{10}{21}$

۲ـ سه جعبه به شماره‌های یک، دو و سه حاوی توپ‌های هم اندازه و هم شکل موجود است. در جعبه‌ی شماره یک، یک توپ آبی و سه توپ سفید است. جعبه‌ی شماره دو، سه توپ آبی و هفت توپ سفید دارد و بالاخره جعبه‌ی شماره سه شامل ۸ توپ آبی و ۲ توپ سفید است. یکی از جعبه‌ها به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و سپس یک توپ از آن به صورت تصادفی خارج می‌شود. احتمال این‌که این توپ آبی باشد، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۵۵　۲) ۰/۴۵　۳) ۰/۳۰　۴) ۰/۲۵

۳ـ از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، یک نمونه ۴تایی انتخاب می‌شود. احتمال این‌که مهره‌های اولی و سومی سفید باشد با کدام گزینه مشخص می‌گردد، مشروط به این‌که در مهره‌های انتخابی ۳ مهره سفید به دست آمده است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $\frac{1}{4}$　۳) $\frac{1}{5}$　۴) $\frac{1}{8}$

۴ـ سه پیشامد A، B و C داده شده، به‌طوری‌که $P(A\cap B\cap C)\neq 0$ و $P(C|A\cap B)=P(C|B)$ می‌باشد، $P(A|B\cap C)$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $P(A|C)$　۲) $P(B|A)$　۳) $P(A|B)$　۴) $P(C|A)$

۵ـ اگر B, A مستقل باشند، کدام رابطه صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $P(A\cap\bar{B})=0$　۲) $P(A-B)=P(A)P(\bar{B})$　۳) $P(A-B)=P(A)-P(B)$　۴) $P(A\cap B)=0$

۶ـ به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند برای بازی والیبال به دو گروه مساوی تقسیم شوند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۲۶　۲) ۱۶۸　۳) ۲۵۲　۴) ۵۰۴

۷ـ سه مهره متمایز را به تصادف بین ۵ ظرف تقسیم می‌کنیم احتمال این‌که در هیچ ظرفی بیش از یک مهره نباشد چقدر است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{25}$　۲) $\frac{10}{25}$　۳) $\frac{11}{25}$　۴) $\frac{12}{25}$

۸ـ فرض کنید A و B دو پیشامد ناسازگار (جدا از هم) با احتمال‌های مثبت باشند. کدام گزینه صحیح است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\bar{A}$ زیر پیشامد B است.　۲) $\bar{B}$ زیر پیشامد A است.

۳) A و B دو پیشامد وابسته هستند.　۴) A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند.

۹ـ فرض کنید A و B دو تیرانداز باشند که با احتمال‌های به ترتیب ۰/۴ و ۰/۷ هدف خود را مورد اثبات قرار می‌دهند. اگر هر کدام تیری به سمت هدف شلیک کنند، احتمال این‌که A هدف را زده باشد، در حالی‌که بدانیم فقط یک تیر به هدف اصابت کرده است، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{9}$　۲) $\frac{4}{9}$　۳) $\frac{7}{9}$　۴) $\frac{4}{11}$

۱۰ـ اگر $P(A)=0/7$ و $P(B)=0/5$ باشد، حداقل و حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $0\le P(A\cap B)\le 0/5$ ۲) $0/2\le P(A\cap B)\le 0/5$ ۳) $0/2\le P(A\cap B)\le 0/7$ ۴) $0/5\le P(A\cap B)\le 0/7$

۱۱ـ یک نمونه سه‌تایی به این ترتیب به دست می‌آید که ابتدا با یک ظرف شامل ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز شروع می‌کنیم و در هر بار که یک توپ از این ظرف خارج می‌شود، این توپ به همراه توپ دیگری از همان رنگ در داخل ظرف قرار داده می‌شود. احتمال این‌که هیچ توپ سفید در نمونه‌ی سه تایی نباشد، چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{52}$ ۲) $\frac{3}{13}$ ۳) $\frac{5}{52}$ ۴) $\frac{5}{13}$

۱۲ـ عدد X_1 به صورت تصادفی از مجموعه $\{1,2,3,4\}$ و عدد X_2 نیز به صورت تصادفی از مجموعه $\{1,2,\dots,x_1\}$ انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که $x_2=1$ باشد، چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{25}{48}$ ۴) $\frac{13}{48}$

۱۳ـ ظرفی با ۱۰ توپ سفید، ۵ توپ زرد و ۱۰ توپ سیاه هم شکل مفروض است. رنگ یکی از توپ‌هایی که به صورت تصادفی از ظرف خارج می‌شود سیاه نیست. احتمال این‌که این توپ زردرنگ باشد، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴ـ فرض کنید از مربع واحد نقطه‌ای به طور تصادفی انتخاب می‌شود. اگر بدانیم این نقطه داخل مستطیل محدود به خطوط $x=0$ ، $y=1$ ، $y=0$ و $x=\frac{1}{2}$ واقع است. احتمال آن‌که این نقطه در داخل مثلث محدود به خطوط $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x+y=1$ باشد، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۵ـ یک نمونه سه‌تایی به این ترتیب به دست می‌آید که ابتدا با یک ظرف شامل ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز شروع می‌کنیم و در هر بار که یک توپ از این ظرف خارج می‌شود، این توپ به همراه توپ دیگری از همان رنگ در داخل ظرف قرار داده می‌شود. احتمال این‌که دقیقاً یک توپ سفید در نمونه سه‌تایی فوق باشد، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{3}{52}$ ۴) $\frac{5}{52}$

۱۶ـ در یک کلاس ترک سیگار، ۴۸ درصد از زن‌ها و ۳۷ درصد از مردها شرکت کرده‌اند و موفق شده‌اند که حداقل یک سال بعد از کلاس، سیگار نکشند. این افراد در پایان یک سال در یک جشن شرکت می‌کنند. اگر ۶۲ درصد از شرکت‌کنندگان در آن کلاس مرد باشند، درصد زن‌هایی که در جشن شرکت کرده‌اند، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۴۴/۳ ۴) ۶۲

۱۷ـ فرض کنید A و B دو تیرانداز باشند که با احتمال‌های $0/6$ و $0/3$ هدف خود را مورد اصابت قرار می‌دهند. اگر هرکدام تیری به هدف شلیک کنند، احتمال این‌که A هدف را زده باشد در حالی‌که بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{6}{9}$ ۳) $\frac{6}{11}$ ۴) $\frac{3}{9}$

۱۸ـ فرض کنید A و B دو پیشامد ناسازگار (جدا از هم) با احتمال‌های مثبت باشند. کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $P(B-\bar{A})=0$ ۲) $P(A-B)=P(B)$ ۳) $P(B-\bar{A})=P(B)$ ۴) $P(A-\bar{B})=P(A\cap\bar{B})$

۱۹ـ تعداد پنج‌نامه برای آقای «الف» ارسال شده است. در بین راه یک نامه مفقود شده و از بین ۴ نامه‌ای که به دست او رسیده است دو تا صورت حساب بانکی و دو تا نیز نامه‌های معمولی بوده است. احتمال این‌که نامه مفقود شده یک صورت حساب بانکی باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۲۰ـ فرض کنید که شما به طور پیوسته تمبر جمع می‌کنید و کلاً **m** نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداری می‌کنید با احتمال p_i از نوع **i** ام است، $i=1,\dots,m$ حال اگر شما **n** امین تمبر را جمع‌آوری کرده باشید با چه احتمالی این تمبر تکراری است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱ و آزاد ۸۶)

۱) $1-\sum_{i=1}^{m} p_i(1-p_i)^{n-1}$ ۲) $\sum_{i=1}^{m} p_i(1-p_i)^{n-1}$ ۳) $\sum_{i=1}^{m}\binom{n}{i}p_i^m(i-p_i)^{n-m}$ ۴) صورت مسأله ناقص است.

۲۱ـ کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $A=B \Leftarrow P(A-B)=P(B-A)$ ۲) $A=B \Rightarrow P(A-B)=P(B-A)$

۳) $A=B \Leftrightarrow P(A-B)=P(B-A)$ ۴) $A=B \not\Rightarrow P(B-A)=P(A-B)$

۲۲ـ برای دو پیشامد مستقل **A** و **B** کدام گزاره صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ۲) $P(\bar{B}|A)=P(\bar{B})\,,\ P(A|\bar{B})=P(A)$

۳) $P(B|\bar{A})=P(\bar{B}),P(A|\bar{B})=P(\bar{A})$ ۴) $P(A\Delta B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$

۲۳ـ ۵ کارت که از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند پشت و رو قرار گرفته‌اند. اگر شماره ها را حدس بزنیم، احتمال حداقل یک حدس صحیح برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{16}{30}$ ۲) $\frac{17}{30}$ ۳) $\frac{18}{30}$ ۴) $\frac{19}{30}$

۲۴ـ علیرضا و اسدا... هر کدام سکه‌ای را **n** بار می‌اندازند. احتمال آن‌که هر دو به یک تعداد، شیر بیاورند کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2^n}$ ۲) $\frac{1}{4^n}$ ۳) $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ ۴) $\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

۲۵ـ ۳ توپ از یک جعبه محتوی ۱۸ توپ، که از یک تا ۱۸ شماره‌گذاری شده است، انتخاب می‌گردد. احتمال این‌که حداقل یکی از توپ‌های انتخابی با شماره ۱۵ یا بیشتر باشد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{361}{816}$ ۲) $\frac{136}{816}$ ۳) $\frac{113}{204}$ ۴) $\frac{35}{272}$

۲۶ـ ظرفی محتوی **R** مهره قرمز و **B** مهره سیاه است. به طریقه جایگزینی از مهره‌ها یکی یکی انتخاب می‌گردد تا یک مهره سیاه به دست آید. احتمال این‌که دقیقاً **n** مهره نیاز باشد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{B}{R+B}$ ۲) $(\frac{R}{R+B})^{n-1}$ ۳) $\frac{BR^{n-1}}{(R+B)^n}$ ۴) $\frac{BR^n}{(R+B)^n}$

۲۷ـ می‌دانیم در یک دوره یازده تایی بازی شطرنج ۳ باخت و ۴ برد و ۴ مساوی به دست آمده است. اگر حسین ۳ مرتبه بازی کرده باشد احتمال این‌که جمعاً ۳ امتیاز مثبت به دست آورده باشد چقدر است؟ (در صورتی که هر برد یک امتیاز مثبت و هر باخت یک امتیاز منفی و هر مساوی، صفر امتیاز داشته باشد). (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{42}{165}$ ۲) $\frac{4}{165}$ ۳) $\frac{35}{165}$ ۴) $\frac{84}{165}$

۲۸ـ یک جعبه دارای چهار کارت مشابه به صورت زیر است: کارت اول دارای یک طرف قرمز و یک طرف سبز، کارت دوم دارای یک طرف قرمز و یک طرف سفید، کارت سوم یک طرف قرمز و یک طرف سیاه و کارت چهارم دارای یک طرف سبز و یک طرف سفید. یک کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم و این پیشامدها را تعریف می‌کنیم: یک طرف کارت قرمز است: **A**، یک طرف کارت سبز است: **B**، یک طرف کارت سفید است: **C**، یک طرف کارت سیاه است: **D**، کدام جمله زیر غیر صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) پیشامدهای A و B مستقل‌اند. ۲) پیشامدهای B و C وابسته‌اند

۳) پیشامدهای B و D ناسازگارند. ۴) پیشامدهای C و D ناسازگارند.

۲۹ـ دو ظرف که اولی شامل ۳ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است و دومی محتوی ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه است را در نظر بگیرید. اگر نتیجه‌ی پرتاب یک سکه سالم شیر باشد آنگاه یک توپ از ظرف اول و اگر این نتیجه خط باشد یک توپ از ظرف دوم به صورت تصادفی انتخاب و خارج می‌شود. به شرط این‌که بدانید رنگ توپ خارج شده سفید است، با چه احتمالی نتیجه‌ی پرتاب سکه شیر بوده است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{42}{67}$ ۲) $\frac{25}{67}$ ۳) $\frac{18}{29}$ ۴) $\frac{11}{29}$

۳۰ـ در یک کلاس دانشگاهی ۴ دانشجوی پسر سال اول، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم شرکت کرده‌اند، چند دانشجوی دختر سال دوم باید به این عده اضافه شود تا جنسیت و سال اولی یا دومی بودن هنگام انتخاب تصادفی یک دانشجو از این کلاس مستقل از هم باشند؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۱ـ احتمال بردن در یک مرتبه پرتاب تاس برابر با p $(0<p<1)$ است. شخص الف تاس را پرتاب می‌کند و اگر موفق نشود آن را به شخص ب می دهد که او برای برنده شدن پرتاب کند. الف و ب بازی را ادامه می‌دهند تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن الف چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{1-p}$ ۲) $\frac{1}{2-p}$ ۳) $\frac{p}{2-p}$ ۴) $\frac{p}{2(1-p)}$

۳۲ـ جعبه‌ای شامل n مهره سفید، n مهره زرد و n مهره آبی است که هر کدام از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود. احتمال این‌که دو مهره انتخابی هم‌رنگ یا هم‌شماره باشند کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{3n-1}{3n+1}$ ۲) $\frac{n+1}{3n-1}$ ۳) $\frac{n-1}{3n-1}$ ۴) $\frac{n+1}{3n+1}$

۳۳ـ سه سکه را پرتاب می‌کنیم و روی ظاهر شده سکه‌ها را در نظر می‌گیریم کدام یک از پیشامدهای زیر ساده است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) مشاهده یک شیر ۲) مشاهده سه شیر ۳) مشاهده دو شیر ۴) مشاهده حداقل دو شیر

۳۴ـ جدول زیر احتمال‌های اشتراک پیشامدهای D, C, B, A را نشان می‌دهد.

	A	B
C	۰/۰۸	۰/۳۲
D	۰/۵۰	۰/۱۰

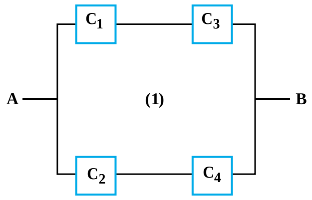
کدامیک از موارد زیر صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

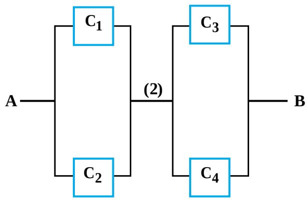
۱) پیشامدهای A و B ناسازگارند. ۲) پیشامدهای B و D مستقل‌اند. ۳) پیشامدهای A و C ناسازگارند. ۴) پیشامدهای C و D مستقل‌اند.

۳۵ـ شخصی برای رفتن به محل کار، اتوبوس یا تاکسی را به ترتیب با احتمال ۰/۷ و ۰/۳ انتخاب می‌کند. او وقتی با اتوبوس می‌رود ۳۰ درصد روزها دیر می‌رسد و وقتی با تاکسی می‌رود ۵ درصد روزها دیر می رسد. اگر این شخص در روز به خصوصی دیر به محل کارش برسد احتمال آن‌که آن روز اتوبوس سوار شده باشد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{7}{10}$ ۳) $\frac{21}{100}$ ۴) $\frac{42}{45}$

۳۶ـ اگر احتمال کارکرد قطعه iام در شکل‌های زیر برابر P_i باشد (برای $i=1,2,3,4$)، با شرط استقلال احتمال برقراری جریان بین A و B در دو شکل روبرو دارای ارتباط زیر می‌باشد. (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)





۱) $P(2)<P(1)$
۲) $P(1)\le P(2)$
۳) $P(2)=P(1)$
۴) $P(2)>P(1)$

۳۷ـ جعبه‌ای شامل ۱۵ مهره است که از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری شده‌اند. ۵ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود. احتمال این‌که حداقل شماره مهره‌های انتخابی ۸ باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\binom{7}{4}}{\binom{15}{5}}$ ۲) $\frac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}}$ ۳) $\frac{\binom{8}{4}}{\binom{15}{5}}$ ۴) $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{15}{5}}$

۳۸ـ در یک بار پرتاب تاسی که احتمال نتیجه‌ی زوج داشتن آن سه برابر احتمال نتیجه‌ی فرد داشتن آن است، اگر بدانیم نتیجه‌ای بزرگتر از سه به دست آمده، با چه احتمالی نتیجه‌ی پرتاب تاس مربع کامل بوده است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{4}{12}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۳۹ـ یک بررسی از مصرف‌کنندگان لوازم خانگی نشان می‌دهد که ۱۰ درصد از آنها از تعمیرات وسایل خانگی انجام گرفته در منزلشان راضی نیستند. تعمیرات توسط سه شرکت C,B,A انجام می‌گیرد. اگر ۴۰ درصد تعمیرات توسط شرکت A، ۴۵ درصد توسط شرکت B و ۱۵ درصد توسط شرکت C، انجام گیرد و اگر تجارب گذشته نشان دهد نرخ نارضایتی براساس عملکرد قبلی برای شرکت C,B,A به ترتیب ۰/۰۵، ۰/۰۴، ۰/۰۶، باشد و اگر تعمیر وسیله انجام شده و مشتری ناراضی باشد احتمال این‌که شرکت B مسئول تعمیر باشد برابر است با: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{45}{100}$ ۲) $\frac{18}{100}$ ۳) $\frac{9}{47}$ ۴) $\frac{18}{47}$

۴۰ـ شرکتی در شروع هر ماه تصمیم می‌گیرد یک میلیون تومان یا دو میلیون تومان برای تبلیغات ماه خرج کند. تصمیم‌گیری هر ماه مستقل از تصمیم ماه‌های دیگر است و انتخاب یک یا دو میلیون دارای احتمال برابر است. مطلوب است، احتمال این‌که در سه ماه متوالی جمعاً مبلغی بیش از ۵ میلیون (پنج میلیون) تومان برای تبلیغات هزینه شده باشد. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۱ـ جعبه‌ای شامل ۱۵ مهره است که از ۱ تا ۱۵، شماره‌گذاری شده‌اند. ۵ مهره به تصادف، یک به یک و با جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود. احتمال این‌که حداقل شماره مهره‌های انتخابی ۸ باشد کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\binom{8}{4}}{\binom{15}{5}}$ ۲) $(\frac{7}{15})^5-(\frac{6}{15})^5$ ۳) $(\frac{9}{15})^5-(\frac{8}{15})^5$ ۴) $(\frac{8}{15})^5-(\frac{7}{15})^5$

۴۲ـ ظرفی محتوی ۲۰ مهره می‌باشد که ۵ مهره آن سفید، ۷ مهره سیاه و ۸ مهره زرد رنگ می‌باشد. اگر ۸ مهره به طور تصادفی و بدون جایگذاری از ظرف خارج کنیم. مطلوب است احتمال این‌که مهره‌های دوم و هشتم انتخابی سفید باشد. (سایر مهره‌ها می‌توانند هر رنگی باشند.) (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{19}$ ۲) $\frac{5}{19}\times\frac{4}{18}$ ۳) $\frac{5}{19}\times\frac{4}{12}$ ۴) $\frac{4}{19}\times\frac{3}{12}$

۴۳ـ اگر احتمال فرزند پسر و دختر مساوی باشد، یک زن و شوهر چند فرزند داشته باشند تا با احتمال ۰/۹۹ حداقل یک پسر و یک دختر داشته باشند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) بیش از ۵ تا ۲) بیش از ۷ تا ۳) بیش از ۸ تا ۴) بیش از ۱۰ تا

۴۴ـ جعبه‌ای شامل ۷ مهره مشابه است. مهره‌های این جعبه را به تصادف در بین ۴ جعبه تقسیم می‌کنیم، احتمال این که هیچ جعبه‌ای خالی نماند کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\binom{6}{3}\binom{7}{4}}{\binom{10}{3}}$ ۲) $\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$ ۳) $\frac{3^4\binom{7}{4}}{4^7}$ ۴) $\frac{3^4}{4^7}$

۴۵ـ ظرفی محتوی ۲ مهره قرمز و ۶ مهره سیاه است. A و B به ترتیب مهره‌ای انتخاب می‌کنند تا یک مهره قرمز به دست آید (بدون جایگزینی) احتمال این‌که B زودتر از A مهره قرمز به دست آورد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۴۶ـ اگر A، B و C پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار بوده و احتمال پیشامد $(A\cup B\cup C)$ صفر نباشد در این صورت مقدار $P(A|A\cup B\cup C)$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $P(A)$ ۳) $\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}$ ۴) $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)}$

۴۷ـ سه ماشین محصول یک کارخانه را تولید می‌کنند. ماشین اول ۳۰% محصول را با ۵% معیوب، ماشین دوم ۴۵% محصول را با ۴% معیوب و ماشین سوم ۲۵% محصول را با ۳% معیوب تولید می‌کنند. اگر محصولی به تصادف از تولید یک روز کارخانه انتخاب شده و معیوب باشد، احتمال این‌که از ماشین دوم تولید شده باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۸۱}{۱۰۰}$

۴۸ـ شرکتی ۱۰۰ نفر استخدام می‌کند. ۸۰٪ مرد و ۲۰٪ زن، در بخش حسابداری برای ۱۵٪ از مردان و ۲۰٪ از زنان کار فراهم می‌شود اگر در بخش حسابداری شخصی به تصادف از میان افراد جدید انتخاب شود، احتمال این‌که این فرد از میان مردان باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱۲٪ ۲) ۶۰٪ ۳) ۷۵٪ ۴) ۹۶٪

۴۹ـ یک فروشگاه بزرگ زنجیره‌ای دارای ۱۰ صندوق است. در طول ساعات شلوغی فروشگاه، احتمال این‌که هر یک از صندوق‌ها توسط حداقل یک نفر مشتری مشغول باشد ۰/۷۵ است. با فرض این‌که هر صندوق به طور مستقل از دیگری مشغول یا آزاد است. احتمال این‌که یک مشتری حداقل یک صندوق آزاد را پیدا کند چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $(۰/۲۵)^{۱۰}$ ۲) $(۰/۷۵)^{۱۰}$ ۳) $۱-(۰/۷۵)^{۱۰}$ ۴) $۱-(۰/۲۵)^{۱۰}$

۵۰ـ عدد x_1 به صورت تصادفی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ و عدد x_2 نیز به صورت تصادفی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,x_1\}$ انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که $x_1=۲$ باشد به شرط این‌که بدانیم $x_2=۱$ است چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۵۱ـ اگر دو پیشامد A و B مستقل بوده و $P(A)=\frac{۱}{۲}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ آنگاه مقدار $P(A|A\Delta B)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۵۲ـ اگر A و B دو پیشامد تصادفی باشند به نحوی که $P(A|B)=P(A|B')$ آنگاه کدام گزاره همواره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $P(B)=P(B')$ ۲) $(A|B)=P(A'|B')$ ۳) B,A ناسازگار هستند ۴) A و B مستقل هستند

۵۳ـ ۵ توپ را از ظرفی که ۲ توپ قرمز، ۳ توپ سفید و ۴ توپ آبی دارد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک توپ از هر رنگ انتخاب شود کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۵۴ـ اگر $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۸$ باشد، کران پایینی $P(A|B)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۵۵ـ اگر $P(A|B)=۱$، مقدار $P(\bar{B}|\bar{A})$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

۵۶ـ برای دو پیشامد غیرتهی و مستقل A و B کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $P(\bar{A}|B)=P(B)$
۲) $P(\bar{A}|B)=P(\bar{A})$
۳) $P(\bar{A}|B)=P(\bar{B})$
۴) $P(\bar{A}|B)=P(\bar{A}\cap B)$

۵۷ـ اگر ۸ دانه گندم به صورت تصادفی روی خانه‌های یک صفحه‌ی شطرنج طوری قرار گیرند که در هر خانه بیش از یک دانه گندم قرار نگیرد، احتمال این‌که دانه‌ها روی یک خط مستقیم واقع شوند چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{8}{C_8^{64}}$
۲) $\frac{10}{C_8^{64}}$
۳) $\frac{16}{C_8^{64}}$
۴) $\frac{18}{C_8^{64}}$

۵۸ـ n جعبه موجود است که در جعبه‌ی k ام، $k-1$ توپ قرمز و $n-k$ توپ سفید موجود است. اگر جعبه‌ای به صورت تصادفی انتخاب شود و از آن دو توپ به صورت تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب شود، احتمال این‌که توپ دوم انتخاب شده سفید باشد، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) بستگی به n و k دارد.

۵۹ـ ۴ تیم فوتبال آسیایی و n تیم فوتبال اروپایی در یک مسابقه شرکت دارند. دو تیم را یک به یک و با قرعه برای مسابقه انتخاب می‌کنیم. تعداد تیم‌های اروپایی را چنان تعیین کنید تا احتمال این‌که تیم اول انتخابی آسیایی و تیم دوم اروپایی باشد برابر با $\frac{4}{15}$ گردد. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $n=3$
۲) $n=4$
۳) $n=5$
۴) $n=6$

۶۰ـ شرکتی مواد اولیه خود را از سه کارخانه‌ی تولیدی تأمین می‌نماید، به طوری که ۷۰٪ از کارخانه‌ی اول، ۱۰٪ از کارخانه دوم و باقی از کارخانه سوم تأمین می‌شود. همچنین به تجربه معلوم شده است که ۱۰٪ مواد اولیه کارخانه اول، ۱۵٪ مواد اولیه کارخانه‌ی دوم و ۵٪ مواد اولیه کارخانه سوم معیوب است. احتمال این‌که یک کالای تولیدی انتخاب شده از این کارخانه معیوب باشد کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ٪۳۰
۲) ٪۷۰
۳) ٪۹۱/۵
۴) ٪۹/۵

۶۱ـ سه قفل بر در وجود دارد و کلیدهای آن در بین ۱۰ کلیدی است که معمولاً همراه خود دارید. به دلیل شتابزدگی یکی از آنها را گم کرده‌اید. احتمال این‌که هنوز بتوانید در را باز کنید چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{10}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{10}$
۴) $\frac{7}{10}$

۶۲ـ اگر نسبت مردان و زنان در جامعه برابر و ۶ درصد مردان و ۴ درصد زنان کوررنگ باشند، احتمال این‌که یک کوررنگ مرد باشد چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۹۵

۶۳ـ پانزده دانش‌آموز جدید بین سه کلاس به طور یکسان تقسیم می‌شوند اگر سه دانش‌آموز باهوش در بین آنها باشند، احتمال این‌که به هر کلاس یکی از آن‌ها برسد چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{25}{546}$
۲) $\frac{25}{91}$
۳) $\frac{25}{3267}$
۴) $\frac{1}{756756}$

۶۴ـ اگر A_1, A_2 و A_3 سه پیشامد با $P(A_i)=\frac{1}{i+2}$ باشند، کران بالای احتمال $P(A_1\cup(A_2\cap A_3))$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{55}{120}$
۲) $\frac{60}{120}$
۳) $\frac{65}{120}$
۴) $\frac{67}{120}$

۶۵ـ در کارخانه‌ای مشکلی ایجاد شده است که با احتمال ۰/۴ مهندس تولید و با احتمال ۰/۵ مسئول کیفیت می‌توانند مشکل را حل نمایند. احتمال این‌که در این کارخانه مشکل حل شود کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۲
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷
۴) ۰/۹

۶۶ـ تاسی را در نظر گیرید که احتمال پیشامدهای ساده در آن متناسب با خال مشاهده شده باشد. اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{2,4\}$، مقدار $P(A\Delta B|A\cup B)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{8}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{5}{8}$
۴) $\frac{7}{8}$

۶۷ـ احتمال خرابی یک دستگاه در روز اول هفته برابر با ۰/۲ و احتمال خرابی آن در روز دوم هفته برابر با ۰/۲۲ است. اگر احتمال خرابی در روز دوم به شرط خرابی در روز اول ۰/۷ باشد. احتمال خراب نشدن در روز دوم به شرط خراب نشدن در روز اول کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۳   ۲) ۰/۵۰   ۳) ۰/۷۲   ۴) ۰/۹

۶۸ـ ظرفی شامل ۵ مهره است که X تای آن سفید و بقیه سیاه هستند. می‌دانیم $P(X=3)=\frac{2}{3}$ و $P(X=2)=\frac{1}{3}$. از این ظرف یک مهره بیرون می‌آید و رنگ آن سفید است احتمال این‌که در ظرف ۳ مهره سفید باشد کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۶۹ـ یک سیستم دارای دو مؤلفه مستقل است که به طور متوالی بسته شده‌اند. احتمال خراب شدن هر کدام به ترتیب ۰/۱ و ۰/۳ می‌باشد. احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۳   ۲) ۰/۲۷   ۳) ۰/۶۳   ۴) ۰/۷

۷۰ـ فرض کنید A_1, A_2, A_3 سه پیشامد توأماً مستقل از هم با احتمال‌های به ترتیب ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ باشند. مقدار $P((A_1 \Delta A_2)\cap A_3)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۵۶   ۲) ۰/۰۹۶   ۳) ۰/۱۲۵   ۴) ۰/۱۵۲

۷۱ـ ظرفی شامل ۱۰ مهره است که X تای آن سفید و بقیه سیاه است. می‌دانیم که $P(X=4)=\frac{3}{10}$، $P(X=2)=\frac{2}{10}$ و $P(X=6)=\frac{5}{10}$. از این ظرف دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم ملاحظه می‌شود که هر دو سفید هستند. احتمال این‌که در ظرف ۶ مهره سفید وجود داشته باشد کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{15}{19}$ ۲) $\frac{16}{19}$ ۳) $\frac{17}{19}$ ۴) $\frac{18}{19}$

۷۲ـ در ظرفی سه سکه قرار دارد که یکی از آنها دو طرفش شیر (H)، یکی دیگر دو طرفش خط (T) و سکه سوم سالم است. یک سکه به تصادف از ظرف انتخاب کرده و آن را دو مرتبه پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه هر دو پرتاب شیر (H) باشد با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۱

۷۳ـ از سه جعبه A با ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و B با ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و C با ۵ مهره سفید و یک مهره سیاه یک جعبه به تصادف انتخاب کرده و ۲ مهره آن را خارج می‌کنیم. اگر هر دو سفید باشند احتمال آن‌که جعبه A انتخاب شده باشد برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{2}{20}$ ۲) $\frac{2}{19}$ ۳) $\frac{3}{19}$ ۴) $\frac{3}{20}$

۷۴ـ اگر n نفر به تصادف دور یک میز نشسته باشند، احتمال اینکه آقای A کنار آقای B، آقای B کنار آقای C و آقای C کنار آقای D باشند چقدر است؟ $(n>5)$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ ۲) $\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ ۳) $\frac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ ۴) $\frac{24}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

۷۵ـ A و B هر کدام تیری را به نوبت به سمت هدف شلیک می‌کنند. اگر احتمال موفقیت هر کدام $\frac{2}{3}$ باشد و A بازی را شروع کند، احتمال بردن B چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{4}{8}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷۶ـ از ۲۰ قطعه که در اختیار داریم با احتمال $\frac{1}{3}$ تعداد i عدد آن $(i=0,1,2)$ خراب است اگر یک نمونه ۵ تایی بگیریم و هیچ‌کدام خراب نباشد، احتمال اینکه در کل ۲۰ قطعه هیچ قطعه‌ای خراب نباشد چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{76}{175}$ ۲) $\frac{5}{19}$ ۳) $\frac{1}{100}$ ۴) $\frac{58}{175}$

۷۷ــ اگر n نفر $(n > ۵)$ به تصادف دور یک میز نشسته باشند، احتمال این‌که هیچ یک از آقایان x و y و z کنار آقای T نباشند، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{(n-۴)(n-۵)}{(n-۱)(n-۲)}$ ۲) $\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)(n-۲)}$ ۳) $\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)(n-۲)}$ ۴) $\frac{(n-۲)(n-۳)}{(n-۱)(n-۲)}$

۷۸ــ دستگاهی ارقام ۰ و ۱ را انتقال می‌دهد. هر کدام از این ارقام باید در این دستگاه از سه مرحله عبور کنند. هریک از این مراحل احتمال این‌که رقم وارد شده بدون تغییر خارج شود $\frac{۱}{۳}$ است. فرض کنید ارقام مذکور با شانس نابرابر به دستگاه وارد می‌شوند، و احتمال انتخاب صفر برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌باشد. حال احتمال اینکه رقم گذشته از مرحله سوم که به صورت صفر مشاهده شده است، در حقیقت به صورت صفر وارد دستگاه شده باشد. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴۱}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۴}{۲۷}$

۷۹ــ کارخانه‌های A و B تولیدکننده یک مؤلفه صنعتی هستند. هر محصول تولیدی از این دو کارخانه به ترتیب با احتمال ۰/۰۱ و ۰/۰۰۵ معیوب هستند. فرض کنید دو مولفه صنعتی از یکی از کارخانه‌ها خریداری کنیم(با احتمال $\frac{۱}{۵}$ از A با احتمال $\frac{۴}{۵}$ از B) اگر اولین مؤلفه معیوب باشد، احتمال این‌که دومین مولفه نیز معیوب باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{۱۳}{۳۰۰}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۰۰}$ ۳) $\frac{۲۹}{۹۰۰}$ ۴) $\frac{۶۱}{۹۰۰}$

۸۰ــ دو تاس پرتاب می‌شود اگر بدانیم دو خال متفاوت است. احتمال این‌که حداقل یک خال ۶ باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۱ــ فرض کنید ۵۰ درصد تولیدات یک کارخانه معیوب می‌باشد جهت بررسی وضعیت قطعه آن را تحت آزمایش قرار می‌دهیم. احتمال تشخیص غلط در کلیه قطعات اعم از سالم و یا خراب بودن ۱۰ درصد می‌باشد. قطعه‌ای دوبار تحت آزمایش قرار گرفته است. اگر نتیجه آزمایش اول سالم بودن قطعه باشد احتمال آن‌که نتیجه آزمایش دوم نیز سالم باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۸۱}{۸۲}$ ۲) $\frac{۹}{۱۰}$ ۳) $\frac{۵}{۱۰}$ ۴) $\frac{۸۲}{۱۰۰}$

۸۲ــ در یک جامعه، ۶۰٪ خانواده‌ها دارای ماشین شخصی، ۳۰٪ دارای منزل شخصی و ۲۰٪ دارای هم ماشین شخصی و هم منزل شخصی هستند. اگر خانواده‌ای به تصادف از این جامعه انتخاب شود، احتمال این‌که این خانواده دارای ماشین شخصی یا منزل شخصی اما هردو نباشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷

۸۳ــ شرکت A نیازهای خود را از ۱۰ شرکت تأمین‌کننده دریافت می‌کند. اگر شرکت A تعداد ۵ قطعه را سفارش دهد و هر تأمین‌کننده با شانس برابر بتواند نیازهای شرکت A را بدون محدودیت تعداد قطعات تأمین نماید، احتمال این‌که یک تأمین‌کننده خاص دقیقاً ۳ قطعه را تامین نماید کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $\binom{۵}{۲}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۲}$ ۲) $\binom{۵}{۲}\frac{۹^{۳}}{۱۰^{۵}}$ ۳) $\binom{۵}{۳}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۳}$ ۴) $\binom{۵}{۳}\frac{۹^{۲}}{۱۰^{۵}}$

۸۴ــ فرض کنید برای دو پیشامد مستقل A و B احتمال این‌که هیچ‌کدام اتفاق نیفتد برابر با a و احتمال این‌که B اتفاق افتد برابر با b باشد، که در آن $a+b<۱$، مقدار $P(A)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱-b-a}{۱-a}$ ۲) $۱-\frac{۱-b-a}{۱-b}$ ۳) $\frac{۱-b-a}{۱-b}$ ۴) $۱-\frac{۱-b-a}{۱-a}$

۸۵ــ در یک کارخانه تولید لامپ، دو خط تولید I و II وجود دارند که هر خط نیمی از لامپ‌ها را تولید می‌کند. هر لامپ تولیدی خط I به طور مستقل با احتمال ۰/۱ و هر لامپ تولیدی خط II به طور مستقل با احتمال ۰/۲ معیوب هستند. فرض کنید دو لامپ که می‌دانیم در یک خط تولید شده‌اند را از این کارخانه خریداری کنیم. اگر اولین لامپ مورد بررسی خراب باشد، احتمال این‌که دومین لامپ هم خراب باشد، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۸۶ـ عددی چهار رقمی را به تصادف نوشته‌ایم. احتمال این‌که کوچکتر از ۷۰۰۰ و بر ۲ قابل قسمت باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۷ـ از جعبه‌ای حاوی ۹ کارت به شماره‌های یک تا ۹، سه کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال این‌که یک در میان زوج و فرد باشند کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۳۰}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۰}{۸۴}$

۸۸ـ از پاره‌خطی به طول L، نقطه‌ای انتخاب می‌شود احتمال این‌که نسبت طول پاره‌خط کوچکتر به بزرگتر از $\frac{۱}{۵}$ کمتر باشد کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۹ـ از ۱۰ کلیدی که در اختیار داریم ، ۲ تای آنها قفل دری را باز می‌کند. اگر یک کلید به تصادف گم شده باشد و ندانیم که کدام کلید گم شده است، مطلوب است احتمال این که حداکثر تا انتخاب دوم بتوانیم قفل را باز کنیم (کلیدها را بدون جایگذاری و به تصادف انتخاب می‌کنیم .)
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۵}$ ۳) $\frac{۲۸}{۱۳۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۰}$

۹۰ـ در یک شرکت ۱۰۰ نفر شاغل هستند به‌طوری که ۴۸ نفر سابقه‌ی بیش از ۵ سال دارند، ۵۳ نفر به عنوان کارشناس فنی می‌باشند. همچنین ۱۰ نفر وجود دارند که کارشناس فنی می‌باشند و سابقه شغل بیش از ۵ سال دارند. فردی را به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال این که کارشناس فنی نباشد یا سابقه شغل بالای ۵ سال داشته باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۵۳ ۴) ۰/۵۷

۹۱ـ اگر فردا با احتمال ۰/۸ بارانی و پس فردا با احتمال ۰/۷ بارانی باشد، حداقل احتمال این که هوای فردا و پس فردا بارانی باشد کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵۶

۹۲ـ اگر $P(A)=۰/۳$ و $P(B)=۰/۵$، حداقل مقدار $P(A\,|\,B)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۹۳ـ احتمال زایمان غیرطبیعی برای زنان باردار سیگاری دو برابر احتمال زایمان غیرطبیعی برای زنان باردار غیرسیگاری است. اگر ۱۵ درصد از زنان باردار سیگاری باشند، احتمال این که زنانی که زایمان غیرطبیعی دارند، سیگاری باشند کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۶}{۲۳}$ ۴) $\frac{۶}{۳۲}$

۹۴ـ فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال با احتمال‌های مثبت باشند، حداکثر مقدار $P(A\Delta B\,|\,B)$ کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{P(A)}{P(B)}$ ۴) $\frac{P(\bar{A})}{P(B)}$

۹۵ـ مکمل هر پیشامد E را با E' نشان می‌دهیم. فرض کنید A و B پیشامدهای مستقل با احتمال به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ باشند. مقدار $P(A'\Delta B')$ کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۹۶ـ از جعبه‌ای که ۱ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سفید دارد، ۱ مهره خارج کرده در جعبه دیگری که ۲ مهره سیاه و ۴ مهره‌ی سفید دارد قرار می‌دهیم. حال اگر مهره‌ای از جعبه‌ی دوم خارج کنیم و مهره سفید مشاهده شود احتمال این‌که مهره انتقالی از جعبه اول به جعبه دوم سفید باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{7}$

۹۷ـ با ارقام ۰,۲,۳,۴,۶,۸,۹ یک عدد چهار رقمی بدون تکرار می‌سازیم. احتمال این‌که عدد حاصل بر ۴ بخش‌پذیر باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{7}{18}$ ۴) $\frac{11}{18}$

۹۸ـ یک تیم فوتبال شامل ۱۰ بازیکن دفاع است. بازیکنان باید در گروه‌های دو تایی برای تعیین هم اطاقی خود تقسیم شوند. اگر زوج‌ها بـه طـور تصادفی انتخاب شوند، احتمال این‌که در هیچ زوجی بازیکن دفاع و حمله وجود نداشته باشد کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $\dfrac{10!\left[\dfrac{10!}{(2!)^5}\right]^2}{\dfrac{20!}{2!}}$ ۲) $\dfrac{\binom{10}{5}\left[\dfrac{10!}{(5!)(2!)}\right]}{\dfrac{20!}{2!}}$ ۳) $\dfrac{10!\left[\dfrac{10!}{5!(2!)^5}\right]}{\dfrac{20!}{(2!)^{10}(10!)}}$ ۴) $\dfrac{\binom{10}{5}\left[\dfrac{10!}{(2!)^5}\right]^2}{\dfrac{20!}{(2!)^{10}}}$

۹۹ـ فرض کنید که هیأت منصفه یک دادگاه با احتمال ۰/۹۵ در مورد متهم تصمیم درست می‌گیرد اگر ۹۹ درصد متهمین این دادگاه واقعاً گناهکـار باشند، احتمال این‌که یک شخص که توسط دادگاه بی‌گناه تشخیص داده شده است واقعاً بی‌گناه باشد ، چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۰/۹۹ ۲) ۰/۱۶۱ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۸۳۹

۱۰۰ـ فرض کنید ۰/۳ از بیمه‌شدگان یک شرکت بیمه در هر سال تصادف می‌کنند. اگر شرکت بیمه ۰/۴ از افراد بیمار شده را مستعد تصادف بداند و ۰/۶ از افرادی که در سال گذشته تصادف کرده‌اند، مستعد تصادف بوده باشند احتمال اینکه بداند و ۰/۶ از افرادی که در سال گذشته تصادف کـرده‌اند، مستعد تصادف بوده باشند احتمال اینکه یک فرد مستعد در یک سال تصادف نکند چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۰/۵۵ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۳۵

۱۰۱ـ شخص بازنشسته هر روز به تصادف یکی از ۶ پارک موجود در شهر را انتخاب کرده و برای گردش بـه آنجـا مـی‌رود. اگـر بـدانیم او در ۱۰ روز گذشته به پارک A مراجعه کرده است، احتمال اینکه در این مدت حداقل دوبار یا بیشتر به پارک A رفته باشد چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۰/۵۱۵ ۲) ۰/۴۸۵ ۳) ۰/۶۱۵ ۴) ۰/۳۷۵

۱۰۲ـ سه که محتوای آن IC می‌باشد. در یک جعبه دو IC از نوع عالی در یک جعبه دو IC از نوع معمولی و در جعبه‌ی سوم یک IC از نوع عـالی و دیگری معمولی است. یک IC به صورت تصادفی انتخاب می‌شود، و از نوع عالی می‌باشد. احتمال اینکه در این جعبه IC باقی مانـده از نـوع عـالی باشـد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۳ـ اگر هواشناسی پیش‌بینی نماید درصد احتمال بارندگی در روز جمعه ۴۰% و در روز شنبه ۴۰% و در روز یک‌شنبه نیز ۴۰% باشـد، بـا فـرض استقلال بارندگی در روزهای مختلف درصد احتمال این‌که در این سه روز بارانی نبارد چند درصد است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۹/۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۲۱/۶ ۴) ۴۰

۱۰۴ـ فردی سه دستگاه آشکار کننده دود خریداری می‌کند. اگر او تخمین بزند که هر یک از این دستگاه‌ها با احتمال ۹۰ درصد کار کنـد، احتمـال این‌که حداقل یکی از آنها دود را آشکار کند چنددرصد است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) ۹۹ ۲) ۹۱ ۳) ۹۰/۹ ۴) ۹۹/۹

۱۰۵ـ یک خانواده باید چند فرزند داشته باشد تا با احتمال ۹۲% حداقل یک پسر و یک دختر باشد؟ (فرض کنید شانس دختر و پسر برابر است).
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) ۵　۲) ۴　۳) ۲　۴) ۷

۱۰۶ـ اگر n گوی در r جعبه $(n \le r)$ به طور تصادفی توزیع شوند، احتمال آن‌که هیچ یک از جعبه‌ها بیش از یک گوی نداشته باشند، کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{r(r-1)...(r-n+1)}{r!}$　۲) $\frac{r(r-1)...(r-n+1)}{r^n}$　۳) $\frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n^r}$　۴) $\frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}$

۱۰۷ـ جعبه‌ای شامل N مهره است که از ۱ تا N شماره‌گذاری شده‌اند. k مهره به تصادف و بدون جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مینیمم شماره مهره‌های انتخابی کوچکتر یا مساوی n باشد کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $1-\frac{\binom{N-n}{k}}{\binom{N}{k}}$　۲) $1-\frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{k}}$　۳) $\frac{\binom{N-n}{k}}{\binom{N}{k}}$　۴) $\frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{k}}$

۱۰۸ـ مطالعات نشان می‌دهد که احتمال یک حفاری موفقیت‌آمیز برای رسیدن به نفت ۰/۱ است. در عین حال نیز اگر نفت در زیر زمین موجود باشد احتمال اینکه صخره‌های آن قابل نفوذ باشد ۰/۶ است. اگر نفت در زیرزمین نباشد احتمال وجود صخره‌های نفوذپذیر ۰/۳ است ـ احتمال این که در زیر یک سری صخره‌های نفوذپذیر نفت موجود باشد، چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{2}{11}$　۲) ۰/۰۶　۳) ۰/۳۷　۴) ۰/۰۹

۱۰۹ـ احتمال اینکه یک کارخانه تأیید یک مؤسسه استاندارد کیفیت را کسب کند ۰/۱۶ و احتمال اینکه تأیید مؤسسه استاندارد مدیریت را کسب کند ۰/۲۴ و احتمال اینکه تأیید هر دو مؤسسه را به دست آورد ۰/۱۱ است احتمال اینکه فقط یکی از دو تأیید را کسب کند چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۹)

۱) ۰/۲۹　۲) ۰/۱۸　۳) ۰/۱۱　۴) ۰/۴۰

۱۱۰ـ سکه‌ی سالمی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای نخستین بار شیر بیاید. احتمال اینکه اولین شیر در پرتاب‌های فرد ظاهر شود، چقدر است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{2}{3}$　۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۱ـ فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند. اگر احتمال اینکه B اتفاق نیفتد برابر با b و احتمال اینکه هیچ کدام اتفاق نیفتند برابر با a باشد، مقدار $P(A)$ کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1-b}{1-a}$　۲) $\frac{1-a}{1-b}$　۳) $\frac{a}{1-b}$　۴) $\frac{b}{1-a}$

۱۱۲ـ یک تاس ۸ وجهی را هفت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ماکزیمم وجه ظاهر شده دقیقاً ۶ باشد کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{6^7}{8^7}$　۲) $\frac{5^7}{8^7}$　۳) $\frac{7^6-7^5}{8^7}$　۴) $\frac{6^7-5^7}{8^7}$

۱۱۳ـ ۹ توپ یکسان و یک شکل را به تصادف در سه جعبه می‌ریزیم. فرض کنید X_i تعداد توپ‌های جعبه iام باشد و احتمال اینکه توپی در هر جعبه قرار گیرد برابر باشد. احتمال اینکه تعداد توپ‌های هر سه جعبه برابر باشند کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{27}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{1}{6^9}$　۴) $\frac{7!}{3^{10}}$

۱۱۴ـ کارخانه‌ای با سه شیفت کاری (الف)، (ب) و (ج) کار می‌کند. محصول مشخصی از تولیدات کارخانه به ترتیب دارای نسبت اقلام معیوب ۰/۰۲، ۰/۰۳ و ۰/۰۵ در شیفت‌های کاری (الف)، (ب) و (ج) می‌باشد. اگر شیفت کاری (الف) ۵۰ درصد، شیفت کاری (ب) ۳۰ درصد و شیفت کاری (ج) ۲۰ درصد از تولیدات این محصول را به عهده داشته باشند چقدر احتمال دارد محصول خرابی که مشتری عودت داده است تولید شیفت (الف) باشد؟
(مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{25}{29}$　۲) $\frac{10}{29}$　۳) $\frac{5}{29}$　۴) $\frac{19}{29}$

۱۱۵ــ در ظرفی ۱۰ توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ موجود است. اگر دو توپ به‌صورت تصادفی و با جای‌گذاری از این ظرف انتخاب شود، احتمال این که توپ شماره ۱ انتخاب شود و توپ شماره ۲ انتخاب نشود چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) $0/20$ ۲) $0/02$ ۳) $0/17$ ۴) $0/18$

۱۱۶ــ در کیسه‌ای N مهره‌ی متمایز با شماره‌های ۱، ۲، ...، N داریم. n مهره به تصادف و بدون جای‌گذاری از کیسه خارج می‌کنیم، احتمال این که بزرگترین شماره‌ی باقی مانده در کیسه m باشد $(m \le N)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۱)

۱) $\dfrac{\binom{m-1}{n-m}}{\binom{N}{n}}$ ۲) $\dfrac{\binom{m-1}{n-N+m}}{\binom{N}{n}}$ ۳) $\dfrac{\binom{m-1}{n-N+m+1}}{\binom{N}{n}}$ ۴) $\dfrac{\binom{m-1}{n-N+m-1}}{\binom{N}{n}}$

۱۱۷ــ جعبه‌ای شامل ۱۵ مهره است که از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری شده‌اند. ۵ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود. احتمال اینکه حداقل شماره مهره‌های انتخابی ۸ باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{15}{5}}$ ۲) $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}}$ ۳) $\dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{15}{5}}$ ۴) $\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{15}{5}}$

۱۱۸ــ دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر x نمایانگر مجموع دو تاس مشاهده شده باشد، تابع احتمال x کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $f(x)=\dfrac{6-|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\cdots,12$ ۲) $f(x)=\dfrac{|x-7|-5}{36}\ ,\ x=2,\cdots,12$

۳) $f(x)=\dfrac{6+|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\cdots,12$ ۴) $f(x)=\dfrac{|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\cdots,12$

۱۱۹ــ اطلاعات زیر داده شده است:

$$p(B_1)=0/2\ ,\ P(A|B_1)=0/01$$
$$p(B_2)=0/3\ ,\ P(A|B_2)=0/02$$
$$p(B_3)=0/5\ ,\ P(A|B_3)=0/05$$

احتمال $p(B_2|A)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{2}{33}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{11}$

۱۲۰ــ اگر در یک جعبه ۲۰ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب داشته باشیم، از بین لامپ‌ها تعداد ۵ لامپ را بدون جایگزینی و به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که لامپ پنجم معیوب باشد، مساوی است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۱ــ جعبه‌ای شامل N قطعه است که در آن N_0 قطعه سالم و N_1 قطعه خراب قرار دارد. اگر از این جعبه دو قطعه به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه قطعهٔ دوم انتخابی، سالم باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{N_0}{N}$ ۲) $(\dfrac{N_0-1}{N})$ ۳) $\dfrac{N_1(N_0-1)}{N^2}$ ۴) $\dfrac{(2N_0-1)}{N}$

۱۲۲ــ واریانس یک جامعه میکس نرمال (Mix-Normal) که $100x$ درصد آن از توزیع نرمال با میانگین a و انحراف معیار b پیروی می‌کند و $100(1-x)$ درصد دیگر آن از توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ پیروی می‌نماید، برابر است با: (دکتری ۹۱)

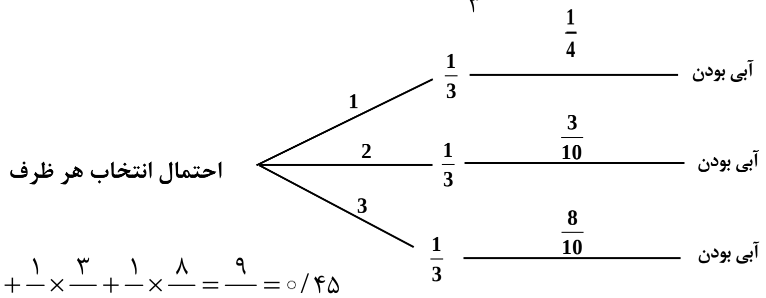
۱) $(1-x)+x(a^2+b^2)$ ۲) $(1-x)^2+x^2b^2$ ۳) $(1-x)+xb^2$ ۴) $(1-x)+(1+xa^2)+xb^2$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۴» چهار روبات ناسالم از بین ۱۰ روبات انتخاب شده است، دو روبات ناسالم از خط اول پس دو روبات دیگر باید از خط دوم باشند.

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{100}{210}=\frac{10}{21}$$

۲ـ گزینه «۲» با استفاده از نمودار درختی انتخاب هر ظرف با احتمال $\frac{1}{3}$ وجود دارد.



$$P\,(\text{آبی بودن مهره})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{10}=\frac{9}{20}=0/45$$

۳ـ گزینه «۳» حالات مطلوب عبارت است از:

$$2\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{112}{495}\simeq\frac{1}{5}$$

(حالت مطلوب) $\underline{W}\quad\underline{W}\quad\underline{W}\quad\underline{B}$

$\underline{W}\quad\underline{B}\quad\underline{W}\quad\underline{W}$

۴ـ گزینه «۳» از رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A\,|\,B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}\qquad (I)$$

از طرفی: $P(C\,|\,A\cap B)=P(C\,|\,B)\Rightarrow\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}\Rightarrow\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (II)$

$$(I)\ ,(II)\Rightarrow P(A\,|\,B\cap C)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A\,|\,B)$$

۵ـ گزینه «۲» اگر B, A مستقل باشند آنگاه: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

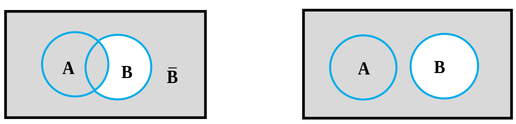
نکته۱: اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و $\bar{B}$، $\bar{A}$ و B، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نیز مستقل‌اند.

یادآوری می‌شود که $P(A-B)=P(A\cap\bar{B})$ و طبق نکته ۱، A و $\bar{B}$ نیز مستقل‌اند بنابراین: $P(A\cap\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

تعریف: دو پیشامد B, A ناسازگارند اگر $A\cap B=\phi$ و در نتیجه $P(A\cap B)=0$

بنابر تعریف فوق، گزینه ۴ نادرست است زیرا فرض مسأله مستقل بودن A و B است نه ناسازگاری آنها. گزینه ۳ در حالتی درست است که $B\subset A$.

گزینه ۱: اگر $A\cap B=\phi$ آنگاه $A\cap\bar{B}=A$ و اگر $A\cap B\neq\phi$ آنگاه $A\cap\bar{B}=A-B$



$A\cap B\neq\phi$ $\qquad$ $A\cap B=\phi$

۶ـ گزینه «۱» با انتخاب ۵ نفر از ده نفر دو تیم والیبال با تعداد بازیکن برابر ایجاد می‌شود.

نکته: تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء متمایز به طوری که ترتیب مهم نباشد برابر است با $C(n,r)$

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!5!}=252$$

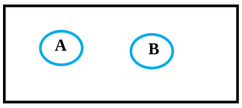
و چون تفاوتی بین تیم‌ها قائل نیستیم و فقط تقسیم‌بندی ۱۰ نفر به دو گروه ۵ تایی است، پاسخ صحیح برابر است با: $\frac{252}{2!}=126$

۷ـ گزینه «۴» اگر بخواهیم در هیچ ظرفی بیش از یک مهره نباشد، مهره اول می‌تواند به هر کدام از ۵ ظرف برود ولی مهره دوم را نمی‌توان در ظرف قبلی که شامل ۱ مهره است قرار داد بنابراین، می‌توان آن را در یکی از ۴ ظرف باقی مانده قرار داد. برای مهره سوم نیز به همین ترتیب تنها ۳ حق انتخاب وجود دارد پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $5\times4\times3=60$

در حالتی که محدودیتی نباشد هر مهره می‌تواند در هر کدام از ۵ ظرف قرار گیرد. بنابراین تعداد کل حالات برابر است با: $5\times5\times5=125$

بنابراین احتمال این‌که در هیچ ظرفی بیش از یک مهره قرار نگیرد برابر است با: $\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

۸ـ گزینه «۳» با توجه به نمودار گزینه‌های ۱و۲و۴ غلط می‌باشند.



توجه کنید که اگر A و B بخواهند مستقل باشند باید $p(A\cap B)=p(A)p(B)$. این در حالی است که $P(A\cap B)=0$ و $P(B),P(A)$ مخالف صفر هستند.

۹ـ گزینه «۱» از رابطه بیز خواهیم داشت:

$$P(A\,|\,\text{فقط یک تیر به هدف اصابت کرده است})=\frac{P(A\ \text{و فقط یک تیر به هدف اصابت کند})}{P(\text{فقط یک تیر اصابت کند})}=\frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B')+P(A'\cap B)}=\frac{0/4\times0/3}{0/4\times0/3+0/6\times0/7}=\frac{2}{9}$$

۱۰ـ گزینه «۲»

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=0/7+0/5-P(A\cap B)\le1\Rightarrow P(A\cap B)\ge0/2 \qquad \text{I}$$

بزرگترین مجموعه‌ای که $A\cap B$ می‌تواند تشکیل دهد این است که برابر با A یا B نشود که در اینجا چون احتمال B کمتر است در نتیجه بیشترین مقدار $P(A\cap B)$ برابر است با: $Max(P(A\cap B))=P(B)=0/5$

۱۱ـ گزینه «۲» این جمله به مفهوم آن است که هر توپ قرمز باشد:

$$P\ (\text{هر سه توپ قرمز باشد})=\frac{7}{12}\times\frac{8}{13}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{13}$$

$$\underset{\text{اولی قرمز}}{\boxed{\text{ق } 7 \quad \text{س } 5}}\xrightarrow{\frac{7}{12}}\underset{\text{دومی قرمز}}{\boxed{\text{ق } 8 \quad \text{س } 5}}\xrightarrow{\frac{8}{13}}\underset{\text{سومی قرمز}}{\boxed{\text{ق } 9 \quad \text{س } 5}}\xrightarrow{\frac{9}{14}}$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$P(X_2=1)=P(X_1=1).P(X_2=1|X_1=1)+P(X_1=2).P(X_2=1|X_1=2)+P(X_1=3).P(X_2=1|X_1=3)$$

$$+P(X_1=4).P(X_2=1)|X_1=4)\Rightarrow P(X_2=1)=\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{25}{48}$$

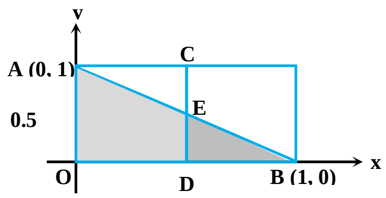
$A=\{1,2,3,4\}\longrightarrow x_1$ و $B=\{1,2,\dots,x_1\}\longrightarrow x_2$

$x_4=4\Rightarrow B=\{1,2,3,4\}$ $\quad x_1=1\Rightarrow B=\{1\}$ $\quad x_2=2\Rightarrow B=\{1,2\}$ $\quad x_3=3\Rightarrow B=\{1,2,3\}$

۱۳ـ گزینه «۴» از رابطه بیز استفاده می‌کنیم:

$$P\ (\text{توپ زرد رنگ باشد}\,|\,\text{توپ سیاه نیست})=\frac{P\ (\text{توپ زرد رنگ باشد و سیاه نیست})}{P\ (\text{توپ سیاه نیست})}=\frac{\frac{5}{25}}{1-\frac{10}{25}}=\frac{1}{3}$$

۱۴ـ گزینه «۴» در دو ناحیه معرفی شده هیچ اشتراکی وجود ندارد.



$$P=\frac{S_{AODE}}{S_{AODC}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۰/۵+۱)(۰/۵)}{۱\times\frac{۱}{۲}}=۰/۷۵=\frac{۳}{۴}$$

۱۵ـ گزینه «۲» P (دقیقاً یک توپ سفید) = P (اولین توپ سفید) + P (دومین توپ سفید) + P (سومین توپ سفید)

$$P(WRR)+P(RWR)+P(RW)=\frac{(۵\times۷\times۸)+(۷\times۵\times۸)+(۷\times۸\times۵)}{۱۲\times۱۳\times۱۴}=۳\times\frac{۲۸۰}{۲۱۸۴}=\frac{۸۴۰}{۲۱۸۴}=\frac{۵}{۱۳}$$

۱۶ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه بیز ابتدا پیشامدها را تعریف می‌کنیم:

A: پیشامد این‌که زن باشد.	A' : پیشامد این‌که مرد باشد.	B : پیشامد این‌که در جشن شرکت کرده باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(B|A).P(A)}{P(B|A).P(A)+P(B|A').P(A')}=\frac{۰/۴۸\times۰/۳۸}{۰/۴۸\times۰/۳۸+۰/۳۷\times۰/۶۲}=۰/۴۴۳$$

$$۰/۴۴۳\times۱۰۰=۴۴/۳\%$$

۱۷ـ گزینه «۱» C پیشامد این‌که از دو تیر شلیک شده حداقل یک تیر به هدف بخورد.

$$P(A\cap C)=P(A)=۰/۶$$

$$P(C)=۱-P(C')=۱-(۰/۷)(۰/۴)=۰/۷۲\quad;\quad P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{۰/۶}{۰/۷۲}=\frac{۵}{۶}$$

۱۸ـ گزینه «۱» چون دو پیشامد A و B ناسازگارند $(A\cap B=\phi)$ نتیجه می‌گیریم:

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)=۰\ \Rightarrow\ P(B\cap A)=P(B-\bar{A})=۰$$

۱۹ـ گزینه «۳» نامه یا صورت‌حساب بانکی یا نامه معمولی است. پس احتمال $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۰ـ گزینه «۱» در مثال متن کتاب ثابت کردیم که $\sum_{i=۱}^{m}(۱-P_i)^{n-۱}.P_i$ احتمال آن است که تمبر n ام تکراری نباشد پس عبارت $۱-\sum_{i=۱}^{m}P_i\,(۱-P_i)^{n-۱}$ احتمال آن است که تمبر n ام جمع آوری شده تکراری باشد.

۲۱ـ گزینه «۲» اگر $A=B$ آنگاه $A-B=\varnothing$ و $B-A=\varnothing$ بنابراین $P(A-B)=P(B-A)=۰$. لذا $A=B\Rightarrow P(A-B)=P(B-A)$ که نشان می‌دهد گزینه ۲ صحیح است.

گزینه ۱: نادرستی این گزینه با یک مثال نقض بیان می‌شود. فرض کنید تاس سالمی یک مرتبه پرتاب می‌شود و پیشامدهای A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$A=\{$برآمد حاصل از پرتاب تاس عدد فرد باشد$\}=\{۱,۳,۵\}$

$B=\{$برآمد حاصل از پرتاب تاس عدد زوج باشد$\}=\{۲,۴,۶\}$

واضح است که $A-B=\{۱,۳,۵\}$ و $B-A=\{۲,۴,۶\}$ بنابراین $P(B-A)=P(A-B)=\frac{۱}{۲}$ در حالی‌که $A\neq B$ بنابراین:

$$P(B-A)=P(A-B)\not\Rightarrow A=B$$

گزینه ۳ نادرست است. نادرستی رابطه برگشت آن در گزینه ۱ ثابت شد.

گزینه ۴ نادرست است. در گزینه ۲ ثابت شد که $A=B\Rightarrow P(A-B)=P(B-A)$.

۲۲ـ گزینه «۲»

نکته ۱: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A و $\overline{B}$، $\overline{A}$ و B، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ نیز مستقل‌اند.

نکته ۲: دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

نکته ۳: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه: $P(A|B)=B$

با توجه به نکته ۳ واضح است که گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

گزینه ۳: A و B مستقل‌اند لذا B و $\overline{A}$ نیز مستقل‌اند بنابراین: $P(B|\overline{A})=P(B)$

A و B مستقل‌اند لذا A و $\overline{B}$ نیز مستقل‌اند بنابراین: $P(A|\overline{B})=P(A)$

گزینه ۴: $P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cap B')+P(B\cap A')=P(A)P(B')+P(B)P(A')$

$$P(A)(1-P(B))+P(B)(1-P(A))=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$

۲۳ـ گزینه «۴» **نکته:** n مهره متمایز را به تصادف در n ظرف متمایز قرار می‌دهیم (هر ظرف یک مهره) احتمال اینکه فقط k مهره در ظرف هم شماره خود قرار بگیرند برابر است با: $\frac{1}{k!}\sum_{i=2}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

این‌که هیچ حدسی صحیح نباشد معادل این است که هیچ مهره‌ای در ظرف هم شماره خود قرار نگیرید.

A: حداقل یک حدس صحیح $\Rightarrow A'$: هیچ حدسی صحیح نباشد $\Rightarrow K=0$

لذا: $P(A')=\frac{1}{0!}\sum_{i=2}^{5}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}=\frac{11}{30}$ و $P(A)=1-P(A')=1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$

۲۴ـ گزینه «۳» **نکته۱:** $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$

X: تعداد شیرها در n پرتاب علیرضا — Y : تعداد شیرها در n پرتاب اسدا...

$x=0,1,\cdots n$ — $y=0,1,\cdots n$

مقادیر X و Y متغیرهای تصادفی‌اند لذا برای محاسبه $P(X=Y)$ از قانون احتمال کل استفاده می‌شود.

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k|Y=k)P(Y=k)$$

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $P(A|B)=P(A)$ لذا:

$$P(X=k|Y=k)P(Y=k)=P(X=k)P(Y=k)$$

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}.\frac{\binom{n}{k}}{2^n}=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

۲۵ـ گزینه «۳» همگی کوچکتر از ۱۵ باشند یعنی ۳ توپ انتخاب شده از ۱۸ توپ متعلق به شماره‌های از ۱ تا ۱۴ باشند:

P (حداقل شماره یک توپ بیشتر از ۱۵ باشد) $=1-P$ (همگی کوچکتر از ۱۵ باشد) $=1-\frac{\binom{14}{3}}{\binom{18}{3}}=\frac{113}{204}$

۲۶ـ گزینه «۳» یعنی مهره nام سیاه باشد و $(n-1)$ مهره قبلی باید قرمز باشند.

$$n(A)=\underline{R}\ \underline{R}\ \underline{R}\dots\underline{R}\ \underline{B}\quad,\quad n(S)=\underline{R+B}\ \underline{R+B}\ \underline{R+B}\dots\underline{R+B}\quad,\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{BR^{n-1}}{(R+B)^n}$$

۲۷ـ گزینه «۲» به طور کلی سه بازی و حالت مطلوب اینکه ۳ امتیاز مثبت بیاوریم (که شامل ۳ بازی می‌شود چرا که هر بازی ۱ امتیاز مثبت دارد)

$$P=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{165}$$

۲۸ـ گزینه «۱»

$$P(\text{یک‌طرف کارت قرمز و یک‌طرف سیاه})=P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

۲۹ـ گزینه «۴» طبق رابطه بیز به صورت زیر خواهیم داشت:

$$P(\text{نتیجه پرتاب شیر}|\text{توپ سفید خارج شده})=\frac{P(\text{توپ سفید خارج شده}|\text{نتیجه پرتاب شیر})P(\text{نتیجه پرتاب شیر})}{P(\text{توپ سفید})}=\frac{\frac{3}{9}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{11}\times\frac{1}{2}}=\frac{33}{87}=\frac{11}{29}$$

۳۰ـ گزینه «۳» تعداد دانشجویان دختر سال دوم را K فرض می‌کنیم و جدول زیر برای راحتی مسأله می‌توان به جدول زیر مراجعه کرد.

	سال اول	سال دوم	
پسر	۴	۶	۱۰
دختر	۶	K	$6+K$
	۱۰	$6+K$	$16+K$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(\text{دختر بودن و سال دومی})=\frac{K}{16+K}=\frac{6+K}{16+K}\times\frac{6+K}{16+K}\Rightarrow K=9$$

۳۱ـ گزینه «۳» **روش اول:** چون شخص الف شروع کننده بازی است، زمانی می‌تواند برنده باشد که اولین پیروزی در یک پرتاب شماره فرد انجام شود.

p احتمال برنده شدن و $1-p=q$ را احتمال شکست در نظر بگیرید.

$$P(\text{برنده شدن } A)=\sum_{k=0}^{\infty}pq^{2k}=p\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=\frac{p}{1-q^2}=\frac{p}{(1-q)(1+q)}=\frac{1}{1+(1-p)}=\frac{p}{2-p}$$

تذکر: $\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}$ یک سری هندسی با قدر نسبت کوچکتر از یک می‌باشد، لذا همگراست و مجموع آن برابر است با: $\frac{q^{2(0)}}{1-q^2}=\frac{1}{1-q^2}$

روش دوم:

A: پیشامد آن‌که A برنده شود　B: پیشامد آن‌که B برنده شود　A': پیشامد آن‌که A برنده نشود　B': پیشامد آن‌که B برنده نشود

$$P(\text{برنده شود } A)=P(A)+P(A'B'A)+P(A'B'A'B'A)+\dots=p+q.q.p+q.q.q.q.p+\dots=p+pq^2+pq^4+\dots=\frac{p}{1-q^2}=\frac{p}{2-p}$$

۳۲ـ گزینه «۲» پیشامدها را به صورت A و B تعریف می‌کنیم ابتدا احتمال پیشامد B را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

A: پیشامد هم‌رنگ بودن　B: پیشامد هم شماره بودن

$$P(A)=\frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}=\frac{3\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}$$

برای هم شماره بودن باید هر دو ۱ یا هر دو ۲ و .... یا هر دو n باشند و از طرفی از هر عدد ۳ مهره داریم:

$$P(B)=\frac{n\binom{3}{2}}{\binom{3n}{2}}\quad ;\ P(A\cap B)=P\ (\text{هر ۲ هم‌شماره و هر ۲ هم‌رنگ})=P(\phi)=0$$

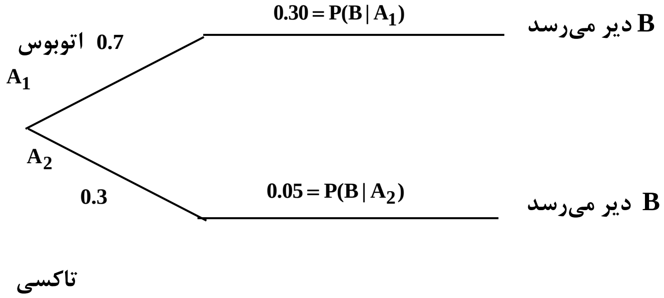
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3\binom{n}{2}+n\binom{3}{2}}{\binom{3n}{2}}=\frac{\frac{3n(n-1)}{2}+3n}{\frac{3n(3n-1)}{2}}=\frac{n+1}{3n-1}$$

۳۳ـ گزینه «۱» پیشامدی که فقط یک عضو داشته باشد پیشامد ساده نام دارد.

۳۴ـ گزینه «۱» A و B ناسازگارند $\Leftarrow P(A\cap B)=0$

۳۵ـ گزینه «۴» با کمک فرمول بیز (نمودار درختی) خواهیم داشت:

$$P(A_1\,|\,B)=\frac{P(B\,|\,A_1).P(A_1)}{\sum P(B\,|\,A_i)P(A_i)}$$



$$P(A_1\,|\,B)=\frac{0/7\times 0/3}{0/7\times 0/3+0/3\times 0/05}=\frac{42}{45}$$

۳۶ـ گزینه «۲»

$$P\ (\text{عبور جریان از A به B در مدار اول})=P(I\cup II)=P(I)+P(II)-P(I\cap II)$$

I: جریان از بالا حرکت کند.

II: جریان از پایین حرکت کند.

$$P(C_1\cap C_3)+P(C_2\cap C_4)-P(C_1\cap C_3\cap C_2\cap C_4)\Rightarrow P(1)=P(C_1).P(C_3)+P(C_2).P(C_4)$$

$$-P(C_1)P(C_2)P(C_3)P(C_4)=P_1P_3+P_2P_4-P_1P_2P_3P_4$$

$$P(2)=P(C_1\cup C_2)\cap P(C_3\cup C_4)=[P(C_1)+P(C_2)-P(C_1\cap C_2)]\times[P(C_3)+P(C_4)-P(C_3\cap C_4)]$$

$$=(P_1+P_2-P_1P_2)(P_3+P_4-P_3P_4)$$

اگر $P_1=P_2=P_3=P_4=P$ فرض شود.

$$\begin{matrix}P(1)=P^2(2-P^2)\\ P(2)=(2P-P^2)(2P-P^2)\end{matrix}\Rightarrow P(2)\ge P(1)\Rightarrow 4+P^2-4P\ge 2-P^2\Rightarrow P^2-2P+1\ge 0\qquad (P-1)^2\ge 0$$

که رابطه‌ای صحیح است.

۳۷ـ گزینه «۴» حالات مطلوب ما ۵ تا از شماره‌های ۸ تا ۱۵ می‌باشد که تعدادشان ۸ عدد است. چرا که در صورت مسأله حداقل شماره انتخابی ۸ را خواسته است.

$$P=\frac{\binom{8}{5}}{\binom{15}{5}}$$

۳۸ـ گزینه «۴» ابتدا احتمال‌های هر نقطه فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

p_1 : احتمال فرد آمدن

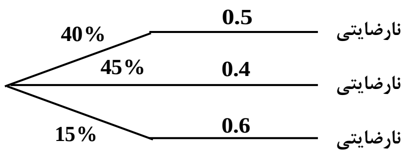
$p_2=3p_1$: احتمال زوج آمدن

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	p_1	$3p_1$	p_1	$3p_1$	p_1	$3p_1$

$$12p_1=1 \Rightarrow p_1=\frac{1}{12},\ P(\text{زوج آمدن})=\frac{3}{12}$$

$$P(\text{نتیجه مربع کامل باشد | نتیجه بزرگتر از ۳})=\frac{\overbrace{P(\text{نتیجه پرتاب بزرگتر از ۳ و نتیجه مربع کامل})}^{P(X=4)}}{\underbrace{P(\text{نتیجه پرتاب بزرگتر از ۳})}_{P(4)+P(5)+P(6)}}=\frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{3}{7}$$

۳۹ـ گزینه «۴» طبق قضیه بیز نمودار درختی به صورت زیر است:



$$P(B\,|\,\text{مشتری ناراضی})=\frac{P(\text{مشتری ناراضی}\,|B)P(B)}{P(\text{نارضایتی}\,|A)P(A)+P(\text{نارضایتی}\,|B)P(B)+P(\text{نارضایتی}\,|C)P(C)}$$

$$=\frac{0/4\times 0/45}{0/5\times 0/4+0/4\times 0/45+0/6\times 0/15}=\frac{0/18}{0/47}=\frac{18}{47}$$

۴۰ـ گزینه «۱» اگر در سه ماه متوالی بخواهد بیش از ۵ میلیون هزینه کند پس حتماً باید در هر ماه ۲ میلیون هزینه کند و داریم:

$$P(\text{بیش از ۵ میلیون در سه ماه})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

۴۱ـ گزینه «۴» در اینجا مفهوم سؤ ال این است که کوچکترین عدد ظاهر شده حتماً ۸ باشد.

$(\frac{7}{15})^5=$ احتمال این‌که عدد ظاهر شده بزرگتر یا مساوی ۹ باشد.

$(\frac{8}{15})^5=$ احتمال این‌که عدد ظاهر شده بزرگتر یا مساوی ۸ باشد.

$(\frac{8}{15})^5-(\frac{7}{15})^5=$ احتمال این‌که کوچکترین عدد ظاهر شده حتماً ۸ باشد.

۴۲ـ گزینه «۱» هیچ اطلاعی راجع به رنگ مهره‌های دیگر به ما داده نشده است. (مدل آوند پولیا)

روش اول در آوندپولیا چون اطلاعاتی راجع به بقیه مهره‌ها نداریم:

$$P(A)=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$$

روش دوم:

$$P(A)=\frac{P_5^2\times P_{18}^6}{P_{20}^8}=\frac{1}{19}$$

۴۳ـ گزینه «۲» اگر A پیشامد آن باشد که حداقل یک فرزند پسر و یک فرزند دختر باشند آنگاه متمم آن که با $\bar{A}$ نمایش داده می‌شود پیشامد آن است که همه فرزندان دختر یا پسر باشند.

$$P(A)=0/99 \Rightarrow P(\bar{A})=1-0/99=0/01$$

اگر تعداد فرزندان n باشد با احتمال $(\frac{1}{2})^n$ همه دختر و با احتمال $(\frac{1}{2})^n$ همه پسر هستند و این دو پیشامد ناسازگارند لذا:

$$P(\bar{A})=(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{n-1}=0/01 \Rightarrow -(n-1)\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}(0/01)$$

$$\Rightarrow (n-1)=\frac{-\mathrm{Ln}(0/01)}{\mathrm{Ln}2} \Rightarrow n-1=6/64 \Rightarrow n=7/64 \simeq 8 \quad \text{(بیش از ۷ تا)}$$

۴۴ـ گزینه «۲» **نکته ۱:** تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $x_1+\cdots x_r=n$ برابر است با $\binom{n+r-1}{r-1}$

نکته ۲: تعداد جواب‌های مثبت معادله‌ی $x_1+\cdots x_r=n$ برابر است با $\binom{n-1}{r-1}$

و اگر قرار دهیم تعداد توپ‌ها در ظرف i ام : X_i $\quad i=1,2,3,4$ آنگاه $x_1+x_2+x_3+x_4=7$

تعداد کل راه‌هایی که می‌توان مهره‌ها را در جعبه‌ها قرار داد برابر با تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $x_1+\cdots+x_4=7$ می‌باشد که طبق نکته۱ برابر است با:

$$\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

و تعداد راه‌هایی که می‌توان مهره‌ها را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با تعداد جواب‌های مثبت معادله‌ی $x_1+\cdots+x_4=7$، که طبق نکته ۲ برابر است با:

$$\binom{7-1}{4-1}=\binom{6}{3}$$

اگر A پیشامد آن باشد که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد آنگاه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

۴۵ـ گزینه «۲» باید در انتخاب اول A موفق نشود و B موفق شود یا در انتخاب اول A موفق نشود و B هم موفق نشود و باز هم A موفق نشود و B موفق شود ... تا نهایت عدم موفقیت منجر به بیرون کشیده شدن همه مهره‌های سیاه شود.

$$P\,(\text{مطلوب})=P(A'B)+P(A'B'A'B)+P(A'B'A'B'A'B)$$

$$\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{14}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{3}{7}$$

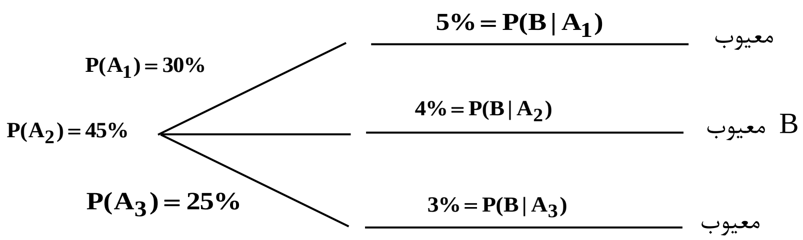
۴۶ـ گزینه «۴» طبق رابطه احتمال شرطی:

$$P(A|A\cup B\cup C)=\frac{P(A\cap(A\cup B\cup C))}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)-\cancel{P(A\cap B)}-\cancel{P(A\cap C)}-\cancel{P(B\cap C)}+\cancel{(A\cap B\cap C)}}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)}$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=P(A\cap B\cap C)=0 \Leftarrow \text{ناسازگارند } C, B, A$$

۴۷ـ گزینه «۱» با استفاده از قضیه بیز:



$$\Rightarrow P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2).P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i).P(A_i)}$$

$$P\,(\underset{B}{\text{معیوب باشد}}\,|\,\underset{A_2}{\text{توسط ماشین دوم تولید شده باشد}})=\frac{45\%\times4\%}{30\%\times5\%+45\%\times4\%+25\%\times3\%}=\frac{4}{9}$$

۴۸ـ گزینه «۳» با استفاده از قضیه بیز خواهیم داشت:

$$P(\text{فرد انتخابی مرد باشد} \mid \text{از بخش حسابداری انتخاب شود}) = \frac{P(\text{از بخش حسابداری} \mid \text{مرد باشد})P(\text{مرد باشد})}{P(\text{از بخش حسابداری} \mid \text{مرد})P(\text{مرد}) + P(\text{از بخش حسابداری} \mid \text{زن})P(\text{زن})}$$

$$= \frac{۰/۱۵\times ۰/۸}{۰/۱۵\times ۰/۸ + ۰/۲\times ۰/۲} = \frac{۰/۱۲}{۰/۰۴ + ۰/۱۲} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

۴۹ـ گزینه «۳»

$$P(\text{یک صندوق آزاد باشد}) = ۱ - P(\text{حداقل یک نفر صندوق را اشغال کند}) = ۱ - ۰/۷۵ = ۰/۲۵$$

$$\text{صندوق آزاد باشد} = ۱ - p(\text{هیچ صندوقی آزاد نباشد}) = ۱ - p(\text{همهٔ صندوق‌ها مشتری داشته باشند})$$

چون صندوق‌ها مستقل‌اند پس:

$$= ۱ - p(\text{صندوق اول مشتری}) \times \ldots \times p(\text{صندوق دهم دارای مشتری باشد}) = ۱ - (۰/۷۵)^{۱۰}$$

۵۰ـ گزینه «۲» از رابطه بیز استفاده می‌کنیم:

$$P(X_۱ = ۲ \mid X_۲ = ۱) = \frac{P(X_۲ = ۱ \mid X_۱ = ۲)P(X_۱ = ۲)}{P(X_۲ = ۱)}$$

از طرفی داریم:

$$P(X_۲ = ۱) = \sum_{i=۱}^{۴} P(X_۲ = ۱ \mid X_۱ = i)P(X_۱ = i) = (۱\times\frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}) = \frac{۲۵}{۴۸}$$

بنابراین داریم:

$$P(X_۱ = ۲ \mid X_۲ = ۱) = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۲۵}{۴۸}} = \frac{۴۸}{۲۰۰} = \frac{۶}{۲۵}$$

۵۱ـ گزینه «۳»

$$A\Delta B = (A - B)\cup(B - A)$$

واضح است که A-B و B-A ناسازگارند بنابراین:

$$P(A\Delta B) = P(A - B) + P(B - A) = P(A\cap B') + P(B\cap A')$$

اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، B, A' نیز مستقل‌اند بنابراین تساوی فوق برابر است با:

$$P(A)P(B') + P(B)P(A') = \frac{۱}{۲}.\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad ; \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|A\Delta B) = \frac{P(A\cap(A\Delta B))}{P(A\Delta B)}$$

برای محاسبه‌ی $P(A\cap(A\Delta B))$ ابتدا پیشامد $A\cap(A\Delta B)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$A\cap(A\Delta B) = A\cap((A - B)\cup(B - A)) = (A\cap(A - B))\cup(A\cap(B - A)) = (A - B)\cup\phi = A - B$$

$$P(A - B) = P(A\cap B') = P(A)P(B') = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۶}$$

بنابراین:

$$P(A|A\Delta B) = \frac{P(A - B)}{P(A\Delta B)} = \frac{\frac{۲}{۶}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۵۲ـ گزینه «۴»

$$p(A \mid B) = p(A \mid \bar{B}) \Rightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})} \Rightarrow (۱ - p(B))p(A\cap B) = p(B)p(A\cap\bar{B})$$

$$\Rightarrow p(A\cap B) = p(B)(p(A\cap B) + p(A\cap\bar{B}))$$

چون $A\cap\bar{B}$ و $A\cap B$ ناسازگارند پس:

$$p(A\cap B) = p(B)(p[A\cap B]\cup[A\cap\bar{B}]) = p(B)(p(A\cap(B\cup\bar{B})) = p(B)\,P(A)$$

بنابراین A و B مستقل‌اند.

2 3 4

۵۳ـ گزینه «۴» A' : پیشامد این‌که قرمز یا سفید یا آبی انتخاب نشود.

$\binom{۷}{۵}$ قرمز انتخاب نشود $\binom{۶}{۵}$ سفید انتخاب نشود $\binom{۵}{۵}$ آبی انتخاب نشود

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{5}}-\frac{\binom{6}{5}}{\binom{9}{5}}-\frac{\binom{5}{5}}{\binom{9}{5}}=1-\frac{1}{126}(21+6+1)=1-\frac{28}{126}=\frac{7}{9}$$

۵۴ـ گزینه «۱» کران پایین برای $P(A|B)$ یعنی حداقل مقداری که $P(A|B)$ می‌تواند اختیار کند و این زمانی است کـه صـورت کسـر $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ حداقل باشد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0\le P(A\cup B)\le 1\Rightarrow 0\le 0/4+0/8-P(A\cap B)\le 1$$

$$\Rightarrow 0/2\le P(A\cap B)\le 0/4\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ge\frac{0/2}{0/8}=\frac{1}{4}$$

۵۵ـ گزینه «۲»

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\Rightarrow B\subset A$$

$$B\subset A\Rightarrow A'\subset B'\Rightarrow A'\cap B'=A'\Rightarrow P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A')}{P(A')}=1$$

۵۶ـ گزینه «۲» دو پیشامد A و B مستقل‌اند بنابراین $\bar{A}$ و B نیز مستقل‌اند.

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\bar{A}).P(B)}{P(B)}=P(\bar{A})$$

۵۷ـ گزینه «۴» صفحه شطرنج یک مربع 8×8 است. پس ۱۶ خط مستقیم (۲ خط مستقیم نیز روی قطرها) داریم بنابراین در هـر خانـه یـک گنـدم قـرار بگیـرد به‌صورت $\binom{64}{8}=C_8^{64}$ حالت انتخاب داریم اکنون این ۸ دانه گندم در یک راستای مستقیم قرار بگیرند که ۱۶ خط مستقیم و ۲ قطر کـه حـالات مطلـوب عبـارت است از:

$$n(A)=16+2=18$$

۵۸ـ گزینه «۲» مسأله دو جزء دارد؛ یک جزء انتخاب جعبه و دیگری انتخاب توپ دوم (توپ سفید). توجه کنید به دلیل این‌که رنگ مهره اول گفته نشـده پس قسمت انتخاب توپ دوم مانند مدل آوند پولیا می‌باشد.

P(توپ دوم سفید) = P(توپ دوم سفید و انتخاب جعبه اول) + P(توپ دوم سفید و انتخاب جعبه دوم) + . . .

$$=\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}+\frac{1}{n}\times\frac{n-3}{n-1}+\dots+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$$

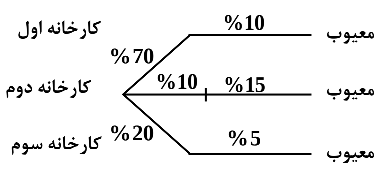
۵۹ـ گزینه «۴»

$$P(\text{تیم دوم اروپایی و تیم اول آسیایی})=\underbrace{\frac{4}{4+n}}_{\text{تیم آسیایی}}\times\underbrace{\frac{n}{4+n-1}}_{\text{تیم اروپایی}}=\frac{4}{15}\Rightarrow\frac{\cancel{4}n}{(4+n)(4+n-1)}=\frac{\cancel{4}}{15}$$

$$15n=(4+n)(4+n-1)\Rightarrow 15n=16+4n-n+4n+n^2-n$$

$$n^2-8n+12=0\Rightarrow(n-6)(n-2)=0\Rightarrow\begin{cases}n=2\\n=6\end{cases}$$

۶۰ـ گزینه «۴» با استفاده از قضیه بیز و نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow P(\text{معیوب بودن}) = ۷۰\% \times ۱۰\% + ۱۰\% \times ۱۵\% + ۲۰\% \times ۵\% = ۹/۵\%$$

۶۱ـ گزینه «۴» **روش اول:** زمانی امکان باز کردن در وجود دارد که کلید گمشده از بین هفت کلیدی باشد که هیچکدام از قفل‌ها را باز نمی‌کنند. بنابراین داریم:

$$P(\text{در باز شود}) = \frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۷}{۱۰}$$

روش دوم: زمانی امکان باز کردن در وجود دارد که ۳ کلیدی که در را باز می‌کنند بین ۹ کلید باشند که داریم:

$$P(\text{در باز شود}) = \frac{\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۸۴}{۱۲۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

۶۲ـ گزینه «۲» قانون احتمال بیز: فرض کنید $B_۱, \cdots, B_n$ پیشامدهایی باشند که دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع تمام آنها برابر فضای نمونه S باشد، یعنی $S = \bigcup_{i=۱}^{n} B_i$, $B_i \cap B_j = \phi ; \forall i \neq j$ و A پیشامدی از فضای نمونه S باشد آنگاه:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=۱}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)} \quad j = ۱, ۲, \cdots, n$$

M: پیشامد مرد بودن　　F: پیشامد زن بودن　　A: پیشامد کوررنگ بودن

$$P(M \mid A) = \frac{P(A \mid M)P(M)}{P(A \mid M)P(M) + P(A \mid F)P(F)} = \frac{(۰/۰۶) \times \frac{۱}{۲}}{(۰/۰۶) \times \frac{۱}{۲} + (۰/۰۴) \times \frac{۱}{۲}} = ۰/۶$$

۶۳ـ گزینه «۲» اگر $n_۱ + \cdots n_r = n$ باشد تعداد تقسیم‌های ممکن n شیء مختلف به r گروه متفاوت که هر کدام به ترتیب دارای $n_۱, n_۲, \cdots, n_r$ عضو هستند به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, \cdots n_r} = \frac{n!}{n_۱! n_۲! \cdots n_r!}$$

دانش‌آموزان به صورت یکسان در کلاس‌ها تقسیم می‌شوند. بنابراین کل حالات ممکن عبارت است از تقسیم ۱۵ نفر به ۳ گروه ۵ تایی $n(S) = \binom{۱۵}{۵, ۵, ۵}$

برای این‌که به هر کلاس یکی از دانش‌آموزان باهوش برسد، ابتدا هر کدام از آن‌ها را به یکی از کلاس‌ها اختصاص می‌دهیم که این عمل به !۳ حالت قابل انجام است و سپس ۱۲ نفر باقی مانده را به ۳ گروه ۴ نفره تقسیم می‌کنیم. $n(A) = ۳! \binom{۱۲}{۴, ۴, ۴}$

بنابراین: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۵}{۹۱}$

۶۴ـ گزینه «۴» با توجه به نامساوی بول داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

بنابراین:

$$P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) \le P(A_1) + P(A_2 \cap A_3)$$

$$\begin{cases} (A_2 \cap A_3) \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_2 \cap A_3) \le P(A_2) \\ (A_2 \cap A_3) \subseteq A_3 \Rightarrow P(A_2 \cap A_3) \le P(A_3) \end{cases} \Rightarrow 2P(A_2 \cap A_3) \le P(A_2) + P(A_3) \Rightarrow P(A_2 \cap A_3) \le \frac{1}{2}[P(A_2) + P(A_3)]$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) \le P(A_1) + \frac{1}{2}(P(A_2) + P(A_3)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{67}{120}$$

۶۵ـ گزینه «۳» دو پیشامد مستقل هستند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0/5 + 0/4 - 0/2 = 0/7$$

۶۶ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. به ترتیب احتمال‌های مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(X=1) = P\,,\ P(X=2) = 2P\,,\ P(X=3) = 3P$$

$$P(X=4) = 4P\,,\ P(X=5) = 5P\,,\ P(X=6) = 6P$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P + 2P + 3P + 4P + 5P + 6P = 1 \Rightarrow 21P = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{21}$$

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{3}{21}$$

$$B = \{2, 4\} \Rightarrow P(B) = P(X=2) + P(X=4) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} = \frac{6}{21}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{21} \Rightarrow P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} - 2(\frac{2}{21}) = \frac{3+6-4}{21} = \frac{5}{21}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} - \frac{2}{21} = \frac{7}{21}$$

$$P(A \Delta B \mid A \cup B) = \frac{P((A \Delta B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \Delta B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{5}{21}}{\frac{7}{21}} = \frac{5}{7}$$

۶۷ـ گزینه «۴» باتوجه به رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A) = 0/2 \quad ; \quad P(B) = 0/22 \quad ; \quad P(B \mid A) = 0/7 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A) = 0/14$$

$$P(B' \mid A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{(P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{[P(A) + P(B) - P(A \cap B)]'}{1 - P(A)} = \frac{[0/2 + 0/22 - 0/14]'}{1 - 0/2} = \frac{0/72}{0/8} = 0/9$$

۶۸ـ گزینه «۴» طبق قانون بیز:

X: تعداد مهره‌های سفید در ظرف ، A: مهره بیرون آمده سفید است

$$P(X=3 \mid A) = \frac{P(X=3).P(A \mid X=3)}{P(X=3).P(A \mid X=3) + P(X=2).P(A \mid X=2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

۶۹ـ گزینه «۳» چون هر دو مؤلفه به‌طور متوالی (سری) بسته شده است زمانی که هر دو جزء کار کنند سیستم فعال است:

$$P(A)=1-P(A')=1-0/1=0/9 \quad , \quad P(B)=1-P(B')=1-0/3=0/7$$

توجه کنید که دو جزء A و B مستقل هستند.

$$P(\text{سیستم فعال})=P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/9\times 0/7=0/63$$

۷۰ـ گزینه صحیح وجود ندارد. ابتدا پیشامد $(A_1\Delta A_2)\cap A_3$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_1\Delta A_2=(A_1\cap A_2')\cup(A_1'\cap A_2) \Rightarrow (A_1\Delta A_2)\cap A_3=((A_1\cap A_2')\cup(A_1'\cap A_2))\cap A_3$$

$$=(A_1\cap A_2'\cap A_3)\cup(A_1'\cap A_2\cap A_3) \Rightarrow P(A_1\Delta A_2)\cap A_3$$

$$=P(A_1\cap A_2'\cap A_3)+P(A_1'\cap A_2\cap A_3)-\underbrace{P(A_1\cap A_2'\cap A_3\cap A_1'\cap A_2\cap A_3)}_{0}$$

$$\Rightarrow P(A_1\Delta A_2)\cap A_3=P(A_1\cap A_2'\cap A_3)+P(A_1'\cap A_2\cap A_3)$$

$$\xrightarrow[\text{مستقل‌اند}]{\text{پیشامدها دو به دو}} P(A_1)\times P(A_2')\times P(A_3)+P(A_1')\times P(A_2)\times P(A_3)=\frac{4}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{56}{1000}+\frac{36}{1000}=\frac{92}{1000}$$

۷۱ـ گزینه «۱» ابتدا پیشامدهای روبرو را تعریف می‌کنیم:

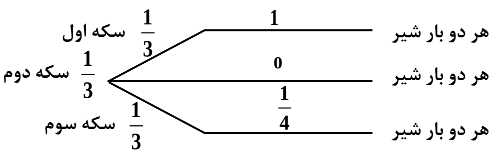
$W:$ دو گوی سفید انتخاب شود

$X:$ تعداد گوی‌های سفید در ظرف

$$P(X=6|W)=\frac{P(X=6,W)}{P(W)}=\frac{P(X=6).P(W|x=6)}{P(X=6).P(W|x=6)+P(X=4).P(W|x=4)+P(X=2).P(W|x=2)}$$

$$=\frac{\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}}{\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}}=\frac{15}{19}$$

۷۲ـ گزینه «۳» طبق رابطه بیز و با کمک نمودار درختی خواهیم داشت:



$$P(A)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}$$

۷۳ـ گزینه «۳» فرض کنید $B_1,B_2,\cdots,B_n$ پیشامدهایی باشند که دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع تمام آنها برابر فضای نمونه S باشد یعنی:

$$B_i\cap B_j=\phi \quad \forall i\neq j,\ S=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$$

و A پیشامدی با احتمال مثبت باشد آنگاه:

$$P(B_j|A)=\frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$$

فرمول فوق را فرمول احتمال بیز گویند.

W: پیشامد این‌که هر دو مهره سفید باشند. I_i : پیشامد این‌که جعبه i ام انتخاب شود $\quad i=A,B,C$

$$P(I_A|W)=\frac{P(W|I_A)P(I_A)}{P(W|I_A)P(I_A)+P(W|I_B)P(W|I_c)P(I_c)}=\frac{\binom{3}{2}\frac{1}{3}}{\binom{3}{2}\frac{1}{3}+\binom{4}{2}\frac{1}{3}+\binom{5}{2}\frac{1}{3}}=\frac{3}{19}$$

۷۴ـ گزینه «۱» آقایان A و B و C و D می‌توانند به صورت (DCBA یا ABCD) باشند یعنی B، C، D می‌توانند در سمت راست A مرتب شوند. (۲ حالت) اکنون بقیه افراد یعنی $n-۴$ نفر دیگر می‌توانند به $(n-۴)!$ در کنار این ۴ نفر مرتب شوند:

$$p(A)=\frac{۲\times(n-۴)!}{(n-۱)!}=\frac{۲}{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}$$

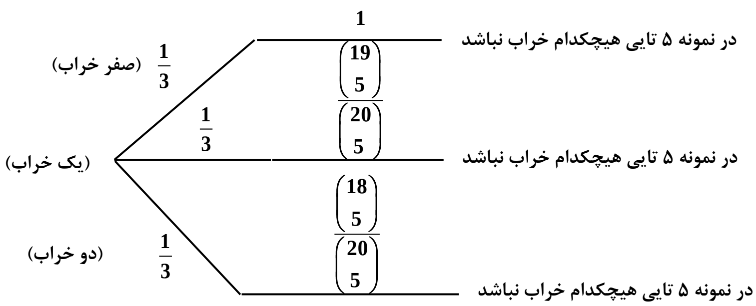
۷۵ـ گزینه «۳» با یک فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر روبرو هستیم اگر بازی با فرد A شروع شود به دلیل آن که مطلوبیت بـرد B اسـت بنـابراین، مدل احتمال به صورت زیر خواهد بود:

	$A'B$	$A'B'A'B$	$A'B'A'B'A'B$	…
P	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}$	…

p(B برد) = فرد B در بار اول پرتاب موفق شود + فرد B در بار دوم پرتاب خود موفق شود + فرد B در بار سوم پرتاب خود موفق شود + …

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}+(\frac{۱}{۳})^۳\times\frac{۲}{۳}+(\frac{۱}{۳})^۵\times\frac{۲}{۳}+\ldots=\frac{\text{جمله اول}}{\text{۱− قدر نسبت}}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}}{۱-(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{\frac{۲}{۹}}{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۸}{۹}}=\frac{۱}{۴}$$

۷۶ـ گزینه «۱» با استفاده از نمودار درختی خواهیم داشت:



$$P\left(\text{در تمام ۲۰ قطعه خراب وجود نداشته باشد} \mid \text{در نمونه ۵ تایی هیچکدام خراب نباشد}\right)=\frac{۱\times\frac{۱}{۳}}{۱\times\frac{۱}{۳}+\frac{\binom{۱۹}{۵}}{\binom{۲۰}{۵}}\times\frac{۱}{۳}+\frac{\binom{۱۸}{۵}}{\binom{۲۰}{۵}}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۷۶}{۱۷۵}$$

۷۷ـ گزینه «۱» ابتدا n نفر $(n>۵)$ را به $(n-۱)!$ می‌توان دور یک میزگرد مرتب کرد بنابراین:

$$n(S)=(n-۱)!$$

اما حالات مطلوب: ابتدای آقای T را در یک مکان ثابت قرار می‌دهیم بنابراین $(n-۱)$ جای خالی باقی می‌ماند. اکنون نفرات z, y, x را در مکان‌هایی کـه کنار T نیستند قرار می‌دهیم این کار به $(n-۳)(n-۴)(n-۵)$ طریق امکان‌پذیر است.

در پایان $(n-۴)$ نفر را به $(n-۴)!$ طریق مرتب می‌کنیم بنابراین:

$$P(A)=\frac{(n-۳)(n-۴)(n-۵)(n-۴)!}{(n-۱)}=\frac{(n-۳)(n-۴)(n-۵)(n-۴)!}{(n-۱)(n-۳)(n-۴)!}=\frac{(n-۴)(n-۵)}{(n-۱)(n-۲)}$$

۷۸ـ گزینه «۲»

A_i: پیشامد آن که رقم در مرحله i ام به صورت صفر مشاهده شود. $i = 1,2,3$

اکنون توجه کنید برای آن که رقم ورودی صفر در مرحله آخر هم به صورت صفر ظاهر شود باید تغییر نداشته باشد و یا دو متغیر داشته باشد (صفر ← ۱ و ۱ ← صفر) اگر رقم ورودی یک باشد برای آنکه در مرحله آخر به صورت صفر ظاهر شود باید ۱ یا ۳ تغییر داشته باشد (یک ← صفر و صفر ← یک و یک ← صفر). بنابراین توجه کنید که چه عدد صفر و چه عدد یک وارد شوند. می‌خواهیم خروجی صفر باشد.

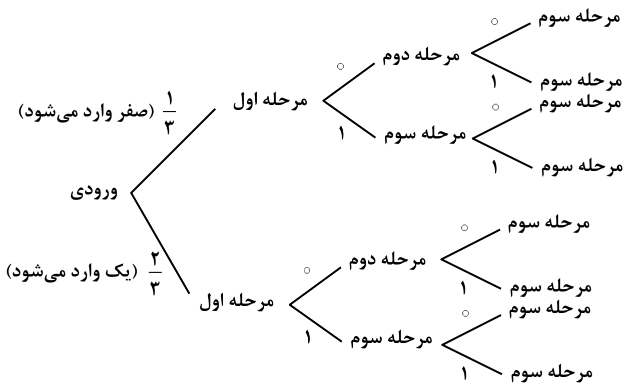
$$P(A_0 \mid A_3) = \frac{p(A_3 \mid A_0).p(A_0)}{p(A_3 \mid A_0).p(A_0) + p(A_3 \mid A'_0).p(A'_0)} \quad p(A_3 \mid A_0) = \binom{3}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^3 + \binom{3}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^1 = \frac{13}{27}$$

$$p(A_3 \mid A'_0) = \binom{3}{1}(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^2 + \binom{3}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^0 = \frac{14}{27}$$

مقادیر را در فرمول بیز جایگذاری می‌کنیم:

$$p(A_0 \mid A_3) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{13}{27}}{\frac{13}{27} \times \frac{1}{3} + \frac{14}{27} \times \frac{2}{3}} = \frac{13}{41}$$

می‌توانیم از نمودار درختی نیز استفاده کنیم. برای راحت دیده شدن فرمول بالا نمودار را رسم می‌کنیم:



۷۹ـ گزینه «۳» C_i: پیشامد معیوب بودن مؤلفه خریداری شده $i = 1,2$

B, A: پیشامد خرید از کارخانه B , A

$$P(C_2 \mid C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)} \quad ; \quad P(C_1) = P(C_1 \mid A)\cdot P(A) + P(C_1 \mid B)\cdot P(B) = \frac{5}{100} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{100} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{500}$$

$$P(C_1 \mid C_2) = \frac{5}{100} \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{4}{5} = \frac{29}{50000} \Rightarrow P(C_2 \mid C_1) = \frac{\frac{29}{50000}}{\frac{9}{500}} = \frac{29}{900}$$

۸۰ـ گزینه «۱» دو تاس را که پرتاب می‌کنیم ۳۶ حالت وجود دارد اگر بدانیم دو خال متفاوت است یعنی ۶ حالت از فضای نمونه کم شده است. حالاتی کـه دو خـال شکل هم هستند عبارت است از:

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ پس فضای نمونه اکنون ۳۰ حالت دارد: $n(S) = 30$

حالات مطلوب: $A = \{(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

۸۱ـ گزینه «۴» B_i : سالم تشخیص دادن قطعه در i امین بار ، A: سالم بودن قطعه

$$P(B_i \mid A') = ۰/۱ \Rightarrow P(B'_i \mid A') = ۰/۹$$

$$P(B'_i \mid A) = ۰/۱ \Rightarrow P(B_i \mid A) = ۰/۹$$

$$P(\text{دومی سالم} \mid \text{اولی سالم باشد}) = \frac{P(\text{اولی و دومی سالم باشد})}{P(\text{اولی سالم باشد})} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}} = \frac{۸۲}{۱۰۰}$$

۸۲ـ گزینه «۳» **روش اول:**

$$P(A) = \%۶۰$$

$$P(B) = \%۳۰$$

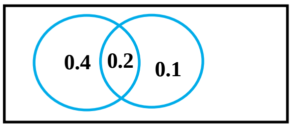
$$P(A \cap B) = \%۲۰$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۳ - ۰/۴ = ۰/۵$$

روش دوم: شکل بیانگر احتمال مطلوب می‌باشد.

A : ماشین شخصی $\qquad$ B : منزل شخصی

احتمال مطلوب برابر با $۰/۵ = ۰/۱ + ۰/۴$ می‌باشد.



۸۳ـ گزینه «۴» تعداد کل حالات تقسیم ۵ قطعه بین ۱۰ شرکت متفاوت برابر است با: $۱۰^۵$

اما مطلوب آن است که تأمین‌کننده خاص، ۳ قطعه را تأمین کند و ۲ قطعه دیگر را ۹ شرکت باقیمانده تأمین کنند.

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۳}\cdot ۹^۲}{۱۰^۵}$$

۸۴ـ گزینه «۳» A و B مستقل‌اند.

$$P(A' \cap B') = a \Rightarrow P(A')\cdot P(B') = a \Rightarrow P(A') = \frac{a}{۱-b}$$

$$P(B) = b \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{a}{۱-b} = \frac{۱-b-a}{۱-b}$$

۸۵ـ گزینه «۲» ابتدا پیشامدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، سپس از فرمول بیز مسأله را حل می‌کنیم:

$A_۱$: خط تولید اول $\qquad$ $B_۱$: اولین لامپ انتخابی معیوب باشد

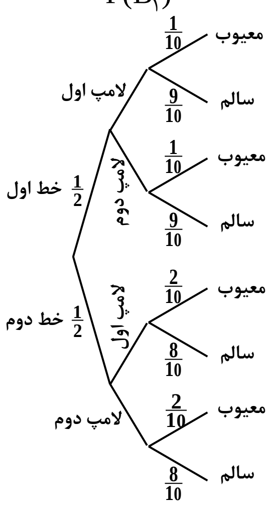
$A_۲$: خط تولید دوم $\qquad$ $B_۲$: دومین لامپ انتخابی معیوب باشد

$$P(B_۲ \mid B_۱) = \frac{P(B_۲ \cap B_۱)}{P(B_۱)} = \frac{P(B_۲ \cap B_۱ \mid A_۱).P(A_۱) + P(B_۲ \cap B_۱ \mid A_۲).P(A_۲)}{P(B_۱ \mid A_۱).P(A_۱) + P(B_۱ \mid A_۲).P(A_۲)}$$

$$\frac{P(B_۱ \mid A_۱).P(B_۲ \mid A_۱).P(A_۱) + P(B_۱ \mid A_۲).P(B_۲ \mid A_۲).P(A_۲)}{P(B_۱ \mid A_۱).P(A_۱) + P(B_۱ \mid A_۲).P(A_۲)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲۰۰}+\frac{۴}{۲۰۰}}{\frac{۱}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}} = \frac{\frac{۵}{۲۰۰}}{\frac{۳}{۲۰}} = \frac{۱}{۶}$$

نمودار درختی این مسأله به صورت روبرو است:



۸۶ـ گزینه «۲» A: پیشامد این‌که عدد از ۷۰۰۰ کوچکتر و بر ۲ قابل قسمت باشد.

برای این‌که عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد یکان آن می‌تواند یکی از اعضای مجموعه $\{۰,۲,۴,۶,۸\}$ باشد و برای این‌که کوچکتر از ۷۰۰۰ باشد (با در نظر گرفتن این‌که تکرار ارقام مجاز است) هزارگان آن باید یکی از اعضای مجموعه $\{۱,۲,\dots,۶\}$ باشد و محدودیتی برای دهگان و صدگان وجود ندارد لذا:

$$\left.\begin{array}{l} n(A)=۶\times۱۰\times۱۰\times۵=۳۰۰۰ \\ n(S)=۹\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۹۰۰۰ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳\times۱۰^۳}{۹\times۱۰^۳}=\frac{۱}{۳}$$

۸۷ـ گزینه «۲» X_i : پیشامد این‌که شماره کارت i ام زوج باشد $i=۱,۲,۳$ ‌ ‌ ‌ Y_i : پیشامد این‌که شماره کارت i ام فرد باشد $i=۱,۲,۳$

A: پیشامد این‌که شماره کارت‌ها یک در میان زوج و فرد باشد.

با توجه به این‌که در بین اعداد یک تا ۹، ۴ عدد زوج و ۵ عدد فرد وجود دارد و انتخاب‌ها بدون جایگذاری‌اند، داریم:

$$P(A)=P(X_۱Y_۲X_۳)+P(Y_۱X_۲Y_۳)=P(X_۱)P(Y_۲\,|\,X_۱)P(X_۳\,|X_۱Y_۲)+P(Y_۱)P(X_۲\,|Y_۱)P(Y_۳\,|X_۲Y_۱)$$

$$=\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{۱۸}$$

۸۸ـ گزینه «۳» X: نقطه‌ای که به تصادف از فاصله‌ی $(۰,L)$ انتخاب می‌شود.

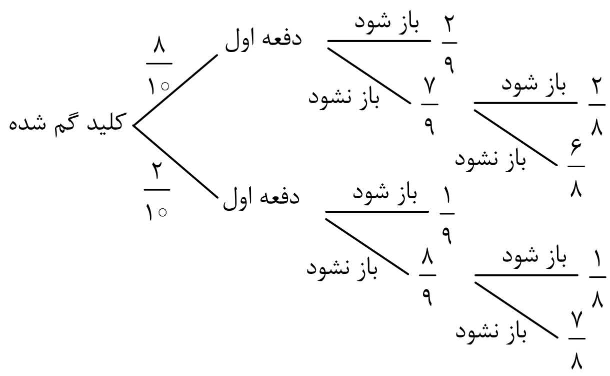
نسبت طول پاره خط کوچکتر به بزرگتر می‌تواند $\frac{x}{L-x}$ یا $\frac{L-x}{x}$ باشد، که دو پیشامد ناسازگارند. بنابراین:

$$P\left(\frac{\text{طول پاره خط کوچکتر}}{\text{طول پاره خط بزرگتر}}<\frac{۱}{۵}\right)=P\left(\frac{x}{L-x}<\frac{۱}{۵}\right)+P\left(\frac{L-x}{x}<\frac{۱}{۵}\right)$$

با ساده کردن نامعادلات داریم:

$$=P(X<\frac{L}{۶})+P(X>\frac{۵}{۶}L)=p(X<\frac{L}{۶})+۱-p(X<\frac{۵}{۶}L)=\frac{\frac{L}{۶}}{L}+۱-\frac{\frac{۵}{۶}L}{L}=\frac{۱}{۶}+۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۸۹ـ گزینه «۲» کلیدها را به صورت یک دسته ۸ تایی و دوتا کلید اصلی درب‌ها در نظر می‌گیریم. کلید گم شده می‌تواند از ۸تایی یا دسته دوتایی باشد با احتمال‌های به ترتیب $\frac{۸}{۱۰}$ یا $\frac{۲}{۱۰}$.



$$\left[۱-\frac{۸}{۹}\times\frac{۷}{۸}\right]\times\frac{۲}{۱۰}+\left[۱-\frac{۷}{۹}\times\frac{۶}{۸}\right]\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۲}{۹}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۱۷}{۴۵}$$

۹۰ـ گزینه «۴» A: سابقه بیش از ۵ سال دارند. ‌ ‌ B: کارشناس فنی می‌باشد.

$A\cap B$: کارشناس فنی و سابقه بیش از ۵ سال

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{۴۸}{۱۰۰}+\frac{۴۷}{۱۰۰}-\frac{۳۸}{۱۰۰}=\frac{۵۷}{۱۰۰}$$

۹۱ـ گزینه «۲» طبق نامساوی بونفرونی:

$$0 \le P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1 \quad \Rightarrow 0 \le 0/7 + 0/8 - P(A \cap B) \le 1$$

$$-1/5 \le -P(A \cap B) \le -0/5 \Rightarrow P(A \cap B) \ge 0/5$$

۹۲ـ گزینه «۲» حداقل مقدار این کسر $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ زمانی است که $P(A \cap B)$ حداقل باشد و این زمانی رخ می‌دهد که A و B ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \phi$ و $P(A \cap B) = 0$.

۹۳ـ گزینه «۳» طبق رابطه بیز خواهیم داشت:

$$P(\text{زایمان غیرطبیعی | سیگاری باشند}) = \frac{P(\text{زایمان غیرطبیعی و سیگاری})}{P(\text{زایمان غیرطبیعی})} = \frac{0/15 \times 2a}{0/15 \times 2a + 0/85 \times a} = \frac{0/15 \times 2}{0/15 \times 2 + 0/85 \times 1} = \frac{6}{23}$$

۹۴ـ گزینه «۴» $(A \Delta B \cap B)$ را مشخص می‌کنیم. توجه کنید که:

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$A \Delta B \cap B = ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cap B = (A \cap \bar{B} \cap B) \cup (B \cap \bar{A} \cap B) = (A \cap \phi) \cup (B \cap \bar{A}) = \phi \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap \bar{A} \quad \text{(I)}$$

از طرفی دقت کنید که $B \cap \bar{A} \subset \bar{A}$ می‌باشد، بنابراین:

$$P(B \cap \bar{A}) \le P(\bar{A})$$

اکنون به صورت مسأله بر می‌گردیم:

$$P(A \Delta B | B) = \frac{P(A \Delta B \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\text{(I)}} \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)} \le \frac{P(\bar{A})}{P(B)}$$

۹۵ـ گزینه «۳» $A \Delta B$ را تفاضل متقارن A و B گویند که برابر است با:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

یادآوری: ۱) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند $A - B = A \cap B'$.

۲) اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، B, A' و B', A' نیز مستقل‌اند.

۳) اگر A و B مستقل باشند $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A' \Delta B') = P[(A' - B') \cup (B' - A')] = P(A' - B') + P(B' - A') - P((A' - B') \cap (B' - A'))$$

$(A' - B') \cap (B' - A') = \phi \ , \ P(\phi) = 0$ بنابراین:

$$P(A' \Delta B') = P(A' - B') + P(B' - A') = P(A' \cap B) + P(B' \cap A) = P(A')P(B) + P(B')P(A)$$

$$= (1 - \frac{1}{2})(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

۹۶ـ گزینه «۴» اگر $B_1, B_2, \cdots, B_n$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند به طوری که اجتماع آنها برابر فضای نمونه S باشد، یعنی:

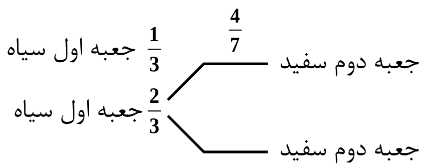
$$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \ne j \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$$

و A پیشامدی با احتمال مثبت از فضای نمونه S باشد آنگاه:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A | B_i) P(B_i)} \qquad j = 1, \cdots n$$

فرمول فوق را فرمول بیز گویند.

اگر پیشامدهای W_i و B_i را به صورت زیر تعریف کنیم آنگاه $P(W_1 | W_2)$ با توجه به قانون بیز محاسبه می‌شود.



W_i: مهره انتخابی از جعبه i ام سفید باشد و B_i: مهره انتخابی از جعبه i ام سیاه باشد.

5/7

$$P(W_1|W_2)=\frac{P(W_2|W_1)P(W_1)}{P(W_2|W_1)P(W_1)+P(W_2|B_1)P(B_1)}=\frac{\frac{۵}{۷}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۷}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۱۰}{۱۴}=\frac{۵}{۷}$$

۹۷ـ گزینه «۳» اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر باشند پس اگر به رقم یکان و a_c رقم دهگان باشند آنگاه باید:

$۱۰a_۲+a_۱=۴k$

اکنون حالات متفاوت را بررسی می‌کنیم:

$$a_۲=۰\Rightarrow a_۱=۴k\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۴\ \rightarrow\ \text{تعداد حالات دو رقم دیگر عدد چهار رقمی}\Rightarrow ۵\times۴\\ a_۱=۸\ \rightarrow\ \text{تعداد حالات دو رقم دیگر عدد چهار رقمی}\Rightarrow ۵\times۴\end{cases}$$

$$a_۲=۰\Rightarrow a_۱=۴k\rightarrow ۱۰+۶\frac{a_۱}{۲}=۲k\rightarrow a_۱=\begin{cases}۰\rightarrow ۵\times۴\\ ۴\rightarrow ۴\times۴\\ ۸\rightarrow ۴\times۴\end{cases}$$

$$a_۲=۳\Rightarrow ۳۰+a_۱=۴k\rightarrow ۱۵+\frac{a_۱}{۲}=۲k\rightarrow a_۱=\begin{cases}۲\rightarrow ۴\times۴\\ ۶\rightarrow ۴\times۴\end{cases}$$

$$a_۲=۴\Rightarrow ۴۰+a_۱=۴k\rightarrow ۱۰+\frac{a_۱}{۴}=k\rightarrow a_۱=\begin{cases}۴\rightarrow\ \text{تکرار ارقام مجاز نیست}\\ ۸\rightarrow ۴\times۴\\ ۰\rightarrow ۵\times۴\end{cases}$$

$$a_۲=۶\Rightarrow ۶۰+a_۱=۴k\rightarrow ۲۵+\frac{a_۱}{۴}=k\rightarrow a_۱=\begin{cases}۰\rightarrow ۵\times۴\\ ۴\rightarrow ۴\times۴\\ ۸\rightarrow ۴\times۴\ \ \text{تکرار ارقام مجاز نیست}\end{cases}$$

$$a_۲=۹\Rightarrow ۹۰+a_۱=۴k\rightarrow ۴۵+\frac{a_۱}{۲}=۲k\rightarrow a_۱=\begin{cases}۲\rightarrow ۴\times۴\\ ۶\rightarrow ۴\times۴\end{cases}$$

مجموعه حالات فوق برابر با $۴\times۵\times۶+۴\times۴\times۱۰$ است یعنی $۱۶۰+۱۲۰=۲۸۰$ حالت داریم. از طرفی تعداد کل حالات برابر با $۶\times۶\times۵\times۴=۷۲۰$ است پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۷}{۱۸}=\frac{۲۸۰}{۷۲۰}$ است.

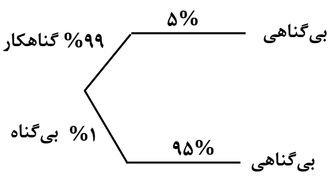
۹۸ـ گزینه «۴» تعداد حالات کل، تقسیم ۲۰ نفر به گروههای دوتایی است به طوری که ترتیب داخل گروهها مهم نیست که به $\frac{۲۰!}{(۲!)^{۱۰}}$ حالت امکان‌پذیر است.

اکنون می‌خواهیم در هر گروه فقط بازیکن دفاع یا حمله باشد. پس باید ۵ تا از گروهها را انتخاب کنیم که به $\binom{۱۰}{۵}$ طریق امکان‌پذیر است. حال برای این ۵ گروه می‌خواهیم بازیکن دفاع قرار دهیم به طوری که ترتیب داخل گروهها مهم نباشد که به $\frac{۱۰!}{(۲!)^۵}$ طریق امکان‌پذیر است. احتمال مطلوب $\frac{\binom{۱۰}{۵}\left(\frac{۱۰!}{(۲!)^۵}\right)^۲}{\frac{۲۰!}{(۲!)^{۱۰}}}$ است.

۹۹ـ گزینه «۲» فرض کنید A گناهکار تشخیص دادن و B گناهکار بودن را نشان دهد. طبق صورت مسأله داریم $P(A)=۰/۹۹$, $P(B|A)=۰/۹۵$ پس $P(B'|A')=۱$, $P(A')=۱-P(A)=۰/۰۱$, $P(B'|A)=۱-P(B|A)=۰/۰۵$. هدف این سؤال یافتن $P(A'|B')$ می‌باشد. برای این کار از قضیه احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'|B')P(A')}{P(A'|B')P(A')+P(B'|A)P(A)}=\frac{\%۱\times\%۹۵}{\%۹۵(۰/۰۱)+(۰/۰۵)(۰/۹۹)}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۵۹۵}=۰/۱۶۱$$

نمودار درختی به صورت زیر است:



۱۰۰ـ گزینه «۱» اگر پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف کنیم اطلاعات مسأله به صورت زیر است:

A : پیشامد تصادف　　　B : پیشامد مستعد بودن

$$p(A)=۰/۳\ ;\ p(B)=۰/۴\quad ;\ p(B|A)=۰/۶\quad ;\ p(A'|B)=?$$

$$p(B|A)=\frac{p(B).p(A|B)}{p(A)}\Rightarrow ۰/۶=\frac{p(A|B)\times ۰/۴}{۰/۳}\rightarrow P(A|B)=۰/۴۵\rightarrow p(A'|B)=۱-۰/۴۵=۰/۵۵$$

۱۰۱ـ گزینه «۳» با یک احتمال شرطی روبه‌رو هستیم. پیشامدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : شخص حداقل دوبار یا بیشتر به پارک A رفته باشد.　　　B : شخص حداقل یک بار به پارک A مراجعه کرده است.

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)}{p(B)}=\frac{\text{احتمال آنکه شخص حداقل دوبار یا بیشتر به پارک A رفته باشد.}}{\text{احتمال آنکه شخص حداقل یک بار به پارک A مراجعه کرده است}}$$

$$=\frac{۱-p\ \text{(هیچ بار به پارک A نرفته باشد)}-p\ \text{(یکبار به پارک A نرفته باشد)}}{۱-p\ \text{(به پارک A مراجعه نکرده باشد)}}=\frac{۱-\frac{۵^{۱۰}}{۶^{۱۰}}-۱۰\times(\frac{۵}{۶})^{۹}\times\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۵^{۱۰}}{۶^{۱۰}}}=\frac{۰/۵۱۵}{۰/۸۳۸}=۰/۶۱۵$$

۱۰۲ـ گزینه «۴» به راحتی می‌توان گفت که فضای کل نمونه در ابتدای امر شامل ۶ عدد Ic است اما بعد از انتخاب تصادفی یک Ic و مشاهده آن که از نوع عالی است فضای نمونه به ۳ عدد Ic تقلیل می‌یابد (Ic های عالی) اکنون تعداد حالات مطلوب ۲ حالت می‌باشد.

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳}$$

۱۰۳ـ گزینه «۳» ابتدا پیشامدهای بارندگی در روزهای مختلف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. توجه کنید که پیشامدها مستقل هستند:

A:　بارندگی در روز جمعه $\Rightarrow p(A)=۴۰\%\Rightarrow p(A')=\%۶۰$

B:　بارندگی در روز شنبه $\Rightarrow p(B)=۴۰\%\Rightarrow p(B')=\%۶۰$

C:　بارندگی در روز یکشنبه $\Rightarrow p(C)=۴۰\%\Rightarrow p(C')=\%۶۰$

$p(A'B'C')=p(A').p(B').p(C')=\%۶۰\times\%۶۰\times\%۶۰=\%۲۱۶\Rightarrow \%۲۱۶\times۱۰۰=۲۱/۶$ درصد

۱۰۴ـ گزینه «۴» از روش مکمل استفاده می‌کنیم. به کلمه حداقل دقت کنید:

p(حداقل یکی از آنها دود را آشکار کند) = ۱-P(هیچکدام دود را آشکار نکند) = ۱-P(اولی کار نکند) × P(دومی کار نکند) × P(سومی کار نکند) $=۱-(\%۱۰)(\%۱۰)(\%۱۰)=۰/۹۹۹ \Rightarrow ۰/۹۹۹\times ۱۰۰=۹۹/۹$ درصد

۱۰۵ـ گزینه «۱» شانس دختر بودن و پسر بودن مساوی است. از روش متمم استفاده می‌کنیم. توجه کنید که پسر نداشتن و دختر نداشتن دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(n,\frac{۱}{۲})$ است:

P(حداقل یک پسر و یک دختر) = ۱-P(هیچ پسر یا هیچ دختر) = ۱-P(هیچ پسر) -P(هیچ دختر)

$$=۱-\binom{n}{۰}(\frac{۱}{۲})^{۰}(\frac{۱}{۲})^{n}-\binom{n}{۰}(\frac{۱}{۲})^{۰}(\frac{۱}{۲})^{n}=۱-(۲(\frac{۱}{۲})^{n})=\frac{۹۲}{۱۰۰}\Rightarrow \frac{۸}{۱۰۰}=۲(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow ۰/۰۴=(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow \frac{۱}{۲۵}=(\frac{۱}{۲})^{n}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۵})^{۲}=(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow ۵^{-۲}=۲^{-n}\Rightarrow ۲Ln۵=nLn۲\Rightarrow n=\frac{۲Ln۵}{Ln۲}\simeq ۵$$

۱۰۶ـ گزینه «۲» بدون در نظر گرفتن محدودیت در حالت کلی، هر کدام از n گوی می‌تواند در هر کدام از r جعبه قرار بگیرد.

بنابراین $n(s)=\underbrace{r\times r\times\ldots\times r}_{n\text{ مرتبه}}=r^{n}$ اما اگر بخواهیم هر جعبه تنها شامل یک گوی باشد، گوی اول می‌تواند در یکی از r جعبه قرار بگیرد، گوی دوم در یکی از $r-۱$ جعبه باقی مانده و الی آخر لذا $n(A)=r(r-۱)\ldots(r-n+۱)$

A : پیشامد این‌که هر یک از جعبه‌ها بیش از یک گوی نداشته باشد.

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r(r-۱)\ldots(r-n+۱)}{r^{n}}$

۱۰۷ـ گزینه «۱» احتمال این‌که مینیمم شماره مهره انتخابی، کوچکتر یا مساوی n باشد برابر با احتمال این است که مینیمم شماره‌های انتخاب شده بزرگتر از n نباشد.

$X_{(۱)}$: مینیمم شماره‌های انتخاب شده: $P(X_{(۱)}\le n)=۱-P(X_{(۱)}>n)$

در صورتی $x_{(۱)}>n$ است که k مهره‌ی انتخابی از میان N-n مهره با شماره بزرگتر انتخاب شوند و کل حالت‌های ممکن برای انتخاب k مهره برابر است با $\binom{N}{k}$ لذا:

$$P(X_{(۱)}\le n)=۱-P(X_{(۱)}>n)=۱-\frac{\binom{N-n}{k}}{\binom{N}{k}}$$

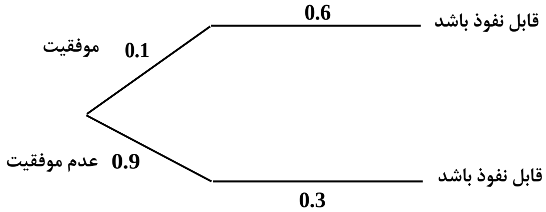
۱۰۸ـ گزینه «۱» پیشامدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : نفت موجود باشد

B : صخره نفوذپذیر باشد.

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(B).p(A|B)}{p(B).p(A|B)+p(B').p(A|B')}=\frac{۰/۶\times ۰/۱}{۰/۶\times ۰/۱+۰/۳\times ۰/۹}=\frac{۲}{۱۱}$$

بر روی نمودار درختی می‌توان نشان داد:



۱۰۹ـ گزینه «۲» با کمی دقت متوجه می‌شویم که احتمال تفاضل متقارن دو پیشامد خواسته شده است چرا که از کلمه «فقط» استفاده کرده است:

$p(A)=۰/۱۶$

$; p(A\cap B)=۰/۱۱$

$p(B)=۰/۲۴$

$p(A\Delta B)=p(A)+p(B)-۲p(A\cap B)=۰/۱۶+۰/۲۴-۲\times ۰/۱۱=۰/۱۸$

۱۱۰ـ گزینه «۳» فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر است بنابراین ابتدا مدل احتمال آن را می‌نویسیم:

S	H	TH	TTH	...
P	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$	...

$$p(A)=p(1)+p(3)+\ldots=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+\ldots\xrightarrow{\text{تصاعد هندسی}}\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

۱۱۱ـ هیچکدام از گزینه‌های صحیح نیست. A و B مستقل هستند لذا $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ و از طرفی پیشامد متمم آنها دارای همین خاصیت است یعنی: $p(A'\cap B')=P(A').P(B')$

$$P(B')=b \quad ; \quad P(A'\cap B')=a$$

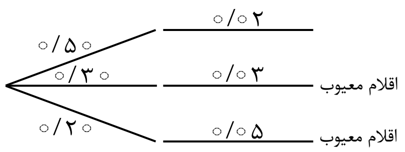
$$P(A'\cap B')=P(A').P(B')=a\to a=P(A').b\to P(A')=\frac{a}{b}\to P(A)=1-P(A')=1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$$

۱۱۲ـ گزینه «۴» می‌خواهیم از ۷ پرتاب حداقل ۶ داشته باشیم ابتدا تعداد حالاتی را که تعداد پرتاب‌ها از ۶ کمتر باشد، به دست می‌آوریم $\binom{7}{6}$ و سپس تعداد حالاتی را که تمام اعداد از ۵ کمتر باشند، بدست آورده $\binom{7}{5}$ و از آن کم می‌کنیم: (6^7-5^7) اکنون احتمال مطلوب برابر است با: $\frac{6^7-5^7}{8^7}$

۱۱۳ـ گزینه «۴» چنانچه یکسان باشند تعداد حالاتی که می‌توان ۹ توپ یکسان در ۳ جعبه قرار داد برابر است با حل معادله $x_1+x_2+x_3=9 \quad , \quad x_i\geq 0 \Leftarrow \binom{3+9-1}{9}=55$ و تنها به یک حالت می‌توان در هر جعبه ۳ توپ قرار داد بنابراین، احتمال آن برابر با $\frac{1}{55}$ است که در گزینه‌ها نمی‌باشد. اما اگر توپ‌ها یکسان نباشند تعداد حالات قرار گرفتن r توپ در n جعبه برابر n^r است که در این سؤال 3^9 می‌باشد و تعداد حالاتی که می‌توان در هر جعبه سه توپ قرار داد برابر است با: $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3^9}=\frac{7!}{3^{10}}$

۱۱۴ـ گزینه «۲» به راحتی از قضیه بیز و نمودار درختی کمک می‌گیریم:



$$\to P(\text{معیوب | الف})=\frac{0/50\times 0/02}{0/50\times 0/02\times 0/30\times 0/03+0/20\times 0/05}$$

$$=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{1}{100}}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{29}{1000}}=\frac{10}{29}$$

۱۱۵ـ گزینه «۳» توجه کنید که با جای‌گذاری انتخاب می‌شود:

P (در انتخاب اول توپ ۱ و در انتخاب دوم غیر از شماره ۲) + P (در انتخاب اول غیر از ۲ و در انتخاب دوم توپ ۱) − P (در هر دو انتخاب ۱ انتخاب شود)

$$=\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{100}+\frac{9}{100}-\frac{1}{100}=\frac{17}{100}=0/17$$

۱۱۶ـ گزینه «۲» ابتدا کل حالات انتخاب n مهره بدون جای‌گذاری از N مهره به $\binom{N}{n}$ حالت. اکنون برای آن که بزرگترین شماره باقیمانده در کیسه m باشد باید همه شماره‌های $m+۱$ تا N برداشته شود که تعداد آنها $N-m$ می‌باشد و سپس بقیه نمونه یعنی $n-(N-m)$ از $m-۱$ مهره باقیمانده برداشته شود. این سؤال را با $N=۱۰$ و $m=۷$ و $n=۴$ می‌توانیم به‌عنوان یک حالت خاص در نظر بگیریم که باید همه شماره‌های ۸ و ۹ و ۱۰ را برداریم و نمونه آخر را از ۶ عدد ۱ تا ۶ انتخاب کنیم. $(۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰)$

$$P(\text{مطلوب})=\frac{\binom{N-m}{N-m}\binom{m-۱}{n-(N-m)}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{m-۱}{n-N+m}}{\binom{N}{n}}$$

۱۱۷ـ گزینه «۳» برای آن که حداقل شماره مهره‌های انتخابی ۸ باشد باید ۵ مهره انتخابی از ۷ مره بعد از ۸ باشد. کل حالات انتخاب ۵ مهره از ۱۵ مهره است: $n(S)=\binom{۱۵}{۵}$ بنابراین

حالات مطلوب برابر است با: $\binom{۸}{۵}$ یعنی مهره‌های ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ که تعدادشان ۸ مهره است. بنابراین احتمال کل برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۸}{۵}}{\binom{۱۵}{۵}}$$

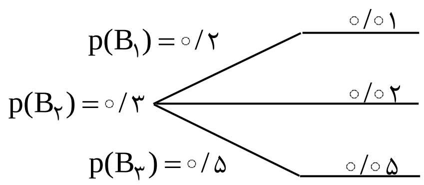
۱۱۸ـ گزینه «۱» اگر مجموع دو خال متغیر تصادفی X باشد پس:

$$X=۲,۳,۴,\cdots,۱۲$$

$$P(X=۲)=P(۱,۱)=\frac{۱}{۳۶}\ ,\ P(X=۳)=P(۱,۲)+P(۲,۱)=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲}{۳۶}$$

و این احتمالات فقط در گزینه (۱) صدق می‌کنند.

۱۱۹ـ گزینه «۴» با یک مسئله بیز روبرو هستیم.



$$\Rightarrow P(B_۲\,|\,A)=\frac{۰/۳\times۰/۰۲}{۰/۲\times۰/۰۱+۰/۳\times۰/۰۲+۰/۵\times۰/۰۵}$$

$$=\frac{\frac{۶}{۱۰۰۰}}{\frac{۲}{۱۰۰۰}+\frac{۶}{۱۰۰۰}+\frac{۲۵}{۱۰۰۰}}=\frac{۶}{۳۳}=\frac{۲}{۱۱}$$

۱۲۰ـ گزینه «۱» با یک مدل آوند پولیا روبه‌رو هستیم چون وضعیت ۴ لامپ قبلی مشخص نیستند. آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم:

$$p(\text{لامپ پنجم معیوب})=p(\text{یک لامپ معیوب})=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$$

۱۲۱ـ گزینه «۱» دقیقاً با یک مسئله آوند پولیا روبه‌رو هستیم. چون اطلاعاتی از قطعه اول گفته نشده بنابراین اصلاً آن قطعه را نادیده می‌گیریم و مسئله مانند این است که احتمال داشتن یک قطعه سالم را بخواهد:

$$p(\text{سالم بودن})=\frac{\text{تعداد سالم‌ها}}{\text{کل حالات}}=\frac{N_۰}{N}$$

۱۲۲ـ گزینه «۲» اگر متغیر جامعه میکس نرمال را به صورت $y=۱۰۰x+۱۰۰(۱-x)$ در نظر بگیریم، در این صورت:

$$Var(y)=x^۲Var(X)+(۱-x)^۲.Var(۱-x)\xrightarrow{\sigma x^۲=b\ ,\ \sigma^۲_{۱-x}=۱}=x^۲.b^۲+(۱-x)^۲\times۱=(۱-x)^۲+x^۲b^۲$$

فصل سوم

«متغیرهای تصادفی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ متغیر تصادفی Y مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب با احتمال‌های ۰/۴ ، ۰/۳ ، ۰/۲ و ۰/۱ اختیار می‌کند. متغیر تصادفی y تعداد شیرهای به دست آمده در x پرتاب یک سکه‌ی سالم را نشان می‌دهد (اگر $x=0$ باشد پرتابی انجام نمی‌شود و البتّه y برابر صفر است). آزمایش پرتاب سکّه انجام می‌شود و تعداد شیرهای حاصل شده برابر یک می‌شود. احتمال این‌که یک پرتاب انجام شده باشد، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{12}{23}$ ۴) $\frac{6}{27}$

۲ـ یک سکه‌ی سالم آنقدر پرتاب می‌شود تا دو نتیجه‌ی شیر به دست آید. احتمال این‌که تعداد پرتاب‌های لازم عددی زوج باشد، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۳ـ اگر متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}(x+3)^2 & ; -3\le x\le -1\\ \frac{1}{16}(6-2x^2) & ; -1\le x\le 1\\ \frac{1}{16}(3-x)^2 & ; 1\le x\le 3\end{cases}$ باشد، در این صورت کدام حالت برای این توزیع برقرار نیست؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) متقارن نیست ۲) میانه و مد برابرند ۳) میانگین و مد برابرند. ۴) میانه و میانگین برابرند.

۴ـ متغیرهای تصادفی X و Y و Z با تابع چگالی احتمال توأم به صورت روبرو مفروض‌اند. $f_{x,y,z}(x,y,z)=e^{-(x+y+z)};x,y,z>0$
مقدار $P(x=y<z)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۵ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند. اگر $P(X<2)=\frac{1}{4}$ و $P(Y<3)=\frac{1}{3}$ آنگاه $P((X-2)(Y-3)<0)$ برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{2}{12}$ ۳) $\frac{3}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۶ـ کدام‌یک از توابع زیر یک تابع جرم احتمال است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(x)=\frac{(1-x)}{4}\ ,\ x=-1,0,2$ ۲) $f(x)=\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^2\ ,\ x=0,1,2$

۳) $f(x)=\frac{(1-x)}{4}\ ,\ x=-2,-1,1,2$ ۴) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|}\ ,\ x=-1,0,1$

۷ـ اگر تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f_{x,y}(x,y)=e^{-(x+y)}\ ;\ x>0\ ;y>0$ باشد، مقدار $P(X<Y)$ چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

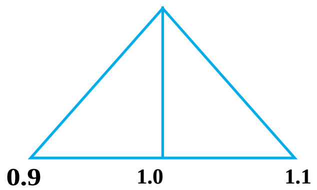
۸ـ میانگین متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمالی $f_X(x)=\frac{1}{x^2}\ ;\ 1<x<\infty$ چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر　　۲) یک　　۳) بسیار بزرگ و مثبت　　۴) وجود ندارد.

۹ـ فرض کنید تولیدی یک کارخانه برای تولید میله‌های یک سانتی‌متری طراحی شده است، اما محصول حاصل برای طول میله‌ها از تابع چگالی متقارن مثلثی با پایه‌ی $[0/9, 1/1]$ پیروی می‌کند. برای کنترل کیفیت، همه‌ی میله‌ها به جز میله‌هایی که طولشان ۰/۹۲۵ تا ۱/۰۷۵ سانتی‌متر هستند قبل از آن‌که محصول به خریدار عرضه شود را دورریز می‌کند. نسبت محصول دورریز کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{3}{32}$　　۲) $\frac{3}{16}$

۳) $\frac{1}{32}$　　۴) $\frac{1}{16}$

۱۰ـ جعبه‌ای شامل سه مهره به شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ است. دو مهره به تصادف و یک به یک از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر X نمایانگر شماره‌ی مهره انتخابی اول و Y نمایانگر شماره مهره انتخابی دوم باشد. توزیع $X+Y$ کدام است به شرط آن‌که انتخاب بدون جایگذاری باشد؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $P(X+Y=k)=\frac{1}{3}\quad k=2,3,4$

۲) $P(X+Y=k)=\frac{1}{3}\quad k=3,4,5$

۳) $P(X+Y=k)=\frac{1}{3}\quad k=4,5,6$

۴) $P(X+Y=k)=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=3\\ \frac{1}{2} & k=4\\ \frac{1}{6} & k=5\end{cases}$

۱۱ـ یک سوپر مارکت دارای دو خط express است. فرض کنید X و Y تعداد مشتریان به ترتیب، در خط اول و دوم در هر لحظه باشد. در ساعات عادی تابع احتمال توأم X و Y به شرح زیر است. مقدار احتمال $P(|X-Y|=1)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

Y \ X	۰	۱	۲	۳
۰	۰/۱	۰/۲	۰	۰
۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۰۵	۰
۲	۰	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۲۵
۳	۰	۰	۰/۰۲۵	۰/۰۵

۱) ۰/۱۵

۲) ۰/۴۵

۳) ۰/۵۵

۴) ۰/۶۵

۱۲ـ برای متغیرهای تصادفی X و Y با تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)=15x^2y\ ;\ 0<x<y<1$ مقدار $P(X+Y\le 1)$ چقدر است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{16}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{3}{32}$　　۴) $\frac{5}{64}$

۱۳ـ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $P(X=x)=\begin{cases}p & x=0,2\\ 1-2p & x=1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ باشد، ماکزیمم واریانس X کدام است؟(ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) ۲

۱۴ـ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y<\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ مفروض است مقدار $E(X|Y=4)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{2}$　۳) ۲　۴) ۴

۱۵ـ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y} & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ مفروض است. مقدار $P(X+Y<1)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $1-\text{Ln}2$　۲) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$　۳) $\text{Ln}2$　۴) $2\text{Ln}2$

۱۶ـ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f_{X,Y}(X,Y)=\begin{cases} 3xy & 0<y<2x^2 \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ مفروض است. مقدار $P(X+Y\le 1)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{128}$　۲) $\frac{7}{128}$　۳) $\frac{3}{64}$　۴) $\frac{5}{64}$

۱۷ـ اگر میزان مصرف روزانه‌ی گوشت (کیلوگرم) یک چلوکبابی متغیر تصادفی X، با تابع چگالی احتمال:

$$f_X(x)=(1/25)10^{-5}x \qquad 0<x<400$$

باشد، این چلوکبابی روزانه چه مقدار گوشت خریداری کند تا احتمال این‌که با کمبود گوشت مواجه شود برابر ۰/۰۱ باشد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) 396kg　۲) 397kg　۳) 398kg　۴) 399kg

۱۸ـ برای متغیرهای تصادفی Z, Y, X با تابع چگالی توأم: $f_{X,Y,Z}=e^{-(x+y+z)} \quad , \ x,y,z>0$

مقدار احتمال $P(X=Y<Z)$ چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر　۲) $\frac{1}{2}$　۳) $\frac{1}{3}$　۴) $\frac{1}{6}$

۱۹ـ مخزن بنزین یک ایستگاه بنزین هفته‌ای یک بار پر می‌شود. اگر مقدار فروش بنزین ایستگاه در هفته (به هزار لیتر) متغیر تصادفی X با تابع چگالی زیر باشد، حجم مخزن بنزین ایستگاه چند لیتر باشد تا احتمال این‌که در طول یک هفته خالی شود برابر ۰/۰۱ شود؟ $f(x)=5(1-x)^4 \ ; \ 0\le x\le 1$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲　۲) ۲۰۰　۳) ۶۰۱/۸۹　۴) ۸۰۵/۳۴

۲۰ـ اگر تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی Y, X دارای توزیع یکنواخت روی ناحیه $x^2+y^2\le 4$ باشد، مقدار $P(X^2+Y^2\le 1)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{2}{3}$

۲۱ـ اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال به صورت $P(X=x)=\begin{cases} p & x=0 \\ 1-2p & x=1 \\ p & x=2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ باشد. به ازای چه مقداری از p واریانس متغیر X برابر $\frac{1}{2}$ است.

(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $p=0$　۲) $p=\frac{1}{8}$　۳) $p=\frac{1}{4}$　۴) $p=\frac{1}{2}$

۲۲ـ اگر X یک متغیر تصادفی باشد آنگاه اگر X با X- هم توزیع باشند آنگاه: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $F_X(x)+F_X(-x)=1$　۲) X باید دارای توزیع نرمال استاندارد باشد

۳) $F_X(x)<1-F_X(-x)$　۴) $F_X(-x)<1-F_X(x)$

۲۳ـ نقاط M و N را مستقل از هم بر روی قطعه خط AB به طول L=۱ به تصادف انتخاب می‌کنیم. دو متغیر تصادفی $X = AM$ و $Y = AN$ و $X < Y$ را در نظر می‌گیریم، $P(\frac{X}{Y} < \frac{1}{2})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۴ـ اگر Y نقطه‌ای در بازه تصادفی $(0,1)$ و X نقطه‌ای تصادفی در بازه $(0,Y)$ و $f_{X,Y}(x,y)$ تابع چگالی توأم X و Y عبارت است از: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{y}$ $\begin{matrix} 0 < x < y \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$ ۲) 1 $\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < x \end{matrix}$ ۳) 1 $\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < x < y \end{matrix}$ ۴) $2x < y < 1$

۲۵ـ نمونه‌ای به حجم $n = 3$ از توزیع با تابع چگالی احتمال $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که حداقل یکی از این متغیرها از $\frac{1}{2}$ کمتر و حداقل یکی از متغیرها از $\frac{3}{2}$ بیشتر باشد برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{256}$ ۲) $\frac{7}{256}$ ۳) $\frac{19}{256}$ ۴) $\frac{21}{256}$

۲۶ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x) = \begin{cases} C + \frac{1}{4}x & -2 \le x < 0 \\ C - \frac{1}{4}x & 0 \le x < 2 \end{cases}$ باشد. مقدار C کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $C = 1$ ۲) $C = \frac{1}{2}$ ۳) $C = 2$ ۴) $C = 4$

۲۷ـ اگر تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f(x,y) = e^{-x-y}; x,y > 0$ تعریف شده باشد، ضریب همبستگی بین X و Y چند است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) یک ۲) $0/15$ ۳) صفر ۴) $-0/15$

۲۸ـ در یک نانوایی کوچک روزانه ۳۰ عدد نان پخته می‌شود. تقاضای روزانه این نانوایی (D) دارای تابع توزیع احتمال:

D	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
$f_D(d)$	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳	۰/۱	۰/۰۵

است. احتمال این که در پایان یک روز تصادفی تعداد نان‌های پخته شده و به فروش نرفته بزرگتر یا مساوی ۱۰ باشد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵ و ۸۸)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸۰ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۰

۲۹ـ فرض کنید (X,Y) یک متغیر تصادفی پیوسته دو بعدی با تابع چگالی احتمال توأم روبرو باشد: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}x + cy & 0 < x < 1, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

مقدار $P(X + Y > 3)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{11}{15}$ ۳) $\frac{4}{15} + \frac{28}{3}c$ ۴) $\frac{7}{15} - \frac{28}{3}c$

۳۰ـ اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x) = ax \quad x = 1,2,3$ و Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_Y(y) = by \;,\; 0 < y < 3$ باشند. مقدار $E(3X + Y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۹ ۲) $3a + b$ ۳) $3a^2 + b^2$ ۴) $\frac{42}{a} + 9b$

۳۱ـ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{3}(-\frac{t^3}{3}+3t^2-5) & 0\le t<3\\ 1 & t\ge 3\end{cases}$ باشد، نما (Mode) متغیر تصادفی X کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $0/6$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۲ـ متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) دارای توزیع یکنواخت در ربع اول دایره $x^2+y^2=1$ است $f_{X|Y}(x|y)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $0<x<1\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ۲) $0<y<1\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ۳) $0<x<1\ ,\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ ۴) $0<y<1\ ,\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$

۳۳ـ دو نقطه X و Y را به تصادف و مستقل از هم از بازه $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم. $P[Y\le X\ ,\ X^2+Y^2>1]$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{2-\pi}{4}$ ۲) $\frac{4-\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۴ـ فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند. اگر $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(B|A)=\frac{1}{2}$، $P(A|B)=\frac{1}{4}$، $X=I_A$ و $Y=I_B$، گزینه صحیح کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) X و Y مستقل‌اند.

۲) ضریب همبستگی بین X و Y برابر صفر است اما X و Y مستقل از هم نیستند.

۳) $P(X^2+Y^2=1)=\frac{1}{4}$

۴) $P(X^2-Y^2=1)=\frac{1}{4}$

۳۵ـ اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند: $f(x,y)=c(x+2y), 0<x<2\ ,\ 0<y<1$ مقدار $P(X<Y)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{5c}{6}$ ۲) $\frac{7}{24}$ ۳) $\frac{7c}{6}$ ۴) $\frac{5}{24}$

۳۶ـ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع یکسان باتابع چگالی احتمال $f(x)=2x\ ,\ 0\le x\le 1$ باشد. مقدار $P(\frac{X_1}{X_2}\le 0/5)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۳۷ـ فرض کنید X_2 و X_1 نمونه تصادفی از تابع احتمال $0<p<1$ $f(x)=p(1-p)^{x-1}\ ,\ x=1,2,\cdots$ باشد، مقدار $P(X_1=X_2)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{1-p}$ ۲) $\frac{1}{2p}$ ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $\frac{p}{2-p}$

۳۸ـ فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $(\lambda>0), f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,\ x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ است. اگر X_1 و X_2 نمونه تصادفی از توزیع فوق باشد و تعریف کنیم $Y_1=X_1+X_2$ و $Y_2=e^{X_1}$ آن‌گاه مقدار $p(LnY_2+1\le e^{Y_1})$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{2}{\lambda}$ ۲) $\frac{\lambda}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{2}{\lambda^2}$

۳۹ـ K را طوری تعیین کنید که تابع $f(x,y)$ را بتوان به‌عنوان یک تابع چگالی احتمال بکار برد. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

$$f(x,y)=\begin{cases}2Kx(x-y) & -x<y<x\ ,\ 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) $K=2$ ۲) $K=1$ ۳) $K=\frac{1}{2}$ ۴) $K=\frac{1}{4}$

۴۰ـ اگر تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به‌صورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲ & ۰<X<Y<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $f_{X|Y}(X|Y)$ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $Y^{-۱}$ ۲) $۲Y^{-۱}$ ۳) $۲Y$ ۴) Y

۴۱ـ متغیرهای تصادفی X، Y و Z با تابع چگالی احتمال توأم: x,y,z ؛ $f_{x,y,z}(x,y,z)=e^{-(x+y+z)}$ برقرار است. مقدار احتمال $p(X=Y<z)$ چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

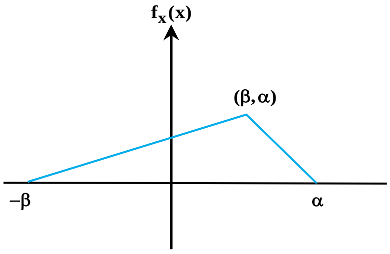
۴۲ـ اگر در فواصل $۰\le y\le ۱$ ، $۰\le x\le ۲$ تابع توزیع مشترک این دو متغیر به صورت زیر باشد، $f(y|x)$ در همین فواصل برابر است با:

$$f(y,x)=\frac{۱}{۳}(x+y)$$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{۲+۳y}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}(x+y^۲)$ ۳) $\frac{x+y}{x+\frac{۱}{۲}}$ ۴) $\frac{x+۲y}{۳}$

۴۳ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X مشخص شده است. اگر $\alpha>۰$ ، $\beta>۰$ باشند بزرگ‌ترین مقدار α کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

۴۴ـ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است: اگر $h(t)=t^۲+۲xt+y$ باشد احتمال آن را بیابید که معادلهٔ $h(t)=۰$ دارای ریشهٔ حقیقی باشد. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{۳}{۲}xy & ; x\ge ۰ , y\ge ۰ , x+y\le ۲ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۴۵ـ تابع چگالی توأم متغیر تصادفی (X,Y) به صورت زیر است:

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(x+y) & ۰\le x\le ۱۰ , ۰\le y\le ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$ چگالی احتمال $f_{x|y}(x|y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{x+y}{۲y+۱}$ ۲) $\frac{x+y}{۲(۲y+۱)}$ ۳) $\frac{۲(x+y)}{۲y+۱}$ ۴) $\frac{x+y}{۳(۲y+۱)}$

۴۶ـ تابع چگالی زمان کارکرد قطعه یدکی A به صورت $x>۰$; $f(x)=\frac{۱}{\beta}e^{\frac{-x}{\beta}}$ می‌باشد. محصولی شامل دو عدد از این قطعات یدکی است که به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. با فرض اینکه $\beta=۲$ باشد احتمال $P(\frac{X_۱}{X_۲}<a)$ را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $e^{-۲a}$ ۲) $\frac{۱}{a}$ ۳) $\frac{a}{۱-a}$ ۴) $\frac{a}{۱+a}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۳» Y : تعداد شیرهای به دست آمده در x پرتاب سکه سالم می‌باشد که مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند.

از رابطه بیز استفاده می‌کنیم:
$$P(X=۱ \mid Y=۱)=\frac{P(X=۱,Y=۱)}{P(Y=۱)}=\frac{P(Y=۱ \mid X=۱)\,P(X=۱)}{P(Y=۱)}$$

از طرفی داریم: $P(Y=۱)=P(Y=۱ \mid X=۱)\,P(X=۱)+P(Y=۱ \mid X=۲)\,P(X=۲)+P(Y=۱ \mid X=۳)$

$$P(Y=۱)=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰})+(\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۱۰})+(\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۱۰})=\frac{۲۳}{۸۰}$$

بنابراین: $P(X=۱ \mid Y=۱)=\dfrac{\frac{۳}{۲۰}}{\frac{۲۳}{۸۰}}=\dfrac{۱۲}{۲۳}$

۲ـ گزینه «۴» **روش اول:** اگر متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم فرض کنیم:

$$\sum_{K=۱}^{\infty}P(X=۲K)=\sum_{K=۱}^{\infty}\binom{۲K-۱}{۱}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲K}=\frac{۱}{۴}\sum_{K=۱}^{\infty}(۲K-۱)(\frac{۱}{۲})^{۲K-۲}$$

$$=\frac{۱}{۴}\sum_{K=۱}^{\infty}\frac{d}{dx}(x)^{۲K-۱}=\frac{۱}{۴}\frac{d}{dx}\sum_{K=۱}^{\infty}x^{۲K-۱}=\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۹}{۱۶}}\cdot\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۹}$$

روش دوم: فرض کنید $X_۱$ تعداد پرتاب‌های لازم برای مشاهده اولین شیر و $X_۲$ تعداد پرتاب‌های لازم برای مشاهده دومین شیر باشد که از یکدیگر مستقل‌اند بنابراین، تابع احتمال متغیر $X=X_۱+X_۲$ آن به صورت مقابل است: $P(X=x_i)=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{x_i-۱}\quad x_i=۱,۲,۳,\ldots$

$$P(X=۲K)=P(X_۱=۲K,X_۲=۲K)+P(X_۱=۲K+۱,X_۲=۲K+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل‌اند } X_۲,X_۱}P(X_۱=۲K).P(X_۲=۲K)+P(X_۱=۲K+۱).P(X_۲=۲K+۱)$$

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۲k-۱}\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۲k-۱}+\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})\times(\frac{۱}{۲})^{۲k}\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۲k}=\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{۲k}+\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{۲k-۱}=(\frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}})^{۲}+(\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}})^{۲}=\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

۳ـ گزینه «۱» اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته $f_X(x)$ باشد آنگاه:

الف: مد توزیع x نقطه‌ای است که به ازای آن $f_X(x)$ بیشترین مقدارخود را می‌گیرد.

ب: میانه یا نقطه ۵۰ درصدی، نقطه‌ای است که مساحت زیر تابع چگالی تا آن نقطه برابر $\frac{۱}{۲}$ است یعنی، m میانه توزیع است، اگر $\int_{-\infty}^{m}f_X(x)dx=\frac{۱}{۲}$

ج: میانگین یک توزیع همان امید ریاضی آن است یعنی: $\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$

ملاحظه می‌شود که در این تابع چگالی سه ضابطه‌ای محاسبه مد، میانه و میانگین نیاز به صرف زمان زیادی دارد و با بررسی گزینه‌ها بدون محاسبه مقادیر می‌توان به جواب درست دست یافت.

فرض کنید گزینه۲ پاسخ صحیح باشد لذا با توجه به صورت سؤال (کدام گزینه برقرار نیست) نتیجه می‌شود که میانه و مد در این توزیع برابر نیستند.

اگر گزینه ۲ حالتی باشد که برای این توزیع برقرار نیست، لذا گزینه‌های ۳ و۴ برقرارند یعنی، میانگین و مد برابرند و همچنین میانه و میانگین نیز برابرند. در نتیجه میانگین، مد و میانه برابرند که متناقض با نتیجه گزینه ۲ است پس گزینه ۲ پاسخ صحیح نبود.

با فرض کردن این‌که گزینه ۳ یا ۴ پاسخ سؤال‌اند نیز به نتیجه مشابهی می‌رسیم پس پاسخ درست گزینه ۱ است.

۴ـ گزینه «۱» در توزیع‌های پیوسته احتمال برابری متغیر با یک مقدار صفر است.

۵ـ گزینه «۴» $(X-2)(Y-3)<0$ است اگر $\{(X-2)<0,(Y-3)>0\}$ یا $\{(X-2)>0,(Y-3)<0\}$ که پیشامدهای ناسازگارند.

لذا:

$$P((X-2)(Y-3)<0)=P[(X-2)<0,(Y-3)>0)\} \text{ یا } ((X-2)>0,(Y-3)<0)]$$

$$=P((X-2)<0,(Y-3)>0)+P((X-2)>0,(Y-3)<0)=P(X<2,Y>3)+P(X>2,Y<3)$$

$P(X<2)=\frac{1}{4}$ لذا $P(X>2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ و به همین ترتیب $P(Y>3)=\frac{2}{3}$

X و Y متغیر تصادفی مستقل‌اند لذا:

$$P(X<2)P(Y>3)+P(X>2)P(Y<3)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

۶ـ گزینه «۲» اگر X یک متغیر گسسته باشد تابع $f(x)$ یک تابع احتمال گفته می‌شود. هرگاه داشته باشیم:

$$1)\ f(x)\ge 0 \qquad \forall x\in X$$

$$2)\ \sum_x f(x)=1$$

گزینه (۱) و (۳) به ازای $x=2$ منفی می‌شوند و گزینه ۴ به ازای $x=-1$ مقداری بزرگتر از یک را برمی‌گرداند که با توجه به گسسته بودن توزیع، غیرممکن است.

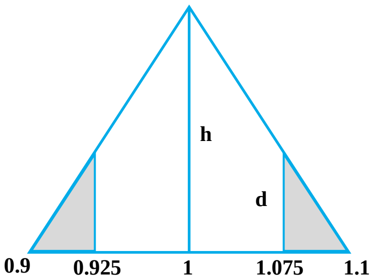
۷ـ گزینه «۱» روی فاصله موردنظر انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$P(X<Y)=\int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^\infty -e^{-(x+y)}\Big|_0^y dy=\int_0^\infty (e^{-y}-e^{-2y})dy=-e^{-y}+\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_0^\infty=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» پس امید ریاضی وجود ندارد.

$$E(X)=\int_1^\infty x.f(x)dx=\int_1^\infty x.\frac{1}{x^2}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\mathrm{Ln}x\Big|_1^\infty=\infty$$

۹ـ گزینه «۴»



$$1=\text{سطح زیر منحنی}=(1.1-0.9)\times\frac{1}{2}h \Rightarrow h=10$$

$$\frac{10}{d}=\frac{0.1}{0.025}\Rightarrow d=2.5$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور زده (نسبت محصول دورریز)}=0.025\times 2\times\frac{1}{2}\times 2.5=0.0625=\frac{1}{16}$$

۱۰ـ گزینه «۲» **روش اول:** چون انتخاب بدون جایگذاری است مقادیر $x+y$ می‌تواند ۵ و ۴ و ۳ باشد. بین گزینه‌های ۲ و ۴ باید یک گزینه انتخاب شود.

از طرفی برای $k=3$ احتمال برای هر دو مورد برابر $\frac{1}{3}$ است پس $k=4$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(X+Y=4)=P(X=1,\ Y=3)+P(X=3\ ,Y=1)$$

$$=P(X=3).P(Y=1|X=3)+P(X=1)P(Y=3|X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

روش دوم:

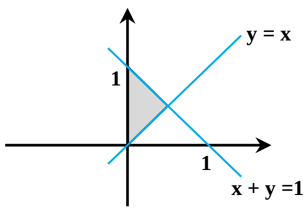
$x+y=k$	x,y
3	$\begin{cases}x=1,y=2\\x=2,y=1\end{cases}$
4	$\begin{cases}x=1,y=3\\x=3,y=1\end{cases}$
5	$\begin{cases}x=2,y=3\\x=3,y=2\end{cases}$

$$\Rightarrow P(x+y=k)=\frac{1}{3} \qquad k=3,4,5$$

۱۱ـ گزینه «۳» برای آن‌که قدرمطلق تفاضل برابر ۱ باشد، حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

$$P(|X-Y|=1)=P(X=0\,,\,Y=1)+P(X=1\,,\,Y=0)+P(X=1\,,\,Y=2)$$
$$+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)=0/2+0/2+0/05+0/05+0/025+0/025=0/55$$

۱۲ـ گزینه «۴» روی ناحیه هاشور خورده انتگرال‌گیری می‌کنیم:



$$P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}15x^2y\,dy\,dx=\int_x^{1-x}\frac{15}{2}x^2(y^2)_x^{1-x}dx=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-2x)dx$$
$$\frac{15}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{64}$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$E(X)=\sum xP(X=x)=0+(1-2p)+2p=1$$
$$E(X^2)=\sum_x x^2P(X=x)=0+1(1-2p)+4p=2p+1 \quad \Rightarrow V(X)=E(X^2)-E^2(X)=2p+1-1=2p$$

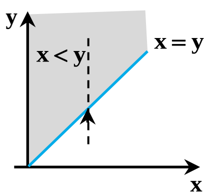
واضح است که $V(X)$ تابعی صعودی از p است، بنابراین حداکثر مقدار خود را به ازای بیشترین مقدار p می‌گیرد.

بنابر خاصیت تابع احتمال باید $0<1-2p\le 1$ که نتیجه می‌دهد $0\le p\le\frac{1}{2}$. بنابراین: $\quad Max(V(X))=2(\frac{1}{2})=1$

۱۴ـ گزینه «۳» اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آنگاه: $\quad E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x|y)dx$

اگر X و Y دارای چگالی توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند آنگاه: $\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$

و $\quad f_{X|Y}(x,y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

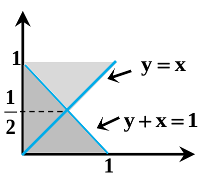


$$f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=xe^{-y}\Big|_0^y=ye^{-y}\qquad y\ge 0$$
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y}\qquad 0<x<y$$

در نتیجه: $\quad f_{X|Y}(X|Y=4)=\frac{1}{4}\quad 0<x<4\quad ;\quad E(X|Y=4)=\int_0^4 x.\frac{1}{4}dx=\frac{1}{8}x^2\Big|_0^4=\frac{4^2}{8}=2$

۱۵ـ گزینه «۳» $\quad \begin{cases}Y=X\\ Y+X=1\end{cases}\Rightarrow Y=1-X\Rightarrow Y=\frac{1}{2}$

این ناحیه را نیز برای ساده‌تر شدن محاسبه انتگرال به دو قسمت تقسیم می‌کنیم.



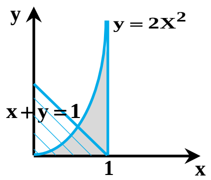
$$P(X+Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^y\frac{1}{y}dxdy+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-y}\frac{1}{y}dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1-y}{y}dy$$
$$=\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=\frac{1}{2}+(Lny-y)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}+(Ln(1)-1)-(Ln(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2})=-Ln\frac{1}{2}=Ln2\quad (Ln1=0)$$

۱۶ـ گزینه «۲» روی فاصله مورد نظر انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$Y = 2X^2 \Rightarrow X = \sqrt{\frac{Y}{2}} \ , \ X + Y = 1 \rightarrow X = 1 - Y$$

در نتیجه:

$$1 - Y = \sqrt{\frac{Y}{2}} \Rightarrow Y = \frac{1}{2}$$



$$P(X+Y\le 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} 3xy\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac{1}{2}} y\left[\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} dy = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} y\left[(1-y)^2 - \frac{y}{2}\right]dy$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^3 - \frac{5}{2}y^2 + y\right)dy = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{5}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.\frac{14}{384} = \frac{7}{128}$$

۱۷ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم مقدار خرید روزانه چلوکبابی برابر با a باشد. زمانی چلوکبابی دچار کمبود گوشت می‌شود که مصرف روزانه از خرید روزانه بیشتر شود:

$$P(X > a) = 0.01 \Rightarrow P(X < a) = 0.99 \Rightarrow \int_0^a (1.25)10^{-5}\,x\,dx = 0.99 \Rightarrow 1.25(10)^{-5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = 0.99$$

$$\Rightarrow 1.25\times 10^{-5}\frac{a^2}{2} = 0.99 \Rightarrow a = 398$$

۱۸ـ گزینه «۱» در توزیع پیوسته احتمال در نقطه برابر صفر است.

۱۹ـ گزینه «۳» اگر a حجم مخزن باشد زمانی در طول یک هفته خالی می‌شود که مقدار فروش از حجم مخزن بیشتر باشد:

$$P(X > a) = 0.01 \Rightarrow \int_a^1 5(1-x)^4 dx = 0.01 \Rightarrow 5\int_a^1 (1-x)^4 dx = 0.01 \Rightarrow -(1-x)^5\Big|_a^1 = 0.01 \Rightarrow (1-a)^5 = 0.01$$

$$1 - a = \sqrt[5]{0.01} \Rightarrow a = 1 - \sqrt[5]{0.01} = 1 - 0.3981 = 0.6019$$

حجم مخزن $= 0.6019 \times 1000 = 601.9$ لیتر

۲۰ـ گزینه «۳» مساحت دایره‌ای به شعاع ۲ برابر با 4π است.

$$x^2 + y^2 \le 4 \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$P(X^2 + Y^2 \le 1) = \frac{\text{مساحت دایره‌ای به شعاع } 1}{\text{مساحت دایره‌ای به شعاع } 2} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$$

۲۱ـ گزینه «۴» واریانس متغیر تصادفی X از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} xP(X=x) = 1 - 2p + 2p = 1 \\ E(X^2) &= \sum_{x=0}^{2} x^2P(X=x) = 0 + 1 - 2p + 4p = 1 + 2p \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(X) = (1+2p) - (1) = 1 + 2p - 1 = 2p$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

۲۲ـ گزینه «۱» اگر X , Y هم توزیع باشند آنگاه $F_X(x)=F_Y(x)$

$$F_X(x)+F_X(-x)=P(X\le x)+P(X\le -x)=P(X\le x)+P(-X>x) \qquad (I)$$

X و $-X$ هم توزیع‌اند بنابراین $F_X(x)=F_{-X}(x)$ و در نتیجه:

$$P(-X>x)=P(X>x)=۱-P(X\le x)$$

بنابراین رابطه I برابر است با:

$$P(X\le x)+۱-P(X\le x)=۱$$

۲۳ـ گزینه «۳» برای محاسبه $P(\frac{X}{Y}<\frac{۱}{۲})$ باید توزیع توأم X و Y را به دست آوریم چون X و Y مستقل نیستند. از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_{X,Y}(X,Y)=f_{X,Y}(x|y)f_Y(Y)$$

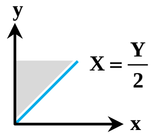
$$Y\sim U(۰,۱)\to f_y(y)=۱ \quad ۰<y<۱ \qquad \text{و} \qquad X\sim U(۰,Y)\Rightarrow f_x(x)=\frac{۱}{y} \quad ۰<x<y$$

برای بدست آوردن تابع چگالی $X|Y$ ابتدا تابع توزیع تجمعی آن را به دست می‌آوریم سپس از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_۰^x \frac{۱}{y}dx=\frac{x}{y}\Rightarrow f_{X|Y}(x|y)=\frac{۱}{y}$$

بنابراین:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{۱}{y} \quad ۰<x<y<۱$$



$$P(\frac{X}{Y}<\frac{۱}{۲})=P(X<\frac{Y}{۲})=\int_۰^۱\int_۰^{\frac{y}{۲}}\frac{۱}{y}dxdy=\int_۰^۱\frac{y}{۲}(\frac{۱}{y})dy=\int_۰^۱\frac{۱}{۲}dy=\frac{۱}{۲}$$

۲۴ـ گزینه «۱» ثابت می‌شود که $f_{X,Y}(x,y)=\frac{۱}{y} \quad ۰<x<y$

۲۵ـ گزینه «۴»

$$P(X<\frac{۱}{۲})=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}xdx=\frac{۱}{۲}x^۲\Big|_۰^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}$$

$$P(X>\frac{۳}{۲})=\int_{\frac{۳}{۲}}^۲(۲-x)dx=۲x-\frac{۱}{۲}x^۲\Big|_{\frac{۳}{۲}}^۲=(۴-۲)-(۳-\frac{۹}{۸})=\frac{۱}{۸}$$

$f_x(x)$ یک تابع چگالی احتمال است بنابراین $\int_۰^۲ f_x(x)=۱$ و در نتیجه:

$$P(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۳}{۲})=۱-(P(X<\frac{۱}{۲})+P(X>\frac{۳}{۲}))=\frac{۶}{۸}$$

D: پیشامد این‌که حداقل یکی از متغیرها کمتر از $\frac{۱}{۲}$ و حداقل یکی بیش از $\frac{۳}{۲}$ باشد. فرض کنید پیشامدهای A و B و C به صورت زیر تعریف شوند.

مشاهده کمتر از $A=\frac{۱}{۲}$ و، مشاهده بیش از $B=\frac{۳}{۲}$ ، مشاهده بین $C=\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}$

آنگاه D زمانی رخ می‌دهد که ترکیب نمونه مشاهده شده به یکی از حالت‌های زیر باشد:

لذا: AAB , ABB , ABC

$$P(D)=\binom{۳}{۲}(\frac{۱}{۸})^۲(\frac{۱}{۸})+\binom{۳}{۲}(\frac{۱}{۸})(\frac{۱}{۸})^۲+\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}(\frac{۱}{۸})(\frac{۱}{۸})(\frac{۶}{۸})=\frac{۳+۳+۳۶}{۸^۳}=\frac{۴۲}{۵۱۲}=\frac{۲۱}{۲۵۶}$$

۲۶ـ گزینه «۲» طبق خاصیت تابع چگالی احتمال خواهیم داشت:

$$\int f(x)dx=۱\Rightarrow\int_{-۲}^{۰}(c+\frac{۱}{۴}x)dx+\int_۰^۲(c-\frac{۱}{۴}x)dx=۱\Rightarrow cx+\frac{x^۲}{۸}\Big|_{-۲}^{۰}+cx-\frac{x^۲}{۸}\Big|_۰^۲=۱$$

$$\Rightarrow +۲c-\frac{۱}{۲}+۲c-\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow ۴c-۱=۱ \quad ۴c=۲\Rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

۲۷ـ گزینه «۳»

$$f(x,y)=e^{-x-y}=\underset{f(x)}{e^{-x}}.\underset{f(y)}{e^{-y}}$$

می‌توانیم تابع چگالی احتمال توأم را به صورت حاصل‌ضرب دو تابع چگالی تجزیه کنیم پس x, y از همدیگر مستقل‌اند بنابراین:

$$f(x,y)=f(x).f(y)\Rightarrow Cov(x,y)=0\Rightarrow \rho_{x,y}=0$$

۲۸ـ گزینه «۳» ۳۰ عدد نان پخته شده است. در حالتی که هیچ نانی فروش نرود و یا ۱۰ عدد نان و یا ۲۰ عدد نان فروش برود تعداد نان‌های فروش نرفته بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ می‌باشد.

$$P(D\ge 10)=P(D\le 20)=P(D=20)+P(D=10)+P(D=0)=0/25+0/3+0/3=0/85$$

۲۹ـ گزینه «۲»

$$\int_0^1\int_1^5(\frac{x}{5}+cy)dydx=1\Rightarrow\int_0^1(\frac{4x}{5}+12c)dx=\frac{2}{5}+12c=1\Rightarrow c=\frac{1}{20}$$

$$P(x+y>3)=\int_0^1\int_{3-x}^5(\frac{1}{5}x+\frac{1}{20}y)dydx=\int_0^1(\frac{xy}{5}+\frac{y^2}{40})\Big|_{3-x}^{5}dx=\cdots=\frac{11}{15}$$

۳۰ـ گزینه «۱» ابتدا مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\sum_{x=1}^{3}ax=1\Rightarrow a(1+2+3)=1\Rightarrow a=\frac{1}{6} & \text{(جمع احتمال‌ها برابر با ۱)}\\ \int_0^3 bydy=1\Rightarrow\frac{9}{2}b=1\Rightarrow b=\frac{2}{9} & \text{(انتگرال تابع چگالی احتمال برابر با ۱)}\end{cases}$$

امید دو متغیر را به دست می‌آوریم:

$$E(x)=\sum_{x=1}^{3}x.f_X(x)=\frac{1}{6}(1+4+9)=\frac{7}{3}\quad;\quad E(y)=\int_0^3\frac{2}{9}y^2dy=2$$

$$E(3x+y)=3E(x)+E(y)=3\times\frac{7}{3}+2=9$$

۳۱ـ گزینه «۲» نقطه‌ای که تابع چگالی احتمال را ماکسیمم می‌کند، مد است. ابتدا تابع چگالی احتمال را به دست می‌آوریم سپس در تابع چگالی احتمال نقطه max را به دست می‌آوریم:

$$f(t)=F'(t)=\frac{-3t^2}{9}+2t\Rightarrow f'(t)=0\Rightarrow\frac{-6t}{9}+2=0\Rightarrow t=3$$

۳۲ـ گزینه «۱» اگر X و Y دارای توزیع یکنواخت روی ناحیه D به مساحت C باشند آنگاه:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{C} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{\pi} & x^2+y^2\le 1\quad x,y>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

اگر X و Y دارای چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند آنگاه:

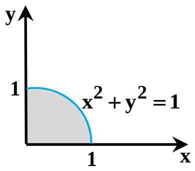
$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

که در آن $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$

$$f_Y(y)=\int_{۰}^{\sqrt{۱-y^۲}}\frac{۴}{\pi}dx=\frac{۴\sqrt{۱-y^۲}}{\pi}\qquad ۰<y<۱$$

بنابراین:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{۴/\pi}{\frac{۴}{\pi}\sqrt{۱-y^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱-y^۲}}\qquad ۰<y<۱$$



که به ازای مقادیر x برابر است با $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۳۳ـ گزینه «۲» اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی احتمال $f_X(x)\,,f_Y(y)$ باشند آنگاه:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$X\sim U(۰,۱)\rightarrow f_X(x)=۱\qquad x\in(۰,۱)\qquad و\qquad Y\sim U(۰,۱)\rightarrow f_y(y)=۱\qquad y\in(۰,۱)$$

و X و Y مستقل‌اند لذا:

$$f_{X,Y}(x,y)=۱\qquad ۰<x<۱,\ \ ۰<y<۱$$

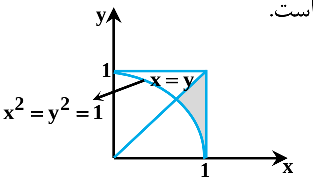
بنابراین X و Y دارای توزیع توأم یکنواخت هستند و در نتیجه احتمال پیشامد A روی این ناحیه برابر است با نسبت مساحت A به مساحت کل ناحیه.

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(s)}$$

مساحت ناحیه‌ی $(Y\le X, X^۲+Y^۲>۱)$ برابر است با $\frac{۱}{۲}[۱-(\frac{\pi}{۴})]$ که در آن $\frac{\pi}{۴}$ مساحت مربع دایره‌ای به شعاع ۱ است.

بنابراین:

$$P(Y\le X, X^۲+X^۲>۱)=\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۴-\pi}{۴})}{۱}=\frac{۴-\pi}{۸}$$



۳۴ـ گزینه «۱» دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$X=\begin{cases}۱\ , & \text{اگر A رخ دهد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}۱\ , & \text{اگر B رخ دهد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

ابتدا $P(A\cap B)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

سپس $P(B)$ را به دست آورده و درستی رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ را بررسی می‌کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

$P(A)P(B)=\frac{۱}{۴}.\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}=P(A\cap B)\Rightarrow$ A و B مستقل اند

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ معادل است با این‌که:

$$P(X=۱,Y=۱)=P(X=۱)P(Y=۱)$$

اگر A و B مستقل باشند آنگاه، A و $\bar{B}$ ، $B,\bar{A}$ و $\bar{B},\bar{A}$ نیز مستقل‌اند بنابراین:

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)P(\bar{B})\Rightarrow P(X=۱,Y=۰)=P(X=۱)P(Y=۰)$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})P(B)\Rightarrow P(X=۰,Y=۱)=P(X=۰)P(Y=۱)$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})\Rightarrow (X=۰,Y=۰)=P(X=۰)P(Y=۰)$$

دو متغیر تصادفی گسسته X و Y در صورتی مستقل‌اند که رابطه زیر به ازای هر مقدار X و Y برابر باشد.

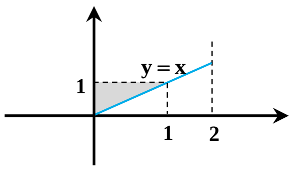
$$P(X=x, Y=y)=P(X=x)P(Y=y) \quad \forall x,y$$

و رابطه‌ی فوق به ازای تمام مقادیر X و Y برقرار است. در نتیجه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل‌اند.

۳۵ـ گزینه «۴» ابتدا مقدار C را به دست می‌آوریم. طبق خاصیت تابع چگالی احتمال خواهیم داشت:

$$\int_0^2\int_0^1 C(x+2y)dydx=1 \Rightarrow C\int_0^2\int_0^1 (x+2y)dydx=1=C\int_0^2 (xy+y^2|_0^1)dx=1 \Rightarrow 4C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

اکنون مقدار $P(x<y)$ را با توجه به شکل روی فاصله خواسته شده انتگرال‌گیری می‌کنیم:



$$P(x<y)=\frac{1}{4}\int_0^1\int_x^1 (x+2y)dydx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 (xy+y^2|_x^1)dx=\frac{1}{4}\int_0^1(-2x^2+x+1)dx=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{24}$$

۳۶ـ گزینه «۳»

راه حل اول: برای به دست آوردن این احتمال ابتدا می‌توانیم توزیع $\frac{x_1}{x_2}$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} Z=\frac{x_1}{x_2} \\ 0<Z<\infty \end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\int x_2 f(x_2 z, x_2)dx_2=\int x_2\cdot 2x_2 z\cdot 2x_2 dx_2=\begin{cases} z\int_0^1 4x_2^3dx_2=z & 0<z<1 \\ z\int_0^{\frac{1}{3}} 4x_2^3dx_2=\frac{1}{z^3} & 0<z<\infty \end{cases}$$

$$P(\frac{x_1}{x_2}<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} zdz=(\frac{1}{2}z^2|_0^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{8}$$

راه حل دوم:

$$p(Z\le z)=p(\frac{X_1}{X_2}\le z)=p(X_1\le zX_2)=\int_{x_2} p(X_1\le zX_2 \mid X_2=x_c)f_x(x_2)dx_2$$

$$=\int_{x_2} p(X_1\le zx_2)f_x(x_2)dx_2=\int_{x_2}\int_{\infty}^{zx_2} f_x(x_1)dx_1 f_x(x_2)dx_c=\int_0^1\left[\int_0^{zx_2}(2x_1)dx_1\right]2x_2dx_c$$

$$=\int_0^1(x_1^2]_0^{zx_2})2x_2dx_2=\int_0^1(z^2x_2^2)2x_2dx_2=\int_0^1 2z^2x_2^3dx_2=\frac{2}{4}z^2x_2^4]_0^1=\frac{z^2}{2}\Rightarrow p(Z\le\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}=\frac{1}{8}$$

۳۷ـ گزینه «۴» **روش اول:** طبق قانون احتمال کل، $P(X_1-X_2=c)=\sum_{a=1}^{\infty}P(X_1=a|X_2=a-c)P(X_2=a-c)$ بنابر استقلال X_1 و X_2، رابطه فوق برابر است با:

$$=\sum_{a=1}^{\infty}P(X_1=a)P(X_2=a-c)=\sum_{a=1}^{\infty}p(1-p)^{a-1}p(1-p)^{(a-c)-1}$$

$P(X_1=X_2)$ برابر است با $P(X_1-X_2=0)$ بنابراین با جایگذاری $c=0$ داریم:

$$=\sum_{a=1}^{\infty}p(1-p)^{a-1}p(1-p)^{a-1}=\frac{p^2}{(1-p)^2}\sum_{a=1}^{\infty}(1-p)^{2a}=\frac{p^2}{(1-p)^2}\cdot\frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)}=\frac{p^2}{(1-p)^2}\cdot\frac{(1-p)^2}{1-(1-2p+p^2)}=\frac{P^2}{2p-p^2}=\frac{p}{2-p}$$

یادآوری: $\sum_{X=k}^{\infty} a^X$ یک سری هندسی است و در صورتی که $|a|<1$ همگرا است با مجموع $\frac{a^k}{1-a}$

روش دوم: $P(X_1=X_2)=P(X_1=X_2=1)+P(X_1=X_2=2)+\cdots=P(X_1=1).P(X_2=1)+P(X_1=2).P(X_2=2)+\cdots=$

$$p.p+p(1-p).p(1-p)+\cdots=p^2+p^2q^2+p^2q^4+\cdots=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}$$

۳۸ـ گزینه «۳»

$$P(\ln y_2+1\le e^{y_1})=P(x_1+1\le e^{x_1+x_2})=P(x_1\le e^{x_1+x_2}-1)$$

توجه کنید که $x_1+x_2\sim\Gamma(2,\lambda)$, $x_1\sim\exp(\lambda)$ با یک استدلال ریاضی هم‌راه $(e^{x_1+x_2}\ge x_1+1)$ بنابراین احتمال وقوع ۱ است. هم‌چنین توجه کنید که گزینه‌های ۱و۲و۴ می‌توانند از عدد ۱ بیشتر باشند.

۳۹ـ گزینه «۲» با توجه به خاصیت تابع چگالی احتمال خواهیم داشت:

$$2k\int_0^1\int_{-x}^{x} x(x-y)dydx=1\to 2k\int_0^1\int_{-x}^{x}(x^2-xy)dydx=1$$

$$2k\int_0^1\left(x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{-x}^{x}dx=1\to 2k\int_0^1\left(x^3-\cancel{\frac{x^3}{2}}+x^3+\cancel{\frac{x^3}{2}}\right)dx=1\Rightarrow 2k\int_0^1 2x^3dx=1\to \cancel{4}K.\frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{4}}\Big|_0^1=1\to K=1$$

۴۰ـ گزینه «۱» ابتدا چگالی شرطی y را به دست می‌آوریم:

$$f_y(y)=\int_0^y 2dx=2y\qquad 0<y<1$$

$$f_{x|y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{2}{2y}=\frac{1}{y}=y^{-1}$$

۴۱ـ گزینه «۱» با توجه به این که x و y و z پیوسته هستند $p(x=y)=0$ است.

۴۲ـ گزینه «۳» از رابطه چگالی شرطی استفاده می‌کنیم:

$$f_{(y|x)}=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\int_0^1\frac{1}{3}(x+y)dy}=\frac{(x+y)}{xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1}=\frac{(x+y)}{x+\frac{1}{2}}$$

۴۳ـ گزینه «۱» با توجه به این که شکل بیانگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x است بنابراین مساحت زیر این شکل برابر با ۱ است.

$$\frac{(\alpha-(-\beta))\times\alpha}{2}=1\to\alpha^2+\alpha\beta=2\to\beta=\frac{2-\alpha^2}{\alpha}$$

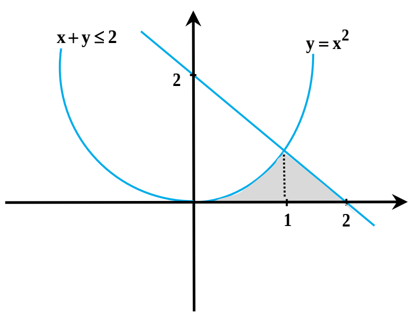
حال با توجه به صورت مسئله $\alpha\ ,\ \beta>0$ هستند.

$$2-\alpha^2>0\to 2>\alpha^2\to 0<\alpha<\sqrt{2}\to\max(\alpha)=\sqrt{2}$$

۴۴ـ گزینه «۳» برای آن که $h(t)$ ریشه حقیقی داشته باشد باید $\Delta\ge 0$ باشد.

$$h(t)=t^2+2xt+y\to\Delta\ge 0\to(2x)^2-4(1)(y)\ge 0$$

برای محاسبه این احتمال باید روی بازه خواسته شده انتگرال‌گیری کنیم:



$$p(x^2-y\ge 0)=p(y\le x^2)$$

$$p(y\le x^2)=\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-y}\frac{3}{2}xy\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times x^2y\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}dy=\int_0^1\frac{3}{4}\left((2-y)^2y-(\sqrt{y})^2y\right)dy$$

$$=\int_0^1\frac{3}{4}(4y+y^3-5y^2)dy=\frac{3}{4}\left(2y^2+\frac{1}{4}y^4-\frac{5}{3}y^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{3}{4}\left(2+\frac{1}{4}-\frac{5}{3}\right)=\frac{7}{16}$$

۴۵ـ گزینه «۳» از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dx}=\frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2+xy)\big|_0^1}$$

$$\frac{(x+y)}{\frac{1}{2}+y}=\frac{x+y}{\frac{2y+1}{2}}=\frac{2(x+y)}{2y+1}$$

۴۶ـ گزینه «۴» به جای $\beta=2$ را قرار می‌دهیم، تابع چگالی به فرم $f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$ تبدیل می‌شود. احتمال موردنظر را به صورت زیر بازنویسی کرده و روی بازه مربوطه انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$p(\frac{x_1}{x_2}<a)=p(x_1<ax_2)=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}}\int_0^{ax_2}\frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}}dx_1dx_2=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x_2}{2}}(-e^{-\frac{x_1}{2}}\Big|_0^{ax_2})dx_2$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x_2}{2}}(-e^{-\frac{ax_2}{2}}+1)dx_2=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x_2}{2}}dx_2-\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x_2}{2}}.e^{-\frac{ax_2}{2}}dx_2$$

$$=1-\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{(a+1)x_2}{2}}dx_2=1-(-\frac{2}{a+1}\times\frac{1}{2}\times e^{-\frac{(a+1)x_2}{2}}\Big|_0^\infty)=1+(0-\frac{1}{a+1})=1-\frac{1}{a+1}=\frac{a}{a+1}$$

فصل چهارم

«امیدهای ریاضی و واریانس»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ اگر بدانیم برای متغیر تصادفی X روابط $E(X)=۲$ و $E[X(X-۴)]=۵$ برقرار است، واریانس این متغیر تصادفی کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت روبرو تعریف شده است: $f_X(x)=\frac{۱}{۴}e^{-\frac{x}{۴}} \quad , \quad x\geq ۰$

مقدارتقریبی برای $E(\sqrt{X^۲+۱})$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱/۰۶ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۵ ۴) ۴/۲۴

۳ـ با توجه به این‌که هم‌پراشی (Covariance) همبستگی یا هم‌آوایی دو متغیر تصادفی مانند X و Y را توصیف می‌نماید و اندازه می‌گیرد، چرا برای همبستگی خطی از σ_{xy} بـه عنوان ضریب همبستگی و با تعریف $\sigma_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x.\sigma_y}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y}$ استفاده می‌کنیم؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) دلیل خاصی ندارد.

۲) چون σ_{xy} هم به نوعی همبستگی یا هم‌آوایی را اندازه می‌گیرد.

۳) برای این‌که $Cov(x,y)$ به تنهایی کافی نیست.

۴) چون اندازه همبستگی یا هم‌آوایی از اندازه مطلق به اندازه نسبی تبدیل می‌شود.

۴ـ در چه حالتی تابع $E[(x-a)^۲]$ به حداقل می‌رسد؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $a=E(x)$ ۲) $\frac{\partial E}{\partial a}>۰$ ۳) $\frac{\partial E}{\partial x}>۰$ ۴) $x^۲+a^۲-۲ax=۰$

۵ـ یک کمپانی نفتی در سه حوزه متفاوت، دست به حفاری زده و در حال حاضر مشغول به حفر یک حلقه چاه نفت در هـر حـوزه اسـت. تجربیـات گذشته نشان داده است که شانس رسیدن به نفت در حوزه‌های اول، دوم و سوم به صورت مستقل از هم به ترتیب ۰/۹ ، ۰/۸ و ۰/۷ است. چنانچـه هـر کدام از چاه‌ها به نفت برسد، درآمدی معادل ۱۰۰ میلیون تومان برای کمپانی مزبور دربر خواهد داشت. درآمد انتظاری (امیـد ریاضـی) حاصلـه از فعالیـت مزبور چند میلیون تومان است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۵۱/۲ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۹۸ ۴) ۵۰۴

۶ـ تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی منفصل در جدول زیر داده شده است. واریانس عبارت $Z=۲X-۳Y+۵$ کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

x \ y	۰	۱	۲
۲	۰/۲	۰/۳	۰/۱
۴	۰/۱	۰/۲	۰/۱

۱) ۱۳/۲۵ ۲) ۱۰/۱ ۳) ۸/۲۵ ۴) ۷/۲۹

۷ـ میانگین متغیر تصادفی X با تابع توزیع جرمی احتمال $f(x)=\frac{Cx}{n(n+۱)}\ ;\ x=۱,\dots,n$ ، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{n}{۲}$ ۲) $\frac{n+۱}{۲}$ ۳) $\frac{n+۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲n+۱}{۳}$

۸ـ هنگامی که $M_X(\theta)$ را تابع مولد گشتاور و $\Psi_X(\theta)$ را تابع مشخصه (characteristic function) می‌گوییم و با توجه به این‌که $\psi_X(\theta) = LnM_X(\theta)$ می‌باشد، می‌توان گفت: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) تابع مولد گشتاور می‌تواند همه خواص تابع مشخصه را به دست دهد.

۲) تفاوت اساسی بین تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه وجود ندارد.

۳) تابع مشخصه برای هر توزیع موجود است و $\mu = \psi'(0)$ و $\sigma^2 = \psi''(0)$

۴) تابع مشخصه را برای هر توزیعی می‌توان به دست آورد ولی نمی‌توان میانگین و پراش را لزوماً از آن به دست آورد.

۹ـ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور به صورت $M_X(t) = \frac{4}{10} + \frac{2e^t}{10} + \frac{e^{-t}}{10} + \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{10}$ باشد، $P(X \le 0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۱۰ـ اگر تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & 0 < y \le x \le 1 \\ 0; & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد، ضریب همبستگی بین Y, X برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

۱۱ـ فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با میانگین‌هایی برابر ۱ و واریانس‌هایی برابر با ۱ باشند. واریانس $(X_1 . X_2)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $P(X > 0) = 1$ و امید ریاضی متناهی باشد. کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $cov(X, \frac{1}{X}) = 1$ ۲) $cov(X, \frac{1}{X}) = 0$ ۳) $cov(X, \frac{1}{X}) \ge 0$ ۴) $cov(X, \frac{1}{X}) \le 0$

۱۳ـ برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $0 < x < 1$; $f_X(x) = a + bx^2$ اگر $E(X) = \frac{1}{4}$ باشد، مقادیر a و b با کدام گزینه برابر می‌باشد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $a = 1 , b = -2$ ۲) $a = 2 , b = -3$ ۳) $a = -2 , b = 3$ ۴) $a = \frac{3}{5} , b = \frac{6}{5}$

۱۴ـ X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر می‌باشند. $E(XY)$ چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

y \ x	−۱	۰	۱
−۲	۰	۰	$\frac{1}{4}$
−۱	۰	$\frac{1}{4}$	۰
۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰
۳	۰	$\frac{1}{4}$	۰

۱) −۱

۲) −۰/۵

۳) صفر

۴) ۰/۵

۱۵ـ جعبه‌ای دارای ۵ توپ قرمز و ۱۰ توپ سیاه است. یک نمونه تصادفی دوتایی بدون جایگذاری بر می‌داریم. اگر U تعداد توپ‌های قرمز و V تعداد توپ‌های سیاه انتخابی باشد، ضریب همبستگی U و V کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) −۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۶ـ اگر $cov(X,Y)=۰$ باشد در این صورت: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) y,x غیر وابسته‌اند. ۲) y,x مستقل‌اند. ۳) $P(X>Y)=۰$ ۴) $E(X)=E(Y)$

۱۷ـ اگر کوواریانس بین متغیرهای تصادفی X و Y برابر ۰/۵ باشد کواریانس $۳X+۲$ و $۲Y-۳$ چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

۱۸ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد: $x>۱$ $f(x)=\frac{c}{x^{۴}}$ گزینه صحیح برای E(X) کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{c}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{c}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۹ـ می‌دانیم

x	۰	۱
g(x)	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$

y	۱	۲
h(y)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$

و $f(x=۱,y=۱)=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. واریانس $Z=۳X+Y-۱۲$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹۳}{۱۶}$

۲۰ـ ظرفی دارای ۱۰ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. از این ظرف ۴ مهره به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر X و Y به ترتیب تعداد مهره‌های سفید و سیاه خارج شده از ظرف باشند، ضریب همبستگی X و Y کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۱ـ اگر $Y=a+bX$ (a و b دو عدد ثابت) آنگاه درباره ρ (ضریب همبستگی بین X و Y) کدام گزینه درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-۱<\rho<۰$ ۲) $\rho=۰$ ۳) $۰<\rho<۱$ ۴) $|\rho|=۱$

۲۲ـ فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{a^{۲}}(a-x) & ۰<x<a\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باشد. اگر $E(X)=۲$ باشد، مقدار a کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳ـ فرض کنید X, Y دارای تابع احتمال توأم زیر است. ضریب همبستگی X, Y کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

X \ Y	۰	۱	۲	۳
۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	۰
۱	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۴ـ میان دو متغیر تصادفی مثبت X و Y رابطه‌ی $\frac{۲X}{Y}+\frac{Y}{۲X}=۲$ برقرار است. ضریب همبستگی Y,X برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۵ـ اگر متغیرهای X و Y مستقل از هم و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^{۲}$ باشند و اگر $Z=X+Y$ و $W=X-Y$ باشد، ضریب همبستگی بین Z و W کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۶ـ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است، مقدار $E(Y)$ کدام است؟

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} ۱ & ۰<x<۱ \ , \ x<y<x+۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

۲۷ـ اگر X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و ضریب همبستگی آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد $P(X-Y<۱)$ برابر است با: (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.) (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\Phi(۰)$ ۲) $\Phi(\frac{۱}{۲})$ ۳) $\Phi(۱)$ ۴) $\Phi(۲)$

۲۸ـ ظرفی شامل ۵ توپ هم شکل که ۳ عدد آن‌ها به شماره‌ی یک و بقیه به شماره‌ی ۴ هستند را در نظر بگیرید، اگر برای انتخاب تصادفی بدون جایگذاری ۲ توپ از این ظرف معادل مجموع شماره‌های توپ‌های انتخاب شده امتیاز داده شود، به طور متوسط امتیاز دریافتی چند است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴/۴ ۲) ۳/۴ ۳) ۲/۴ ۴) ۱/۴

۲۹ـ فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد. اگر $\bar{X}$ نمایانگر میانگین نمونه باشد، مقدار $cov(\bar{X}, X_i-\bar{X})$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\sigma^۲$ ۳) $\frac{۱}{n}\sigma^۲$ ۴) $(۱-\frac{۱}{n})\sigma^۲$

۳۰ـ اگر X متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)=|۱-x|, ۰<x<۲$ باشد امید ریاضی X برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۱ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی $f(x)=\begin{cases} e^{۱-x} & x\geq ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ و $Y=F(X)$ تابع توزیع X باشد. مقدار $E(Y)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}+e^{-۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{e}{۲}$

۳۲ـ متغیر تصادفی X دارای مولد گشتاورهای $M(t)=e^{at+bt^۲}$ و امید ریاضی آن ۲ است. مقدار a کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۳ـ اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم $Y=-\frac{۱}{۲}X-۴$ ضریب همبستگی X و Y چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۴ـ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y عبارت است از: $P(X=i,Y=j)=\begin{cases} \frac{۱}{e^۲ j!(i-j)!} & i=۰,۱,۲,\cdots \ \ j=۰,۱,\cdots,i \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$، $E(Y|X=۲)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵ـ متغیر تصادفی X دارای میانگین ۱ و واریانس ۴ است. کران بالایی برای $P(|X|\geq ۳)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۳۶ـ اگر متغیرهای تصادفی $X_1,...,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی مشترک روبرو باشند:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & 1\le x<\infty\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

اگر $Y=Min(X_1,...,X_n)$ باشد، مقدار امید ریاضی $E(Y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) $1-\frac{1}{n}$ ۲) $\frac{1}{n}$ ۳) $\frac{1}{n}-1$ ۴) $\frac{n}{n-1}$

۳۷ـ فرض کنید که x , y دو متغیر با میانگین‌های متناهی هستند. کدام‌یک از عبارات زیر نادرست است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) $E[\max(X,Y)]\ge E(Y)$ ۲) $E[\max(X,Y)]\ge E(X)$

۳) $E[\max(X,Y)]=E(X)+E(Y)$ ۴) $E[\max(X,Y)]\ge \max[E(X),E(Y)]$

۳۸ـ اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد، مقدار $E[e^{F(X)}]$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\exp(1)-1$ ۲) $\exp(\frac{1}{2})-1$ ۳) ۱ ۴) $\exp(1)$

۳۹ـ متغیر تصادفی X گسسته با مقادیر ممکن ۱، ۲، ۳، .... و تابع احتمال $P[X=k]$ که نسبت به k غیر صعودی است. مقدار احتمال $P[X=k]$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) کوچکتر از $\frac{EX}{k}$ ۲) کوچکتر از $\frac{2EX}{k^2}$ ۳) برابر $\frac{EX}{k}$ ۴) برابر $\frac{2EX}{k^2}$

۴۰ـ اگر متغیر تصادفی گسسته X از توزیع دو جمله‌ای پیروی کند یعنی $x=0,1,\cdots,10$ ، $P(X=x)=\binom{10}{x}(\frac{1}{3})^x(1-\frac{1}{3})^{1-x}$، آنگاه $cov(\frac{X}{10},\frac{10-X}{10})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $-\frac{1}{45}$ ۳) ۱- ۴) ۱

۴۱ـ عدد X را از بین اعداد $\{1,2,3,4,5\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس عددی را به تصادف از زیر مجموعه $\{1,2,\cdots,X\}$ اختیار می‌کنیم، عدد دوم را Y می‌نامیم، EY برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۴۲ـ در یک مغازه لبنیاتی روزانه شیر X (برحسب هزار لیتر) است که تابع چگالی آن به صورت $f=3x^2; 0<x<1$ می‌باشد. مغازه‌دار شیر را لیتری ۶ واحد پول می‌خرد و ۱۰ واحد پول می‌فروشد. اگر او بخواهد $1000k$ لیتر شیر سفارش دهد مقدار K چقدر باشد تا سود حداکثر گردد؟
(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt[3]{\frac{4}{10}}$ ۴) $\sqrt{\frac{4}{10}}$

۴۳ـ فرض کنید که میزان تقاضای یک محصول از یک شرکت در یک دوره مشخص دارای توزیع هندسی با پارامتر $P=0/1$ باشد. تولید هر واحد از این محصول دارای هزینه‌ای معادل ۱۵۰۰ واحد پول می‌باشد که به قیمت ۳۰۰۰ واحد پول به فروش می‌رسد. فرض کنید شرکت برای هر واحد کالایی که متقاضی دارد و نمی‌تواند تأمین کند نیز متحمل هزینه‌ای برابر ۱۰۰۰ واحد گردد. در این صورت مقدار تولید این محصول چقدر باشد تا امید ریاضی حاصل از آن حداکثر گردد؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۴۴ـ فرض کنید X_1 و X_2 به شرط $Y=y$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم با میانگین y باشند، مقدار $Cov(X_1,X_2)$ کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $Var(Y)-E^2(Y)$ ۲) $Var(Y)$ ۳) $E(Y)+Var(Y)$ ۴) $E(Y)$

۴۵ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن $E(X)=1\ ,\ E(Y)=2\ ,\ Var(X)=2\ ,\ Var(Y)=3$ مقدار $Var(XY)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱۰　　۲) ۱۷　　۳) ۲۱　　۴) ۳۶

۴۶ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $EX=3$ و $EX^2=13$ باشد. کران پایین $P(-2<X<8)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ٪۹۸/۷۶　　۲) ٪۸۴　　۳) ٪۷۵　　۴) ٪۱۶

۴۷ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی دلخواه و متغیر تصادفی Y به صورت $Y=X^2+1$ تعریف شود در این صورت ضریب همبستگی X^2, Y کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۸ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی مثبت با میانگین ۳ باشد، حداکثر مقدار $P(X \geq 5)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$　　۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان تعیین کنید.

۴۹ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم $f(x,y)$ باشند. اگر $E(Y\,|\,X)=1$، گزینه صحیح کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $V(XY)\leq V(X)$　　۲) $V(XY)\geq V(X)$　　۳) $V(XY)+V(X)\geq 2$　　۴) $V(XY)+V(X)<2$

۵۰ـ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $P[X=a]=P[X=-a]=p\,,P(X=0)=1-2p$ است: برای هر $a\in R$, $0<p<\frac{1}{2}$، $Var(X+X^3)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $2a^2(1+a^4)$　　۲) $2a^4(1+a^2)$　　۳) $2a^2p(1+a^4)$　　۴) $2a^4p(1+a^2)$

۵۱ـ بردار تصادفی (X,Y) به طور یکنواخت روی نقاط $(0,-1),(0,1),(1,0),(-1,0)$ توزیع شده است. $Var(X+Y)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) $\frac{3}{2}$

۵۲ـ متغیر تصادفی $E(X)=2$ و $Var(X)=3$ مفروض است. در این صورت مقادیر $a=E(X^2)$، $b=E\left[(X-2)^2\right]$، $C=E\left[(X-3)^2\right]$ و $d=E\left[X-(X-2)\right]$ را چگونه مقایسه می‌کنید؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $d<a<b<c$　　۲) $d=b<c,a$　　۳) $b<d<c<a$　　۴) $b<d=c<a$

۵۳ـ فرض کنید $F_y(0)$ تابع توزیع پیوسته برای متغیر تصادفی y است اگر $E[y]=0$ و باشد، آنگاه $P(|\,Y\,|>2)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۱۲۵　　۲) ۰/۲۵　　۳) ۰/۷۵　　۴) ۰/۵۰

۵۴ـ اگر $E(T^X)=[1+2(t-1)]^5$ باشد آنگاه تعداد $E[X(X-1)]$ چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) ۴۰　　۲) ۲۰　　۳) ۳۰　　۴) ۱۰

۵۵ـ اگر $X>0$ و $E(X^2)$ وجود داشته باشد، کران بالا برای مقدار $P(X>2\sqrt{E(X^2)})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{3}{4}$

۵۶ـ اگر متغیر تصادفی گسسته X فقط مقادیر صحیح و غیر منفی را بگیرد، حاصل $\sum_{i=0}^{\infty} P(X \geq i)$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟ (فرض کنید امید ریاضی X وجود دارد.)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱
۲) عددی کوچکتر از $E(X)$
۳) $E(X)$
۴) عددی بزرگتر از $E(X)$

۵۷ـ کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) تمام متغیرهای گسسته دارای امید ریاضی هستند.
۲) تمام متغیرهای پیوسته دارای امید ریاضی هستند.
۳) برای هر تابع چگالی احتمال f داریم: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
۴) تمامی متغیرهای تصادفی را می‌توان به دو دسته کلی پیوسته و گسسته تقسیم‌بندی نمود.

۵۸ـ تاسی را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X معرف تعداد پرتاب‌ها تا آمدن اولین ۶ و متغیر تصادفی Y معرف تعداد پرتاب‌ها تا آمدن عدد ۱ باشد. مقدار $E(X \mid Y=1)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۵۹ـ فرض کنید $X \sim B\left(25, \frac{1}{2}\right)$، مقدار $E\left[(-1)^{X+10}\right]$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر
۲) -1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $+1$

۶۰ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است، مقدار $E(X)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \frac{1}{4}x & -2 < x < 0 \\ \alpha - \frac{1}{4}x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{\alpha}{2}$
۴) 2α

۶۱ـ اگر سه متغیر تصادفی X، Y و Z دارای اطلاعات زیر باشند. متغیر تصادفی $W = 2X + Y - Z$ دارای کدام میانگین و واریانس است.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

$$\begin{array}{lll} E(X) = 2 & Var(X) = 4 & cov(X,Y) = -1 \\ E(Y) = 3 & Var(Y) = 8 & cov(X,Z) = 1 \\ E(Z) = -2 & Var(Z) = 6 & cov(Y,Z) = 0 \end{array}$$

۱) ۹ و ۲۶
۲) ۹ و ۲۲
۳) ۵ و ۳۰
۴) نامشخص و ۲۲

۶۲ـ اپراتوری که به درستی آموزش ندیده است می‌خواهد n قطعه مختلف را در n جعبه متفاوت قرار دهد. اگر این بسته‌بندی را کاملاً تصادفی انجام دهد به طور متوسط تعداد قطعاتی که درست گذاشته شده عبارت است از: (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{n}{2}$
۲) $\frac{n}{4}$
۳) ۱
۴) $\frac{\binom{2n}{n}}{n}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳» از روابط بین امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(X(X-4))=5 \Rightarrow E(X^2-4X)=5 \Rightarrow E(X^2-4X)=5 \Rightarrow E(X^2)-4E(X)=5$$

$$E(X^2)=5+4\times 2=13$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=13-4=9$$

۲ـ گزینه «۴» **توجه بسیار مهم:** اگر $g(x)$ تابعی از یک متغیرتصادفی مانند X باشد که $E(X)=\mu$ و $Var(X)=\sigma^2$، آنگاه داریم:

$$E(g((X))\simeq g(\mu)+\frac{1}{2}\sigma^2.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\mu} \qquad Var(g(X))\simeq\sigma^2.[\frac{\partial g(x)}{\partial x}\bigg|_{x=\mu}]^2$$

بنابراین:

$$E(\sqrt{X^2+1})=\sqrt{\mu^2+1}+\frac{1}{2}\sigma^2.\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=\mu}=\sqrt{4^2+1}+\frac{1}{2}(16).\frac{1}{(4^2+1)^{\frac{3}{2}}}=4/237$$

۳ـ گزینه «۴» با این روش مقیاس داده‌ها از بین می‌رود.

۴ـ گزینه «۱» طبق خاصیت گفته شده برای میانگین حسابی a زمانی که میانگین باشد این مقدار حداقل است.

$$E((X-a)^2)=\int(x-a)^2.f(x)dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}E((x-a)^2)=-2\int(x-a).f(x)dx=0 \Rightarrow a\cancel{\int f(x)}dx=\int xf(x)dx \Rightarrow a=E(X)$$

۵ـ گزینه «۲»

$$E(X)=100\times(0/9+0/8+0/71)=240$$

۶ـ گزینه «۴» از خاصیت واریانس ـ کوواریانس خواهیم داشت:

$$var(Z)=var(2X-3Y+5)=4var(X)+9var(Y)-12cox(X,Y)$$

$$E(X)=2(0/2+0/3+0/1)+4(0/1+0/2+0/1)=1/2+1/6=2/8$$

$$E(X^2)=4(0/6)+16(0/4)=8/8$$

$$E(Y)=0(0/2+0/1)+1(0/3+0/2)+2(0/1+0/1)=0/9 \quad ; \quad E(Y^2)=0/5+4(0/2)=1/3$$

$$E(XY)=0(0/2+0/1)+2(0/3)+4(0/1+0/2)+8(0/1)=2/6$$

$$var(X)=8/8-7/84=0/96 \quad ; \quad var(y)=1/3-0/81=0/49$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2/6-(0/9)(2/8)=0/08$$

$$var(Z)=4(0/96)+9(0/49)-12(0/08)=7/29$$

۷ـ گزینه «۴» ابتدا مقدار c را بدست می‌آوریم:

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{cx}{n(n+1)}=\frac{c}{n(n+1)}(\frac{n(n+1)}{2})=1\Rightarrow c=2$$

اکنون از رابطه امید ریاضی خواهیم داشت:

$$E(X)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}x^2=\frac{2}{n(n+1)}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})=\frac{2n+1}{3}$$

(یادآوری: $\sum_{x=1}^{n}x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ و $\sum_{x=1}^{n}x=\frac{n(n+1)}{2}$)

۸ـ گزینه «۳»

$$\psi(\theta)=\mathrm{Ln}M_X(\theta)=\mathrm{Ln}\sum_x e^{\theta x}.f(x)\Rightarrow\frac{\partial\psi_X(\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Ln}\sum_x e^{\theta x}.f(x)=\frac{\sum_x x.e^{\theta x}.f(x)}{\sum_x e^{\theta x}.f(x)}\Rightarrow\psi'(0)=\sum_x x.f(x)=\mu$$

$$\frac{\partial^2\psi_X(\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sum_x x.e^{\theta x}.f(x)}{\sum_x e^{\theta x}.f(x)}\right]=\frac{(\sum_x x^2e^{\theta x}f(x))(\sum_x e^{\theta x}f(x))-(\sum_x xe^{\theta x}f(x))}{(\sum_x e^{\theta x}f(x))^2}$$

$$\psi''(0)=\sum_x x^2f(x)-(\sum_x xf(x))^2=\sigma^2$$

۹ـ گزینه «۴» تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X عبارت است از: $E(e^{tX})$ و اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، آنگاه:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\sum_x e^{tx}P(X=x)$$

بنابراین ضرایب e^{tx} مقادیر $P(X=x)$ هستند و چون تابع مولد گشتاور هر توزیع، منحصر به فرد می‌باشد، از روی تابع مولد گشتاور، توزیع متغیر تصادفی دقیقاً مشخص می‌شود.

$$M_X(t)=\frac{4}{10}+\frac{2e^t}{10}+\frac{e^{-t}}{10}+\frac{3e^{\frac{t}{2}}}{10}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}e^{t(1)}+\frac{1}{10}e^{t(-1)}+\frac{3}{10}e^{t(\frac{1}{2})}$$

با در نظر گرفتن ضرایب t، مقادیر x به دست می‌آیند و ضرایب e مقادیر احتمال متناظر xها می‌باشند.

بنابراین تابع احتمال X به صورت مقابل است:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$P(X\le 0)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$$

۱۰ـ گزینه «۲» ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y از رابطه روبرو محاسبه می‌شود:

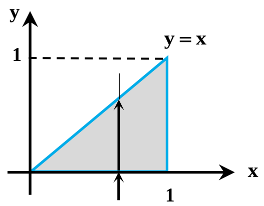
$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{S(X)S(Y)}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

نکته۱: $E(X^K)=\iint x^kf_{X,Y}(x,y)dydx$

نکته۲: $E(XY)=\iint xyf_{X,Y}(x,y)dxdy$

نکته۳: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

ناحیه انتگرال‌گیری در این سؤال به صورت مقابل می‌باشد.



برای محاسبه $E(X)$ و $E(X^2)$ یک رابطه کلی برحسب k به دست می‌آوریم.

$$E(X^k)=\int_0^1\int_0^x\frac{x^k}{x}dydx=\int_0^1\int_0^x x^{k-1}dydx=\int_0^1 x^{k-1}(y\Big|_0^x)dx=\int_0^1 x^kdx=\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+k}$$

$$\Rightarrow\ E(X)=\frac{1}{2}\ ,\ E(X^2)=\frac{1}{3}\ ,\ V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$E(Y^k)=\int_0^1\int_0^x \frac{y^k}{x}dydx=\int_0^1 \frac{1}{x}[\frac{y^{k+1}}{k+1}]_0^x dx=\int_0^1 \frac{x^k}{k+1}dx=\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\Big|_0^1=\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\Rightarrow E(Y)=\frac{1}{4}\ ,\ E(Y^2)=\frac{1}{9}\ ,\ V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x \frac{xy}{x}dydx=\int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^x dx-\int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

با در دست داشتن $E(X)$، $E(Y)$ و $cov(X,Y)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$cov(X,Y)=E(X.Y)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=\frac{2}{48}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\frac{2}{48}}{\sqrt{\frac{1}{12}\times\frac{7}{144}}}=\frac{2\times 12\times\sqrt{12}}{48\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به تعریف واریانس داریم:

$$V(X_1X_2)=E(X_1X_2)^2-(E(X_1X_2))^2$$

نکته: اگر X_1,X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه داریم:

$$E(g(X_1)h(X_2))=E(g(X_1)E(h(X_2))$$

(به شرط آن‌که امید ریاضی g,h وجود داشته باشد.)

بنابراین:

$$V(X_1X_2)=E(X_1^2)E(X_2^2)-(E(X_1)E(X_2))^2$$

طبق فرض $E(X_1)=1\ ,V(X_1)=1$ و $E(X_2)=1$ و $V(X_2)=1$ پس داریم:

$$E(X_1^2)=V(X_1)+E^2(X_1)=1+1=2$$

برای X_2 نیز واضح است که $E(X_2^2)=2$ در نتیجه:

$$V(X_1X_2)=2\times 2-(1\times 1)^2=4-1=3$$

۱۲ـ گزینه «۴» روش اول: $P(x>0)=1$ یعنی، X با احتمال ۱ مثبت و مقادیر منفی را به خود نمی‌گیرد. پس با افزایش X، مقدار $\frac{1}{X}$ کاهش می‌یابد

بنابراین $Cov(X,\frac{1}{X})\le 0$.

روش دوم:

$$cov(X,\frac{1}{X})=E(X\frac{1}{X})-E(X)E(\frac{1}{X})=1-E(X)E(\frac{1}{X})$$

چون $\frac{1}{x}$ یک تابع محدب است پس طبق نامساوی جنسن:

$$E(f(X))\ge 0 f(E(X))\Rightarrow E(\frac{1}{X})\ge\frac{1}{E(X)}\Rightarrow E(X)E(\frac{1}{X})\ge 1\Rightarrow 1-E(X)E(\frac{1}{X})\le 0\Rightarrow cov(X,\frac{1}{X})\le 0$$

۱۳ـ گزینه «۲» از رابطه تابع چگالی احتمال و امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(a+bx^2)dx=ax+\frac{bx^3}{3}\Big|_0^1=1\Rightarrow a+\frac{b}{3}=1 \quad \text{I}$$

$$E(X)=\frac{1}{4}\Rightarrow\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{1}{4}\Rightarrow\int_0^1(ax+bx^3)dx=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow 2a+b=1 \quad \text{II}$$

$$\text{I}\ \text{II}\Rightarrow a=2\ ,\ b=-3$$

۱۴ـ گزینه «۲» $E(X.Y)=\sum\sum x.y.P(X=x,Y=y)=-۲\times۱\times\frac{۱}{۴}+۰\times-۱\times\frac{۱}{۴}+-۱\times۰\times\frac{۱}{۴}+۳\times۰\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۲}=-۰/۵$

۱۵ـ گزینه «۱» U و V یک رابطه خطی معکوس دارند زیرا:

U	V
۰	۲
۱	۱
۲	۰

$\Rightarrow V=۲-U\Rightarrow\rho(U,V)=-۱$

۱۶ـ گزینه «۱» اگر X و Y مستقل باشند. $\Rightarrow Cov(X,Y)=۰$

Y,X ناهمبستهاند $\Rightarrow$ اگر $Cov(X,Y)=۰$ ولی دلیل بر استقلال نیست.

به طور کلی اگر Y,X مستقل باشند، داریم:

$$\begin{cases}E(X.Y)=E(X).E(Y)\\COV(X,Y)=۰\\\rho(X,Y)=۰\end{cases}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

$$Cov(ax+b,cy+d)=(a\times c)Cov(X,Y)\Rightarrow Cov(X,Y)=۰/۵\Rightarrow Cov(۳-۲Y,۲+۳X)=-۲\times۳Cov(X,Y)=-۶\times\frac{۵}{۱۰}=-۳$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار C را به دست می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=۱\Rightarrow c\int_{۱}^{\infty}\frac{c}{x^۴}dx=۱\Rightarrow c\int_{۱}^{\infty}x^{-۴}dx=۱$$

$$\frac{-c}{۳}.x^{-۳}\Big|_{۱}^{\infty}=۱\Rightarrow\frac{c}{۳}=۱\Rightarrow c=۳$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{۱}^{\infty}x.\frac{۳}{x^۴}dx=۳\int_{۱}^{\infty}x^{-۳}dx=۳.\frac{x^{-۲}}{-۲}\Big|_{۱}^{\infty}=\frac{۳}{۲}$$

۱۹ـ گزینه «۲» پس Y,X مستقل نیستند. شرط استقلال برای آن‌ها برقرار نیست.

$$\frac{۱}{۴}=f(X=۱\,,\,Y=۱)\neq g(X=۱)h(Y=۱)=\frac{۱}{۱۲}$$

$$Var(Z)=۹Var(X)+Var(Y)+۶cov(X,Y)$$

$$\begin{matrix}E(X)=\frac{۱}{۳} & E(Y)=\frac{۷}{۴}\\ E(X^۲)=\frac{۱}{۳} & E(Y^۲)=\frac{۱۳}{۴}\end{matrix}\quad\Rightarrow var(X)=\frac{۲}{۹}\qquad\Rightarrow var(Y)=\frac{۳}{۱۶}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)\Rightarrow E(X.Y)=۰\times۱\times f(۰,۱)+۰\times۲\times f(۰,۲)+۱\times۱\times f(۱,۱)+۱\times۲\times f(۱,۲)=\frac{۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y)=\frac{۵}{۱۲}-\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۴}=\frac{-۱}{۶}$$

$$var(Z)=۹\times\frac{۲}{۹}+\frac{۳}{۱۶}+۶\times(\frac{-۱}{۶})=\frac{۱۹}{۱۶}$$

۲۰ـ گزینه «۱» برای به دست آوردن تابع احتمال توأم X و Y ابتدا مقادیر ممکن آن‌ها را تعیین می‌کنیم: $y=۰,۱,۲,۳,۴\qquad x=۰,۱,۲,۳,۴$

اگر X و Y دارای چگالی توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، آنگاه توزیع حاشیه‌ای X به صورت روبه‌رو به دست می‌آید: $f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)$

مقادیر $E(X^k)$، $E(XY)$، $cov(X,Y)$ و $V(X)$ به صورتی که در ادامه خواهد آمد، محاسبه می‌شوند.

چون ۴ مهره از ظرف انتخاب می‌شوند، رخداد پیشامدهایی که درآن‌ها مجموع تعداد مهره‌های سفید و سیاه انتخاب شده مخالف ۴ باشد محال است و در نتیجه احتمال رخداد این پیشامدها صفر می‌باشد.

در سایر حالت‌ها که مجموع تعداد مهره‌های انتخابی ۴ می‌باشد اگر a مهره سفید انتخاب شده باشد، $۴-a$ مهره سیاه نیز انتخاب شده است که تعداد حالات مطلوب برای این پیشامدها برابر است با: $\binom{۱۰}{a}\binom{۸}{۴-a}$

که در آن $\binom{۸}{۴-a}=\frac{۸!}{(۴-a)!(۸-(۴-a))!}$ و $\binom{۱۰}{a}=\frac{۱۰!}{a!(۱۰-a)!}$ و تعداد کل راه‌های انتخاب ۴ مهره از ۱۸ مهره بدون توجه به رنگ آن برابر است با: $\binom{۱۸}{۴}=\frac{۱۸!}{۴!(۱۴)!}=۳۰۶۰$

لذا احتمال این‌که a مهره سفید و $۴-a$ مهره سیاه انتخاب شود، برابر است با: $\frac{\binom{۱۰}{a}\binom{۸}{۴-a}}{\binom{۱۸}{۴}}$

	۰	۱	۲	۳	۴	$f_y(y)$
۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{\binom{۱۰}{۴}}{\binom{۱۸}{۴}}$	$\frac{۲۱۰}{۳۰۶۰}$
۱	۰	۰	۰	$\frac{\binom{۸}{۱}\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۸}{۴}}$	۰	$\frac{۹۶۰}{۳۰۶۰}$
۲	۰	۰	$\frac{\binom{۸}{۱}\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۸}{۴}}$	۰	۰	$\frac{۱۲۶۰}{۳۰۶۰}$
۳	۰	$\frac{\binom{۸}{۳}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۸}{۴}}$	۰	۰	۰	$\frac{۵۶۰}{۳۰۶۰}$
۴	$\frac{\binom{۸}{۴}}{\binom{۱۸}{۴}}$	۰	۰	۰	۰	$\frac{۷۰}{۳۰۶۰}$
$f_X(x)$	$\frac{۷۰}{۳۰۶۰}$	$\frac{۵۶۰}{۳۰۶۰}$	$\frac{۱۲۶۰}{۳۰۶۰}$	$\frac{۹۶۰}{۳۰۶۰}$	$\frac{۲۱۰}{۳۰۶۰}$	۱

$$E(X^k)=\sum_x x^k f_{X,Y}(x,y) \quad ; \quad E(XY)=\sum_{x,y}\sum xyf_{X,Y}(X,Y)$$

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \quad ; \quad V(X)=E(X^۲)-E^۲(X)$$

پس از مشخص شدن توزیع توأم می‌توان موارد مورد نیاز برای محاسبه‌ی ضریب همبستگی X و Y را به دست آورد.

$$E(X)=\sum_x xP(X=x)=\frac{۱}{۳۰۶}(۰+۵۶+۲\times۱۲۶)+(۳\times۹۶)+۴\times۲۱)=\frac{۶۸۰}{۳۰۶}$$

$$E(X^۲)=\sum_x x^۲P(X=x)=\frac{۱}{۳۰۶}(۰+۵۶+(۴\times۱۲۶)+(۹\times۹۶)+(۱۶\times۲۱))=\frac{۱۷۶۰}{۳۰۶}$$

$$V(X)=E(X^۲)-E^۲(X)==\frac{۱۷۶۰}{۳۰۶}-(\frac{۶۸۰}{۳۰۶})^۲=\frac{۷۶۱۶۰}{(۳۰۶)^۲}$$

$$E(Y)=\sum_y yP(Y=y)=\frac{۱}{۳۰۶}(۰+۹۶+(۲\times۱۲۶)+۳(۵۶)+(۴\times۷))=\frac{۵۴۴}{۳۰۶}$$

$$E(Y^۲)=\sum_y y^۲P(Y=y)=\frac{۱}{۳۰۶}(۰+۹۶+(۴\times۱۲۶)+۹(۵۶)+۱۶(۷))=\frac{۱۲۱۶}{۳۰۶}$$

$$\Rightarrow V(Y)=\frac{۱۲۱۶}{۳۰۶}-(\frac{۵۴۴}{۳۰۶})^۲=\frac{۷۶۱۶۰}{(۳۰۶)^۲}$$

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xyP(X=x,Y=y)=\frac{۳\times ۹۶}{۳۰۶}+\frac{۴\times ۱۲۶}{۳۰۶}+\frac{۳\times ۵۶}{۳۰۶}=\frac{۹۶۰}{۳۰۶}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۹۶۰}{۳۰۶}-\frac{۵۴۴\times ۶۸۰}{(۳۰۶)^۲}=\frac{-۷۶۱۶۰}{(۳۶۰)^۲}$$

$$P(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}}=\frac{\frac{-۷۶۱۶۰}{(۳۰۶)^۲}}{\sqrt{\frac{۷۶۱۶۰}{(۳۰۶)^۲}\cdot\frac{۷۶۱۶۰}{(۳۰۶)^۲}}}=-۱$$

روش تستی: می‌توان این سؤال را به راحتی و بدون حل آن پاسخ داد. چون تعداد مهره‌های انتخابی ثابت می‌باشد هرچه تعداد مهره‌های سفید انتخابی افزایش یابد تعداد مهره‌های سیاه کاهش می‌یابد و بالعکس. بنابراین مقادیر متغیرهای تصادفی X و Y خلاف جهت یکدیگر مقدار می‌گیرند. لذا ضریب همبستگی آن‌ها منفی است و تنها گزینه‌ی با مقدار منفی، گزینه یک می‌باشد.

۲۱ـ گزینه «۴»

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(X,a+bX)=bV(X)$$
$$V(Y)=V(a+bX)=b^۲V(X)$$

بنابراین می‌توان ضریب همبستگی X و Y را به صورت زیر ساده کرد.

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{bV(X)}{\sqrt{V(X)b^۲V(X)}}=\frac{b}{|b|}\Rightarrow|\rho|=۱$$

۲۲ـ گزینه «۴» رابطه امید ریاضی به صورت روبرو است:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x)dx$$

$$E(X)=۲\Rightarrow\int_۰^a\frac{۲}{a^۲}x(a-x)dx=۲\Rightarrow\frac{۲}{a^۲}\left[\frac{ax^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^a=۲\Rightarrow\frac{۲}{a^۲}.\frac{a^۳}{۶}=۲\Rightarrow\frac{a}{۳}=۲\Rightarrow a=۶$$

۲۳ـ گزینه «۴» کوواریانس و واریانس‌های X و Y را محاسبه کرده در رابطه آن جایگذاری می‌کنیم:

$$E(X)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\qquad E(X^۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \operatorname{Var}(X)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$E(Y)=\frac{۳}{۲}\qquad E(Y^۲)=\frac{۳}{۸}+\frac{۱۲}{۸}+\frac{۹}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

xy	۰	۱	۲	۳
p_{xy}	$\frac{۴}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

$$\operatorname{Var}(Y)=۳-\frac{۹}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$P(XY=۰)=p(X=۰)+p(Y=۰)-p(X=۰,Y=۰)=\frac{۴}{۸}\quad;\quad P(XY=۱)=P(X=۱,Y=۱)=\frac{۱}{۸}$$

$$P(XY=۲)=P(X=۱,Y=۲)=\frac{۲}{۸}\quad;\quad P(XY=۳)=P(X=۱,Y=۳)=\frac{۱}{۸}\qquad E(XY)=۱$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1-(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})=\frac{1}{4} \quad ; \quad \rho=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۴ـ گزینه «۴»

$$2=\frac{2X}{Y}+\frac{Y}{2X}=\frac{4X^2+Y^2}{2XY}\Rightarrow 4XY=4X^2+Y^2\Rightarrow 4X^2-4XY+Y^2=0\Rightarrow(2X-Y)^2=0\Rightarrow\begin{cases}2X=Y\\ 2X=-Y \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱ـ اگر $Y=aX$ ، آنگاه: $V(Y)=a^2V(X)$ ۲ـ $cov(aX,bX)=abV(X)$

بنابراین:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{cov(X,2X)}{\sqrt{V(X)V(2X)}}=\frac{2V(X)}{\sqrt{V(X)(2^2V(X))}}=1$$

۲۵ـ گزینه «۱» **نکته۱:** $cov(X,X)=V(X)$ **نکته۲:** $cov(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sum_{j=1}^{m}b_jY_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j\,cov(X_i,Y_j)$

نکته۳: $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

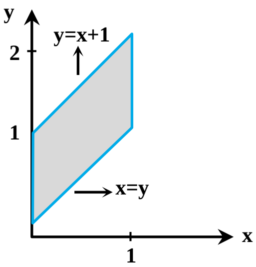
$$cov(Z,W)=cov(X+Y,X-Y)=cov(X,X)-cov(X,Y)+cov(Y,X)-cov(Y,Y)=V(X)-V(Y)$$
$$=\sigma^2-\sigma^2=0\Rightarrow\rho(Z,W)=0$$

۲۶ـ گزینه «۴» اگر X و Y متغیرهای پیوسته با تابع چگالی توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، آنگاه:

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

بنابراین:

$$E(Y)=\int_{0}^{1}\int_{x}^{1+x}ydydx=\int_{0}^{1}(\frac{1}{2}y^2]_x^{1+x})dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1+2x)dx=\frac{1}{2}(x+x^2)\Big|_0^1=1$$



۲۷ـ گزینه «۳» برای محاسبه $P(X-Y<1)$ باید توزیع احتمالی $X-Y$ را مشخص کرد. چون X و Y دارای توزیع نرمال هستند ترکیب خطی آن‌ها نیز دارای توزیع نرمال است ولی باید مقادیر پارامترهای آن یعنی، واریانس و میانگین تعیین شوند.

طبق فرض، X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشند. ضریب همبستگی X و Y برابر $\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$X\sim N(0,1) \quad , \quad Y\sim N(0,1)$$

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{1}{2}\Rightarrow cov(X,Y)=\rho(X,Y)\sqrt{V(X)V(Y)}=\frac{1}{2}\sqrt{1\times1}=\frac{1}{2}$$

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\,cov(X,Y)$$

$$\left.\begin{array}{l}V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2cov(X,Y)=1+1-2(\frac{1}{2})=1\\ E(X+Y)=E(X)-E(Y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow X-Y\sim N(0,1)$$

$$P(X-Y<1)=P(Z<1)=\Phi(1)$$

۲۸ـ گزینه «۱» انتخاب ۲ توپ به این صورت می‌باشد که یا ۲ توپ شماره ۱ یا توپ شماره ۴ یا ۲ توپ شماره ۱ و ۴ انتخاب می‌کنیم، لذا داریم.

$$۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow P(۱,۱) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}$$

$$۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow P(۱,۴) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}$$

$$۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow P(۴,۴) = \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}$$

$\Rightarrow$

x (امتیازها)	۲	۵	۸
$p(X=x)$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۶}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$

$$E(x) = \sum x.P(X=x) = ۲\times\frac{۳}{۱۰} + ۵\times\frac{۶}{۱۰} + ۸\times\frac{۱}{۱۰} = ۴/۴$$

۲۹ـ گزینه «۱» میانگین را باز می‌نویسیم:

$$Cov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = Cov(\bar{X}, X_i) - Cov(\bar{X}, \bar{X}) = Cov(\frac{X_۱ + ...X_۱ + ...X_n}{n}, X_i)$$

$$-var(\bar{X}) = Cov(\frac{X_i}{n}, X_i) - \frac{\sigma^۲}{n} = \frac{۱}{n}Var(X_i) - \frac{\sigma^۲}{n} = \frac{\sigma^۲}{n} - \frac{\sigma^۲}{n} = ۰$$

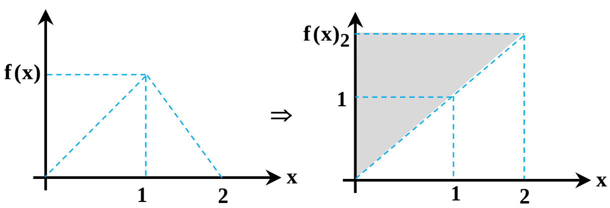
۳۰ـ گزینه «۴» **روش اول:** با توجه به این‌که $f_X(x) = |۱ - x|$، تابع چگالی را به صورت دو ضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم.

$$f_X(x) = \begin{cases} ۱ - x & ۰ < x \le ۱ \\ x - ۱ & ۱ < x < ۲ \end{cases} \Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_۰^۱ x(۱-x)dx + \int_۱^۲ x(x-۱)dx$$

$$= \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳\Big|_۰^۱ + (\frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۱}{۲}x^۲)\Big|_۱^۲ = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) + (\frac{۸}{۳} - ۲) - (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}) = ۱$$

روش دوم:

$$X \ge ۰ \Rightarrow E(X) = \int_۰^{\infty} (۱ - F(x)dx = \text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = \frac{۲}{۲} = ۱$$



۳۱ـ گزینه «۳»

نکته۱: اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F (x) باشد، آنگاه $U = F_\theta(X)$ دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(۰,۱)$ است.

نکته۲: اگر $X \sim U(a,b)$، آنگاه: $E(X) = \frac{a+b}{۲}$

بنابراین: $Y \sim U(۰,۱)$ و $E(Y) = \frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

۳۲ـ گزینه «۴» اگر $M_X(t) = E(e^{tX})$ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X باشد، آنگاه: $M'_X(۰) = E(X)$

$$M'_X(t) = (a + ۲bt)e^{at+bt^۲} \quad ; \quad \left.\begin{matrix} M'_X(۰) = a \\ E(X) = ۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = ۲$$

۳۳ـ گزینه «۲» **یادآوری:** ۱- $cov(aX+d,cY+d)=(ac)cov(X,Y)$ ۲- $cov(X,X)=V(X)$ ۳- $V(aX+b)=a^۲V(X)$

$V(Y)=V(-\frac{۱}{۲}X-۴)=\frac{۱}{۴}V(X)$ و $cov(X,Y)=cov(X,-\frac{۱}{۲}X-۴)=-\frac{۱}{۲}cov(X,X)=-\frac{۱}{۲}V(X)$

بنابراین:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{-\frac{۱}{۲}V(X)}{\sqrt{V(X)\frac{۱}{۴}V(X)}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-۱$$

۳۴ـ گزینه «۱» اگر X , Y متغیرهای گسسته باشند، آنگاه : $E(Y|X=x)=\sum_y yf_{y,x}(y|x)$

اگر Y,X دارای تابع احتمال توأم باشند، آنگاه: $f_x(x)\neq ۰$ $\quad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

که در آن $f_X(x)$ تابع احتمال حاشیه‌ای X است که از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود. $f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)$

نکته: $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i=۰}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}=۲^n$

$$f_X(x)=\sum_y f_{x,y}(x,y)=\sum_{j=۰}^{i}\frac{۱}{e^۲ j!(i-j)!}=\frac{۱}{e^۲ i!}\sum_{j=۰}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}=\frac{۲^i}{e^۲ i!}$$

بنابراین:

$$f_{Y|X}(y,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{۱}{e^۲ j!(i-j)!}}{\frac{۲^i}{e^۲ i!}}=\frac{\binom{i}{j}}{۲^i}\quad,\quad j=۰,۱,\cdots,i$$

در نتیجه:

$$E(Y|X=۲)=\sum_{j=۰}^{۲}\frac{j\binom{۲}{j}}{۴}=\frac{۱}{۴}\sum_{j=۰}^{۲}\frac{j(۲!)}{j!(۲-j)!}=\frac{۱}{۴}(۰+۲+۲)=۱\quad f_{Y,X}(Y|X=۲)=\frac{\binom{۲}{j}}{۲^۲}\quad j=۰,۱,۲\ ;$$

۳۵ـ گزینه «۴» یادآوری: $P(X^۲\geq a^۲)\leq\frac{E(X^۲)}{a^۲}$.

با توجه به نامساوی فوق و معادل بودن $P(|X|\geq ۳)$ و $P(X^۲\geq ۹)$ کران بالا برای $P(|X|\geq ۳)$ به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}P(|X|\geq ۳)=P(X^۲\geq ۹)\leq\frac{E(X^۲)}{۹}\\ E(X^۲)=V(X)+E^۲(X)=۴+۱=۵\end{array}\right\}\Rightarrow P(|X|\geq ۳)\leq\frac{۵}{۹}$$

۳۶ـ گزینه «۴» توزیع y را بدست می‌آوریم سپس امید ریاضی y را محاسبه می‌کنیم: $f(y)=n(۱-F_x(y)^{n-۱}.f_x(y))$

تابع چگالی احتمالی $f(x)$ داده شده است، تابع توزیع را بدست می‌آوریم:

$$F_x(y)\int_۱^y\frac{۱}{x^۲dx}=\int_۱^y x^{-۲}dx=-x^{-۱}\Big|_۱^y=-\frac{۱}{y}+۱$$

$$f(y)=n.(۱-۱+\frac{۱}{y})^{n-۱}.\frac{۱}{y^۲}=n.y^{-n+۱}.y^۲=n.y^{-n-۱}$$

$$E(y)=\int_۱^\infty y.n.ydy=\int_۱^\infty ny^{-n}dy=n.\frac{y^{-n+۱}}{-n+۱}\Big|_۱^\infty=\frac{n}{n-۱}$$

۳۷ـ گزینه «۳» می‌دانیم: $\max(x,y)\geq \to E(\max(x,y)\geq E(x))$

$$\max(x,y)\geq y \to E(\max(x,y)\geq E(y) \ ; \quad E(\max(x,y)\geq \max(E(x),E(y))$$

۳۸ـ گزینه «۱» طبق تعریف امید ریاضی:

$$E(e^{F(x)})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{F(x)}.f(x)dx \Rightarrow F(x)=u \Rightarrow f(x)dx=du \Rightarrow \begin{cases}-\infty<x<\infty \\ 0<u<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^u du = e^u\Big|_0^1 = e^1-e^0=e-1=\exp(1)-1$$

۳۹ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که $E(X)=\sum_x xP(X=x)$ داریم:

$$E(X)=P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+kP(X=k)+\cdots \Rightarrow \frac{E(X)}{k}=\frac{1}{k}(P(X=1)+2P(X=2)+\cdots kP(X=k)+\cdots)$$

$$=\frac{1}{k}(P(X=1)+2P(X=2)+(k-1)P(X=k-1)+(k+1)P(X=k+1+...))+P(X=k)$$

$$\Rightarrow P(X=k)=\frac{E(X)}{k}-\frac{1}{k}(P(X=1)+\cdots+(k-1)P(X=k-1)+(k+1)P(X=k+1)+\cdots)$$

$$=\frac{1}{k}(E(X)-(P(X=1)+\cdots+(k-1)P(X=k-1)+(k+1)P(X=k+1)+...\leq\frac{E(X)}{k}$$

زیرا $P(X=1)+\cdots+(k-1)P(X=k-1)+(k+1)P(X=k+1)+...$ نامنفی است و به اندازه $kP(X=k)$ از $E(X)$ کمتر است، بنابراین با کم کردن آن از $E(X)$ یک مقدار نامنفی کمتر از $E(X)$ حاصل می‌شود.

۴۰ـ گزینه «۲» خواص کوواریانس:

۱ـ اگر a عدد ثابت باشد $\operatorname{cov}(X,a+Y)=\operatorname{cov}(X,Y)$ ، ۲ـ $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$ ، ۳ـ $\operatorname{cov}(X,X)=V(X)$

یادآوری: اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $E(X)=np\ ,\ V(X)=npq$

$$\operatorname{cov}(\frac{X}{10},\frac{10-X}{10})=\operatorname{cov}(\frac{X}{10},\frac{-X}{10})=\frac{1}{10}(-\frac{1}{10})\operatorname{cov}(X,X)=\frac{-1}{100}V(X)=\frac{-1}{100}(10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3})=\frac{-1}{45}$$

۴۱ـ گزینه «۲» **یادآوری ۱:** اگر $X\sim U\{1,2,\cdots,k\}$ آنگاه $E(X)=\frac{k+1}{2}$.

یادآوری ۲: $E(X|Y)$ تابعی از متغیر تصادفی Y است که مقدار آن در $Y=y$ برابر $E(X|Y=y)$ بوده و خود یک متغیر تصادفی است. یک خاصیت مهم امید ریاضی شرطی به صورت مقابل است: $E(X)=E(E(X|Y))$

در اینجا نیز چون حوزه‌ی مقادیر Y به مقدار انتخابی X مرتبط است، $E(Y)$ باید از رابطه‌ی $E(E(Y|X))$ محاسبه شود. بنابراین:

$$E(Y)=E(E(Y|X))=E(\frac{X+1}{2})=\frac{1}{2}(E(X)+1)=\frac{1}{2}(\frac{5+1}{2}+1)=2$$

۴۲ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه $F_X(S^*)=\frac{b}{b+\ell}$ خواهیم داشت: $b=10-6=4\ ,\ \ell=6$ سود خالص هر واحد

$$F_X(S^*)=\int_0^{S^*} f_X(x)dx=\frac{b}{b+\ell}=\int_0^{S^*}3x^2dx=\frac{4}{4+6}=\frac{4}{10} \quad ; \quad x^3\Big|_0^{S^*}=\frac{4}{10}\Rightarrow(S^*)=\frac{4}{10}\Rightarrow S^*=\sqrt[3]{\frac{4}{10}}$$

۴۳ـ گزینه «۲» همانطور که در متن هم گفته شد بهترین زمانی است که $F_X(S^*) \ge \frac{b+c}{b+\ell+c}$ باشد که C هزینه‌ها و B هزینه تولید و ℓ سود می‌باشد.

$$\frac{b+c}{b+\ell+c} = \frac{۱۵۰۰+۱۰۰۰}{۱۵۰۰+۱۵۰۰+۱۰۰۰} = \frac{۲۵۰۰}{۴۰۰۰} = \frac{۵}{۸} \to F_X(S^*) \ge \frac{۵}{۸} \quad ; \quad ۳۰۰۰-۱۵۰۰=۱۵۰۰$$

$$F_X(S^*) = p(X \le S^*) = ۱-(۱-۰/۱)^{S^*} \ge \frac{۵}{۸} \to ۱-(۰/۹)^{S^*} \ge \frac{۵}{۸} \quad ; \quad (۰/۹)^{S^*} \le \frac{۳}{۸} \to S^* Ln\,۰/۹ \le \ln\frac{۳}{۸} \to S^* \simeq ۱۰$$

۴۴ـ گزینه «۲» رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$COV(X_۱,X_۲) = E(COV(X_۱,X_۲\mid y)) + COV(E(X_۱\mid y),E(X_۲\mid y))$$

$$\Rightarrow COV(X_۱,X_۲\mid Y) = E(X_۱.X_۲\mid Y) - E(X_۱\mid y).E(X_۲\mid y)$$

$$\xrightarrow[X_۲\mid Y,X_۱\mid y]{\text{طبق صورت مسأله}} E(X_۱\mid Y).E(X_۲\mid Y) - E(X_۲\mid Y) - E(X_۱\mid Y) = ۰ \Rightarrow COV(X_۱,X_۲\mid y) = ۰$$

از طرفی طبق صورت مسأله $E(X_۱\mid Y) = E(X_۲\mid Y) = Y$ بنابراین در رابطه اصلی خواهیم داشت:

$$COV(X_۱,X_۲) = ۰ + \underbrace{COV(Y,Y)}_{Var(Y)} = Var(Y)$$

۴۵ـ گزینه «۲» اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $g(X)$ و $h(Y)$ توابعی از آن‌ها باشند که امید ریاضی آن‌ها وجود داشته باشد آنگاه:

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

X و Y مستقل‌اند بنابراین:

$$V(XY) = E(XY)^۲ - E^۲(XY) = E(X^۲Y^۲) - (E(XY))^۲ = E(X^۲)E(Y^۲) - (E(X)E(Y))^۲$$

$$V(X) = E(X^۲) - E^۲(X) \Rightarrow E(X^۲) = V(X) + E^۲(X)$$

در نتیجه:

$$E(X^۲) = ۲+۱ = ۳ \;,\; E(Y^۲) = ۳+۲^۲ = ۷$$

$$V(XY) = ۳\times۷ - (۱\times۲)^۲ = ۲۱-۴ = ۱۷$$

۴۶ـ گزینه «۲» نامساوی چی‌بی‌شف: اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس متناهی $\sigma^۲$ باشد، آنگاه برای هر $k > ۰$ داریم:

$$P(|X-\mu| < k) \ge ۱ - \frac{\sigma^۲}{k^۲}$$

لذا برای محاسبه‌ی کران باید $\sigma^۲$ را محاسبه کنیم:

$$\sigma^۲ = V(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = ۱۳-۹ = ۴$$

$$P(-۲ < X < ۸) = P(-۲-۳ < X-۳ < ۸-۳) = P(|X-۳| < ۵) \ge ۱ - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۱}{۲۵} = ۰/۸۴$$

۴۷ـ گزینه «۱» فرض کنید $z = x^۲$ ، پس می‌خواهیم ضریب همبستگی z, y را به دست آوریم و می‌دانیم:

$$P(z,y) = \frac{cov(z,y)}{\sqrt{var(z)\,var(y)}} \quad ; \quad cov(z,y) = cov(z,z+۱) = var(z),\; var(y) = var(z+۱) = var(z)$$

$$P(z,y) = \frac{cov(z,y)}{\sqrt{var(y)\,var(z)}} = \frac{var(z)}{\sqrt{var(z)\,var(z)}} = ۱$$

البته با توجه به این‌که بین $y,x^۲$ رابطه خطی مثبت وجود دارد می‌توانستیم بگوییم که همبستگی خطی کامل مثبت بین آن‌ها وجود دارد.

۴۸ـ گزینه «۳» طبق نامساوی مارکوف : $P(x \ge a) \le \frac{E(x)}{a}$ خواهیم داشت:

$$P(x \ge ۵) \le \frac{۳}{۵}$$

۴۹ـ گزینه «۲» به طور کلی رابطه روبرو را داریم:

$$Var(Z)=E(V(Z|T))+Var(E(Z|T))$$

اکنون در رابطه بالا به جای $Z=XY$ و به جای T متغیر X را قرار می‌دهیم:

$$Var(XY)=E(Var(XY|X))+Var(E(XY|X))=E(Var(XY|X))+Var(XE(Y|X))$$

$$\xrightarrow{E(Y|X)=1}\underbrace{(Var(XY|X))}_{\text{مقداری مثبت است}=A}+Var(X)\Rightarrow Var(XY)=A+Var(X)\Rightarrow Var(XY)\geq Var(X)$$

۵۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$P(X=a)=P(X=-a)=p\ ,\ \ P(X=0)=1-2p$$

x	$-a$	0	a
$P(X=x)$	p	$1-2p$	p

$$V(g(X))=E(g^2(X))-E^2(g(X))\ ,\ E(g(X))=\sum_x g(X)P(X=x)$$

بنابراین:

$$E(X+X^3)^2=E(X^2+2X^4+X^6)=E(X^2)+2E(X^4)+E(X^6)$$
$$E(X^{2k})=(-a)^{2k}p+0+(a)^{2k}p=2a^{2k}p\Rightarrow E(X^2)=2a^2p\ ,\ E(X^4)=2a^4p\ \ ,\ \ E(X^6)=2a^6p$$
$$E(X^{2k+1})=(-a)^{2k+1}p+0+a^{2k+1}p=0\Rightarrow E(X)=0\ ,\ E(X^3)=0$$

در نتیجه:

$$V(X+X^3)=E(X+X^3)^2+(E(X+X^3))^2+E(X^2)+2E(X^4)+(X^6)-0=2a^2p+4a^6p+6a^6p=2a^2p(1+2a^2+3a^2)$$

۵۱ـ گزینه «۳» روش اول:

بردار تصادفی (X,Y) به طور یکنواخت روی نقاط $(0,-1),(0,1),(1,0),(-1,0)$ توزیع شده است بنابراین، تابع احتمال توأم (X,Y) به صورت مقابل است:

(x,y)	$(-1,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$
$f_{X,Y}(x,y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته با توزیع احتمال توأم $f_{x,y}(x,y)$ باشند آنگاه:

$$E(X^k)=\sum_x\sum_y x^kf_{x,y}(x,y)\ ,\ E(Y^k)=\sum_x\sum_y y^kf_{X,Y}(X,Y)\ \ ,\ \ E(X,Y)=\sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(X,Y)$$

$$E(X)=\sum_x\sum_y xf_{X,Y}(X,Y)=(-1)\frac{1}{4}+1(\frac{1}{4})+0=0 \qquad k=1$$

$$E(X^2)=\sum_x\sum_y x^2f_{X,Y}(X,Y)=1(\frac{1}{4})+1(\frac{1}{4})+0=\frac{1}{2} \qquad k=2$$

$$E(Y)=\sum_x\sum_y yf_{X,Y}(x,y)=0+1(\frac{1}{4})+(-1)\frac{1}{4}=0 \qquad k=1$$

$$E(Y^2)=\sum_x\sum_y y^2f_{X,Y}(x,y)=0+1(\frac{1}{4})1+(-1)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \qquad k=2$$

حاصلضرب XY^2 همواره صفر است در نتیجه $E(XY^2)$ برابر صفر است.

$$E(XY^2)=\sum_x\sum_y xy^2f_{X,Y}(x,y)=0$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)=(E(X^2)-E^2(X))+(E(Y^2)-E^2(Y))+0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

روش دوم: چون $f(x,y)=f(x)f(y)$ پس در X و Y مستقل‌اند در نتیجه:

$$V(X+Y)V(X)+V(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

۵۲ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که برای متغیر تصادفی X با میانگین μ و عدد دلخوا a داریم:

$$E((x-a)^2)=E((x-\mu)^2)+(\mu-a)^3=Var(x)+(\mu-a)^2$$

$$a=E(X^2)=Var(X)-(E(X))^2=3+4=7 \quad ; \quad b=E((X-2)^2)=E(X^2)-4E(X)+4=7-8+4=3$$

$$b=E((X-2)^2)=E((X-\mu)^2)=Var(X)=3 \quad ; \quad C=E((X-3)^2)=E(X^2)-6E(X)+9=7-12+9=4$$

$$d=E(X(X-2))=E(X^2)-2E(X)=7-4=3$$

۵۳ـ گزینه «۲» طبق نامساوی چی‌بی‌شف به صورت روبرو خواهیم داشت:

$$p(y\le \mu-k\sigma \text{ یا } y\ge \mu+k\sigma)\le \frac{1}{k^2}$$

توجه کنید توزیع داده‌ها معلوم نیست.

$$p(|y|>2)=p(y>2 \text{ یا } y<-2)\le \frac{1}{(2)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\mu-2k\sigma \Rightarrow -k\sigma=2 \Rightarrow -k\times 1=2 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

۵۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $E(t^X)$ تعریف تابع مولد احتمال می‌باشد که به صورت $\mu_2=E(x(x-1))$ تعریف می‌شود:

$$\mu_2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t^X)\Big|_{t=1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}E(t^X)=5\times 2\times[1+2(t-1)]^4$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t^X)=5\times 2\times 4\times 2[1+2(t-1)]^3\Big|_{t=1} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t^X)=\mu_2=E(x(x-1)=5\times 2\times 4\times 2[\overbrace{1+2(t-1)}^{1}]_{t=1}=80$$

۵۵ـ گزینه «۱» نامساوی مارکوف: اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد آنگاه، $P(X>a)\le\frac{E(X)}{a}$

با توجه به شرط نامنفی بودن X در نامساوی مارکوف می‌توان رابطه مقابل را نتیجه گرفت:

$$P(X^2>a^2)\le\frac{E(X^2)}{a^2} \quad \text{و} \quad P(X>2\sqrt{E(X^2)})=P(X^2>4E(X^2))\le\frac{E(X^2)}{4E(X^2)}=\frac{1}{4}$$

۵۶ـ گزینه «۴» دقت کنید که گفته شده است x فقط مقادیر صحیح و غیر منفی را اختیار می‌کند و این به مفهوم آن است کـه متغیـر تصـادفی X بـه صورت روبرو تعریف می‌شود. $E(X)=\sum_{x} x.p(X=x)$: می‌دانیم

چون X مقادیر صحیح غیر منفی را اختیار می‌کند، خواهیم داشت:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x.p(X=x)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+\ldots=$$

$$0+p(X=1)+p(X=2)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=3)+p(X=3)+\ldots$$

بنابراین:

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+P(X=2)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=3)+P(X=3)+\cdots$$

تا اینجا نشان دادیم که:

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} P(X\ge x)$$

اما در صورت مسئله کران Σ از صفر شروع شده است:

$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X\ge i)=P(X\ge 0)+\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}P(X\ge i)}_{E(X)}=P(x\ge 0)+E(x)\to \sum_{i=0}^{\infty}p(x\ge i)\ge E(x)$$

۵۷ـ گزینه «۴» بررسی گزینه یک به یک به صورت زیر می‌باشد:

۱ـ در صورتی که $\sum x.p(X=x)$ وجود نداشته باشد امید ریاضی وجود ندارد. ۲ـ در صورتی که $\int x.f(x)dx$ وجود نداشته باشد امید ریاضی وجود ندارد.

۳ـ گزینه «۳» در صورتی درست است که تابع مورد نظر تابع توزیع تجمعی باشد.

۵۸ـ گزینه «۲» X و Y مستقل‌اند:

$$E(X|Y=y)=E(X) \quad ; \quad E(X|y=1)=E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} x.p(X=x)=6$$

توجه کنید که $P(X=x)=pq^{x-1}$، بنابراین :

$$E(x)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

۵۹ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $\sum_{x=0}^{n}(-1)^x\binom{n}{x}=0$ اکنون توجه کنید که:

$$E\left[(-1)^{x+10}\right]=\sum_{x=0}^{25}(-1)^{x+10}\binom{25}{x}(\frac{1}{2})^{25}=(\frac{1}{2})^{25}\sum_{x=0}^{25}(-1)^x\binom{25}{x}=0$$

۶۰ـ گزینه «۱» به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند چرا که برحسب α می‌باشند، در حالی که α قابل محاسبه است:

$$\int_{-2}^{0}(\alpha+\frac{1}{4}x)dx+\int_{0}^{2}(\alpha-\frac{1}{4}x)dx=1$$

$$\to \alpha x+\frac{x^2}{8}\Big|_{-2}^{0}+\alpha x-\frac{x^2}{8}\Big|_{0}^{2}=1\to(0+0)-(-2\alpha+\frac{4}{8})+(2\alpha-\frac{4}{8})-(0-0)=1$$

$$\to 2\alpha-\frac{4}{8}+2\alpha-\frac{4}{8}=1\to 4\alpha-1=1\to 4\alpha=2\to\alpha=\frac{1}{2}$$

اکنون α را جایگذاری می‌کنیم و امید ریاضی را محاسبه می‌کنیم:

$$E(x)=\int_{-2}^{2}x.f(x)dx=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2)dx+\int_{0}^{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2)dx$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\Big|_{0}^{2}=0-(1+\frac{-8}{12})+(1-\frac{8}{12})=-1+\frac{8}{12}+1-\frac{8}{12}=0$$

۶۱ـ گزینه «۲» از متغیر w میانگین و واریانس می‌گیریم:

$$E(w)=E(2x+y-z)=2E(x)+E(y)-E(z)=2\times2+3-(-2)=9$$

$$\sqrt{Var}(w)=Var(2x+y-z)=4Var(x)+Var(y)+Var(z)+4Cov(x,y)-4Cov(x,z)-COV(y,z)$$

$$=4\times4+8+6+4\times-1-4\times1-0=16+8+6-4-4=22$$

۶۲ـ گزینه «۳» دقیقاً مثال ۲۸ کتاب در فصل چهارم است. اگر X نشان دهنده تعداد انطباق‌های درست باشد، آنگاه:

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{اگر i امین قطعه را درست قرار دهد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\to P(x_i=1)=\frac{1}{n}$$

$$E(x)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=n.\frac{1}{n}=1$$

فصل پنجم

«توزیع‌های آماری خاص»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای ۷ و ۵ باشند. $P(X=-Y)$ با کدام گزینه برابر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) e^{-12}
۲) e^{-11}
۳) توزیع مشخصی ندارد.
۴) به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست.

۲ـ تعداد اتوبوس‌هایی که وارد یک ترمینال می‌شوند دارای توزیع پواسون با نرخ ۳۰ اتوبوس در هر روز است. تعداد افراد داخل هر اتوبوس دارای توزیع یکنواخت در مجموعه $\{1,2,\dots,19\}$ می‌باشد، میانگین تعداد مسافرینی که در هر روز وارد ترمینال می‌شوند با کدام مورد برابر است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳۰۰
۲) ۴۰۰
۳) ۴۵۰
۴) ۶۰۰

۳ـ دو تاس ناریب، یکی زرد و یکی قرمز را با هم ده مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد بارهایی باشد که در ده بار پرتاب، خال تاس زرد، بزرگتر از خال تاس قرمز است، دراین صورت توزیع احتمال X دو جمله‌ای است با $n=10$ و پارامتر p برابر با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{5}{12}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{7}{12}$

۴ـ از جعبه‌ای شامل n_1 مهره سفید و n_2 مهره سیاه، m مهره را برمی‌داریم $(m \le n_1+n_2)$. امید ریاضی تعداد مهره‌های سفید برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{n_1}{n_1+n_2}$
۲) $\frac{mn_1}{n_1+n_2}$
۳) $\frac{m}{n_1+n_2}$
۴) $\frac{1}{n_1+n_2}$

۵ـ در یک آزمون تستی ۱۰۰ پرسش وجود دارد. مدت زمان‌های لازم برای پاسخگویی به پرسش‌ها مستقل از هم هستند و از یک توزیع نمایی با میانگین ۳۰ ثانیه برخوردارند. به طور متوسط چند دقیقه زمان برای پاسخگویی به همه‌ی پرسش‌ها نیاز است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۵۰

۶ـ اگر نمرات استاندارد دو دانشجو ۱/۲ و ۰/۳− باشد و بدانیم نمرات واقعی آن‌ها به ترتیب ۱۸ و ۱۲ بوده است، میانگین و انحراف معیار نمرات به ترتیب کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۵ و ۲
۲) ۱۵ و ۴
۳) ۰/۳− و ۱/۲
۴) ۴ و ۱۳/۲

۷ـ در چهار راه بزرگی به طور متوسط دو تصادف در روز بر اساس یک فرآیند پواسون رخ می‌دهد. اگر شما هم اکنون شاهد یک تصادف در این چهار راه باشید، احتمال این‌که برای دست کم دو روز دیگر هیچ تصادفی در این چهار راه رخ ندهد کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) e^{-5}
۲) e^{-4}
۳) e^{-3}
۴) e^{-2}

۸ـ یک نمونه تصادفی ۳ تایی از یک متغیر نمایی با میانگین ۱ گرفته شده است. احتمال این‌که مقدار حداقل نمونه بزرگتر از ۱ باشد، چقدر است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۰۴۹
۲) ۰/۱۵۰
۳) ۰/۰۳۶
۴) ۰/۷۴۷

۹ـ نمونه تصادفی $x_1,x_2,\dots,x_{10}$ را از توزیع نرمال با میانگین ۵ و واریانس ۱۰ می‌گیریم و متغیر تصادفی y را به صورت $y=\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i$ تعریف می‌کنیم، کدام اظهار نظر در مورد توزیع Y درست است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) نرمال است با میانگین صفر و انحراف معیار ۱۰
۲) نرمال است با میانگین ۵۰+ و انحراف معیار ۱۰
۳) نامشخص است ولی میانگین آن ۵۰+ و واریانس ۱۰۰ است.
۴) نامشخص است ولی میانگین آن ۵۰− و واریانس ۱۰۰ است.

۱۰ـ اگر $y=\text{Minimum}(x_1,x_2,x_3)$ باشد، و x_i ها، $(i=1,2,3)$ مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشند، $E(y)$ با کدام مورد برابر است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱ـ فرض کنید z دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک باشد. $E(2z^3+5z^2+6z^4)$ با کدام مورد برابر است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۲۳ ۴) صفر

۱۲ـ در بعد از ظهر یک روز به طور متوسط در هر نیم ساعت ۳ نفر از عرض یک خیابان می‌گذرند. احتمال این‌که در طول ۱۰ دقیقه حداقل یک نفر از عرض خیابان عبورکند، چقدر است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $1-e$ ۳) $1-e^{\frac{1}{3}}$ ۴) $1-e^{-1}$

۱۳ـ فرض کنید یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ داشته باشیم. امید ریاضی طول بازه تصادفی $\left[\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{3},\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{2}\right]$ برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{6\sigma^2}{n}$ ۲) $\frac{6\sigma^2}{n-1}$ ۳) $\frac{n\sigma^2}{6}$ ۴) $\frac{(n-1)\sigma^2}{6}$

۱۴ـ اگر $X_1,X_2,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(0,\sigma^2)$ باشد، میانگین و واریانس متغیر تصادفی Y که به صورت $y=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}$ تعریف شده است، با کدام گزینه برابر می‌باشد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\mu_y=2\sigma^2\ ,\ \sigma_y^2=\frac{\sigma^4}{3n}$ ۲) $\mu_y=\sigma^2\ ,\ \sigma_y^2=\frac{2\sigma^4}{n}$ ۳) $\mu_y=\frac{\sigma^2}{3}\ ,\ \sigma_y^2=\frac{2\sigma^4}{3n}$ ۴) $\mu_y=\frac{\sigma^2}{2}\ ,\ \sigma_y^2=\frac{\sigma^4}{2n}$

۱۵ـ برای متغیر تصادفی X که از یک توزیع نمایی با پارامتر یک برخوردار می‌باشد، تابع مولد گشتاور عبارت است از:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $1-t\ ;\ t<1$ ۲) $\frac{1}{1-t}\ ;\ t<1$ ۳) $1-t\ ;\ t>1$ ۴) $\frac{1}{t-1}\ ;\ t>1$

۱۶ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع $N(0,\sigma^2)$ باشند، گزینه صحیح برای توزیع $Z=X^2+Y^2$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) نامعلوم

۲) گاما با پارامترهای ۲ و $2\sigma^2$

۳) نمایی با میانگین $2\sigma^2$

۴) نرمال با میانگین صفر و واریانس ۲

۱۷ـ دو جامعه نرمال مستقل از یکدیگر هر کدام با واریانس مساوی ۴ مفروضند. یک نمونه‌ی مستقل پنج‌تایی از جامعه‌ی اول و یک نمونه مستقل ۹ تایی از جامعه‌ی دوم در دست است. $\text{var}(S_1^2S_2^2)$ چقدر است؟ (S_1^2 واریانس نمونه‌ی اول و S_2^2 واریانس نمونه‌ی دوم می‌باشد.)

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۲۴ ۴) ۹۶

۱۸ـ اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. با فرض $E(X)=9$ و $V(X)=27$، مقادیر (c,d) کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

$$f(x)=\begin{cases} cx^d e^{-\frac{x}{3}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

۱) $(c,d)=\left(2,\frac{1}{6}\right)$ ۲) $(c,d)=\left(\frac{1}{3},2\right)$

۳) $(c,d)=\left(3,\frac{1}{2}\right)$ ۴) $(c,d)=\left(\frac{1}{54},2\right)$

۱۹ـ فرض کنید X_1 و X_2 از هم مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند در این صورت توزیع $X_2^2 - X_1^2$ با توزیع کدام گزینه یکسان است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{X_1}{X_2}$ ۲) $\frac{X_1^2}{X_2^2}$ ۳) $X_1^2 + X_2^2$ ۴) $2X_1X_2$

۲۰ـ تعداد تصادفات یک اتومبیل در سال دارای توزیع پواسون با پارامتر n است. اگر طول عمر اتومبیل دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد، متوسط تعداد تصادفات در مدت عمر یک اتومبیل برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) μn ۲) $n\phi(\mu)$ ۳) $\frac{n}{\mu}$ ۴) $n\phi(\frac{\mu}{\sigma})$

۲۱ـ اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد چگالی $|X|$ کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \quad 0 < x < \infty$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \quad 0 < x < \infty$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$

۲۲ـ اگر تا لحظه t تعداد مشتریان مرد و زن یک فروشگاه دارای توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای λt و μt باشد، احتمال این‌که اولین مشتری فروشگاه مرد باشد برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $1-e^{\frac{-\lambda}{\mu}}$ ۲) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ۳) $\frac{\lambda!}{(\lambda+\mu)!}$ ۴) $\frac{\lambda!}{\mu!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$

۲۳ـ در پنجمین پرتاب مستقل سه سکه‌ی سالم، احتمال این‌که برای بار دوم سه نتیجه‌ی شیر یا سه نتیجه خط به دست آید، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{27}{1024}$ ۴) $\frac{27}{256}$

۲۴ـ اگر تعداد غلط‌های چاپی کتابی از یک توزیع پواسون با پارامتر $\frac{1}{2}$ برخوردار باشد، احتمال این‌که دست کم یک غلط چاپی در یکی از صفحات این کتاب که به صورت تصادفی انتخاب شده است، وجود داشته باشد، چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) e^{-2} ۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ ۳) $1-e^{-\frac{1}{2}}$ ۴) $1-e^{-2}$

۲۵ـ احتمال این‌که در چهارمین پرتاب مستقل سه سکه‌ی سالم برای بار دوّم سه نتیجه شیر یا سه نتیجه خط به دست آید، چقدر است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{256}$ ۲) $\frac{9}{256}$ ۳) $\frac{27}{256}$ ۴) $\frac{81}{256}$

۲۶ـ اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 1$ باشد. $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ با کدام گزینه برابر است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $1-e^{-1}$ ۳) $e-1$ ۴) e^2+1

۲۷ـ اگر احتمال پاسخگویی صحیح به هر مسأله از یک امتحان ثابت و مساوی با p باشد و تنها کسی در امتحان موفق شود که دست کم، نیمی از مسائل را به درستی حل کند، به این سؤال پاسخ دهید که کمترین مقدار p باید چقدر باشد تا احتمال موفقیت در یک امتحان دارای ۴ مسأله، کمتر از احتمال موفقیت در یک امتحان دارای ۲ مسأله نباشد؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $p = 0$ ۲) $p \geq \frac{2}{3}$ ۳) $p = 1$ ۴) $p = \frac{2}{3}$

۲۸ـ اگر x یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $0 < \lambda < 1,\lambda$ باشد $E(X!)$ برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) λ ۲) $1-\lambda$ ۳) $\frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$ ۴) $e^{-\lambda}$

۲۹ـ اگر n تعداد دفعات پرتاب یک تاس باشد تا اولین ۶ ظاهر شود و p احتمال وقوع آن، آنگاه n چقدر باشد تا معادله‌ی $216px^2+50x+216p=0$ جواب مضاعف داشته باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۲

۳۰ـ اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر θ باشد، $E(X(X+1))$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\theta+\theta^2$ ۲) $\theta+2\theta^2$ ۳) $2\theta+\theta^2$ ۴) $2\theta+2\theta^2$

۳۱ـ فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. واریانس متغیر تصادفی $U=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$ چیست؟ $(q=1-p)$ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $3p^2(1-p^2)$ ۲) $3p^2(1-p^2)$ ۳) $3p^2q(1+3p)$ ۴) $3p^2q(1-3p)$

۳۲ـ سابقه یک کارگاه تراش نشان می‌دهد که هر یک از ماشین‌های خریداری شده جدید در سال، با احتمال ۰/۲۰ نیاز به تعمیر دارد. احتمال اینکه پنجمین ماشین جدید خریده شده اولین ماشینی باشد که در سال نیاز به تعمیر دارد چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰/۰۸۲ ۲) ۰/۳۲۸ ۳) ۰/۴۱ ۴) ۰/۵۰

۳۳ـ فرض کنید زمین‌لرزه در هر یک از شهرهای رودبار و بوئین زهرا بر اساس یک فرآیند پواسون با میانگین نرخ وقوع دو زمین‌لرزه در سال رخ می‌دهد. اگر آخرین زمین‌لرزه در رودبار و بوئین زهرا به ترتیب در ۱۰ ماه و ۲ ماه پیش رخ داده باشد، احتمال این‌که زمین‌لرزهٔ بعدی در رودبار بعد از زمین‌لرزه‌ی بعدی در بوئین زهرا رخ دهد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۴ـ انباشته‌ای شامل ۴ قطعه سالم و ۳ قطعه‌ی معیوب را در نظر بگیرید. اگر از این انباشته یک نمونه‌ی تصادفی ۳ تایی بدون جایگذاری انتخاب شود، تعداد مورد انتظار قطعات سالم در نمونه چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{9}{6}$ ۳) $\frac{12}{16}$ ۴) $\frac{12}{7}$

۳۵ـ پیچ‌های تولید شده در یک کارخانه با احتمال ۰/۰۱ خراب است. این شرکت پیچ‌ها را در بسته‌های ۱۰ تایی می‌فروشد و تضمین می‌کند که حداکثر یک پیچ در هر یک از این بسته‌ها معیوب است و در غیر این صورت بسته‌های حاوی بیش از یک پیچ خراب را جایگزین می‌کند. در این صورت چند درصد از بسته‌ها جایگزین خواهد شد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱% ۲) ۰/۴% ۳) ۰/۶% ۴) ۰/۷%

۳۶ـ فرض کنید $X\sim P(1)$, $Y\sim P(2)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، گزینه صحیح برای $P(\frac{X+Y}{2}\geq 1)$ کدام است؟ ($X: X\sim P(\lambda)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است.) (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) e^{-3} ۲) $2e^{-3}$ ۳) $1-e^{-3}$ ۴) $1-2e^{-3}$

۳۷ـ در یک مسابقه‌ی شطرنج، سیروس و سعید آنقدر با هم بازی می‌کنند تا یکی از آن‌ها ۵ بازی را از دیگری ببرد. اگر بازی‌ها مستقل از هم انجام شوند و احتمال برنده شدن سیروس در یک بازی برابر ۰/۵۸ باشد و بازیکن‌ها نتیجه مساوی نداشته باشند، احتمال این‌که مسابقه در ۷ بازی به پایان برسد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۲۴

۳۸ـ فرض کنید $X\sim P(1)$ و $Y\sim P(2)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن نماد $P(\lambda)$ نمایانگر توزیع پواسون با پارامتر λ است. گزینه صحیح برای $P\left(X=1|\frac{X+Y}{2}=2\right)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{2^3}{3^4}$ ۲) $2(\frac{2}{3})^4$ ۳) $\frac{2^3}{3^4}e^{-3}$ ۴) $2(\frac{2}{3})^4e^{-3}$

۳۹ـ فرض کنید $X \sim B(n,\frac{1}{2})$ و $Y \sim B(n,\frac{1}{2})$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن B معرّف یک توزیع دو جمله‌ای است $P(X=Y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\binom{2n}{k}2^{-2k}$ ۲) $\binom{n}{k}2^{-n}$ ۳) $\binom{2n}{n}2^{-2n}$ ۴) $\sum_{k=0}\binom{n}{k}\binom{n}{k}2^{-n}$

۴۰ـ بیست درصد از پمپ‌های دست دوم یک انبار بزرگ نیازمند تعمیر و بقیه سالمند. تعمیرکاری با سه دست لوازم یدکی که هر یک از آن‌ها فقط برای تعمیر یک پمپ به کار می‌آید به این انبار می‌رود. او پمپ‌ها را یک به یک و به صورت تصادفی انتخاب و سپس آن‌ها را آزمایش می‌کند. اگر پمپ انتخاب شده سالم باشد وی پمپ دیگری انتخاب می‌کند و در صورت معیوب بودن از لوازم یدکی برای تعمیر آن استفاده می‌کند. اگر برای آزمایش یک پمپ سالم ۱۰ دقیقه زمان لازم باشد و برای آزمایش و تعمیر یک پمپ معیوب به ۳۰ دقیقه زمان نیاز باشد، میانگین و واریانس کل زمان لازم برای استفاده از هر سه دست لوازم یدکی به ترتیب (از راست به چپ) چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) ۶۰۰۰ , ۲۱۰ ۲) ۶۰۶۰ , ۱۵۰ ۳) ۶۰۶۰ , ۲۱۰ ۴) ۶۰۰۰ , ۱۵۰

۴۱ـ در منطقه‌ای خاص زلزله براساس یک فرایند پواسون و با میانگین نرخ یک زلزله در سال رخ می‌دهد. اگر بدانید که در سه سال اول در این منطقه سه زلزله رخ داده است احتمال این‌که در هر یک از سه سال دقیقاً یک زلزله رخ داده باشد، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{e^{-3}}{3}$ ۴) $\frac{2e^{-3}}{9}$

۴۲ـ اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با میانگین ۶ و واریانس ۳/۶ باشد، آنگاه $P(X=0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $(0/4)^{15}$ ۲) $(0/4)^{16}$ ۳) $(0/6)^{15}$ ۴) $(0/6)^{16}$

۴۳ـ اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر دو دارای توزیع هندسی با پارامتر $0<p<1$ باشند، آنگاه مقدار $P(X=Y)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{1-p}$ ۲) $\frac{1}{2-p}$ ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $\frac{p}{2-p}$

۴۴ـ فرض کنید $X_1,\cdots X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هر کدام دارای توزیع برنولی با پارامترهای $0<p<1, p$ است. مقدار $P(Max\{X_1,\cdots,X_n\}=1)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $1-(1-p)^n$ ۲) $1-p^n$ ۳) $(1-p)^n$ ۴) p^n

۴۵ـ اگر X_1, X_2 متغیرهای تصادفی نرمال مستقل و دارای میانگین و واریانس یکسان μ و σ^2 باشند در این صورت متغیر تصادفی $Y=X_1-X_2$ دارای: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری۸۲)

۱) توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 می‌باشد.
۲) توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $2\sigma^2$ می‌باشد.
۳) توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس صفر می‌باشد.
۴) توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $2\sigma^2$ می‌باشد.

۴۶ـ فاصله زمانی بین ورودهای متوالی مشتریان به فروشگاهی (به دقیقه) متغیر تصادفی X با چگالی احتمالی $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ ;\ x>0$ است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر توزیع احتمال تعداد مشتریان وارده به فروشگاه در مدت یک ساعت را نشان می‌دهد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری۸۲)

۱) پواسون با پارامتر ۳۰ ۲) نمایی با پارامتر ۲ ۳) پواسون با پارامتر ۲ ۴) نمایی با پارامتر ۳۰

۴۷ـ متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $-\infty<x<\infty$ $f(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ باشد. توزیع $Y=\frac{1}{1+e^{-x}}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۲)

۱) توزیع t با ۲ درجه آزادی ۲) نمایی با پارامتر ۲ ۳) توزیع بتا با پارامترهای ۲ و ۲ ۴) توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,1)$

۴۸ـ اگر X و Y دارای توزیع مربع کای با درجات آزادی m و n و X و Y مستقل باشند در این صورت متغیر تصادفی $Z=Y-X$: (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۲)

۱) یک متغیر تصادفی مربع کای است اگر $n>m$ باشد.
۲) در هر صورت یک متغیر تصادفی مربع کای است.
۳) در حد، یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.
۴) یک متغیر تصادفی $t-$ استودنت با درجه آزادی $n-m$ است.

۴۹ـ اگر $X \sim N(0,8)$ آنگاه مقدار $E(X^2 + e^{2X})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $8 + e^4$ ۲) $8 + e^{16}$ ۳) $16 + e^4$ ۴) $16 + e^{16}$

۵۰ـ متغیر تصادفی X بر بازه‌ی (۲ و ۱-) به طور یکنواخت توزیع شده است و متغیر تصادفی Y دارای توزیع نمایی با میانگین λ است. به ازای کدام مقدار $V(Y) = V(X)$ می‌باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$(چنانچه از $V(X) = \frac{b^2 - a^2}{12}$ استفاده شود.) ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{4}{3}$ (چنانچه از $V(Y) = \frac{1}{\lambda}$ استفاده شود.) ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ چنانچه از $V(Y) = \frac{1}{\lambda}$ استفاده شود.

۵۱ـ X متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \ , \ \lambda > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ است که در آن λ نیز یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P(\lambda = 1) = \frac{3}{4}$ ، $P(\lambda = 2) = \frac{1}{4}$ می‌باشد. احتمال پیشامد $\{X \geq 1\}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}(3e^{-1} + e^{-2})$ ۲) $\frac{1}{4}(e^{-1} + 3e^{-2})$ ۳) $\frac{1}{8}(e^{-1} + e^{-2})$ ۴) $\frac{1}{8}(e^{-1} + 3e^{-2})$

۵۲ـ اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل بوده و $X \sim N(1,2)$ و $Y \sim N(2,4)$ آنگاه مقدار $V(XY + 2)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۵۳ـ در یک ایستگاه تاکسی مدت زمان بین ورودی‌های متوالی تاکسی‌ها یک توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه دارد. اگر فردی تا به حال یک ساعت در انتظار رسیدن یک تاکسی بوده، احتمال این‌که در ۱۰ دقیقه آینده یک تاکسی برسد چیست؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) e^{-1} ۲) e^{-7} ۳) $1 - e^{-7}$ ۴) $1 - e^{-1}$

۵۴ـ اگر $X \sim N(1,1)$ باشد، $P(X \geq 2 \mid X \geq 1)$ برابر کدام گزینه است؟($\phi(z)$، معرف تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.)
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $2\phi(1)$ ۲) $2\phi(1) - 1$ ۳) $2 - 2\phi(1)$ ۴) $2\phi(1) - 0/5$

۵۵ـ مقدار مورد انتظار مساحت مستطیلی به ابعاد $|X|$ و $2|X|$ که در آن X از یک توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف استاندارد σ برخوردار است، چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $2\mu^2$ ۲) $2\sigma^2$ ۳) $\mu^2 + \sigma^2$ ۴) $2(\mu^2 + \sigma^2)$

۵۶ـ اگر $X \sim N(40, \sigma^2)$ و $P(20 \leq X \leq 60) = 0/9$ مقدار تقریبی σ کدام است؟ (راهنمایی: $Z_{0/05} = 1/645$)
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۰/۲۰ ۲) ۱۰/۲۶ ۳) ۱۲/۱۶ ۴) ۱۲/۲۰

۵۷ـ فرض کنید $\bar{X}_n$ میانگین یک نمونه تصادفی از توزیع $N(5,16)$ باشد برای $n > 30$ متغیر تصادفی $\bar{X}_n$ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) دقیقاً نرمال است. ۲) تقریباً نرمال است.

۳) دارای توزیع نامتقارن است. ۴) دارای توزیع متقارن غیر نرمال است.

۵۸ـ اگر متغیرهای تصادفی X_1, X_2, X_3 مستقل بوده و به ترتیب دارای توزیع $N(2,9)$ ، $N(2,3)$ ، $N(3,4)$ باشند آنگاه مقدار $P(X_1 + 3X_2 > 10 - 4X_3)$ کدام است؟ (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.) (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\Phi(-1)$ ۲) $\Phi(0)$ ۳) $\Phi(1)$ ۴) $\Phi(2)$

۵۹ـ اگر X تعداد ذرات منتشر شده توسط یک عنصر رادیواکتیو در فواصل ۵ ثانیه باشد، آنگاه X توزیع پواسون دارد که در رابطه $P(X = 0) = P(X = 1)$ صدق می‌کند. احتمال این‌که در یک فاصله ۵ ثانیه حداقل ۲ ذره از این عنصر منتشر شود کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) e^{-2} ۲) $2e^{-1}$ ۳) $1 - e^{-2}$ ۴) $1 - 2e^{-1}$

۶۰ـ به طور متوسط یک درصد از بسته‌های نیم کیلوگرمی چای حاوی مقدار اندکی کمتر از نیم کیلوگرم چای می‌باشد. اگر وزن بسته‌ها مستقل از هم باشند احتمال این‌که چهارمین بسته‌ای که به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم اولین بسته با وزن کمتر از نیم کیلوگرم باشد برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $0/25$
۲) $(0/99)^3(0/01)$
۳) $\binom{4}{1}(0/99)^3(0/01)$
۴) $\binom{4}{1}(0/01)^3(0/99)$

۶۱ـ هر یک از متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع هندسی (مدل تعداد آزمایش‌ها) با پارامتر p و مستقل هستند. $P(X=Y)$ چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{1-p}$
۲) $\frac{1}{2-p}$
۳) $\frac{p}{1-p}$
۴) $\frac{p}{2-p}$

۶۲ـ برای یک سیستم رادار که در هر بار پویش تصویری قادر است با احتمال $0/1$ هدف خاصی را شناسایی کند، با چه احتمالی دست کم در دوبار از ۴ پویش تصویری، هدف شناسایی می‌شود؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $0/0313$
۲) $0/0523$
۳) $0/0631$
۴) $0/0752$

۶۳ـ نمونه تصادفی $N+1$ تایی مانند: $X_0, X_1, X_2, \dots, X_N$ از جمعیتی با میانگین μ و واریانس σ^2 که در آن N یک متغیر پواسون با پارامتر $\underline{\underline{1}}$ باشد، $Var(\sum_{i=0}^{N} X_i)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\mu^2+2\sigma^2$
۲) $2\mu^2+\sigma^2$
۳) $\mu^2+\sigma^2$
۴) $2(\mu^2+\sigma^2)$

۶۴ـ خطوط هوایی متفاوتی بین دو نقطه A,B پروازهای با تخفیف ویژه دارند. به علت تراکم ترافیک هوایی در فرودگاه‌های این دو نقطه پروازهای با تخفیف ویژه با حداکثر دو ساعت تأخیر انجام می‌گیرد. سوابق گذشته نشان می‌دهد که ۲۵ درصد این پروازها با تأخیر بیش از ۳۰ دقیقه انجام می‌گیرد. فرض کنید ۶ مسافر در ۶ پرواز مختلف در مسیر B,A (در پروازهای مستقل) در نظر گرفته شوند. مطلوب است احتمال این‌که ۲ مسافر با تأخیر حداکثر ۳۰ دقیقه از زمان پیش بینی شده از A به B پرواز کنند.

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $5(\frac{3}{6})^6$
۲) $(\frac{5}{3})(\frac{3}{4})^6$
۳) $(\frac{5}{9})(\frac{3}{4})^6$
۴) $(\frac{5}{4})(\frac{3}{4})^6$

۶۵ـ یک مرکز تلفن در یک مؤسسه می‌تواند حداکثر ۵ تلفن در دقیقه را هدایت نماید. اگر براساس تجربه گذشته معلوم شده باشد که به طور متوسط ۱۲۰ تلفن در ساعت به این مرکز می‌شود، مطلوب است احتمال آن که ظرفیت این مرکز تلفن در یک دقیقه مشخص تکمیل باشد.

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{e^{-2}2^5}{5!}$
۲) $\frac{e^{-5}5^5}{5!}$
۳) $\frac{e^{-10}120^5}{5!}$
۴) $\frac{e^{-5}5^{120}}{120!}$

۶۶ـ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای p,n و توزیع شرطی Y به شرط $X=x$، برنولی با پارامتر $\frac{x}{n}$، $x=0,1,\dots,n$ باشد، مقدار $P(X-Y=0)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $(1-p)^{n-1}$
۲) $(n-2)p(1-p)^{n-1}$
۳) $(n-1)p(1-p)^{n-1}$
۴) $[1+(n-2)p](1-p)^{n-1}$

۶۷ـ یک سیستم از ۸ مؤلفه تشکیل شده است که هر یک مستقلاً و با احتمال $\frac{3}{4}$ درست کار می‌کنند. کل سیستم وقتی فعال است که حداقل نصف مؤلفه‌ها درست کار کنند. اگر سیستمی دارای احتمال بیشتری برای کار کردن باشد می‌گوییم آن سیستم بهتر است. کدام عبارت صحیح است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) هر دو سیستم دو مؤلفه‌ای و سه مؤلفه‌ای مثل هم‌اند.
۲) سیستم سه مؤلفه‌ای بهتر است.
۳) سیستم دو مؤلفه‌ای بهتر است.
۴) سیستم با مؤلفه‌ای فرد بهتر است.

۶۸ـ اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از هم دارای توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای ۲ و ۱ باشند، احتمال این‌که مجموع این دو متغیر از یک بزرگتر باشد برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $1-e^{-1}$ ۲) $1-4e^{-1}$ ۳) $1-e^{-3}$ ۴) $1-4e^{-3}$

۶۹ـ X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با احتمال پیروزی $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ می‌باشند. احتمال این‌که رابطه‌ی خطی $Y=X+1$ برقرار باشد برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۰ـ در یک نمونه‌ی تصادفی ۵۰ تایی از تعداد بسیار قطعات تولیدی یک شرکت که درصد ضایعات آن ۲% است، بـه طـور متوسـط چنـد قطعـه‌ی خراب یافت می‌شود؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۷۱ـ اگر X دارای توزیع یکنواخت روی مجموع $\{1,2,\dots,n\}$ با تابع احتمال زیر باشد: $f(x)=\frac{1}{n}, x=1,2,\dots,n$

$E(X)$ کدام است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $n+1$ ۲) $\frac{n+1}{2}$ ۳) $\frac{n+1}{n}$ ۴) $\frac{(n-1)^2}{12}$

۷۲ـ فرض کنید X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و θ به شکل روبرو باشد: $f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

$x=0,1,2,\dots,n$

مقدار $E(X^2-X)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $n^2\theta^2$ ۲) $n(n-1)\theta^2$ ۳) $(n-1)^2\theta^2$ ۴) $n(n+1)\theta^2$

۷۳ـ در یک دادگاه روزانه به طور متوسط ۵ شکایت بررسی می‌شود. با فرض بر این‌که شکایات مطرح شـده بـر اسـاس یـک فرآینـد پواسـون رخ می‌دهند، این دادگاه در چند درصد از روزها با تعدادی کمتراز ۳ شکایت روبروست؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{118}{3}e^{-5}$ ۲) $\frac{37}{2}e^{-5}$ ۳) $1-\frac{37}{2}e^{-5}$ ۴) $1-\frac{118}{3}e^{-5}$

۷۴ـ در یک نمونه‌ی تصادفی ۳ تایی از جمعیتی با توزیع احتمال $f(x)=3x^2;\ 0<x<1$ احتمال این‌که دست کم دو تای آن‌ها مقـداری بزرگتـر از $\frac{1}{2}$ داشته باشند، چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{22}{512}$ ۲) $\frac{38}{516}$ ۳) $\frac{478}{516}$ ۴) $\frac{490}{512}$

۷۵ـ فرض کنید $X\sim B(n,p)$ و $Y\sim B(n,q)$ متغیر تصادفی مستقل از هم باشند به طوری که $p+q=1$. مقدار $P(X=Y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\binom{2n}{n}p^n$ ۲) $\binom{2n}{n}q^n$ ۳) $\binom{2n}{n}p^nq^n$ ۴) $\binom{2n}{n}\binom{p}{q}$

۷۶ـ یک آزمایش برنولی با پارامتر n,p مرتبه مستقلاً تکرار می‌شود. اگر X و Y به ترتیب نمایانگر تعداد موفقیت‌ها و تعـداد شکسـت‌هـا باشـد، ضریب همبستگی بین X و Y کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۷۷ـ فرض کنید X دارای توزیع پواسون بوده و $P(X \geq 1)$ برابر $\frac{1}{2}$ است. مقدار $E(X)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $1-e^{2}$ ۲) e^{2} ۳) $Ln2$ ۴) ۲

۷۸ـ X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است. برای nهای بزرگ $P(X > np)$ تقریباً برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) p^{2} ۲) p ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۹ـ فرض کنید در یک فرآیند پواسون با پارامتر λ، Z زمان لازم تا رخداد nاتفاق و X نمایانگر تعداد اتفاقات در z واحد زمان باشند. گزینه صحیح کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۴)

۱) $P(Z \leq z) = P(X < n)$ ۲) $P(Z > z) = P(X \geq n)$ ۳) $P(Z > z) = P(X < n)$ ۴) $P(Z \leq z) = P(X \geq n)$

۸۰ـ اگر $X_1,\dots,X_6$ یک نمونه تصادفی ۶ تایی از توزیع $N(0,1)$ باشد، مقدار $P[(X_1 - X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 - X_6)^2 > 6]$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۴)

۱) e^{-1} ۲) e^{-3} ۳) $1-e^{-1}$ ۴) $1-e^{-2}$

۸۱ـ فرض کنید $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با: $E(X_i)=\mu_1, E(Y_i)=\mu_2, V(X_i)=V(Y_i)=\sigma^2, cov(X_i,Y_i)=\rho\sigma^2$ و $U_1,\dots,U_n$ و $Z_1,Z_2,\dots,Z_n$ نمونه‌های تصادفی مستقل به ترتیب از توزیع‌های $N(\mu_1,\sigma^2)$ و $N(\mu_2,\sigma^2)$ باشند. مقدار $\frac{V(\bar{X}-\bar{Y})}{V(\bar{Z}-\bar{U})}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۴)

۱) $1+\rho$ ۲) $1-\rho$ ۳) $1-2\rho$ ۴) $1+2\rho$

۸۲ـ فرض کنید X_2 و X_1 یک نمونه تصادفی۲ تایی از توزیع $N(0,1)$ باشد ضریب همبستگی بین X_1+X_2 و $X_1^2+X_2^2$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۴)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱+

۸۳ـ اگر فاصله‌ی بین زمان‌های ورود اتومبیل‌ها به یک پمپ بنزین متغیر تصادفی نمایی X با پارامتر دو دقیقه باشد و بدانیم که زمان بنزین زدن برای هر اتومبیل متغیر تصادفی Y با توزیع یکنواخت بین صفر تا دو دقیقه است، در صورت استقلال X و Y میانگین زمان کل بنزین زدن اتومبیل‌ها در مدت یک ساعت چند دقیقه است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۸۴ـ اگر X دارای توزیع نمایی با واریانس ۱۶ باشد میانگین آن کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵ـ فرض کنید $X \sim N(2,4)$ در آن صورت مقدار $E(e^{2X})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری۸۵)

۱) e^{8} ۲) e^{10} ۳) e^{12} ۴) e^{14}

۸۶ـ یک سکه که احتمال شیر آمدن در هر پرتاب آن برابر p است به صورت مستقل آن قدر پرتاب می‌شود تا اولین نتیجه‌ی شیر به دست آید. اگر بدانید که میانگین تعداد پرتاب‌ها برابر ۱۰ است، احتمال این که به کمتر از ۳ پرتاب نیاز باشد، چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۱۹ ۲) ۰/۲۰ ۳) ۰/۲۹ ۴) ۰/۳۰

۸۷ـ از یک انباشته‌ی تولیدی شامل ۱۲ قطعه که ۸ قطعه از آن‌ها سالم است یک نمونه‌ی تصادفی ۴تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌شود. اگر بدانیم نمونه شامل ۳ قطعه‌ی سالم است، با چه احتمالی سومین قطعه‌ی خارج شده سالم بوده است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۸۸ـ قطعات تولیدی یک کارگاه در جعبه‌های ۲۵ تایی به خریدار ارسال می‌شود. خریدار یک نمونه‌ی تصادفی ۵ تایی بدون جایگذاری از جعبه‌ی ارسالی انتخاب می‌کند و جعبه را در صورتی می‌پذیرد که هیچ یک از قطعات نمونه خراب نباشد. اگر این خریدار بخواهد ۸۰ درصد از جعبه‌ها را بپذیرد هر جعبه باید شامل چند قطعه‌ی خراب باشد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۸۹ـ یک زیردریایی تصمیم دارد ناو هواپیمابری را غرق کند. اگر برای غرق کردن ناو باید دو اژدر به آن اصابت کند و احتمال اصابت هر اژدر برابر ۰/۲ باشد، به طور متوسط چند اژدر باید به ناو پرتاب شود تا به غرق شدن آن بیانجامد؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۰ـ فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای مستقل برنولی با احتمال موفقیت p و $A_k = [X_k = 0, X_{k-1} = 1]$ ، $K \geq 2$ باشد، Y_n تعداد دفعاتی است که A_k در n آزمایش مستقل برنولی رخ می‌دهد. امید ریاضی Y_n برابر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) np ۲) npq ۳) $(n-1)p$ ۴) $(n-1)pq$

۹۱ـ هر قطعه تولیدی یک دستگاه خودکار با احتمال ۰/۰۲ معیوب است. دستگاه پس از تولید ۲۵۰۰ قطعه تنظیم می‌شود. به طور متوسط تعداد اقلام سالمی که بین دو تنظیم تولید می‌شوند، چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۹۸

۹۲ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل هندسی مانند $q = 1-p \quad k = 0, 1, \cdots \quad P(X = k) = pq^k$ و $k = 0, 1, \cdots \quad P(Y = k) = r(1-r)^k$ باشند، در آن صورت توزیع $U = \min(X, Y)$ یک توزیع هندسی است با پارامتر؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) rq ۲) $1-rq$ ۳) $p+r-rp$ ۴) $q-r+rp$

۹۳ـ اعداد به تصادف از بازه $(0, 1)$ انتخاب می‌گردند. اگر ۱۰ عدد انتخاب شود، احتمال آنکه دقیقاً ۵ عدد کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) ۰/۲۴۶ ۲) ۰/۲۵۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰/۷۵

۹۴ـ اگر $x_1, x_2, \dots x_n$ طول عمر لامپ‌های روشنایی هم توزیع و مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع هندسی با پارامتر P باشند در آنصورت اگر فرض کنیم که یک لامپ تا موقعی که کار می‌کند مورد استفاده قرار گیرد و به محض سوختن، لامپ بعدی روشن شود الی آخر، متغیر تصادفی جدید $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ دارای کدام توزیع خواهد شد؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) توزیع سیستم با پارامتر p , n
۲) توزیع سیستم منفی با پارامتر n و p
۳) توزیع دو جمله‌ای با پارامتر np و q
۴) توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامتر np و q

۹۵ـ فرض کنید $X \sim B(4, 0/2)$ و $Y \sim B(6, 0/2)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. $E(X | X+Y = 5)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۶ـ فرض کنید X و Y دو عدد باشند که به ترتیب و مستقل از هم از مجموعه اعداد $\{1, 2, \cdots, N\}$ انتخاب شده‌اند. احتمال این‌که $X > Y$ چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{N-1}{2N^2}$ ۳) $\frac{N-1}{2N}$ ۴) $\frac{N^2-1}{2N^2}$

۹۷ـ فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y مستقل و هم توزیع بوده و از تابع احتمال $t = 1, 2, 3, \cdots$ $P(T = t) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^t$ پیروی می‌کنند، $P(X+Y = 10)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $1-(\frac{2}{3})^{10}$ ۲) $1-(\frac{2}{3})^9$ ۳) $(\frac{2}{3})^8$ ۴) $(\frac{2}{3})^9$

۹۸ـ اگر X یک عدد تصادفی از بازه $[0,1]$ باشد و $Y=[nX]$,$n \geq 1$ آنگاه $P(y=k)$ $k=0,1,\cdots,x$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $P[Y=k]=\begin{cases}\frac{1}{n} & , \quad k=0,1,2,\cdots,n-1\\ 0 & , \quad k=n\end{cases}$

۲) $P[Y=k]=\frac{1}{n} \quad , \quad k=0,1,2,\cdots n$

۳) $P[Y=k]=\frac{1}{n} \quad , \quad k=0,1,2,\cdots n$

۴) $p[Y=k]=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & , \quad k=0,1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

۹۹ـ شخصی به تجربه دریافته است که ۷۰% بسته‌هایی که پست می‌کند به مقصد نمی‌رسد، او دو کتاب هر یک به قیمت ۲۰ دلار خریده و می‌خواهد آن‌ها را برای برادرش پست کند. اگر آن‌ها را در یک بسته بفرستد، هزینه پست آن ۵/۲ دلار می‌شود. اگر آن‌ها را در بسته‌های جداگانه پست کند، هزینه هر کتاب ۳/۳ دلار می‌شود. امید ریاضی هزینه (هزینه مفقود شدن کتاب‌ها و هزینه پست) در حالت‌های پست یک بسته و پست دو بسته به ترتیب چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) ۹/۹۶,۸/۲۶ ۲) ۵/۹۳,۸/۴۶ ۳) ۹/۴,۸ ۴) ۹/۹۶,۸

۱۰۰ـ فرض کنید $Z_1,...,Z_{15}$ یک نمونه تصادفی ۱۵ تایی از توزیع $N(0,1)$ باشد، اگر $S_j=\sum_{i=1}^{j} Z_i$، مقدار $cov(S_7,S_{12})$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری۸۶)

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۹

۱۰۱ـ یک عدد تصادفی از بازه‌ی $(0,1)$ انتخاب شده است. در بسط اعشاری این عدد به طور متوسط چند رقم قبل از دهمین ۳ وجود دارد؟

(ریاضی ـ سراسری۸۶)

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۱

۱۰۲ـ اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$ باشد آنگاه واریانس X برابر است با: (ریاضی ـ سراسری۸۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳ـ تعداد مکالمات تلفنی انجام شده از طریق یک مرکز، از توزیع پواسون با $\lambda=20$ مکالمه در ساعت پیروی می‌کند. احتمال تقریبی این‌که مدت زمان انجام ۴۰۰ مکالمه حداقل ۲۱ ساعت باشد برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۱۵۸۷ ۲) ۰/۱۶۵۲ ۳) ۰/۱۸۳۲ ۴) ۰/۲۵۱۳

۱۰۴ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(1,1)$ باشند. مقدار $P(XY-X-Y+1>0)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۵ـ فرض کنید $X \sim N(0,1)$ و $Y \sim B(1,p)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $V=\begin{cases}X & ; \quad Y=1\\ -X & ; \quad Y=0\end{cases}$، مقدار $cov(X,V)$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری۸۷)

۱) $2p$ ۲) $2q$ ۳) $2q-1$ ۴) $2p-1$

۱۰۶ـ اگر X_1,X_2,X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با نرخ وقوع $\lambda=2$ در هر ساعت باشد، مقدار $P\left(\overline{X}<\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $6e^{-2}$ ۲) e^{-6} ۳) $6e^{-6}$ ۴) $7e^{-6}$

۱۰۷ـ در ظرفی ۳ مهره‌ی سیاه و ۶ مهره‌ی سفید قرار دارد. ۵ مهره از این ظرف با جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این‌که تعداد مهره‌های سیاه مشاهده شده، عددی فرد باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{82}{243}$ ۲) $\frac{119}{243}$ ۳) $\frac{121}{243}$ ۴) $\frac{163}{243}$

۱۰۸ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان از تابع احتمال $x=1,2,\cdots$, $f_p(x)=p(1-p)^{x-1}$ باشند، توزیع $Z=X+Y$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) فوق هندسی ۲) هندسی پارامتر $1-2p$ ۳) هندسی با پارامتر $2p$ ۴) دو جمله‌ای منفی با پارامترهای ۲ و p

۱۰۹ـ شخص بازنشسته‌ای هر روز به تصادف یکی از ۶ پارک موجود در شهر را انتخاب کرده و برای گردش به آنجا می‌رود. اگر بدانیم که او در ۱۰ روز گذشته به پارک A مراجعه کرده است، احتمال این که در این مدت حداقل دو بار یا بیشتر به پارک A رفته باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) ۰/۶۱۵ ۲) ۰/۵۱۵ ۳) ۰/۸۳۸ ۴) ۰/۳۸۵

۱۱۰ـ آزمایش‌های مستقل برنولی با پارامتر $p(0\le p\le 1)$، n بار انجام می‌شود. اگر بدانید k موفقیت به دست آمده است. احتمال این‌که نتیجه آزمایش i ام $(1\le i\le n)$ موفقیت بوده باشد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{k}{n}$ ۲) $\frac{k}{p^n}$

۳) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ۴) اطلاعات داده شده برای حل مسئله ناکافی است.

۱۱۱ـ فرض کنید $X\sim Bin(4,\frac{1}{3})$ و $Y\sim Bin(9,\frac{2}{3})$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $T=X+9-Y$ باشد، توزیع T کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $Ge(\frac{1}{3})$ ۲) $B(13,\frac{1}{3})$ ۳) $B(13,\frac{2}{3})$ ۴) توزیع استاندارد معلومی ندارد.

۱۱۲ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد به قسمی که $E(X^n)=\frac{n!}{a^n}, n\ge 1$, $a>0$ در صورت وجود تابع مولد گشتاور X، توزیع X کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) Possion (a) ۲) $Possion(\frac{1}{a})$ ۳) $Exp(\frac{1}{a})$ ۴) Exp (a)

۱۱۳ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با تابع احتمال مشترک $f(k)=pq^k$, $k=0,1,2,\cdots$ باشند $(q=1-p)$، برای هر $n\ge 0$ توزیع $X|X+Y=n$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $B(n,p)$ ۲) $B(n+1,p)$ ۳) $U\{0,1,2,\cdots,n\}$ ۴) $U\{1,2,\cdots,n\}$

۱۱۴ـ اگر تابع احتمال متغیر تصادفی Z را به صورت $P(z=i)=\frac{1}{k};i=1,3,5,...,2k-1$ تعریف کنیم. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی Z کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{k^2-1}{3},\frac{2k-1}{2}$ ۲) $\frac{k^2-1}{3},k$ ۳) $\frac{(2k-1)^2-1}{12},k$ ۴) $\frac{(2k-1)^2}{12},\frac{2k-1}{2}$

۱۱۵ـ یک سکه سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا دو نتیجه شیر حاصل گردد. احتمال این‌که تعداد پرتاب‌های لازم عددی زوج باشد چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۶ـ زوج جوانی تصمیم دارند بچه‌دار شوند و مصمم هستند که از هر جنس حداقل یک بچه داشته باشند. اگر پیشامدهای پسر یا دختر بودن نوزادان مستقل و هم شانس باشند، در این‌صورت انتظار می‌رود که تعداد فرزندان این زوج چقدر باشد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۱۷ـ اگر $P(X=x)=\frac{1}{x}P(X=x-1)$ برای $x=1,2,3,...$ باشد، آنگاه امید ریاضی X چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸ـ فرض کنید که X و Y دو متغیر تصادفی باشند به طوری که $Y-X$ و X مستقل‌اند، X دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha=1$ و $\beta=2$ و Y-X دارای توزیع خی دو با ۴ درجه آزادی است. واریانس X + Y کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری۸۸)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۱۹ـ اگر x_1 و x_2 دو متغیر تصادفی مستقل با واریانس‌های σ^2 باشند و داشته باشیم، $z = x_1 + bx_2 , y = x_1 + 2x_2$ برای این‌که متغیرهای y در Z غیرهمبسته باشند، مقدار b چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری۸۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۰ـ میانگین و انحراف معیار دو نمونه از دو جامعه آماری مستقل به صورت زیر است، اگر توزیع این دو جامعه آماری از نرمال پیروی کند، مقدار نمونه اولی متناسب با مقدار نمره‌ی ۹۵۰ در نمونه‌ی دومی چه مقدار می‌باشد؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری۸۹)

	میانگین	انحراف معیار
آزمون ۱	۲۱/۳	۵/۲
آزمون ۲	۸۳۰	۱۲۴

۱) ۲۴/۱۴
۲) ۲۵/۱۵
۳) ۲۶/۳۳
۴) ۲۵/۷۲

۱۲۱ـ مصرف روزانه آب یک شهر (به میلیون لیتر) تقریباً دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\beta = \frac{1}{3}$ است. اگر گنجایش منبع‌های آب ۹ میلیون لیتر باشد، احتمال این که در یک روز شهر دچار کمبود آب شود چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) e^{-3} ۲) $2e^{-3}$ ۳) $4e^{-3}$ ۴) $2e^{-\frac{1}{3}}$

۱۲۲ـ فرض کنید که در هر ساعت به طور متوسط ۳۰ اتومبیل وارد یک پارکینگ می‌شوند. احتمال این‌که متصدی پارکینگ حداقل ۵ دقیقه منتظر بماند تا دومین اتومبیل وارد پارکینگ شود چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{5}{2}e^{-\frac{7}{2}}$ ۲) $\frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}}$ ۳) $\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$ ۴) $\frac{1}{4}e^{-\frac{7}{2}}$

۱۲۳ـ جعبه‌ای دارای ۵۰ مهره است که ۱۰ مهره آن معیوب است. اگر کارگری ۵ مهره را با هم در این جعبه به صورت تصادفی انتخاب کند. احتمال این‌که بیش از ۲ مهره از این مهره‌ها معیوب باشد تقریباً چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۹۰ ۴) ۰/۹۵

۱۲۴ـ ۳ درصد تولیدات شرکتی معیوب می‌باشند. اگر به طور تصادفی ۳۰ بسته بدون آزمون برای خریدار ارسال گردد، و اگر خریدار ۵ بسته از این ۳۰ بسته را مورد بازرسی قرار دهد، احتمال این‌که هیچ‌یک از این بسته خراب نباشد چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۸۴۷ ۲) ۰/۸۵۹ ۳) ۰/۸۳۸ ۴) ۰/۸۳۳

۱۲۵ـ از ۱۰۰۰ واحد تولیدی شرکتی ۱۰ واحد معیوب می‌باشد، احتمال این‌که فقط و فقط یک معیوب در یک نمونه ۱۰۰ تایی باشد چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۰۱ ۳) $0/99^{99}$ ۴) $99 \times 0/01^{99}$

۱۲۶ـ اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر یکسان P باشند و $y_1 = Min\{X_1, ..., X_n\}$ ، $Y_n = Max\{X_1, ..., X_n\}$ باشند، مقدار عبارت $E(Y_1.Y_n)$ از کدام گزینه زیر به دست می‌آید؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) $1-(1-P)^n$ ۲) $P^n(1-P)^n$ ۳) P^n ۴) $P^n(1-(1-P)^n)$

۱۲۷ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته، $f(x) = \frac{1}{n} \ , \ x = 0, 1, 2, ..., n-1$ است. تابع مولد گشتاور X کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1-e^{nt}}{n(1-e^t)}$ ۲) $\frac{1-e^{nt}}{1-e^t}$ ۳) $\frac{1}{n(1-e^t)}$ ۴) $\frac{1-e^t}{n(1-e^{nt})}$

۱۲۸ـ هر یک از ۱۰۰ دانشجویان یک رشته تحصیلی در ترم جاری درس اختیاری خاصی را با احتمال ۰/۳ اخذ می‌نمایند. استاد این درس دانشجویان را بعد از ثبت‌نام به گروه‌های دو نفری جهت انجام پروژه درسی تقسیم‌بندی می‌کند. لذا اگر تعداد دانشجویان ثبت‌نامی در این درس عددی زوج باشد، استاد درس در تقسیم‌بندی دانشجویان به مشکلی بر نخواهد خورد. احتمال زوج بودن تعداد دانشجویان را حساب کنید. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2} + \frac{(0/4)^{100}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0/7)^{100}$ ۳) $\frac{1}{2} + \frac{(0/2)^{100}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}(0/7)^{100}$

۱۲۹ـ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر P باشد. امید ریاضی آماره $\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}$ کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{p(1-p^2)}{(n-1)}$ ۲) $\frac{1}{n^2}[p(1-p)(n-1)]$ ۳) $(1-p)^2(n-1)$ ۴) $\frac{p(1-p)}{n}$

۱۳۰ـ اگر X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p باشد. مقدار $\sum_{i=1}^{n} E(X^i)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(1+p)^n$ ۲) np ۳) $\sum_{i=1}^{n} p^i$ ۴) $\sum_{i=1}^{n} P^i(1-p)^{n-i}$

۱۳۱ـ فرض کنید X نمایانگر تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال Y تا حصول اولین موفقیت باشد متغیر تصادفی Y دارای توزیع یکنواخت روی بازه $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ باشد، مقدار $Cov(X, Y)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $1-\frac{2}{3}\ln 2$ ۲) $1-\frac{3}{2}\ln 2$ ۳) $\frac{2}{3}\ln 2$ ۴) $\frac{3}{2}\ln 2$

۱۳۲ـ کارخانه‌ای در یک روز در سه شیفت متوالی کابل برق تولید می‌کند. در پایان هر شیفت ۴ متر از تولیدات به‌صورت تصادفی انتخاب شده و بازرسی می‌شود. اگر هیچ نقصی مشاهده نشود تولیدات آن شیفت مورد تأیید قرار می‌گیرد. اگر نقص‌ها به طور کاملاً تصادفی اتفاق بیفتند و به طور متوسط در هر متر کابل $\frac{1}{4}$ نقص وجود داشته باشد چقدر احتمال دارد تا در یک روز فقط تولیدات یک شیفت تأیید نشود؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) $2e^{-2}$ ۲) $3e^{-1}(1-e^{-1})^2$ ۳) $3e^{-2}-3e^{2}$ ۴) $3e^{-2}-3e^{-3}$

۱۳۳ـ مشتری فروشگاهی سفارشی که شامل ۵ محصول می‌باشد را درخواست نموده است. اگر کیفیت هر یک از محصولات ۰/۹۹ و مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه احتمال دریافت یک سفارش مورد تأیید چقدر است؟ اگر مشتری هر ماه این سفارش را درخواست نماید چقدر احتمال دارد سفارشات یک سال مورد تأیید مشتری باشد؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $0/99^5$ و $((0/99)^{12})^5$ ۲) $\binom{5}{5} 0/99$ و $\binom{12}{12} 0/99^5$ ۳) $5\times 0/99$ و $12\times 0/99$ ۴) $51\times 0/99^5$ و $(12!)(0/99)^{60}$

۱۳۴ـ جعبه‌ای شامل ۵۲ محصول تولیدی است. تولیدکننده می‌داند که چهار قطعه تولیدی معیوب می‌باشند. خریدار برای تصمیم‌گیری در خصوص محصولات، نمونه‌های انفرادی را بازرسی می‌کند تا این که اولین محصول معیوب را مشاهده نماید سپس در خصوص پذیرش محصول تصمیم می‌گیرد. به طور متوسط خریدار می‌بایست چند قطعه را قبل از اتخاذ تصمیم خود بازرسی نماید؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۰/۶ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۳

۱۳۵ـ نسبت تولیدات معیوب در فرآیندی تولیدی، P می‌باشد. هر روز نمونه‌ای n تایی توسط بازرسی کنترل کیفیت انتخاب شده و مورد بازرسی قرار می‌گیرد. به‌صورت تقریبی حداقل تعداد نمونه مورد نیاز در بازرسی روزانه را طوری تعیین کنید که با احتمال بیش از ۰/۹۵ حداقل یک محصول معیوب در آن مشاهده گردد. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $n \geq \frac{-\ln 0/05}{P}$ ۲) $n \geq \frac{e^{0/05}}{P}$ ۳) $n \geq \frac{1+0/05}{P}$ ۴) $n \geq \frac{1}{P}$

۱۳۶ـ فردی در صفی ایستاده که ۳۶ نفر جلوی او هستند. زمان سرویس‌دهی (بر حسب واحد زمان) به هر فرد از تابع توزیع $f(x) = c e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0$ پیروی می‌کند (c عددی ثابت است و با توجه به اینکه f یک تابع چگالی احتمال است قابل تعیین است.) احتمال آنکه فرد مورد نظر بیش از ۲۲۰ واحد زمان برای دریافت سرویس منتظر بماند به تقریب چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) نزدیک صفر ۲) کمتر از $\frac{1}{2}$ ۳) بیشتر از $\frac{1}{2}$ ۴) نزدیک یک

۱۳۷ـ اگر تعداد تولیدات روزانه یک خط تولید، دارای میانگین مجهول μ و انحراف معیار مجهول σ باشد. احتمال آن را که واریانس نمونه‌ای ۴۰ تایی از تولیدات روزانه بیش از واریانس جامعه باشد به طور تقریبی مشخص کنید.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۶۶

۱۳۸ـ اگر $2n$ سکه‌ی سالم هم‌زمان پرتاب شوند، با فرض این که n عدد بزرگی باشد چقدر احتمال دارد که تعداد سکه‌های «رو» و «پشت» یکسان باشند؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) ۰/۵ ۲) $\binom{2n}{n}2^{-n}$ ۳) $\binom{2n}{n}2^{-2}$ ۴) ع

۱۳۹ـ فرض کنید یک مولد اعداد تصادفی هر یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ را با احتمال یکسان تولید می‌کند. به طور متوسط چند عدد توسط این مولد باید تولید شود تا برای اولین بار عدد ۳ دو بار پشت سر هم و بدون فاصله تولید شود؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۱۴۰ـ به‌طور متوسط ۳۰ مشتری در ساعت به یک شعبه بانک طبق فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه در هر نیم‌ساعت یک مشتری مراجعه کند چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $15e^{-30}$ ۲) $15e^{-15}$ ۳) $30e^{-3}$ ۴) $60e^{-30}$

۱۴۱ـ احتمال اینکه در ۲ بار تیراندازی، حداقل یک تیر به هدف اصابت کند مساوی ۰/۸۴ است. احتمال اصابت تیر به هدف در هر بار چقدر است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۴۲

۱۴۲ـ براساس تجربه مشخص شده است که یک تلفنچی ۴ درصد از تلفن‌ها را اشتباه وصل می‌کند. اگر روزی ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد، احتمال اینکه بیش از یک شماره اشتباه وصل کرده باشد، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $6e^{-6}$ ۲) $1-7e^{-6}$ ۳) $1-e^{-6}$ ۴) $1-5e^{-6}$

۱۴۳ـ اگر x یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و تابع چگالی $f_{(x)} = \lambda e^{-\lambda x}\ ,\ x > 0$ باشد، $E(X|X>1)$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $1-\frac{1}{\lambda}$ اگر $\lambda > 1$ باشد. ۲) $\frac{2}{\lambda}$ ۳) $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ ۴) $1-\frac{2}{\lambda}$ اگر $\lambda > 2$ باشد.

۱۴۴ـ فرض کنید منافع عاید از رخداد متغیر تصادفی X که دارای توزیع بینم با احتمال موفقیت $\frac{1}{2}$ می‌باشد $(-1)^X$ است. امید ریاضی منافع حاصل عبارت است از:
(مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $(\frac{1}{2})^n$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $(1-\overset{2}{P})^n$

۱۴۵ـ اگر متغیر تصادفی X از یک توزیع یکنواخت در فاصلهٔ صفر و یک برخوردار باشد توزیع متغیر تصادفی y که به صورت $y = -5Ln(x)$ می‌باشد کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) نرمال با میانگین ۱۰ ۲) مربع کای با ۵ درجه آزادی ۳) نمایی با پارامتر ۵ ۴) گاما با پارامتر ۱ و ۵

۱۴۶ـ تابع مولد گشتاورها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر می‌باشد. امید ریاضی کمیت تصادفی x کدام است؟ $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) λ ۲) λ^2 ۳) $\frac{1}{\lambda^2}$ ۴) $\frac{1}{\lambda}$

۱۴۷ـ اگر تابع چگالی احتمال x به صورت زیر باشد، مقدار $p(x>s+t\,|\,x>s) = p(x>t)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $1-e^{-\lambda t}$ ۲) $1-\lambda e^{-\lambda t}$ ۳) $e^{-\lambda t}$ ۴) $\lambda e^{-\lambda t}$

۱۴۸ـ تابع مولد گشتاورها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر به دست آمده است. ضریب تغییرات کمیت تصادفی x کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) ۲۰۰%　　۲) ۲۰%　　۳) ۵۰%　　۴) ۱۰%

۱۴۹ـ در توزیع گاما با پارامترهای β و α، مقدار $\frac{\mu'_۲}{\mu'_۱}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\alpha\beta^۲$　　۲) $\alpha(\beta+۱)$　　۳) $\beta(\alpha+۱)$　　۴) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+۱}$

۱۵۰ـ در فرآیند برشکاری، مساحت دایرهٔ بریده شده دارای توزیع مربع کای با واریانس ۴ واحد می‌باشد. چقدر احتمال دارد مساحت قطعه‌ای که برای بررسی، به آزمایشگاه فرستاده شده است. بیش از سه واحد باشد؟
(مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $e^{-\frac{۳}{۲}}$　　۲) $۱-e^{-\frac{۱}{۲}}$　　۳) $e^{-\frac{۱}{۲}}$　　۴) $۱-e^{-\frac{۳}{۲}}$

۱۵۱ـ فرض کنید x دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ باشد احتمال آنکه فاصله تصادفی $[|x|,۱۰|x|]$ نقطه σ را برداشته باشد چقدر است؟
(مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) ۰/۷۵۱　　۲) ۰/۶۹۵　　۳) ۰/۳۰۱۵　　۴) ۰/۶۰۳

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ گزینه «۱» طبق نکته گفته شده مجموع دو متغیر پواسون باز هم پواسون با مجموع پارامترها است.

$$\begin{cases}X\sim P(\lambda_۱)\\ Y\sim P(\lambda_۲)\end{cases}\Rightarrow X+Y\sim P(\lambda_۱+\lambda_۲)$$

$$\begin{cases}X\sim P(۵)\\ Y\sim P(۷)\end{cases}\Rightarrow X+Y\sim P(۱۲)\,;\; x+y=t\sim P(۱۲)\;,\; f(t)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}$$

$$P(x=-y)=P(x+y=۰)\Rightarrow P(t=۰)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^۰}{۰!}=e^{-\lambda}=e^{-۱۲}$$

۲ـ گزینه «۱» البته می‌پذیریم که X و N از هم مستقل‌اند. (قضیه والد)

$$X\sim P(۳۰)\;\Rightarrow\; E(X)=۳۰$$

$$N\sim u\{۱,\dots,۱۹\}\;\Rightarrow\; E(N)=\frac{۱۹+۱}{۲}=۱۰$$

میانگین تعداد مسافرین در روز $=E(NX)=E(N).E(X)=۳۰(۱۰)=۳۰۰$

۳ـ گزینه «۲» آزمایش دوجمله‌ای: اگر یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p مستقلاً n بار تکرار شود، یک آزمایش دو جمله‌ای انجام شده است و متغیر تصادفی که تعداد موفقیت‌ها در این آزمایش‌ها را مشخص می‌کند دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای p,n است.

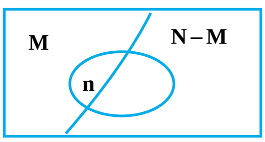
دراین سؤال، هر بار پرتاب تاس‌ها معادل انجام یک آزمایش برنولی است بنابراین p برابر است با احتمال پیروزی در یک آزمایش برنولی.

A: پیشامد این‌که دریک مرتبه پرتاب دو تاس، خال تاس زرد از خال تاس قرمز بزرگتر باشد:　　$n(S)=۶^۲=۳۶$

$$A=\{(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۵,۱)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۴)(۶,۱)(۶,۲),(۶,۳)(۶,۴)(۶,۵)\}$$

$$n(A)=۱۵\;\Rightarrow\; p=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۴ـ گزینه «۲» اگر از ظرفی که شامل ۲ نوع مهره است به تصادف و بدون جایگذاری مهره انتخاب کنیم، تعداد مهره‌های انتخابی از یک نوع خاص دارای توزیع فوق هندسی به صورت زیر است:



$$X\sim HG(N,M,n)\;\Rightarrow P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

که در آن N تعداد کل اعضای فضای نمونه، M تعداد اعضاء از یک نوع خاص و n اندازه نمونه می‌باشد. اگر $X\sim HG(N,M,n)$ آنگاه $E(X)=\frac{nM}{N}$.

با توجه به توضیحات فوق، تعداد مهره‌های سفید انتخابی دارای توزیع فوق هندسی به صورت مقابل می‌باشد: $X \sim HG(n_1+n_2, n_1, M)$

بنابراین: $E(X)=\frac{mn_1}{n_1+n_2}$

۵ـ گزینه «۴» $X \sim \Gamma(100, \frac{1}{2}) \Rightarrow E(X)=\frac{n}{\lambda}=\frac{100}{2}=50$

(**توجه:** مجموع ۱۰۰ متغیر نمایی با پارمتر ۲ دارای توزیع گاما می‌باشد)

۶ـ گزینه «۴» طبق تعریف متغیر استاندارد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma} \Rightarrow 1/2=\frac{18-\mu}{\sigma} \\ Z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma} \Rightarrow -0/3=\frac{12-\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \mu=13/2, \sigma=4$$

۷ـ گزینه «۲» تعداد اتفاق‌ها در یک فاصله زمانی دارای توزیع پواسون است و فاصله زمانی بین آن‌ها دارای توزیع نمایی است.

$$f(x)=2e^{-2x} \Rightarrow P(X>2)=\int_2^\infty 2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_2^\infty=e^{-4}$$

۸ـ گزینه «۱» اگر حداقل‌ها بزرگتر از ۱ باشد هر کدام از متغیرها بزرگتر از ۱ است:

$$\begin{matrix} X_1, X_2, X_3 \sim Exp(1) \\ X=\min(X_1,X_2,X_3) \end{matrix} \Rightarrow f(x_i)=e^{-1} \quad x>0$$

$$P(X>1)=P(X_1>1, X_2>1, X_3>1)=(P(X_1>1))^3=(e^{-1})^3=e^{-3}=0/049$$

۹ـ گزینه «۱» $X_1,\dots,X_{10} \overset{i.i.d}{\sim} N(5,10)$

x ترکیب خطی از توزیع نرمال است، پس توزیع نرمال دارد. $Y=\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i$

$$E(Y)=-x_1+x_2-x_3+\cdots+x_{10}=0 \quad , \quad Var(Y)=\sum_{i=1}^{10}Var(x_i)=10(10)=100 \Rightarrow \sigma(y)=10$$

۱۰ـ گزینه «۳» $Y=\min(X_1,X_2,X_3)$

$$P(Y\ge y)=P(\min(X_1,X_2,X_3)\ge y)=P(X_1\ge y, X_2\ge y, X_3\ge y)=(P(X_1\ge y))^3=(e^{-2y})^3=e^{-6y}$$

$$Y\sim Exp(6) \Rightarrow E(Y)=\frac{1}{6}$$

توجه کنید که اگر X_i ها مستقلاً دارای توزیع نمایی با پارامتر λ_i باشند $\min(X_i)$ نیز دارای توزیع نمایی با پارامتر $\sum X_i$ می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۳» $Z^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow E(Z^2)=1, \ var(Z^2)=2$

گشتاورهای فرد توزیع نرمال صفر است بنابراین:

$$E(Z^3)=0 \ ; \quad E(Z^2)=var Z+(E(Z))^2=1 \quad ; \quad E(Z^4)=var Z^2+(E(Z^2))^2=2+1=3$$

$$\Rightarrow E(2Z^3+5Z^2+6Z^4)=5E(Z^2)+6E(Z^4)=5(1)+6(3)=23$$

۱۲ـ گزینه «۴» متغیر تصادفی که تعداد اتفاقات در یک بازه زمانی یا ناحیه مشخص را معین می‌کند دارای توزیع پواسون است.

نکته۱: پارامتر توزیع پواسون با $E(X)$ (مقدار متوسط متغیر تصادفی) برابر است.

نکته۲: مقدار پارامتر توزیع با طول بازه زمانی که متغیر تصادفی در آن تعریف می‌شود، رابطه مستقیم دارد.

اگر $X\sim P(\lambda)$ آنگاه: $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \quad x=0,1,\cdots$

X : افرادی که در هر نیم ساعت از عرض یک خیابان عبور می‌کنند.

با توجه به توضیحات داده شده $X \sim P(3)$ (متوسط تعداد افرادی که دراین زمان از خیابان عبور می‌کنند۳ نفر است).

Y : افرادی که در ۱۰ دقیقه از عرض یک خیابان عبور می‌کنند.

چون بازه زمانی مورد بررسی در Y, $\frac{1}{3}$ بازه زمانی مورد بررسی برای X است پس طبق نکته ۲، پارامتر این توزیع نیز $\frac{1}{3}$ مقدار پارامتر توزیع X است. در نتیجه:

تعداد افراد	دقیقه
۳	۳۰
λ	۱۰

$$\Rightarrow \lambda = \frac{30}{30} = 1$$

$$Y \sim P(1)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 1 - e^{-1}$$

۱۳ـ گزینه «۳» واریانس متغیر تصادفی X از رابطه مقابل محاسبه می‌شود. $V(X) = E(X-\mu(X))^2 = E(X-\mu)^2$

اگر نمونه تصادفی n تایی را با $X_1 \cdots X_n$ نمایش دهیم چون $i = 1, \cdots, n,\ X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ بنابراین:

$$E(X_i - \mu) = \sigma^2 \ ,\ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$E\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu)^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{3}\right) = E\left(\frac{3\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{6}\right) = \frac{1}{6}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 = \frac{n\sigma^2}{6}$$

نکته۱: اگر a عدد ثابت باشد آنگاه: $E(af(X)) = aE(f(X))$

نکته۲: $E(\sum_i f(X_i)) = \sum_i E(f(X_i))$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا توزیع $\sum x_i^2$ را به دست می‌آوریم:

$$X_i \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{x_i - 0}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{x_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \Rightarrow y = \frac{\frac{\sum x_i^2}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\chi^2(n)}{\frac{n}{\sigma^2}} \Rightarrow E(y) = \frac{\sigma^2}{n} \times n = \sigma^2$$

$$Var(y) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 . Var(\chi^2{}_{(n)}) = \frac{\sigma^4}{n^2} . 2n = \frac{2\sigma^4}{n}$$

۱۵ـ گزینه «۲» طبق رابطه مولد گشتاور خواهیم داشت:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \lambda\int_0^\infty e^{tx}e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}dx = \frac{-\lambda}{\lambda-t}e^{-(\lambda-t)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-t}(\lambda=1) \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{1-t}$$

۱۶ـ گزینه «۳» توجه کنید که $\chi^2_{(2)} \equiv \exp(\frac{1}{2})$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{X}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)} \\ \frac{Y}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{X^2+Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(2)} \equiv Exp(\frac{1}{2}) \Rightarrow X^2+Y^2 \sim E(\frac{1}{2\sigma^2}) \Rightarrow E(X^2+Y^2) = 2\sigma^2$$

۱۷ـ گزینه «۳» $X_۱$ و $X_۲$ از هم مستقل‌اند پس هر تابعی از آن‌ها نیز از هم مستقل‌اند در نتیجه $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ نیز از هم مستقل‌اند.

$$\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ = ۴ \qquad n_۱ = ۵\,,\, n_۲ = ۹$$

$$\frac{(n_۱ - ۱)S_۱^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n_۱-۱)} \Rightarrow \frac{۴S_۱^۲}{۴} \sim \chi^۲_{(۴)} \qquad ; \qquad \frac{(n_۲ - ۱)S_۲^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n_۲-۱)} \Rightarrow \frac{۸S_۲^۲}{۴} \sim \chi^۲_{(۸)}$$

$$E(S_۱^۲) = ۴\,,\ \mathrm{var}(S_۲^۲) = ۴\,,\ E(S_۲^۴) = ۲۰$$

$$\mathrm{Var}(S_۱^۲ S_۲^۲) = E(S_۱^۲ S_۲^۲)^۲ - (E(S_۱^۲)E(S_۲^۲))^۲ = E(S_۱^۴)E(S_۲^۴) - (E(S_۱^۲)E(S_۲^۲))^۲ = ۲۴(۲۰) - (۴\times۴)^۲ = ۲۲۴$$

۱۸ـ گزینه «۴» فرم تابع چگالی احتمال به فرم تابع چگالی گاما می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}.x^{\alpha-۱}e^{\frac{-x}{\beta}} & x > ۰ \\ ۰ & o.w \end{cases} \Rightarrow \int_۰^\infty f(x)dx = ۱ \Rightarrow c.d!\,۳^{d+۱} = ۱ \Rightarrow c(d+۱)!۳^d = ۱$$

از طرفی: $E(X) = ۹ \Rightarrow \dfrac{c(d+۱)!}{(\frac{۱}{۳})^{d+۲}} = ۹ \Rightarrow c = \dfrac{۱}{۵۴}\ ,\ d = ۲ \Rightarrow d+۱ = ۳$

۱۹ـ گزینه «۴»

نکته ۱: اگر $X_۱ \sim N(\mu_۱, \sigma_۱^۲)\ ,\ X_۲ \sim N(\mu_۲, \sigma_۲^۲)$ مستقل از هم باشند و a و b اعداد ثابت باشند آنگاه:

$$aX_۱ + bX_۲ \sim N(a\mu_۱ + b\mu_۲, a^۲\sigma_۱^۲ + b^۲\sigma_۲^۲)$$

نکته ۲: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ آنگاه $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(۰,۱)$

نکته ۳: اگر $X_۱, X_۲$ دارای توزیع نرمال باشند و $\mathrm{cov}(X_۱, X_۲) = ۰$ آنگاه $X_۱, X_۲$ مستقل‌اند.

نکته ۴: $\mathrm{ov}(\sum_{i=۱}^n a_i X_i \text{ و } c\sum_{j=۱}^m b_j Y_j) = \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^m a_i b_j \mathrm{cov}(X_i , Y_j)$

$$X_۱ \sim N(۰,۱)\,,\ X_۲ \sim N(۰,۱) \qquad X_۲^۲ - X_۱^۲ = (X_۲ - X_۱)(X_۲ + X_۱)$$

$$X_۲ - X_۱ \sim N(۰,۲) \Rightarrow \frac{X_۲ - X_۱}{\sqrt{۲}} \sim N(۰,۱) \quad , \quad X_۲ + X_۱ \sim N(۰,۲) \Rightarrow \frac{X_۲ + X_۱}{\sqrt{۲}} \sim N(۰,۱)$$

$$\mathrm{cov}\left(\frac{X_۲ - X_۱}{\sqrt{۲}}, \frac{X_۲ + X_۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۱}{۲}[\mathrm{cov}(X_۲, X_۲) + \mathrm{cov}(X_۲, X_۱) - \mathrm{cov}(X_۱, X_۲) - \mathrm{cov}(X_۱, X_۱) = \frac{۱}{۲}[V(X_۲) - V(X_۱)] = ۰$$

بنابراین $\dfrac{X_۲ - X_۱}{\sqrt{۲}}, \dfrac{X_۲ - X_۱}{\sqrt{۲}}$ مستقل از هم‌اند. $(Z_i \sim N(۰,۱))$ $\quad \dfrac{X_۲ - X_۱}{\sqrt{۲}}.\dfrac{X_۲ + X_۱}{\sqrt{۲}} = Z_۱ Z_۲ \Rightarrow (X_۲ - X_۱)(X_۲ + X_۱) = ۲Z_۱ Z_۲$

در نتیجه $X_۲^۲ - X_۱^۲$ با $۲X_۱X_۲$ هم توزیع است.

۲۰ـ گزینه «۱» X: تعداد تصادفات اتومبیل در یک سال ، $X \sim P(n) \Rightarrow E(X) = n$

Y: طول عمر اتومبیل ، $Y \sim N(\mu, \sigma^۲)$

اگر اتومبیل Y سال عمر کند تعداد تصادفات آن دارای توزیع $P(ny)$ است. $E(nY) = nE(Y) = n\mu$

۲۱ـ گزینه «۲» اگر $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X باشد آنگاه $f_X(x)=F'_X(x)$

نکته: $\frac{\partial}{\partial x}(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt)=h'(x)f(h(x))-g'(x)f(g(x))$

قرار می‌دهیم: $Y=|X|$

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{\partial}{\partial y}(\int_{-y}^{y}\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}}dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}-(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}})=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}\quad y\ge 0$$

حال با تغییر متغیر داریم: $x\ge 0 \quad f_X(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

۲۲ـ گزینه «۲» در یک آزمایش پواسون با پارامتر μ، که μ میانگین تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی است قرار می‌دهیم:

تعداد اتفاقات در فاصله زمانی $T=[0,t]$ و زمان تا رسیدن به اولین اتفاق $=Y$

در اینصورت $Y\sim E(\frac{1}{\mu}), T\sim P(\mu t)$ یعنی، در یک آزمایش پواسون با میانگین μ زمان رسیدن به اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{\mu}$ است.

$f_Y(y)=\mu e^{-y\mu}\quad y>0$

نکته: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته با توابع چگالی احتمال $f_Y(y), f_X(x)$ باشند، تابع چگالی توأم آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

اگر X زمان رسیدن اولین مرد به فروشگاه و Y زمان رسیدن اولین زن باشد، آنگاه اگر $X<Y$ اولین مشتری فروشگاه مرد بوده است.

$$\left.\begin{array}{ll} X\sim E(\frac{1}{\lambda})\ ,\ f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ Y\sim E(\frac{1}{\mu})\ ,\ f_Y(y)=\mu e^{-\mu y} & y>0 \end{array}\right. \Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=\lambda\mu e^{-\lambda x}.e^{-\mu y}\quad x,y>0$$

$$P(X<Y)=\int_0^\infty\int_0^y \lambda\mu e^{-\lambda x}.e^{-\mu y}dxdy=\lambda\mu\int_0^\infty e^{-\mu y}[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^y dy=\mu\int_0^\infty e^{-\mu y}(1-e^{-\lambda y})dy$$

$$=\mu\int_0^\infty(e^{-\mu y}-e^{-y(\lambda-\mu)})dy=\mu[-\frac{1}{\mu}e^{-\mu y}+\frac{1}{\lambda+\mu}e^{-y(\lambda+\mu)}\Big|_0^\infty=\mu(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu})=\mu(\frac{\lambda+\mu-\mu}{\mu(\lambda+\mu)})=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

۲۳ـ گزینه «۴» اگر بخواهیم در پنجمین پرتاب، برای بار دوم سه نتیجه شیر بیاید داریم:

یک توزیع دو جمله‌ای منفی با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

احتمال موفقیت $\Rightarrow p=$ هر سه خط یا هر سه شیر $=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{4}$

$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \qquad P=\frac{1}{8}, r=2, n=5$

$$p=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-P)^{n-r}=\binom{4}{1}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^3=4\frac{3^3}{4^3}=\frac{2^2\times 3^3}{2^{10}}=\frac{3^3}{2^8}=\frac{27}{256}$$

۲۴ـ گزینه «۳» از تابع احتمال $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ استفاده می‌کنیم:

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-\frac{1}{2}}.(\frac{1}{2})^0}{0!}=1-e^{-\frac{1}{2}}$$

۲۵ـ گزینه «۳» با یک توزیع دو جمله‌ای منفی روبرو هستیم:

$$\text{احتمال موفقیت}=P=\underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{۳ شیر}}+\underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{۳ خط}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{matrix} n=4 \\ r=2 \end{matrix}\quad X\sim NB(4,2)\quad ;\quad P(X=2)=\binom{n-1}{r-1}P^r q^{n-r}=\binom{3}{1}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{256}$$

۲۶ـ گزینه «۲» از رابطه امید ریاضی گسسته استفاده می‌کنیم:

$$E(\frac{1}{1+x})=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{1+x}\times\frac{e^{-1}}{x!}=\frac{1}{e}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x)!}=\frac{1}{e}\underbrace{(\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x!})}_{\text{بسط مک لورن}}=\frac{1}{e}(e^1-1)=(1-\frac{1}{e})=1-e^{-1}$$

۲۷ـ گزینه «۲» دو متغیر دارای توزیع دو جمله‌ای است با پارامترهای روبه‌رو می‌باشد:

$$X_1\sim Bin(4,P)\qquad X_2\sim Bin(2,P)$$

$$P(X_1\ge 2)\ge P(X_2\ge 1)\ \Rightarrow \binom{4}{2}p^2q^2+\binom{4}{3}p^3q^1+\binom{4}{4}p^4\ge\binom{2}{1}pq+p^2\xrightarrow{\text{از حل دو معادله}}p\ge\frac{2}{3}$$

۲۸ـ گزینه «۳» اگر $X\sim P(\lambda)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\cdots$$

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه:

$$E(g(X))=\sum_x g(x)f_X(x)$$

نکته: $\sum_{x=k}^{\infty}a^x$ یک سری توانی است و در صورتی که $|a|<1$ همگراست و حاصل آن برابر است با: $\frac{a^k}{1-a}$

بنابراین:

$$E(X!)=\sum_{x=0}^{\infty}x!\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\lambda^x=e^{-\lambda}(\frac{1}{1-\lambda})$$

۲۹ـ گزینه «۱»

X: تعداد دفعات پرتاب تاس تا اولین ۶ ظاهر شود

x دارای توزیع هندسی است بنابراین:

$$P(X=x)=\underset{\text{احتمال ظاهر شدن ۶ در پرتاب تاس}}{p}q^{x-1}\qquad x=1,2,\cdots$$

اگر $\Delta=0$، آنگاه معادله‌ی درجه دو دارای ریشه مضاعف است بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac=(50)^2-4(216p)(216p)=0\Rightarrow 50^2=4(216)^2p^2\Rightarrow p=\frac{50}{2\times 216}=\frac{25}{216}$$

در نتیجه:

$$P(X=n)=(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^{n-1}\Rightarrow\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}=\frac{25}{216}=\frac{5^2}{6^3}\Rightarrow n-1=2\Rightarrow n=3$$

۳۰ـ گزینه «۳» **نکته ۱:** اگر $X \sim P(\theta)$، آنگاه $E(X)=\theta$ و $V(X)=\theta$

نکته ۲: $V(X)=E(X^2)-E^2(X) \Rightarrow E(X^2)=V(X)+E^2(X)$

نکته ۳: اگر $h(X), g(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X باشند که امید ریاضی آن‌ها وجود دارد و c,b,a اعداد ثابت باشند، آنگاه:

$$E(ag(X)+bh(X)+c)=aE(g(X))+bE(h(X))+c$$

$$E(X^2)=V(X)+E^2=\theta+\theta^2$$

لذا:

$$E(X(X+1))=E(X^2+X)=E(X^2)+E(X)=(\theta+\theta^2)+\theta=2\theta+\theta^2$$

۳۱ـ گزینه «۳»

نکته ۱: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه $E(XY)=E(X)E(Y)$

نکته ۲: اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد آنگاه $E(X^2)=p$ و $E(X)=p$

نکته ۳: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

با توجه به سه نکته فوق داریم:

$$V(U)=E(U^2)-E^2(U)$$

$$E(U^2)=E(X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3)^2=E[(X_1X_2)^2+(X_1X_3)^2+(X_2X_3)^2+2(X_1X_2)(X_1X_3)+2(X_1X_2)(X_2X_3)$$

$$+2(X_1X_3)(X_2X_3)]=E(X_1^2X_2^2)+E(X_1^2X_3^2)+E(X_2^2X_3^2)+2E(X_1^2X_2X_3)+2E(X_1X_2^2X_3)+2E(X_1X_2X_3^2)$$

$$=p^2+p^2+p^2+2(p\times p\times p)+2p.\,p.\,p+2(p.p.p)=3p^2+6p^3$$

$$E(U)=E(X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3)=3p^2$$

$$\Rightarrow V(U)=3p^2+6p^3-(3p^2)^2=3p^2[1+2p-3p^2]=3p^2[1-p^2+2p-2p^2]=3p^2[(1-p)(1+p)+2p(1-p)]$$

$$=3p^2[(1-p)(1+p+2p)]=3p^2q(1+3p)$$

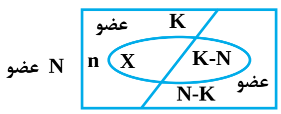
۳۲ـ گزینه «۱» با یک توزیع هندسی سر و کار داریم $X \sim Ge(0/2)$. اگر X نشان دهنده تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به یک موفقیت باشد به آن متغیر هندسی گفته و تابع احتمال آن به صورت روبرو خواهد بود.

$$f(x)=pq^{x-1} \qquad x=1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow P(X=x)=pq^{x-1} \qquad x=1,2,3,4,5 \Rightarrow P(X=5)=0/2\times(0/8)^4=0/082$$

۳۳ـ گزینه «۴» رخ دادن زلزله در منطقه رودبار و بوئین زهرا مستقل از یکدیگرند بنابراین، احتمال این‌که یکی از آن‌ها زودتر رخ دهد با احتمال رخ دادن زلزله سریعتر در مکان دیگر برابر می‌باشد، پس احتمال مورد نظر برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۳۴ـ گزینه «۴» شکل روبه‌رو، یک آزمایش فوق هندسی را نشان می‌دهد (از یک جامعه شامل دو نوع محصول به حجم N عضو می‌خواهیم n عضو انتخاب کنیم و x نشان‌دهنده تعداد موفقیت‌ها در این ۵ عضو انتخابی می‌باشد) و تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است: (توجه کنید که نمونه با جایگذاری انتخاب می‌شود):



$$f(x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X)=\frac{nK}{N} \quad , \quad Var(X)=\frac{nK}{N}(1-\frac{K}{n})(\frac{N-n}{N-1})$$

با یک توزیع فوق هندسی سروکار داریم:

$$E(X)=\frac{nK}{N}=\frac{3\times 4}{7}=\frac{12}{7}$$

۳۵ـ گزینه «۲» اگر X تعداد پیچ‌های خراب در جعبه باشد توزیع آن دوجمله‌ای با پارامتر $P=0/01$ و $n=10$ است و می‌دانیم بسته‌هایی جایگزین می‌شوند که بیش از یک پیچ خراب داشته باشند.

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-[P(X=0)+P(x=1)]=1-\left[(0/99)^{10}+\binom{10}{1}(0/01)(0/99)^{9}\right]$$

$$=1-0/904-0/091\simeq 0/004\Rightarrow \text{درصد مطلوبست}=0/004\times 100=0/4\%$$

۳۶ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا رابطه کسری را طرفین ـ وسطین می‌کنیم:

$$P(X+Y\ge 2)$$

$$\text{از طرفی}: P(X+Y=2)+P(X+Y=3)\quad X+Y\sim P(3)\Rightarrow P(X+Y\ge 2);$$

$$T=X+Y\sim P(3)\Rightarrow P(T=t)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^t}{t!}=\frac{e^{-3}.3^t}{t!}\Rightarrow P(T=2)+P(T=3)=\frac{e^{-3}.3^2}{2!}+\frac{e^{-3}.3^3}{3!}=4/5e^{-3}+4/5e^{-3}=9e^{-3}$$

۳۷ـ گزینه «۴» اگر X نشان دهنده تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به r امین موفقیت باشد به آن متغیر دوجمله‌ای منفی گفته و تابع احتمال آن برابر است با:

$$f(x)=\binom{x-1}{r-1}P^r q^{x-r}\qquad x=r,\ r+1,\dots$$

این احتمال برابر با آن است که سعید یا سیروس ۴ مسابقه در بین ۶ مسابقه قبل را برده باشند. در توزیع دو جمله‌ای منفی داریم:

$$P=P\,(\text{سعید برنده باشد})+P\,(\text{سیروس برنده باشد})=\binom{7-1}{5-1}(0/42)^5(0/58)^2+\binom{7-1}{5-1}(0/58)^5(0/42)^2=0/173656+0/066=0/24$$

۳۸ـ گزینه «۲» مجموع دو متغیر مستقل پواسون باز هم پواسون با مجموع پارامترها می‌باشد.

$$P(X+Y=K)=\frac{e^{-3}.3^k}{k!}$$

$$\begin{matrix}X\sim p(1)\\ Y\sim p(2)\end{matrix}\Rightarrow X+Y\sim p(3)$$

اکنون طبق فرمول احتمال شرطی، خواهیم داشت:

$$P(X=1|\frac{X+Y}{2}=2)=P(X=1\,|\,X+Y=4)=\frac{P(X=1\,,\,X+Y=4)}{P(X+Y=4)}=$$

$$\frac{P(X=1\,,\,Y=3)}{P(X+Y=4)}\xrightarrow{\text{مستقلاند } x,y}\frac{P(X=1)P(Y=3)}{P(X+Y=4)}=e^{-1}\times\frac{e^{-2}2^3}{3!}\times\frac{4!}{e^{-3}3^4}=\frac{2^3\times 4}{3^4}=2(\frac{2}{3})^4$$

۳۹ـ گزینه «۳» **روش اول:**

$$P(X=Y)=\sum_{x=0}^{n}P(X=x\,,\,Y=x)=\sum_{x=0}^{n}P(X=x)P(Y=x)$$

از طرفی دو رابطه روبرو همواره برقرار است:

$$(I)\binom{n}{x}=\binom{n}{n-x}\quad;\quad(II)\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\binom{n}{n-x}=\binom{2n}{n}\Rightarrow P(X=Y)=\binom{2n}{n}2^{-2n}$$

روش دوم:

$$P(X=Y)=P(X=0\,,\,Y=0)+P(X=1\,,\,Y=1)+\dots+P(X=n\,,\,Y=n)$$

$$\xrightarrow[\text{استقلال}]{\text{به دلیل}}P(X=0)\,.\,P(Y=0)+P(X=1)\,.\,P(Y=1)+\dots+P(X=n)\,.\,P(Y=n)$$

$$=\left[\binom{n}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\left[\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\left[\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+\dots+\left[\binom{n}{n}.\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]\left[\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$$

$$=\binom{n}{0}^2.2^{-2n}+\binom{n}{1}^2 2^{-2n}+\binom{n}{2}^2.2^{-2n}+\dots\binom{n}{n}^2 2^{-2n}=2^{-2n}\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots+\binom{n}{n}^2\right]=\binom{2n}{n}.2^{-2n}$$

۴۰ـ گزینه «۱» زمان لازم برای استفاده از هر ۳ دست لوازم یدکی برحسب دقیقه برابر است با: $T=90+10X$

که در اینجا X تعداد پمپ‌های سالمی است که قبل از آزمایش و تعمیر سومین پمپ خراب، مورد آزمایش قرار می‌گیرد. پس دارای توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامترهای $P=0/2$ و $r=3$ است.

$$E(T)=90+10E(X)=90+10\times3\times\frac{0/8}{0/2}=90+120=210$$

$$Var(T)=100Var(X)=100\times3\times\frac{0/8}{(0/2)^2}=6000$$

۴۱ـ گزینه «۲»

$$X=X_1+X_2+X_3\sim P(3)\Rightarrow P(X=x)=\frac{e^{-3}\times3^x}{x!}$$

$$P(\text{در هر سال یک زلزله}\,|\,\text{در سه سال سه زلزله})=\frac{P(\text{سال اول یک زلزله})P(\text{سال دوم یک زلزله})P(\text{سال سوم یک زلزله})}{P(\text{در سه سال سه زلزله})}$$

$$=\frac{e^{-1}\times e^{-1}\times e^{-1}}{P(x=3)}=\frac{e^{-3}3!}{e^{-3}3^3}=\frac{3\times2}{3\times3\times3}=\frac{2}{9}$$

۴۲ـ گزینه «۳» اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\quad x=0,1,\cdots,n\ ,\ V(X)=npq\ ,\ E(X)=np$$

برای محاسبه $P(X=0)$ باید توزیع X به طور کامل مشخص شود. پس باید مقادیر n، p را محاسبه کرد.

$$\frac{V(X)}{E(X)}=\frac{npq}{np}\Rightarrow q=\frac{3/6}{6}=0/6\ ,\ p=1-q=0/4\qquad;\qquad E(X)=np\Rightarrow n=\frac{E(X)}{p}=\frac{6}{0/4}=15$$

لذا $X\sim B(15,0/4)$ و در نتیجه:

$$P(X=0)=\binom{15}{0}(0/4)^0(0/6)^{15}=(0/6)^{15}$$

۴۳ـ گزینه «۴» اگر پیشامد A اجتماع پیشامدهای دو به دو ناسازگار B_i و $i=1,\cdots,n$ باشد. آنگاه $P(A)$ با استفاده از قانون احتمال کل به دست می‌آید:

قانون احتمال کل: $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

نکته: $\sum_{x=k}^{\infty}a^x$ یک سری توانی است و در صورتی که $|a|<1$ سری همگرا است و مجموع آن برابر است با: $\frac{a^k}{1-a}$

$$X\sim G(p)\Rightarrow P(X=x)=pq^x\quad,\quad x=0,1,\cdots$$

$$P(X=Y)=P(X-Y=0)=\sum_{y=0}^{\infty}P(X-Y=0|Y=y)P(Y=y)=\sum_{y=0}^{\infty}P(X=y)P(Y=y)=\sum_{y=0}^{\infty}pq^ypq^y=p^2\sum_{y=0}^{\infty}q^{2y}$$

$$=p^2.\frac{1}{1-q^2}=\frac{p^2}{(1-q)(1+q)}=\frac{p^2}{p(1+q)}=\frac{p}{1+q}=\frac{p}{1+(1-p)}=\frac{p}{2-p}$$

۴۴ـ گزینه «۱» $X_i\ ,\ i=1,\cdots,n$ دارای توزیع برنولی است لذا: $P(X_i=0)=1-p\ ,\ P(X_i=1)=p$

$Max\{X_i,\cdots,X_n\}$ زمانی ۱ است که حداقل یکی از آن‌ها یک باشد بنابراین، متمم آن معادل این است که تمام iها و $(i=1,\cdots,n)$ صفر باشند.

$$P(Max(X_1,\cdots,X_n))=1-P(X_1=X_2=\cdots=X_n=0)$$

بنابر استقلال X_iها: $$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i=0)=1-(1-p)^n$$

۴۵ـ گزینه «۴»

$$\begin{matrix} X_1 \sim N(\mu,\sigma^2) \\ X_2 \sim N(\mu,\sigma^2) \end{matrix} \Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(\mu-\mu\,,\,\sigma^2+\sigma^2) = N(0, 2\sigma^2)$$

۴۶ـ گزینه «۱» فاصله بین دو پیشامد پواسون با پارامتر λ، دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. از آنجا که تابع نمایی مورد نظر دارای پارامتر $\frac{1}{2}$ برای یک دقیقه است توزیع تعداد مشتری‌ها در یک ساعت پواسون با پارامتر $60 \times \frac{1}{2} = 30$ می‌باشد.

۴۷ـ گزینه «۴» **روش اول:** ابتدا معکوس متغیر y را بدست می‌آوریم: (از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$y = \frac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow 1+e^{-x} = \frac{1}{y} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{y}-1 \Rightarrow -x = \ln(\frac{1}{y}-1) \Rightarrow x = -\ln(\frac{1}{y}-1) = g^{-1}(y)$$

$$\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{y(1-y)} \Rightarrow f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y))$$

$$f(y) = \frac{1}{y(1-y)} \frac{(\frac{1}{y}-1)}{(1+(\frac{1}{y}-1))^2} = \frac{\cancel{y^2}\,\cancel{(1-y)}}{\cancel{y}} \times \frac{1}{\cancel{y}\,\cancel{(1-y)}} = 1 \Rightarrow y \sim u(0,1)$$

روش دوم: در آمار قضیه‌ای وجود دارد به نام «قضیه تبدیل انتگرال احتمال» که این قضیه به صورت زیر است:

«اگر متغیر تصادفی X در طول فاصله (a,b) دارای توزیع پیوسته $F(x)$ باشد، آنگاه متغیر تصادفی $u = F(x)$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ است.»

در این مسئله $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ است، تابع $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ تابع توزیع این متغیر تصادفی می‌باشد:

از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt =$

$$1+e^{-t} = u \Rightarrow -e^{-t}dt = du \Rightarrow e^{-t}dt = -du$$

$$F(x) = \int \frac{-du}{u^2} = -\int u^{-2}du = -\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+e^{-t}}\Big|_{-\infty}^{x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow[\text{شده}]{\text{طبق قضیه گفته}} F(x) \sim u(0,1)$$

۴۸ـ گزینه «۱» از روش تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم:

$$M_Z(t) = M_{Y-X}(t) = E(e^{t(Y-X)}) = E(e^{tY-tX}) = (1-\frac{t}{2})^{-\frac{n}{2}} \cdot (1+\frac{t}{2})^{-\frac{m}{2}}$$

۴۹ـ گزینه «۲» اگر $g(X)$ و $h(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X باشند که امید ریاضی آن‌ها وجود دارد آنگاه:

$$E(h(X)+g(X)) = E(h(X)) + E(g(X))$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow E(X^2) = V(X) + E^2(X)$$

اگر $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

$X \sim N(0,8)$ بنابراین $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 8$.

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 8 + 0 = 8$$

$$E(e^{2X}) = M_X(2) = \exp(2\mu + \frac{4\sigma^2}{2}) = \exp(16)$$

$$E(X^2 + e^{2X}) = E(X^2) + E(e^{2X}) = 8 + e^{16}$$

۵۰ـ گزینه «۲» اگر $X \sim E(\theta)$ آنگاه $E(X) = \theta$, $V(X) = \theta^2$ اگر $X \sim U(a,b)$ آنگاه:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ E(X) = \frac{a+b}{2}$$

در اینجا میانگین توزیع نمایی λ است پس واریانس آن λ^2 است.

$$V(X) = V(Y) \Rightarrow \frac{(2-(-1))^2}{12} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{9}{12} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{غ ق ق} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

۵۱ـ گزینه «۱»

$$P(X \ge 1) = P(X \ge 1|\lambda = 1)P(\lambda = 1) + P(X \ge 1|\lambda = 2)P(\lambda = 2) = (\int_1^\infty e^{-x}dx)\frac{3}{4} + (\int_1^\infty 2e^{-2x}dx)\frac{1}{4}$$

$$= (-e^{-x}\Big|_1^\infty)\frac{3}{4} + (-e^{-2x}\Big|_1^\infty)\frac{1}{4} = \frac{3e^{-1}}{4} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1}{4}(3e^{-1} + e^{-2})$$

۵۲ـ گزینه «۳» اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و $g(X)$ و $h(Y)$ توابعی از آن‌ها باشند که امید ریاضی آن‌ها وجود دارد آنگاه:

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

$$V(XY+2) = V(XY) = E(XY)^2 - E^2(XY) = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2$$

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 2 + 1 = 3\ ,\ E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y) = 4 + 4 = 8$$

بنابراین:

$$V(XY+2) = V(XY) = (3 \times 8) - (1 \times 2)^2 = 20$$

۵۳ـ گزینه «۴» زمان بین ورودی‌ها نمایی است.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ E(X) &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}} \qquad x > 0$$

$$P(X < 70 | X > 60) = \frac{P(60 < X < 70)}{P(X > 60)} = \frac{\int_{60}^{70} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx}{\int_{60}^{\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx} = \frac{e^{-6} - e^{-7}}{e^{-6}} = 1 - e^{-1}$$

۵۴ـ گزینه «۳» می‌دانیم: $Z = \frac{X-2}{\sigma}$ و $\phi(0) = \frac{1}{2}$

$$P(X \ge 2 | X \ge 1) = \frac{P(X \ge 2, X \ge 1)}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X \ge 2)}{P(X \ge 1)} = \frac{1 - P(X < 2)}{1 - P(X < 1)} = \frac{1 - P(Z < \frac{2-1}{1})}{1 - P(Z < \frac{1-1}{1})} = \frac{1 - \phi(1)}{1 - \phi(0)} = \frac{1 - \phi(1)}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \phi(1)) = 2 - 2\phi(1)$$

۵۵ـ گزینه «۴» مساحت یک مستطیل برابر حاصل‌ضرب طول ضربدر عرض می‌باشد.

$$E(2|X|.|X|)=E(2X^2)=2E(X^2)=2\left[\mathrm{Var}(X)+E^2(X)\right]=2(\sigma^2+\mu^2)$$

۵۶ـ گزینه «۳» ابتدا متغیر را استاندارد می‌کنیم سپس از تقارن نرمال استفاده کرده و با راهنمایی مسئله مقدار σ را محاسبه می کنیم:

$$P(20\le X\le 40)=0/9\Rightarrow P(\frac{20-40}{\sigma}\le Z\le \frac{60-40}{\sigma})=P(\frac{-20}{\sigma}\le Z\le \frac{20}{\sigma})=0/9$$

$$\Rightarrow 2P(0\le Z\le \frac{20}{\sigma})=0/9\Rightarrow P(0\le Z\le \frac{20}{\sigma})=0/45\Rightarrow P(Z>\frac{20}{\sigma})=0/5-0/45=0/05\Rightarrow \frac{20}{\sigma}=1/645\Rightarrow \sigma=12/16$$

۵۷ـ گزینه «۱» اگر $X_1,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال باشند آنگاه هر ترکیب خطی از آن‌ها نیز دارای توزیع نرمال است.

۵۸ـ گزینه «۳» اگر $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ برای $i=1,\dots,n$ و X_i ها دو به دو مستقل باشند و a_i ها اعداد ثابت باشند آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_iX_i+b_i)\sim N(\sum_{i=1}^{n}(a_i\mu_i+b_i),\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)$$

بنابراین:

$$X_1+3X_2+4X_3\sim N(2+(3\times 2)+(4\times 3),9+(9\times 3)+(16\times 4))=N(20,100)$$

$$P(X_1+3X_2+4X_3>10)=P(Z>\frac{10-20}{\sqrt{100}})=P(Z>-1)=P(Z<1)=\Phi(1)$$

توزیع نرمال حول صفر متقارن است لذا:

$$P(Z>-a)=P(Z<a)\qquad a>0$$

۵۹ـ گزینه «۴» طبق رابطه احتمال پواسون $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ مقادیر احتمال صفر و ۱ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$P(X=0)=P(X=1)\Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^1}{1!}\Rightarrow e^{-\lambda}=e^{-\lambda}.\lambda\Rightarrow \lambda=1$$

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-1}-e^{-1}=1-2e^{-1}$$

۶۰ـ گزینه «۲» با یک توزیع هندسی به صورت مقابل مواجه هستیم.

$$P(X=x)=pq^{x-1}\qquad x=1,2,\dots$$

$$P(X=4)=(0/01)(0/99)^3$$

۶۱ـ گزینه «۴» در توزیع هندسی مقادیر احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(X=Y)=P(X=Y=1)+P(X=Y=2)+\cdots=P(X=1).P(Y=1)+P(X=2).P(Y=2)+\cdots$$

$$=p(1-p)^0.p(1-p)^0+p(1-p).p(1-p)+\cdots\quad =p^2+p^2(1-p)^2+\cdots=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}$$

این مجموع یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $(1-p)^2$ می‌باشد.

$$S=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدرنسبت}}$$

۶۲ـ گزینه «۲» با یک توزیع دوجمله‌ای روبرو هستیم:

$$X\sim bin(4,0/1)\Rightarrow P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{4}{0}(0/1)^0(0/9)^4-\binom{4}{1}(0/1)^1=(0/9)^3=0/0523$$

۶۳ـ گزینه «۱» از قضیه والد استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N)) + \mathrm{Var}(E(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N)) = E(N\mathrm{Var}(x)) + \mathrm{Var}(NE(x))$$

$$= E(N)\mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 \mathrm{Var}(N) = \sigma^2 + \mu^2$$

توجه کنید که کران Σ از صفرشروع شده است:

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \mathrm{Var}(X_0 + \sum_{i=1}^{N} X_i) = \mathrm{Var}X_0 + \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sigma^2 + \sigma^2 + \mu^2 = \mu^2 + 2\sigma^2$$

۶۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

P (تأخیر بیش از ۳۰ دقیقه) $= 0/25$ و $n = 6$

P (تأخیر حداکثر ۳۰ دقیقه) $= 1 - P$ (تأخیر بیش از ۳۰ دقیقه) $= 0/75 \Rightarrow X \sim \mathrm{Bin}(6\ \ 0/75)$

$$P(X=2) = \binom{6}{2}(0/75)^2(0/25)^4 = 15 \times (\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^4 = 15 \times \frac{3^2}{4^6} = 5 \times \frac{3^3}{4^6} = \frac{5}{3^3}(\frac{3}{4})^6 = \frac{5}{27}(\frac{3}{4})^6$$

۶۵ـ گزینه «۱» ابتدا λ را محاسبه کرده سپس از تابع احتمال پواسون مقدار احتمال را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{120}{60} = 2 \Rightarrow X \sim P(2) \Rightarrow P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \Rightarrow P(X=5) = \frac{e^{-2}\,2^5}{5!}$$

۶۶ـ گزینه «۱» در رابطه برنولی با استفاده از قانون احتمال کل خواهیم داشت:

$$Y \sim \mathrm{Ber}(\frac{X}{n}) \qquad y = 0, 1$$

$$p(X-Y=0) = p(X=Y) = p(X=Y=0) + p(X=Y=1) = p(X=0).p(Y=0 \mid X=0) + p(X=1).p(Y=1 \mid X=1)$$

$$= (1-p)^n(1-\frac{0}{n}) + \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}.\frac{1}{n} = (1-p)^n + p(1-p)^{n-1} = (1-p)^{n-1}(1-p+p) = (1-p)^{n-1}$$

۶۷ـ گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها، ۳ و ۲ = i و تعداد مولفه‌هائی که در سیستم i مولفه‌ای کار می‌کنند را X_i در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$X_2 \sim B(2, \frac{3}{4}) \quad , \quad X_3 \sim B(3, \frac{3}{4})$$

P (سیستم دو مولفه‌ای کار کند) $= P(X_2 \ge 1) = \binom{2}{1}(\frac{3}{4})(\frac{1}{4}) + \binom{2}{2}(\frac{3}{4})^2 = \frac{15}{16}$

P (سیستم سه مولفه‌ای کار کند) $= P(X_3 \ge 2) = \binom{3}{2}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + \binom{3}{3}(\frac{3}{4})^3 = \frac{54}{64}$

$\frac{15}{16} > \frac{54}{64}$ لذا سیستم دو مولفه‌ای بهتر است.

۶۸ـ گزینه «۴» اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسون و پارامترهای به ترتیب λ و μ باشند، آنگاه: $T = X + Y \sim P(\lambda + \mu)$

$$X \sim P(2),\quad Y \sim P(1) \Rightarrow T = X + Y \sim P(3)$$

$$P(T>1) = 1 - P(T \le 1) = 1 - [P(T=0) + P(T=1)] = 1 - (e^{-3} + e^{-3}\,3) = 1 - 4e^{-3} \quad ; \quad (P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ x = 0, 1, \ldots)$$

۶۹ـ گزینه «۱» آزمایش برنولی تنها دو وضعیت شکست و پیروزی دارد و پارامتر توزیع برنولی، احتمال پیروزی را مشخص می‌کند.

$$X \sim Ber(\frac{1}{3}) \Rightarrow P(X=1)=\frac{1}{3}\ ,\ P(X=0)=\frac{2}{3} \quad و \quad Y \sim Ber(\frac{1}{4}) \Rightarrow P(Y=1)=\frac{1}{4}\ ,\ P(Y=0)=\frac{3}{4}$$

تنها زمانی $Y=X+1$ برقرار است که $Y=1$ و $X=0$ باشد و به ازای سایر مقادیر X و Y رابطه برقرار نیست.

$$P(Y=X+1)=P(Y=1,X=0)\underset{\text{بنابراستقلال X و Y}}{=}P(Y=1)P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

۷۰ـ گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم با یک توزیع دوجمله‌ای روبرو هستیم:

$$E(x)=n.p=50\times\frac{2}{100}=1$$

۷۱ـ گزینه «۲» طبق رابطه امید ریاضی گسسته خواهیم داشت:

$$E(X)=\sum x.f(x)=\sum_{x=1}^{n}x.\frac{1}{n}=\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

۷۲ـ گزینه «۲» در توزیع دو جمله‌ای $E(x)=n\theta$ و $Var(x)=n\theta(1-\theta)$ بنابراین از خاصیت خطی امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=Var(X)+(E(X))^2-E(X)=n.\theta(1-\theta)+n^2\theta^2-n\theta$$

$$=n\theta-\cancel{n\theta^2}+n^2\theta^2-n\theta=\cancel{\theta^2}(n^2-n)=n(n-1)\theta^2$$

۷۳ـ گزینه «۲» با یک توزیع پواسون روبه‌رو هستیم:

$$X\sim P(5) \Rightarrow f(x)=\frac{e^{-5}5^x}{x!} \qquad x=0,1,...$$

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=e^{-5}+5e^{-5}+\frac{25}{2}e^{-5}=\frac{37}{2}e^{-5}$$

۷۴ـ گزینه «۴» با یک توزیع دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم:

$$\text{احتمال موفقیت برای یک‌بار}=P=P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}3x^2dx=x^3\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{7}{8}$$

$$\text{تعداد اعضای نمونه که از } \frac{1}{2} \text{ بزرگ‌تر است}: X\sim Bin(3,\frac{7}{8}) \Rightarrow P(X=x)=\binom{3}{x}(\frac{7}{8})^x(\frac{1}{8})^{3-x} \qquad x=0,1,2,3$$

$$\Rightarrow P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\binom{3}{2}(\frac{7}{8})^2(\frac{1}{8})+\binom{3}{3}(\frac{7}{8})^3=\frac{490}{512}$$

۷۵ـ گزینه «۳» توجه کنید که X و Y مستقل‌اند:

$$P(X=Y)=\sum_{x=0}^{n}P(X=x,Y=x)=\sum_{x=0}^{n}P(X=x)P(Y=x)$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\binom{n}{x}q^xp^{n-x}=p^nq^n\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\binom{n}{x}=\binom{2n}{n}p^nq^n$$

می‌دانیم دو رابطه زیر همواره برقرار است.

$$\binom{n}{x}=\binom{n}{n-x} \quad و \quad \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{n-x}\binom{n}{x}=\binom{2n}{n}$$

بنابراین:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\binom{n}{x}=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

۷۶ـ گزینه «۱» توجه کنید رابطه خطی بین X و Y با شیب ۱- می‌باشد.

$$\left.\begin{matrix} X\sim Bin(n,p) \\ Y\sim Bin(n,q)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad Y=n-X \quad \Rightarrow \rho=\frac{var(X,n-X)}{\sqrt{Var(X)Var(n-X)}}=\frac{-Var(X)}{Var(X)}=-1 \Rightarrow \rho=-1$$

۷۷ـ گزینه «۳» اگر $X\sim P(\lambda)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x=0,1,\cdots$$

اگر $X\sim P(\lambda)$ آنگاه $E(X)=\lambda$

$$\frac{1}{2}=P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\Rightarrow\frac{1}{2}=1-e^{-\lambda}\Rightarrow e^{-\lambda}=\frac{1}{2}$$

از دو طرف عبارت لگاریتم در پایه نپر می‌گیریم:

$$-\lambda=Ln\frac{1}{2}\Rightarrow -\lambda=-Ln2$$

بنابراین، $\lambda=Ln2$ و $E(X)=Ln2$

۷۸ـ گزینه «۴» یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و p را با کم کردن میانگین np و سپس با تقسیم بر انحراف معیار $\sqrt{np(1-p)}$ به صورت استاندارد درمی‌آید. این متغیر تصادفی استاندارد شده (دارای میانگین صفر و واریانس ۱) وقتی n بزرگ باشد، دارای توزیع نرمال استاندارد است، بنابراین:

$$P(X>np)=P(\frac{X-np}{\sqrt{npq}}>\frac{np-np}{\sqrt{npq}})=P(Z>0)=\frac{1}{2}$$

۷۹ـ گزینه «۴» اگر زمان لازم تا انجام n امین اتفاق (متغیر تصادفی گاما) کمتر یا مساوی z باشد آنگاه تا زمان z هنوز n اتفاق رخ نداده است بنابراین:

$$P(Z\leq z)=P(X\geq n)$$

۸۰ـ گزینه «۱» ترکیب خطی توزیع نرمال، نرمال است. بنابراین داریم:

(توجه کنید کوواریانس‌ها صفر است چرا که متغیرها مستقل‌اند)

$$E(X_1-X_2+X_3)=0$$

$$Var(X_1-X_2+X_3)=Var\,X_1+Var\,X_2+Var\,X_3=3$$

$$E(X_4+X_5-X_6)=0 \quad ; \quad Var(X_4+X_5-X_6)=3$$

$$\frac{X_1-X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)\Rightarrow(\frac{X_1-X_2+X_3}{\sqrt{3}})^2\sim\chi^2_{(1)} \quad ; \quad (\frac{X_4+X_5-X_6}{\sqrt{3}})^2\sim\chi^2_{(1)} \Rightarrow \frac{X_4+X_5-X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$$

از طرفی دو عبارت از هم مستقل‌اند پس مجموعشان $\chi^2_{(2)}$ است. که همان توزیع نمایی با میانگین ۲ است، زیرا داریم:

$$\chi^2_{(2)}\equiv\Gamma(1,2)\equiv EXP(\frac{1}{2})$$

$$P(\frac{(X_1-X_2+X_3)^2+(X_4-X_5-X_6)^2}{3}>2)=P((X_1-X_2+X_3)^2+(X_4+X_5-X_6)^2>6)\Rightarrow$$

$$P(\chi^2_{(2)}>2)=P(Y>2)=\int_2^\infty\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=-e^{-\frac{y}{2}}\Big|_2^\infty=0+e^{-\frac{2}{2}}=e^{-1}$$

۸۱ـ گزینه «۲» توجه کنید که:

$$\begin{cases}E(\bar{X})=\mu_1\\ Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\end{cases} , \quad \begin{cases}E(\bar{Y})=\mu_2\\ Var(\bar{Y})=\frac{\sigma^2}{n}\end{cases}$$

می‌باشد، صورت را جداگانه و مخرج را نیز جداگانه محاسبه کرده جایگذاری می‌کنیم:

$$Var(\bar{X}-\bar{Y})=Var(\bar{X})+Var(\bar{Y})-2Cov(\bar{X},\bar{Y})=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}-2Cov(\frac{\sum x_i}{n},\frac{\sum y_i}{n})=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov(X_i,X_j)$$

چون X_i ها و Y_i ها از یکدیگر مستقل هستند $Cov(x_i,x_j)$ به ازای $i\neq j$ صفر است:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n COV(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n COV\underbrace{\cancel{(X_1,Y_1)}}_{0}+COV\underbrace{\cancel{(X_2,Y_2)}}_{0}+\ldots+COV(X_i,Y_i)+\ldots+COV\underbrace{\cancel{(X_n,Y_n)}}_{0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} COV(X_i, Y_i) \overset{\text{طبق صورت مسأله}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} \rho\sigma^2 = n\rho\sigma^2$$

بنابراین:

$$Var(\bar{X}-\bar{Y}) = \frac{2\sigma^2}{n} - 2\frac{n\rho\sigma^2}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n}(1-\rho) \quad \text{(صورت کسر)}$$

اکنون مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$Var(\bar{Z}-\bar{U}) = Var(\bar{Z}) + Var(\bar{U}) - 2COV(\bar{Z},\bar{U}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} - 0 = \frac{2\sigma^2}{n}$$

$$\frac{Var(\bar{X}-\bar{Y})}{Var(\bar{Z}-\bar{U})} = \frac{\frac{2\sigma^2}{n}(1-\rho)}{\frac{2\sigma^2}{n}} = 1-\rho$$

۸۲ـ گزینه «۲» **روش اول:** در توزیع نرمال $\bar{X}$ و S^2 از هم مستقل‌اند. بنابراین هر تابعی از آن‌ها نیز از هم مستقل‌اند.

$$X_1 + X_2 \sim N(0,2) \qquad ; \qquad X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2_{(2)}$$

روش دوم: از رابطه ضریب همبستگی خطی استفاده می‌کنیم:

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x, \sigma_y}$$

$$COV(X_1+X_2, X_1^2+X_2^2) = COV(X_1, X_1^2) + COV(X_1, X_2^2) + COV(X_2, X_1^2) + COV(X_2, X_2^2)$$

$$= E(X_1.X_1^2) - E(X_1).E(X_1^2) + E(X_1.X_2^2) - E(X_1).E(X_2^2) + E(X_2.X_1^2) - E(X_2)E(X_1^2) + E(X_2.X_2^2) + E(X_2).E(X_2^2)$$

$$= E(X_1^3) - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + E(X_2^3) - 0 = 0$$

یادآوری: در توزیع نرمال استاندارد گشتاورهای فرد $E(X_i) = E(X_i^3) = E(X_i^5) = 0$ صفر است.

۸۳ـ گزینه «۴» به طور متوسط در هر ۲ دقیقه ۱ ماشین بنزین‌گیری کند، لذا در یک ساعت به طور متوسط ۳۰ اتومبیل می‌توانند بنزین‌گیری کنند.

۸۴ـ گزینه «۴» اگر $X \sim E(\theta)$ آنگاه $E(X) = \theta$ و $V(X) = \theta$ بنابراین، $E(X) = \sqrt{16} = 4$

۸۵ـ گزینه «۳» اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، آنگاه $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ بنابراین:

$$E(e^{2X}) = M_X(2) = \exp(2\times 2 + \frac{4\times 4}{2}) = \exp(12)$$

۸۶ـ گزینه «۱» توزیع هندسی می‌باشد و میانگین برابر $\frac{1}{p}$ است.

$$E(X) = 10 = \frac{1}{p} \Rightarrow p = 0/1 \Rightarrow p(X=x) = 0/1 \times (0/9)^{x-1}$$

$$P(X<3) = P(X=1) + P(X=2) = Pq^{1-1} + Pq^{2-1} = 0/1 + 0/1\times 0/9 = 0/19$$

۸۷ـ گزینه «۲» A : پیشامد این‌که سومین قطعه انتخابی سالم باشد. B: پیشامد این‌که نمونه شامل ۳ قطعه سالم باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{8}{3}\binom{4}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{8\times 8\times 7}{990}$$

$$P(A\cap B) = \frac{4}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}\times\frac{6}{9} + \frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{7}{10}\times\frac{6}{9} + \frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9} = 3\times\frac{8\times 7\times 6\times 4}{12\times 990} = \frac{8\times 7\times 6}{990}$$

مقادیر به دست آمده را در فرمول احتمال شرطی قرار می‌دهیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{8\times 7\times 6}{8\times 8\times 7} = \frac{3}{4}$$

۸۸ـ گزینه «۱» اگر در هر جعبه یک قطعه معیوب وجود داشته باشد، در این صورت احتمال پذیرفتن جعبه برابر $= \frac{\binom{25-k}{5}\binom{k}{0}}{\binom{25}{5}} = 0/8$ است لذا ۸۰% از جعبه‌ها پذیرفته می‌شوند. در واقع این احتمال به ازای $k=1$ برابر با ۸۰% می‌باشد.

۸۹ـ گزینه «۲» توزیع دو جمله‌ای منفی می‌باشد چرا که متغیر تصادفی X تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به دومین موفقیت می‌باشد: $E(X) = \frac{r}{p} = \frac{2}{\frac{2}{10}} = 10$

۹۰ـ گزینه «۲» توزیع چندجمله‌ای: اگر بردار تصادفی $X = (X_1, ..., X_k)$ دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$f_p(x) = f_p(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i} \prod_{i=1}^{k} p_i^x \qquad x_i = 0, 1, ..., n$$

به طوری که $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ ، $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$ و $P_i \geq 0$ است. گوییم X دارای توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای $(p_k, ..., p_1, n)$ است و آن را با نماد $X \sim M(n, p_1, ..., p_k)$ نشان می‌دهیم.

اگر $X \sim M(n, p_1, ..., p_k)$ آنگاه:

$$E(X_i) = np_i \qquad i = 1, ..., k$$
$$V(X_i) = np_i(1-p_i) \qquad i = 1, ..., k$$
$$cov(X_i, X_j) = -np_i p_j \qquad i \neq j$$

احتمال رخداد A_k برابر است با احتمال یک شکست و یک پیروزی یعنی، pq.

و تعداد دفعاتی که $A_1, ..., A_n$ رخ می‌دهند دارای توزیع چند جمله‌ای است لذا: $E(Y_n) = n(pq)$

۹۱ـ گزینه «۲» اگر متغیر تصادفی X را تعداد قطعات سالم در نظر بگیریم آنگاه $X \sim B(2500, 0/98)$. بنابراین:

$$E(X) = npq = (2500)(0/98)(0/02) = 49$$

۹۲ـ گزینه «۳» از این رابطه احتمال $\min(x, y)$ را بدست می‌آوریم: $P(U=t) = P(U \geq t) - P(U \geq t+1)$

$$P(U \geq t) = P(\min(X,Y) \geq t) = P(X \geq t, Y \geq t) = P(X \geq t)P(Y \geq t) = (\sum_{x=t}^{\infty} pq^x)(\sum_{y=t}^{\infty} r(1-r)^y) = q^t(1-r)^t$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که: $P(U \geq t+1) = q^{t+1}(1-r)^{t+1}$

بنابراین: $P(U=t) = (q(1-r))^t - (q(1-r))^{1+t} = (q(1-r))^t(1-q(1-r))$

نشان می‌دهد U دارای توزیع هندسی با پارامتر $1-q(1-r)$ است که: $1-q(1-r) = 1-(1-p)(1-r) = 1-(1-p-r+pr) = p+r-pr$

تذکر: $\sum_{n=k}^{\infty} a^x$ یک سری هندسی است و در صورتی که $|a| < 1$ همگراست و مجموع آن برابر است با: $\frac{a^k}{1-a}$

۹۳ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه در بازه $(0, 1)$ اعداد به تصادف به صورت یکنواخت پخش شده‌اند بنابراین هر کدام از X_i ها با احتمال $\frac{1}{2}$ کمتر از $\frac{1}{2}$ می‌باشند. در نتیجه $p = \frac{1}{2}$ و $n = 10$ با یک توزیع۷ دو جمله‌ای روبرو هستیم:

$$p(X=5) = \binom{10}{5}(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^5 = \frac{252}{1024} \simeq 0/246$$

۹۴ـ گزینه «۲» مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع هندسی با پارامتر p متغیرهای تصادفی جدیدی به فرم دوجمله‌ای منفی است.

$$X_i \sim Ge(p) \to y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N_B(n,p)$$

۹۵ـ گزینه «۳»

روش اول: توجه کنید که:

$$T = x + y \sim B(10, 0/2) \Rightarrow P(T=t) = \binom{n}{t} P^t q^{n-t}$$

$$E(X|X+Y) = \sum_{x=0}^{4} x.P(x|x+y) = \sum_{x=0}^{4} x.\frac{P(X=x).P(Y=5-x)}{P(X+Y=5)}$$

$$= \sum_{x=0}^{4} x \frac{\binom{4}{x}.\cancel{(0/2)^x}.\cancel{(0/8)^{4-x}}.\binom{6}{5-x}.\cancel{(0/2)^{5-x}}.\cancel{(0/8)^{1+x}}}{\binom{10}{5}.\cancel{(0/2)^5}\ \cancel{(0/8)^5}} = 0\times\frac{6}{252} + 1\times\frac{60}{252} + 2\times\frac{120}{252} + 3\times\frac{60}{252} + 4\times\frac{6}{252} = \frac{504}{252} = 2$$

روش دوم:

نکته:

$$X \sim B(n_x, p)\ \&\ Y \sim B(n_y, p) \Rightarrow E(X|X+Y=K) = K\frac{n_x}{n_x+n_y}$$

در این مسئله داریم:

$$E(X|X+Y) = 5\frac{4}{4+6} = \frac{20}{10} = 2$$

۹۶ـ گزینه «۳» اگر $X \sim U\{1,\cdots,N\}$ آنگاه $P(X=x) = \frac{1}{N}$, $P(X>x) = \frac{N-x}{N}$

$P(X>Y) =$ طبق رابطه احتمال کل $\sum_{y=1}^{N} P(X>y|Y=y)P(Y=y) = \frac{1}{N}\sum_{y=1}^{N} P(X>y) = \frac{1}{N}[\frac{N-1}{N} + \frac{N-2}{N} + \cdots + \frac{1}{N}]$

$$= \frac{1}{N^2}[(N-1)+(N-2)+\cdots+1] = \frac{(N-1)N}{2N^2} = \frac{N-1}{2N}$$

نکته: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

۹۷ـ گزینه «۳» طبق قانون احتمال کل:

$$P(X+Y=10) = \sum_{y=1}^{\infty} P(X+Y=10|Y=y)P(Y=y) = \sum_{y=1}^{9} P(X=10-y)P(Y=y)$$

$x \ge 1$ است، بنابراین باید $10-y \ge 1$ باشد که نتیجه می‌دهد $y \le 9$. اگر $y > 9$ آنگاه $P(X=10-y)=0$

$$\Rightarrow \sum_{y=1}^{9} (\frac{1}{2})(\frac{2}{3})^{10-y}(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})^{y} = \sum_{y=1}^{9} (\frac{1}{4})(\frac{2}{3})^{10} = \frac{9}{4}\times(\frac{2}{3})^{10} = (\frac{3}{2})^2(\frac{2}{3})^{10} = (\frac{2}{3})^8$$

۹۸ـ گزینه «۱»

$$P(Y=k)=P([nX]=k)=P(k\le nX<k+1)=P(\frac{k}{n}\le X<\frac{k+1}{n})=\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}dx=\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$$

$x\in[0,1]$ بنابراین باید $\frac{k+1}{n}\le 1$ که نتیجه می‌دهد $k\le n-1$

اگر $k=n$ آنگاه:

$$P(Y=k)=P([nX]=n)=P(n\le nX<n+1)=P(1\le X<1+\frac{1}{n})=0$$

بنابراین:

$$P(Y=k)=\begin{cases}\frac{1}{n} & k=0,1,\cdots,n-1\\ 0 & k=n\end{cases}$$

۹۹ـ گزینه «۳» اگر احتمال به مقصد نرسیدن ٪۷ باشد احتمال به مقصود رسیدن ٪۹۳ است. همچنین قیمت هر کتاب ۲۰ دلار می‌باشد بنابراین قیمت دو کتاب برابر با ۴۰ دلار می‌باشد.

اکنون در حالت پست یک بسته خواهیم داشت:

$$E(X)=(2\times 20+5/20)\times\%7+5/20\times\%93=8$$

در حالتی که دو بسته پست شود هزینه هر کتاب ۳/۳۰ است که می‌تواند هر دو کتاب به مقصد نرسد یا یکی از آن‌ها به مقصد برسد یا هر دو به مقصد برسند.

$$E(X)=(2\times 20+2\times 3/30)\times(\%7)\times(\%7)+(20+2\times 3/30)\times\binom{2}{1}\times(\%7)\times(\%93)+(2\times 3/30)\times(\%93)\times(\%93)=9/4$$

۱۰۰ـ گزینه «۲»

$$\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{7}Z_i\ ,\ \sum_{i=1}^{7}Z_i+\sum_{i=8}^{15}Z_i)=\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{7}Z_i\ ,\ \sum_{i=1}^{7}Z_i)+\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{7}Z_i\ ,\ \sum_{i=18}^{15}Z_i)=\sum_{i=1}^{7}\operatorname{var}(Z_i)+0=\sum_{i=1}^{7}1=7$$

۱۰۱ـ گزینه «۳» X را تعداد ارقام اعشاری تا رسیدن به دهمین ۳ در نظر بگیرید، بنابراین $X\sim NB(10,\frac{1}{10})$

ظاهر شدن ۳ در بسط اعشاری به منزله پیروزی است که با احتمال $\frac{1}{10}$ رخ می‌دهد زیرا ۳ از بین مجموعه $\{0,1,\cdots,9\}$ انتخاب می‌شود و رسیدن به دهمین ۳ به منزله‌ی ۱۰امین پیروزی است. اگر $X\sim NB(r,p)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}\qquad x=r,r+1,\cdots$$

و $E(X)=\frac{r}{P}\ ,\ V(X)=\frac{rq}{p^2}$ بنابراین: $E(X)=\frac{10}{\frac{1}{10}}=100$

۱۰۲ـ گزینه «۲»

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$\int xe^x dx=(x-1)e^x+c\qquad \int xe^{-x}=-(x+1)e^{-x}+c$$

$$\int x^2e^x dx=e^x(x^2-2(x-1))+c\qquad \int x^2e^{-x}dx=e^{-x}(-x^2-2(x+1))+c$$

انتگرال‌های فوق به روش جزء به جزء محاسبه می‌شوند.

$$\int udv=vu-\int vdu$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}dx=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}xe^x dx+\int_{0}^{\infty}xe^{-x}dx]=\frac{1}{2}[e^x(x-1)\Big|_{-\infty}^{0}+e^{-x}(-x-1)\Big|_{0}^{\infty}]=\frac{1}{2}(-1+1)=0$$

$$E(X^۲)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^۲}{۲}e^{-|x|}dx=\frac{۱}{۲}[\int_{-\infty}^{\circ}x^۲e^{x}dx+\int_{\circ}^{\infty}x^۲e^{-x}dx]=\frac{۱}{۲}[e^{x}(+x^۲-۲(x-۱))\Big|_{-\infty}^{\circ}+e^{-x}(-x^۲-۲(x+۱))\Big|_{\circ}^{\infty}]=\frac{۱}{۲}[۲+۲]=۲$$

$$\Rightarrow V(X)=E(X^۲)-E^۲(X)=۲-\circ=۲$$

برای محاسبه مقادیر انتگرال‌های فوق زمانی که $x\to\pm\infty$ از حدگیری استفاده می‌شود. به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x}(x^۲-۲(x-۱))=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-۲x+۲}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۲}{=e^{-x}}=\frac{۲}{\infty}=\circ$$

۱۰۳ـ گزینه «۱» اگر $X\sim P(\lambda)$ آنگاه زمان وقوع n امین اتفاق که با T_n نمایش می‌دهیم دارای توزیع گاما با پارامترهای $n,\frac{۱}{\lambda}$ است. $T_n\sim G(n,\frac{۱}{\lambda})$

بنابراین: $T_{۴\circ\circ}\sim G(۴\circ\circ,\frac{۱}{۲\circ})$

هنگامی زمان انجام ۴۰۰ مکالمه حداقل ۲۱ ساعت است که زمان وقوع ۴۰۰ امین اتفاق بزرگتر مساوی ۲۱ باشد. $P(T_{۴\circ\circ}\ge ۲۱)$

نکته: اگر $X\sim G(n,\alpha)$ باشد زمانی که $n\to\infty$

$$\frac{X-n\alpha}{n\alpha^۲}\sim N(\circ,۱)$$

در اینجا $n\alpha=\frac{n}{\lambda}=\frac{۴\circ\circ}{۲\circ}=۲\circ$ و $n\alpha^۲=\frac{n}{\lambda^۲}=\frac{۴\circ\circ}{۴\circ\circ}=۱$

بنابراین T_n دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین ۲۰ و واریانس ۱ است لذا:

$$P(T_{۴\circ\circ}\ge ۲۱)=P(\frac{T_{۴\circ\circ}-۲\circ}{۱}\ge\frac{۲۱-۲\circ}{۱})=P(Z\ge ۱)=۱-P(Z<۱)=۱-\circ/۸۴۱۳=\circ/۱۵۸۷$$

۱۰۴ـ گزینه «۱»

$$P(XY-X-Y+۱>\circ)=P(X(Y-۱)-(Y-۱)>\circ)=P((X-۱)(Y-۱)>\circ)$$

$(X-۱)(Y-۱)>\circ$ اگر و فقط اگر $\{(Y-۱)>\circ,(X-۱)>\circ\}$ یا $\{(X-۱)<\circ$ و $(Y-۱)<\circ\}$ که دو پیشامد ناسازگارند علاوه بر آن X و Y مستقل‌اند بنابراین:

$$P((X-۱)(Y-۱)>\circ)=P((X-۱)>\circ,(Y-۱)>\circ)+P((X-۱)<\circ,(Y-۱)<\circ)=$$
$$P(X-۱>\circ)P(Y-۱>\circ)+P(X-۱<\circ)P(Y-۱<\circ)$$

اگر $X\sim N(\mu,\sigma^۲)$ آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(\circ,۱)$ بنابراین $X-۱\sim N(\circ,۱)$, $Y-۱\sim N(\circ,۱)$ در نتیجه عبارت فوق برابر است با:

$$P(Z>\circ)P(Z>\circ)+P(Z<\circ)P(Z<\circ)=(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۵ـ گزینه «۴» $cov(X,V)=E(XV)-E(X)E(V)$, $E(X)=\circ$ بنابراین $cov(X,V)=E(XV)$

$E(X|Y)$ تابعی از متغیر تصادفی Y است که مقدار آن در $Y=y$ برابر $E(X|Y=Y)$ بوده و خود یک متغیر تصادفی است. یک خاصیت مهم امید ریاضی شرطی به صورت مقابل است: $E(X)=E(E(X|Y))$

V تابعی از متغیر تصادفی Y است بنابراین: $E(XV)=E(E(XV|Y))$

و $XV=\begin{cases}X^۲ & ,Y=۱\\ -X^۲ & ,Y=\circ\end{cases}$ در نتیجه:

$$E(XV)=E(E(XV|Y))=E(X^۲P(Y=۱)+(-X^۲)P(Y=\circ))=$$
$$E(X^۲p+(-X^۲)(۱-p))=E(۲pX^۲-X^۲)=(۲p-۱)E(X^۲)=۲p-۱$$

که در آن، $E(X^۲)$ از رابطهٔ $E(X^۲)=V(X)+E^۲(X)$ به دست می‌آید. $E(X^۲)=۱+\circ=۱$

بنابراین: $۲pE(X^۲)-۱=۲p-۱$

۱۰۶ـ گزینه «۲» با یک طرفین ـ وسطین ساده خواهیم داشت:

$$P(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}<\frac{1}{3})=P(X_1+X_2+X_3<1)$$

$$=P(X_1=0\,,\,X_2=0\,,X_3=0)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)\cdot P(X_3=0)=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}\cdot\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}\cdot\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}=e^{-6}$$

اگر $X_i\sim P(\lambda)$ باشد، در این‌صورت $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$.

۱۰۷ـ گزینه «۳» X: تعداد مهره‌های سیاه در ۵ آزمایش، بنابراین: $X\sim B(5,\frac{3}{9})$

یادآوری: اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\qquad x=0,1,\cdots,n$$

$$P(X=2k+1)=P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)=\binom{5}{1}(\frac{3}{9})(\frac{6}{9})^4+\binom{5}{3}(\frac{3}{9})^3(\frac{6}{9})^2+\binom{5}{5}(\frac{3}{9})^5=\frac{121}{243}$$

۱۰۸ـ گزینه «۴» طبق قانون احتمال کل، همواره داریم:

$$P(Z=t)=P(X+Y=t)=\sum_{y=1}^{t-1}P(X=t-y)P(Y=y)$$

زیرا $1\le y\le t-1$

$$x\ge 1\Rightarrow t-y\ge 1\Rightarrow t-1\ge y$$

و

$$\sum_{y=1}^{t-1}P(X=t-y)P(Y=y)=\sum_{y=1}^{t-1}p(1-p)^{(t-y)-1}p(1-p)^{y-1}=\sum_{y=1}^{t-1}p^2(1-p)^{(t-2)}=(t-1)p^2(1-p)^{t-2}$$

$$=\binom{t-1}{1}p^2(1-p)^{(t-1)}\qquad t=2,3,\cdots$$

یادآوری: اگر $X\sim NB(r,p)$ آنگاه:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r}\quad x=r,r+1,r+2,\cdots$$

بنابراین Z دارای توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامترهای ۲ و p است.

۱۰۹ـ گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم که با یک توزیع دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم که به صورت زیر می‌باشد:

X : تعداد مراجعه به پارک A

$$X\sim B(10\,,\,\frac{1}{6})\Rightarrow p(X=x)=\binom{10}{x}.(\frac{1}{6})^x.(\frac{5}{6})^{10-x}$$

احتمال خواسته شده یک احتمال شرطی است که به صورت زیر است:

$$p(x\ge 2\,|\,x\ge 1)=\frac{p(x\ge 2)}{p(x\ge 1)}=\frac{1-p(x<2)}{1-p(x<1)}=\frac{1-p(x-0)-p(x=1)}{1-p(x=0)}=\frac{1-\binom{10}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{10}-\binom{10}{1}(\frac{1}{6})^{14}(\frac{5}{6})^9}{1-\binom{10}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{10}}$$

$$=\frac{10-(\frac{5}{6})^{10}-\frac{10(5)^9}{6^{10}}}{1-(\frac{5}{6})^{10}}=\frac{0/515}{0/838}=0/615$$

۱۱۰ـ گزینه «۱» آزمایش i ام موفقیت باشد یعنی در توزیع برنولی $X_i=1$ باشد چرا که در توزیع برنولی X_i ها می‌توانند فقط دو مقدار صفر و ۱ را اختیار کنند اما توجه کنید که شرط k موفقیت را در اینجا خواهیم داشت، بنابراین:

$$P(X_i=1|\sum_{i=1}^{n-1}X_i=k)=\frac{P(X_i=1,\sum_{i=1}^{n-1}k)}{P(\sum X_i=k)}=\frac{P(X_i=1).P(\sum_{i=1}^{n-1}X_i=k-1)}{P(\sum X_i=k)}=\frac{P.\binom{n-1}{k-1}.P^{k-1}q^{n-k}}{\binom{n}{k}.P^kq^{n-k}}=\frac{k}{n}$$

۱۱۱ـ گزینه «۲» از روش تابع مولد گشتاور استفاده کرده توزیع T را به دست می‌آوریم:

$$M_T(t)=E(e^{tX-tY+9t})=E(e^{tX})\cdot E(e^{-tY})\cdot e^{9t}$$

$$M_X(t)\cdot M_Y(-t)\cdot e^{9t}=(\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3})^4\cdot(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3})^9.e^{9t}=(\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3})^4\cdot(\frac{2}{3e^t}+\frac{1}{3})^9\cdot e^{9t}$$

$$=(\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3})^4\cdot(\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3})^9\cdot e^{-9t}\cdot e^{9t}=(\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3})^{13}\sim Bin(13,\frac{1}{3})$$

یادآوری: $X\sim B(n,p)\ \Rightarrow M_X(t)=(q+pe^t)^n$

۱۱۲ـ گزینه «۴» اگر $M_X(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد، آنگاه:

$$M_X^{(n)}(0)=E(X^n)$$

بسط تیلور: اگر مشتقات تابع f تا هر مرتبه دلخواهی در $x_0=0$ موجود باشند سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ را بسط تیلور تابع f می‌نامیم. با توجه به دو نکته فوق:

$$M_X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_X^{(n)}(0)}{n!}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X^n)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{n!}{a^n}}{n!}.t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{a})^n=\frac{1}{1-\frac{t}{a}}=\frac{a}{a-t}\qquad a<t$$

اگر $X\sim E(\lambda)$ آنگاه $M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$ و چون رابطه بین توابع مولد گشتاور و توزیع‌ها احتمال یک به یک است، بنابراین X دارای توزیع نمایی با پارامتر a است. $X\sim E(a)$

۱۱۳ـ گزینه «۳» با استفاده از قانون احتمال کل در مخرج کسر رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$P(X=x|X+Y=n)=\frac{P(X=x,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=x\ ,Y=n-x)}{\sum_{x=0}^{n}P(X+Y=n|X=x)P(X=x)}$$

و بنابر استقلال X و Y داریم:

$$=\frac{P(X=x)P(Y=n-x)}{\sum_{x=0}^{n}P(Y=n-x)P(X=x)}=\frac{(pq^x)(pq^{n-x})}{\sum_{x=0}^{n}(pq^{n-x})(pq^x)}=\frac{p^2q^n}{\sum_{x=0}^{n}p^2q^n}=\frac{p^2q^n}{(n+1)p^2q^n}=\frac{1}{n+1}\ ,\ \forall x=0,1,\cdots,n$$

بنابراین: $X|X+Y=n\sim U\{0,1,\cdots,n\}$

۱۱۴ـ گزینه «۲» از برد Z متوجه می‌شویم که Z گسسته است پس امید ریاضی آن برابر است با $E(z)=\sum_z zf(z)$، بنابراین :

$$E(Z)=\sum_z zf(z)=\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-1}i\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\sum_{i}^{2k-1}i$$

حال باید مجموع اعداد فرد را به دست آوریم، می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$ بنابراین $\sum_{i=1}^{2k-2}i=\frac{(2k-1)(2k-1+1)}{2}=k(2k-1)$. برای یافتن مجموع اعداد فرد کافی است که مجموعه اعداد زوج را از مجموع کل اعداد یعنی، $k(2K-1)$ کم کنید:

$$\sum_{i\ \text{زوج}}^{2k-2}i=2+4+6+...+2(k+1)=2[1+2+3+...+(k-1)]=2\sum_{i=1}^{k-1}i=2\frac{(k-1)(k-1+1)}{2}=k(k-1)$$

مجموع اعداد زوج $k(k-1)$ و مجموعه کل اعداد $k(2k-1)$ است لذا مجموعه اعداد فرد برابر است با $k(2k-1)-k(k-1)=k^2$. حال امید ریاضی را به دست می‌آوریم:

$$E(Z)=\frac{1}{k}\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-1}i=\frac{1}{k}(k^2)=k$$

پس گزینه ۲ یا ۳ صحیح است. حال واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=E(z^2)-k^2$$

ابتدا باید $E(z^2)$ را به دست آوریم:
$$E(Z^2)=\sum_z z^2 f(z)=\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-1} i^2\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-1} i^2$$

می‌دانیم که باید $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ بنابراین $\sum_{i=1}^{2k-1} i^2=\frac{(2k-1)(2k-1+1)(2[2k-1]+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(4k-1)}{3}$. حال مجموع توان دوم مقادیر زوج را به دست می‌آوریم:
$$\sum_{i\ \text{زوج}}^{2k-2} i^2=2^2+4^2+6^2+\dots+(2k-2)^2=4(1^2+2^2+3^2+\dots+(k-1)^2)=4\sum_{i=1}^{k-1} i^2=4\,\frac{(k-1)(k-1+1)(2[k+1]+1)}{6}=\frac{2k(k-1)(2k-1)}{3}$$

برای یافتن مجموع توان دوم مقادیر فرد کافی است مجموع توان دوم مقادیر زوج را از مجموع توان دوم کل اعداد کم کنیم:
$$\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-2} i^2=\sum_{i=1}^{2k-1} i^2-\sum_{i\ \text{زوج}}^{2k-2} i^2=\frac{k(2k-1)(4k-1)}{3}-\frac{2k(k-1)(2k-1)}{3}=\frac{k(4k^2-1)}{3}$$

بنابراین امید z^2 را به دست می آوریم:
$$E(z^2)=\frac{1}{k}\sum_{i\ \text{فرد}}^{2k-2} i^2=\frac{1}{k}\frac{k(4k^2-1)}{3}=\frac{4k^2-1}{3}$$

حال واریانس z را محاسبه می‌کنیم:
$$\operatorname{var}(z)=E(z^2)-k^2=\frac{4k^2-1}{3}-k^2=\frac{k^2-1}{3}$$

روش دیگر این است که $k=1$ قرار دهیم که فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

۱۱۵ـ گزینه «۱» فرض کنید n تعداد پرتاب‌های لازم تا رسیدن به دومین شیر باشد، بنابراین حتماً در پرتاب nام شیر داریم و احتمال آن $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم یکی از $n-1$ پرتاب شیر و باقی خط باشد که به $n-1$ حالت ممکن است. پس تابع توزیع به صورت زیر است:
$$f(x)=\frac{1}{2}(n-1)\frac{1}{2}\underbrace{(\frac{1}{2})^{n-2}}=(n-1)(\frac{1}{2})^n$$

احتمال این‌که پرتاب آخر شیر باشد

تعداد حالاتی که از n-1 پرتاب تنها یک شیر داشته باشیم

احتمال این‌که در n-1 پرتاب شیر داشته باشیم

می‌خواهیم احتمال این‌که n زوج باشد را به دست آوریم یعنی، $P(n=2k)$ پس خواهیم داشت:
$$P(n=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(\frac{1}{2})^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(2k)(\frac{1}{2})^{2k}-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k}$$

در نتیجه هر مجموع را جداگانه به دست می آوریم ابتدا توجه کنید که:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{2k}=\frac{a^2}{1-a^2}\quad,\quad \sum_{k=1}^{\infty} 2ka^{2k-1}=\frac{2a}{(1-a^2)^2}\ \text{سپس}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(\frac{1}{2})^{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2k(\frac{1}{2})^{2k}=\frac{1}{2}\frac{2(\frac{1}{2})}{(1-(\frac{1}{2})^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{9}{16}}=\frac{8}{9}\quad;\quad \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k}=\frac{(\frac{1}{2})^2}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$
$$\xrightarrow[\text{زوج بودن n را به دست می‌آوریم}]{\text{با توجه به دو مجموع به دست آمده احتمال}} P(n=2k)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

۱۱۶ـ گزینه «۴» چون این زوج از هر دو جنس بچه می‌خواهند بنابراین تا زمانی بچه‌دار می‌شوند که بچه‌ای از جنس مخالف بـه دنیـا آیـد. فـرض کنیـد ایـن زوج n فرزند داشته باشند و فرزند آخر آن‌ها پسر B باشد، در این صورت $n-1$ فرزند قبلی دختر هستند. بنابراین احتمال چنین حـالتی $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}$ اسـت. چـون عکـس این حالت نیز ممکن است پس تابع چگالی فرزند داشتن این زوج به صورت $f(n)=2\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-1}$ است. هدف این سوال امید ریاضی n با تـابع چگـالی معرفی شده است. توجه کنید که حداقل مقدار n، ۲ است پس $n=2,3,\dots$

$$E(n)=\sum_{n=2}^{\infty} nf(n)=\sum_{n=2} n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

۱۱۷ـ گزینه «۲» روش اول: می‌دانیم که $P(X=x-1),\ P(X=x)$ هر دو تابع چگالی هستند پس $\sum_{x=1}P(x=x)=\sum_{x=1}P(x=x-1)=1$.

حال امید ریاضی x را به دست می‌آوریم:

$$E(X)=\sum_{x=1} xP(x=x)=\sum_{x=1} x\frac{1}{x}P(x=x-1)=\sum_{x=1}P(x=x-1)=1$$

روش دوم: در توزیع پواسون می‌دانیم که $f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ و همچنین می‌دانیم $P(x=x)=\frac{\lambda}{x}P(x=x-1)$ پـس در ایـن سـؤال x دارای توزیـع پواسون با پارامتر $\lambda=1$ است. اگر $X\sim P_\circ I(\lambda)$ آنگاه $E(X)=\lambda$ لذا در این سؤال $x\sim P_\circ I\Rightarrow E(x)=1$.

۱۱۸ـ گزینه «۴» اگر $X\sim G(\alpha,\beta)$ آنگاه $E(X)=\alpha\beta\ ,V(X)=\alpha\beta^2$ اگر $X\sim\chi^2_{(n)}$ آنگاه $E(X)=n\ ,V(X)=2n$

یادآوری:

1) $cov(aX+bY,cX+dY)=ac\,cov(X,X)+ad\,cov(Y,X)+bc\,cov(X,Y)+bd\,cov(Y,Y)$

2) $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

3) $cov(X,X)=V(X)$

اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه کوواریانس آن‌ها برابر صفر است بنابراین:

$$0=cov(X,Y-X)=cov(Y,X)-cov(X,X)\Rightarrow cov(Y,X)=V(X)$$

اگر a و b و c اعداد ثابت باشند آنگاه:

$$V(aZ+bY+c)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\,cov(X,Y)$$

بنابراین:

$$V(Y-X)=V(Y)+V(X)-2cov(X,Y)=V(Y)-V(X)-2V(X)=V(Y)-V(X)$$

$$\left.\begin{array}{l}Y-X\sim\chi^2_{(4)}\Rightarrow V(Y-X)=8\\ \qquad\qquad V(X)=4\end{array}\right\}\Rightarrow V(Y)=V(Y=X)+V(X)=8+4=12$$

$$V(Y+X)=V(Y)+V(X)+2cov(X,Y)=12+4+2\times4=24$$

۱۱۹ـ گزینه «۱» برای ناهمبسته بودن z,y باید $Cov(y,z)=0$ بنابراین :

$$Cov(x_1+2x_2,x_1+bx_2)=cov(x_1,x_1)+b\,cov(x_1,x_2)+\underbrace{\cancel{2cov(x_1,x_2)}}_{x_1,x_2\ \text{مستقل هستند}}++\underbrace{\cancel{2cov(x_1,x_2)}}_{x_1,x_2\ \text{مستقل هستند}}=Var(x_1)+bCov(x_1+x_2)$$

$$+2cov(x_1,x_2)+2b\,var(x_2)$$

$$\sigma^2+2b\sigma^2=0\Rightarrow\sigma^2(1+2b)=0\Rightarrow1+2b=0\Rightarrow2b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

۱۲۰ـ گزینه «۳» با توجه به هم توزیع بودن دو جامعه خواهیم داشت :

$$Z_1=Z_2\Rightarrow\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}=\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\Rightarrow\frac{x_1-21/3}{5/2}=\frac{950-830}{124}\Rightarrow x_1-21/3=(0/9677)\times5/2\Rightarrow x_1=26/33$$

۱۲۱ـ گزینه «۳» زمانی دچار کمبود آب خواهیم شد که مصرف روزانه از گنجایش منبع آب بیشتر شود اما توجه کنید از رابطه بین توزیـع گامـا و پواسـون استفاده می‌کنیم یعنی احتمال گاما را از فرمول پواسون استفاده کنیم و این احتمال را بدست می‌آوریم:

$$P(X>\alpha)=\sum_{1=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-\lambda a}(\lambda a)^i}{i!}$$

$$p(X>9)=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-(a\beta)}(a\beta)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{2-1}\frac{e^{-(\frac{9}{3})}(\frac{9}{3})^i}{i!}=e^{-3}[1+3]=4e^{-3}$$

۱۲۲ـ گزینه «۳» باز هم از رابطه بین توزیع پواسون و گاما استفاده می‌کنیم (مانند سؤال قبل)

۱ ساعت ← ۳۰ اتومبیل ← ۱دقیقه $\frac{1}{2}$ اتومبیل ← $\lambda = \frac{1}{2}$ (با فرض پواسون بودن)

حال طبق توزیع پواسون و رابطه آن با توزیع ارلانگ (گاما) توزیع دومین اتومبیل توزیع ارلانگ (گاما) با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ و $n = 2$ می‌باشد.

$$P(X > 5) = \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{-\frac{5}{2}}(\frac{5}{2})^i}{i!} = e^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$$

۱۲۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از روش مکمل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که با یک توزیع فوق هندسی روبرو هستیم:

$M = 10$

$N = 50$

$n = 5$

۱۰ معیوب
۴۰ سالم

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad ; \quad p(x > 2) = 1 - p(x \le 2) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) - p(x = 2)$$

$$= 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{40}{4}}{\binom{50}{5}} - \frac{\binom{10}{2}\binom{40}{3}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0/31 - 0/43 - 0/20 = 0/06$$

۱۲۴ـ گزینه «۲» سه درصد تولیدات شرکتی معیوب هستند، بنابراین $0/97$ سالم هستند. اگر X تعداد کالاهای خراب و p احتمال ناسالم بودن باشد با یک توزیع دوجمله‌ای سروکار داریم:

$$P(\text{هیچ بسته‌ای خراب نباشد}) = p(X = 0) = \binom{5}{0} \times (0/03)^0 (0/97)^{5-0} = (0/97)^5 = 0/859$$

۱۲۵ـ گزینه «۳» تعداد اقلام معیوب در نمونه <u>۱۰۰</u> تایی دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر P است که P احتمال وجود یک کالای معیوب می‌باشد.

$$\begin{cases} n = 100 \\ p = \frac{10}{1000} = 0/01 \end{cases} \Rightarrow x \sim B(100, 0/01) \Rightarrow P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}_{\;x=0,1,\dots,100} \Rightarrow P(X = 1) = \binom{100}{1} \times (0/01)^1 \times (0/99)^{100-1} =$$

$$100 \times 0/01 \times (0/99)^{99} = (0/99)^{99}$$

۱۲۶ـ گزینه «۳» چون $x_1, x_2, \cdots, x_n$ متغیرهای مستقل برنولی با پارامترهای یکسان P هستند. y_1 و y_n به صورت زیر می‌باشند:

$$Y_1 = \min(x_1, x_2, \cdots, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{حداقل یکی غیر صفر باشد} \\ 1 & \text{اگر همگی ۱ باشند} \end{cases}$$

$$Y_n = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{اگر همگی صفر باشند} \\ 1 & \text{حداقل یکی غیر صفر باشد} \end{cases}$$

بنابراین y_1 و y_n مقادیر صفر و ۱ را اختیار می‌کنند لذا می‌توانیم احتمال این نقاط را به دست آوریم:

$$P(Y_1 = 1) = P(x_1 = 1, x_2 = 1, \cdots, x_n = 1) = (P(X_i = 1))^n = P^n \quad ; \quad P(Y_1 = 0) = 1 - P(Y_1 = 1) = 1 - P^n$$

$$P(Y_1.Y_n = 1) = P(\min(X_i) = 1, \max(X_i) = 1) = P(x_1 = 1, \cdots, x_n = 1) = P^n$$

$$P(Y_1.Y_n = 0) = 1 - P(Y_1 Y_n = 1) = 1 - P^n \quad ; \quad E(Y_1 Y_n) = 1 \times P^n + 0 \times (1 - P^n) = P^n$$

۱۲۷ـ گزینه «۱» به راحتی با استفاده از رابطه تابع مولد گشتاور خواهیم داشت:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n-1} e^{tx}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n-1} e^{tx} = \frac{1}{n}(1 + e^t + e^{2t} + \dots e^{(n-1)t}) = \frac{1 - e^{nt}}{n(1 - e^t)}$$

۱۲۸ـ گزینه «۱» با یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n=100$ و $p=0/3$ روبرو هستیم بنابراین، تابع احتمال آن به صورت $P(X=x)=\binom{100}{x}(0/3)^x(0/7)^{100-x}$ می‌باشد.

در سال گذشته در رشته مهندسی صنایع ـ سیستم سؤالی بدین صورت مطرح بود که اگر $X\sim b(n_1\,,\,p)$ حاصل p (فرد) $-p$ (زوج) کدام است که در آنجا نشان دادیم p (زوج) $-p$ (فرد) $=(1-2p)^n$ بنابراین:

$$\begin{cases} P(\text{زوج})-P(\text{فرد})=(1-2\times 0/3)^{100} \\ p(\text{زوج})+P(\text{فرد})=1 \end{cases} \Rightarrow 2p(\text{زوج})=1+(0/4)^{100}\Rightarrow P(\text{زوج})=\frac{1}{2}+\frac{(0/4)^{100}}{2}$$

۱۲۹ـ گزینه «۲» از رابطه خطی امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n})=\frac{1}{2}E(\bar{X}(1-\bar{X}))=\frac{1}{n}(E(\bar{X})-E(\bar{X}^2))\quad \text{I}\ \text{معادله}$$

در توزیع برنولی:

$$E(\bar{X}^2)=var(\bar{X})+E^2(\bar{X})\quad,\quad E(\bar{X})=p\quad,\quad E(\bar{X}^2)=\frac{P(1-p)}{n}+P^2$$

$$\text{I}\ \text{معادله}:\frac{1}{n}(P\frac{P(1-p)}{n}p^2)=\frac{p}{n}.\frac{P(1-p)}{n^2}.\frac{p^2}{n}=\frac{np.p.np^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}[np(p+1)+P(1-p)]=\frac{1}{n^2}((n-1)P(1-p))$$

۱۳۰ـ گزینه «۲» چون X دارای توزیع برنولی است. بنابراین، ۱ یا $X=0$ در نتیجه، ۱ یا $X^i=0$ از این رو، $X^i\sim B(p)$ پس $E(X^i)=p$ و

$$E(X^i)=P\quad,\quad \sum_{i=1}^{n}E(X^i)=np\ \text{(توزیع دو جمله‌ای)}$$

۱۳۱ـ گزینه «» زیرا: پارامتر x معرفی نشده است و اگر y باشد y چگونه می‌تواند حصول اولین موفقیت باشد. در توزیع $u(a,b)$ حصول موفقیت به چه معنا است؟

۱۳۲ـ گزینه «۴» با کمی دقت متوجه می‌شویم که با یک توزیع دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم که $n=3$ و تعداد موفقیت‌ها $x=1$ می‌باشد اما توجه کنید که در این جا احتمال موفقیت، یعنی احتمال تأیید نشدن یکی از شیفت‌ها وجود دارد یعنی حداقل یک نقص در آن شیفت باشد:

متر	نقص
۱	$\frac{1}{4}$
۴	$\lambda=1$

$$\rightarrow P=P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-e^{-1}$$

اکنون مقادیر را در تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای قرار می‌دهیم:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}.P^x.(1-P)^{n-x}=\binom{3}{1}.(1-e^{-1})^1(e^{-1})^2=3e^{-2}(1-e^{-1})=3e^{-2}-3e^{-3}$$

۱۳۳ـ گزینه «۱» با یک توزیع دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم:

$n=5$ و $P=0/99$ و $x=5$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\rightarrow p(X=5)=\binom{5}{5}.(0/99)^5(0/01)=(0/99)^5$$

زمانی سفارش یک سال مورد تأیید خواهد بود که هر پنج محصول به مدت ۱۲ ماه مورد تأیید باشد.

$$((0/99\times 0/99\times 0/99\times 0/99)^5)^{12}=((0/99)^{12})^5$$

۱۳۴ـ گزینه «۴» نسبت معیوب $P=\frac{4}{52}$ می‌باشد. اگر X تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به اولین محصول معیوب باشد، این متغیر دارای توزیع هندسی می‌باشد.

$$E(X)=\frac{1}{P}=\frac{52}{4}=13$$

۱۳۵ـ گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم توزیع، یک توزیع دو جمله‌ای است اما می‌توانیم آن را با پواسون تقریب بزنیم: $\lambda = n.p$

$$P(X \ge 1) \ge 0/95 \rightarrow 1 - P(X=0) \ge 0/95$$

$$1 - e^{-\lambda} \ge 0/95 \rightarrow 1 - e^{-np} \ge 0/95 \rightarrow e^{-np} \le 0/05$$

$$-np \le \ln 0/05 \rightarrow n \ge \frac{-\ln 0/05}{P}$$

توجه: در توزیع پواسن $P(X=0) = e^{-\lambda}$

۱۳۶ـ گزینه «۱» با استفاده از تقریب نرمال خواهیم داشت:

$$E(X) = \alpha\lambda = 6 \quad , \quad Var(X) = \alpha\lambda^2 = 3 \times 4 = 12$$

واضح است که X دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 3$ و $\lambda = 2$ است:

$$p(X > 220) = p\left(Z > \frac{220 - E(x)}{\sqrt{var(x)}}\right) = p\left(Z > \frac{220 - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \simeq 0$$

۱۳۷ـ گزینه «۱»

$$P(S^2 > \sigma^2) = P\left(\chi^2_{(39)} > \frac{(n-1)\cancel{\sigma^2}}{\cancel{\sigma^2}}\right) = P(\chi^2_{(39)} > 39) \simeq P\left(\frac{\chi^2_{(39)} - 39}{\sqrt{2 \times 39}} > \frac{39 - 39}{\sqrt{2 \times 39}}\right) = P(Z > 0) = \frac{1}{2} = 0/5$$

۱۳۸ـ گزینه «۴» توجه کنید که با یک توزیع دو جمله‌ای روبرو هستیم که برای آن که تعداد سکه‌های «رو» و «پشت» برابر باشند باید از $2n$ بار n بار «رو» و n بار «پشت» ظاهر شود. اگر تعداد سکه‌های «رو» را متغیر تصادفی X فرض کنیم $X \sim B(2n, \frac{1}{2})$ است اما توجه کنید که در صورت سؤال گفته شده است که n به اندازه کافی بزرگ است. بنابراین از تقریب توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$P(X = n) \xrightarrow{\text{تصحیح پیوستگی}} p\left(n - \frac{1}{2} \le X \le n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} E(x) = 2n \times \frac{1}{2} = n \\ var(x) = 2n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2n}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}} p\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2n}{4}}} \le Z \le \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2n}{4}}}\right) = 2p\left(0 \le Z \le \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2n}{4}}}\right) = 2p\left(0 \le Z \le \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2n}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

۱۳۹ـ گزینه «۳» به راحتی می‌توان تشخیص داد برای آن که برای اولین بار دو عدد ۳ پشت سرهم تولید شود حالت‌های زیر وجود دارد:

۲ ۳ ۳ ۱ یا ۳ ۳ ۳ یا ۳ ۳ ۲ یا ۳ ۳ ۱

به راحتی می‌توان گفت تعداد اعداد تولید شده ۱۲ می‌باشد.

۱۴۰ـ گزینه «۲» ابتدا پارامتر λ برای نیم‌ساعت را به دست می‌آوریم:

مشتری	ساعت
۳۰	۱
$\lambda = 15$	$\frac{1}{2}$

$$\xrightarrow[\text{را به دست می‌آوریم}]{\text{مقدار احتمال}} P(X=1) = \frac{e^{-15} \times 15^1}{1!} = 15e^{-15}$$

یادآوری: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$

۱۴۱ـ گزینه «۲» با یک توزیع دو جمله‌ای روبرو هستیم:

مشخصات صورت مسئله به صورت روبرو است:

$$n = 2 \;,\; P(X \ge 1) = 0/84$$
$$p = ?$$

$$p(X \ge 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) 1 - \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = 0/84$$

$$(1-p)^2 = 0/16 \rightarrow (1-p) = 0/4 \rightarrow p = 0/6$$

۱۴۲ـ گزینه «۲» با یک توزیع دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم اما توجه کنید که باید از تقریب پواسون استفاده کنیم:

$$\lambda = np = 15\cancel{0} \times \frac{4}{10\cancel{0}} = 6 \rightarrow p(x = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!}$$

$$p(X>1)=1-p(X\le 1)=1-p(X=0)-p(X=1)=1-\frac{e^{-6}\times 6^{0}}{0!}-\frac{e^{-6}\times 6^{1}}{1!}=1-7e^{-6}$$

۱۴۳ــ گزینه «۳» طبق رابطه گفته شده در کتاب:

$$E(X|X>1)=\frac{\int_1^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_1^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}=\frac{e^{-\lambda}(\frac{1}{\lambda}+1)}{e^{-\lambda}}=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

۱۴۴ــ گزینه «۲» در این سؤال امید ریاضی $(-1)^X$ خواسته شده است در واقع صورت مسئله $E(-1)^X$ را می‌خواهد توجه کنید که x دارای توزیع دو جمله‌ای با احتمال $\frac{1}{2}$ است.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	$\cdots$	n
$(-1)^x$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱		$(-1)^n$
p(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$

احتمالات برای متغیر $(-1)^X$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}p((-1)^X=1)=p(X=0\ \text{یا}\ X=2\ \text{یا}\ X=4\ \text{یا}\cdots X=2k)\\ p((-1)^X=-1)=p(X=1\ \text{یا}\ X=3\ \text{یا}\ X=5\ \text{یا}\cdots X=2k+1)\end{cases}$$

بنابراین اگر تابع $y=(-1)^X=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$ باشد احتمالات مورد نظر برای این مقدار را بدست می‌آوریم:

$$p(Y=1)=p(X=0)+p(X=2)+\cdots+p(X=2k)$$
$$p(Y=-1)=p(X=1)+p(X=3)+\cdots+p(X=2k-1)$$

اما توجه کنید که $p(x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ می‌باشد. در اینجا $p=q=\frac{1}{2}$ بنابراین $p(x)=\frac{\binom{n}{x}}{2^n}$

$$p(X=0)+p(X=2)+\cdots+p(X=2k)=\frac{\binom{n}{0}}{2^n}+\frac{\binom{n}{2}}{2^n}+\cdots+\frac{\binom{n}{2k}}{2^n}=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2k}}{2^n}$$

احتمالات فرد را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$p(X=1)=p(X=3)+\cdots+p(X=2k+1)=\frac{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{2k+1}}{2^n}$$

بنابراین تابع احتمال y به صورت زیر می‌باشد.

$$y=\begin{cases}\dfrac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2k}}{2^n} & y=1,\ k=\text{زوج}\\[2ex] \dfrac{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{2k-1}}{2^n} & y=-1,\ k=\text{فرد}\end{cases}\quad ;\qquad E(Y)=1\times p(Y=1)+-1\times p(Y=-1)=0$$

توجه: ضرایب بسط دو جمله‌ای متقارن هستند یعنی:

$$\sum_{K=0,2,4,\cdots}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{K=1,3,5}^{n}\binom{n}{k}$$

۱۴۵ـ گزینه «۳» توزیع y را به صورت زیر به دست می‌آوریم (روش تابع توزیع)

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=p(-5\ln X\le y)=p(\ln X\le \frac{-y}{5})$$

$$=p(x\ge e^{\frac{-y}{5}})\ \underset{\text{می‌کنیم}}{\overset{\text{مکمل}}{=\!=}}\ p-(x\le e^{\frac{-y}{5}})=1-F_X(e^{\frac{-y}{5}})\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} f_Y(y)=+\frac{1}{5}e^{\frac{-y}{5}}.f_X(e^{\frac{-y}{5}})=\frac{1}{5}e^{\frac{-y}{5}}$$

این تابع چگالی مربوط به توزیع نمایی با پارامتر ۵ است.

۱۴۶ـ گزینه «۴» تابع مولد گشتاور داده شده مربوط به توزیع نمایی به فرم $x>0$ $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ می‌باشد که دارای میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است.

۱۴۷ـ گزینه «۳» بسیار ساده $p(x>t)$ را بدست می‌آوریم:

$$p(x>t)=\int_t^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\times\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_t^{\infty}=-e^{-\lambda x}\Big|_t^{\infty}=e^{-\lambda t}$$

۱۴۸ـ گزینه «۳» تابع مولد گشتاور مورد نظر مربوط به متغیر نرمال است:

$$m_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\rightarrow\begin{cases}\mu=20\\ \frac{1}{2}\sigma^2=50\rightarrow\sigma^2=100\rightarrow\sigma=10\end{cases}$$

فرمول ضریب تغییرات $CV=\frac{\sigma}{\mu}\times 100$ است:

$$CV=\frac{1\cancel{0}}{2\cancel{0}}\times 100=\frac{1}{2}\times 100=50\%$$

۱۴۹ـ گزینه «۳» همان‌طور که در کتاب نیز گفته شده است توجه کنید که در این سؤال $\lambda=\frac{1}{\beta}$

$$E(X^k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}$$

$$\begin{cases}\mu_2'=E(X^2)=\frac{\beta^2\Gamma(\alpha+2)}{\pi\alpha}\\ \mu_1'=E(X)=\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\end{cases}\Rightarrow\frac{\mu_2'}{\mu_1'}=\frac{\frac{\beta^2\Gamma(\alpha+2)}{\cancel{\Gamma(\alpha)}}}{\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\cancel{\Gamma(\alpha)}}}\qquad \frac{\mu_2'}{\mu_1'}=\beta\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)}=\beta\frac{(\alpha+1)!}{\alpha!}=\beta\frac{(\alpha+1)\alpha!}{\alpha!}=\beta(\alpha+1)$$

۱۵۰ـ گزینه «۴» اگر مساحت بریده شده یک متغیر تصادفی مربع‌کای است:

$$var(S)=4\rightarrow df=2\rightarrow S\sim\chi^2(2)\equiv\exp(\frac{1}{2})$$

بنابراین $f_S(s)=\frac{1}{2}e^{\frac{-s}{2}}$

$$p(S>3)=\int_3^{\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{-s}{2}}ds=-e^{\frac{-s}{2}}\Big|_3^{\infty}=1-e^{\frac{-3}{2}}$$

۱۵۱ـ گزینه «۱» صورت مسئله $X\sim N(0,\sigma^2)$ در این‌صورت:

$$p(|X|<\sigma<10|x|)\ \underline{\underline{\text{تقسیم }|X|\text{ بر}}}\ P(1<\frac{\sigma}{|X|}<10)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}p(\frac{1}{10}<\frac{|X|}{\sigma}<1)=p(\frac{\sigma}{10}<|X|<\sigma)=p(|X|<\sigma)-p(|X|<\frac{\sigma}{10})=p(-\sigma<X<\sigma)$$

$$-(\frac{\sigma}{10}<X<\frac{-\sigma}{10})=p(-1<\frac{X}{\sigma}<1)$$

$$-p(\frac{1}{10}<X<-\frac{1}{10})=0/6826-0/4602+0/5398\simeq 0/75$$

فصل ششم

«توزیع‌های نمونه‌ای»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ مطالعه‌ای در زمینه تخمین درصد افرادی از ساکنان شهری که به یک کاندید رأی می‌دهند، صورت گرفته است. اگر با $z_{\frac{\alpha}{2}} = ۲$ بخواهیم مطمئن شویم که تخمین ما از نسبت واقعی کمتر از ۰/۰۲ اختلاف دارد، چه تعداد نمونه لازم است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۲۵

۲ـ برای متغیر تصادفی X با $E(X) = ۹$ و $E(X^۲) = ۱۳$، کدام مورد کران پایینی احتمال $P(-۲ < X < ۸)$ است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲۱}{۲۵}$

۳ـ براساس تجربه ۷۵ درصد از تخم خیارهای کاشته شده در شرایط معمولی سبز می‌شوند. اگر بخواهید احتمال این‌که دست کم دو عدد از تخم‌ها سبز شود از ۰/۹۰ بیشتر باشد، دست کم چند تخم خیار باید کاشته شود؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴ـ متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم $\sigma^۲$ دارد. نمونهٔ تصادفی $X_۱, X_۲, X_۳$ را می‌گیریم و مایلیم تعیین کنیم با چه احتمالی، دست کم، $\frac{۹/۵}{۱۰}$ از توزیع فوق در بازه‌ی $(-\infty, \mu + ۲s]$ قرارمی‌گیرد. برای تعیین این احتمال، $s^۲$ را واریانس نمونه بگیرید و فرض کنید $z_{۰/۰۵} = ۱/۶۴۵$ است. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $۱ - e^{-۱}$ ۲) ۰/۷۰ ۳) ۰/۸۰ ۴) $e^{-۰/۶۸}$

۵ـ فرض کنید $X_۱, X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند. متغیر تصادفی $\frac{(X_۱ + X_۲)^۲}{(X_۲ - X_۱)^۲}$ دارای چه توزیعی است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\chi^۲(۱)$ ۲) $t_{(۲)}$ ۳) $F(۱,۱)$ ۴) $\chi^۲(۲)$

۶ـ $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با $\lambda = ۱$ است برای مقادیر بزرگ n، مقدار تقریبی $\frac{۱}{e^n}\sum_{k=۰}^{n}\frac{n^k}{k!}$ برابر است با:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) بی‌نهایت

۷ـ اگر متغیر تصادفی X از یک توزیع یکنواخت در فاصله‌ی صفر و یک برخوردار باشد توزیع متغیر تصادفی Y که به صورت $Y = -۱۰\,Ln(X)$ تعریف شده کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۲)

۱) نرمال با میانگین ۱۰ ۲) مربع کای با دو درجهٔ آزادی ۳) نمایی با پارامتر ۱۰ ۴) گاما با پارامترهای یک و ۵

۸ـ اگر $i = ۱,۲,\ldots,n$ و $x_i \sim N(\mu, \sigma^۲)$ و اگر $j = ۱,\ldots,k$ ، $z_j \sim N(۰,۱)$ باشد و کلیه متغیرها مستقل باشند در این صورت متغیر تصادفی:

$$U = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲}{\sigma^۲} + \sum_{j=۱}^{k}(Z_j - \bar{Z})^۲$$

دارای توزیع زیر است: (مهندسی صنایع ـ سراسری۸۳)

۱) توزیع $\chi^۲$ با $n + k$ درجه آزادی ۲) توزیع $\chi^۲$ با $n + k - ۱$ درجه آزادی

۳) توزیع $\chi^۲$ با $n + k - ۲$ درجه آزادی ۴) توزیع $\chi^۲$ با $n - ۱$ درجه آزادی

۹ـ نمونه تصادفی $X_۱, X_۲, \cdots, X_{۳۶}$ مستقل از هم دارای توزیع یکنواخت در بازه (۲ و ۲-) هستند مقدارتقریبی $P(\bar{X} > \frac{\sqrt{۳}}{۹})$ کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\Phi(۱)$ ۲) $۱ - \Phi(۱)$ ۳) $۱ - \Phi(\sqrt{۳})$ ۴) $\Phi(\sqrt{۳})$

۱۰ـ فرض کنید که $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ میانگین‌های دو نمونه به حجم n از جامعه‌ای با واریانس σ^2 باشند. n را چنان تعیین کنید تا احتمال اینکه این دو میانگین نمونه بیشتر از σ اختلاف داشته باشند، تقریباً ۰/۰۱ باشد. (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۵)

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۴

۱۱ـ اگر $X_1, X_2, \dots, X_9$ نمونه‌های تصادفی مستقل از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^{8}(-1)^i X_i / [\sqrt{8}|x_9 - \mu|]$ دارای چه توزیعی است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) t با ۹ درجه آزادی ۲) x^2 با یک درجه آزادی ۳) t با یک درجه آزادی ۴) x^2 با ۸ درجه آزادی

۱۲ـ اگر x_iها نمونه‌هایی از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشند و $\bar{X}_k$ میانگین k تا از آن‌ها باشد، عبارت $k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2$ دارای چه توزیعی است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) z ۲) χ^2 با دو درجه آزادی ۳) χ^2 با n درجه آزادی ۴) دارای توزیع معرفی نیست.

۱۳ـ فرض کنید که $X_1, \dots, X_{36}$ نمونه تصادفی از یک توزیع یکنواخت در فاصله (۲و۲-) باشد، مقدار تقریبی $P(\bar{x} > \frac{\sqrt{3}}{9})$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $P(z > 1)$ ۲) $P(z \le 1)$ ۳) $P(z \le \sqrt{3})$ ۴) $P(z > \sqrt{3})$

۱۴ـ تصور کنید که متغیرهای تصادفی مستقل X_i دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند $(j = 1, \dots, n)$، همچنین فرض کنید که Z_jها دارای توزیع نرمال استاندارد مستقل باشند $(j = 1, \dots, K)$ توزیع متغیر تصادفی $\sqrt{nk}(\bar{X} - \mu) / \left(\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k} Z_j^2}\right)$ که در آن $\bar{X}$ میانگین نمونه n تایی از X_iها است، برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) توزیع t با $k-1$ درجه آزادی
۲) توزیع F با یک و $k-1$ درجه آزادی
۳) توزیع معرفی نمی‌شود
۴) توزیع t با k درجه آزادی

۱۵ـ اگر $X - N(0,1)$ و X_1, X_2 نمونه‌های مستقل آن باشند، توزیع $(X_1 + X_2) / \sqrt{(X_1 - X_2)^2}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) t_2 ۲) χ_1^2 ۳) t_1 ۴) χ_2^2

۱۶ـ نمونه‌ای از ده عدد دارای انحراف معیار ۸/۷۵۶ است. اگر این اعداد جامعه اصلی را تشکیل دهند، انحراف معیار جامعه چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۸/۳۰۷ ۲) ۷/۸۰۰ ۳) ۸/۷۰۰ ۴) ۹/۲۳۰

۱۷ـ مناسب‌ترین عبارت یا عبارت‌ها را برای تشریح قضیه حد مرکزی انتخاب کنید.

I: میانگین توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$ برابر است با میانگین جامعه

II: انحراف معیار توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$ برابر است با انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر تعداد نمونه

III: شکل توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$ (با n بزرگ) تقریباً نرمال می‌شود.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) فقط I و III ۲) فقط III ۳) I و II و III ۴) فقط II و III

۱۸ـ اگر $T_1, T_5, \dots, T_{16}$ نمونه تصادفی ۱۶ تایی از یک تابع توزیع نرمال با میانگین t باشد، در این صورت توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z = \frac{15(T_{16} - t)^2}{\sum_{i=1}^{16}(T_i - t)^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) x^2 با ۱۵ درجه آزادی ۲) t با ۱۴ درجه آزادی ۳) F با ۱ و ۱۵ درجه آزادی ۴) F با ۱ و ۱۴ درجه آزادی

۱۹ـ اگر x_i ها مستقل از یکدیگر و واحدی توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ و Z_j ها مستقل از یکدیگر و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند توزیع متغیر تصادفی $\frac{\sqrt{nk}(\bar{X}-\mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{j=2}^{k} Z_j^2}}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) t_k ۲) t_{n-1} ۳) t_{k-1} ۴) $F_{n,k}$

۲۰ـ طول قطعه‌ای تولیدی دارای میانگین ۸۰ و واریانس ۹ است. در صورتی که بخواهیم حد استاندارد (s) در رابطه زیر صدق کند این حد استاندارد را مشخص نمایید. $P(|X-80|\geq s)=0/05$ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $Z_{0/05}$ ۲) $9Z_{0/025}$ ۳) $3Z_{0/05}$ ۴) $3Z_{0/025}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ گزینه «۱» طبق رابطه حجم نمونه در نسبت خواهیم داشت:

$$n=\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2\,\hat{p}.\hat{q}}{e^2}=\frac{4\times\frac{1}{4}}{(0/02)^2}=2500$$

۲ـ گزینه «۴» با توجه به نامساوی چی‌بی‌شف داریم:

$$P(-2<X<8)=P(-5<X-3<5)=P(|X-3|<5)\geq 1-\frac{1}{(\frac{5}{2})^2}=\frac{21}{25}$$

$$\operatorname{var}X=EX^2-(EX)^2=13-9=4$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به توزیع دو جمله‌ای با مشخصات گفته شده خواهیم داشت:

$$X\sim Bin(n,0/75)\Rightarrow P(x\geq 2)\geq 0/9\Rightarrow 1-P(x=0)-P(x=1)\geq 0/9$$

$$P(x=0)+P(x=1)\leq 0/1$$

$$n=2\Rightarrow P(x=0)+P(x=1)=(0/25)^2+2(0/75)(0/25)=0/4375$$

$$n=3\Rightarrow(0/25)^3+3(0/75)(0/25)^2=0/156$$

$$n=4\Rightarrow(0/25)^4+4(0/75)(0/25)^3=0/05<0/1$$

قابل قبول است $\Rightarrow n=4$

۴ـ گزینه «۴» در صورت مسأله گفته شده است که:

$$P(X\leq\mu+2S)\geq\%95$$

$$\xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}} P(Z\leq\frac{\mu+2S-\mu}{\sigma})\geq\%95\Rightarrow P(Z\leq\frac{2S}{\sigma})\geq\%95\Rightarrow\frac{2S}{\sigma}\geq 1/645\Rightarrow P(\frac{4S^2}{\sigma^2}\geq 2/706)=P(\frac{2S^2}{\sigma^2}\geq 1/35)$$

توجه داشته باشید که $\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(2)}$ بنابراین:

$$P(\chi^2_{(2)}\geq 1/35)\to\int_{1/35}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=-e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{1/35}^{\infty}=e^{-0/68}$$

۵ـ گزینه «۳» **یادآوری۱:** اگر $X_1,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با پارامترهای $\mu_i,\sigma_i^2\ (i=1,\cdots,n)$ باشند هر ترکیب خطی آن‌ها نیز دارای توزیع نرمال است که پارامترهای آن به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\text{if }\ Y=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\ \Rightarrow\ \mu_Y=E(Y)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu_i\ \ (\forall_i=1,\dots,n)$$

(c_i عددثابت)

$$V(Y)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2\sigma_i^2$$

یادآوری۲: اگر $Z\sim N(0,1)$ آنگاه $Z^2\sim\chi^2(1)$

یادآوری ۳: اگر $X \sim \chi^2_{(m)}$ و $Y \sim \chi^2_{(n)}$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند آنگاه:

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F(m,n)$$

یادآوری ۴: اگر X, Y متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال باشند و $\text{cov}(X,Y) = 0$ آنگاه X, Y مستقل‌اند.

طبق نکته ۱ داریم.

$$X_1 \sim N(0,1)\ ,\ X_2 \sim N(0,1) \quad ; \quad X_1 + X_2 \sim N(0,2)\ ,\ X_2 - X_1 \sim N(0,2)$$

اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ آنگاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ بنابراین:

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)\ ,\ \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

متغیرهای تصادفی مستقل‌اند زیرا:

$$\text{cov}\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\text{cov}(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$$

$$= \frac{1}{2}[\text{cov}(X_1, X_2) - \text{cov}(X_1, X_1) + \text{cov}(X_2, X_2) - \text{cov}(X_1, X_2)] = \frac{1}{2}(V(X_2) - V(X_1)) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

طبق یادآوری ۲:

$$\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)} \quad , \quad \left(\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

و F نسبت دو متغیر تصادفی $\chi^2_{(1)}$ می‌باشد که از هم مستقل‌اند یعنی:

$$F = \frac{\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 / 1}{\left(\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 / 1}$$

بنابراین با توجه به یادآوری ۳:

$$F \sim F(1,1)$$

۶ـ گزینه «۲» اگر $X_1, \cdots X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسون با پارامتر λ باشند آنگاه:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda) \quad \text{و} \quad P(Y \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-(n\lambda)}(n\lambda)^k}{k!}$$

قضیه حد مرکزی: اگر $X_1, \cdots X_n$ یک نمونه تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه زمانی که $n \to \infty$، توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ نرمال است.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$X_1, \cdots, X_n \sim P(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n) \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\ ,\ V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n \ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n,n) \quad \text{if} \quad n \to \infty$$

در اینجا چون $\lambda = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-(n\lambda)}(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

با توجه به توضیحات فوق ملاحظه می‌شود که مقدار تقریبی $\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ همان $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\right)$ می‌باشد که $\sum_{k=0}^{n} X_i$ در آن دارای توزیع پواسون با پارامتر n می‌باشد.

$$\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\right) = P\left(Z \le \frac{n-n}{\sqrt{n}}\right) = P(Z \le 0) = \frac{1}{2} \quad (Z \sim N(0,1))$$

۷ـ گزینه «۳» از روش تابع توزیع استفاده می‌کنیم:

$$X \sim u(0,1) \qquad Y = -10 \, \text{Ln}X$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-10\,\text{Ln}X \le y) = P\left(\text{Ln}X \ge \frac{-y}{10}\right) = P\left(X \ge e^{-\frac{y}{10}}\right) = 1 - P\left(X \le e^{-\frac{y}{10}}\right) = 1 - e^{-\frac{y}{10}}$$

بنابراین توزیع متغیر تصادفی Y، نمایی با پارامتر ۱۰ است.

$$f_Y(y) = \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}} \Rightarrow Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{10}\right)$$

۸ـ گزینه «۲»

$$U=\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}_{Z^2}+\underbrace{\sum_{j=1}^{k}(Z_j-\bar{Z})^2}_{\frac{(k-1)S^2}{\sigma^2}}\quad ; \quad \begin{cases} Z=\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \end{cases} \qquad \chi^2_{(n)}+\chi^2_{(k-1)}=\chi^2_{(n+k-1)}$$

۹ـ گزینه «۲» تعیین توزیع $\bar{X}$ کار سادهای نیست ولی چون اندازه نمونه بزرگ است از قضیه حد مرکزی بـرای محاسـبه‌ی احتمـال تقریبـی $(\bar{X}>\frac{\sqrt{3}}{9})$ استفاده می‌کنیم. اگر $X\sim U(a,b)$ آنگاه $E(X)=\frac{a+b}{2}$ و $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$X\sim U(-2,2)\Rightarrow E(X)=0\ ,\ V(X)=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

قضیه حد مرکـزی: فـرض کنیـد $X_1\cdots X_n$ یـک نمونـه تصـادفی از تـوزیعی بـا میـانگین و واریـانس متنـاهی μ,σ^2 باشـند، اگـر $n\to\infty$ آنگـاه $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ ($n\geq 30$ به منزلهٔ $n\to\infty$ است.) لذا طبق قضیه‌ی حد مرکزی $\bar{X}\sim N(0,\frac{\frac{4}{3}}{36})$

نکته: اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\sim N(0,1)$، بنابراین:

$$P(\bar{X}>\frac{\sqrt{3}}{9})=P(Z>\frac{\frac{\sqrt{3}}{9}-0}{\frac{1}{\sqrt{27}}})=P(Z>1)=1-P(Z\leq 1)=1-\Phi(1)$$

۱۰ـ گزینه «۴» با توجه به صورت مسأله خواهیم داشت:

$$P(|\bar{X}_1-\bar{X}_2|>\sigma)=0/01$$

اکنون احتمال مورد نظر را با توجه به توزیع نمونه‌ای تفاضل میانگین‌ها استاندارد می‌کنیم:

$$P(|\bar{X}_1-\bar{X}_2|>\sigma)=0/01\Rightarrow P(|Z|>\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}}})=0/01$$

$$\Rightarrow 1-p(|Z|<\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}})=0/01\ \Rightarrow\ P(|Z|<\sqrt{\frac{n}{2}})=0/99\Rightarrow P(-\sqrt{\frac{n}{2}}<Z<\sqrt{\frac{n}{2}})=0/99\ \Rightarrow 2\phi(\sqrt{\frac{n}{2}})-1=0/99$$

$$\Rightarrow\phi(\sqrt{\frac{n}{2}})=0/995\Rightarrow\sqrt{\frac{n}{2}}=2/57\ \Rightarrow n=2\times(2/57)^2\simeq 14$$

۱۱ـ گزینه «۳»

روش اول: توزیع صورت و مخرج را بدست می‌آوریم:

$$X=\sum_{i=1}^{8}(-1)^iX_i\Rightarrow E(y)=\sum_{i=1}^{8}(-1)^i\underbrace{E(X_i)}_{\mu}=0\Rightarrow\ Var(Y)=\sum_{i=1}^{8}(-1)^iVar(X_i)=\sigma^2$$

$$\xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}}\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=1}^{8}(-1)X_i-0}{\sqrt{8}\,\sigma}\sim N(0,1)\\ (\dfrac{X_9-\mu^2}{\sigma})\sim\chi^2_{(1)}\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=1}^{8}(-1)^iX_i\,/\left[\sqrt{8}|X_9-\mu|\right]\Rightarrow\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}}$$

روش دوم: چون $X_i \sim N(\mu,\sigma^2),\ i=1,\dots,9$ مستقل هستند، داریم: $Y=\sum_{i=1}^{8}(-1)^i X_i \sim N(0,8\sigma^2)$ بنابراین $Z=\frac{Y}{\sqrt{8}\sigma}\sim N(0,1)$، همچنین $\frac{x_9-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ در نتیجه (طبق روابط بین توزیع‌ها اگر $Z\sim N(0,1)$ آنگاه $Z^2\sim\chi^2_1$) $x^2=(\frac{x_9-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2_1$.

نکته: اگر $Z\sim N(0,1)$ و $U\sim\chi^2_n$ و Z, U مستقل از هم باشند آنگاه $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$ دارای توزیع t با n درجه آزادی است.

طبق نکته گفته شده داریم $\frac{Z}{\sqrt{x^2}}$ که دارای توزیع t با یک درجه آزادی است. در این سؤال به Y توجه کنید.

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{8}(-1)^i X_i}{\sqrt{8}\,|x_9-\mu|}=\frac{\frac{Y}{\sqrt{8}\sigma}}{\frac{|X_9-\mu|}{\sigma}}=\frac{\frac{Y}{\sqrt{8}\sigma}}{\sqrt{(\frac{X_9-\mu}{\sigma})^2}}=\frac{Z}{\sqrt{X^2_{(1)}}}\sim t_{(1)}$$

۱۲ـ گزینه «۳» اگر X_i نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد آنگاه X_i^2 دارای توزیع کای ـ دو با یک درجه آزادی می‌باشد.

$$k\bar{X}_k^2+(n-k)\bar{X}_{n-k}^2 \longrightarrow \bar{X}_k^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}{k}\ ,\ \bar{X}_{n-k}^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{n-k}\Rightarrow k\bar{X}_k^2+(n-k)\bar{X}_{n-k}^2\sim\chi^2_{(k+n-k)}\equiv\chi^2_{(n)}$$

۱۳ـ گزینه «۱» توزیع یکنواخت است اما از قضیه حد مرکزی استفاده می‌کنیم.

$$E(X_i)=0\quad,\quad Var(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(2-(-2))^2}{12}=\frac{4}{3}\quad;\quad E(\bar{X})=0\quad,\quad Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{4}{3}}{36}=\frac{1}{27}$$

$$P(\bar{X}>\frac{\sqrt{3}}{9})=P(\frac{\bar{X}-0}{1/\sqrt{27}}>\frac{\frac{3}{9}-0}{1/\sqrt{27}})=P(Z>1)$$

۱۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ بنابراین: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$. اکنون $\sum_{j=1}^{k}Z_j^2\sim\chi^2_{(k)}$ پس با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\sum_{j=1}Z_j^2/k}}=\sqrt{nk}(\bar{x}-\mu)/(\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k}Z_j^2}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(k)}}{k}}}=t(k)$$

۱۵ـ گزینه «۲» صورت و مخرج را که بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}}\sim\sqrt{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}}\Rightarrow\begin{cases}X_1+X_2\sim N(0,2)\Rightarrow\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)\\ X_1-X_2\sim N(0,2)\Rightarrow\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\Rightarrow\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim\chi^2_{(1)}\end{cases}$$

۱۶ـ گزینه «۱» تعداد نمونه برابر با $n=10$ می‌باشد، از طرفی $S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=8/756$ است. توجه کنید انحراف جامعه خواسته شده است که رابطه آن به صورت $\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}}$ می‌باشد. از سوی دیگر این اعداد کل جامعه اصلی را تشکیل داده‌اند بنابراین $\sum(x_i-\bar{x})^2=\sum(x_i-\mu)^2$ در نتیجه:

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=8/756 \Rightarrow \sum(x_i-\bar{x})^2=(10-1)(8/756)^2 \Rightarrow \sum(x_i-\bar{x})^2=690/007$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}}=\sqrt{\frac{690/007}{10}}=8/310\simeq 8/307$$

۱۷ـ گزینه «۲» قضیه حد مرکزی تشریح‌کننده توزیع $\bar{x}$ است وقتی که حجم نمونه بزرگ باشد. مناسب‌ترین تعریف گزینه III می‌باشد.

۱۸ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $T_1, T_2, \cdots, T_{16}$ دارای توزیع نرمال با میانگین t است.

$$T_i \sim N(\mu=t) \Rightarrow T_{16}-t \sim N(0,\frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow (16-t)\sim X^2(1)$$

از طرفی $\sum_{i=1}^{16}(t_i-t)^2 \sim X^2(n-1=16-1=15)$

بنابراین کسر داده شده F با ۱ و ۱۵ درجه آزادی است چرا که نسبت دو توزیع کای دو است.

۱۹ـ گزینه «۱» اگر $X_i \underset{\sim}{iid} N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $\xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}} Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$

$\xrightarrow{\quad\quad} \sum_{j=\pi}^{k} Z_j^2 \sim X_{(k)}^2$ از طرفی $Z_j^2 \sim X_{(1)}^2$ همچنین فراموش نکنیم $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{X^2}{n}}}\sim t(n)$ می‌باشد بنابراین:

$$\frac{\overset{\sim Z}{\bar{X}-\mu/\sigma/\sqrt{n}}}{\underset{\sim \chi^2(k)}{\sqrt{\frac{\sum Z_j^2}{K}}}}\equiv t(k)$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به این که طول قطعه متغیری تصادفی با توزیع نامعلوم است از نامساوی چی‌بی‌شف استفاده می‌کنیم: $p(|x-\mu|\le k\sigma)\ge 1-\frac{1}{K^2}$

طبق صورت مسأله $1-\frac{1}{K^2}=0/05$ بنابراین:

$$\frac{1}{K^2}=0/95 \to K^2=\frac{1}{0/95}$$

$$\to K^2=\frac{100}{95}\to K=\sqrt{\frac{100}{95}} \qquad \to S=\sqrt{\frac{100}{95}}\times 3\simeq 3Z0/025$$

فصل هفتم

«نظریه برآورد»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه و $\tilde{X}$ میانه‌ی نمونه باشند و اگر بخواهیم برای μ یک برآوردکننده در نظر بگیریم، کدام‌یک از برآوردکننده‌های $\bar{X}$ و $\tilde{X}$ ترجیح دارند؟ (با ذکر دلیل)

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\bar{X}$، زیرا نااریب برای μ است.

۲) $\tilde{X}$، زیرا نااریب برای μ است.

۳) $\bar{X}$، زیرا نااریب است که $\mathrm{Var}(\bar{X}) < \mathrm{Var}(\tilde{X})$

۴) $\tilde{X}$، زیرا نااریب است که $\mathrm{Var}(\bar{X}) < \mathrm{Var}(\tilde{X})$

۲ـ تفاوت عمده‌ی برآورد بیزی با برآوردهای غیر بیزی در چیست؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) استفاده از داده‌های نمونه ـ داشتن توزیع مادر

۲) استفاده از تابع توزیع پسین به عنوان اطلاعات اولیه

۳) پارامتر θ در این روش به عنوان یک مقدار غیرتصادفی و ثابت و مجهول در نظر گرفته می‌شود.

۴) استفاده از تابع توزیع پیشین به همراه اطلاعات داده‌های نمونه و تصادفی انگاشتن پارامتر مجهول θ

۳ـ اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیعی با تابع چگالی $f(x) = \theta(1-\theta)^x, x = ۰$ و $۱,۲,۳,\cdots$ باشد، برآورد θ^{-1} به روش درستنمایی ماکزیمم (MLE) برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{\bar{x}+۱}$

۲) $\frac{۱}{\bar{x}}$

۳) $\bar{x}+۱$

۴) $\bar{x}$

۴ـ فرض کنید $\bar{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = ۱۰۰$ باشد. اندازه نمونه را طوری بیابید که فاصله تصادفی $(\bar{X} - \frac{۱}{۳}, \bar{X} + \frac{۱}{۳})$ با احتمال ۰/۹۵، شامل μ باشد؟ $[\phi^{-1}(۰/۹۷۵) = ۱/۹۶]$

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۵۰

۲) ۵۹

۳) ۲۴۲۱

۴) ۳۲۵۸

۵ـ فرض کنید یافته یک نمونه تصادفی به اندازه ۶ از توزیع یکنواخت بر بازه $(۰,\theta)$ اعداد ۳ ۱ ۵، ۴، ۱/۵ و ۰/۵ باشند، برآورد گشتاوری پارامتر θ برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۶ـ دو نوع فیلتر آب برای مقایسه در متوسط میزان عبور ناخالصی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. بر اساس یک نمونه تصادفی ۳۲ تایی از هر فیلتر نتایج زیر حاصل شده است:

فیلتر اول: $n_1 = ۳۲$, $\bar{x}_1 = ۸/۰$, $s_1^2 = ۴/۵$

فیلتر دوم: $n_2 = ۳۲$, $\bar{x}_2 = ۶/۵$, $s_2^2 = ۲/۰$

با فرض نرمال و مستقل بودن توزیع‌ها $\sigma_1 = \sigma_2$ یک فاصله اطمینان ۹۵% برای تفاضل میانگین‌ها یعنی $\mu_1 - \mu_2$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $۱/۵ \pm ۰/۸۱۲۵ t_{(۶۲;۰/۲۵)}$

۲) $۱/۵ \pm ۰/۸۱۲۵ t_{(۶۰;۰/۰۵)}$

۳) $۱/۵ \pm ۰/۸۲۱۵ t_{(۶۰;۰/۰۵)}$

۴) $۱/۵ \pm ۰/۸۲۱۵ t_{(۶۲;۰/۰۵)}$

۷ـ اگر $x_1, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع هندسی با تابع احتمال $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x$, $x = ۰ , ۱,۲,\ldots$ باشد. برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) پارامتر $\gamma(\theta) = P_\theta(x > n)$ کدام است؟ ($n \in N$ معلوم است.)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\widehat{\gamma(\theta)} = (\frac{\bar{x}}{۱+\bar{x}})^n$

۲) $\widehat{\gamma(\theta)} = (\frac{\bar{x}}{۱+\bar{x}})^{n+۱}$

۳) $\widehat{\gamma(\theta)} = (\frac{۱}{۱+\bar{x}})^n$

۴) $\widehat{\gamma(\theta)} = (\frac{۱}{۱+\bar{x}})^{n+۱}$

۸ـ اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد، با تعریف $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ و $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\bar{x}$ یک برآوردگر نااریب و s^2 یک برآوردگر اریب λ هستند.

۲) $\bar{x}$ و s^2 هر دو برآوردگر نااریب λ با واریانس‌های یکسان هستند.

۳) $\bar{x}$ و s^2 هر دو برآوردگر نااریب λ هستند اما واریانس s^2 کمتر از واریانس $\bar{x}$ است.

۴) $\bar{x}$ و s^2 دو برآوردگرهای نااریب λ هستند اما واریانس $\bar{x}$ کمتر از واریانس s^2 است.

۹ـ یک نمونه تصادفی ۳۲ تایی از یک جامعه نرمال دارای واریانس نمونه‌ای برابر ۱۰/۲۴ شده است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای σ (انحراف معیار جامعه) کدام است؟ $z_{0/05}=1/645$, $\chi^2_{0/975}(30)=16/791$, $\chi^2_{0/025}(30)=46/979$, $z_{0/025}=1/96$ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $[2/6,4/35]$ ۲) $[2/57,4/35]$ ۳) $[2/6,4/24]$ ۴) $[2/57,4/24]$

۱۰ـ اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه n تایی از توزیع نمایی با پارامتر λ با تابع چگالی احتمال روبرو باشد: $f_\lambda(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0\,;\lambda>0$

برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) برای $\gamma(\lambda)=P_\lambda(X\geq 1)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $e^{-\bar{x}}$ ۲) $e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$ ۳) $1-e^{-\bar{x}}$ ۴) $1-e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$

۱۱ـ اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع با تابع چگالی احتمال $0<x<\theta$, $f_\theta(x)=\frac{2x}{\theta^2}$ باشد برآوردگر به روش گشتاورها برای پارامتر θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\tilde{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}$ ۲) $\tilde{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$

۳) $\tilde{\theta}=X_{(1)}=\min(X_1,\dots X_n)$ ۴) $\tilde{\theta}=X_{(n)}=\max(X_1,\dots X_n)$

۱۲ـ فرض کنید $\bar{X}_1$ میانگین نمونه n_1 تایی از جامعه‌ای با واریانس σ^2 و $\bar{X}_2$ میانگین نمونه n_2 تایی مستقل از اولی از همان جامعه باشد. واریانس $\hat{\mu}=\frac{n_1\bar{X}_1+n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\sigma^2}{(n_1+n_2)^2}$ ۲) $\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)}\sigma^2$ ۳) $\frac{n_1+n_2}{(n_1n_2)}\sigma^2$ ۴) $\frac{\sigma^2}{n_1+n_2}$

۱۳ـ برای یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از توزیع $N(0,\sigma^2)$ دو عدد $\sum_{i=1}^{10}x_i=31$, $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=144$ را مشاهده کرده‌ایم، با فرض $\sigma^2\geq 18$ برآورد بزرگترین درستنمایی(MLE) پارامتر σ^2 چیست؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۴/۷۹ ۲) ۱۴/۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۴ـ برای مقایسه میانگین سه جامعه به ترتیب از جوامع نمونه‌های $n_1=3$ و $n_2=4$ و $n_3=5$ انتخاب شده است. میانگین جامعه اول برابر ۲ می‌باشد. در صورتی که واریانس نااریب نمونه‌ها به ترتیب برابر ۶ و ۸ و ۱۱ و واریانس جوامع برابر فرض شود، مناسب‌ترین برآورد نااریب از این واریانس عبارت است از: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) ۸/۶ ۲) ۸ ۳) ۸/۹ ۴) ۶

۱۵ـ متغیرهای تصادفی و مستقل X_1 و X_2 با توزیع یکسان $x=0,1$, $P(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$ مفروض است. اگر متغیر تصادفی T به صورت $T=X_1+X_2$ باشد در این‌صورت یک برآوردکننده نااریب برای $P(T=1)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) میانه نمونه n تایی از T ۲) میانگین نمونه n تایی از T ۳) واریانس نمونه n تایی از T ۴) نصف دامنه نمونه n تایی از T

۱۶ـ متغیر تصادفی X با توزیع $x=0,1,2,\dots$, $p(x)=\theta(1-\theta)^x$ مفروض است. یک برآورد MLE برای $[P(X=0)]^{-1}$ عبارت است از: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\bar{X}$ ۲) $1+\bar{X}$ ۳) $\frac{n}{n+\sum X_i}$ ۴) $U(x)=\begin{cases}1 & , x=0\\ 0 & ,\text{در غیر اینصورت}\end{cases}$

۱۷ـ فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $\theta < x < 1$ ، $f(x)=\frac{2x}{1-\theta^2}$ باشد. برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\hat{\theta}=\max(X_1,\dots,X_n)$
۲) $\hat{\theta}=\min(X_1,\dots,X_n)$
۳) $\hat{\theta}=\frac{\min(X_1,\dots,X_n)+\max(X_1,\dots,X_n)}{2}$
۴) $\hat{\theta}=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

۱۸ـ جعبه‌ای شامل شش مهره سفید و N مهره آبی است. ۵ مهره به تصادف، یک به یک با جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌کنیم. اگر تعداد مهره‌های آبی در نمونه انتخابی ۳ باشد، برآورد حداکثر درستنمایی N کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

۱۹ـ از ۹۰ دانشجوی ثبت نام شده در دوره کارشناسی ارشد دانشگاه A ، ۴۰ نفر دختر هستند. از ۵۵ دانشجویی که در خوابگاه دانشگاه زندگی می‌کنند ۲۵ نفر دختر هستند. اگر P_1 نسبت دانشجویان کارشناسی ارشد پسر در خوابگاه و P_2 نسبت دانشجویان کارشناسی ارشد دختر در خوابگاه باشد. با توجه به اطلاعات فوق $(\hat{P}_1,\hat{P}_2)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $(0/4, 0/375)$
۲) $(0/6, 0/625)$
۳) $(0/625, 0/6)$
۴) $(0/375, 0/4)$

۲۰ـ یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از توزیعی نرمال با میانگین μ و واریانس ۴ درنظر می‌گیریم. فاصله‌ی تصادفی $(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$ را به عنوان یک فاصله اطمینان برای μ انتخاب می‌کنیم. ضریب اطمینان این فاصله با بهترین تقریب کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۹
۲) ۰/۹۵
۳) ۰/۹۹
۴) ۱

۲۱ـ متغیر تصادفی X در فاصله $(0,1)$ دارای تابع توزیع $F_\theta(x)=x^\theta$ است. نمونه تصادفی $X_1,\cdots,X_n$ را از این توزیع در نظر می‌گیریم. اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه باشد، با فرض $\theta>0$ برآورد گشتاوری θ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری۸۳)

۱) $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$
۲) $\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$
۳) $\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}}$
۴) $\frac{1+2\bar{X}}{\bar{X}}$

۲۲ـ فرض کنید $1/2, 0/9, 0/3, 0/7, 1, 1/3$ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۶ تایی از توزیع $u(0,\theta)$ باشد. برآورد θ به روش گشتاوری کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰/۶
۲) ۰/۹
۳) ۱/۶
۴) ۱/۸

۲۳ـ فرض کنید $3/5, 3/8, 4/5, 5/7, 7/2, 5/3$ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۶ تایی از توزیع نمایی با میانگین λ باشد. برآورد حداکثر درستنمایی λ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۶
۲) ۵
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{5}$

۲۴ـ فرض کنید $1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1$ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۹ تایی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. برآورد حداکثر درستنمایی p کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{2}{3}$

۲۵ـ فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال مقابل باشد: $f_{\mu,\sigma}=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, x\ge\mu, \sigma>0$

برآورد (μ,σ) به روش گشتاوری کدام است؟ $(\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i, s^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2)$ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $(\bar{x},s^2)$
۲) $(\bar{x}-s^2,s^2)$
۳) $(\bar{x}-s,s)$
۴) $(\bar{x}+s,s)$

۲۶ـ فرض کنید $X_1,..,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,\theta^2)$ باشد. فاصله اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ برای θ کدام است؟

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i , s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\left(\dfrac{\bar{x}}{1+\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}} , \dfrac{\bar{x}}{\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}}\right)$

۲) $\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$

۳) $\left(\dfrac{\bar{x}}{1+\dfrac{t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}} , \dfrac{\bar{x}}{1-\dfrac{t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}}\right)$

۴) $\left(\bar{x}-t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$

۲۷ـ نمونه تصادفی $X_1,\cdots,X_n$ را از توزیع $F(x,\theta)=x^\theta$ ، $0<x<1$ ، $\theta\ge 1$، در نظر می‌گیریم برآورد گشتاوردی θ بر حسب $\bar{X}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ ۲) $\dfrac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$ ۳) $\dfrac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$ ۴) $\dfrac{1+\bar{X}}{\bar{X}}$

۲۸ـ نمونه تصادفی $x_3=13$ ، $x_2=10$ ، $x_1=4$ از چگالی $\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$ مشاهده شده است. برآورد ماکزیمم درست نمـایی (MLE) مشاهده شده برای θ چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۲۹ـ فرض کنید اطلاعات به دست آمده از یافته‌های یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از توزیع $U\left(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right)$ به صورت زیر باشد:

$x_{(1)}=5,\ \bar{x}=8,\ x_{(10)}=13$

برآورد θ به روش درستنمایی ماکزیمم (MLE) کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۳

۳۰ـ فرض کنید $X_1,...X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال روبرو باشد: $f_\theta(x)=\theta x e^{-\frac{1}{2}\theta x^2} ,x>0,\theta>0$ ÷

اگر $\tilde{\theta}$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب نمایانگر برآوردگرهای گشتاوری و درستنمایی ماکزیمم θ باشند، $(\tilde{\theta},\hat{\theta})$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\left(\dfrac{\pi}{2x\bar{X}^2},\dfrac{2n}{\sum X_i^2}\right)$ ۲) $\left(\dfrac{2}{\pi}\bar{X},\dfrac{1}{2}\bar{X}\right)$ ۳) $\left(\dfrac{\pi}{2\bar{X}},\dfrac{2}{\bar{X}}\right)$ ۴) $\left(\dfrac{2}{\pi}\bar{X}^2,\dfrac{1}{2n}\sum X_i^2\right)$

۳۱ـ اگر $f(x)=\begin{cases}2\theta^2x^{-3} & x\ge\theta\\ 0 & x>\theta\end{cases}$ تابع چگالی با پارامتر $\theta>0$ باشد برآورد حداکثر درستنمایی برای $P(X>2)$ کدام است؟

$(Y_1=\min_i X_i \quad Y_n=\max_i X_i)$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\dfrac{Y_1^2}{2}$ ۲) $\dfrac{Y_n^2}{2}$ ۳) $\left(\dfrac{Y_1}{2}\right)^2$ ۴) $\left(\dfrac{Y_n}{2}\right)^2$

۳۲ـ فرض کنید $X_1,...X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $p(\lambda)$ باشد. با تعریف برآوردگرهای زیر:

$T_1=\bar{X},T_2=\dfrac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{2}X_n,T_3=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i$ کدام یک از برآوردگرها ناریب هستند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) T_1 و T_2 نا اریب هستند. ۲) T_1 و T_3 ناریب هستند. ۳) T_2 و T_3 ناریب هستند. ۴) هر سه ناریب هستند.

۳۳ـ فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع وایبل با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}2\lambda x e^{-\lambda x^2} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) پارامتر λ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{n}{\sum X_i}$ ۲) $\frac{n}{\sum X_i^2}$ ۳) $\frac{1}{n}\sum X_i$ ۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

۳۴ـ فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پاراتو با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\alpha,\sigma}(x)=\begin{cases}\frac{\alpha\sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x\ge\sigma\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

اگر $(\hat\alpha,\hat\sigma)$ نمایانگر برآوردگر حداکثر درستنمایی (α,σ) باشد، $(\hat\alpha,\hat\sigma)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\left(\frac{n}{\sum_1^n \ln\frac{X_i}{X_{(1)}}}\ ,\ X_{(1)}\right)$ ۲) $\left(\frac{1}{n}\sum \ln X_i\ ,\ X_{(1)}\right)$ ۳) $\left(X_{(1)}\ ,\ \sum_{i=1}^n \ln\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)$ ۴) $\left(\frac{1}{n}\sum_1^n \ln\frac{X_i}{X_{(1)}}\ ,\ X_{(1)}\right)$

۳۵ـ براساس یافته‌های یک نمونه تصادفی ۱۹۶ تایی از توزیع $N(\theta,\theta^2)$ نتایج روبرو به دست آمده است: $n=196\ \bar{x}=2/28, s^2=4$

یک فاصله اطمینان ۹۵% برای θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $(2, 2/56)$ ۲) $(2, 2/13)$ ۳) $(2, 2/65)$ ۴) $(1/86, 2/76)$

۳۶ـ محقق برای جمع آوری اطلاعات و برآورد میانگین یک صفت از یک جامعه بزرگ با واریانس $\sigma^2=25$، چه تعداد نمونه باید انتخاب نماید تا با ۹۵% اطمینان خطای برآورد حداکثر ۱ باشد؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۶۸ ۲) ۷۹ ۳) ۸۶ ۴) ۹۷

۳۷ـ تابع چگالی $x>0, \theta>0$ $f_X(x)=\frac{1}{\Gamma(4)\theta^4}x^3e^{-\frac{x}{\theta}}$ مفروض است، به ازای یک نمونه ۸ تایی، برآورد حداکثر درست‌نمایی θ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{4n}\sum x_i$ ۲) $\frac{1}{n}\sum x_i$ ۳) $\frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}$ ۴) $\frac{1}{\frac{1}{4n}\sum x_i}$

۳۸ـ برای برآورد نسبت حوادث رانندگی که شامل عابران پیاده نیز می‌شود، حجم نمونه چقدر باشد تا ۹۵٪ اطمینان داشته باشیم برآورد حاصل از نسبت واقعی بیشتر از ۴٪ اختلاف ندارد. $(Z_{0/025}\approx 2)$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{625}{4}$ ۲) ۶۲۵ ۳) ۱۲۵۰ ۴) ۲۵۰۰

۳۹ـ در جامعه‌ای ۳۶ درصد کالاهای مصرفی وارداتی است. یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از کالاهای مصرفی انتخاب شده است. انحراف معیار نسبت کالاهای وارداتی در نمونه کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۰۴۸ ۲) ۰/۰۴۸ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۴/۸

۴۰ـ فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $1<x<\theta$، $f_\theta(x)=\frac{2(x-1)}{(\theta-1)^2}$. برآوردگر حداکثر درستنمایی 2θ(MLE) کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $3\bar{X}-1$ ۲) $1-3\bar{X}$ ۳) $2X_{(n)}$ ۴) $2X_{(1)}$

۴۱ـ یک نمونه تصادفی ۳۶تایی از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس $\sigma^2=4$ انتخاب می‌شود. احتمال این‌که پارامتر μ در فاصله $(\bar{x}\pm 0/65)$ باشد تقریباً کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۹۷۵

۴۲ـ فرض کنید $X_۱,\dots,X_{۹۶۱}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta,\theta^۲)$ باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای θ کدام است؟

$(S^۲=\frac{۱}{n-۱}\Sigma(X_i-\bar{X})^۲\ ,\ \sqrt{۹۶۱}=۳۱\ ,\ \frac{۱/۹۶}{۳۱}=۰/۰۶)$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $(\frac{\bar{x}}{۱/۰۶},\frac{\bar{x}}{۰/۹۴})$ ۲) $(\frac{\bar{x}}{۲/۹۶},\frac{\bar{x}}{۱/۹۶})$ ۳) $(\bar{x}-۱/۹۶S,\bar{x}+۱/۹۶S)$ ۴) $(\bar{x}-۰/۰۶S,\bar{x}+۰/۰۶S)$

۴۳ـ اگر $X_۱,X_۲,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و P (P معلوم است) باشد. آنگاه برآوردگر n با روش گشتاوری کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\bar{x}}{p}$ ۲) $\frac{p}{\bar{x}}$ ۳) $p\bar{x}$ ۴) $\frac{\bar{x}}{۱-p}$

۴۴ـ فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با پارامتر θ و تابع احتمال $f_\theta(x)=\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}\ ,\ x=۰,۱,۲,\dots$ باشد. برآورد حداکثر درستنمایی $\gamma(\theta)=P_\theta(X\le ۱)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $(\bar{x}+۱)e^{-\bar{x}}$ ۲) $\frac{\bar{x}+۱}{e^{-\bar{x}}}$ ۳) $\frac{e^{-\bar{x}}}{\bar{x}+۱}$ ۴) $\sqrt{\bar{x}+۱}e^{-\bar{x}}$

۴۵ـ مدت زمان مونتاژ یک قطعه الکترونیکی متغیر تصادفی با واریانس $\sigma^۲=۱۶$ است. اگر برای برآورد میانگین مدت زمان مونتاژ، یک نمونه ۶۴ تایی انتخاب کنیم و مقدار $\bar{x}$ برابر با ۱۲۰ به دست آید. حداکثر خطای حدی در برآورد μ (میانگین واقعی مدت زمان مونتاژ) با اطمینان ۰/۹۵ برابر کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۹۸ ۳) ۱/۹ ۴) ۱/۹۶

۴۶ـ متغیر تصادفی X در بازه $(۱,\infty)$ دارای تابع چگالی $(\theta>۰),f(x)=(۱+\theta)x^{-\theta-۲}$ است نمونه تصادفی $X_۱,\cdots,X_n$ از این توزیع به دست آمده است. برآورد گشتاوری θ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{\bar{X}-۱}$ ۲) $\frac{۱}{\bar{X}+۱}$ ۳) $\frac{\bar{X}-۱}{\bar{X}}$ ۴) $\frac{۱+\bar{X}}{\bar{X}}$

۴۷ـ اگر $X_۱,X_۲,\cdots,X_{۱۰}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)} & x>\theta\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ باشد، آنگاه برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\hat{\theta}=\frac{X_{(۱)}+X_{(۲)}}{۲}$ ۲) $\hat{\theta}=\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i$

۳) $\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_۱,X_۲,\cdots,X_m\}$ ۴) $\hat{\theta}=X_{(۱)}=\min\{X_۱,X_۲,\cdots,X_n\}$

۴۸ـ فرض کنید $X_۱,\cdots X_۵$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\theta}$ باشد، به ازای چه مقداری از k بازه $(۰,\frac{k}{\bar{X}})$ یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای θ است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱/۵۵۰۷ ۲) ۱/۶۹۱۵ ۳) ۱/۸۳۰۷ ۴) ۱/۹۶۷۵

۴۹ـ اگر Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(۰,\theta)$ باشد، بر اساس تک مشاهده Y، حد پایین ۹۵٪ برای پارامتر θ بر اساس این نمونه انتخابی کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۰/۰۵}{y}$ ۲) $\frac{y}{۰/۹۵}$ ۳) $\frac{y}{۰/۰۵}$ ۴) $\frac{۰/۰۵}{y}$

۵۰ـ فرض کنید X نمایانگر تعداد تلفن‌های رسیده در فواصل ۵ دقیقه به یک دانشکده، بعد از ساعت ۱۴ باشد (X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است) . بر اساس ۱۲ مشاهده مستقل زیر، برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر λ کدام است؟ ۱,۲,۱,۱,۲,۴,۰,۱,۰,۱,۱,۰

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۵۱ـ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $0<x<1$, θ ، $f(x)=\frac{2x}{1-\theta^2}$ عبارت است از:

$\frac{3}{10},\frac{4}{10},\frac{1}{5},\frac{2}{10},\frac{1}{10}$ برآورد حداکثر درستنمایی θ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{4}{10}$ ۳) $\frac{5}{10}$ ۴) $\frac{12}{10}$

۵۲ـ درصد خلوص یک ماده شیمیایی از توزیع نرمال با میانگین و واریانس مجهول μ و σ^2 پیروی می‌کند. بر اساس دو روش اندازه‌گیری درصد خلوص این ماده شیمیایی خلاصه اطلاعات زیر به دست آمده است:

$n_1=25$ $\bar{x}_1=10$ $s_1=4$

$n_2=20$ $\bar{x}_2=15$ $s_2=8$

فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $[\frac{4}{F(19,24,0/025)},\frac{4}{F(19,24,0/975)}]$

۲) $[\frac{1}{2F(24,19,0/975)},\frac{1}{2}F(19,24,0/975)]$

۳) $[\frac{2}{F(19,24,0/025)},\frac{2}{F(24,19,0/025)}]$

۴) $[\frac{1}{4F(24,19,0/975)},\frac{1}{4}F(19,24,0/975)]$

۵۳ـ جعبه‌ای شامل ۶۴ مهره است که N_1 تا مهره سفید و بقیه سیاه هستند. یک نمونه تصادفی ۸ تایی بدون جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود و X نمایانگر تعداد مهره‌های سفید در نمونه ۸ تایی است. این عمل ۳۰ مرتبه مستقلاً تکرار و نتایج به شرح روبرو است: ۳,۰,۰,۱,۱,۱,۱,۳,۱,۱,۲,۰,۱,۳,۱
۰,۲,۰,۲,۱,۱,۲,۳,۲,۲,۴,۳,۱,۱,۲

برآورد به روش گشتاوری N_1 کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷ و ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) $\frac{16}{3}$

۵۴ـ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۲ تایی از $N(0,\sigma^2)$ عبارت است از $x_2=7$ و $x_1=1$ برآورد درستنمایی ماکسیمم (MLE) پارامتر σ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۵۵ـ فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با تابع چگالی احتمال $x>0$, $f(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ باشد، برآوردگر پارامتر β به روش گشتاوری (MME) کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\bar{X}^2}$ ۲) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n\bar{X}^2}$ ۳) $\frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ ۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n\bar{X}}$

۵۶ـ فرض کنید که Y_1,Y_2,Y_3,Y_4 یک نمونه تصادفی ۴ تایی از توزیع با میانگین θ باشد. برای این‌که آماره $W=\alpha\sqrt{Y_1Y_2Y_3Y_4}$ برآوردگری ناریب برای θ^2 باشد، مقدار α کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱۶ ۲) $\frac{4}{\pi}$ ۳) $\frac{12}{\pi^2}$ ۴) $\frac{16}{\pi^2}$

۵۷ـ فرض کنید که $x_1,x_2,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $1\le x\le\theta$, $f_\theta(x)=\frac{2(x-1)}{(1-\theta)^2}$ باشد، برآوردکننده روش ماکزیمم درستنمایی برای 2θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $1-2\bar{x}$ ۲) $2\bar{x}$ ۳) $2x_n$ ۴) $2x_1$

۵۸ـ فرض کنید ۱۰, ۸,۱۲,۲۴ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $x\ge\theta$ $f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)}$ باشد. برآورد θ به روش گشتاوری کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵۹ـ مهره‌های داخل یک کیسه از ۱ تا θ شماره‌گذاری شده است. می‌خواهیم θ را برآورد کنیم. اگر ۵ بار به تصادف و با جایگذاری از این جعبه مهره انتخاب و شماره‌ها به صورت ۵,۱۰,۱۵,۲۵,۳۰ باشد، برآورد مناسب برای θ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۳۰   ۲) ۳۱   ۳) ۳۲   ۴) ۳۳

۶۰ـ فرض کنید که $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)=\frac{1-\theta}{1+\theta}e^{-\frac{1-\theta}{1+\theta}.x}, x>0\ ,\ \theta>0$ باشد، برآورد ماکسیمم درستنمایی $\theta(MLE)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}+1}$ ۲) $\max(0,\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}+1})$ ۳) $\min(1,\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}+1})$ ۴) $\max(1,\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}+1})$

۶۱ـ فرض کنید $X\sim N(0,\sigma^2)$. اگر فاصله $(|X|,2|X|)$ به عنوان یک فاصله اطمینان برای σ اختیار شود، مقدار ضریب اطمینان کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۲۸۵۶   ۲) ۰/۲۸۶۵   ۳) ۰/۲۹۶۹   ۴) ۰/۲۹۹۶

۶۲ـ فرض کنید که طول عمر لامپ‌های تولیدی یک شرکت از توزیع نمایی باتابع چگالی احتمال $x>0$ ، $f_\lambda(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ پیروی می‌کند. هر لامپی که کمتر از ۱۰۰ ساعت عمر کند هزینه گارانتی معادل ۵۰۰ تومان دارد. اگر یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از لامپ‌ها بگیریم، مطلوب است برآورد هزینه گارانتی این ۱۰۰ لامپ از طریق روش درستنمایی ماکزیمم. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $50{,}000(1-e^{-100\lambda})$ تومان   ۲) ۵۰,۰۰۰ تومان   ۳) $50{,}000e^{-100\lambda}$ تومان   ۴) ۲۵۰۰۰ تومان

۶۳ـ فرض کنید X فضای نمونه و θ فضای پارامتر باشند. اگر x مشاهده‌ای از $f_\theta(x)$ و $\hat{\theta}$ برآورد حداکثر درستنمایی θ بر اساس مشاهده x باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\int_\theta(x)>\int_\theta(y)$ به ازای $\forall y\in$

۲) $\int_{\hat{\theta}}(x)>\int_\theta(x)$ به ازای $\forall\theta\in\theta$

۳) $\int_{\hat{\theta}}(x)\geq\int_\theta(y)$ به ازای $\forall y\in x$

۴) $\int_{\hat{\theta}}(x)\geq\int_{\hat{\theta}}(y)$ به ازای $\forall y\in x;\theta\in\theta$

۶۴ـ متغیر تصادفی در پارامتر نمایی x با پارامترهای μ و $\lambda>0$ و تابع چگالی زیر مفروض است.

$$f(x,\mu,\lambda)=\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}\ ;\ x\geq\mu$$

با فرض دسترس بودن نمونه تصادفی $x_1,\ldots,x_n$ از جامعه x، MLE (تخمین زننده حداکثر درستنمایی) پارامترهای μ، λ برابرند با: (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\hat{\mu}=\min(x_1,\ldots,x_n)\ ,\ \lambda=\frac{n}{\overline{x}-\hat{\mu}}$

۲) $\hat{\mu}=\max(x_1,\ldots,x_n)\ ,\ \hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}-\hat{\mu}}$

۳) $\hat{\mu}=\max(x_1,\ldots,x_n)\ ,\ \hat{\lambda}=\frac{n}{\overline{x}-\hat{\mu}}$

۴) $\hat{\mu}=\min(x_1,\ldots,x_n)\ ,\ \hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}-\overline{\mu}}$

۶۵: میانگین سطح تکسّن در نمونه‌های آب ۹۸ و انحراف معیار آن ۱۱۳ می‌باشد. اگر سطح تکسّن به صورت نرمال توزیع شده باشد، در این صورت میانگین ۹۵% نمونه‌ها در کدام‌یک از فواصل زیر قرار دارد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

۱) ۵۹ و ۱۳۷   ۲) ۷۲/۵ و ۱۲۳/۵   ۳) ۸۱/۳ و ۱۱۴/۷   ۴) ۷۶/۶ و ۱۱۹/۴

۶۶ـ اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه ۲۵تایی از توزیع $N(\mu,25)$ باشد. ضریب اطمینان فاصله اطمینان $(\overline{X}-2,\overline{X}+2)$ برای پارامتر μ کدام است؟ ($\Phi(0)$ نشانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.) (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $1-2\Phi(2)$ ۲) $2\Phi(2)-1$ ۳) $1-2\Phi(\frac{2}{5})$ ۴) $2\Phi(\frac{2}{5})-1$

۶۷ـ برای برآورد نمودن احتمال موفقیت (p) در توزیع هندسی (از روش درست نمایی ماکسیمم)، پس از k بار آزمایش با اولین موفقیت رسیده‌ایم. این برآوردکننده عبارت است از .... (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{1}{k}$ ولی نتیجه به طور متوسط بزرگ‌تر از p است.

۲) $\frac{1}{k}$ و ناریب است.

۳) $\frac{1}{k}$ ولی نتیجه به طور متوسط کوچک‌تر از p است.

۴) $\frac{1}{k}$ و اریب.

۶۸ـ متغیر تصادفی X مقادیر ۵، ۱۰ و ۱۵ را با احتمال‌های $\frac{\theta}{3}$، $1-\frac{2\theta}{3}$ و $\frac{\theta}{3}$ می‌پذیرد. برای یک نمونه تصادفی سه‌تایی اعداد $x_1 = 5$، $x_2 = 10$ و $x_3 = 15$ را مشاهده کرده‌ایم. برآورد بیشترین درستنمایی برای θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $2\frac{1}{3}$
۴) ۱

۶۹ـ فرض کنید $X \sim N[\mu, 4^2]$ است. نمونه‌ی تصادفی $X_1, \cdots X_9$ را به منظور ارائه یک فاصله‌ی اطمینان $100(1-\alpha)\%$ یک طرفه‌ی پایین برای μ به‌صورت $[L, \infty)$ می‌گیریم. در این صورت میزان اریبی متغیر تصادفی L در برآورد کردن پارامتر نامعلوم μ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) -3
۲) $+4$
۳) صفر
۴) -4

۷۰ـ فرض کنید یک مقاله برای داوری نوع نگارش به سه داور مختلف داده شده است. داوری‌ها به طور مستقل انجام شده و داورهای اول، دوم و سوم به ترتیب ۸، ۶ و ۵ غلط نگارشی از این مقاله استخراج کرده‌اند. تعداد غلط‌های نگارشی مشترک کشف شده توسط داورهای اول و دوم برابر با ۳، تعداد غلط‌های نگارشی مشترک کشف شده توسط داورهای اول و سوم برابر با ۲ و تعداد غلط‌های نگارشی مشترک کشف شده توسط داورهای دوم و سوم برابر با صفر است. همچنین تعداد غلط‌های نگارشی مشترک کشف شده توسط هر سه داور برابر با ۲ است. اگر احتمال کشف هر غلط نگارشی توسط داورهای اول، دوم و سوم به ترتیب برابر با $P_1 = 0/5$، $P_2 = 0/5$ و $P_3 = 0/4$ باشد و تعداد کل غلط‌های نگارشی این مقاله برابر با N باشد، برآورد نقطه‌ای N چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۹
۴) ۲۰

۷۱ـ دو متغیر تصادفی X و Y به طور مستقل از هم از توزیع‌های پواسون با میانگین‌های نامعلوم، به ترتیب، μ_1 و μ_2 پیروی می‌کنند به طوری که $\mu_2 > \mu_1$ باشد. از هر یک از این دو توزیع نمونه‌ی تصادفی با اندازه‌ی یکسان n می‌گیریم. در این صورت گزینه‌ی صحیح به هنگام مقایسه‌ی اطلاعات مفید درون نمونه‌ی $X_1, \cdots, X_n$ برای برآورد μ_1 از یک سو با اطلاعات مفید درون نمونه‌ی $Y_1, \cdots, Y_n$ برای برآورد μ_2 از سوی دیگر، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۱)

۱) هر دو یکسان است چون اندازه‌های دو نمونه مساوی است.
۲) اطلاعات مفید درون نمونه‌ی Y بیشتر از اطلاعات مفید درون نمونه‌ی X است.
۳) اطلاعات مفید درون نمونه‌ی X بیشتر از اطلاعات مفید درون نمونه‌ی Y است.
۴) به این پرسش نمی‌توان پاسخ داد و تنها می‌توان گفت با افزایش اندازه‌ی نمونه، میزان اطلاعات مفید درون هر یک از دو نمونه افزایش می‌یابد.

۷۲ـ فرض کنید $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند. اگر $X_i \sim N(0,1)$ و $Y_i \mid X_i = x_i \sim N(x_i\theta, 1)$، $i = 1, \cdots, n$، باشند، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$
۲) $\frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$
۳) $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}$
۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}$

۷۳ـ فرض کنید براساس یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از دانشجویان آمار در یک دانشگاه ۳۶ نفر پسر باشند. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای نسبت پسران دانشگاهی در رشته آمار کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(0/75, 0/77)$
۲) $(0/27, 0/45)$
۳) $(0/63, 0/65)$
۴) $(0/34, 0/36)$

۷۴ـ چنانچه $\hat{\theta} = \overline{X} + \frac{1}{n}$ برآورده کننده‌ای از میانگین جامعه باشد، MSE این برآورد کننده برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{n\sigma_X^2 + 1}{n^2}$
۲) $\frac{\sigma_X^2 + 1}{n}$
۳) $\frac{\sigma_X^2 - 1}{n}$
۴) $\frac{n\sigma_X^2 + 1}{n}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ گزینه «۳» در بین همه برآوردهای موجود برای μ (میانگین جامعه) بهترین برآورد $\bar{x}$ می‌باشد زیرا این برآوردگر ناریب است. چون واریانس $\bar{x}$ با کران پایین کرامر برابر است پس واریانس $\bar{x}$ از واریانس هر برآوردگر دیگری کمتر است. (نامساوی کرامر ـ رائو)

۲ـ گزینه «۴» در آمار بیز پارامتر θ خودش یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع به خصوصی می‌باشد.

۳ـ گزینه «۳» **قضیه زهنا:** اگر $\hat{\theta}$ برآورد MLE پارامتر θ باشد آنگاه $h(\hat{\theta})$ برآورد MLE پارامتر $h(\theta)$ است. بنابراین برای یافتن $\theta^{-۱}$، ابتدا $\hat{\theta}$ را به دست می‌آوریم. تابع درستنمایی که آن را با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$L(\theta)=\prod_{i=۱}^{n} f(x_i)=\prod_{i=۱}^{n}\theta(۱-\theta)^{x_i}=\theta^n(۱-\theta)^{\sum x_i}$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات می‌توان از Ln تابع درستنمایی $L(\theta)$ استفاده کرد.

$$\ell(\theta)=Ln(L(\theta))=nLn\theta+\sum x_i Ln(۱-\theta)$$

تذکر: دقت شود تابع فوق بر حسب پارامتر θ پیوسته است و می‌توان از آن مشتق گرفت.

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}-\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{۱-\theta}$$

ریشه معادله $\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}$ در صورتی که ماکزیمم‌کننده $\ell(\theta)$ باشد به عنوان برآورد MLE معرفی می‌شود.

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=۰\Rightarrow\frac{n}{\theta}-\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{۱-\theta}=۰\Rightarrow n(۱-\theta)-\theta\sum_{i=۱}^{n}x_i=۰\Rightarrow n=\theta(n+\sum_{i=۱}^{n}x_i)\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{n+\sum_{i=۱}^{n}x_i}=\frac{۱}{۱+\bar{x}}$$

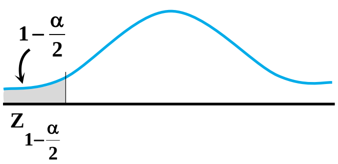
و با توجه به قضیه زهنا خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}-۱=\frac{۱}{\hat{\theta}}=۱+\bar{x}$$

۴ـ گزینه «۴» یک فاصله اطمینان برای میانگین یک جامعه با توزیع نرمال که با احتمال $(۱-\alpha)\%$ شامل میانگین جامعه (μ) باشد به صورت مقابل تعیین می‌شود.

$$\mu\in(\bar{X}-\frac{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sigma}{\sqrt{n}})$$

که در آن $z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$ نقطه‌ای در توزیع نرمال است که مساحت قبل از آن برابر $۱-\frac{\alpha}{۲}$ است.



دراین‌جا یک فاصله اطمینان ۹۵% مد نظر است بنابراین $۱-\alpha=۰/۹۵$ و در نتیجه $۱-\frac{\alpha}{۲}=۰/۹۷۵$ لذا باید $Z_{۰/۹۷۵}$ را بیابیم که مطابق با اطلاعات مسأله $Z_{۰/۹۷۵}=۱/۹۶$.

$$(\bar{X}\pm\frac{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sigma}{\sqrt{n}})=(\bar{X}\pm\frac{۱}{۳})\Rightarrow\frac{Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{(۱/۹۶)۱۰}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sqrt{n}=(۱/۹۶)\times۱۰\times۳=۵۸/۸\Rightarrow n=۳۲۵۸$$

۵ـ گزینه «۳» اگر $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n تا از توزیع $f_\theta(x)$ باشد، برآورد گشتاوری پارامتر θ که آن را به اختصار MME می‌نامیم از حل معادله گشتاوری $\bar{X}=E_\theta(X)$ به دست می‌آید.

$$X\sim U(۰,\theta)\Rightarrow f_\theta(x)=\frac{۱}{\theta}\quad ۰<x<\theta\quad;\quad E(X)=\int_۰^\theta\frac{x}{\theta}dx=\frac{۱}{۲}\frac{x^۲}{\theta}\Big|_۰^\theta=\frac{\theta^۲}{۲\theta}=\frac{\theta}{۲}\Rightarrow\bar{X}=\frac{\theta}{۲}\Rightarrow\tilde{\theta}=۲\bar{X}$$

از حل معادله $\bar{x}=E_\theta(X)=\frac{\theta}{۲}$ داریم $\tilde{\theta}=۲\bar{x}$ ، بنابراین:

$$\tilde{\theta}=۲(\frac{۳+۱+\dots+۰/۵}{۶})=۴$$

۶ـ گزینه «۱» رابطه فاصله اطمینان موردنظر را می‌نویسیم:

$$\mu_1-\mu_2\in(\bar{X}_1-\bar{X}_2\pm t_{\frac{\alpha}{2}(n_1+n_2-2)}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$$

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(31)(4/5)+(31)(2)}{32+32-2}=\frac{201/5}{62}\ ;\ \mu_1-\mu_2\in(1/5\pm0/8125\,t_{(62,0/025)})$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار احتمال $P(X>n)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma(\theta)=P(X>n)=\sum_{x=n+1}^{\infty}\theta(1-\theta)^x=\theta\sum_{x=n+1}^{\infty}(1-\theta)^x=\theta\left[(1-\theta)^{n+1}+(1-\theta)^{n+2}+\ldots\ldots\right]$$

مجموع داخل کروشه مجموع یک تصاعد هندسی است. ($S=\frac{\text{جمله اول}}{1-r}$)

$$=\theta.\frac{(1-\theta)^{n+1}}{1-\theta}\quad \text{I}$$

$$L(\theta)=\hat{\theta}(1-\theta)^{\sum x_i}\ ;L(\theta)=n\log(\theta)+\sum(x_i)\log(1-\theta)\Rightarrow\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}_{mL}=\frac{1}{1+\bar{x}}\quad \text{II}$$

طبق خاصیت پایایی M.L.E داریم:

$$\text{I},\text{II}\Rightarrow\gamma_{(\theta)}=\frac{1}{\bar{X}+1}.\frac{(1-\frac{1}{\bar{X}+1})^{n+1}}{1-\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}}=(\frac{\bar{X}}{\bar{X}+1})^{n+1}$$

۸ـ گزینه «۳»

$$E(\bar{X})=\mu\Rightarrow E(\bar{X})=\lambda\quad ,\quad E(S^2)=\sigma^2\Rightarrow E(S^2)=\lambda$$

۹ـ گزینه «۱» فاصله اطمینان برای واریانس به صورت روبرو است:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\Rightarrow\begin{cases}n=32\\S^2=10/24\end{cases}$$

سطح پایین فاصله اطمینان $L=\frac{31\times(10/24)}{46/979}=6/7570$

$\Rightarrow\sigma\in(2/6,4/35)$

سطح بالای فاصله اطمینان $U=\frac{31\times(10/24)}{16/791}=18/95$

۱۰ـ گزینه «۲» پایاست MLE بنابراین:

$$\gamma(\lambda)=P(X\geq1)=\int_1^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_1^{\infty}=e^{-\lambda}$$

(تابع درستنمایی) $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}\Rightarrow L(\lambda)=\operatorname{Ln}L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum x_i$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda}=0\Rightarrow\frac{n}{\lambda}-\sum x_i=0\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum x_i}=\frac{1}{\bar{x}}\Rightarrow\hat{\gamma}_{(\lambda)}=e^{-\hat{\lambda}}=e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$$

۱۱ـ گزینه «۱» امید ریاضی توزیع را برابر با میانگین نمونه قرار می‌دهیم:

$$\mu_1=EX=\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{\theta^2}[\frac{x^3}{3}]_0^{\theta}=\frac{2\theta}{3}\ ;\ m_1=\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}\Rightarrow\frac{2\theta}{3}=\bar{x}\Rightarrow\tilde{\theta}=\frac{3\bar{x}}{2}$$

۱۲ـ گزینه «۴» از خواص واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{var}(\bar{x}_1)=\frac{\sigma^2}{n_1}\ ,\ \operatorname{var}(\bar{x}_2)=\frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$\operatorname{var}(\frac{n_1\bar{X}_1+n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2})=\frac{1}{(n_1+n_2)^2}(n_1^2\operatorname{var}\bar{X}_1+n_2^2\operatorname{var}\bar{X}_2)=\frac{1}{(n_1+n_2)^2}(n_1\sigma^2+n_2\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2}$$

۱۳ـ گزینه «۴» اگر $x_1,\cdots,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی از خانواده چگالی‌های $\{f_\theta(x):\theta\in\theta\}$ باشد آنگاه: $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)$

تعریف: اگر $\sigma(x)$ برآوردگری برای θ باشد به طوری که: $i)P_\theta(\sigma(x)\in\theta)=1\quad\forall\theta\in\theta$ و $ii)L(\sigma(x))\geq L(\theta)\quad\forall\theta\in\theta$

آنگاه $\sigma(x)$ به عنوان یک برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ تعریف می‌شود.

$$X_i\sim N(0,\sigma^2)\ ,\ f_X(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-x_i^2}{2\sigma^2}}\quad x\in\mathbb{R}\quad \sigma>0\quad i=1,\cdots,10$$

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{10}f_X(x_i)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^{10}e^{\frac{-\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow \ell(\sigma^2)=Ln(L(\sigma^2))=-5Ln(2\pi\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial\ell(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{-5}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{2\sigma^4}=0\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10}$$

با توجه به قید $\sigma^2\geq18$ و بند i از تعریف فوق $\hat{\sigma}^2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}^2=\begin{cases}\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10} & \text{if}\quad \frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10}>18\\ 18 & \text{if}\quad \frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10}\leq18\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=1}^{10}x_i^2=144\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10}=14/4<18\Rightarrow\hat{\sigma}^2=18$$

۱۴ـ گزینه «۱» توجه کنید که در جامعه اول میانگین معلوم و برابر با ۲ می‌باشد بنابراین:

$$S_1^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n_1}\Rightarrow n_1S_1^2=\sum(x_i-\mu)^2$$

اما در دو جامعه دیگر داریم:

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{n-1}\Rightarrow(n-1)S^2=\sum(x_i-\bar{x})^2$$

بنابراین رابطه واریانس ادغام شده به صورت روبرو می‌باشد:

$$S_p^2=\frac{n_1S_1^2+(n_2-1)S_2^2+(n_3-1)S_3^2}{n_1+(n_2-1)+(n_3-1)}=\frac{3\times6+(4-1)\times8+(5-1)\times11}{3\times(4-1)\times(5-1)}=8/6$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$T=X_1+X_2\sim Bin(2,\theta)\quad\Rightarrow\quad P(T=1)=\binom{2}{1}\theta^1(1-\theta)=2\theta(1-\theta)=npq=Var(T)$$

یعنی پارامتری را که می‌خواهیم برآورد کنیم همان واریانس توزیع است. $E(I\{T=1\})=2\hat{\theta}(1-\hat{\theta})$

۱۶ـ گزینه «۲» ابتدا برای θ برآورد MLE را پیدا می‌کنیم سپس طبق خاصیت پایایی MLE، این برآورد را برای $(P(X=0))^{-1}$ به دست می‌آوریم.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i)=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=0}^{n}x_i}\quad\text{(تابع درستنمایی)}$$

$$L(\theta)=LnL(\theta)=n\ln\theta+\sum x_i\ln(1-\theta)\quad\text{(از تابع بالا Ln می‌گیریم)}$$

$$\frac{dL}{d\theta}=0\Rightarrow\frac{n}{\theta}-\frac{\sum x_i}{1-\theta}=0\Rightarrow\frac{n-n\theta-\theta\sum xi}{\theta(1-\theta)}=0\Rightarrow n=\theta(n+\sum x_i)\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{n+\sum x_i}=\frac{1}{1+\bar{X}}$$

$$(P(X=0))^{-1}=\theta^{-1}\Rightarrow\hat{\theta}^{-1}=1+\bar{X}$$

(توجه $P(X=0)=\theta(1-\theta)^0=\theta$)

۱۷ـ گزینه «۲» ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{(1-\theta^2)}I_{(\theta,1)}(x_i)=\frac{2^n\prod_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta^2)^n}[\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,1)}(x_i)]$$

که $I_{(\theta,1)}(x_i)=\begin{cases}1 & \theta<x_i<1\\ 0 & o.w\end{cases}$

برای اینکه تابع درستنمایی معنی‌دار باشد باید (*) مخالف صفر باشد پس باید: $\forall_i \ , \ \theta<x_i<1 \Rightarrow \theta<\min\{x_i\}=x_{(1)}\Rightarrow \theta<x_{(1)}$

بنابراین: $L(\theta)=\dfrac{2^n\prod_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta^2)^n}$ و $\theta<x_{(1)}$

Δ توجه کنید که $0<\theta<1$, $\dfrac{\partial L}{\partial\theta}>0$ پس $L(\theta)$ تابعی صعودی از θ است در نتیجه ماکزیمم مقدار خود را در کران بالای θ یعنی $x_{(1)}$ می‌گیرد.

۱۸ـ گزینه «۱» بنابراین: $\theta=\min(x_i)=\min(0/6,0/8,0/1,0/5,0/4)=0/1$

۱۹ـ گزینه «۴» تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم مشتق گرفته مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$L(N)=\binom{5}{3}\left(\frac{N}{6+N}\right)^3.\left(\frac{6}{6+N}\right)^2 \Rightarrow L'(N)=0 \Rightarrow 3N^2(6+N)-5N^3=0 \Rightarrow 18N^2=2N^3 \Rightarrow N=9$$

۲۰ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه $\hat{P}=\dfrac{x}{n}$ داریم: $\hat{p}_1=\dfrac{30}{50}=0/6 \ , \ \hat{p}_2=\dfrac{25}{40}=0/625$

۲۱ـ گزینه «۴» اگر $X_1\cdots X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد، آنگاه یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای μ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\mu\in(\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

فاصله اطمینان در صورت سؤال $(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$ است بنابراین:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2}{10}=1\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}=5$$

می‌دانیم که $p(z<5)=1$ در نتیجه داریم:

$$P(Z<5)=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1\Rightarrow\alpha=0$$

و ضریب اطمینان این فاصله اطمینان برابر است با: $1-\alpha=1-0=1$

۲۲ـ گزینه «۱» فرض کنید $f(\bullet,\theta_1,...,\theta_k)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X باشد که دارای k پارامتر $\theta_1,\cdots;\theta_k$ است و $M_r=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^r \ , \ \mu_r=E(X^r)$ باشند. آنگاه از حل k معادله‌ی: $M_j=\mu_j \ , \ j=1,\cdots,k$

برحسب k متغیر $\theta_1\cdots,\theta_k$ ، $\hat{\theta}_1,\cdots\hat{\theta}_k$ به دست می‌آید. $(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)$ برآوردهای گشتاوری $(\theta_1,...,\theta_k)$ نامیده می‌شوند.

$$F_\theta(x)=x^\theta\Rightarrow f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1} \quad 0<x<1$$

$$\mu_1=E(X)=\int_0^1\theta x^\theta dx=\frac{\theta}{\theta+1} \quad , \quad M_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

بنابراین $\hat{\theta}$ از حل معادله‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\mu_1=M_1\Rightarrow\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{x}\Rightarrow\theta=\bar{x}(\theta+1)\Rightarrow\tilde{\theta}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

۲۳ـ گزینه «۴» امید ریاضی را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}E(X)=\dfrac{\theta+0}{2}=\dfrac{\theta}{2}\\ m_1=\bar{X}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\theta}{2}=\bar{x}\Rightarrow\theta=2\bar{x}\Rightarrow\tilde{\theta}=2\times\left(\frac{1/3+1+0/7+0/3+0/9+1/2}{6}\right)=1/8$$

۲۴ـ گزینه «۲» در روش حداکثر درستنمایی تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را می‌نویسیم و $f(x_1,\dots,x_n:\theta)$ که شامل θ پارامتر جامعه است تعریف می‌کنیم و آن‌را $L(\theta)$ می‌نامیم و از روی آن، θ را طوری محاسبه می‌کنیم که این احتمال توأم را ماکزیمم کند. در توزیع نمایی $f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\ ,\ x>0$

$$L(\theta)=(\frac{1}{\theta})^n \times \frac{-\sum x_i}{\theta} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln}} \operatorname{Ln} L(\theta)=-n\operatorname{Ln}\theta-\frac{\sum x_i}{\theta} \xrightarrow{\text{نسبت به } \theta \text{ مشتق}}$$

$$\frac{d\operatorname{Ln}L(\theta)}{d\theta}=\frac{-n}{\theta}+\frac{\sum x_i}{\theta^2} \xlongequal{\text{مساوی صفر قرار می‌دهیم}} 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\theta^2}-\frac{n}{\theta}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}=5$$

۲۵ـ گزینه «۴» تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم. از این تابع Ln می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \Rightarrow L(p)=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} \quad ; \quad \operatorname{Ln}(l\sum(p))=\sum x_i \operatorname{Ln}p+(n-\sum x_i)\operatorname{Ln}(1-p)$$

$$[\operatorname{Ln}L(p))]=0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p}-\frac{n-\sum x_i}{1-p}=0$$

$$\frac{\sum x_i-\cancel{p\sum x_i}-np+\cancel{p\sum x_i}}{p(1-p)}=0 \Rightarrow \sum x_i-np=0 \Rightarrow \sum x_i=np \Rightarrow p=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}=\frac{2}{3}$$

۲۶ـ گزینه «۱» **ابتدا کمیت محوری را به دست می‌آوریم (تابعی که توزیع آن به θ بستگی ندارد):**

$$X\sim N(\theta,\theta^2) \Rightarrow \bar{X}\sim N(\theta,\frac{\theta^2}{n}) \Rightarrow \bar{X}-\theta\sim N(0,\frac{\theta^2}{n}) \Rightarrow \operatorname{Var}(\bar{X}-\theta)=\frac{\theta^2}{n}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})=\frac{\theta^2}{n}\times\frac{n}{\theta^2}=1 \Rightarrow \frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}<Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow -Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\frac{\bar{X}}{\theta}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}<Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow (-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{\sqrt{n}})+1<\frac{\bar{X}}{\theta}<(Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{\sqrt{n}})+1$$

$$\text{طرفین بر } \bar{X} \text{ تقسیم} \Rightarrow \frac{\frac{-Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}+1}{\bar{X}}<\frac{1}{\theta}<\frac{\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}+1}{\bar{X}} \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}+1}<\theta<\frac{\bar{X}}{\frac{-Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}+1}$$

۲۷ـ گزینه «۱» فرض کنید $f_1(.,\theta_1,\cdots,\theta_k)$ چگالی متغیر تصادفی X باشد که دارای k پارامتر $\theta_1,\cdots,\theta_k$ است. در صورتی که $\mu_r=E(X^r)$ و $M_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$ باشند، آنگاه از حل k معادله‌ی $M_j=\mu_j\ (j=1,\cdots,k)$ برحسب k متغیر $\theta_1,\cdots,\theta_k$، برآوردهای گشتاوری آن‌ها $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$ به دست می‌آیند.

$$F_\theta(x)=x^\theta \Rightarrow f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1} \quad 0<x<1 \quad ; \quad \mu_1=E(X)=\int_0^1 \theta x^\theta dx=\frac{\theta}{\theta+1}x^\theta\Big|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$$

$$M_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X} \qquad \Rightarrow \bar{X}=\frac{\theta}{1+\theta} \Rightarrow \bar{X}(1+\theta)=\theta \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

۲۸ـ گزینه «۱» اگر $x_1,\cdots,x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $f_\theta(x)$ باشد آنگاه تابع درستنمایی که آن را با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم به صورت $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ بدست می‌آید. تابعی از x که $L(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند و مقادیر آن در حوزه‌ی مقادیر θ قرار داشته باشد برآورد ماکزیمم درستنمایی θ است.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{-\theta x_i}=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} xi}\Rightarrow L(\theta)=Ln(L(\theta))=nLn(\theta)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

بنابراین: $\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow n=\theta\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\hat\theta=\frac{1}{\bar x}$ در نتیجه: $\hat\theta=\frac{1}{\frac{13+10+4}{3}}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

۲۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\theta-\frac{1}{2}<x_i<\theta+\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_i>\theta-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta<x_i+\frac{1}{2}\Rightarrow\theta<x_{(1)}+\frac{1}{2}\\ x_i<\theta+\frac{1}{2}\Rightarrow\theta>x_i-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta>x_{(n)}-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta\in(x_{(n)}-\frac{1}{2},x_{(1)}+\frac{1}{2})$$

هر θای در فاصله بالا می‌تواند به عنوان برآوردگر ماکسیمم درستنمایی اختیار شود.

۳۰ـ گزینه «۱» با توجه به روش برآوردگر درستنمایی خواهیم داشت:

$$L(\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^{n}x_i e^{-\frac{1}{2}\theta\sum x_i^2}\Rightarrow LnL(\theta)=nLn\theta+\sum Lnx_i-\frac{1}{2}\theta\sum x_i^2$$

$$\frac{d(Ln(\theta))}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\frac{1}{2}\sum x_i^2=0\Rightarrow\hat\theta=\frac{2n}{\sum X_i^2}$$

اکنون برآورد گشتاوری را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X)=\int_0^\infty x.\theta xe^{-\frac{1}{2}\theta x^2}dx=\int_0^\infty\theta x^2e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\theta\sqrt{u}e^{-\frac{1}{2}\theta u}du$$

$$x^2=u\Rightarrow 2xdx=du$$

$$0<x<\infty\Rightarrow 0<u<\infty$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\theta.\frac{\Gamma(\frac{3}{2})(\frac{2}{\theta})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})(\frac{2}{\theta})^{\frac{3}{2}}}.u^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\theta u}du=\underbrace{\Gamma(\cancel{\tfrac{3}{2}})}_{\frac{\sqrt\pi}{2}}.(\frac{2}{\cancel\theta})(\frac{2}{\theta})^{\frac{1}{2}}.\frac{\cancel\theta}{2}=\bar X\Rightarrow\tilde\theta=\frac{\pi}{2\bar X^2}$$

۳۱ـ گزینه «۳» از طرفی $\hat\theta=Y_1$ حداکثر درستنمایی برای $P(X>2)$ برابر $\left(\frac{Y_1}{2}\right)^2$ می‌باشد.

$$P(X>2)=\int_2^\infty 2\theta^2x^{-3}dx=-\frac{\theta^2}{x^2}\Big|_2^\infty=\frac{\theta^2}{4}$$

۳۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم $E(X_i)=\lambda$ اکنون از تک‌تک آماره‌ها امید ریاضی می‌گیریم:

$$E(T_1)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{n}E(X_i)=\lambda\Rightarrow$$ T_1 نااریب است

$$E(T_2)=\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n=1}E(X_i)+\frac{1}{2}E(X_n)=\frac{n-1}{2(n-1)}\lambda+\frac{1}{2}\lambda=\lambda\Rightarrow$$ T_2 نااریب است

$$E(T_3)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iE(X_i)=\frac{2\lambda}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{2\lambda}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2}=\lambda\Rightarrow$$ T_3 نااریب است

۳۳ـ گزینه «۲» ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(\lambda)=2^n\lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i e^{-\lambda\sum x_i^2}$$

از این تابع Ln گرفته سپس مشتق آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$Ln(\lambda)=n\ln 2+\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad\Rightarrow\frac{d}{d\lambda}=0\Rightarrow\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum x_i^2}$$

۳۴ـ گزینه «۱» به کران X دقت کنید که وابسته به σ است:

$$x_i\ge\sigma\Rightarrow\sigma\le X_{(1)}\le X_{(2)}\le\ldots\le X_{(n)}\Rightarrow\hat{\sigma}=X_{(1)}$$

$$L(\alpha)=\frac{\alpha^n.\sigma^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^{n}X_i^{\alpha+1}}\Rightarrow\ln(L(\alpha))=n\ln\alpha+n\alpha\ln\sigma-(\alpha+1)\sum\ln X_i\Rightarrow\frac{d}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n\ln\sigma-\sum\ln X_i=0\Rightarrow\hat{\alpha}=\frac{n}{\sum\ln\frac{X_i}{X_{(1)}}}$$

۳۵ـ گزینه «۳» توجه کنید که $X\sim N(\theta,\theta^2)$ می‌باشد.با یک نگاه ساده و ناشیانه به نظر می‌رسد. که فاصله اطمینان برای θ به صورت $\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.Z_{\frac{\alpha}{2}}$ می‌باشد در حالی که این فاصله اطمینان غلط است چرا که هر دو پارامتر میانگین توزیع نرمال دارای θ یعنی، پارامتر مجهول می‌باشند باید به کمک کمیت محوری (تابع محوری) فاصله اطمینان را به دست آوریم:

$$X\sim N(\theta,\theta^2)\Rightarrow\bar{X}\sim N(\theta,\frac{\theta^2}{n})\Rightarrow\bar{X}-\theta\sim N(0,\frac{\theta^2}{n})\Rightarrow\frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)\Rightarrow P(|\sqrt{n}(\frac{\bar{X}}{\theta}-1)|<Z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha=\%95$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-\alpha=\%95\\ \alpha=\%5\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0/025\end{cases}\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1-0/025=0/975\Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{n}}Z_{0/975}<\frac{\bar{X}}{\theta}<1+\frac{1}{\sqrt{n}}Z_{0/975}$$

$$\Rightarrow\frac{\bar{X}}{1+\frac{Z_{0/975}}{\sqrt{n}}}<\theta<\frac{\bar{X}}{1-\frac{Z_{0/975}}{\sqrt{n}}}\Rightarrow\frac{2/28}{1+\frac{1/96}{14}}<\theta<\frac{2/28}{1-\frac{1/96}{14}}\Rightarrow 2<\theta<2/65$$

۳۶ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه حجم نمونه خواهیم داشت:

$$n=\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{1/96\times 5}{1}\right)^2=97$$

۳۷ـ گزینه «۱» $L(\theta)$ را تابع درستنمایی گویند که برابر است با $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}L_\theta(x_i)$. برآورد ML پارامتر θ، تابعی از x مثل $\sigma(x)$ است که $L(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x)=(\frac{1}{\Gamma(4)\theta^4})^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^3 e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}\quad;\quad\ell(\theta)=Ln(L(\theta))=-nLn\Gamma(4)-4nLn(\theta)+3\sum_{i=1}^{n}Lnx_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$$

$$\frac{\ell(\theta)}{\partial\theta}=\frac{-4n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0\Rightarrow 4n\theta=\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

۳۸ـ گزینه «۲» از رابطه حجم نمونه‌ای برای نسبت استفاده می‌کنیم. توجه کنید زمانی که نسبت‌ها داده نشده باشند بهترین حجم نمونه از حاصل $\hat{P}=\hat{q}=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

$$n=\frac{\hat{p}\hat{q}.Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{e^2}=\frac{\frac{1}{4}\times 4}{(\frac{4}{100})^2}=625$$

۳۹ـ گزینه «۲» با کمی دقت متوجه می‌شویم با یک توزیع دوجمله‌ای روبرو هستیم که در اینجا $n=100$ و $P=0/36$ می‌باشد:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=\sqrt{\frac{0/36\times 0/64}{100}}=0/048$$

۴۰ـ گزینه «۳» همانند سؤال ۳۶ داریم:

$$1<x<\theta \Rightarrow \hat{\theta}=\max(x_1,x_2,...,x_n)=X_{(n)}$$

طبق خاصیت پایایی برآوردگر ماکزیمم درستنمایی:

$$(\hat{2\theta})=2\hat{\theta}=2X_{(n)}$$

۴۱ـ گزینه «۳»

$$P(\bar{X}-0/65<\mu<\bar{X}+0/65) \text{ استاندارد می‌کنیم } =P(-1/95<Z<1/95)=P(Z<1/95)-P(Z<-1/95)=0/97-0/02=0/95$$

۴۲ـ گزینه «۱» فاصله اطمینان براساس کمیت محوری عبارت است از:

$$Q=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}=\frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\ ,\quad P(-1/96<\frac{31(\bar{X}-\theta)}{\theta}<1/96)=0/95$$

$$\Rightarrow P(-1/96<\frac{31\bar{X}}{\theta}-31<1/96)=0/95\Rightarrow P(\frac{\bar{X}}{1/06}<\theta<\frac{\bar{X}}{0/94})=0/95\Rightarrow \theta\in(\frac{\bar{X}}{1/06},\frac{\bar{X}}{0/94})$$

۴۳ـ گزینه «۱» به راحتی از رابطه امید ریاضی و میانگین برآورد را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X}=E(X)=n.P \Rightarrow \tilde{n}=\frac{\bar{X}}{P}$$

۴۴ـ گزینه «۱» می دانیم که در توزیع پواسون $\hat{\theta}=\bar{x}$.

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}\Rightarrow P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-\theta}+\theta e^{-\theta}=e^{-\theta}(1+\theta)$$

طبق خاصیت پایایی برآورد حداکثر درستنمایی:

$$e^{-\theta}(1+\theta)=e^{-\bar{X}}(1+\bar{X})$$

۴۵ـ گزینه «۲» خطای حدی برآورد در میانگین برابر است با:

$$\frac{\alpha}{2}=0/25\ ;\ \sigma=4\ ;\ n=64\ ;\ e=\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1/96\times 4}{8}=0/98$$

۴۶ـ گزینه «۱» اگر $f(\bullet,\theta_1,\cdots,\theta_k)$ یک تابع چگالی k پارامتری باشد و $\mu_r=E(X^r)$ و $M_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$ وجود داشته باشند آنگاه برآورد گشتاوری $\theta_1,\cdots,\theta_k$ از حل دستگاه k معادله‌ی k مجهولی $M_r=\mu_r$ به دست می‌آید:

$$M_r=\mu_r \qquad r=1,\cdots,k$$

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\theta(x)dx=\int_1^{\infty}(1+\theta)x^{-\theta-1}dx=\frac{-(1+\theta)}{\theta}x^{-\theta}\Big|_1^{\infty}=\frac{1+\theta}{\theta}$$

$$M_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}\qquad ,\qquad M_1=\mu_1\Rightarrow \bar{X}=\frac{1+\theta}{\theta}\Rightarrow \theta\bar{X}-\theta=1\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{\bar{X}-1}$$

۴۷ـ گزینه «۴» همانند سؤال ۱۳ عمل می‌کنیم اگر $\sigma(x)$ برآوردی برای θ باشد به طوری که:

$$i)P_\theta(\sigma(x)\in\Theta)=1\quad \forall\theta\in\Theta \quad \text{و} \quad ii)L(\sigma(x)\ge L(\theta))\quad \forall\theta\in\Theta$$

آنگاه $\sigma(x)$ به عنوان برآوردگر ماکزیمم درستنمایی θ تعریف می‌شود.

$L(\theta)$ تابع درستنمایی است و برای نمونه‌ای به اندازه n از چگالی $f_\theta(x)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{10}e^{-(x_i-\theta)}u(x_i-\theta)=e^{-\sum_{i=1}^{10}x_i+10\theta}u(x_{(1)}-\theta)\Rightarrow \ell(\theta)=Ln(L(\theta))=-\sum_{i=1}^{10}x_i+10\theta$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=10>0$$

تابع درستنمایی نسبت به θ صعودی است بنابراین حداکثر مقدار خود را در بیشترین مقدار θ می‌گیرد. که بیشترین مقدار θ برابر با کمترین مقدار X یعنی $X_{(1)}$ است.

$$X_{(1)}>\theta\Rightarrow\theta<X_{(1)}\Rightarrow\hat{\theta}=X_{(1)}$$

۴۸ـ گزینه «۳»

$E(X)=\frac{1}{\theta} \Rightarrow f_\theta(x)=\theta e^{-\theta x} \quad x>0 \quad \theta>0$

نکته ۱: اگر $X \sim E(\frac{1}{\theta})$ آنگاه $2\theta X \sim \chi^2_{(2)}$

نکته۲: اگر $X_1,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع کای دو و درجات آزادی $k_1,\cdots,k_n$ باشند آنگاه: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{(\sum_{i=1}^{n} k_i)}$

بنابراین $2\theta\sum_{i=1}^{5} X_i \sim \chi^2_{(10)}$ می‌تواند به عنوان یک تابع محور برای بدست آوردن فاصله اطمینان برای θ در نظر گرفته شود.

$$0/95 = P(0<2\theta\sum_{i=1}^{5}X_i<a)=P(0<\theta<\frac{\frac{a}{n}}{2\bar{X}})=(0,\frac{k}{\bar{X}})$$

بنابراین $k=\frac{a}{2n}$ که در آن a نقطه‌ای در توزیع $\chi^2_{(10)}$ است که احتمال تجمعی تا آن نقطه برابر $0/95$ است. با توجه به جدول توزیع χ^2 مشاهده می‌شود که: $a=\chi^2_{10}(0/95)=18/3 \Rightarrow k=\frac{18/3}{2\times 5}=1/83$

۴۹ـ گزینه «۲» **روش اول:** یک فاصله اطمینان برای θ در $U(0,\theta)$ به صورت روبرو است: $(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha_2}},\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha_1}})$

روش دوم: باید امتحان کنیم در کدام گزینه $P(\theta>a)=0/95$ می‌شود.

$$P(\theta>\frac{Y}{0/95})=P(Y:<0/95\theta)=\int_0^{0/95\theta}\frac{1}{\theta}dy=\frac{1}{\theta}(0/95\theta)=0/95$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha \Rightarrow (\frac{Y}{0/95},\ ...)$$

۵۰ـ گزینه «۳» برآوردگر ماکزیمم درستنمایی در توزیع پواسون $\hat{\lambda}=\bar{X}$ می‌باشد بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \Rightarrow \hat{\lambda}=\bar{X}=\frac{7}{6}$$

۵۱ـ گزینه «۱» برآوردگر ماکزیمم درستنمایی $\min(x_i)$ ها می‌باشد.

$$x_i>\theta \Rightarrow \min(x_i)>\theta \Rightarrow \hat{\theta}=\min(x_i) \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{10}$$

۵۲ـ گزینه «۴» رابطه فاصله اطمینان برای نسبت واریانس‌ها را استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}\right)=\left(\frac{16}{64}\cdot\frac{1}{F_{0/975,24,19}},\ \frac{16}{64}\cdot F_{0/975,19,24}\right)$$

۵۳ـ گزینه «۳» طبق تعریف برآورد گشتاوری امید ریاضی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} E(X)=\frac{n\cdot N_1}{N} \Rightarrow \frac{45}{30}=\frac{8N_1}{64} \Rightarrow \hat{N}_1=12 \\ E(X)=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{3+0+0+1+1+1+\ldots+2}{30}=\frac{45}{30} \end{cases}$$

۵۴ـ گزینه «۲» اگر $x_1,\cdots,x_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشند و μ معلوم باشد آنگاه برآورد ماکزیمم درستنمایی σ^2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$L(\theta)$ را تابع درستنمایی گویند که برابر است با: $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$

برآورد ML پارامتر θ، تابعی از X مثل $\sigma(X)$ است که $L(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند.

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2} \quad x\in R\ ,\ \mu\in R\ ,\ \sigma^2$$

بنابراین:

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$$

$$L(\sigma^2)=Ln(L(\theta))=-\frac{n}{2}Ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2}=0 \Rightarrow \frac{n}{2\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{2(\sigma^2)^2} \Rightarrow \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$$

قضیه زهنا: اگر $\hat{\theta}$ برآورد ML پارامتر θ باشد آنگاه $h(\hat{\theta})$ برآورد ML پارامتر $h(\theta)$ است. در نتیجه:

$$\sigma^2=\frac{1+49}{2}=25 \Rightarrow \hat{\sigma}=\sqrt{\sigma^2}=5$$

۵۵ـ گزینه «۴» اگر $X \sim G(\alpha,\beta)$ آنگاه $V(X)=\alpha\beta^2\ ,\ E(X)=\alpha\beta$

$$E(X^2)=V(X)+E^2(X)=\alpha\beta^2+(\alpha\beta)^2$$

طبق توضیحات ارائه شده در سؤال قبل برای به دست آوردن برآورد MM پارامتر β باید ۲ معادله‌ی $\begin{cases}M_1=\mu_1\\ M_2=\mu_2\end{cases}$ هم زمان حل شوند.

$$M_1=\mu_1 \Rightarrow \bar{X}=\alpha\beta$$

$$M_2=\mu_2 \Rightarrow \alpha\beta^2+(\alpha\beta)^2=\overline{X^2} \Rightarrow \beta(\alpha\beta)+(\alpha\beta)^2=\overline{X^2} \Rightarrow \hat{\beta}=\frac{\overline{X^2}-(\bar{X})^2}{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n(\bar{X})^2}{n\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n\bar{X}}$$

۵۶ـ گزینه «۴» **تعریف:** برآورد $T=T(X_1,\cdots,X_n)$ را یک برآوردگر نااریب برای θ گویند هرگاه: $E(T)=\theta$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و $g(X)$ و $h(Y)$ توابعی از آن‌ها باشند که امید ریاضی‌شان وجود دارد آنگاه:

$$E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y))$$

بنابراین:

$$E(W)=E(\alpha\sqrt{Y_1Y_2Y_3Y_4})=\alpha(E(\sqrt{Y}))^4 \quad , \quad Y\sim E(\theta)\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{\theta}e^{\frac{-y}{\theta}} \quad y>0$$

$$E(\sqrt{Y})=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{y}}{\theta}e^{\frac{-y}{\theta}}dy=\int_0^{\infty}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy$$

یادآوری ۱: اگر $X\sim G(\alpha,\beta)$ آنگاه $x,\alpha,\beta>0$ $f_X(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}$.

برای محاسبه‌ی $E(\sqrt{Y})$ از یادآوری (۱) استفاده می‌شود و انتگرال مربوط به $E(\sqrt{Y})$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(E(\sqrt{Y})=\sqrt{\theta}\Gamma(\frac{1}{2})\int_0^{\infty}\frac{y^{\frac{3}{2}-1}}{\theta^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}e^{-\frac{y}{\theta}}dy=\sqrt{\theta}\Gamma(\frac{3}{2})$$

یادآوری ۲: $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. بنابراین:

$$(E(\sqrt{y}))^4=(\frac{\sqrt{\theta\pi}}{2})^4=\frac{\theta^2\pi^2}{16}$$

طبق تعریف برآورد نااریب، باید تساوی زیر برقرار باشد تا W یک برآوردگر نااریب برای θ^2 باشد.

$$E(W)=\alpha(E(\sqrt{Y})^4=\frac{\alpha\theta^2\pi^2}{16}=\theta^2 \Rightarrow \alpha=\frac{16}{\pi^2}$$

۵۷ـ گزینه «۳»

$$x_۱,\dots,x_n \sim f_\theta(x)=\frac{۲(x-۱)}{(۱-\theta)^۲}\qquad ۱\le x\le \theta$$

با توجه به این‌که $۱\le x_{(۱)}\le x_{(۲)}\le \dots \le x_{(n)}\le \theta$ و با افزایش θ، $f_\theta(x)$ نیز افزایش می‌یابد بنابراین $f_\theta(x)$ یک تابع صعودی نسبت به θ است و ماکسیمم مقدارش را هنگامی اختیار می‌کند که θ بیشترین مقدارش را داشته باشد.

که $X_{(i)}$، i امین x را نشان می‌دهد.

$$\hat\theta = x_{(n)} \xrightarrow[\text{ماکسیمم درستنمایی}]{\text{با توجه به خاصیت پایایی}} ۲\hat\theta=۲x_{(n)}$$

۵۸ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. امید ریاضی را به دست می‌آوریم:

$$E(X)=\int_\theta^\infty x.e^{-(x-\theta)}dx=e^\theta\int_\theta^\infty x.e^{-x}dx$$

$$=\begin{cases}x=u\\ e^{-x}dx=du \Rightarrow V=-e^{-x}\end{cases} \Rightarrow uV-\int Vdu=-xe^{-x}\Big|_\theta^\infty+\int_۰^\infty e^{-x}dx=e^\theta(\theta e^{-\theta}+e^{-\theta})=\theta+۱$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\theta+۱ \Rightarrow \tilde\theta=\bar{x}-۱=\frac{۸+۱۲+۲۴+۱۰}{۴}-۱=۱۳/۵-۱=۱۲/۵$$

۵۹ـ گزینه «۱» برآورد مناسب برای θ برآورد درستنمایی ماکزیمم است که برابر بزرگترین شماره مشاهده شده در نمونه است. بنابراین: $\hat\theta=۳۰$

روش بهتر و کامل‌تر: با توجه به صورت سؤال متوجه می‌شویم که توزیع مهره‌ها، توزیع یکنواخت گسسته است در نتیجه:

$$p(X=x)=f_X(x)=\frac{۱}{\theta}\qquad ۱<x<\theta$$

پس برآورد حداکثر درستنمایی برای θ، بیشترین مقدار x_i ها است چون $۱<x<\theta$ است که با توجه به داده‌های سؤال بیشترین مقدار، عدد ۳۰ است. $\hat\theta=۳۰$

۶۰ـ گزینه «۲» اگر $x_۱,\cdots,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی از خانواده چگالی‌های $\{f_\theta(x):\theta\in\Theta\}$ باشد آنگاه تابع درستنمایی که آن را با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$L(\theta)=\prod_{i=۱}^n f_\theta(x_i)$$

تعریف: اگر $\sigma(X)$ برآوردگری برای θ باشد به طوری که:

$$i)P_\theta(\delta(X)\in\theta)\quad \forall\theta\in\Theta \quad,\quad ii)L(\delta(X)\ge L(\theta))\quad \forall\theta\in\Theta$$

آنگاه $\sigma(X)$ به عنوان برآورد ماکزیمم درستنمایی θ تعریف می‌شود.

$$f_\theta(x)=\frac{۱-\theta}{۱+\theta}e^{-\frac{۱-\theta}{۱+\theta}x}\qquad x>۰,\theta>۰$$

اگر $f_\theta(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد باید همواره نامنفی باشد.

θ و $e^{-\frac{۱-\theta}{۱+\theta}x}$ همواره نامنفی هستند، لذا برای برقراری خاصیت $f_\theta(x)>۰$ باید $۱-\theta>۰$ باشد و در نتیجه $\theta<۱$ است بنابراین $\theta\in(۰,۱)$.

$$L(\theta)=\left(\frac{۱-\theta}{۱+\theta}\right)^n e^{-\frac{۱-\theta}{۱+\theta}\sum_{i=۱}^n x_i} \Rightarrow \ell(\theta)=Ln(L(\theta))=nLn\frac{۱-\theta}{۱+\theta}-\left(\frac{۱-\theta}{۱+\theta}\right)\sum_{i=۱}^n x_i=nLn(۱-\theta)-nLn(۱+\theta)-\left(\frac{۱-\theta}{۱+\theta}\right)\sum_{i=۱}^\infty x_i$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=\frac{-n}{۱-\theta}-\frac{n}{۱+\theta}+\frac{۲\sum_{i=۱}^n x_i}{(۱+\theta)^۲}=۰\Rightarrow \frac{-n(۱+\theta)^۲-n(۱-\theta^۲)+۲\sum_{i=۱}^n x_i(۱-\theta)}{(۱-\theta)(۱+\theta)^۲}=۰ \Rightarrow ۲n(۱+\theta)=۲\sum_{i=۱}^n x_i(۱-\theta)\Rightarrow\hat\theta=\frac{\bar{x}-۱}{\bar{x}+۱}$$

$\frac{\bar{x}-۱}{\bar{x}+۱}$ همواره کوچکتر از یک است ولی باید شرط $\theta>۰$ نیز برقرار باشد لذا: $\hat\theta=Max(۰,\frac{\bar{x}-۱}{\bar{x}+۱})$

۶۱ـ گزینه «۴» اگر $X\sim N(\mu,\sigma^۲)$ آنگاه $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(۰,۱)$ است در نتیجه $\frac{X}{\sigma}\sim N(۰,۱)$ به عنوان یک تابع محوری معرفی می‌شود:

$$P(|X|<\sigma<۲|X|)=P(\sigma<۲|X|)-P(\sigma<|X|)=۱-P(۲|X|<\sigma)-(۱-P(|X|<\sigma))$$

$$=P(|X|<\sigma)-P(|X|<\frac{\sigma}{۲})=P(-\sigma<X<\sigma)-P(-\frac{\sigma}{۲}<X<\frac{\sigma}{۲})$$

$$=P(-۱<\frac{X}{\sigma}<۱)-P(-\frac{۱}{۲}<\frac{X}{\sigma}<\frac{۱}{۲})=P(Z<۱)-P(Z<-۱)-P(Z<\frac{۱}{۲})+P(Z<\frac{-۱}{۲})$$

$$=۰/۸۴۱۳-۰/۱۵۸۷-۰/۶۹۱۵+۰/۳۰۸۵=۰/۲۹۹۶$$

۶۲ـ گزینه «۱» ابتدا گارانتی یک لامپ را محاسبه می‌کنیم:

$$P = P\ (\text{پرداخت گارانتی برای یک لامپ}) = P(x<100) = \int_0^{100}\lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{100} = -e^{-100\lambda}+1$$

$$\text{متوسط تعداد لامپ‌هایی که هزینه گارانتی پرداخت می‌شود} = n.p = 100\times(1-e^{-100\lambda})$$

$$\text{متوسط هزینه گارانتی} = 100\times(1-e^{-100\lambda})\times 500 = 50/000(1-e^{-100\lambda})$$

اکنون طبق قضیه زهنا خواهیم داشت:

$$MLE[50000(1-e^{-100\lambda})] = 50000(1-e^{-100\hat{\lambda}}) = 50000(1-e^{-\frac{100}{\bar{x}}})$$

یادآوری: در توزیع نمایی $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ برآوردگر درستنمایی $\hat{\lambda}=\bar{x}$

۶۳ـ گزینه «۲» با توجه به این که θ مجهول می‌باشد و این روش به این صورت عمل می‌کند که تابع راستنمایی را max می‌کند باید θ را طوری تخمین زد $(\hat{\theta})$ که تابع راستنمایی به ازای آن حداکثر مقدار خود را برگزیند و از سایر مقادیر بیشتر باشد.

۶۴ـ گزینه «۴»

۶۵ـ گزینه «۲» انحراف معیار بسیار بزرگ است. در توزیع نرمال ۹۵% از داده‌ها در فاصله قرار دارند:

$$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma) = (98-2\times113, 98+2\times113) = (-128, 324)$$

احتمالاً انحراف معیار ۱۳ بود که در این صورت گزینه (۲) صحیح است.

۶۶ـ گزینه «۱» اگر $X\sim N(\mu,25)$ آنگاه $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{25}{25})$ و فاصله اطمینان برابر است با: $\bar{X}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ که $\sigma^2=25$ بنابراین:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5}{\sqrt{25}} = Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2 \Rightarrow \Phi(2)=\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\Phi(2)$$

اما ضریب اطمینان این فاصله برابر است با $1-\alpha$، از این رو $1-\alpha = 1-2\Phi(2)$ ضریب اطمینان است.

۶۷ـ گزینه «۲» تعداد آزمایش‌ها k تا می‌باشد بنابراین می‌دانیم در توزیع هندسی:

$$E(k)=\frac{1}{P} \to \bar{k}=\frac{1}{P} \to \hat{P}=\frac{1}{k}$$

۶۸ـ گزینه «۴» تابع احتمال X به‌صورت زیر است:

$X=x$	۵	۱۰	۱۵
$P(x)$	$\frac{\theta}{3}$	$1-\frac{2\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$

تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم توجه کنید که نمونه ۳ تایی می‌باشد:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3} f(x_i,\theta) = \frac{\theta}{3}.(1-\frac{2\theta}{3}).\frac{\theta}{3} = \frac{\theta^2}{9}-\frac{2\theta^3}{27}$$

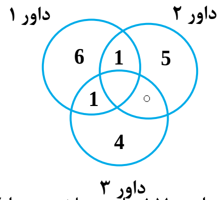
$$\ell'(\theta)=0 \to \frac{2\theta}{9}-\frac{6\theta^2}{27}=0 \to 6\theta-6\theta^2=0 \to 6\theta(1-\theta)=0 \to \begin{cases}\theta=0 & \text{غ ق ق}\\ \hat{\theta}=1 & \text{ق ق}\end{cases}$$

۶۹ـ گزینه «۴» کران پایین فاصله اطمینان L به‌صورت روبرو است:

$$L=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.Z_\alpha \to E(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.Z_\alpha) = E(\bar{X})-\frac{4}{\sqrt{9}}.Z_\alpha = \mu-\frac{4}{3}.Z_\alpha$$

$$\text{مقدار اریبی} = E(L)-\mu = \cancel{\mu}-\frac{4}{3}Z_\alpha-\cancel{\mu} = -\frac{4}{3}Z_\alpha$$

۷۰ـ گزینه «۴» به شکل زیر توجه کنید، تعداد غلط‌ها توسط سه داور نشان داده شده است:



توجه کنید که اگر N تعداد کل غلط‌های نگارشی باشد در این صورت به طور کلی تعداد غلط‌های نگارشی کشف شده توسط ۳ داور، ۱۷ تا می‌باشد چرا که ۲ تا غلط مشترک توسط ۳ داور پیدا شده است. اکنون می‌توان نوشت:

$$NP_1 + NP_2 + NP_3 - NP_1P_2 - NP_1P_3 - NP_2P_3 + NP_1P_2P_3 = 17$$

$$0/5N + 0/5N + 0/4N - 0/5\times 0/5\times N - 0/5\times 0/4\times N - 0/5\times 0/4\times N + 0/5\times 0/5\times 0/4N = 0/85N = 17 \Rightarrow \hat{N} = \frac{17}{0/85} = 20$$

۷۱ـ گزینه «۳» چون μ_1 و μ_2 واریانس‌های دو نمونه هستند چرا که در توزیع پواسون میانگین و واریانس برابر است بنابراین اطلاعات مفید درون نمونه X بیشتر از اطلاعات مفید درون Y است.

۷۲ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$f(x_i, y_i) = f(y_i \mid x_i).f(x_i)$$

تابع درست نمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid x_i).f(x_i) = \alpha e^{-\frac{1}{2}\sum(y_i-\theta x_i)^2 - \frac{1}{2}\sum x_i^2} = \alpha e^{-\frac{1}{2}\sum(y_i-\theta x_i)^2}$$

$$\to L(\theta) = \ln(L) = -\frac{1}{2}\sum(y_i - \theta x_i)^2 \to \frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta) = -\frac{1}{2}\sum 2x_i(y_i - \theta x_i) = 0 \to \hat{\theta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

۷۳ـ گزینه «۲» فاصله اطمینان برای نسبت به‌صورت زیر است:

$$P \in (\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}) \text{ و } 1-\alpha = 0/95 \Rightarrow \alpha = 0/05 \to \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow Z_{0/025} = 1/96$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{36}{100} = 0/36 \to \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0/36 = 0/64$$

مقادیر را در فرمول بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$P \in (0/36 \pm 1/96\sqrt{\frac{0/36\times 0/64}{100}}) = (0/36 \pm 1/96 \times \frac{0/6\times 0/8}{10}) = (0/27, 0/45)$$

۷۴ـ گزینه «۱» از رابطه MSE استفاده می‌کنیم که فرمول آن به صورت زیر است:

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + \underbrace{(E(\hat{\theta}) - \theta)^2}_{\text{اریبی}}$$

$$MSE(\hat{\theta}) = MSE(\bar{X} + \frac{1}{2}) \xrightarrow[\text{را بدست می‌آوریم}]{\text{مقادیر واریانس و اریبی}} \begin{cases} var(\bar{X} + \frac{1}{n}) = var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \\ (E(\bar{X} + \frac{1}{2}) - \mu)^2 = (E\mu(\bar{X}) + \frac{1}{n} - \mu)^2 = (\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n\sigma^2 + 1}{n^2}$$

فصل هشتم

«آزمون فرض‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ـ در توزیع نمونه‌گیری میانگین از یک جامعه نرمال (σ مجهول) اگر n کوچک باشد، می‌توان آزمون فرض $\mu = \mu_\circ$ را بر اساس کدام آماره زیر بنا نهاد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $t = \frac{\bar{x} - \mu_\circ}{\sigma}$ ۲) $t = \frac{\bar{x} - \mu_\circ}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ۳) $t = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ ۴) $t = \frac{\bar{x} - \mu_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

۲ـ در کارخانه‌ای که دو خط تولید مستقل از هم محصول تولید می‌کنند، نمونه‌هایی به حجم $n_1 = 200$ و $n_2 = 400$ انتخاب می‌شود. تخمین امیدهای ریاضی آن‌ها به ترتیب $\bar{x}_1 = 198$ و $\bar{x}_2 = 200$ و تخمین واریانس‌ها به ترتیب $s_1^2 = 19/5$ و $s_2^2 = 25$ شده است. (به فرض این‌که واریانس‌ها برابرند) در سطح تشخیص $\alpha = 0/05$ چه می‌توان گفت؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\mu_1 > \mu_2$ ۲) میانگین‌ها یکسان هستند. ۳) $\mu_1 \geq \mu_2$ ۴) میانگین‌ها یکسان نیستند.

۳ـ فرض کنید پنج نوع پارچه از لحاظ مقاومت قرار است آزمون شوند و فرضیه $H_\circ : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ در مقابل فرضیه:

H_1: همه‌ی μ_i ها مساوی نیستند

در سطح $\alpha = 0/05$ آزمون گردد. اگر تعداد نمونه‌ها از انواع پارچه‌ها به ترتیب برابر ۴، ۵، ۶، ۷ و ۴ باشند، درجات آزادی SS_{trt} و SSE به ترتیب کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۴ و ۲۵ ۲) ۴ و ۲۱ ۳) ۲۱ و ۲۵ ۴) ۵ و ۲۱

۴ـ اگر ۲۶ لاستیک از ۲۰۰ لاستیک نوع A بیشتر از ۲۵۰۰۰ کیلومتر دوام نیاورده باشند، در حالی که رقم متناظر برای ۲۰۰ لاستیک از نوع B ، C و D عبارت از ۲۱،۱۶ و ۳۳ باشند و بخواهیم آزمون مقابل را انجام دهیم: $H_\circ : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$

در مقابل: H_1 : همهٔ θ_i ها مساوی نیستند

درجه‌ی آزادی برای آمارهٔ آزمون مربع کای کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ یکی از موارد استفاده از جدول‌های توافقی عبارت است از ....

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) آزمون نیکویی برازش ۲) آزمون استقلال
۳) آزمون‌های مربوط به تفاضل میانگین‌ها ۴) آزمون‌های مربوط به نسبت واریانس

۶ـ متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است: $f_X(x;\theta) = (1+\theta)x^\theta \;;\; 0 \leq x \leq 1 \;, 0 < \theta$

فرض صفر (یا خنثی) را به شکل $H_\circ : \theta = 2$ و ناحیه بحرانی (یعنی مکمل ناحیه پذیرش) را به صورت $x < 0/25$ در نظر بگیرید. خطای نوع اول کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{64}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷ـ احتمال رد $H_\circ$ مشروط به این‌که θ واقعاً مساوی ۳ باشد، با کدام گزینه مساوی است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{256}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸ـ در دو واحد تولیدی که کمیت‌های X_1 و X_2 ، که بر طبق توزیع نرمال با واریانس‌های به ترتیب $\sigma_1^2 = 16$ و $\sigma_2^2 = 25$ توزیع شد. نمونه‌هایی به حجم‌های $n_1 = 100$ و $n_2 = 100$ بطور تصادفی انتخاب می‌شود که بر اساس مشاهدات $\bar{x}_1 = 75$ و $\bar{x}_2 = 80$ به دست آمده است. برای ارزیابی یکسان بودن میانگین‌ها در دو واحد تولیدی کدام گزینه صحیح است؟ $(\alpha = 0/05)$

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) در دو جامعه رد می‌شود. ۲) در دو جامعه رد نمی‌شود. ۳) در دو جامعه ثابت می‌شود. ۴) در دو جامعه را نمی‌توان رد کرد.

۹ـ فرض کنید قرار است درصد پاک‌کنندگی سه ماده‌ی پاک‌کننده A ، B و C با هم مقایسه شود و فرض کنید به ترتیب n_1، n_2 و n_3 نمونه‌ی تصادفی از هر کدام از این مواد پاک‌کننده و به طور مستقل تهیه کرده‌ایم و می‌خواهیم فرضیه صفر $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ را در مقابل فرضیه‌ی همه‌ی μ_i ها مساوی نیستند : H_1، آزمون کنیم. آماره‌ی آزمون چیست؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $\chi^2\left(\sum_{i=1}^{3} n_i - 3\right)$ ۲) $F\left(2, \sum_{i=1}^{3} n_i - 1\right)$ ۳) $F\left(\sum_{i=1}^{3} n_i - 1\right)$ ۴) $F\left(2, \sum_{i=1}^{3} n_i - 3\right)$

۱۰ـ فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از توزیع یکنواخت در فاصله $(0,\theta)$ باشند در صورتی که ناحیه بحرانی آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta = 2 \end{cases}$ برابر با $X_1 + X_2 > \frac{1}{2}$ باشد خطای دوم آزمون (β) چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{32}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۱ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی برنولی با $P(X=1) = \varphi = 1 - P(X=0)$ باشد. علاقمند به آزمون $H_0 : P = \frac{1}{4}$ در برابر $H_1 : P = \frac{3}{4}$ هستیم. اگر بر اساس یک مشاهده x فرض H_0 را رد نکنیم وقتی‌که $x = 0$ باشد و فرض H_0 را رد کنیم هنگامی که $x = 1$ باشد، احتمال خطای نوع اول $= \alpha$ و احتمال خطای نوع دوم $= \beta$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\alpha,\beta) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ۲) $(\alpha,\beta) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ۳) $(\alpha,\beta) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ ۴) $(\alpha,\beta) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

۱۲ـ اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $N(0,\sigma^2)$ باشد، مایلیم به ازای $\alpha = 0/03$ فرض $H_0 : \sigma \geq 1$ را در برابر $H_1 : \sigma < 1$ آزمون کنیم. برای این مسأله مناسب‌ترین آماره‌ی آزمون کدام است؟ (توجه کنید که منظور از S^2 نسبت $\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2$ به $(2-1)$ است.)

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) s^2 با درجه آزادی ۲ ۲) $X_1^2 + X_2^2$ با درجه آزادی ۲ ۳) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ با درجه آزادی ۲ ۴) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ با درجه آزادی ۱

۱۳ـ متغیر تصادفی X با توزیع $\frac{e^{-\theta}\theta^x}{X!}$, $X = 0,1,2,\dots$ مفروض است. به منظور آزمودن فرض $H_0 : \theta \leq 0/7$ در برابر $H_1 : \theta > 0/7$ یک مشاهده از X به دست می‌آوریم و آن را X_1 می‌نامیم و اگر X_1 متعلق به مجموعه‌ی $\{0,1\}$ باشد، H_0 را می‌پذیریم. اگر θ واقعاً مساوی با یک باشد، با چه احتمالی فرض صفر را می‌پذیریم؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $0/264$ ۲) $1/7e^{-0/7}$ ۳) $0/736$ ۴) $1 - 1/7e^{-0/7}$

۱۴ـ در یک تحلیل واریانس یک طرفه برای سه گروه تیماری، جدول آنالیز واریانس به طور ناقص به صورت زیر در دسترس می‌باشد:

منابع تغییرات	d.f	s.s.
بین گروه‌ها		
باقیمانده		۳۶
کل	۱۱	

انحراف معیار خطای مشاهدات چقدر بوده است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sqrt{12}$ ۲) ۲ ۳) ۳/۳ ۴) ۴

۱۵ـ از یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی ۲۵ از یک جامعه نرمال، میانگین نمونه برابر ۴۷ و انحراف معیار آن برابر ۸ شد. اگر بخواهیم فرض $H_0 : \mu = a$ را در مقابل فرض $H_1 : \mu > a$ در سطح $\alpha = 0/05$ آزمون کنیم، حداکثر اندازه‌ی a چقدر می‌تواند باشد در حالی‌که H_0 رد شود؟

$t_{0/05(24)} = 1/711$, $t_{0/025(24)} = 2/064$, $Z_{0/05} = 1/645$, $Z_{0/025} = 1/96$

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) ۴۴/۲۴۲۴ ۲) ۴۷ ۳) $47 + 1/6 \times 2/064$ ۴) $47 + 1/6 \times 1/711$

۱۶ـ اطلاعات زیر در ارتباط با آزمون $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ در مقابل حداقل یک جفت از μ_iها با هم برابر نیستند: H_1 داده شده است. درجه‌ی آزادی SSE (مجموع مربعات خطا) کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

جامعه	۱	۲	۳	۴
اندازه نمونه n_i	۴	۵	۶	۷
میانگین نمونه $\bar{x}_{i_0}$	۷	۶	۵	۴
انحراف معیار نمونه S_j	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵

۱) ۳

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۲

۱۷ـ فرض کنید X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۴ و P باشد. برای آزمودن فرض $H_1 : P = \frac{1}{5}$ در برابر $H_0 : P = \frac{1}{3}$، اگر $X = 0$ یا $X = 1$ ملاک ردکردن فرض H_0 باشد (یعنی $C = \{0, 1\}$)، احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\frac{2}{3})^4$
۲) $(\frac{2}{3})^3$
۳) $3(\frac{2}{3})^3$
۴) $3(\frac{2}{3})^4$

۱۸ـ جعبه‌ای شامل n مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. براساس یک نمونه ۳ تایی بدون جایگذاری ناحیه رد آزمون $H_0 : n = 3$ و $H_1 : n = 4$ عبارت است از $C = \{$ مشاهده حداقل ۲ مهره سیاه $\}$. توان (قدرت) آزمون چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{5}{84}$
۲) $\frac{34}{84}$
۳) $\frac{50}{84}$
۴) $\frac{79}{84}$

۱۹ـ یک سکه را برای بررسی سالم بودن آن سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر ملاک رد کردن فرض سالم بودن سکه، مشاهده سه شیر یا سه خط باشد، احتمال خطای نوع اول چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۱۲۵
۳) ۰/۲۱۵
۴) ۰/۲۵

۲۰ـ اگر یک جعبه محتوی ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه باشد و از این جعبه ۳ مهره تصادفی انتخاب و X تعداد مهره‌های سیاه فرض شود، پس از ۷۰ مرتبه تکرارتجربه، نتایج زیر به دست آید، در سطح معنی‌داری ۵% برای انطباق این توزیع با توزیع فوق هندسی، از چه توزیعی باید استفاده کرد و مقدار آماره‌ی آزمون چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

O_i	۱۶	۴۰	۱۴
e_i	۲۰	۴۰	۱۰

۱) توزیع نرمال با مقدار ۲/۲ برای آماره

۲) توزیع دو جمله‌ای با $P = \frac{6}{50}$ و مقدار تقریبی ۲/۲ برای آماره

۳) توزیع مربع کای با مقدار ۲/۴ برای آماره

۴) توزیع فوق هندسی با $\frac{2}{70} = \frac{k}{N}$ با مقدار تقریبی ۲/۲ برای آماره

۲۱ـ متغیر تصادفی $X \sim N[7, \sigma_x^2]$ و $Y \sim N[\mu_y, \sigma_y^2]$ از هم مستقل‌اند، به منظور آزمون فرض $H_0 : \sigma_y = \sigma_x$ در برابر $\sigma_y > \sigma_x$ نمونه‌های تصادفی X_1, X_2 و Y_1, Y_2, Y_3 را می‌گیریم و مقدار ۰/۰۲۵ را برای α انتخاب می‌کنیم. اگر نتیجه‌ی نمونه‌گیری تصادفی به صورت:

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}(Y_i - \bar{Y})^2}{2} = 30 \quad \text{و} \quad \frac{1}{14}(X_1^2 + X_2^2 + 99) = X_1 + X_2$$

باشد، کدام نتیجه‌گیری زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) چون مقدار ۶۰ برای آماره‌ی آزمون به دست می‌آید، می‌پذیریم که σ_y به طور با معنایی از σ_x بزرگتر است.

۲) چون مقدار ۳۰ برای آماره‌ی آزمون به دست می‌آید، می‌پذیریم که σ_x و σ_y همگن‌اند.

۳) چون مقدار ۳۰ برای آماره‌ی آزمون به دست می‌آید، می‌پذیریم که σ_y به طور بامعنایی از σ_x بزرگ‌تر است.

۴) چون نمی‌توان با اطلاعات موجود واریانس نمونه‌ی X را محاسبه کرد، امکان اظهارنظر در مورد نتیجه وجود ندارد.

۲۲ـ متغیرهای تصادفی $X \sim N[7, \sigma_x^2]$ و $Y \sim N[\mu_y, \sigma_y^2]$ از هم مستقل‌اند، به منظور آزمون فرض $H_0 : \sigma_y = \sigma_x$ در برابر $H_1 : \sigma_y > \sigma_x$، مستقلاً نمونه‌های تصادفی X_1 و X_2 و Y_1، Y_2، Y_3 را می‌گیریم و مقدار ۰/۰۲۵ را برای α انتخاب می‌کنیم. با توجه به این‌که مناسب‌ترین آماره برای آزمودن فرض فوق از توزیع F پیروی می‌کند، در این‌صورت، درجات آزادی آماره به ترتیب، عبارتند از: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\nu_1 = 1 \,,\, \nu_2 = 2$
۲) $\nu_1 = 3 \,,\, \nu_2 = 2$
۳) $\nu_1 = 2 \,,\, \nu_2 = 1$
۴) $\nu_1 = 2 \,,\, \nu_2 = 2$

۲۳ـ فرض کنید $X \sim HG(N,4,3)$ علاقه‌مند به آزمون $H_0: N=5 \quad VS \quad H_1: N=6$ هستیم. اگر ۲ یا ۱ = x ملاک رد کردن فرض H_0 باشد، احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳

۲۴ـ فرض کنید X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۵ و p باشد. علاقه‌مند به آزمون $H_0: p=\frac{1}{2}$ در مقابل $H_1: p\neq\frac{1}{2}$ هستیم. اگر ملاک رد فرض H_0، ۵ یا ۰ = z باشد، احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۵ـ پنج جامعه نرمال با واریانس مساوی از نظر میانگین مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در این رابطه فرض $H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$ در مقابل این که حداقل دو میانگین متفاوت است آزمون می‌شود. برای انجام آزمون از اطلاعات مقابل استفاده می‌شود:

با توجه به اطلاعات داده شده، مجموع مربعات اشتباهات (SSE) و درجه آزادی آن عبارت است از: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

جامعه (i)	n_i	$\bar{x}_i$	s_i
۱	۲	۶	۰/۷
۲	۵	۸	۱/۰
۳	۴	۴	۱/۱
۴	۳	۹	۰/۸
۵	۲	۶	۰/۶

۱) ۱۰/۲ و ۴ ۲) ۳/۷ و ۴

۳) ۹/۷۶ و ۱۱ ۴) ۱۳/۴۶ و ۱۱

۲۶ـ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$ ، $x=0,1,\dots$ می‌باشد. می‌خواهیم آزمون فرض $H_0: \mu=1$ در مقابل فرض مخالف $H_1: \mu>1$ را انجام دهیم. برای این منظور یک نمونه‌ی یکتایی x_1 مشاهده می‌کنیم و اگر $x_1>2$ باشد فرض صفر را رد می‌کنیم. اگر $\mu=2$ باشد احتمال این‌که تشخیص دهیم μ برابر یک نیست (فرض صفر را رد کنیم) چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{5}{e^2}$ ۲) $\frac{3}{e^2}$ ۳) $\frac{e^2-3}{e^2}$ ۴) $\frac{e^2-5}{e^2}$

۲۷ـ فرض کنید $X_1,\dots,X_9$ یک نمونه تصادفی ۹ تایی از جمعیتی با توزیع $B(1,p)$ باشد. اگر برای انجام آزمون $H_0: p=\frac{1}{4}\ vs,\ H_1: p=\frac{1}{2}$، ناحیه بحرانی به فرم $\sum_{i=1}^{9}x_i \geq 6$ باشد، احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۱

۲۸ـ فرض کنید برای انجام آزمون میانگین زیر براساس یک نمونه تصادفی ۹ تایی از جمعیتی با توزیع $N(\mu,9)$، ناحیه بحرانی $\bar{X}>k$ باشد. اگر سطح معنی‌دار بودن $(\alpha=0/05)$ باشد، مقدار تقریبی k کدام است؟

$H_0: \mu=2 \ vs \quad H_1: \mu=3$

(راهنمایی: $Z_{0/05}=1/645$)

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱/۶۴۵ ۲) ۲/۶۴۵ ۳) ۳/۶۴۵ ۴) ۴/۶۴۵

۲۹ـ فرض کنید $X \sim HG(6,M;3)$. علاقه‌مند به آزمون زیر هستیم. $H_0: M=2 \ vs \quad H_1: M=3$ اگر ۳ یا ۲ = x ملاک ردکردن فرض H_0 باشد، توان آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۵

۳۰ـ جدول ناقص زیر در زمینه تحلیل واریانس ارائه شده است:

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F
رفتارها (طرز عمل‌ها)	۱۲	۲		۱
خطا	۱۸			
جمع	۳۰			

در جدول فوق، چند رفتار (یا طرز عمل) مورد مقایسه قرار داشته است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۱ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای مجهول می‌باشد اگر در آزمون دو طرفه میانگین، خطای نوع اول را ثابت نگه داشته و اندازه نمونه را افزایش دهیم کدام مورد زیر صحیح ۱۴۶۱ است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ناحیه پذیرش بزرگ می‌شود و خطای نوع دوم افزایش می‌یابد.

۲) ناحیه پذیرش بزرگ می‌شود و خطای نوع دوم کاهش می‌یابد.

۳) ناحیه پذیرش کوچک می‌شود و خطای نوع دوم افزایش می‌یابد.

۴) ناحیه پذیرش کوچک می‌شود و خطای نوع دوم کاهش می‌یابد.

۳۲ـ فرض کنید ۱,۰,۰,۱,۱,۰,۰,۱ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۸ تایی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. برای $H_0: p=\frac{1}{4}$ vs $H_1: p>\frac{1}{4}$، اگر ناحیه بحرانی آزمون به فرم $\sum_{1}^{8} x_i > 7$، احتمال خطای اول کدام است؟(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) 2^{-8} ۴) 2^{-16}

۳۳ـ عملکرد یک فرآیند در صورتی قابل قبول می‌باشد که انحراف استاندارد آن بیشتر از ۱ نباشد. از یک نمونه به اندازه ۴ مقادیر ۵۲، ۵۶، ۵۳ و ۵۵ به دست آمده است. برای تعیین این‌که عملکرد فرآیند قابل قبول می‌باشد یا نه مقدار آماره آزمون کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱۰ ۲) $\frac{10}{2}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{10}{4}$

۳۴ـ فرض کنید ۲/۰, ۱/۷, ۱/۴, ۱/۱ و ۳/۰, ۲/۷, ۲/۴, ۲/۱ یافته‌های دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $N(\mu_1,\sigma_2^2)$ است. علاقه‌مند به آزمون برابری واریانس‌ها هستیم. مقدار آماره آزمون کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱/۱۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۵۰

۳۵ـ فرض کنید ۳, ۳/۵, ۲, ۵, ۳/۷, ۴, ۴/۲, ۷, ۵/۱ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۹ تایی از توزیع $N(\mu,4)$ باشد. علاقه‌مند به آزمون $H_0: \mu=3$ vs $H_1: \mu>3$ هستیم. مقدار آماره آزمون کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۳/۵۰ ۴) ۵/۲۵

۳۶ـ فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیع برنولی $B(1,P)$ باشد علاقه‌مند به آزمون زیر هستیم:

$$H_0: P=\frac{1}{4} \text{ VS } H_1: P=\frac{3}{4}$$

اگر ناحیه پذیرش ۱ یا $x_1+x_2=0$ باشد، α نمایانگر احتمال خطای نوع اول و β احتمال خطای نوع دوم باشند. مقدار (α,β) کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $(\frac{10}{16},\frac{7}{16})$ ۲) $(\frac{1}{16},\frac{7}{16})$ ۳) $(\frac{1}{16},\frac{9}{16})$ ۴) $(\frac{10}{16},\frac{9}{16})$

۳۷ـ بر اساس یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیع $B(1,P)$ علاقه‌مند به آزمون $H_0: P=\frac{1}{2}$ VS , $H_1: P=\frac{1}{2}$ هستیم. اگر ناحیه رد آزمون ۵ یا ۴، ۱، $\sum_{i=1}^{5} xi = 0$ باشد، احتمال خطای نوع اول آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{5}{16}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۳۸ـ فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_{25}$ یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشد و بخواهیم آزمون $H_0: \sigma^2=1$ را در مقابل $H_1: \sigma^2\neq 1$ انجام دهیم. گزینه صحیح برای توزیع آماره آزمون (تحت فرض H_0) کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) t با ۲۵ درجه آزادی ۲) کای دو با ۲۵ درجه آزادی ۳) t با ۲۴ درجه آزادی ۴) کای دو با ۲۴ درجه آزادی

۳۹ـ دو نوع فیلتر آب برای مقایسه بر حسب میانگین تقلیل مواد ناخالصی موجود در آب مورد بررسی قرار می‌گیرند. ۲۱ نمونه آب با هر یک از فیلترها آزمایش می‌شوند. خلاصه اطلاعات به شرح روبرو هستند: $n_1=21, \bar{x}=8, s_x^2=4/5$; $n_2=21, \bar{y}=6/5, s_y^2=2$

مقدار آمارهٔ آزمون برای واریانس‌ها کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱/۲۳ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۲۵

۴۰ـ مدت زمان سپری شده برای سه دستگاه یکسان در تولید کالایی خاص، اطلاعات حاصل از ۴ بار آزمایش در جدول زیر آورده شده است. با فرض این‌که مدت زمان‌ها از توزیع نرمال با واریانس‌های یکسان تبعیت کنند، برای تساوی میانگین‌ها آماره‌ی آزمون چند است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

دستگاه۱	۴	۷	۵	۴
دستگاه۲	۱	۳	۴	۸
دستگاه۳	۷	۲	۸	۷

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۴۱ـ جعبه‌ای ۶ مهره دارد که m تای آن‌ها سفید و بقیه سیاه هستند. شخصی می‌خواهد فرض $H_۰: m=۳$ را در برابر $H_۱: m=۵$ آزمون کند. برای انجام این آزمون دو مهره بدون جایگذاری و به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر دو مهره سفید باشند فرض $H_۰$ رد می‌شود، خطای نوع اول برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۴۲ـ براساس یک مشاهده از توزیع $B(۴,p)$. می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم:

$$H_۰: p=۰/۲۵ \text{ vs } H_۱: p=۰/۵$$

اگر ناحیه بحرانی آزمون $C=\{۰,۴\}$ باشد، احتمال خطای نوع دوم کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۴۱}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۸۷}{۱۲۸}$

۴۳ـ برای بررسی تساوی میانگین چهار جمعیت مستقل نرمال با واریانس‌های یکسان، خلاصه اطلاعات زیر به دست آمده است. برآورد میانگین کل کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

	۱	۲	۳	۴
اندازه نمونه $=n_j$	۵	۶	۸	۳
میانگین نمونه $=\bar{x}_{ij}$	۱/۲	۱/۵	۱/۲۵	۱
انحراف معیار نمونه $=s_j$	۱/۱	۱/۵	۱	۱/۸

۱) $\frac{۹۹}{۸۰}$ ۲) $\frac{۸۰}{۹۹}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۴}$

۴۴ـ فرض کنید X دارای توزیع $Ge(\theta)$ با تابع احتمال روبرو باشد: $f_\theta(x)=\theta(۱-\theta)^x \ , \ x=۰,۱,۲,...$

براساس یک مشاهده می‌خواهیم آزمون $H_۰:\theta=\frac{۱}{۲}$ در مقابل $H_۱:\theta<\frac{۱}{۲}$ را انجام دهیم. اگر X مقداری بیشتر از ۲ اختیار کند فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم. اگر $\theta=\frac{۱}{۴}$ باشد، احتمال پی‌بردن به این‌که θ مساوی $\frac{۱}{۲}$ نیست، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۴) $\frac{۳۷}{۶۴}$

۴۵ـ در یک آزمون فرض برای یک جامعه نرمال با انحراف معیار $\sigma=۰/۵$ تعداد $n=۹$ نمونه تصادفی را انتخاب نموده و میانگین آن‌ها برابر ۸/۷۵ می‌باشد. P ـ مقدار(P-Value) آزمون برای فرض $H_۰:\mu=۸/۵$ در مقابل $H_۱:\mu\neq ۸/۵$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۰۳۳۴ ۲) ۰/۰۶۶۸ ۳) ۰/۱۳۳۶ ۴) ۰/۲۶۷۲

۴۶ـ دو نمونه تصادفی ۱۶ تایی مستقل به ترتیب از دو جامعه با توزیع‌های $N(\mu_۱,۳۲)$ و $N(\mu_۲,۳۲)$ انتخاب می‌شوند. علاقه‌مند به آزمون $H_۰:\mu_۱\le\mu_۲$ در مقابل $H_۱:\mu_۱>\mu_۲$ در سطح ۵% هستیم. ناحیه بحرانی آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵ و آزاد ۸۷)

۱) $\bar{X}-\bar{Y}<-۱/۶۴۵$ ۲) $\bar{X}-\bar{Y}>۱/۶۴۵$ ۳) $\bar{X}-\bar{Y}>۳/۹$ ۴) $\bar{X}-\bar{Y}<-۳/۹$

۴۷ـ اگر $X_۱,X_۲,X_۳,X_۴$، چهار نمونه تصادفی از جامعه نرمال با واریانس $\sigma^۲=۱$ باشد و بخواهیم فرض $H_۰:\mu=\mu_۰$ را به نفع فرض $H_۱:\mu=\mu_۱>\mu_۰$ وقتی که $\bar{x}>\mu_۰+۱$ است رد کنیم. سطح معنی‌داری آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۹۷۷۲ ۴) ۰/۰۲۲۸

۴۸ـ اگر برای آزمون $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ در مقابل H_1: «نفی H_0» در مدل $y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ اگر $n_1 = n_2 = n_3 = 10$، میانگین‌ها: $\bar{x}_3 = 60$ و $\bar{x}_2 = 50$ و $\bar{x}_1 = 40$ و واریانس‌ها: $S_3^2 = 50$, $S_2^2 = 150$ مقدار آماره آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۱ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰۰

۴۹ـ اگر برای آزمون $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ در مقابل H_1: « نفی H_0» در مدل $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, $j = 1, \dots, n_i$ و $i = 1, 2, 3$، خلاصه اطلاعات زیر در اختیار باشد، مقدار میانگین کل کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

	۱	۲	۳
اندازه میانه	۸	۶	۱۰
میانگین نمونه‌ای	۱/۲۵	۱/۵	۱/۳
واریانس نمونه‌ای	۲/۵	۳/۵	۴

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{81}{57}$ ۴) $\frac{81}{60}$

۵۰ـ یک نمونه تصادفی به اندازه ۲ از جامعه‌ای با توزیع یکنواخت در بازه $[0, \theta]$ انتخاب و فرض $H_0: \theta = 1$ در برابر فرض مقابل $H_1: \theta = 2$ را وقتی و فقط وقتی رد می‌کنیم که $X_1 + X_2 > \frac{3}{2}$ احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۰۵ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۱

۵۱ـ وزن بسته‌های شکر تولید شده در یک کارخانه از توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\sigma = 0/3$ تبعیت می‌کند. علاقه‌مند به آزمون $H: \mu = 2$ در مقابل $H_1: \mu > 2$ در سطح ۵٪ هستیم، براساس نمونه تصادفی به حجم ۳۶ از این جامعه، میانگین نمونه برابر با ۲/۱ شده است مقدار آماره آزمون کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱/۹۶ ۲) ۲ ۳) ۲/۰۵ ۴) ۲/۱

۵۲ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_{16}$ یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس ۱۶ باشد هدف انجام آزمون $H_0: \mu = 0/36$ در مقابل $H_1: \mu = 3$ در سطح $\alpha = 0/0505$، خطای نوع دوم تقریباً کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ٪۱۰ ۲) ٪۱۵ ۳) ٪۲۴ ۴) ٪۳۴

۵۳ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس ۴ می‌باشند. هدف انجام آزمون به شیوه نسبت درستنمایی برای $H_0: \mu = 0$ در مقابل $H_1: \mu \neq 0$ می‌باشد. ناحیه رد آزمون کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\bar{x} < k$ ۲) $\bar{x} > k$ ۳) $|\bar{x}| > k$ ۴) $|\bar{x}| < k$

۵۴ـ براساس نمونه‌های تصادفی از سه جامعه مستقل نرمال، اطلاعات زیر به‌دست آمده است. میانگین کل نمونه کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

جامعه	۱	۲	۳
میانگین	۱۲	۱۱	۱۰
واریانس	۴	۴	۳
تعداد نمونه	۳	۴	۳

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۵۵ـ در مسأله ۸۲ مجموع مربعات خطا، یعنی SSE کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲/۵ ۲) ۲/۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۵۶ـ در مسأله ۸۲ مجموع مربعات تیمار، یعنی SS_T کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۵۷ـ در مسأله ۸۲ برای آزمون فرض برابری سه میانگین، مقدار آماره آزمون کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱/۱۵　۲) ۱/۲۵　۳) ۲/۳　۴) ۲/۳۵

۵۸ـ مدیر تولید یک واحد مدعی است که حداقل ۸۰ درصد از تولیدات او سالم هستند. در یک نمونه تصادفی ۴۰۰ تایی چند کالای سالم باید مشاهده نمود تا در سطح $\alpha = 0/025$ ادعای او را پذیرفت؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $n \geq 286$　۲) $n \geq 320$　۳) $n \geq 326$　۴) $n \geq 336$

۵۹ـ بر اساس نمونه‌های تصادفی ۴تایی از ۳ جامعه نرمال، اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\bar{x}_1 = 110 , \bar{x}_2 = 100 , \bar{x}_3 = 120 , S_1^2 = 180 , S_2^2 = 220 , S_3^2 = 200$$

مقدار آماره آزمون و توزیع آماره آزمون برای آزمون برابری میانگین سه جامعه کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $F_{(9,2)}$ ، ۳　۲) $F_{(2,9)}$ ، ۳　۳) $F_{(2,9)}$ ، ۲　۴) $\chi^2_{(2)}$ ، ۲

۶۰ـ نمونه‌ای تصادفی مانند X_1 و X_2 به اندازه‌ی ۲ از جامعه‌ای با توزیع یکنواخت در بازه $(0,\theta)$ انتخاب و فرض صفر $H_0: \theta = 1$ در برابر فرض مقابل $H_1: \theta = \frac{3}{2}$ را رد می‌کنیم، هرگاه $X_1X_2 \geq \frac{8}{9}$، احتمال خطای نوع دوم کدام است؟ (فرض کنید که $Ln2 = 0/7$ و $Ln3 = 1/1$)
(ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۱　۲) ۰/۲　۳) ۰/۴　۴) ۰/۸

۶۱ـ سکه‌ای را که احتمال آمدن شیر با آن θ است ۵ بار پرتاب می‌کنیم و فرض $H_0: \theta = \frac{1}{2}$ را فقط و فقط در صورتی رد می‌کنیم که $X \leq 1$ یا $X \geq 4$ احتمال خطای نوع اول کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۰۵۰　۲) ۰/۱۰۰　۳) ۰/۳۷۵　۴) ۰/۹۷۵

۶۲ـ فرض کنید $X_1 \sim N(\theta_1 , \sigma^2)$ ، $X_2 \sim N(\theta_2,\sigma^2)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. به طوری‌که σ^2 یک مقدار معلوم است. علاقه‌مند به آزمون $H_0: \theta_1 = \theta_2 = 0$ در مقابل $H_1 = \theta_1^2 + \theta_2^2 > 0$ هستیم. اگر ناحیه بحرانی به فرم $X_1^2 + X_2^2 \geq C$ باشد، مقدار C کدام است؟ (سطح معنی‌دار بودن، $\alpha = 0/05$ باشد).
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰/۰۵۱　۲) $7/378\sigma^2$　۳) $\frac{7/378}{\sigma^2}$　۴) ۷/۳۷۸

۶۳ـ در یک طرح آزمایشی کاملاً تصادفی، برای مقایسه ۵ تیمار اگر مجموع مربعات باقیمانده (SSE) برابر با ۱۶۴ با ۸ درجه آزادی و مقدار آماره آزمون ۴ باشد، آنگاه مجموع مربعات تیمارها (SS_t) و تعداد کل واحدهای آزمایش (n) برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $SS_t = 328$, $n = 12$　۲) $SS_t = 384$, $n = 12$　۳) $SS_t = 384$, $n = 13$　۴) $SS_t = 328$, $n = 13$

۶۴ـ در یک مطالعه کشاورزی اثر سطوح مختلف کود دهی را روی عملکرد محصولی مطالعه کرده‌اند. داده‌ها در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

سطوح کود	A	B	C
میانگین	۱	۲	۰/۵
برآورد ناریب واریانس	۱	۱	۱
اندازه نمونه	۳	۲	۴

مقدار آماره آزمون در جدول آنالیز واریانس کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) ۳　۲) ۱　۳) ۱/۲۵　۴) ۱/۵

۶۵ـ خروجی یک نرم‌افزار برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه به صورت زیر است:

منبع تغییرات	درصد آزادی	SS	MS	F	P
بین گروه‌ها	۲	۲۸۴/۲۲۳۸	۱۴۲/۱۱۱۹	۱/۱۹۸۴	۰/۳۲۵۶
داخل گروه‌ها	۱۷	۲۰۱۵/۹۷۶۲	۱۱۸/۵۸۶۸		
کل	۱۹	۲۳۰۰/۲۰۰۰			

گزینه صحیح کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) فرض صفر در سطح ۰/۳۵ رد شده است.
۲) فرض صفر در سطحی بین ۰/۱ و ۰/۲ رد شده است.
۳) فرض صفر در سطح ۰/۲۵ رد شده است.
۴) فرض صفر در سطح ۰/۰۵ رد شده است.

۶۶ـ برای آزمون فرض $H_0 : \mu = 100$ در مقابل $H_1 : \mu = 120$ با سطح معنی‌داری ۰/۰۲۵ و توان ۰/۹۷۵ وقتی که صفت مورد مطالعه دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = 1000$ می‌باشد، چه تعداد نمونه لازم است؟ $Z_{0/975} \approx 2$ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۱۰

۶۷ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است. برای آزمون $H_0 : \lambda = 1$ در مقابل $H_1 : \lambda = 2$ در سطح α، احتمال خطای نوع دوم کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $1-\alpha$ ۲) $(1-\alpha)^2$ ۳) α^2 ۴) α

۶۸ـ فرض کنید $X \sim B(5,p)$ باشد. علاقه‌مند به آزمون $H_0 : p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1 : p = \frac{3}{4}$ هستیم اگر ناحیه بحرانی آزمون $X \ge 2$ باشد، مقدار (α,β) کدام است؟ (α = احتمال خطای نوع اول، β = احتمال خطای نوع دوم) (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $(1-2(\frac{3}{4})^4, (\frac{1}{4})^3)$ ۲) $(1-3(\frac{3}{4})^4, (\frac{1}{4})^5)$ ۳) $(1-(\frac{3}{4})^4, (\frac{1}{4})^3)$ ۴) $(1-2(\frac{3}{4})^5, (\frac{1}{4})^3)$

۶۹ـ می‌خواهیم این فرض صفر را که X توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۳ و $\frac{1}{2}$ است در برابر فرض مقابل که X دارای توزیع هندسی با میانگین ۲ است، آزمون کنیم. اگر ناحیه بحرانی به صورت $X \ge c$ و مجموع احتمال‌های دو نوع خطا $\frac{7}{8}$ باشد، مقدار c کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۰ـ فرض کنید که قرار است درصد پاک‌کنندگی سه ماده پاک‌کننده C,B,A با هم مقایسه شوند و فرض کنید که به ترتیب n_3, n_2, n_1 نمونه تصادفی از هر کدام از این سه مواد پاک و به طور مستقل انتخاب کرده باشیم. و می‌خواهیم فرضیه صفر $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ را در مقابل فرضیه مخالف آن (حداقل یکی از μ_i ها متفاوت از بقیه است) آزمون کنیم . آماره آزمون کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $F(2, \sum_{i=1}^{3} n_i - 3)$ ۲) $F(2, \sum_{i=1}^{3} n_i - 1)$ ۳) $F(3, \sum_{i=1}^{3} n_i - 1)$ ۴) $F(3, \sum_{i=1}^{3} n_i - 3)$

۷۱ـ می‌خواهیم در مورد چهار نوع توزیع نرمال مستقل، فرض $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$ را در برابر این فرض که دست کم دو میانگین نامساوی‌اند، آزمایش کنیم. با داشتن اطلاعات :

توزیع	A	B	C	D
n_i اندازه نمونه	۲	۵	۶	۴
X_i میانگین نمونه	۵	۱۰	۸	۷
S_i انحراف معیار نمونه	۲/۳	۱/۱	۱/۵	۱/۲

درجه آزادی SSE (مجموعه مربعات خطا) برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱۳

۷۲ـ در تست قبل (سؤال ۸۶) ، میانگین مربعات خطا MSE برای طرح تحلیل واریانس یک طرفه چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۶/۱ ۲) ۱/۹۷ ۳) ۱/۵۲۵ ۴) ۱/۴۳۷

۷۳ـ برای بررسی تساوی میانگین سه جامعه در مدل $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ اطلاعات زیر در دست است:

جامعه	۱	۲	۳
اندازه نمونه	۱۰	۱۰	۱۰
میانگین نمونه	۴۰	۵۰	۶۰
انحراف معیار نمونه	۱۰۰	۱۵۰	۵۰

اگر واریانس جوامع مساوی فرض شوند ، مقدار آماره آزمون کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۰/۱ ۲) ۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰

۷۴ـ در یک تحلیل واریانس یک‌طرفه برای سه گروه تیماری، جدول تحلیل واریانس به صورت ناقص زیر در دسترس می‌باشد. انحراف معیار خطای مشاهدات چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

	درجه آزادی	مجموع مربعات
بین گروه‌ها		
باقیمانده		۳۶
کل	۱۱	

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۳/۲۷
۴) ۴/۲۴

۷۵ـ یک تولیدکننده لامپ ادعا دارد که لامپ‌هایش دست کم ۶۰۰ ساعت کار می‌کند. برای امتحان، ۱۶ لامپ آزمایش می‌شوند و اگر مقدار آماره t در بازه $(-۱/۸ < t < \infty)$ قرار گیرد ، ادعا پذیرفته می‌شود. حال اگر در یک نمونه $S = ۴۰, \bar{X} = ۵۸۰$ ساعت به دست آید ، چه باید گفت؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $S > ۴۰$ بوده است. ۲) ادعا صحیح بوده است. ۳) باید $\mu < ۶۰۰$ باشد. ۴) باید $\mu \geq ۶۰۰$ باشد.

۷۶ـ می‌خواهیم فرض $H_۰ : P = \frac{۱}{۳}$ را آزمون کنیم . اگر آماره آزمون به شکل $A = \frac{۳۰[\hat{p} - \frac{۱}{۳}]}{\sqrt{۲}}$ باشد، تعداد نمونه چند عدد خواهد بود؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۳۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۹۹

۷۷ـ اگر $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ یک نمونه تصادفی ۴ تایی از یک جامعه نرمال با واریانس $\sigma^۲ = ۱$ باشد و بخواهیم فرض $H_۰ : \mu = \mu_۰$ را در مقابل $H_۱ : \mu = \mu_۱ > \mu_۰$ را وقتی رد کنیم که $\bar{X} > \mu_۰ + ۱$ باشد ، آنگاه سطح معنادار بودن چقدر خواهد بود؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۲

۷۸ـ اگر X دارای توزیع پواسون با میانگین θ باشد، برای آزمون $H_۰ : \theta = \theta_۰$ در مقابل $H_۱ : \theta < \theta_۰$ ناحیه بحرانی $\{(x_۱, ..., x_n) : \sum x_i \leq ۱\}$ در نظر گرفته شود، تابع توان آزمون کدام است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $(۱+\theta)e^{-\theta}$ ۲) $(۱+n\theta)e^{-\theta}$ ۳) $(۱+n\theta)e^{-n\theta}$ ۴) $[۱-(۱+n\theta)e^{-n\theta}]$

۷۹ـ در تست قبل (سؤال ۱۱۳) ، اگر بعد از نمونه‌گیری فوق مقدار ۴۵۰۵ برای میانگین نمونه به دست آید ، چه تصمیمی باید گرفته شود؟ $(\alpha = ۰/۰۴)$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) از کارخانه جدید خریداری نشود. ۲) از کارخانه فعلی خریداری شود.
۳) اطلاعات برای تصمیم‌گیری کافی نیست. ۴) از کارخانه جدید خریداری شود.

۸۰ـ فرض کنید که $X_۱, X_۲$ یک نمونه تصادفی دو تایی از توزیع یکنواخت در فاصله $[۰, \theta]$ باشد. اگر برای انجام این آزمون $H_۰ : \theta = ۱$ را در مقابل $H_۱ : \theta = ۲$ و ناحیه بحرانی به شکل $X_۱ + X_۲ > ۱$ انتخاب شود، احتمال خطای نوع دوم چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۸۱ـ در مدل خطی $\{y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i \; ; \; i = ۱ \text{ تا } n\}$ که در آن ε_i دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس مشترک $\sigma^۲$ هستند. آماره آزمون $F = \frac{MSR}{MSE}$ در جدول آنالیز واریانس کدام فرض را آزمون می‌کند؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $H_۰ : A = ۰$ ۲) $H_۰ : A = B$ ۳) $H_۰ : B = ۰$ ۴) $H_۰ : A = B = ۰$

۸۲ـ فرض کنید که می‌خواهیم در مورد چهار گروه مختلف از مشاهدات که دارای توزیع نرمال مستقل با واریانس یکسان هستند، فرض برابری میانگین‌ها را بررسی کنیم اطلاعات زیر موجود است:

گروه‌ها	A	B	C	D
اندازه نمونه	۴	۴	۴	۴
میانگین نمونه	۵	۱۰	۸	۹

و نیز بدانیم که واریانس نمونه‌های مشاهدات $\hat{\sigma}^۲ = ۴/۶۶۷$ است. مقدار آماره مربوط به جدول تحلیل واریانس این مسأله چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $F = ۴/۶۶۷$ ۲) $F = ۴$ ۳) $F = ۱$ ۴) $F = ۹/۳۳۴$

۸۳ـ جدول تحلیل واریانس یک‌طرفه زیر که به صورت ناقص داده شده است را در نظر بگیرید. مقدار a , b را به نحوی به دست آورید که در جدول زیر صدق کند. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	آماره F
تیمارها	a	۵/۵	۱/۸۳۳۳۳	
خطا	b	۲/۲	C	۱۰

۱) $a=۳$ ، $b=۵$
۲) $a=۴$ ، $b=۱۲$
۳) $a=۴$ ، $b=۴$
۴) $a=۳$ ، $b=۱۲$

۸۴ـ جدول آنالیز واریانس یک‌طرفه زیر که به صورت ناقص داده شده است را در نظر بگیرید. با استفاده از این جدول یک برآوردکننده نااریب برای واریانس مشاهدات چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	آمار F
تیمارها	۱	۱۶/۵		
خطا				۴/۹۶
مجموع	۱۳			

۱) $\hat{\sigma}^2=۱۶/۵$
۲) $\hat{\sigma}^2=۲/۶۲$
۳) $\hat{\sigma}^2=۳/۳۳$
۴) $\hat{\sigma}^2=۴/۹۶$

۸۵ـ اطلاعات زیر برای تحقیق در باره تفاوت بین چهار تیمار مختلف داده شده است:

تیمار i	۱	۲	۳	۴
تعداد نمونه	۵	۵	۵	۵
میانگین نمونه	۱۴/۲	۱۲/۲	۱۷/۳	۱۱/۵
انحراف معیار	۳	۴	۲	۳

مقدار مجموع مربعات تیمارها (SS_{tr}) در جدول تحلیل واریانس چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) ۶۹
۲) ۱۰۱/۳
۳) ۱۷۰
۴) ۱۳/۸

۸۶ـ به منظور مقایسه هزینه خانوارها در پنج منطقه، از هر یک از مناطق نمونه‌ای به حجم n=۶ خانوار به طور تصادفی انتخاب شده است و بر اساس مشاهدات جدول تحلیل واریانس زیر حاصل شده است. مقدار عددی F کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F
تیمار (خانوار) خطا	۶/۴			
کل	۶۸/۹			

۱) ۰/۶۴
۲) ۰/۷۷
۳) ۰/۶۱۵
۴) ۱۰/۷۶

۸۷ـ دو نمونه تصادفی ۱۶ تایی مستقل به ترتیب از دو جامعه با توزیع‌های $N(\mu_X, ۳۲), N(\mu_Y, ۳۲)$ انتخاب می‌شوند. علاقه‌مند به آزمون $H_0: \mu_X \le \mu_Y$ در مقابل $H_1: \mu_X > \mu_Y$ در سطح معنادار بودن پنج صدم هستیم، ناحیه بحرانی آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $\bar{X}-\bar{Y}<-۳/۲۹$
۲) $\bar{X}-\bar{Y}<۱/۶۴۵$
۳) $\bar{X}-\bar{Y}>۳/۲۹$
۴) $\bar{X}-\bar{Y}<-۱/۶۴۵$

۸۸ـ متغیر تصادفی $X \sim N(0, \sigma^2)$ مفروض است نمونه تصادفی X_1, X_2 را از این متغیر می‌گیریم. مایلیم به ازای $\alpha=۰/۳$ فرض $H_0: \sigma \ge ۱$ را در برابر $H_1: \sigma \ge ۱$ آزمایش کنیم. اگر مناسب‌ترین آماره آزمون را در این مسأله به کار گیرید ناحیه بحرانی به کدام صورت در می‌آید؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $(-\infty, ۰/۱۰)$
۲) $(۰, ۰/۰۷)$
۳) $(۰/۰۷, \infty)$
۴) $[۰, ۰/۰۶]$

۸۹ـ در مورد توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2=۲۵)$ فرض $H_0: \mu=۵$ را در مقابل $H_1: \mu>۵$ وقتی رد خواهیم کرد که $\bar{X}>C$ باشد، مقدار c , n را چنان بیابید که تابع توان $\pi(\mu)$ دارای مقادیر زیر باشد. $\pi(۵)=۰/۰۵$ ، $\pi(۱۰)=۰/۹۹$ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $n=۲۳$ ، $c=۶/۷۱$
۲) $n=۵$ ، $c=۶/۶۴۵$
۳) $n=۲۳$ ، $c=۷/۷۶۵$
۴) $n=۵$ ، $c=۶/۶۹$

۹۰ـ برای بررسی میزان داروی کاهش فشار خون ، داروی مورد مطالعه‌ای به ۱۵ نفر تجویز گشته است و فشار خون آن‌ها قبل از مصرف دارو و دو ساعت بعد از مصرف دارو اندازه‌گیری و نتایج زیر حاصل شده است. آیا بر اساس این داده‌ها می‌توان یک برآورد فاصله‌ای برای میزان تاثیر دارو به دست آورد؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

	$\bar{x}$	s^2
قبل از مصرف دارو	۱۸	۴/۵
بعد از مصرف دارو	۱۶	۱/۳۱

۱) بله، به شرط آن که از آماره دو جامعه نامستقل استفاده کنیم.
۲) خیر، چون دو نمونه مستقل نیستند.
۳) بله ، مشروط بر آن که بدانیم واریانس‌ها با هم برابرند.
۴) بله، مشروط بر آن که بدانیم توزیع جامعه نرمال است.

۹۱ـ متوسط میزان محصول تولیدی چهار ماشین صنعتی در سه نوبت مختلف به شرح زیر است:

T_1	T_2	T_3	T_4
۱۳	۱۵	۸	۱۱
۸	۱۱	۱۲	۱۵
۹	۱۳	۷	۱۰

علاقه‌مند به بررسی برابری متوسط مقدار تولیدی ماشین‌ها هستیم. مقدار مجموع مربعات انحراف مربوط به تیمارها (SST) کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۸۰

۹۲ـ متوسط میزان محصول تولیدی چهار ماشین صنعتی در سه نوبت مختلف به شرح زیر است. علاقه‌مند به بررسی برابری متوسط مقدار تولیدی ماشین‌ها هستیم. مقدار مجموع مربعات خطا (SSE) کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

T_1	T_2	T_3	T_4
۱۳	۱۵	۸	۱۱
۸	۱۱	۱۲	۱۵
۹	۱۳	۷	۱۰

۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۸۰

۹۳ـ برای بررسی برابری متوسط تولید سه ماشین، خلاصه اطلاعات زیر متوسط تولید سه ماشین در نوبت‌های مختلف است.

	۱	۲	۳
اندازه نمونه میانگین نمونه‌ای	۵	۱۱	۱۶
میانگین نمونه‌ای	۲۵	۲۰	۲۳
انحراف معیار نمونه‌ای	۱/۵	۱	۲

با فرض نرمال بودن و همگن بودن واریانس‌ها، مقدار مجموع مربعات خطا (SSE) کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۶۸/۲۵
۲) ۷۹
۳) ۸۶/۲۵
۴) ۹۷

۹۴ـ یک سکه ناسالم با احتمال شیر آمدن p را، که در آن $p = ۰/۲, ۰/۳, ۰/۵$ است، آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر مشاهده شود. اگر X نمایانگر تعداد پرتاب‌های لازم باشد و برای آزمون فرض $H_0: p = ۰/۵$ ، فرض H_0 رد شود اگر $X \geq ۳$ ، کمترین مقدار احتمال خطای نوع دوم کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۳
۲) ۰/۳۶
۳) ۰/۴۹
۴) ۰/۶۴

۹۵ـ برای دو جامعه مستقل $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ برای انجام آزمون $H_0: \mu = \mu_2$ در مقابل $H_1: \mu_1 > \mu_2$ نتایج حاصل از دو نمونه مستقل از دو جامعه به صورت روبرو است: $n_X = ۱۳, \bar{X} = ۴۵/۱۵, S_X^2 = ۶۴, n_y = ۱۲, \bar{y} = ۴۲/۲۵, s_y^2 = ۷۶/۴$

آماره آزمون برابر است با:

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) ۰/۴۲
۲) ۰/۳۶
۳) ۲/۹
۴) ۰/۸۴

۹۶ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس $\sigma^2 = 4$ است. بر اساس نمونه تصادفی ۱۶ تایی مایلیم در مورد میانگین آزمون فرض انجام دهیم. به طوری که $H_1 : \mu > 2$ و ناحیه پذیرش در شکل رایج خود به صورت $(-\infty, 3]$ باشد. اگر بدانیم $Z_{0/05} = 1/645$ و $Z_{0/092} = 1/3225$ است.کدام مقدار میانگین توزیع است که متفاوت بودن آن با ۲ با احتمال ۰/۹۵ آشکار می‌شود؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) ۳/۸۲۲۵ ۲) ۳/۲۹۰ ۳) ۳/۶۴۵ ۴) ۱/۳۵۵

۹۷ـ فرض کنید که $X_1 \sim N(\theta_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\theta_2, \sigma_2^2)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، به طوری که σ^2 یک مقدار معلوم است. علاقه‌مند به آزمون $H_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ در مقابل $H_1 : \theta_1^2 + \theta_2^2 > 0$ هستیم اگر ناحیه بحرانی به فرم $X_1^2 + X_2^2 \le c$ باشد. مقدار c برای اندازه آزمون در سطح α کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\chi^2_{\alpha,2}$ ۲) $\sigma^2 \chi^2_{\alpha,2}$ ۳) $\frac{1}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha,2}$ ۴) $\chi^2_{1-\alpha,2}$

۹۸ـ بر اساس نمونه تصادفی ۴ تایی از ۳ جامعه نرمال اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\bar{x}_1 = 110\ ,\ \bar{x}_2 = 100\ ,\ \bar{x}_3 = 120\ ,\ s_1^2 = 180\ ,\ s_2^2 = 220\ ,\ s_3^2 = 200$$

مقدار آماره آزمون و توزیع آماره فرض برای میانگین‌های سه جامعه کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) ۳ ، $F_{9,2}$ ۲) ۳ ، $F_{2,9}$ ۳) ۲ ، $F_{9,2}$ ۴) ۲ ، $F_{2,9}$

۹۹ـ در یک بررسی برابری میانگین‌های ۴ جامعه از هر جامعه ۵ مشاهده جمع‌آوری شده است. اگر $\bar{y}_1$ میانگین نمونه‌ای مربوط به جامعه اول باشد و میانگین نمونه‌ای سایر جامعه‌ها به صورت روبرو باشد:

جامعه	۱	۲	۳	۴
میانگین تیمارها	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_{1+1}$	$\bar{y}_{1+2}$	$\bar{y}_{1+3}$

در صورتی که $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 2/5$ باشد، آماره آزمون کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) ۳/۳۳ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{25}{4}$

۱۰۰ـ اگر ۲۶ لاستیک از ۲۰۰ لاستیک نوع A کمتر از ۲۵۰۰۰ کیلومتر دوام آورده باشد، در حالی که رقم متناظر برای ۲۰۰ لاستیک از نوع D,C,B عبارت از ۳۳,۱۶,۲۱ باشند و بخواهیم آزمون روبرو را انجام دهیم:

$H_0 = P_A = P_B = P_C = P_D$

H_1: حداقل یکی از P_i ها متفاوت است:

درجه آزادی برای آماره آزمون مربع کای کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۶

۱۰۱ـ در یک بررسی آماری، صفت مورد بررسی دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۵ است. اگر هدف از بررسی، آزمون $H_0 : \mu = 25$ در مقابل $H_1 : \mu = 27$ با احتمال خطای نوع اول ۰/۰۵ و توان ۰/۹۵ باشد، تعداد تقریبی نمونه تصادفی کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۸۲ ۲) ۶۸ ۳) ۹۱ ۴) ۹۶

۱۰۲ـ یک دنباله از آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال موفقیت برابر ۰/۲,۰/۳ یا ۰/۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید X تعداد آزمایش‌های لازم برای به دست آوردن اولین موفقیت باشد و علاقه‌مند به آزمون $H_0 : p = 0/7$ در مقابل $H_1 : p \neq 0/7$ هستیم. فرض $H_0 : p = 0/7$ رد می‌شود اگر و تنها اگر $x \ge 3$، مقدار احتمال خطای نوع I و II (به ترتیب از راست به چپ) کدام است؟ $(p + q = 1)$ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰/۰۷ و $q + pq$ ۲) ۰/۰۶ و $q + pq + p^2q$ ۳) ۰/۰۸ و $p + pq + pq^2$ ۴) ۰/۰۹ و $p + pq$

۱۰۳ـ در یک آزمون مشترک نمره درس سه گروه دانشجو با سه معلم متفاوت به شرح زیر است:

گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
۴	۵	۹
۷	۷	۵
۳	۲	۷
۴	۴	۳
۷	۲	۶

با فرض نرمال بودن داده‌ها و همگنی واریانس‌ها، مجموع مربعات خطا (SSE) و میانگین کل کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{13}{3}$ و ۵ ۲) $\frac{11}{4}$ و ۵ ۳) $\frac{12}{5}$ و ۶ ۴) $\frac{14}{3}$ و ۶

۱۰۴ـ می‌خواهیم بررسی کنیم که بعد از اصلاح فرآیند خرید آیا واریانس زمان فرآیند کاهش یافته است یا خیر. با توجه به جدول داده شده آماره آزمون را به دست آورید. (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

	تعداد نمونه	واریانس محاسبه شده
قبل از اصلاح فرآیند	۹	۱۴۵
بعد از اصلاح فرآیند	۸	۵۰

۱) ۱/۱۲۵
۲) ۲/۹
۳) ۰/۳۴
۴) بدون در نظر گرفتن سطح معنی‌دار بودن قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۰۵ـ برای انجام آزمون $H_0 : \mu = 20$ در مقابل $H_1 : \mu \neq 20$ نمونه‌ای به اندازه ۴۰۰ از جامعه‌ای بزرگ با انحراف معیار ۵ استخراج شده است. فرض صفر در صورتی که $\bar{x} \geq 20/5$ یا $\bar{x} \leq 19/5$ باشد رد می‌گردد. سطح معنادار بودن این آزمون به‌صورت تقریبی عبارت است از:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) ۰/۰۲
۲) ۰/۱
۳) ۰/۰۵
۴) ۰/۱۵

۱۰۶ـ می‌خواهیم نسبت محصولات مرجوعی را در هشت استان با یکدیگر مقایسه کنیم. اگر $\alpha = 0/02$ باشد و نمونه‌هایی ۵۰ تایی انتخاب گردند، آماره مناسب کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) χ^2_8
۲) χ^2_7
۳) χ^2_{49}
۴) χ^2_{50}

۱۰۷ـ در انجام آزمون $H_0 : P = 0/7$ در مقابل $H_1 : P > 0/7$ توان آزمون در زمانی که $P = 0/8$ می‌باشد. در کدام یک از حالات زیر، بیشترین مقدار را دارد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) $n = 30 \,,\, \alpha = 0/05$
۲) $n = 30 \,,\, \alpha = 0/1$
۳) $n = 25 \,,\, \alpha = 0/05$
۴) بدون مشخص بودن β نمی‌توان نظر داد.

۱۰۸ـ برای بررسی تفاوت میانگین‌های دو جامعه از تحلیل واریانس یک طرفه استفاده شده است. اندازه نمونه گرفته شده از هر دو جامعه برابر با ۶ است. اگر بدانیم واریانس نمونه‌ای تیمار اول و دوم با هم برابرند. برآورد ناااریب σ^2 چند برابر واریانس نمونه‌ای تیمار هر جامعه است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{3}{2}$ برابر
۲) ۱۰ برابر
۳) ۱ برابر
۴) ۲ برابر

۱۰۹ـ اگر با $n = 60$ نمونه مستقل از توزیع نرمال بخواهیم آزمون $H_0 : \sigma^2 = \alpha_0^2$ و $H_0 : \sigma^2 > \alpha_0^2$ را با $\alpha = 0/025$ انجام دهیم. ناحیه رد H_0 به طور تقریبی عبارت است از: (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $\left(\frac{1}{2}(1/96 + \sqrt{119})^2, \infty\right)$
۲) $\left((1/96 + \sqrt{121})^2, \infty\right)$
۳) $\left(0, (1/96 + \sqrt{121})^2\right)$
۴) $\left(0, \frac{1}{2}(1/96 + \sqrt{119})^2\right)$

۱۱۰ـ برای بررسی معنادار بودن اختلاف بین مقادیر کمی حاصل از دو جامعه، نمونه‌های تصادفی از آن دو جامعه و یک جامعه‌ی کنترل جمع‌آوری شده است. برای انجام این بررسی کدام یک از آزمون‌های آماری زیر را مناسب‌تر می‌دانید؟ (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) آزمون ضریب همبستگی
۲) آزمون مربع کای
۳) تحلیل واریانس
۴) آزمون t و یا Z

۱۱۱ـ در آزمون فرض دو طرفه اگر $\alpha = 0/05$ در نظر گرفته شده باشد. احتمال خطای نوع دوم به طور تقریبی برابر است با: (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) ۰/۹۷۵
۲) ۰/۹۵
۳) ۰/۰۲۵
۴) با اطلاعات موجود قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۱۲ـ متغیرهای تصادفی نرمال X و Y پارامترهای نامعلوم دارند و از هم مستقل‌اند. به منظور آزمودن فرض آماری $H_0 : \mu_x = \mu_y$ و $\sigma_x = \sigma_y$ در برابر دست کم، یکی از دو تساوی برقرار نیست: H_1 مستقلاً نمونه‌های تصادفی n_x تایی از X و n_y تایی از Y گرفته و یک دستگاه فاصله‌ی اطمینان دو طرفه توأماً برای $\mu_x - \mu_y$ و $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ به دست آورده‌ایم. براساس این دستگاه دو فاصله‌ی اطمینان توأم، فرض صفر را رد کرده‌ایم. در این صورت کدام یک از دستگاه‌های فاصله‌ی اطمینان زیر قطعاً نمی‌تواند دستگاه فاصله‌ی اطمینان محاسبه شده در این مسأله باشد؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) [۲/۳ و ۱/۰−] برای $\mu_x - \mu_y$ و [۱۶/۲ و ۱/۲] برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
۲) [۱۱/۲ و ۰/۰۴−] برای $\mu_x - \mu_y$ و [۲۹/۱ و ۲/۴] برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
۳) [۸/۲ و ۱/۴] برای $\mu_x - \mu_y$ و [۱۸/۳ و ۰/۰۵] برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
۴) [۸/۲ و ۲/۱−] برای $\mu_x - \mu_y$ و [۲۹/۱ و ۰/۲۹] برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

۱۱۳ــ فرض کنید $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ و یک نمونه تصادفی و مستقل n تایی از آن در دست است. با فرض معلوم بودن σ و به منظور انجام آزمون فرض $\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ یک ناحیه پذیرش به‌صورت $A = (-\infty, k]$ ارائه شده است. اگر در این آزمون، میزان خطای نوع اول را با α و سطح معنی‌داری آزمون را با α' نشان دهیم، به‌ازای مقادیر مختلف $\mu \le \mu_0$، کدام رابطه صحیح است؟

(ϕ : تابع توزیع تجمعی احتمال نرمال استاندارد) (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\alpha \le \alpha' = \phi(-k)$ ۲) $\alpha = \alpha' \le \phi(-k)$ ۳) $\alpha' \le \alpha = \phi(-k)$ ۴) $\alpha = \alpha' \le \phi(-k)$

۱۱۴ــ در صورت ثابت بودن سایر عوامل، در کدام یک از موارد زیر توان آزمون افزایش می‌یابد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۱)

۱) آزمون دو دامنه باشد. ۲) خطای نوع اول بیشتر شود. ۳) خطای نوع اول کمتر شود. ۴) سطح اطمینان بیشتر شود.

۱۱۵ــ جعبه‌ای شامل n مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. براساس یک نمونه ۳ تایی بدون جایگذاری عبارت است از «مشاهدهٔ حداقل دو مهره سیاه»، توان آزمون را در نقطه $n = 4$ محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $\frac{۵}{۸۴}$ ۲) $\frac{۳۴}{۸۴}$ ۳) $\frac{۵۰}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۹}{۸۴}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

۱ــ گزینه «۲» در جامعه نرمال با واریانس مجهول و حجم نمونه کوچک از آماره $t = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ استفاده می‌شود.

۲ــ گزینه «۴» آماره آزمون به صورت روبرو است زیرا حجم نمونه‌ها بزرگتر از ۳۰ می‌باشد و واریانس جامعه نامعلوم است:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \quad ; \quad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(۱۹۹)(۱۹/۵)+(۲۹۹)(۲۵)}{۲۰۰+۳۰۰-۲} = ۱۹/۸۵ \Rightarrow S_p = ۴/۴۵$$

$$\Rightarrow t_{obs} = \frac{۱۹۸-۲۰۰}{۴/۴۵\sqrt{\frac{۱}{۲۰۰}+\frac{۱}{۳۰۰}}} = -۴/۹۱۷$$

چون $|t_{obs}| > ۱/۹۶$ می‌باشد، فرض H_0 رد می‌شود و میانگین‌ها یکسان نیستند.

۳ــ گزینه «۲» درجه آزادی رفتارها و خطاها به صورت زیر می‌باشد:

$$SS_{tr} = k-1 = ۵-۱ = ۴ \;\; ; \;\; SSE = (\sum n_i - k) = (۴+۵+۶+۷+۴)-۵ = ۲۱ \;\; ; \;\; SST = (n_i - 1)$$

k: انواع پارچه n_i: حجم هرنوع پارچه

۴ــ گزینه «۳»

درجه آزادی برای مشاهدات کل $\Leftarrow$ $df = \sum n_i - 1 = ۲۶+۲۱+۱۶+۳۳-۱ = ۹۵$

درجه آزادی برای مشاهدات نمونه $\Leftarrow$ $df = k-1 = ۴-۱ = ۳$

۵ــ گزینه «۲» جدول‌هایی که به صورت دو بعدی می‌باشد جداول توافقی نام دارند که دو صفت آنها معمولاً کیفی هستند.

۶ــ گزینه «۱» طبق تعریف خطای نوع اول: احتمال رد H_0 وقتی H_0 درست باشد. طبق گفته مسأله به صورت زیر است:

$$\alpha = P_{\theta=2}(X < ۰/۲۵) = \int_0^{۰/۲۵} 3x^2 dx = x^3\Big]_0^{۰/۲۵} = (۰/۲۵)^3 = \frac{۱}{۶۴}$$

۷ـ گزینه «۱» در $H_۰$ را در نظر بگیرید:

$$P_{\theta=۳}(X<۰/۲۵)=\int_{۰}^{۰/۲۵} ۴x^{۳}dx = x^{۴}\Big]_{۰}^{۰/۲۵}=(۰/۲۵)^{۴}=\frac{۱}{۲۵۶}$$

۸ـ گزینه «۱» آماره آزمون مناسب به صورت زیر است:

$$Z=\frac{\overline{x}_۱-\overline{x}_۲}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}=\frac{۷۵-۸۰}{\sqrt{\frac{۱۶}{۱۰۰}+\frac{۲۵}{۱۰۰}}}=-۷/۸۰>Z_{\frac{\alpha}{۲}}=Z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶\Rightarrow -۷/۸<-۱/۹۶$$

بنابراین فرض $H_۰$ رد می‌شود.

۹ـ گزینه «۴» در آنالیز واریانس یک طرفه داریم:

$$F(\text{درجه آزادی تیمار} ، \text{درجه آزادی خطا})=F(۲,\sum_{i=۱}^{۳}n_i-۳)$$

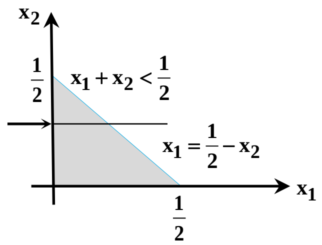
۱۰ـ گزینه «۱» فرض کنید $T(X)$ و C به ترتیب نمایانگر آماره آزمون و ناحیه بحرانی باشند.

$$\beta=P(H_۰\ \text{پذیرش}\,|\,H_۱\ \text{درست باشد})=P(T(X)\notin C\,|\,H_۱\ \text{درست باشد})=P(X_۱+X_۲\le\frac{۱}{۲}\,|\,\theta=۲)$$

تحت فرض $H_۱: i=۱,۲\quad X\sim U(۰,۲)$

$$P(X_۱+X_۲<\frac{۱}{۲}\,|\,\theta=۲)=\int P(X_۱+X_۲<\frac{۱}{۲}\,|\,X_۲=x_۲)f_{X_۲}(x_۲)dx_۲=\int P(X_۱<\frac{۱}{۲}-x_۲)f_{X_۲}(x_۲)dx_۲$$

ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال فوق به صورت زیر می‌باشد: $f_{X_۲}(x_۲)=\frac{۱}{۲}\qquad ۰<x_۲<۲$



بنابراین انتگرال فوق برابر است با:

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\left(\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}-x_۲}\frac{۱}{۲}dx_۱\right)\frac{۱}{۲}dx_۲=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}-x_۲}dx_۱dx_۲$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲}-x_۲)dx_۲=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}x_۲-\frac{۱}{۲}x_۲^۲)\Big|_{۰}^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}[\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}]=\frac{۱}{۳۲}$$

۱۱ـ گزینه «۲» طبق تعریف خطای نوع اول و خطای نوع دوم مقادیر α و β را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha=P(H_۰\ \text{رد}\ |\ \text{درست باشد}\ H_۰)=P(X=۱\,|\,p=\frac{۱}{۴})=p^{x}(۱-p)^{۱-x}=\frac{۱}{۴}.(\frac{۳}{۴})^{۰}=\frac{۱}{۴}$$

$$B=P(H_۰\ \text{عدم رد}\ |\ \text{درست باشد}\ H_۱)=P(X=۰\,|\,p_۱=\frac{۳}{۴})=(\frac{۳}{۴})^{۰}.(\frac{۱}{۴})^{۱}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$$

۱۲ـ گزینه «۲» توجه کنید میانگین جامعه معلوم است بنابراین نباید از آماره $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ استفاده کرد بلکه باید آماره $\frac{nS^۲}{\sigma^۲}$ را به کار ببریم.

$$S^۲=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۲}(X_i-۰)^۲=\frac{X_۱^۲+X_۲^۲}{۲}\Rightarrow X_۱^۲+X_۲^۲\sim\chi^۲_{(۲)}$$

۱۳ـ گزینه «۳» فرض صفر را وقتی می‌پذیریم که $x=۰,۱$ باشد بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}=P_{\theta=۱}(X_۱=۰)+P_{\theta=۱}(X_۱=۱)=e^{-۱}+e^{-۱}=۲e^{-۱}=۰/۷۳۶$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\hat{\sigma}=\sqrt{MSE}=\sqrt{\frac{۳۶}{۹}}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow\ d.f\ (\text{خطا})=d.f\ (\text{کل})-d.f\ (\text{تیمار})=۱۱-۲=۹\quad;MSE=\frac{SSE}{dfe}$$

۱۵ـ گزینه «۱» از آماره آزمون مناسب استفاده می‌کنیم:

$$t=\frac{۴۷-a}{\frac{۸}{\sqrt{۲۵}}}>t_{۰/۰۵,۲۴}\Rightarrow ۵(\frac{۴۷-a}{۸})>۱/۷۱۱\Rightarrow a<۴۷-۲/۷۳۷۶=۴۴/۲۶۲۴$$

۱۶ـ گزینه «۲» درجه آزادی خطا و تیمار به صورت روبرو است:

$$d.f_{\text{تیمار}}=۴-۱=۳$$

$$d.f_{\text{کل}}=\sum_{i=۱}^{۴}n_i-۱=۲۲-۱=۲۱\;;\;d.f_{\text{خطا}}=۲۱-۳=۱۸$$

۱۷ـ گزینه «۴» طبق تعریف خطای نوع اول α:

$$X\sim Bin(۴,P)\quad;\quad H_۰:P=\frac{۱}{۳}\quad;\quad H_۱:P=\frac{۱}{۵}\quad;\quad C=\{۰,۱\}\ \text{ناحیه رد}$$

$$P(X=x)=\binom{۴}{x}P^x(۱-P)^{۴-x}\Rightarrow\alpha=P_{p=\frac{۱}{۳}}(H_۰\ \text{رد})+P_{\frac{۱}{۳}}(X=۱)=(\frac{۲}{۳})^۴+\binom{۴}{۱}(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^۳=(\frac{۲}{۳})^۴+۲(\frac{۲}{۳})^۴=۳(\frac{۲}{۳})^۴$$

۱۸ـ گزینه «۳» توان آزمون مکمل خطای نوع دوم است و تعریف آن به صورت روبرو است:

$C=\{$ مشاهده حداقل ۲ مهره سیاه $\}$

$$H_۰:n=۳\quad;\quad H_۱:n=۴$$

$$\text{توان آزمون}=P(H_۰\ \text{رد}\mid H_۱\ \text{درست})=P(\text{مشاهده حداقل ۲ مهره سیاه}\mid n=۴)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵۰}{۸۴}$$

۱۹ـ گزینه «۴» فرض‌های مربوط به آزمون سالم بودن سکه به صورت $\begin{cases}H_۰:p=\frac{۱}{۲}\\H_۱:p\neq\frac{۱}{۲}\end{cases}$ است.

اگر X تعداد شیرهای مشاهده در سه پرتاب سکه باشد، آنگاه $C=\{۰,۳\}$ ناحیه بحرانی آزمون است.

$$\alpha=P(H_۰\ \text{رد}\mid H_۰\ \text{درست باشد})=P(X=۰\ \text{یا}\ X=۳\mid p=\frac{۱}{۲})=P(X=۰)+P(X=۳)=(\frac{۱}{۲})^۳+(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۴}$$

۲۰ـ گزینه «۳» از آزمون نیکویی برازش استفاده می‌کنیم آماره آزمون مناسب آن به صورت روبرو است:

$$\chi^۲=\sum_{i=۱}^{۳}\frac{(o_i-e_i)^۲}{e_i}=\frac{۱۶}{۲۰}+\frac{۰}{۴۰}+\frac{۱۶}{۱۰}=۲/۴$$

۲۱ـ گزینه «۱» آماره آزمون مناسب برای $H_۰$ و $H_۱$ را می‌سازیم:

$$\text{طبق صورت مسأله}:\frac{\sum_{i=۱}^{۳}(y_i-\bar{y})}{۲}=۳۰\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۳}(y_i-\bar{y})=۶۰\Rightarrow(n_y-۱)S_y^۲=۶۰\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر }\sigma^۲}\frac{(n_y-۱)S_y^۲}{\sigma^۲}=\frac{۶۰}{\sigma^۲}$$

$$\text{طبق صورت مسأله}:\frac{۱}{۱۴}(X_۱^۲+X_۲^۲-۹۹)=X_۱+X_۲\Rightarrow\frac{X_۱^۲}{۱۴}+\frac{X_۲^۲}{۱۴}-\frac{۹۹}{۱۴}-X_۱-X_۲=۰\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۲}(X_i-۷)^۲=۱$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف بر ۲ تقسیم}}\frac{\sum_{i=۱}^{۲}(X_i-۷)^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{n_xS_x^۲}{\sigma^۲}=\frac{۱}{\sigma^۲}$$

(توجه بسیار مهم: میانگین X معلوم است پس $\frac{n_x S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_x)}$ و میانگین Y مجهول است پس $\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_y-1)$)

$$U=\frac{\frac{\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma^2}}{(n_y-1)}}{\frac{\frac{n_x.S_x^2}{\sigma^2}}{n_x}}=\frac{\frac{\frac{۶۰}{\sigma^2}}{۳-۱}}{\frac{\frac{۱}{\sigma^2}}{۲}}=۶۰\sim F_{n_x=۲,n_y-۱=۳-۱=۲}$$

مقدار $F=۶۰$ به قدر کافی بزرگ است که بتوان $H_۰$ را رد کرد.

۲۲ـ گزینه «۴» توجه کنید که مانند مثال قبل میانگین X معلوم و میانگین Y مجهول است.

$$v_۱=n_x=۲ \quad \text{و} \quad v_۲=n_y-۱=۳-۱=۲$$

۲۳ـ گزینه «۲» طبق تعریف خطای نوع اول زمانی $H_۰$ را رد می‌کنیم که در توزیع فوق $x=۱$ یا $x=۲$ باشد که مقادیر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha=P(H_۰ \text{ رد} \mid H_۰ \text{ درست باشد})=P(X=۱ \text{ یا } ۲\mid N=۵)=P(X=۱)+P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۳}}=۰/۶$$

۲۴ـ گزینه «۱» دقیقاً مانند مثال قبل $H_۰$ را در صورتی رد می‌کنیم که $x=۰$ یا $x=۵$ باشد لذا خواهیم داشت:

$$\alpha=P(H_۰ \text{ رد} \mid H_۰ \text{ درست باشد})=P(X=۰)+P(X=۵)=\binom{۵}{۰}(\frac{۱}{۲})^۵+\binom{۵}{۵}(\frac{۱}{۲})^۵=\frac{۱}{۱۶}$$

۲۵ـ گزینه «۳» می‌توانیم از فرمول کمکی استفاده کنیم:

$$SSE=\sum_{i=۱}^{۵}\sum_{j=۱}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{io})^۲=\sum_{i=۱}^{k}(n_i-۱)S_i^۲=(n_۱-۱)s_۱^۲+(n_۲-۱)s_۲^۲+...+(n_۵-۱)s_۵^۲$$

$$=(۲-۱)\times(۰/۷)^۲+(۵-۱)\times۱+۳\times(۱/۱)^۲+۲\times(۰/۸)^۲+(۲-۱)\times(۰/۶)^۲=۹/۷۶$$

$$d.f \text{ تیمار}=۵-۱=۴ \;؛\quad d.f \text{ خطا}=۱۵-۴=۱۱$$

$$d.f \text{ کل}=\sum_{i=۱}^{۵}n_i-۱=۱۶-۱=۱۵$$

۲۶ـ گزینه «۴» طبق گفته مسأله فرض صفر را زمانی رد می‌کنیم که $X>۲$ باشد تحت $H_۰$ بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}\Rightarrow P_{\mu=۲}(X_۱>۲)=1-P_{\mu=۲}(X_۱\le۲)=۱-P_{\mu=۲}(X_۱=۰)-P_{\mu=۲}(X_۱=۱)-P_{\mu=۲}(X_۱=۲)$$

$$=۱-(e^{-۲}+e^{-۲}\times۲-۲e^{-۲})=۱-۵e^{-۲}=\frac{e^۲-۵}{e^۲}$$

۲۷ـ گزینه «۲» توجه کنید مجموع متغیرهای برنولی، دو جمله‌ای است: $\sum_{i=1}^{9} X_i \sim Bin(9,p)$; (نقطه بحرانی)

$$\alpha = P_{p=\frac{1}{4}}(\sum x_i \ge 6) = \binom{9}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{9}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{9}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{9}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{2620}{262144} = 0/00999 \Rightarrow \alpha \cong 0/01$$

۲۸ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف خطای نوع اول و سطح معنی‌داری خواهیم داشت:

$$0/05 = P_{\mu=2}(\bar{x} > k) = P_{\mu=2}\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{3}} > \frac{k-\mu}{\frac{3}{3}}\right) = P(Z > k-2) \to k-2 = z_{0/05} = 1/645 \Rightarrow k = 3/645$$

۲۹ـ گزینه «۳» توان آزمون مکمل احتمال خطای نوع دوم (β) است.

$$\text{توان آزمون} = P(H_0 \text{ رد} \mid H_1 \text{ درست}) = P_{M=3}(x = 2 \text{ یا } 3)$$

$$P_{M=3}(x=2) + P_{M=3}(x=3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{10}{20} = 0/5$$

۳۰ـ گزینه «۲» درجه آزادی بین سطوح برابر است با:

$$df_{tr} = k-1 \Rightarrow 2 = k-1 \Rightarrow k = 3$$

۳۱ـ گزینه «۴» زمانی که خطای نوع اول ثابت باشد با افزایش حجم نمونه خطای نوع دوم حتماً کاهش می‌یابد.

۳۲ـ گزینه «۴» طبق تعریف خطای نوع اول:

$$\alpha = p\,(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست باشد})$$

$$\alpha = P(\sum X_i > 7 \mid P = \tfrac{1}{4}) = P_{\frac{1}{4}}(\sum X_i = 8) = (\tfrac{1}{4})^8(\tfrac{3}{4})^0 = (2^{-2})^8 = 2^{-16}$$

۳۳ـ گزینه «۱» آماره آزمون مناسب عبارت است از آزمون کای ـ دو:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(4-1).3/33}{1} = 10$$

۳۴ـ گزینه «۲» برای برآورد واریانس‌ها باید از آماره آزمون F استفاده کنیم، بنابراین ابتدا واریانس‌ها را بدست می‌آوریم:

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2\right] = 0/15$$
$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2\right] = 0/15$$
$$\Rightarrow F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0/15}{0/15} = 1$$

۳۵ـ گزینه «۲» توزیع داده‌ها نرمال است. $n = 8$ است، در ضمن $\sigma^2 = 4$ معلوم است. بنابراین آماره آزمون مناسب عبارت است از:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{4/16-3}{\frac{2}{\sqrt{8}}} = 1/75$$

۳۶ـ گزینه «۲» به تعاریف خطای نوع اول و دوم دقت شود: $\bar{C} = \{X_1 + X_2 = 0 \text{ یا } 1\}$ ناحیه پذیرش

توجه کنید که مجموع دو متغیر تصادفی، متغیر دو جمله‌ای بوجود می‌آورد:

$$X_1 + X_2 \sim Bin(2,p) \qquad \begin{cases} H_0 : P = \frac{1}{4} \\ H_1 : P = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow P(y) = \binom{2}{x} p^2 q^{2-x}$$

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست}) = P(X_1 + X_2 = 2 \mid P = \tfrac{1}{4}) = \binom{2}{2}(\tfrac{1}{4})^2(\tfrac{3}{4})^0 = \frac{1}{16}$$

$$\beta = P(H_{۰} \text{ پذیرش} \mid H_{۱} \text{ درست}) = P(X_{۱}+X_{۲}=۰ \mid P=\frac{۳}{۴}) + P(X_{۱}+X_{۲}=۱ \mid P=\frac{۳}{۴})$$

$$= \binom{۲}{۰}(\frac{۳}{۴})^{۰}(\frac{۱}{۴})^{۲} + \binom{۲}{۱}(\frac{۳}{۴})(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۱۶}+\frac{۶}{۱۶}=\frac{۷}{۱۶} \quad \Rightarrow \quad (\alpha,\beta)=(\frac{۱}{۱۶},\frac{۷}{۱۶})$$

۳۷ـ گزینه «۴» با توجه به تعریف خطای نوع اول:

$$\sum X_i \sim Bin(۵,p) \qquad \begin{cases} H_{۰}: P=\frac{۱}{۲} \\ H_{۱}: P\neq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\alpha = P(H_{۰} \text{ رد} \mid H_{۰} \text{ درست}) = P(\sum X_i=۰ \mid P=\frac{۱}{۲}) + P(\sum X_i=۱ \mid P=\frac{۱}{۲})$$

$$+P(\sum X_i=۴ \mid P=\frac{۱}{۲}) + P(\sum X_i=۵ \mid P=\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^{۵}+۵(\frac{۱}{۲})^{۵}+۵(\frac{۱}{۲})^{۵}+(\frac{۱}{۲})^{۵}=\frac{۱۲}{۳۲}=\frac{۳}{۸}$$

۳۸ـ گزینه «۲» $\sum X_i^{۲} \sim \chi^{۲}_{(۲۵)}$ تحت فرض صفر $\sigma^{۲}=۱$ می‌باشد.

$$\frac{\sum_{i=۱}^{۲۵} X_i^{۲}}{\sigma^{۲}} \sim \chi^{۲}_{(۲۵)}$$

۳۹ـ گزینه «۲» آماره آزمون مناسب برای تساوی واریانس‌ها برابر است با:

$$H_{۰}: \sigma_{۱}^{۲}=\sigma_{۲}^{۲} \equiv \frac{\sigma_{۱}^{۲}}{\sigma_{۲}^{۲}}=۱ \quad ; \quad H_{۱}: \sigma_{۱}^{۲}\neq\sigma_{۲}^{۲} \equiv \frac{\sigma_{۱}^{۲}}{\sigma_{۲}^{۲}}\neq ۱$$

تحت فرض صفر نسبت دو واریانس برابر یک است.

$$F = \frac{(\frac{(n_{۱}-۱)S_{۱}^{۲}}{\sigma_{۱}^{۲}})/n_{۱}-۱}{(\frac{(n_{۲}-۱)S_{۲}^{۲}}{\sigma_{۲}^{۲}})/n_{۲}-۱} = \frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} = \frac{۴/۵}{۵} = ۲/۲۵$$

۴۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

تیمار	Y_{ij}				$Y_{i.}$	$Y_{i.}^{۲}$
۱	۴	۵	۷	۴	۲۰	۴۰۰
۲	۸	۴	۳	۱	۱۶	۲۵۶
۳	۷	۸	۲	۷	۲۴	۵۷۶
					$Y_{..}=۶۰$	۱۲۳۲

$$\begin{cases} H_{۰}: \mu_{۱}=\mu_{۲}=\mu_{۳} \\ H_{۱}: \exists i,j \quad \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

$$SS_{\text{تیمار}} = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{Y_{i.}^{۲}}{۴} - \frac{Y_{..}^{۲}}{۱۲} = ۸$$

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۴} Y_{ij}^{۲} = ۶۲$$

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{تیمار}} = ۵۴$$

جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F
تیمار	۸	۲	۴	$\frac{۲}{۳}$
خطا	۵۴	۹	۶	
کل	۶۲	۱۱		

آماره آزمون برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۴۱ـ گزینه «۲» X: تعداد مهره‌ی سفید در دو مهره انتخاب شده. اگر $X=۲$، فرض $H_{۰}$ رد می‌شود بنابراین:

$$\alpha = P(\text{رد شود } H_{۰} \text{ فرض} \mid H_{۰} \text{ درست باشد}) = P(X=۲ \mid m=۳) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۳}{۱۵} = \frac{۱}{۵}$$

۴۲ـ گزینه «۲» طبق تعریف خطای نوع دوم خواهیم داشت:

$$\beta = P(H_۰ \quad | \quad H_۱) = P(۱ \le X \le ۳ \,|\, P = ۰/۵)$$

$$= \sum_{x=۱}^{۳} b(x; ۴, ۰/۵) = \binom{۴}{۱}(\frac{۱}{۲})^۴ + \binom{۴}{۲}(\frac{۱}{۲})^۴ + \binom{۴}{۳}(\frac{۱}{۲})^۴ = \frac{۱}{۱۶}(۴+۶+۴) = \frac{۷}{۸}$$

۴۳ـ گزینه «۳» میانگین ادغام شده برابر است با:

$$\text{میانگین کل} = \frac{n_۱\bar{X}_۱ + n_۲\bar{X}_۲ + n_۳\bar{X}_۳ + n_۴\bar{X}_۴}{n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴}$$

$$\text{میانگین کل} = \frac{۵\times۱/۲ + ۶\times۱/۵ + ۸\times۱/۲۵ + ۳\times۱}{۵+۶+۸+۳} = \frac{۲۸}{۲۲} = \frac{۱۴}{۱۱}$$

۴۴ـ گزینه «۳» احتمال پی بردن به این‌که θ مساوی $\frac{۱}{۲}$ نیست اگر $\theta = \frac{۱}{۴}$ باشد یعنی، احتمال رد $H_۰$ به شرط این‌که $\theta = \frac{۱}{۴}$ باشد یعنی:

$$P(H_۰ | H_۱) = P(x > ۲ | \theta = \frac{۱}{۴}) = P(x \ge ۳ | \theta = \frac{۱}{۴}) = \sum_{x=۳}^{\infty} \frac{۱}{۴}(\frac{۳}{۴})^x = \frac{۱}{۴}\sum_{x=۳}^{\infty}(\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{(\frac{۳}{۴})^۳}{۱-\frac{۳}{۴}} = \frac{۲۷}{۶۴}$$

۴۵ـ گزینه «۳» طبق تعریف $P-\text{Value}$ ابتدا احتمال‌های کمتر و بیشتر را به دست می‌آوریم:

$$P(x < ۸/۲۵ | \mu_۰ = ۸/۵) = P(Z < \frac{-۰/۲۵}{۰/۵۱۳}) = P(Z < -۱/۵) = ۰/۰۶۶۸$$

$$P(x > ۸/۷۵ | \mu_۰ = ۸/۵) = P(Z > \frac{۰/۲۵}{۰/۵۱۳}) = P(Z > ۱/۵) = ۰/۰۶۶۸$$

$$P-\text{Value} = ۲ \times ۰/۰۶۶۸ = ۰/۱۳۳۶$$

۴۶ـ گزینه «۳» ناحیه رد $H_۰$ جایی است که آماره آزمون از نقطه بحرانی بیشتر شود (به جهت $H_۱$ توجه کنید)

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ \le \mu_۲ \\ H_۱ : \mu_۱ > \mu_۲ \end{cases} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - ۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{۳۲}{۱۶} + \frac{۳۲}{۱۶}}} > ۱/۹۶ \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} > ۳/۹۲$$

۴۷ـ گزینه «۴» سطح معنی‌داری به مفهوم مقدار α است.

$$P(\bar{x} > \mu_۰ + ۱) = P(\frac{\bar{X} - \mu_۰}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{۱}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z > \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}) = P(Z > ۲) = ۰/۰۲۲۸$$

۴۸ـ گزینه «۲» برای محاسبه آماره آزمون به ترتیب MStr و MSE را محاسبه کرده سپس مقادیر را در رابطه $F = \frac{MStr}{MSE}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$; \quad SS_T = \sum\sum x_{ij}^۲ - \frac{۱}{kn}T_{۰۰}^۲ \; ; \; SS_{tr} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} T_{i.}^۲ - \frac{۱}{kn}T_{۰۰}^۲ \quad MS_{tr} = \frac{ss_{tr}}{k-۱} = \frac{۲۰۰۰}{۲} = ۱۰۰۰ \; ; \; MSE = \frac{SSE}{k(n-۱)} = \frac{۲۷۰۰}{۲۷} = ۱۰۰$$

$$\bar{x}_۱ = ۴۰ \Rightarrow ۴۰ = \frac{۱}{۱۰}\sum x_{۱j} \Rightarrow T_{۱۰} = ۴۰۰$$

$$; \quad \bar{x}_۲ = ۵۰ \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{۱۰}\sum x_{۲j} \Rightarrow T_{۲۰} = ۵۰۰ \Rightarrow T_{۰۰} = ۱۵۰۰ \quad \bar{x}_۳ = ۶۰ \Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۱۰}\sum x_{۳j} \Rightarrow T_{۳۰} = ۶۰۰$$

$$SS_{tr} = \frac{۱}{۱۰}\left((۴۰۰)^۲ + (۵۰۰)^۲ + (۶۰۰)^۲\right) - \frac{(۱۵۰۰)^۲}{۳۰} = ۲۰۰۰$$

$$S_۱^۲ = \frac{۱}{۱۰-۱}\left(\sum x_۱^۲ j - \frac{۱}{n}(\sum x_۱ j)^۲\right) \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۱}{۹}\left(\sum x_۱^۲ j - \frac{(۴۰۰)^۲}{۱۰}\right) \Rightarrow \sum x_{۱j}^۲ = ۱۶۹۰۰۰ \; , \; \sum x_{۲j}^۲ = ۲۶۳۵۰ \; , \; \sum x_{۳j}^۲ = ۳۶۴۵۰$$

$$; \quad \Rightarrow SS_T = ۷۹۷۰۰ - \frac{(۱۵۰۰)^۲}{۳۰} = ۴۷۰۰ \Rightarrow SSE = SS_T - SS_{tr} = ۲۷۰۰ \quad F = \frac{MS_{tr}}{MSE} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰} = ۱۰$$

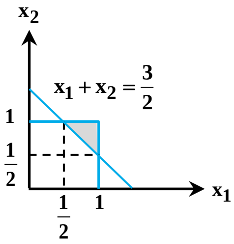
۴۹ـ گزینه «۱» میانگین کل را به صورت روبه‌رو بدست می‌آوریم:

$$\bar{X}_{\circ\circ}=\frac{۱}{nk}\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}=\frac{۱}{۳}(۱/۲۵+۱/۵+۱/۳)=\frac{۴}{۳}$$

۵۰ـ گزینه «۲» احتمال خطای نوع اول برابر است با احتمال رد فرض $H_\circ$ در صورتی‌که این فرض درست باشد. یعنی تحت $H_\circ$ آماره‌ی آزمـون در ناحیـه بحرانی قرار بگیرد.

$$\alpha=P(\text{رد شود}\ H_\circ\ \text{فرض} \mid \text{درست باشد}\ H_\circ)=P(X_۱+X_۲>\frac{۳}{۲}\mid\theta=۱)$$

تحت فرض $H_\circ$، $X_۱,X_۲$ دارای توزیع $U(\circ,۱)$ هستند و چون مستقل از هم‌اند تابع احتمال توأم آنها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$f_{X_۱,X_۲}(x_۱,x_۲)=f_{X_۱}(x_۱)f_{X_۲}(x_۲)=۱\quad \circ<x_۱<۱,\ \ \circ<x_۲<۱$$

$$P(X_۱+X_۲>\frac{۳}{۲}\mid\theta=۱)=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\int_{\frac{۳}{۲}-x_۲}^{۱}dx_۱dx_۲=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}(۱-(\frac{۳}{۲}-x_۲))dx_۲$$

$$=\frac{-۱}{۲}x_۲+\frac{۱}{۲}x_۲^۲\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}=(\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{۲})-(\frac{-۱}{۴}+\frac{۱}{۸})=\frac{۱}{۸}$$

۵۱ـ گزینه «۲» آماره‌ی آزمون فرض در مورد میانگین جامعه‌ای با توزیع نرمال زمانی که واریانس جامعه معلوم باشد به صورت $Z=\frac{\bar{X}-\mu_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ است، کـه دارای توزیع نرمال استاندارد است. $\mu_\circ$ مقدار میانگین تحت فرض $H_\circ$ است.

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{۲/۱-۲}{\frac{\circ/۳}{\sqrt{۳۶}}}=\frac{۶\times\circ/۱}{\circ/۳}=۲$$

۵۲ـ گزینه «۲» طبق تعریف خطای نوع اول و دوم خواهیم داشت:

$$\alpha=P(H_\circ\ \text{رد}\mid H_\circ\ \text{درست})=\circ/\circ۵\circ۵=P(\bar{x}>k\mid\mu=\circ/۳۶)$$

$$\xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}}P(Z>k-\circ/۳۶)=\circ/\circ۵\circ۵\Rightarrow k-\circ/۳۶=۱/۶۴\Rightarrow k=۲/\circ\circ۵$$

$$\beta=P(\bar{X}<۲/\circ\circ۵\mid\mu=۳)\xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}}P(Z<-۱)\sim \%۱۵$$

۵۳ـ گزینه «۳» طبق لم نیمن پیرسون به راحتی خواهیم داشت:

$$\frac{L(\theta_۱)}{L(\theta_\circ)}>k\Rightarrow\frac{\prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x_i^۲}{۸}}}{\prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(x_i-\bar{x})^۲}{۸}}}<\ \Rightarrow e^{\frac{-۲\sum x_i\bar{X}+\sum\bar{X}^۲}{۸}}<k\Rightarrow-\bar{X}^۲<k'\Rightarrow|\bar{X}|>C$$

۵۴ـ گزینه «۳» از رابطه میانگین توأم استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}=\frac{n_۱\bar{x}_۱+n_۲\bar{x}_۲+n_۳\bar{x}_۳}{n_۱+n_۲+n_۳}=۱۱$$

۵۵ـ گزینه «۴» طبق رابطه مجموع مربعات خطا خواهیم داشت:

$$SSE=\sum(n_i-۱)S_i^۲=۲\times۴+۳\times۴+۲\times۳=۲۶$$

۵۶ـ گزینه «۲» مجموع مربعات رفتارها از فرمول مورد نظرش محاسبه می‌کنیم:

$$SS_{tr}=n\sum_{i=۱}^{k}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^۲=۳\times[(۱۲-۱۱)^۲+۴(۱۱-۱۱)^۲+(۱\circ-۱۱)^۲]=۳\times۲=۶$$

۵۷ـ گزینه «۱» به ترتیب مجموع مربعات خطا و مجموع مربعات رفتارها را در فرمول قرار می‌دهیم:

$$\bar{x}_۱=۱۲\Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۳}\sum x_{۱j}\Rightarrow T_{۱۰}=۳۶$$

$$\bar{x}_۳=۱۰\Rightarrow ۱۰=\frac{۱}{۳}\sum x_{۳j}\Rightarrow T_{۳۰}=۳۰ \quad , \quad \bar{x}_۲=۱۱\Rightarrow ۱۱=\frac{۱}{۴}\sum x_{۲j}\Rightarrow T_{۲۰}=۴۴\Rightarrow SSE=\frac{۱}{n}\sum T_{i.}^۲-\frac{۱}{nk}T_{..}^۲$$

$$F=\frac{MS_{tr}}{MSE}=\frac{\frac{SS_{tr}}{df_{tr}}}{\frac{SSE}{df_e}}=۱/۱۵ \quad , \quad SSE=\frac{۱}{۳}((۳۶)^۲+(۳۳)^۲+(۳۰)^۲)=(۹۹)^۲$$

۵۸ـ گزینه «۴» X : تعداد کالای سالم در نمونه ۴۰۰ تایی

$$P(X>a\,|\,P=۰/۸)=۰/۰۲۵\Rightarrow P(X<a\,|\,P=۰/۸)=۰/۹۷۵$$

استاندارد می‌کنیم $\Rightarrow P(Z<\frac{a-۳۲۰}{۸})=۲\Rightarrow \frac{a-۳۲۰}{۸}=۲\Rightarrow a\geq ۳۳۶$

$$\mu=np=۴۰۰\times\frac{۸۰}{۱۰۰}=۳۲۰ \;;\; \sigma^۲=npq=۴۰۰\times\frac{۸۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=۶۴\Rightarrow\sigma=\sqrt{۶۴}=۸$$

۵۹ـ گزینه «۳» با توجه به این که مسأله از جنس آنالیز واریانس است باید مقدار F را بدست آوریم:

$$F=\frac{MS_{tr}}{MSE}$$

$$SSE=\sum(n_i-۱)S_i^۲=۳\times(۱۸۰+۲۲۰+۲۰۰)=۳\times۶۰۰=۱۸۰۰$$

بنابراین مقادیر SSE و SS_{tr} را بدست می‌آوریم:

$$\bar{X}_{\circ\circ}=\frac{۱}{k}\sum_{j=۱}^{k}\bar{X}_j=\frac{۱}{۳}(۱۱۰+۱۰۰+۱۲۰)=۱۱۰ \quad ; \quad MSE=\frac{SSE}{K(n-۱)}=\frac{۳\times۶۰۰=۱۸۰۰}{۳\times۳}=۲۰۰$$

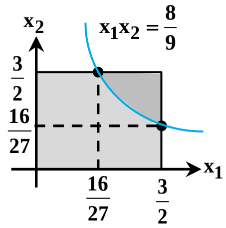
$$SST=n[\sum_{j=۱}^{k}\bar{X}_j^۲-K\bar{X}_{\circ\circ}^۲]=۴[(۱۱۰)^۲+(۱۰۰)^۲+(۱۲۰)^۲-۳\times(۱۱۰)^۲]=۸۰۰$$

$$MST=\frac{SST}{K-۱}=\frac{۸۰۰}{K-۱=۲}=۴۰۰$$

آماره آزمون $F(k-۱,(n-۱)k)\overset{H_۰}{\sim}$ $F=\frac{MST}{MSE}$ می‌باشد، بنابراین:

$$F=\frac{۴۰۰}{۲۰۰}=۲ \quad , \quad \begin{cases} df_{tr}=k-۱=۳-۱=۲ \\ df_e=k(n-۱)=۳(۴-۱)=۳\times۳=۹ \end{cases}$$

۶۰ـ گزینه «۳» طبق تعریف خطای نوع دوم:



$$\beta=P(\text{در } H_۰ \mid \text{درست } H_۱)$$

$$=P(x_۱x_۲<\frac{۸}{۹}\,|\,\theta=\frac{۳}{۲})=P_{\theta=\frac{۳}{۲}}(x_۱x_۲<\frac{۸}{۹})=۱-P(x_۱x_۲>\frac{۸}{۹})$$

برای محاسبه این احتمال، باید روی فاصله خواسته شده از تابع چگالی توأم $(X_۱,X_۲)$ انتگرال‌گیری کنیم:

$$f(x_۱,x_۲)=f(x_۱)f(x_۲)=\frac{۱}{\theta^۲} \quad , \quad ۰<x_۱<\theta \;,\; ۰<x_۲<\theta$$

$$f(x_۱,x_۲)=\frac{۴}{۹} \quad , \quad ۰<x_۱<\frac{۳}{۲} \;,\; ۰<x_۲<\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow P(x_۱x_۲>\frac{۸}{۹})=\int_{\frac{۱۶}{۲۷}}^{\frac{۳}{۲}}\int_{\frac{۸}{۹x_۲}}^{\frac{۳}{۲}}f(x_۱x_۲)dx_۱dx_۲=\int_{\frac{۱۶}{۲۷}}^{\frac{۳}{۲}}(\frac{۴}{۹})(\frac{۳}{۲}-\frac{۸}{۹x_۲})dx_۲$$

$$=\frac{۴}{۹}[\frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}-\frac{۱۶}{۲۷})-\frac{۴}{۹}.\frac{۸}{۹}\int_{\frac{۱۶}{۲۷}}^{\frac{۳}{۲}}\frac{۱}{x_۲}dx_۲]=\frac{۴}{۹}[\frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}-\frac{۱۶}{۲۷})-\frac{۴}{۹}.\frac{۸}{۹}(\ln(\frac{۳}{۲})-\ln(\frac{۱۶}{۲۷}))]$$

$$=\frac{۴}{۹}[\frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}-\frac{۱۶}{۲۷})-\frac{۳۲}{۸۱}((n(۳)-(n(۲))-۴(n(۲)+۳(n(۳))]=\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴۹}{۵۴}-\frac{۴}{۹}\times\frac{۳۲}{۸۱}\underbrace{[۴\times ۱/۱-۵\times ۰/۷]}_{۰/۹}$$

$$=\frac{۱۲\times ۴۹}{۱۸\times ۵۴}-\frac{۱۲۸}{۸۱۰}=۰/۴۴۷\approx ۰/۴$$

۶۱ـ گزینه «۳» X: تعداد شیرها در ۵ پرتاب سکه، بنابراین $X\sim B(۵,\theta)$ $\qquad x=۰,۱,\cdots,۵$

$$\alpha=P\ (\text{رد شود}\ H_۰\ |\ \text{فرض}\ H_۰\ \text{درست است})=P(X\le ۱\ \text{یا}\ X\ge ۴|\theta=\frac{۱}{۲})$$

$X\le ۱$ و $X\ge ۴$ پیشامدهای ناسازگارند، لذا مقدار احتمال فوق برابر است با:

$$P(X\le ۱|\theta=\frac{۱}{۲})+P(X\ge ۴|\theta=\frac{۱}{۲})=P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۴)+P(X=۵)=\binom{۵}{۰}(\frac{۱}{۲})^۵+\binom{۵}{۱}(\frac{۱}{۲})^۵+\binom{۵}{۴}(\frac{۱}{۲})^۵+\binom{۵}{۵}(\frac{۱}{۲})^۵$$

$$=(\frac{۱}{۲})^۵(۱+۵+۵+۱)=\frac{۱۲}{۲^۵}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$$

۶۲ـ گزینه «۲» توجه کنید که ابتدا توزیع‌های آماره‌های مرتبط را به دست می‌آوریم:

$$X_۱\sim N(\theta_۱,\sigma^۲)\Rightarrow Z=\frac{X_۱-\theta_۱}{\sigma}\sim N(۰,۱)\Rightarrow(\frac{X_۱-\theta_۱}{\sigma})^۲\sim\chi^۲_{(۱)}$$

$$X_۲\sim N(\theta_۲,\sigma^۲)\Rightarrow Z=\frac{X_۲-\theta_۲}{\sigma}\sim N(۰,۱)\Rightarrow(\frac{X_۲-\theta_۲}{\sigma})^۲\sim\chi^۲_{(۱)}$$

طبق تعریف خطای نوع اول: $\alpha=P\ (\text{رد}\ H_۰\ |\ \text{درست باشد}\ H_۰)=P(X_۱^۲+X_۲^۲\ge C\,|\,\theta_۱=\theta_۲=۰)$

بنابراین $X_i^۲\sim\chi^۲_{(۱)}$ می‌باشد.

$$=P((\frac{x_۱-۰}{\sigma})^۲+(\frac{x_۲-۰}{\sigma})^۲\ge\frac{C}{\sigma^۲})=P(\chi^۲_{(۱)}+\chi^۲_{(۱)}\ge\frac{C}{\sigma^۲})=P(y\sim\chi^۲_{(۲)}\ge\frac{C}{\sigma^۲})$$

$$\Rightarrow P(y\ge\frac{C}{\sigma^۲})=\alpha=۰/۰۵\Rightarrow P(y\ge\frac{C}{\sigma^۲})=۰/۰۵\Rightarrow\frac{C}{\sigma^۲}=\chi^۲_{۲,۰/۰۵}=۷/۳۷۸\Rightarrow C=۷/۳۷۸\sigma^۲$$

۶۳ـ گزینه «۴» با توجه به آماره آزمون مناسب برای آنالیز واریانس یک‌طرفه خواهیم داشت:

$$F=\frac{SS_{tr}}{\frac{SSE}{K(n-۱)}}\Rightarrow ۴=\frac{SS_{tr}}{\frac{۱۶۴}{۸}}\Rightarrow SS_{tr}=۳۲۸\quad\text{و}\quad K(n-۱)=۸\Rightarrow ۵(n-۱)=۸\Rightarrow ۵n=N=۱۳$$

توجه کنید که تعداد کل واحدهای آزمایشی در اینجا $5n$ می‌باشد.

۶۴ـ گزینه «۴» مقادیر مورد نیاز برای محاسبه آماره F را به ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$SSE=\sum(n_i-۱)S_i^۲=۲\times۱+۱\times۱+۳\times۱=۶$$

$$df_e=N-K=۹-۳=۶$$

$$SS_{tr}=\sum n_i\,(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..})^۲=۳(۱-۱)^۲+۲(۲-۱)^۲+۴(۰/۵-۱)^۲=۳$$

$$df_{tr}=K-۱=۳-۱=۲$$

$$\bar{X}_{..}=\frac{۳\times۱+۲\times۲+۴\times۰/۵}{۳+۲+۴}=۱$$

$$\Rightarrow F=\frac{SS_{tr}/df_{tr}}{SSE/df_e}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۶}{۶}}=۱/۵$$

۶۵ـ گزینه «۱» در سطح ۰/۳۵ رد می‌شود. با توجه به این که $P-Value<\alpha$ می‌باشد.

$$P-Value=۰/۳۲۵۶<۰/۳۵$$

$$\begin{cases}P-Value>\alpha & \text{پذیرفته می‌شود}\ H_۰\\ P-Value<\alpha & \text{رد می‌شود}\ H_۰\end{cases}$$

۶۶ـ گزینه «۱» می‌توانیم از رابطه حجم نمونه به صورت زیر کمک بگیریم:

$$\alpha=0/025 \quad , \quad 1-\beta=0/975 \Rightarrow \beta=0/025 \Rightarrow Z_\alpha=Z_\beta=2$$

$$n=\frac{\sigma^2(Z_\alpha+Z_\beta)^2}{(\mu_1-\mu_0)^2} \Rightarrow n=\frac{16\times 1000}{(120-100)^2}=40$$

۶۷ـ گزینه «۲» طبق رابطه نیمن پیرسون ناحیه بحرانی و نقطه بحرانی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha=p(X\le c\,|\,\lambda=1)=\int_0^c e^{-x}\,dx=\alpha \Rightarrow -e^{-x}\Big|_0^c=\alpha \Rightarrow -e^{-c}+1=\alpha \Rightarrow e^{-c}=1-\alpha \Rightarrow c=\mathrm{Ln}(1-\alpha)^{-1}$$

اکنون طبق تعریف خطای نوع دوم خواهیم داشت:

$$\beta=p(X>c\,|\,\lambda=2)=p(X>\mathrm{Ln}(1-\alpha)^{-1}\,|\,\lambda=2)=\int_{\mathrm{Ln}(1-\alpha)^{-1}}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx=-e^{\frac{x}{2}}\Big|_{\mathrm{Ln}(1-\alpha)^{-1}}^{\infty}=0+e^{\frac{\mathrm{Ln}(1-\alpha)^{-1}}{2}}=(1-\alpha)^2$$

۶۸ـ گزینه «۱» تحت فرض H_0: $X\sim B(5,\frac{1}{4})$ بنابراین:

$$P_0(X=x)=\binom{5}{x}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{5-x} \quad x=0,1,\cdots,5$$

تحت فرض H_1: $X\sim B(5,\frac{3}{4})$ بنابراین:

$$P_1(X=x)=\binom{5}{x}(\frac{3}{4})^x(\frac{1}{4})^{5-x} \quad x=0,1,\cdots,5$$

$$\alpha=P(\text{رد شود } H_0 \,|\, \text{درست باشد } H_0)=P_0(X\ge 2)=1-P_0(X\le 1)=1-[(\frac{3}{4})^5+\binom{5}{1}\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^4]=1-[(\frac{3}{4})^4(\frac{3}{4}+\frac{5}{4})]=1-2(\frac{3}{4})^4$$

$$\beta=P(\text{قبول شود } H_0 \,|\, \text{درست باشد } H_1)=P_1(X<2)=P_1(X\le 1)=(\frac{1}{4})^5+\binom{5}{1}(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^4=(\frac{1}{4})^5(1+15)=\frac{16}{4^5}=\frac{1}{4^3}$$

بنابراین:

$$(\alpha,\beta)=(1-2(\frac{3}{4})^4,(\frac{1}{4})^3)$$

۶۹ـ گزینه «۲» اگر $X\sim G(p)$ آنگاه $E(X)=\frac{1}{p}$ لذا فرض H_1 معادل است با این که $X\sim G(\frac{1}{2})$

$$H_0: X\sim B(3,\frac{1}{2}) \quad VS \quad H_1: X\sim G(p)$$

$$\text{مجموع دو خطا } \frac{7}{8}=\alpha+\beta=\underbrace{P(\text{رد شود } H_0\,|\,\text{درست باشد } H_0)}_{\alpha \text{ تعریف}}+\underbrace{P(\text{قبول شود } H_0\,|\,\text{درست باشد } H_1)}_{\beta \text{ تعریف}}$$

$$=P(X\ge c\,|\,X\sim B(3,\frac{1}{2}))+P(X<c\,|\,X\sim G(\frac{1}{2}))$$

اگر $X\sim G(\frac{1}{2})$ آنگاه:

$$P(X<c)=1-P(X\ge c)=1-\sum_{x=c}^{\infty}(\frac{1}{2})^x=1-\frac{(\frac{1}{2})^c}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^{c-1}$$

بنابراین اگر $c=0$ آنگاه $\beta=1-(\frac{1}{2})^{-1}=-1$ که غیرقابل قبول است.

اگر $c=1$ آنگاه $\beta=1-(\frac{1}{2})^0=0$ و $\alpha=P(X\ge 1)=1-P(X\le 0)=1-(\frac{1}{2})^3=\frac{7}{8}$ در نتیجه ناحیه بحرانی به صورت $x\ge 1$ است.

۷۰ـ گزینه «۱» برای آزمون $H_0:\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_4$ فرض کنید از جامعه iام، n_i نمونه داشته باشیم آماره آزمون به صورت زیر است:

$$F=\frac{\frac{SST_r}{k-1}}{\frac{SSE}{\sum n_i-k}}=\frac{MST_r}{MSE}\sim F(k-1,\sum n_i-k)$$

و ناحیه رد آن به صورت $F>F(k-1,\sum n_i-k)$ است. در این سؤال $k=3$ پس آماره آزمون دارای توزیع $F(2,\sum_{i=1}^{3}n_i-3)$ است.

۷۱ـ گزینه «۴» در آزمون $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ جدول آنالیز واریانس به صورت زیر است:

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات
تیمار	SST_r	$k-1$	$MST_r = \frac{SST_r}{k-1}$
خطا	SSE	$\sum_{i=1}^{k} n_i - k$	$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$
کل	SST	$\sum_{i=1}^{k} n_i - 1$	

لذا در این سؤال $k = 4$, $\sum_{i=1}^{4} n_i = 2+5+6+4 = 17$ پس درجه آزادی SSE برابر است با $\sum n_i - k = 17 - 4 = 13$

۷۲ـ گزینه «۲» در جدول سؤال قبل MSE را تعریف کردیم و $SSE = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2$ پس:

$$SSE = \sum_{i=1}^{4}(n_i - 1)S_i^2 = (2-1)(2/3)^2 + (5-1)(1/1)^2 + (6-1)(1/5)^2 + (4-1)(1/2)^2 = 25/7$$

بنابراین:

$$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k} = \frac{25/7}{13} \simeq 1/976$$

اگر انحراف معیار D را به جای ۱/۲ ، یک قرار دهیم گزینه ۲ صحیح است.

۷۳ـ گزینه «۴» در دو سؤال قبل جدول آنالیز واریانس را شرح داده‌ایم و همچنین توجه کنید که:

$$\left.\begin{array}{l} SST_r = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_{.i} - \bar{x}_{..})^2 \\ \bar{x}_{..} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_{.i} = \frac{1}{3}(40+50+60) = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow SST_r = 10\sum_{i=1}^{3}(\bar{x}_{.i} - 50)^2 = 10[(40-50)^2 + (50-50)^2 + (60-50)^2] = 2000$$

طبق جدول آنالیز واریانس $MST_r = \frac{SST_r}{k-1} = \frac{2000}{2} = 1000$ و طبق سؤال قبل داریم:

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2 = 9\sum_{i=1}^{3}S_i^2 = 9[100+150+50] = 2700 \ , \ MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k} = \frac{2700}{27} = 100$$

آماره آزمون عبارت است از :

$$F = \frac{MST_r}{MSE} = \frac{1000}{100} = 10$$

۷۴ـ گزینه «۱» چون سه گروه تیمار داریم پس $k = 3$ لذا، درجه آزادی بین گروه‌ها (تیمارها) $k - 1 = 3 - 1 = 2$ می‌باشد در نتیجه درجه آزادی خطا $11 - 2 = 9$ می‌باشد. حال توجه کنید که برآورد واریانس σ^2 عبارت است از $MSE = \frac{SSE}{df}$ که می‌شود $MSE = \frac{36}{9} = 4$. بنابراین برآورد انحراف معیار برابر است با $\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{4} = 2$

۷۵ـ گزینه «۴» ادعای تولیدکننده را فرض H_0 قرار می‌دهیم پس می‌خواهیم $H_0 : \mu > 400$ را در مقابل $H_1 : \mu < 400$ آزمون کنیم. فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر $t < -1/8$ و آماره آزمون عبارت است از $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. در این سؤال $n = 16 , S = 40 , \mu = 600 , \bar{X} = 580$ بنابراین :

$$T = \frac{580 - 600}{40}\sqrt{16} = -2 \xrightarrow{\text{چون } T \text{ خارج از ناحیه بحرانی است}} \text{دلیلی برای رد } H_0 \text{ نداریم} \Rightarrow \mu \geq 600 \text{ را می‌پذیریم}$$

۷۶ـ گزینه «۲» آماره آزمون برای فرض $H_۰ : P=P_۰$ به صورت $x^۲=\frac{\hat{P}-P_۰}{\sqrt{\frac{P_۰q_۰}{n}}}$ است. در این سؤال $P_۰=\frac{۱}{۳}$ پس آماره آزمون عبارت است از:

$$\frac{\hat{P}-\frac{۱}{۳}}{\sqrt{\frac{۱}{n}\frac{۱}{۳}\frac{۲}{۳}}}=\frac{۳\sqrt{n}(\hat{P}-\frac{۱}{۳})}{\sqrt{۲}}=\frac{۳۰(\hat{P}-\frac{۱}{۳})}{\sqrt{۲}}\Rightarrow ۳\sqrt{n}=۳۰\Rightarrow n=۱۰۰$$

۷۷ـ گزینه «۱» می‌دانیم $X_i\sim N(\mu,۱)$ بنابراین $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{۱}{۴})$ زیرا $E(\bar{X})=E(x_i)=\mu$ و $var(\bar{X})=\frac{۱}{n}var(X_i)=\frac{۱}{۴}$ سطح معناداری آزمون داده شده عبارت است از:

$$\alpha=P(H_۰\ \text{رد فرض}\,|\,H_۰\ \text{درستی فرض})=P(\bar{X}>\mu_۰+۱\,|\,\mu=\mu_۰)=P(Z>\frac{\mu_۰+۱-\mu_۰}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=P(Z>۲)=۱-\varphi(۲)=۱-۰/۹۷۷۲=۰/۰۲۲۸$$

۷۸ـ گزینه «۳» **نکته:** اگر $X_i\sim P(\theta)$ آنگاه $\sum_{i=۱}^{n}X_i\sim P(n\theta)$. حال می‌خواهیم توان آزمون را به دست آوریم.

$$\pi(\theta)=۱-\beta=۱-P(H_۱\ \text{رد فرض}\,|\,H_۱\ \text{درستی فرض})=۱-P(\sum x_i>۱\,|\,\hat{\theta}=\theta)=P(\sum x_i\le ۱\,|\,\hat{\theta}=\theta)$$

$$=P(\sum X_i=۰\,|\,\theta)+P(\sum X_i=۱\,|\,\theta)=e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^{۰}}{۰!}+e^{-n\theta}\frac{(n\theta)'}{۱!}=e^{-n\theta}(۱+n\theta)$$

۷۹ـ گزینه «». فرض $H_۰$ رد می‌شود

اگر $P-value<\alpha$ و $P-value=P(\text{مشاهده مجدد مشاهده اولیه یا موارد بدتر از آن برای}\ H_۰\,|\,\text{درستی}\ H_۰)$

$$P-value=P(\bar{X}<۴۰۵۰\,|\,\mu\ge ۴۵۰۰)=P(Z<\frac{۴۰۵۰-۴۵۰۰}{S}\sqrt{۲۵})$$

۸۰ـ گزینه «۱» ابتدا تابع چگالی $Y=X_۱+X_۲$ را بدست می‌آوریم. تابع چگالی Y به صورت $f(y)=\int_I f(y-x_۲,x_۲)dx_۲$ به دست می‌آید و I بازه مربوط به $X_۲$ است. برای به دست آوردن تابع توزیع ابتدا باید بازه I را نسبت به $X_۲$ به دست آوریم.

می‌دانیم که $X_۱=Y=X_۲\sim u(۰,\theta)$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۰<Y-x_۲<\theta\Rightarrow y-\theta<x_۲<y \\ X_۲\sim u(۰,\theta)\Rightarrow ۰<x_۲<\theta \quad \text{اگر} \end{array}\right\}\Rightarrow \max(۰,y-\theta)<x_۲<\min(y,\theta)$$

حال باید نسبت به y تعیین علامت کنیم:

$$\text{اگر}\ y\ge\theta\Rightarrow y-\theta<X_۲<\theta \ , \qquad y<\theta\Rightarrow ۰<x_۲<y$$

حال در هر بازه تابع چگالی را به دست می‌آوریم:

$$\text{اگر}\ y\ge\theta\Rightarrow f(y)=\int_{y-\theta}^{\theta}f(y-x_۲,x_۲)dx_۲=\int_{y-\theta}^{\theta}\frac{۱}{\theta^۲}dx_۲=\frac{۲\theta-y}{\theta^۲}$$

$$\text{اگر}\ y<\theta\Rightarrow f(y)=\int_{۰}^{y}f(y-x_۲,x_۲)dx_۲=\int_{۰}^{y}\frac{۱}{\theta^۲}dx_۲=\frac{y}{\theta^۲}$$

پس تابع چگالی y به صورت $f(y)=\begin{cases}\frac{۲\theta-y}{\theta^۲} & y\ge\theta\\ \frac{y}{\theta^۲} & y<\theta\end{cases}$ و تحت فرض $H_۱$ تابع چگالی به صورت $f(y)=\begin{cases}۱-\frac{y}{۴} & y\ge ۲\\ \frac{y}{۴} & y<۲\end{cases}$ است. حال خطای نوع دوم را به دست می‌آوریم:

$$\beta=P(H_۱\ \text{رد فرض}\,|\,H_۱\ \text{درستی فرض})=P(Y<۱\,|\,\theta=۲)=\int_{۰}^{۱}\frac{y}{۴}dy=\frac{۱}{۸}y^۲\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۸}$$

۸۱ـ گزینه «۳» جدول آنالیز واریانس خطی خلاصه‌ای از اطلاعات مسأله آماری است که با آن روبه‌رو هستیم . فرم کلی جدول آنـالیز واریـانس بـرای یـک مدل رگرسیون خطی چند گانه با k متغیر مستقل به صورت زیر می‌باشد.

این جدول آزمون $H_0: B=0$ را در مقابل $H_1: B \neq 0$ آزمون می‌کند.

منبع تغییرات	df	SS	MS	F
رگرسیون	k	SSR	MSR	$\frac{MSR}{MSE}$
خطا	$n-k-1$	SSE	MSE	
مجموع	$n-1$	SS_y		

۸۲ـ گزینه «۲» آنالیز و واریانس یک طرفه در حقیقت مقایسه بین میانگین‌های چند جامعـه مـی‌باشـد ، یعنـی بررسـی ایـن مطلـب اسـت کـه آیـا بـین میانگین‌های جامعه‌های مورد نظر تفاوتی وجود دارد یا نه ؟

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	F
تیمارها	$K-1$	SST	$MST=\frac{SST}{k-1}$	$F_0=\frac{MST}{MSE}$
خطا	N-k	SSE	$MSE=\frac{SSE}{n-k}$	
مجموع	$N-1$	SST	$MST=\frac{SST}{N-1}$	

روش محاسبه SSt , SST , SSE , F_0 به صورت زیر می‌باشد:

$$1)x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \quad 2)x_{..}=\sum_{i=1}^{k}x_i \quad 3)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^2 \quad 4)\sum_{i=1}^{k}x_i^2 \quad 5)SSE=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i.}^2}{n}-\frac{x_{..}^2}{n}$$

$$6)SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^2-\frac{x_{..}^2}{N} \quad 7)SSE=SST-SSt \quad 8)F_0=\frac{N-1}{K-1} \;,\; \frac{sst}{SSE}$$

در این سؤال باید مقدار F_0 را محاسبه نماییم.

$$N=16 \;,\; k=4 \quad \sum_{i=1}^{4}x_i=32 \;,\; SSt=4\times((5-8)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2)=56$$

$$MSE=\frac{SSE}{N-k}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2}{N-k}=4/667 \qquad , \qquad F_0=4$$

۸۳ـ گزینه «۴» جدول آنالیز واریانس یک طرفه در سوال ۴۷ آمده است.

$$a=k-1 \;,\; b=N-k \quad , \quad MSt=1/833=\frac{5/5}{k-1}\Rightarrow k-1=\frac{5/5}{1/833}=3$$

$$C=\frac{2/2}{N-k} \quad , \quad 10=\frac{1/8333}{c}\Rightarrow C=0/18333 \;\Rightarrow b=12$$

۸۴ـ گزینه «۳» در جدول آنالیز واریانس MSE ناریب واریانس مشاهدات می‌باشد. با توجه به سوال ۴۷ داریم:

$$F=4/96=\frac{MS_t}{MSE}=\frac{\frac{16/5}{1}}{MSE}\Rightarrow MSE=\frac{16/5}{4/96}=3/3266=3/33$$

۸۵ـ گزینه «۲» به منظور به دست آوردن SSt باید $\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2$ را محاسبه نماییم ، از طرفی با توجه به سؤال ۴۷ داریم:

$$\bar{x}_{..}=\frac{\sum_i \bar{X}_{1 0}}{4}=13/8 \quad , \quad SSt=5\times((14/2-13/8)^2+(12/2-13/8)^2+(117/3-13/8)^2+(11/5-13/8)^2)=101/3$$

۸۶ـ گزینه «۱» با توجه به توضیحات صورت مسأله خواهیم داشت:

$$SST = SSt + SSE \quad , \quad F_{۰} = \frac{MSt}{MSE} = \frac{\frac{SSt}{k-۱}}{\frac{SSE}{N-k}}$$

در این سؤال:

$$sst = ۶/۴ \quad , \quad SST = ۶۸/۹ \quad \Rightarrow SSE = ۷۸/۹ - ۶/۴ = ۶۲/۵$$

۸۷ـ گزینه «۳» با توجه به این که آزمون یک طرفه است بنابراین ناحیه بحرانی آن به صورت زیر است

$$k = ۵ , n = ۶ \Rightarrow N = nk = ۳۰ \quad , \quad F = \frac{\frac{۶/۴}{۴}}{\frac{۶۲/۵}{۳۰-۵}} = \frac{۱/۶}{۲/۵} = ۰/۶۴$$

$$\frac{(\bar X - \bar Y) - ۰}{\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x} + \frac{\sigma_y^۲}{n_y}}} > Z_{۰/۰۵} \Leftrightarrow \bar X - \bar Y > ۱/۶۴۵\sqrt{\frac{۳۲}{۱۶} + \frac{۳۲}{۱۶}} \Leftrightarrow \bar X - \bar Y > ۳/۲۹$$

۸۸ـ گزینه «۲» به طور کلی برای آزمون $\sigma^۲$ چند حالت داریم:

نوع آزمون	شرایط کاربرد	آماره آزمون	شرط عدم رد $H_۰$
$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ \neq \sigma_۰^۲ \end{cases}$	$\sigma_۰^۲$ معلوم	$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲} = \sum_i \frac{(x_i - \bar x)^۲}{\sigma_۰^۲}$	$\chi_۰^۲ \in [\chi^۲_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})} , \lambda^۲_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}]$
$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ \geq \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ < \sigma_۰^۲ \end{cases}$	$\sigma_۰^۲$ معلوم	$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲} = \sum_i \frac{(x_i - \bar x)^۲}{\sigma_۰^۲}$	$\chi_۰^۲ \in [\chi^۲_{(n-۱,۱-\alpha)} , +\infty]$
$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ \leq \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ > \sigma_۰^۲ \end{cases}$	$\sigma_۰^۲$ معلوم	$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲} = \sum_i \frac{(x_i - \bar x)^۲}{\sigma_۰^۲}$	$\chi_۰^۲ \in (۰ , \chi^۲_{(n-۱,\alpha)})$ و ناحیه بحرانی $\chi^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۲}(x_i - \bar x)}{۱}$

در این سؤال داریم: $\begin{cases} H_۰ : \sigma \geq ۱ \\ H_۱ : \sigma < ۱ \end{cases}$ ، آماره آزمون برابر است با: $\chi^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۲}(x_i - \bar x)}{۱}$ و ناحیه بحرانی $[۰ , \chi^۲_{(n-۱,۱-\alpha)}] = [۰ , ۰/۷]$

۸۹ـ گزینه «۱» برای آزمون میانگین جامعه چند حالت داریم:

نوع آزمون	شرایط کاربرد	آماره آزمون	شرط عدم رد $H_۰$
$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \neq \mu_۰ \end{cases}$	$\sigma^۲$ معلوم $\mu_۰$ معلوم	$z_۰ = \frac{\bar x - \mu_۰}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}$	$z_۰ \in (-z_{\frac{\alpha}{۲}} , z_{\frac{\alpha}{۲}})$
$\begin{cases} H_۰ : \mu_d \leq d_۰ \\ H_۱ : \mu_d > d_۰ \end{cases}$	$\sigma^۲$ معلوم $\mu_۰$ معلوم	$z_۰ = \frac{\bar x - \mu_۰}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}$	$z_۰ \in (-z_{\alpha} , +\infty)$
$\begin{cases} H_۰ : \mu_d \geq d_۰ \\ H_۱ : \mu_d < d_۰ \end{cases}$	$\sigma^۲$ معلوم $\mu_۰$ معلوم	$z_۰ = \frac{\bar x - \mu_۰}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}$	$z_۰ \in (-\infty , z_{\alpha})$

در این سؤال طبق داده‌های صورت مسأله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۵ \\ H_۱ : \mu = ۵ \end{cases} \quad , \quad z_۰ = \frac{\bar X - \mu_۰}{\sigma\sqrt n} \quad , \quad \text{ناحیه رد } H_۰ = \bar X > C$$

$$\alpha = P_{H_۰}(\bar X > c) \quad , \quad \beta = P_{H_۱}(\bar X > c) \quad , \quad \text{توان آزمون} = \beta^* = ۱ - \beta$$

$$\beta = P_{H_1}(\bar{X} \le c) = P\left(Z \le \frac{C-\mu_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \le \frac{C-\mu}{\frac{۵}{\sqrt{n}}}\right) \xrightarrow[\pi(۵),\pi(۱۰)]{\text{با توجه به}}$$

$$۱)\begin{cases} \pi(۵) = ۰/۰۵ = ۱ - p\left(Z \le \frac{c-۵}{\frac{۵}{\sqrt{n}}}\right) = ۱ - p\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{۵}(c-۵)\right) \\ \Rightarrow z_{۰/۹۵} = \frac{\sqrt{n}}{۵}(c-۵) \end{cases} ;\ ۲)\begin{cases} \pi(۱۰) = ۰/۹۹۹ = ۱ - p\left(Z \le \frac{c-۱۰}{\frac{۵}{\sqrt{n}}}\right) = ۱ - p\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{۵}(c-۱۰)\right) \Rightarrow \\ Z_{۰/۰۰۱} = \frac{\sqrt{n}}{۵}(c=۱۰) \end{cases}$$

از ۱ و ۲ داریم :

$$\begin{cases} ۵z_{۰/۹۵} = \sqrt{n}(c-۵) \\ ۵z_{۰/۰۰۱} = \sqrt{n}(c-۱۰) \end{cases} \Rightarrow \frac{c-۵}{c-۱۰} = \frac{۵z_{۰/۹۵}}{۵z_{۰/۰۰۱}} \Rightarrow \frac{c-۵}{c-۱۰} = \frac{z_{۰/۹۵}}{z_{۰/۰۰۱}} \Rightarrow c = ۱۰ \begin{cases} c = ۶/۷۱ \\ n = ۲۳ \end{cases}$$

۹۰ـ گزینه «۲» در این سؤال چون هدف بررسی میزان تاثیر دارو است از آزمون زوجی استفاده می‌کنیم بنابراین داریم:

نوع آزمون	شرایط کاربرد	آماره آزمون	شرط عدم رد $H_\circ$
$\begin{cases} H_\circ : \mu_d = d_\circ \\ H_1 : \mu_d \ne d_\circ \end{cases}$	مشاهدات زوجی y,x مستقل نیستند $\mu_d = \mu_1 - \mu_۲$ $\sigma_\circ^۲$ معلوم	$t_\circ = \frac{\bar{D}-d_\circ}{\frac{s_\circ}{\sqrt{n}}}$	$t_\circ \in (-t_{(n-1,\frac{\alpha}{۲})}, t_{(n-1,\frac{\alpha}{۲})})$
$\begin{cases} H_\circ : \mu_d \le d_\circ \\ H_1 : \mu_d > d_\circ \end{cases}$	مشاهدات زوجی y,x مستقل نیستند $\mu_d = \mu_1 - \mu_۲$ $\sigma_\circ^۲$ معلوم	$t_\circ = \frac{\bar{D}-d_\circ}{\frac{s_\circ}{\sqrt{n}}}$	$t_\circ \in (-t_{(n-1,\alpha)}, +\infty)$
$\begin{cases} H_\circ : \mu_d \ge d_\circ \\ H_1 : \mu_d < d_\circ \end{cases}$	مشاهدات زوجی y,x مستقل نیستند $\mu_d = \mu_1 - \mu_۲$ $\sigma_\circ^۲$ معلوم	$t_\circ = \frac{\bar{D}-d_\circ}{\frac{s_\circ}{\sqrt{n}}}$	$t_\circ \in (-\infty, t_{(n-1,\alpha)})$

با توجه به اطلاعات داده شده امکان استفاده از آزمون زوجی را نداریم .

۹۱ـ گزینه «۱» طبق رابطه مجموع مربعات بین گروه‌ها داریم:

$$T_{1\circ} = ۳۰, T_{۲\circ} = ۳۹, T_{۳\circ} = ۲۷, T_{۴\circ} = ۳۶$$

$$SS_{tr} = \frac{1}{n}\sum T_{i.}^۲ - \frac{T_{\circ\circ}^۲}{nk} = \frac{1}{۳}[(۳۰)^۲ + (۳۹)^۲ + (۲۷)^۲ + (۳۶)^۲] - \frac{(۱۳۲)}{۳\times۴} = ۳۰$$

۹۲ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه مجموع مربعات خطا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{T}_{1\circ} = ۱۰ \\ \bar{T}_{۲\circ} = ۱۳ \\ \bar{T}_{۳\circ} = ۹ \\ \bar{T}_{۴\circ} = ۱۲ \end{cases}$$

$$SSE = \sum\sum(T_{ij} - \bar{T}_{i\circ})^۲ = (۱۳-۱۰)^۲ + (۸-۱۰)^۲ + (۹-۱۰)^۲ + (۱۵-۱۳)^۲ + (۱۱-۱۳)^۲ + (۱۳-۱۳)^۲$$
$$+(۸-۹)^۲ + (۱۲-۹)^۲ + (۷-۹)^۲ + (۱۱-۱۲)^۲ + (۱۵-۱۲)^۲ + (۱۰-۱۲)^۲$$
$$= ۹+۴+۱+۴+۴+۱+۹+۴+۱+۹+۴ = ۵۰$$

۹۳ـ گزینه «۲» اطلاعات مسأله مربوط به آنالیز واریانس یک عاملی است و با توجه به این‌که حجم نمونه در طبقات با هم برابر نیست، مجموع مربعات خطا (SSE) از رابطه روبرو قابل محاسبه است.

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^۲$$

با توجه به اطلاعات مسأله چون انحراف معیار نمونه‌ای (S_i) در دسترس است فرمول محاسبه‌ی SSE را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i) = (n_i - 1)S_i^2$$

بنابراین:

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2$$

در نتیجه:

$$SSE = (n_1 - 1)S_1^2 + (n_1 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2 = 4(1/5)^2 + 10(1)^2 + 15(2)^2 = 79$$

۹۴ـ گزینه «۲»

احتمال خطای نوع دوم که آن را با β نمایش می‌دهند، به صورت مقابل محاسبه می‌شود.
$\beta = P(H_0 \text{ پذیرش فرض} | \text{درست باشد } H_1)$

H_0 رد می‌شود اگر $x \geq 3$ و ناحیه پذیرش متمم ناحیه رد است یعنی $x < 3$.

و اگر H_1 درست باشد $p \neq 0/5$ خواهد بود که با توجه به مقادیر داده شده می‌تواند $0/2$ یا $0/3$ باشد.

$$\beta = P(X < 3 | P = p) = \underset{\text{اولین پرتاب شیر بیاید}}{p} + \underbrace{(1-p)p}_{\text{اولین پرتاب شیر نیاید و دومین پرتاب شیر بیاید}} = 2p - p^2$$

بنابراین بین $0/36$ و $0/51$ کمترین مقدار $0/36$ است.

$$\text{if} \quad p = 0/2 \quad \Rightarrow \beta = 0/36 \quad \text{if} \quad p = 0/3 \quad \Rightarrow \beta = 0/51$$

۹۵ـ گزینه «۴» با توجه به این که حجم نمونه‌ها کوچک و واریانس‌های دو جامعه نامعلوم هستند، خواهیم داشت:

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} . S_p\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} = \sqrt{\frac{12(64) + 11(76/4)}{23}} = 8/36 \; ; \; t_0 = \frac{45/15 - 42/25}{8/36\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{12}}} = 0/84$$

روش تستی:

$$n_x = n_y \to t_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2 + S_y^2}{n}}} \simeq \frac{45/15 - 42/52}{\sqrt{\frac{76/4 + 64}{12/5}}} = 0/84$$

۹۶ـ گزینه «۱» ناحیه پذیرش به صورت مقابل می‌باشد:

$$P(\bar{X} > 3 | \mu = \mu^\circ) = 0/95 \Rightarrow p\left(\frac{\bar{x} - \mu'}{\frac{2}{\sqrt{16}}} > \frac{3 - \mu'}{\frac{2}{\sqrt{16}}}\right) = 0/95 \to P(Z < \frac{3 - \mu'}{\frac{1}{2}}) = 0/95 \to 2(3 - \mu') = -1/645 \to \mu' = 3/8225$$

اگر ناحیه پذیرش را برای آماره در نظر بگیریم نه برای $\bar{X}$ آنگاه به جواب $4/3225$ می‌رسیم که در گزینه‌ها نیست.

۹۷ـ گزینه «۲» طبق تعریف خطای نوع اول خواهیم داشت:

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} | \text{درست } H_0) = P(x_1^2 + x_2^2 \geq c | \theta_1 = \theta_2 = 0)$$

$$= P(X_1 - 0)^2 + (X_2 - 0)^2 \geq c | \theta_1 = \theta_2 = 0) = p\left(\frac{(X_1 - 0)^2 + (X_2 - 0)^2}{\sigma^2} \geq \frac{c}{\sigma^2} | \theta_1 = \theta_2 = 0\right)$$

$$= P\left((\frac{X_1 - 0}{\sigma}) + (\frac{X_2 - 0}{\sigma})^2 \geq \frac{c}{\sigma^2}\right) = p\left(\chi_{(2)}^2 \geq \frac{c}{\sigma^2}) = \chi_{\alpha,2}^2 = \frac{c}{\sigma^2}\right) \to C = \sigma^2\chi_{\alpha,2}^2$$

۹۸ـ گزینه «۴» مقادیر MS_{tr} و MSE را بدست می‌آوریم:

$$SSE=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2=(4-1)180+3(220)+3(200)=1800$$

$$d.f(E)=\Sigma n_i-k=9\to MS_E=\frac{1800}{9}=200\to \bar{X}_{..}=\frac{110+100+120}{3}=110$$

$$SS_{Tr}=\Sigma n_i(\bar{X}_{.}-\bar{X}_{..})^2=4\left[(110-110)^2+(110-120)^2\right]=8$$

$$d.f(Tr)=k-1=2\to MS_{Tr}=\frac{800}{2}=400\to F=\frac{MS_{Tr}}{MS_E}=\frac{400}{200}=2\ ,\ F_{k-1,\Sigma n_i-k}=F_{2,9}$$

۹۹ـ گزینه «۱» مقدار $F=\dfrac{\frac{SS_{tr}}{df_{tr}}}{\frac{SSE}{df_E}}$ را بدست می‌آوریم:

$$SSE=\Sigma(n_i-1)S_1^2=(5-1)(2/5+2/5+2/5+2/5)=40$$

$$d.f(E)=K(n-1)=4(5-1)=16\to MS_E=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$$

$$\bar{y}_{..}=\frac{\bar{y}_{10}+\bar{y}_{10}+1+\bar{y}_{10}+2+\bar{y}_{10}+3}{4}=\frac{4\bar{y}_{10}+6}{4}=\bar{y}_{10}+\frac{3}{2}$$

$$SS_{Tr}=\Sigma n_i(\bar{y}_{10}-\bar{y}_{..})=5\left[\bar{y}_{10}-\bar{y}_{10}-\frac{3}{2}+(\bar{y}_{10}+2-\bar{y}_{10}-\frac{3}{2})^2+(\bar{y}_{10}+3-\bar{y}_{10}-\frac{3}{2})^2\right]=5(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4})=25$$

$$d.f(Tr)=k-1=3\to MS_{Tr}=\frac{25}{3}\to F=\frac{MS_{Tr}}{MS_E}=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{10}{3}=3/33$$

۱۰۰ـ گزینه «۲» درجه آزادی به صورت روبرو است: $\text{درجه آزادی}=k-1=4-1=3$

۱۰۱ـ گزینه «۲» خطای نوع اول رد به ناحق H_0 است.

$$0/05=\alpha=P(\bar{x}>c\,|\,\mu=25)=P(z\ge\frac{c-25}{5}\sqrt{n})=1-\phi(\frac{c-25}{5}\sqrt{n})\Rightarrow\frac{c-25}{5}\sqrt{n}=1/64$$

توان آزمون رد به حق فرض H_0 است.

$$0/95=\pi=P(\bar{x}>c\,|\,\mu=27)=P(z>\frac{c-27}{5}\sqrt{n})=1-\phi(\frac{c-27}{5}\sqrt{n})\Rightarrow\frac{c-27}{5}\sqrt{n}=-1/64$$

از حل دو معادله فوق به $c=26$ و $n=67/24\Rightarrow n\simeq 68$ می‌رسیم.

۱۰۲ـ گزینه «۴» خطای نوع اول را بدست می‌آوریم با توجه به اینکه $x=1,2,\dots$ و $f(x)=pq^{x-1}$

$$\alpha=P(H_0\ \text{رد}\ |H_0\ \text{درستی})=P(x\ge 3\,|\,p=0/7)=\sum_{x=3}^{\infty}(0/7)(0/3)^{x-1}=0/7\frac{(0/3)^2}{1-(0/3)}=0/09$$

۱۰۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. سؤال داده شده آنالیز واریانس یکطرفه است. $\bar{x}_i$ میانگین گروه iام و S_i^2 واریانس گروه iام است، بنابراین:

$$\bar{x}_1=\frac{4+7+3+4+7}{5}=5\quad,\quad \bar{x}_2=4\qquad \bar{x}_3=6$$

$$S_i^2=\frac{1}{4}\sum_{j=1}(x_i-\bar{x}_i)^2\Rightarrow S_1^2=\frac{14}{4}\ ,\ S_2^2=\frac{18}{4}\ ,\ S_3^2=\frac{20}{4}$$

اما میانگین کل برابر است با:

$$\bar{x}_{..}=\frac{1}{k}\sum\bar{x}_i=\frac{1}{3}(5+4+6)=5$$

$$SSE=\sum_i (n_i-1)S_i^2=4(\frac{14}{4}+\frac{8}{4}+\frac{20}{4})=42$$

به نظر می‌رسد طراح سؤال مقدار MSE را می‌خواسته و نه مقدار SSE :

$$MSE=\frac{SSE}{k(n-1)}=\frac{42}{3(5-1)}=\frac{42}{12}$$

۱۰۴ـ گزینه «۲» از آماره آزمون مناسب فیشر استفاده می‌کنیم:

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{145}{50}=2/9$$

۱۰۵ـ گزینه «۳» سطح معنی‌دار بودن همان α می‌باشد که طبق تعریف خطای نوع اول خواهیم داشت:

$$\alpha=P(H_0 \text{ رد } \mid H_0 \text{ درست باشد})=P(\bar{X}\geq 20/5 \text{ یا } \bar{X}\leq 19/5 \mid \mu=20)$$

$$=P(\bar{X}\geq 20/5\mid\mu=20)+P(\bar{X}\leq 19/5\mid\mu=20)$$

$$=P(Z\geq\frac{20/5-20}{\frac{5}{\sqrt{400}}})+P(Z\leq\frac{19/5-20}{\frac{5}{\sqrt{400}}})=P(Z\geq 2)+P(Z\leq -2)$$

$$=0/025+0/025=0/05$$

۱۰۶ـ گزینه «۲» مقایسه k نسبت دارای آماره‌ای با توزیع کای دو می‌باشد که همان آزمون نیکویی برازش است.

$$(X\sim\chi^2_{K-1=8-1=7})$$

۱۰۷ـ گزینه «۲» اگر α بیشتر شود β کمتر می‌شود و $1-\beta$ بیشتر می‌شود و همچنین با افزایش حجم نمونه هم‌زمان α و β کاهش و $1-\beta$ افزایش می‌یابد. در گزینه (۱) $\alpha=0/05$ و $n=30$ در گزینه (۲) مقدار α افزایش یافته است پس توان بیشتر می‌شود در گزینه (۳) مقدار n کاهش یافته پس توان کاهش می‌یابد.

۱۰۸ـ گزینه «۳» برآورد واریانس کل جامعه همان مقدار MSE است:

$$n_1=n_2=6 \qquad S_1^2=S_2^2$$

$$\hat{\sigma}^2=MSE=\frac{SSE}{N-K}=\frac{\sum(n_i-1)s_i^2}{N-K}$$

$$=\frac{5\times S_1^2+5\times S_2^2}{12-2=10}=\frac{5(S_1^2+S_2^2)}{10}$$

۱۰۹ـ گزینه «۱» به‌ازای درجه آزادی بزرگ نقطه بحرانی برای این آزمون که یک طرفه است به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\chi^2=\frac{1}{2}(Z\alpha+\sqrt{2Z-1})^2=\frac{1}{2}(1/96+\sqrt{119})^2$$

از طرفی دقت کنید آزمون یک دنباله به راست است بنابراین ناحیه بحرانی به‌صورت روبرو است:

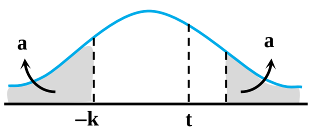
$$(\frac{1}{2}(1/96+\sqrt{119})^2,\infty)$$

۱۱۰ـ گزینه «۴» تحلیل واریانس برای مقایسه بیش از دو جامعه است زمانی که ما یک جامعه‌ی کنترل داریم از آزمون‌های z و t استفاده می‌کنیم. در این جا به نظر می‌رسد که می‌خواهیم هر جامعه را با گروه کنترل مقایسه کنیم البته اگر مقایسه سه جامعه مورد نظر باشد از تحلیل واریانس استفاده می‌شود.

۱۱۱ـ گزینه «۴» گزینه‌های (۱) و (۲) بسیار خطاهای بزرگی هستند که امکان‌پذیر نیست. گزینه (۳) نیز به این دلیل غلط است که β نمی‌تواند از α کوچکتر باشد.

۱۱۲ـ گزینه «۴» اگر به رابطه فاصله اطمینان و آزمون فرض در کتاب دقت کنید گفته شد که اگر فاصله اطمینان عدد صفر را در برگیرد $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ تأیید می‌شود و اگر عدد ۱ را در برگیرد $H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$ تأیید می‌شود. توجه کنید که در این تست H_1 رد دست کم یکی از دو تساوی است. اکنون در این جا فرض صفر را رد کرده‌ایم یعنی فاصله اطمینان‌های ما صفر و یا ۱ را داشته است. در همه گزینه‌ها حداقل یا صفر یا ۱ وجود دارد بنابراین تنها گزینه (۴) است که هر دو را همزمان دارد که نیازی به داشتن هر دو نیست.

۱۱۳ـ گزینه «۱» اگر به شکل مقابل دقت کنید دقیقاً مفهوم همان مفهوم $P - Value$ می‌باشد، از طرفی ناحیه رد H_0 سمت راست و ناحیه پذیرش سمت چپ است و برای رد H_0 باید $\alpha = P - Value \le \alpha' = \phi(-k)$



توجه: $\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست باشد}) = P(\bar{x} > K) = P(Z > K) = P(Z < -K) = \phi(-K)$

۱۱۴ـ گزینه «۲» توان آزمون با α رابطه مستقیم دارد.

۱۱۵ـ گزینه «۳»

تعریف توان آزمون $= P(H_0 \text{ رد} \mid H_1 \text{ درست باشد}) = P(\text{مشاهده حداقل دو مهره سیاه} \mid n = 4)$

$$\underset{\text{دقت کنید}}{\underline{\underline{\text{به کلمه حداقل}}}} \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{40 + 10}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{50}{84}$$

فصل نهم

«رگرسیون و همبستگی»

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

۱ـ اگر داشته باشیم $b = 0/897$ و $\sum_{i=1}^{12} x_i = 720$ و $\sum_{i=1}^{12} y_i = 1011$ معادله خط برگشت کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = 60 + 0/897x$
۲) $y = 1011 + 0/897x$
۳) $y = 30/43 + 0/897x$
۴) $y = 365/16 + 0/897x$

۲ـ برای تشخیص ارتباط بین متغیرهای X و Y نمونه‌ای به حجم $n = 10$ انتخاب کرده و نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

$$\sum X_i = 50 \; ; \; \sum X_i^2 = 300 \; ; \; \sum Y_i = 40 \; ; \; \sum Y_i^2 = 230 \; ; \; \sum X_i Y_i = 180 \; ;$$

مقدار ضریب همبستگی یعنی R^2 با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $0/114$
۲) $0/16$
۳) $0/338$
۴) $-0/338$

۳ـ در یک الگوی رگرسیون خطی ساده $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ اگر $n = 22$ و ضریب تعیین یا تشخیص $R^2 = 0/2$ و $t_{0/975}(20) = 2/101$ باشد، در سطح معنی‌دار بودن $0/05$ کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) فرضیه $\alpha = 0$ را در مقابل $\alpha \neq 0$ رد می‌کنیم.
۲) فرضیه $\beta = 0$ را در مقابل $\beta \neq 0$ رد می‌کنیم.
۳) فرضیه $\rho = 0$ را در مقابل $\rho \neq 0$ رد می‌کنیم.
۴) مقدار درجه آزادی t برابر بیست و یک است.

۴ـ در یک آنالیز واریانس یک طرفه معمولاً دو مدل بیان می‌شود که فرمول آن‌ها عبارت است از:

الف) $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$
ب) $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$

کدام مدل ترجیح دارد و دلیل آن چیست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) مدل الف: زیرا قرار است $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k$ آزمون شود.
۲) مدل ب: زیرا در این حالت می‌توان مشاهدات را برحسب اثر ثابت نوشت.
۳) مدل الف: زیرا پس از انجام آنالیز واریانس می‌توان معنی‌دار بودن آن را با μ_iها کنترل کرد.
۴) مدل ب: زیرا با بیرون کشیدن مقدار میانگین مشترک μ، می‌توان آزمون $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ را به صورت $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ نوشت.

۵ـ اگر بخواهیم یک مدل رگرسیون خطی برای یک متغیر وابسته و تعدادی متغیر مستقل بنا کنیم و ندانیم که واقعاً متغیرهای مستقل تا چه حد با یکدیگر وابستگی دارند. از چه روشی می‌توان استفاده کرد؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) کمترین مربعات
۲) Stepwise (پله‌ای)
۳) رگرسیون خطی ساده
۴) نرمال نمودن (Normalize)

۶ـ برای برازاندن خط رگرسیون $y = \beta_0 + \beta_1 x$ اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\sum x_i = 144 \; , \; \sum y_i = 2197/32 \; , \; \sum x_i^2 = 3264$$
$$\sum y_i^2 = 589887/08 \; , \; \sum x_i y_i = 28167/72 \; , \; n = 9$$

مقادیر $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ بر اساس روش حداقل مربعات کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (-7/281 \, , \, 360/64)$
۲) $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (360/64 \, , \, -72/281)$
۳) $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (360/64 \, , \, -7/281)$
۴) $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (72/81 \, , \, 360/64)$

۷ـ داده‌های زیر را در نظر بگیرید. اگر $x^* = \frac{x}{10}$ و $y^* = 10y$ را تعریف کنیم و r و r^* به ترتیب نمایانگر ضریب همبستگی (x, y)ها و (x^*, y^*)ها باشند کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

x	-4	-4	-3	3	4	4
y	$0/5$	$-0/6$	$-0/5$	$0/5$	$0/5$	$-0/6$

۱) $r^* = r$
۲) $r^* r = 1$
۳) $r^* = 10r$
۴) $r^* = \frac{1}{10} r$

۸ـ در یک جدول ANOVA مربوط به برازاندن یک خط رگرسیون به دسته‌ای از مشاهدات که به صورت $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ می‌باشند، (y متغیر وابسته و x متغیر مستقل) سطری که با عنوان فقدان برازش (Lack of fit) بوده است در سطح معنی‌دار $a=۰/۰۵$ دارای مقدار F بزرگی شده است. نتیجه‌ای که می‌گیرید با کدام عبارت بهتر بیان می‌شود؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) برازاندن یک خط به این داده‌ها مناسب است.

۲) برازاندن یک منحنی درجه‌ی ۲ به این داده‌ها باید مناسب باشد.

۳) برازاندن یک منحنی درجه‌ی ۳ به این داده‌ها باید مناسب باشد.

۴) برازاندن یک خط بر این داده‌ها ناکافی است و باید منحنی‌های درجهٔ بالاتر را برای برازاندن آزمایش کرد.

۹ـ به منظور برآوردکردن مدل رگرسیون خطی $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$ ده زوج داده‌ی $(Y_1,X_1),\dots,(Y_{۱۰},X_{۱۰})$ را گرد آوردیم و معلوم شده که $\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i=۱۰$, $S_{xx}=\sum_{i=۱}^{۱۰}(X_i-\bar{X})^۲=۴۲$, $\sum_{i=۱}^{۱۰}Y_i=۹۰$ است و خط $\hat{Y}$ از نقطه‌ای با طول ۹ و عرض ۹ می‌گذرد. در این صورت کدام نتیجه‌گیری صحیح نیست؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $S_{yy}=\sum_{i=۱}^{۱۰}(Y_i-\bar{Y})=۰$

۲) فرض $H_۰:\beta=۰$ پذیرفته می‌شود.

۳) فرض $H_۰:\alpha=۰$ پذیرفته می‌شود.

۴) Y_i ها $(i=۱,\dots,۱۰)$ مساوی هستند.

۱۰ـ در مدل رگرسیونی $y_i=\beta X_i+\varepsilon_i$ با فرض آنکه ε_i ها دارای توزیع گاما با $\alpha=۱=\beta$ باشند برآوردکننده روش حداقل مربعات β کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $e^{-n\bar{x}-n\bar{y}}$

۲) $\dfrac{\sum X_iY_i}{\sum X_i^۲}$

۳) $\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}+\bar{Y}}$

۴) $\dfrac{\sum X_i}{\sum Y_i}$

۱۱ـ اگر $\bar{x}=۱۰$, $\bar{y}=۲۰$, $s_x=۱/۵$, $s_y=۲$, $r=۰/۶$ معادله‌ی خط رگرسیون Y نسبت به X (یعنی X متغیر مستقل باشد) کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $Y=۰/۷+۱۳X$

۲) $Y=۱۳+۰/۷X$

۳) $Y=۰/۷X$

۴) $Y=۱۳X$

۱۲ـ مدل رگرسیون $Y=\alpha+\beta X$ را در نظر بگیرید و تصور کنید داده‌های $(Y_1,-۲)$, $(Y_۲,-۱)$ ، $(Y_۳,x_۳)$, $(Y_۴,+۱)$, $(Y_۵,+۲)$ را گردآوری و خطای قابل اندازه‌گیری را به ازای $i=۱,۲,۳,۴,۵$ به صورت $e_i=Y_i-\hat{Y}_i$ تعریف کرده‌ایم به طوری که $\hat{Y}$ معرف خط برآورد شده باشد. اگر $e_۱=+۰/۰۲۶$ ، $e_۲=-۰/۱۴$ ، $e_۴=۰/۱۸۸$ و $e_۵=-۰/۱۳۸$ باشد، $x_۳$ برابر خواهد بود با: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر

۲) هر مقدار بین ۱- و ۱

۳) مقداری مثبت و کمتر از ۱

۴) مقداری منفی و بیشتر از ۱-

۱۳ـ مدل رگرسیون $Y=\alpha+\beta X$ را در نظر بگیرید و تصور کنید داده‌های $(Y_۱,-۲)$ ، $(Y_۲,-۱)$ ، $(Y_۳,x_۳)$ ، $(Y_۴,+۱)$ ، $(Y_۵,+۲)$ را گردآوری و خطای قابل اندازه‌گیری را به ازای $i=۱,۲,۳,۴,۵$ به صورت $e_i=Y_i-\hat{Y}_i$ تعریف کرده‌ایم به طوری که $\hat{Y}$ معرف خط برآورده شده باشد. اگر $e_۱=+۰/۰۲۶$ ، $e_۲=-۰/۱۴$ ، $e_۴=۰/۱۸۸$ و $e_۵=-۰/۱۳۸$ باشد، $e_۳$ برابر خواهد بود با: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر

۲) $۰/۰۶۴$

۳) $-۰/۱۱۴$

۴) $۰/۰۵۰$

۱۴ـ در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i$ ، $i=۱,\dots,۲۵$ ، اگر $\sum_{۱}^{۲۵}X_i^۲=۱۲۵$ ، $\sum_{۱}^{۲۵}Y_i=۱۰۰$, $\sum_{۱}^{۲۵}X_i=۵۰$ و $\sum_{i=۱}^{۲۵}X_iY_i=۲۲۵$ ، مقدار $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۵)

۱) $(۰/۱,۲)$

۲) $(۰/۲,۱)$

۳) $(۱,۲)$

۴) $(۲,۱)$

۱۵ـ مناسب‌ترین فاصله اطمینان پیشگویی y برای مقدار معین $x_۰$ در رگرسیون خطی $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ وقتی حاصل می‌گردد که: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) تغییرات x زیاد و $x_۰$ به $\bar{x}$ نزدیک باشد.

۲) تغییرات x زیاد و $x_۰$ از $\bar{x}$ دور باشد.

۳) تغییرات x کم و $x_۰$ به $\bar{x}$ نزدیک باشد.

۴) تغییرات x کم و $x_۰$ به $\bar{x}$ دور باشد.

۱۶ـ اگر ضریب همبستگی نمونه‌ای بین دو صفت نرمال X و Y برابر با $r=0/8$ ، $S_y^2=900$ و $S_x^2=2500$، برآورد شیب رابطه خطی $Y=\alpha+\beta X+\alpha$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۱۷ـ در رابطه رگرسیونی $Y_i=\alpha+\beta X_i+\varepsilon_i\ (i=1,2,\dots,n)$ اگر $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ ، $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n$ ، $\sum_{1}^{n}y_i=3n$ ، $\sum_{1}^{n}y_i^2=10n$ و $\sum_{1}^{n}y_ix_i=2n$ برآورد $(\alpha-\beta)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱۰− ۲) ۷− ۳) ۲− ۴) ۱

۱۸ـ در مدل رگرسیون خطی $Y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$ ، اگر $x_1=1$ ، $x_2=-1$ ، $E(\varepsilon_i)=0$ ، $V(\varepsilon_i)=\sigma^2=COV(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$. برآورد حداقل مربعات β_1، یعنی $\hat{\beta}_1$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\overline{Y}$ ۲) $\frac{Y_1-Y_2}{2}$ ۳) $\frac{Y_2-Y_1}{2}$ ۴) $2(Y_2-Y_1)$

۱۹ـ در مساله ۱۸، برآورد حداقل مربعات β_0 یعنی $\hat{\beta}_0$، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰ ۲) $\overline{Y}$ ۳) Y_1+Y_2 ۴) Y_2-Y_1

۲۰ـ در مسأله ۲۱، مقدار مجموع مربعات خطا، یعنی SSE ، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰ ۲) $\frac{(Y_1-Y_2)^2}{2}$ ۳) $\frac{(Y_1+Y_2)^2}{4}$ ۴) $\frac{(Y_1-Y_2)^2}{4}$

۲۱ـ در مسأله ۲۲، مقدار r ، ضریب همبستگی نمونه‌ای کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱− ۲) ۰ ۳) ۱+ ۴) $\frac{Y_1-Y_2}{|Y_1-Y_2|}$

۲۲ـ بین متغیرهای تصادفی X و Y رابطه خطی $\hat{Y}=12/1-1/4x$ بر اساس $n=20$ نمونه تصادفی به دست آمده است. اگر برای $x=1$ ، مقدار واقعی Y برابر با ۱۰ باشد، گزینه صحیح برای ضریب همبستگی نمونه‌ای کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $r_{xy}=1$ ۲) $r_{xy}=-1$ ۳) $0<r_{xy}<1$ ۴) $-1<r_{xy}<0$

۲۳ـ در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ ، ضریب همبستگی بین مقادیر مشاهده شده Y و مقادیر پیش‌بینی بر اساس $\hat{y}=3+2x$ برابر با ۰/۳۶ است. مقدار ضریب همبستگی بین Y , x کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۷)

۱) $r_{xy}=0/36$ ۲) $0/36<r_{xy}<0/6$ ۳) $r_{xy}<0/36$ ۴) $r_{xy}>0/6$

۲۴ـ اگر برای متغیرهای تصادفی x ,y داشته باشیم $E(X)=2$, $E(Y)=1$, $var(X)=0/1$, $var(Y)=0/4$, $\rho(X,Y)=0/5$ و $E(Y|X)=\alpha+\beta x$ آنگاه α , β کدامند؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\alpha=2 , \beta=-0/5$ ۲) $\alpha=-1 , \beta=1$ ۳) $\alpha=1 , \beta=-1$ ۴) $\alpha=1 , \beta=1$

۲۵ـ برای تشخیص ارتباط بین y ,x نمونه‌ای به حجم $n=10$ انتخاب کرده و نتایج را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$\sum x_iy_i=180$, $\sum y_i^2=230$, $\sum y_i=40$, $\sum x_i=50$, $\sum x_i^2=300$ ، مقدار ضریب همبستگی r چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۰/۳۳۸ ۲) ۰/۲۸۵ ۳) ۰/۲۸۵− ۴) ۰/۳۳۸−

۲۶ـ اگر خط رگرسیون Y بر حسب X و خط رگرسیون X بر حسب Y به ترتیب $\hat{Y}=X+1 , \hat{X}=\frac{1}{2}Y-1$ برآورد شده باشند، ضریب همبستگی نمونه‌ای Y , X کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱

۲۷ـ در تحلیل رگرسیون خطی ساده به فرم $Y_i=\alpha+\beta X_i+\varepsilon_i$ در یک نمونه‌گیری به حجم n کمیت‌های زیر حاصل گردیده است:
$\sum XY=2n;\sum X^2=n\,;\sum Y^2=10n;\sum Y=3n$ مقدار $(\hat{\alpha}-\hat{\beta})$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) منهای یک ۲) یک ۳) پنج ۴) منهای پنج

۲۸ـ مدل $Y_i=BX_i+\varepsilon_i$ را با خط تصادفی $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$ در نظر بگیرید. برآورد σ^2 بر اساس نتایج زیر کدام است؟

$$\sum X_i=30\ ;\ \sum Y_i=13\ ;\ \sum X_iY_i=76\ ;\ \sum X_i^2=190\ ;\ n=13\ ;\sum Y_i^2=34$$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) چهاردهم ۲) $0/38$ ۳) سه دهم ۴) $0/33$

۲۹ـ اگر برای متغیر تصادفی X , Y داشته باشیم : $E(Y/X)=\alpha+\beta x, E(y)=1, E(x)=2$. آنگاه کدام رابطه بین α,β صحیح است؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $\alpha+2\beta=1$ ۲) $\alpha+\beta=1$ ۳) $\alpha+\beta=2$ ۴) رابطه خاصی وجود ندارد.

۳۰ـ بر اساس یک نمونه ۱۰ تایی از (x , y) اطلاعات زیر درست است.

$$s_{yy}=\sum_{i=1}^{10}(y_i-6)^2=16\ ;\ s_{xx}=\sum_{i=1}^{10}(x_i-4)^2=9\ ,\ r=-0/75$$ معادله رگرسیون خطی بین x , y کدام است ؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) $\hat{y}=4+x$ ۲) $\hat{y}=10-x$ ۳) $\hat{y}=6-x$ ۴) $\hat{y}=2+x$

۳۱ـ با توجه به جدول روبرو ضریب همبستگی نمونه‌ای x , y کدام است؟

x	-1	۰	۱	۲	۳
y	$0/5$	۱	$1/5$	۲	$2/5$

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) منهای یک ۲) نیم ۳) منهای نیم ۴) یک

۳۲ـ مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i=aX_i+\varepsilon_i$ ، $i=1,2,\dots,n$ را در نظر بگیرید. اگر E_i ها دارای توزیع یکسان با تابع چگالی احتمال $f(x)=e^{-(x-1)}$ ، $x\ge 1$ باشند. برآورد a به روش کمترین مربعات کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $\hat{a}=\dfrac{\sum X_iY_i}{\sum X_i^2}$ ۲) $\hat{a}=\dfrac{\sum X_iY_i}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$ ۳) $\hat{a}=\dfrac{\sum X_iY_i-n\overline{XY}}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$ ۴) $\hat{a}=\dfrac{\sum X_iY_i-n\overline{XY}}{\sum X_i^2}$

۳۳ـ اگر خط رگرسیون y بر حسب x و خط رگرسیون x بر حسب y به ترتیب $\hat{y}=x+1, \hat{x}=\frac{1}{2}y-1$ برآورد شده باشند، ضریب همبستگی نمونه‌ای بین y,x برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱

۳۴ـ فرض کنید در مدل رگرسیون به صورت $\hat{y}=3x+2$ داشته باشیم ، $(\bar{x},\bar{y})=(1,5)$, $r_{xy}=\sqrt{\frac{3}{4}}$. اگر مدل رگرسیون x بر حسب y را بنویسیم برآورد x یعنی $\hat{x}$ ، وقتی $y=1$ باشد، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۸)

۱) $-\dfrac{1}{4}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) ۱

۳۵ـ رابطه بین سن و نمره‌ی دانشجویان در یک نمونه ۸ تایی داده شده است. اگر ضریب همبستگی گشتاور ضربی پیرسون برابر $-0/975$ باشد و نمونه غیر عرفی (Outlier) حذف گردد، ضریب همبستگی جدید چقدر است؟

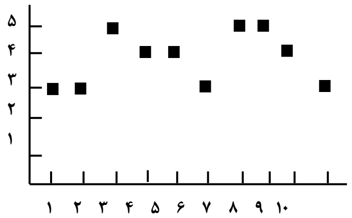
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)

x_i	۱۸	۱۹	۲۲	۴۷	۱۹	۲۳	۲۱	۲۰
y_i	۷۸	۸۲	۸۳	۴۱	۸۱	۷۹	۷۹	۸۰

۱) $0/125$ ۲) $0/133$ ۳) $0/247$ ۴) $0/228$

۳۶ـ نمودار پراکندگی زیر نشان‌دهنده‌ی ۱۰ نقطه مربوط به اعداد و فراوانی آن‌ها می‌باشد (به عنوان مثال برای نقطه ۸ مساوی است با (۵و۸) که در آن ۵ فراوانی عدد ۸ می‌باشد.) اگر شیب خط رگرسیون تقریباً ۰/۰۵۴۵ باشد با توجه به معادله رگرسیون فراوانی مربوط به عدد ۵ چقدر خواهد شد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۹)



۱) ۳/۹

۲) ۴

۳) ۴/۸

۴) ۴/۵

۳۷ـ فرض کنید که اطلاعات زیر در مورد Y و X موجود است. اگر X را به چشم یک متغیر مستقل و Y را به چشم یک متغیر وابسته (تصادفی) نگاه کنیم به ازای هر یک از مقادیر X دو مقدار Y داشته باشیم، آنگاه یک برآوردکننده نااریب σ^2 (واریانس خطا (واریانس خطا ε) در معادله‌ی $y = A + Bx + \varepsilon$ عبارت است از:

x	-1	$-0/5$	$0/5$	1
	$1/5$	1	$2/5$	2
y	$2/5$	3	$3/5$	4

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\hat{\sigma}^2 = 0/867$ ۲) $\hat{\sigma}^2 = 0$ ۳) $\hat{\sigma}^2 = 0/5$ ۴) $\hat{\sigma}^2 = 0/201$

۳۸ـ در یک رگرسیون ساده اگر b برآوردکننده کمترین مربعات شیب رگرسیون و $\hat{\sigma}_b^2$ برآورد انحراف معیار r, b ضریب همبستگی بین y, x باشد، آنگاه $\frac{b}{\hat{\sigma}_b}$ برابر است با:

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\sqrt{n-2}$ ۲) $\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$ ۳) $\frac{r\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}$ ۴) $\frac{\sqrt{n-2}}{r\sqrt{1-r^2}}$

۳۹ـ در یک نمونه تصادفی ۶۲ تایی از توزیع نرمال دو متغیره برای این که بتوانیم وجود همبستگی خطی بین متغیرها را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ قبول کنیم، گزینه صحیح برای ضریب همبستگی نمونه‌ای کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $|r| > 0/125$ ۲) $|r| > 0/05$ ۳) $|r| > 0/25$ ۴) $|r| > 0/06$

۴۰ـ در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ که در آن ε_i مستقل بوده و $E(\varepsilon_i) = 0$ و $Var(\varepsilon_i) = 1$ و β_0 معلوم است. $Var(\hat{\beta}_1)$ با روش حداقل مربعات خط کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}}{\sum X_i^2}$ ۲) $\frac{1}{n} + \frac{1}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ۳) $\frac{1}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ۴) $\frac{1}{\sum x_i^2}$

۴۱ـ محققی رابطه خطی را بین متغیر مستقل X و متغیر Y بررسی می‌کند. او فاصله اطمینان ۹۵% را برای شیب خط به‌صورت $(0/8, 0/45)$ به‌دست آورده است. کدام یک از عبارات زیر را درست می‌دانید؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۹۰)

I: رابطه خطی بین دو متغیر معنادار به نظر می‌رسد.

II: غیر صفر بودن همبستگی بین دو متغیر معنادار به نظر می‌رسد.

III: صفر بودن شیب خط به نظر معنادار است.

IV: اگر x به $-x$ تغییر یابد فاصله اطمینان به دست آمده تغییری نمی‌کند.

۱) I و II ۲) I و II و IV ۳) II ۴) II و IV

۴۲ـ اطلاعات زیر مربوط به دو متغیر وابسته Y و مستقل X است. در مدل رگرسیون $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ چند درصد تغییرات متغیر وابسته را می‌توان توسط x توضیح داد؟

$$\sum_{1}^{30}(y_i - \bar{y})^2 = 50 \text{ و } \sum_{1}^{30}(x_i - \bar{x})^2 = 20 \text{ و } \sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 20$$

(مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۴۳ـ رابطه‌ی ذاتی بین Y و x به‌صورت خط $Y = \alpha + \beta x$ است که در آن $\alpha \neq 0$ است. ۵ زوج داده‌ی (Y_i, X_i) به‌ازای $i = 1,2,3,4,5$ گردآوری شده تا برآوردگرهای نقطه‌ای حداقل مربعات α و β تعیین شود. اگر خطاهای قابل اندازه‌گیری در مورد $Y_1, \dots, Y_5$ در ۵ سطح متمایز x چنان باشد که رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \tilde{Y}_i) = 1/7$ برقرار شود کدام اظهار نظر داده شده در چارچوب گزینه‌های زیر صحیح است؟ (منظور از $\tilde{Y}$ خط برآورد شده است.)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) شیب خط برآورد شده منفی است.
۲) عرض از مبدأ خط برآورد شده منفی است.
۳) Y_5 در زیر خط برآورد شده قرار دارد.
۴) شیب خط برآورد شده مثبت است.

۴۴ـ فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = 6xy(2-x-y); 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

در این شرایط درباره رگرسیون X نسبت به Y در نقطه $0/5$ کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۱)

۱) $0/6$
۲) از $0/6$ کمتر است.
۳) از آن جایی که Y متغیر تصادفی پیوسته است این مقدار برابر صفر است.
۴) نامعین است.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

۱ـ گزینه «۳» $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را به دست آورده خواهیم داشت:

$$y = a + bx \Rightarrow \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{12} = \frac{1011}{12} = 84/25 \ , \ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{720}{12} = 60$$

$$\Rightarrow \hat{a} = 84/25 - 0/897 \times 60 = 30/43 \Rightarrow y = 30/43 + 0/897x$$

۲ـ گزینه «۱» طبق فرمول ضریب همبستگی خطی ابتدا مقدار r را بدست می‌آوریم:

$$r = R = \rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}.\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

$$\text{cov}(X,Y) = \overline{xy} - \bar{x}.\bar{y} = \frac{180}{10} - 4 \times 5 = -2$$

$$\begin{cases} \text{Var}(X) = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{300}{10} - 25 = 5 \\ \text{Var}(Y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{230}{10} - 16 = 7 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{-2}{\sqrt{5} \times \sqrt{7}} = -0/338 \Rightarrow R^2 = (0/338)^2 = 0/114$$

۳ـ گزینه «۳» در آزمون همبستگی آماره آزمون به صورت زیر است:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \Rightarrow t_{obs} > t_{\text{جدول}} \quad ; \quad t = \frac{0/44\sqrt{20}}{\sqrt{0/8}} = \frac{0/44 \times 4/472}{0/89} = 2/21 > 2/10$$

با توجه به آن مقدار آماره آزمون از t جدول بزرگتر است فرضیه $H_0 : \rho = 0$ رد می‌شود.

۴ـ گزینه «۴» طبق تعریف آنالیز واریانس گزینه ۴ صحیح است.

۵ـ گزینه «۲» در مدل‌های رگرسیون چندگانه برای آن‌که تعیین شود کدام‌یک از متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_k$ در مدل رگرسیون وجود دارند از الگوریتم‌های مختلف استفاده می‌کنند. یکی از آن‌ها Stepwise است که به صورت زیر عمل می‌کند:

۱) برای هر مدل رگرسیونی ساده‌ی ممکن مقدار آماره‌ی $F^* = \frac{MSR(x_k)}{MSE(x_k)}$ را محاسبه کرده و بزرگترین مقدار F^* را به عنوان اولین کاندید برای ورود در نظر می‌گیریم. اگر این مقدار از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ی f_{in} بیشتر (بزرگتر) باشد متغیر مربوط به مدل وارد می‌گردد.

۲) فرض کنید در مرحله اول متغیر x_5 وارد مدل شود. برای تعیین متغیر دومی که وارد مدل می‌شود مقدار آماره $F^* = \frac{MSR(x_k \mid x_5)}{MSE(x_5, x_k)}$ را برای $k-1$ متغیر دیگر محاسبه می‌کنیم. در صورتی‌که بیشترین مقدار F^* از مقدار پیش‌بینی شده‌ی f_{in} بزرگتر باشد متغیر مربوط به آن وارد مدل می‌گردد (مثلاً x_2).

۳) اکنون باید بررسی کنیم که آیا متغیری که در مرحله اول وارد شد هنوز در مدل باقی می‌ماند یا با ورود x_2 از مدل خارج می‌شود. مقدار $F^* = \frac{MSR(x_5 \mid x_2)}{MSE(x_5, x_2)}$ را محاسبه می‌کنیم. اگر مقدار F^* کوچکتر از مقدار از پیش تعیین شده f_{out} باشد، متغیر x_5 از مدل خارج می‌شود و در غیراین‌صورت باقی می‌ماند.

۴) مشابه مراحل اول و دوم از آماره‌های شرطیِ F^*، متغیر وارد شونده و خارج شونده‌ی بعدی را تعیین می‌کنیم و آنقدر این‌کار را ادامه می‌دهیم که متغیری به مدل داخل یا از آن خارج نگردد.

۶ـ گزینه «۳» مقادیر $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ را با توجه به روابط آن به دست می‌آوریم:

$$\hat{B}_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = -7/281$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{2197/32}{9} - (-7/281)(\frac{144}{9}) = 360/64 \quad ; \quad (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (360/64, 7/281)$$

۷ـ گزینه «۱»

$$S_{x^*y^*} = \sum (x_i^* - \bar{x}_0^*)(y_i^* - \bar{y}^*) = \frac{10}{10}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = S_{xy} \quad ; \quad S_{x^*x^*} = \frac{1}{100} S_{xx} \; , \; S_{y^*y^*} = 100 S_{yy}$$

$$r^* = \frac{S_{x^*y^*}}{\sqrt{S_{x^*x^*} \; S_{y^*y^*}}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{\frac{1}{100} S_{xx} \times 100 S_{yy}}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = r$$

۸ـ گزینه «۴» آزمون فرض مربوط به عدم برازش به صورت روبروست:

$$\begin{cases} H_0 : \text{no L.O.F} \\ H_1 : \text{L.O.F} \end{cases}$$

بنابراین وقتی F بزرگ است H_0 رد می‌شود یعنی عدم برازش، بنابراین برازاندن خط مناسب نیست.

۹ـ گزینه «۳» یکی از نقاط $\hat{y}$ طبق فرض مسأله $(9,9)$ است. از طرفی $\hat{y}$ از $(\bar{x}, \bar{y})$ نیز می‌گذرد که در این مسأله $(1,9)$ می‌باشد. بنابراین به ازای هر x داریم $y = 9$. نتیجه‌گیری: همه‌ی گزینه‌ها صحیح است به غیر از گزینه ۳.

۱۰ـ گزینه «۲» در روش حداقل مربعات، برآورد α و β به توزیع e_{ij} بستگی ندارد بنابراین:

$$e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \Rightarrow e_i^2 = \sum (Y_i - \beta X_i)^2 \Rightarrow \frac{\partial e_i}{\partial \beta} = -2\sum X_i (Y_i - \beta X_i) = 0 \Rightarrow \beta \sum X_i^2 = \sum X_i Y_i \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

۱۱ـ گزینه «۲» شیب خط و عرض از مبدأ را بدست می‌آوریم:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad \hat{\beta}_1 = r\sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}} \; , \; \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = 0/6\sqrt{\frac{2}{1/5}} = 0/69 \simeq 0/7 \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 20 - (0/7)10 = 13 \Rightarrow Y = 13 + 0/7X$$

۱۲ـ گزینه «۱» **شروط زیر را برای برآورد رگرسیونی داریم:**

$$\begin{cases} (I) \sum e_i = 0 \\ (II) \sum x_i e_i = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 0 \Rightarrow e_3 = 0/064$$

از شرط دوم مقدار X_3 را به دست می‌آوریم:

$$-2(0/026) + (-1)(-0/14) + X_3(0/064) + 1(0/188) + 2(-0/138) = 0 \Rightarrow X_3 = 0$$

۱۳ـ گزینه «۲» مجموع خطاها همواره برابر با صفر است.

$$\sum e_i = 0 \Rightarrow e_3 = -(e_1 + e_2 + e_4 + e_5) = 0/064$$

۱۴ـ گزینه «۴» مقادیر را در فرمول‌های $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ قرار می‌دهیم:

$$\hat{B}=\frac{\sum x_iy_i-\frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum y_i)}{\sum x_i^2-\frac{1}{n}(\sum x_i)^2}\qquad \bar{y}=4 \text{ و } \bar{x}=2$$

$$\hat{\beta}=\frac{225-\frac{100\times 50}{25}}{125-\frac{2500}{25}}=\frac{25}{25}=1 \qquad \text{و} \qquad \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=4-2=2$$

۱۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم که فاصله اطمینان پیشگویی y برای مقدار معین x_0 به صورت زیر است:

$$(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_0\pm t_{(n-2,1-\frac{\alpha}{2})}S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_x^2}})$$

برای یک αی مشخص برای اینکه این فاصله اطمینان کوچک‌تر شود باید x_0 به $\bar{x}$ نزدیک باشد و S_x^2 نیز بزرگ باشد و این به معنی آن است که تغییرات x باید زیاد باشد.

۱۶ـ گزینه «۲» طبق رابطه بین شیب خط رگرسیون و ضریب همبستگی خطی خواهیم داشت:

$$r=\hat{\beta}\sqrt{\frac{S^2x}{S^2y}}\Rightarrow 0/8=\hat{\beta}.\frac{5}{3}\Rightarrow\hat{\beta}=0/48$$

۱۷ـ گزینه «۴» مقادیر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را از فرمول‌هایشان بدست آورده آن‌ها را از یکدیگر کم می‌کنیم:

$$\begin{cases}\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}\Rightarrow\hat{\alpha}-\hat{\beta}=\bar{Y}-(\bar{X}+1)\hat{\beta}\\ \hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{\sum x_iy_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{2n-n\times 0\times 3}{n-n(0)^2}=2\end{cases}\Rightarrow\hat{\alpha}-\hat{\beta}=3-(0+1)\times 2=1$$

۱۸ـ گزینه «۲» معادلات نرمال را می‌نویسیم. $\hat{\beta}_1$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}\beta_0\sum x_i+\beta_1\sum x_i^2=\sum x_iy_i\\ n\beta_0+\beta_1\sum x_i=\sum y_i\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta_0\times 0+\beta_1\times 2=y_1-y_2\\ n\beta_0+0\times\beta_1=\sum y_i=y_1+y_2\end{cases}\Rightarrow 2\beta_1=y_1-y_2\Rightarrow\hat{\beta}_1=\frac{y_1-y_2}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۲» از رابطه سؤال قبل داریم:

$$2\beta_0=y_1+y_2\Rightarrow\hat{\beta}_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\bar{y}$$

۲۰ـ گزینه «۱»

$$SSE=SSy-\hat{\beta}^2SS_x=y_1^2+y_2^2-2(\frac{y_1+y_2}{2})^2-(\frac{y_1-y_2}{2})^2\times 2=y_1^2+y_2^2-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-y_1y_2-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+y_1y_2=0$$

۲۱ـ گزینه «۴» فرمول ضریب همبستگی خطی به صورت روبه‌رو است:

$$r=\frac{S_{xy}}{S_x.S_y}=\frac{y_1-y_2}{|y_1-y_2|}$$

۲۲ـ گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود در رابطه $\hat{y}=12/1-1/4x$ بین $\hat{y}$ و x یک رابطه منفی وجود دارد و همچنین به ازای $x=1$، $y=10$ شده است که $\hat{y}=12/1-1/4\times 1=10/7$ بنابراین $r_{xy}\neq -1$ می‌باشد، در نتیجه: $-1<r_{xy}<0$

۲۳ـ گزینه «۱» توجه کنید که شیب خط رگرسیون برابر با ۲ می باشد.

$$\begin{matrix}y=\alpha+\beta x+\varepsilon\\ \hat{y}=3+2x\end{matrix}\Rightarrow r_{y,\hat{y}}=\frac{COV(y,\hat{y})}{\sqrt{Var(y).Var(\hat{y})}}=\frac{COV(y,\alpha+\beta x)}{\sqrt{Var(y)Var(\alpha+\beta x)}}$$

$$=\frac{\beta COV(y,x)}{\sqrt{Var(y).\beta^2Var(x)}}=\frac{\beta COV(y,x)}{|\beta|\sqrt{Var(y).Var(x)}}=\frac{\beta}{|\beta|}.r_{xy}=0/36$$

۲۴ـ گزینه «۲» از رابطه خط رگرسیونی می‌دانیم که اگر $\hat{y}=\alpha+\beta x$ دراین صورت $\hat{\beta}=r\dfrac{S_y}{S_x}$, $\hat{\alpha}=E(Y)-\hat{\beta}E(X)$ بنابراین :

$$\hat{\alpha}=۱-(۱\times۲)=-۱\,,\quad \hat{\beta}=۰/۵\frac{\sqrt{۰/۴}}{\sqrt{۰/۱}}=۰/۵\times۲=۱$$

۲۵ـ گزینه «۴» توجه کنید که $r=\dfrac{S_{xy}}{S_xS_y}$ و می‌دانیم که $S_{xy}=(\sum x_iy_i-\frac{۱}{n}\sum x_i\sum y_i)\dfrac{۱}{n-۱}$ و $S_x^۲=\dfrac{۱}{n-۱}(\sum x_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum x_i)^۲)$ و $S_y^۲=\dfrac{۱}{n-۱}(\sum y_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum y_i)^۲)$ پس ضریب همبستگی به صورت زیر است:

$$r=\frac{\sum x_iy_i-\frac{۱}{n}\sum x_i\sum y_i}{\sqrt{\sum x_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum x_i)^۲}\sqrt{\sum y_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum y_i)^۲}}=\frac{۱۸۰-\frac{۱}{۱۰}(۵۰)(۴۰)}{\sqrt{۳۰۰-\frac{۱}{۱۰}(۵۰)^۲}\sqrt{۲۳۰-\frac{۱}{۱۰}(۴۰)^۲}}=\frac{-۲۰}{\sqrt{۳۵۰۰}}=-۰/۳۳۸$$

۲۶ـ گزینه «۳» در خط رگرسیون $\hat{y}=b_۰+b_۱x$ می‌دانیم که $r=b_۱\dfrac{S_x}{S_y}$ و از خط رگرسیونی $\hat{x}=a_۰+a_۱x$ داریم $r=a_۱\dfrac{S_y}{S_x}$ بنابراین، $r^۲=a_۱b_۱$ و در این سؤال $b_۱=۱$, $a_۱=\frac{۱}{۲}$ لذا $r^۲=\frac{۱}{۲}$, $r=\pm\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$. با توجه به این‌که علامت $b_۱,a_۱$ مثبت هستند پس $r=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ را می‌پذیریم.

۲۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برآورد پارامترهای خط رگرسیونی $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ به صورت زیر است:

$$\hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_x^۲}=\frac{\sum x_iy_i-\frac{۱}{n}\sum x_i\sum y_i}{\sum x_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum x_i)^۲}\quad,\quad \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$$

در این سؤال مقدار $\sum x_i$ را نداریم و نمی‌توانیم محاسبات را انجام دهیم.

۲۸ـ گزینه «۳» در رگرسیون خطی که از مبدأ عبور می‌کند $(y=\beta x+\varepsilon)$ داریم:

$$\hat{\sigma}^۲=MSE=\frac{\sum y_i^۲-\hat{\beta}\sum x_iy_i}{n-۱}\,,\quad \hat{\beta}=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^۲}$$

بنابراین در این سؤال:

$$\hat{\beta}=\frac{۷۶}{۱۹۰}=\frac{۲}{۵}\quad,\quad \hat{\sigma}^۲=\frac{۱}{۱۳-۱}(۳۴-\frac{۲}{۵}۷۶)=\frac{۳/۶}{۱۲}=۰/۳$$

۲۹ـ گزینه «۱» $E(X|Y)$ تابعی از متغیر تصادفی y است و مقدار آن در $y=g$ برابر $E(X|Y-y)$ است ، بنابراین $E(X|Y)$ یک متغیر تصادفی است. یک خاصیت بسیار مهم امید ریاضی شرطی به صورت $E(x)=E(E(x|y)$ است. بنابراین در این سؤال داریم:

$$E(y|x)=\alpha+\beta x\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از طرفین امید ریاضی}}E(E(y(x))=\alpha+\beta E(x)\Rightarrow E(y)=\alpha+\beta E(x)$$

با جایگذاری مقادیر $E(x),E(y)$ داریم:

$$\boxed{۱=\alpha+۲\beta}$$

۳۰ـ گزینه «۲» در این سؤال جهت برآورد $\beta_۱$ از رابطه $\hat{\beta}=r\dfrac{S_y}{S_x}$ استفاده می‌کنیم که این رابطه به صورت زیر به دست آمده است:

$$\hat{\beta}_۱=\frac{\sum_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_i(x_i-\bar{x})^۲}$$

که این مقدار برابر $\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$ است و برآورد $\beta_۰$ برابر است با $\bar{y}-\hat{\beta}_۱\bar{x}$. البته باید توجه کرد که رابطهٔ رگرسیونی مورد بررسی $y=\beta_۰+\beta_۱x_i+\varepsilon i$ است.

$$ss_y=۱۶(s_y=۴),ss_x=۹(s_x=۳)\ ;\quad \hat{\beta}_۱=\frac{s_{xy}}{ss_x}=\frac{rs_xs_y}{ss_x}=\frac{rs_y}{s_x}\xrightarrow[s_x,s_y,r\ \text{داریم}]{\text{با جایگذاری مقادیر}}\hat{\beta}_۱=-\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۳}=-۱$$

از طرفی داریم:

$$\hat{\beta}_۰=\bar{y}-\hat{\beta}_۱\bar{x}\xrightarrow[\bar{y},\bar{x},\hat{\beta}_۱]{\text{با جایگذاری}}\hat{\beta}_۱=۶-(-۱)۴=۱۰$$

بنابراین معادله رگرسیون خطی بین y , x بصورت $\hat{y}=۱۰-x$ است.

۳۱ـ گزینه «۴» ضریب همبستگی بین x , y برابر است با:

$$r_{x,y}=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{\sum\limits_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_i(x_i-\bar{x})^۲\sum\limits_i(y_i-\bar{y})^۲}$$

$$\bar{x}=\sum_i\frac{x_i}{n}=\frac{۵}{۵}=۱\qquad,\qquad\bar{y}=\sum_i\frac{y_i}{n}=\frac{۷/۵}{۵}=۱/۵$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i-\bar{x} & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۲\\ \hline y_i-\bar{y} & -۱ & -۰/۵ & ۰ & ۰/۵ & ۱\end{array}\Rightarrow r_{x,y}=\frac{(۲+۰/۵+۰+۰/۵+۲)}{\sqrt{(۴+۱+۱+۴)(۱+۰/۲۵+۰/۲۵+۱)}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۳۲ـ گزینه «۱» برآورد a به روش کمترین مربعات خط هیچ ربطی به توزیع خطاها ندارد، بنابراین:

$$S.S.E=\sum\varepsilon_i^۲=\sum(y_i-ax_i)^۲\Rightarrow\frac{\partial}{\partial a}=۰\Rightarrow\sum۲x_i(y_i-ax_i)=۰$$

$$\Rightarrow\sum۲x_iy_i-۲a\sum x_i^۲=۰\Rightarrow a\sum x_i^۲=\sum x_iy_i\Rightarrow\hat{a}=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^۲}$$

۳۳ـ گزینه «۲» در خط رگرسیونی $\hat{y}=b_۰+b_۱x$ می‌دانیم که $r=b_۱\frac{sx}{sy}$ و در خط رگرسیونی $\hat{x}=a_۰+a_۱y$ به صورت $r=a_۱\frac{s_y}{s_x}$ است پس $r^۲=a_۱b_۱$.

بنابراین در سؤال داده شده چون $b_۱=۱$, $a_۱=\frac{۱}{۲}$ لذا $r^۲=a_۱b_۱=\frac{۱}{۲}\Leftarrow r=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و طبق علامت $b_۱,a_۱$ (هر دو مثبت هستند) $r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را می‌پذیریم.

۳۴ـ گزینه «۲» از نکات سؤال استفاده کرده و مسأله را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{y}=b_۰+b_۱x\\ \hat{x}=a_۰+a_۱y\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{سؤال قبل}]{\text{طبق نتیجه}}r^۲=a_۱b_۱\xrightarrow[\text{لذا } b_۱=۳]{\text{در این سؤال } \hat{y}=۳x+۲}\frac{۳}{۴}=۳a_۱\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۴}$$

حال توجه کنید که در خط $x=a_۰+a_۱y$ داریم $a_۰=\bar{x}-a_۱\bar{y}$ پس $a_۱=\frac{۱}{۴}$, $a_۰=۱-\frac{۱}{۴}(۵)=-\frac{۱}{۴}$ پس خط رگرسیون به صورت $x=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}y$ است اگر $y=۱$ قرار دهیم $x=۰$ به دست می‌آید.

۳۵ـ گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم نمونه غیر عرفی نمره $(۴۷,۴۱)$ می‌باشد که آن را حذف کرده و با استفاده از رابطه ضریب همبستگی پیرسون مقدار ضریب همبستگی را محاسبه می‌کنیم:

$$r=\frac{\sum x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^۲-n\bar{x}^۲)(\sum y_i^۲-n\bar{y}^۲)}}=\frac{۱۱۴۰۳-۷\times۲۰/۲۸\times۸۰/۲۸}{\sqrt{(۲۹۰۰-۷\times(۲۰/۲۸)^۲)(۴۵۱۴۰-۷\times(۸۰/۲۸)^۲}}=۰/۱۲۵$$

۳۶ـ گزینه «۱» با توجه به خط رگرسیون $y=\alpha+\beta x_i$ و با توجه به مقدار $\hat{\beta}=۰/۰۵۴۵$ مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را به دست آورده در معادله $\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$ قرار می‌دهیم تا $\hat{\alpha}$ به دست آید.

$$\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum x_i=\frac{۱}{۱۰}(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱۰\times۱۱}{۲}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

$$\bar{y}=\frac{۱}{n}\sum x_i=\frac{۱}{۱۰}(۳\times۴+۳\times۴+۳\times۵)=\frac{۳۹}{۱۰}=۳/۹\qquad;\qquad\hat{\alpha}=۳/۹-(۰/۰۵۴۵)(۵/۵)=۳/۶$$

$$y_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\Rightarrow y_i=۳/۶+(۰/۰۵۴۵)(۵)\simeq۳/۹$$

۳۷ـ گزینه «۱» برآورد کننده ناریب برای $\sigma^۲$ عبارت است از:

$$\sigma^۲=MSE=\frac{SSE}{n-۲}\quad SEE=S_{yy}-\frac{(S_{xy})^۲}{S_{xx}}$$

$\bar{x}=۰\quad,\quad\bar{y}=۲/۵$

$\Sigma x_i^۲=۲(۲/۵)=۵\qquad\Sigma y_i^۲=۵۷\qquad\Sigma x_iy_i=۳\quad;\quad S_{xx}=\Sigma x_i^۲-n\bar{x}^۲=۵\qquad S_{xy}=\Sigma x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}=۳$

$$S_{yy}=\Sigma y_i^۲-n\bar{y}^۲=۵۷-۸(۲/۵)^۲=۷\rightarrow SSE=۷-\frac{۹}{۵}=۵/۲\qquad\hat{\sigma}^۲=\frac{SSE}{n-۲}=\frac{۵/۲}{۸-۲}=۰/۸۶۷$$

۳۸ـ گزینه «۲» به جای $\hat{\sigma}$ و SSE مقادیرش را قرار می‌دهیم:

$$\hat{\sigma}_b=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}=\frac{\sqrt{MSE}}{\sqrt{S_{xx}}}=\sqrt{\frac{\frac{SSE}{n-2}}{S_{xx}}}=\frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\frac{S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{S_{xx}}}=\frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\frac{S_{yy}(1-\frac{S_{xy}^2}{S_{yy}S_{xx}})}{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}}$$

چون:

$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad \& \quad \hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\Rightarrow r=\hat{\beta}=\sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}\Rightarrow \sigma_b^2=\frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\frac{1-r^2}{\frac{r^2}{\hat{\beta}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{n-2}}\frac{\hat{\beta}}{r}\sqrt{1-r^0}\Rightarrow\frac{\hat{\beta}}{\sigma_b^2}=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

۳۹ـ گزینه «۳» آماره آزمون اولیه برای آزمون ضریب همبستگی نمونه‌ای به صورت $t_0=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ است.

$$t_0=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2^2}\to t_0^2=\frac{r^2}{1-r^2}(n-2)\to\frac{1-r^2}{r^2}=\frac{n-2}{t_0^2}\to\frac{1}{r^2}-1=\frac{n-2}{t_0^2}$$

$$\to\frac{1}{r^2}=\frac{t_0^2+n-2}{t_0^2}\to r^2=\frac{t_0^2}{t_0^2+n-2}\to r=\sqrt{\frac{t_0^2}{t_0^2+n-2}}\to$$

$$|r|>\sqrt{\frac{t^2_{\frac{\alpha}{2},n-2}}{t^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}+n-2}}\to|r|>\sqrt{\frac{t^2_{0/025,60}}{t^2_{0/025,60}+62-2}}=\sqrt{\frac{2^2}{2^2+60}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=0/25$$

۴۰ـ گزینه «۴»

$$SEE=\Sigma\varepsilon_i^2=\Sigma(y_i\xcancel{-\beta_0}-\beta_1x_i)^2 \quad \text{با توجه به معادله رگرسیون}$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial\beta_1}=0\to\Sigma-2x_i(y_i-\beta_1x_i)=0\to\Sigma(x_iy_i-\beta_0x_i-\beta_1x_i^2)=0$$

$$\Sigma x_iy_i-\cancel{\beta_0\Sigma x_i}-\beta_1\Sigma x_i^2\xrightarrow{\beta_0\ \text{معلوم}}\beta_1=\frac{\Sigma x_iy_i-\cancel{\beta_0\Sigma x_i}}{\Sigma x_i^2}$$

$$\to Var(\beta_1)=Var(\frac{\Sigma x_iy_i-\cancel{\beta_0\Sigma x_i}}{\Sigma x_i^2})\ (x_i\ \text{ها معلوم هستند})=Var=(\frac{\Sigma x_iy_i}{\Sigma x_i^2}-\frac{\beta_0\Sigma x_i}{\Sigma x_i^2})$$

$$=var(\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2})=\frac{1}{(\sum x_i^2)^2}var(\sum x_iy_i)=\frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2}\ \underline{\underline{Var(y_i)=var(\varepsilon_i)=1}}\ .\frac{\Sigma x_i^2}{(\Sigma x_i^2)^2}=\frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

۴۱ـ گزینه «۱» اگر آزمون‌های معنی‌دار بودن رابطه خطی را بخواهیم معرفی کنیم به‌صورت $\begin{cases}H_0:\rho=0\\H_1:\rho\neq0\end{cases}$ یا $\begin{cases}H_0:\beta=0\\H_1:\beta\neq0\end{cases}$ می‌باشند. کـه در ایـن جـا فاصله اطمینان صفر را ندارد (به رابطه فاصله اطمینان و آزمون فرض در کتاب دقت کنید) بنابراین تفاوت معنی‌دار است. با توجه به معادل بودن I و II گزینه (۱) صحیح است.

۴۲ـ گزینه «۱» درصد تغییرات متغیر وابسته توسط x تعریف ضریب تعیین (r^2) می‌باشد. بنابراین ابتدا r را به دست می‌آوریم:

$$r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum((x_i-\bar{x})^2)}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{20}{\sqrt{20}.\sqrt{50}}=\frac{20}{\sqrt{1000}}\ ;\ r^2=\frac{(20)^2}{1000}=\frac{400}{1000}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

۴۳ــ گزینه «۳» در رابطه خطی رگرسیونی $\bar{y}=\bar{\tilde{y}}$ و اگر $\tilde{y}_i$ برآورد خط رگرسیونی باشد باید $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\tilde{y}_i)=0$ از طرفی در این جا $\sum_{i=1}^{4}(y_i-\tilde{y}_i)=1/7$ که مقداری مثبت است و کران Σ نیز تا ۴ است پس برای صفر شدن این عبارت باید $y_5-\tilde{y}_5<0$ باشد یعنی $y_5<\tilde{y}_5$ و این یعنی y_5 زیر خط برآورد شده است.

۴۴ــ گزینه «۱» رگرسیون x نسبت به y همان $E(X\mid Y=y)$ می‌باشد. ابتدا تابع چگالی شرطی را به دست می‌آوریم:

$$f_{X|Y=y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 6xy(2-x-y)dx=\int_0^1(12xy-6x^2y-6xy^2)dx=6x^2y\Big|_0^1-2x^3y\Big|_0^1-3x^2y^2\Big|_0^1=4y-3y^2$$

$$f(x\mid y)=\frac{6xy(2-x-y)}{4y-3y^2}=\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}\Bigg|_{y=\frac{1}{2}}=\frac{9x-6x^2}{\frac{5}{2}}$$

$$E(x\mid y=\frac{1}{2})=\frac{2}{5}\int_0^1 x.(9x-6x^2)dn=\frac{2}{5}\int_0^1(9x^2-6x^3)dn=\frac{2}{5}.(3x^3)\Big|_0^1-\frac{6}{4}x^4\Big|_0^1)=\frac{2}{5}(3-\frac{6}{4})=\frac{6}{5}-\frac{12}{20}=\frac{24-12}{20}=\frac{12}{20}=0/6$$

فصل دهم

«آمار توصیفی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دهم

۱ـ اگر $\sigma^۲$ پراش $X_۱, X_۲, ..., X_n$ باشد، پراش $(۳X_۱ - ۱۵), (۳X_۲ - ۱۵), ..., (۳X_n - ۱۵)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $۳\sigma^۲$ ۲) $۹\sigma^۲$ ۳) $۹\sigma^۲ - ۱۵$ ۴) $۳\sigma^۲ - ۱۵$

۲ـ توزیع عمر تعدادی باتری به صورت مقابل داده شده است: درصد فراوانی تراکمی (حجمی) صعودی طبقه سوم کدام است؟

حدود طبقات	۱/۵−۱/۹	۲−۲/۴	۲/۵−۲/۹	۳−۳/۴	۳/۵−۳/۹
فراوانی	۲	۱	۴	۵	۱۳

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۲۵ ۴) ۲۸

۳ـ اگر اطلاعات زیر در مورد طول عمر سه نوع لاستیک A ، B و C جهت خرید در اختیار باشد، کدام لاستیک را برای خرید ترجیح می‌دهید؟

	A	B	C
میانگین	۱۵۰۰۰ km	۲۱۰۰۰ km	۱۴۰۰۰ km
انحراف معیار (استاندارد)	۳۰۰۰ km	۷۰۰۰ km	۲۰۰۰ km

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) A ۲) B ۳) C ۴) مزیتی بر هم ندارند.

۴ـ اگر اطلاعات زیر براساس دو نمونه تصادفی مستقل از هم در اختیار باشند:

$n_۱ = ۵۰$ $\quad n_۲ = ۱۰۰$

$\bar{x}_۱ = ۷/۰۰$ $\quad \bar{x}_۲ = ۶/۰$

$s_۱ = ۱/۰۰$ $\quad s_۲ = ۲/۰۰$

برآوردهای آمیخته (Pooled estimates) میانگین و واریانس، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\bar{x}_p, s_p^۲) = (۱۳, ۳/۰۰)$ ۲) $(\bar{x}_p, s_p^۲) = (۶/۵, ۱/۵)$ ۳) $(\bar{x}_p, s_p^۲) = (۶/۵, ۳/۰۰)$ ۴) $(\bar{x}_p, s_p^۲) = (۶/۳۳, ۳/۰۰۶)$

۵ـ اگر برای داده‌های به دست آمده از یک صفت رابطه بین مقادیر میانگین $(\bar{X})$، میانه (Md) و نما (Mo) به صورت $\bar{x} < Md < Mo$ باشد، می‌توان اظهار داشت توزیع داده‌ها:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) متقارن است. ۲) چوله به چپ است. ۳) چوله به راست است. ۴) هم چوله به راست و هم به چپ است.

۶ـ نمره‌های امتحان درس آمار در یک کلاس دارای میانگین ۱۲ و واریانس ۱۶ است. ضریب تغییرات برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۷ـ قطر یک کالا را با دو رقم اعشار اندازه‌گیری نموده و نمودار تنه و شاخه (stem and loaf) آن را رسم نموده‌ایم. چارک اول، میانه و چارک سوم داده‌ها به ترتیب کدام است؟

(مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱۹	۰	۱			
۲۰	۰	۰	۲	۹	
۲۱	۰	۱	۳	۴	
۲۲	۰	۱	۵	۶	۷
۲۳	۰	۱	۱	۲	
۲۴	۰	۰	۴		
۲۵	۵				

۱) $Q_۱ = ۲/۰۹, m = ۲/۲۱, Q_۳ = ۲/۳۱$

۲) $Q_۱ = ۲/۰۰, m = ۲/۲۱, Q_۳ = ۲/۳۱$

۳) $Q_۱ = ۲/۰۰, m = ۲/۲۶, Q_۳ = ۲/۳۱$

۴) $Q_۱ = ۲/۰۹, m = ۲/۲۶, Q_۳ = ۲/۱۳$

۸ـ براساس اطلاعات داده شده نمودار ساقه و برگ زیر آماده شده است. (Q_1, m_1, Q_3) کدام است؟(Q_1 و Q_3 نمایانگر چارک‌های اول و سوم و m نمایانگر میانه است.) (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۰	۲ ۳ ۴ ۵
۱	۰ ۱ ۲ ۳ ۵ ۷
۲	۰ ۰ ۱ ۲ ۳ ۵ ۶ ۷ ۹
۳	۰ ۱ ۱ ۲ ۲ ۴ ۶ ۶ ۸
۴	۰ ۰ ۲ ۲ ۳
۵	۱ ۲ ۳ ۴

۱) (۱۵,۲۸,۴۰)
۲) (۱۶,۲۸,۳۹)
۳) (۱۶,۲۹,۳۹)
۴) (۱۷,۲۹,۴۰)

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دهم

۱ـ گزینه «۲» طبق خاصیت مهم واریانس خواهیم داشت:
$$Var(aX+b)=a^{۲}.Var(X)\Rightarrow Var(۳X-۱۵)=۹.Var(X)=۹.\sigma^{۲}$$

۲ـ گزینه «۴» توجه کنید درصد فراوانی تجمعی خواسته شده است.
$$۲+۱+۴=۷\Rightarrow \frac{۷}{۲۵}\times ۱۰۰=۲۸$$: فراوانی تجمعی طبقه سوم

۳ـ گزینه «۳» یک ملاک مقایسه هنگامی که شاخص‌های مرکزی و پراکندگی (میانگین و انحراف معیار) را داشته باشیم ضریب تغییرات است و هرچه میزان آن کمتر باشد جامعه مطلوب‌تری خواهیم داشت:
$$CV_A=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳۰۰۰}{۱۵۰۰۰}=\frac{۱}{۵}\ ;\ CV_B=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۷۰۰۰}{۲۱۰۰۰}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow CV_C<CV_A<CV_B$$
$$CV_C=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲۰۰۰}{۱۴۰۰۰}=\frac{۱}{۷}$$

۴ـ گزینه «۴» از روابط میانگین و واریانس ادغام شده استفاده می‌کنیم:
$$\bar{X}_p=\frac{n_۱\bar{X}_۱+n_۲\bar{X}_۲}{n_۱+n_۲}=\frac{۳۵۰+۶۰۰}{۱۵۰}=۶/۳۳$$
$$S_p^۲=\frac{(n_۱-۱)S_۱^۲+(n_۲-۱)S_۲^۲}{(n_۱+n_۲-۲)}=۳/۰۰۶$$

۵ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه میانه و میانگین و نما در داده‌های موردنظر $\bar{X}<Md<Mo$ است. پس چوله به چپ است.

۶ـ گزینه «۱» برای مقایسه دو سری داده باید از شاخص‌هایی استفاده کنیم که به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی نداشته باشد. یکی از این شاخص‌ها ضریب تغییرات می‌باشد که به صورت $CV=\frac{S}{\bar{x}}$ تعریف می‌شود و معمولاً بر حسب درصد بیان می‌شود.
$$CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۷ـ گزینه «۱» داده‌ها به صورت روبرو می‌باشند:
۱/۹۰ , ۱/۹۱ , ۲/۰۰ , ۲/۰۰ , ۲/۰۲ , ۲/۰۹ , ۲/۱۰ , ۲/۱۱ , ۲/۱۳ , ۲/۱۴ ,۲/۲۰
,۲/۲۱ , ۲/۲۵ , ۲/۲۶ , ۲/۲۷ , ۲/۳۰ , ۲/۳۱ , ۲/۳۱ , ۲/۳۲ , ۲/۴۰ , ۲/۴۰ , ۲/۴۴ , ۲/۵۵
تعداد داده‌ها $n=۲۳$ می‌باشد پس میانه داده وسط یعنی، داده دوازدهم می‌باشد که برابر با $m=۲/۲۱$ چارک اول یعنی، یک چهارم اول داده‌ها $Q_۱=۲/۰۹$ و چارک سوم یعنی، سه چهارم داده‌ها $Q_۳=۲/۳۱$

۸ـ گزینه «۳» نمودار نشان داده شده در این سؤال نمودار ساقه‌ای ساده (ساقه و برگی) است. این نمودار معمولاً برای داده‌هایی که به صورت اعداد کوچک‌اند به کار می‌رود و برای تهیه این نمودار:

الف) هر داده را ۲ قسمت می‌کنیم؛ رقم دهگان را ساقه و رقم یکان را برگ می‌نامیم.
ب) ساقه‌ها را به ترتیب صعودی از بالا به پایین در طرف چپ یک خط عمودی می‌گذاریم.
ج) برگ‌های هر ساقه را به ترتیب غیر نزولی از چپ به راست در طرف دیگر خط عمودی پهلوی آن ساقه می‌گذاریم.

بنابراین نمودار نشان داده شده، مشخص‌کننده ۳۷ داده‌ی مرتب شده می‌باشد.

برای مشخص کردن صدک $۱۰۰P$ ام در داده‌های گسسته به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱ـ محاسبه‌ی $(n+1)p$ که n تعداد داده‌ها می‌باشد. ۲ـ قرار می‌دهیم $r=[(n+1)p]$ و $w=(n+1)p-r$ ۳ـ $Q_p=(1-w)x_{(r)}+wx_{(r+1)}$

لذا:

$Q_1 =$ صدک ۲۵ام $\Rightarrow P=0/25$

$(n+1)p=38(0/25)=9/5 \Rightarrow r=9 \ , w=0/5$ $\qquad$ $Q_1=(0/5)x_{(9)}+(0/5)x_{(10)}=\frac{15+17}{2}=16$

میانه همان چارک دوم یا صدک ۵۰ام می‌باشد بنابراین $P=0/5$

$n=37 \Rightarrow m=\frac{37+1}{2}=19 \Rightarrow x_{(19)}=$ میانه $=29$

$Q_3 =$ صدک ۷۵ام $\Rightarrow p=0/75$ $\qquad$ $m=x_{(19)}=29 \ \ (n+1)p=38(0/5)=19 \Rightarrow r=19, w=0 \ ;$

$(n+1)p=38(0/75)=28/5 \Rightarrow r=28 \ , \ w=0/5$ $\qquad$ $Q_3=(0/5)x_{(28)}+(0/5)x_{(29)}=\frac{38+40}{2}=39$