سؤالات آزمون حسابداری ـ دکتری ۹۹

۱ـ حد عبارت $(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲ـ مشتق مرتبه دهم تابع $y=xLnx$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{105}{4}$ ۲) $\frac{105}{8}$ ۳) $\frac{315}{4}$ ۴) $\frac{315}{8}$

۳ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ و محور xها و خطوط مجانب آن کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ در تابع دو متغیری $Z=Ln(x^2+y^2)+Arctg\frac{y}{x}$، حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۵ـ رتبه ماتریس A، کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -5 & 1 & 2\\ 3 & -8 & 5 & 2\\ 5 & -12 & -1 & 6\end{bmatrix}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶ـ مختصات نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$، کدام است؟

۱) $(\frac{2}{3},2)$ ۲) $(1,\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

۷ـ میدان D مستطیل $[1,5]\times[2,3]$ است. حاصل $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$، برابر LnA است. A کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{7}{4}$

پاسخنامه آزمون حسابداری ـ دکتری ۹۹

۱ـ گزینه «۲» حالت مبهم $\infty-\infty$ است که با تبدیل $\cot x$ به $\frac{۱}{\tg x}$ و مخرج مشترک‌گیری آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{\tg^۲ x})=\lim_{x\to ۰}(\frac{\tg^۲x-x^۲}{x^۲\tg^۲x})$$

اکنون با استفاده از هم‌ارزی‌های $\tg x\sim x$ و $\tg x-x\sim\frac{x^۳}{۳}$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(\tg x-x)(\tg x+x)}{x^۲(x^۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{x^۳}{۳})(x+x)}{x^۴}=\frac{\frac{۲}{۳}x^۴}{x^۴}=\frac{۲}{۳}$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا مشتق‌های مرتبه‌ی اول و دوم تابع را به دست می‌آوریم و داریم:

$$y^{(۱)}=۱\times \Ln x+\frac{۱}{x}(x)=\Ln x+۱$$

$$y^{(۲)}=\frac{۱}{x}$$

اکنون با استفاده از مشتق مرتبه nام تابع $y=\frac{۱}{x}$ که به صورت زیر می‌باشد، فقط کافی است ۸ مرتبه از تابع $\frac{۱}{x}$ مشتق بگیریم.

$$y=\frac{۱}{x}\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$$

$$y=\frac{۱}{x}\to y^{(۸)}=\frac{(-۱)^۸\times ۸!}{x^۹}\xrightarrow{x=۲}\frac{۸!}{۲^۹}=\frac{۸!}{۵۱۲}=\frac{۸\times ۷\times ۶!}{۵۱۲}=\frac{۷\times ۶\times ۵!}{۶۴}=\frac{۷\times ۳\times ۵!}{۳۲}=\frac{۷\times ۳\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳۲}=\frac{۷\times ۳\times ۵\times ۶}{۸}=\frac{۳۱۵}{۴}$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا باید مجانب‌های قائم تابع را به دست آوریم، تا حدود x برای انتگرال‌گیری مشخص شود، پس باید ریشه‌های مخرج کسر را بیابیم.

مجانب‌های قائم $۴x-x^۲-۳=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=۳$

اکنون مساحت ناحیه را به دست می‌آوریم:

$$S=\int_۱^۳\frac{۱}{\sqrt{-(x^۲-۴x+۳)}}dx=\int_۱^۳\frac{dx}{\sqrt{-((x-۲)^۲-۱)}}=\int_۱^۳\frac{dx}{\sqrt{۱-(x-۲)^۲}}=(\Arcsin(x-۲))_۱^۳$$

$$=\Arcsin(۳-۲)-\Arcsin(۱-۲)=\Arcsin(۱)-\Arcsin(-۱)=\frac{\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})=\pi$$

۴ـ گزینه «۴» باید از تابع z نسبت به x و y جداگانه، دوبار مشتق بگیریم و با هم جمع کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}+\frac{-\frac{y}{x^۲}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}-\frac{y}{x^۲+y^۲}=\frac{۲x-y}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{۲x-y}{x^۲+y^۲})=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۲x(۲x-y)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{-۲x^۲+۲y^۲+۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y}{x^۲+y^۲}+\frac{\frac{۱}{x}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}=\frac{۲y}{x^۲+y^۲}+\frac{x}{x^۲+y^۲}=\frac{۲y+x}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{۲y+x}{x^۲+y^۲})=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۲y(۲y+x)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{۲x^۲-۲y^۲-۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

پس داریم:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

۵ـ گزینه «۲» باید تعداد سطرهای (یا ستون‌های) مستقل را به دست آوریم:

سطر اول وابسته است ← سطر اول = سطر سوم + (سطر دوم) ۲−

سطر چهارم وابسته است ← سطر چهارم = سطر سوم + (سطر اول) ۲−

با توجه به اینکه دترمینان زیر ماتریس $A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ برابر $|A_1|=5-4=1$ و مخالف صفر می‌باشد، پس رتبه ماتریس ۲ می‌باشد، چراکه فقط دو سطر مستقل پیدا کردیم.

۶ـ گزینه «۴» باید مشتق تابع نسبت به x و y را جداگانه مساوی صفر قرار دهیم.

$$f=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3$$

$$f_x=3x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0\Rightarrow x^2y^2(3-4x-3y)=0$$

$$x=0,\ y=0,3-4x-3y=0\Rightarrow 4x+3y=3$$

$$f_y=2x^3y-2x^4y-3x^2y^2=0\Rightarrow x^3y(2-2x-3y)=0\Rightarrow x=y=0\ ,\ 2-2x-3y=0$$

از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases}4x+3y=3\\ 2x+3y=2\end{cases}\xrightarrow{x(-1)}2x-3y=-2\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(\frac{1}{2})+3y=2\Rightarrow 3y=1\Rightarrow y=\frac{1}{3}\xrightarrow[\text{بحرانی}]{\text{مختصات نقطه}}(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$$

۷ـ گزینه «۳» با توجه به ناحیه D داریم: $2\le x\le 3\ ,\ 1\le y\le 5$، پس خواهیم داشت:

$$\int_2^3\int_1^5\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}\xrightarrow[dy=du]{x+y=u}\int_2^3\int\frac{du}{u^2}dx=\int_2^3\frac{u^{-1}}{-1}dx=\int_2^3(-\frac{1}{x+y})_1^5dx=\int_2^3(\frac{-1}{x+5}+\frac{1}{x+1})dx$$

$$=(\ln(x+1)-\ln(x+5))_2^3=(\ln(\frac{x+1}{x+5}))_2^3=\ln\frac{4}{8}-\ln\frac{3}{7}=\ln(\frac{\frac{4}{8}}{\frac{3}{7}})=\ln\frac{7}{6}=\ln A\Rightarrow A=\frac{7}{6}$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۹۹

۱ــ حاصل عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}})$، کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) e ۳) 0 ۴) 1

۲ــ اگر $f_0(x)=\frac{1}{2-x}$ و به ازای $n=0,1,2,...$ داشته باشیم $f_{n+1}=f_0 of_n$، حاصل عبارت $f_9(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{21}{9}$ ۴) $\frac{19}{21}$

۳ــ اگر $z=f(x,y)$ تابع همگن درجه‌ی n باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $z=x^n f(1,\frac{y}{x})$ ۲) $z=y^n f(1,\frac{y}{x})$ ۳) $z=y^n f(\frac{y}{x},1)$ ۴) $z=x^n f(\frac{y}{x},1)$

۴ــ علامت فرم درجه دوم $\phi_A(x)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$، کدام است؟

۱) نامعین ۲) معین منفی ۳) شبه‌معین مثبت ۴) شبه‌معین منفی

۵ــ چهار جمله اول بسط مک‌لورن در تابع $f(x)=xLn(1+x)$، کدام است؟

۱) $x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}$ ۲) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$ ۳) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ ۴) $x^2-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^5}{4!}$

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix}B_{n\times n} & I_n\\ O_{n\times n} & C_{n\times n}\end{bmatrix}$ باشد و معکوس آن $A^{-1}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & T\end{bmatrix}$ باشد، X و Y کدام است؟

۱) $X=B^{-1}C^{-1}$ ، $Y=C^{-1}$ ۲) $X=C^{-1}$ ، $Y=B^{-1}$ ۳) $X=B^{-1}$ ، $Y=-B^{-1}C^{-1}$ ۴) $X=B^{-1}$ ، $Y=B^{-1}C^{-1}$

۷ــ توابع معکوس عرضه و تقاضا برای کالایی $\begin{cases}y=16-x^2\\ y=2x+1\end{cases}$ می‌باشد که در آن y قیمت و x مقدار کالاست. مازاد مصرف‌کننده چند واحد پول است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

۸ــ تابع تقاضای $q=f(p)$ را چنان تعیین می‌کنیم که در هر نقطه‌ی آن با فرض $p=2$ و $q=3$ کشش تقاضا نسبت به قیمت ۳- باشد، مقدار تقاضا به ازای $p=1$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۹ــ اگر A سطح محصور به خطوط $y=x$ و $y=0$ در فاصله‌ی $[0,2]$ باشد، مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_A xydxdy$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰ــ در مدل تار عنکبوتی داریم $\begin{cases}q_t=10-4p_t & \text{تقاضا}\\ q_t=-2+3p_{t-1} & \text{عرضه}\end{cases}$، اگر $p_0=3$ باشد، قیمت p_1 کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{7}{12}$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۹۹

۱ــ گزینه «۱» با استفاده از روش حل سری‌های تلسکوپی، که برای پیدا کردن مجموع سری‌هایی می‌باشد که در آنها دو جمله‌ی پشت‌سرهم از هم کم شده باشند، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}})=e^{\frac{1}{1}}-e^{\frac{1}{\infty}}=e-e^{0}=e-1$$

۲ــ گزینه «۴» با قرار دادن مقادیر n از $n=0$ در رابطه‌ی ترکیب داده شده باید الگوی f_9 را بیابیم.

$$n=0 \Rightarrow f_1=f_0of_0=\frac{1}{2-\frac{1}{2-x}}=\frac{2-x}{3-2x}$$

$$n=1 \Rightarrow f_2=f_0of_1=\frac{1}{2-\frac{2-x}{3-2x}}=\frac{1}{\frac{6-4x-2+x}{3-2x}}=\frac{3-2x}{4-3x}$$

به همین ترتیب داریم:

$$f_9=\frac{10-9x}{11-10x}\xrightarrow{x=-1}\frac{10-9(-1)}{11-10(-1)}=\frac{19}{21}$$

۳ــ گزینه «۱» اگر $z=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه ۱ باشد، داریم:

$$z=x^1f\,(1,\frac{y}{x})$$

اگر درجه همگن بودن n باشد، داریم:

$$z=x^nf\,(1,\frac{y}{x})$$

۴ــ گزینه «۳» ابتدا ماتریس هسیان مربوطه را تشکیل می‌دهیم که به صورت زیر است:

$$H=\begin{bmatrix}\phi_{x_1x_1} & \phi_{x_1x_2} & \phi_{x_1x_3}\\ \phi_{x_2x_1} & \phi_{x_2x_2} & \phi_{x_2x_3}\\ \phi_{x_3x_1} & \phi_{x_3x_2} & \phi_{x_3x_3}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\phi_{x_1}=2x_1-2x_3\\ \phi_{x_1x_1}=2\\ \phi_{x_1x_2}=0\\ \phi_{x_1x_3}=-2\end{matrix}$$

$$\phi_{x_2}=4x_2\ ,\ \phi_{x_2x_1}=0\ ,\ \phi_{x_2x_2}=4\ ,\ \phi_{x_2x_3}=0$$

$$\phi_{x_3}=2x_3-2x_1\ ,\ \phi_{x_3x_1}=-2\ ,\ \phi_{x_3x_2}=0\ ,\ \phi_{x_3x_3}=2$$

$$H=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow H_1=2>0\quad,\quad H_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=8>0\quad,\quad H_3=2(8)-2(8)=0$$

پس چون همه H ها مثبت نیستند، ماتریس شبه‌معین مثبت است.

۵ــ گزینه «۱» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $f(x)=Ln(1+x)$ که به‌صورت $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ می‌باشد، داریم:

$$x(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\cdots$$

۶ــ گزینه «۳» با توجه به اینکه معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از رابطه‌ی $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید، معکوس ماتریس A را به‌دست می‌آوریم و درایه‌های آن را با درایه‌های A^{-1} مساوی قرار می‌دهیم.

$$A^{-1}=\frac{1}{BC-0}\begin{bmatrix}C_{n\times n} & -I_n\\ 0 & B_{n\times n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{C}{BC} & -\frac{I_n}{BC}\\ 0 & \frac{B}{BC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & T\end{bmatrix}$$

پس باید:

$$\frac{1}{B}=X\Rightarrow X=B^{-1}\ ,\ -I_nB^{-1}C^{-1}=Y\Rightarrow Y=-B^{-1}C^{-1}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا با تساوی قرار دادن دو تابع عرضه و تقاضا، x تعادل را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$۱۶-x^۲=۲x+۱ \Rightarrow x^۲+۲x-۱۵=۰$$

$$(x-۳)(x+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۵ \quad (غ ق ق) \end{cases}$$

$$x_e=۳ \Rightarrow y_e=۲(۳)+۱=۷$$

$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_۰^۳ (\text{تقاضا}\, y - y_e)\,dx = \int_۰^۳ (۱۶-x^۲-۷)dx = \int_۰^۳ (۹-x^۲)\,dx = (۹x-\frac{x^۳}{۳})_۰^۳ = ۲۷-\frac{۲۷}{۳} = ۲۷-۹ = ۱۸$$

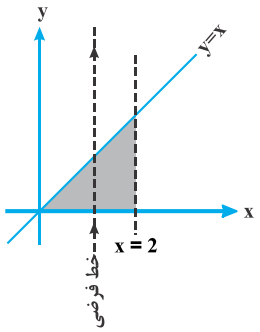
۸ـ گزینه «۴» اگر تابع تقاضا به صورت $q=\frac{A}{p^{\alpha}}$ باشد (A مقدار ثابت، q تقاضا و p قیمت کالا است)، کشش قیمتی تقاضا برابر $-\alpha$ است، پس در این مثال چون کشش قیمتی برابر -۳ می‌باشد، پس $\alpha=۳$ است و داریم:

$$q=۳, p=۲ \Rightarrow ۳=\frac{A}{(۲)^۳} \Rightarrow ۳=\frac{A}{۸} \Rightarrow A=۲۴$$

پس به ازای $p=۱$ داریم:

$$q=\frac{۲۴}{(۱)^۳}=۲۴$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا باید ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را مشخص کنیم تا بتوانیم حدود x و y را بیابیم.



$$I=\int_۰^۲\int_۰^x xy\,dy\,dx=\int_۰^۲ x(\frac{y^۲}{۲})_۰^x dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_۰^۲ x(x^۲)\,dx=\frac{۱}{۲}(\frac{x^۴}{۴})_۰^۲=\frac{۱}{۲}(۴)=۲$$

۱۰ـ گزینه «۲» با قرار دادن $t=۱$ در معادله‌ی عرضه داریم:

$$q_۱=-۲+۳p_۰=-۲+۳(۳)=۷$$

اکنون $t=۱$ را در معادله‌ی تقاضا قرار می‌دهیم و داریم:

$$q_۱=۱۰-۴p_۱=۱۰-۴p_۱=۷ \Rightarrow ۴p_۱=۳ \Rightarrow p_۱=\frac{۳}{۴}$$

سؤالات آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۰

۱ـ اگر $f(x)=\begin{cases} a[-x]+x & ; \ x<1 \\ b[x^2]+2 & ; \ x\geq 1 \end{cases}$ یک تابع پیوسته باشد، کدام مورد، درست است؟

۱) $a+b=-1$ ۲) $2a+b=1$ ۳) $a-b=1$ ۴) $2a-b=-1$

۲ـ فرض کنید $3=[2-x]$ در این صورت نمودار توابع $f(x)=|x+2|+|x+1|$ و $g(x)=2x^3+5x+1$ یکدیگر را در چند نقطه، قطع می‌کنند؟

۱) یک نقطه ۲) سه نقطه ۳) دو نقطه ۴) نقطهٔ تلاقی ندارند.

۳ـ مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=2\sin^4 x+\cos^4 x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴ـ تابع $y=\arcsin x$ در کدام تساوی زیر، صدق می‌کند؟

۱) $(1-x^2)y''=-xy'$ ۲) $(1-x^2)y''=-2xy'$ ۳) $(1-x^2)y''=2xy'$ ۴) $(1-x^2)y''=xy'$

۵ـ حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶ـ فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ و $\begin{cases} xu^2-4x^2v+y+8=0 \\ 4ye^u-v^3+x=1 \end{cases}$ باشند. اگر $u(2,0)=2$ باشد، مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}(2,0)$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{6}$ ۲) $\frac{13}{6}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۷ـ فرض کنید $f(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ مقدار $\int_1^2 f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۷

۸ـ چند معادلهٔ درجه دوم به صورت $ax^2+bx-c=0$ با شرط این‌که a، b و c اعداد طبیعی یک رقمی باشند، می‌توان نوشت که حاصل‌جمع ریشه‌ها، دو واحد از حاصل‌ضرب ریشه‌ها، بیشتر باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخنامه آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۰

۱ـ گزینه «۱» باید حد چپ و راست و مقدار تابع هر سه با هم برابر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=b[(۱)^۲]+۲=b+۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=a[-(\overline{۱})]+۱=a(-۱)+۱=-a+۱\end{cases} \Rightarrow\ b+۲=-a+۱ \Rightarrow b+a=-۱$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $[۲-x]=۳$ مقادیر x را به‌دست می‌آوریم:

$$[۲-x]=۳ \Rightarrow ۳\le ۲-x<۴ \xrightarrow{+(-۲)} ۱\le -x<۲ \xrightarrow{\times(-۱)} -۲<x\le -۱$$

در بازه‌ی به‌دست آمده تابع $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و قدرمطلق آن را برمی‌داریم: $f(x)=(x+۲)-(x+۱)=x+۲-x-۱=۱$

اکنون توابع $f(x)=۱$ و $g(x)$ را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$۲x^۳+۵x+۱=۱ \Rightarrow ۲x^۳+۵x=۰ \Rightarrow x(۲x^۲+۵)=۰$$

چون $x=۰$ دربازه‌ی $(-۲,-۱)$ قرار ندارد پس دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

$$x=۰\notin(-۲,-۱)$$

با توجه به پاسخ فوق گزینه سازمان سنجش یعنی گزینه (۱) اشتباه است و پاسخ صحیح گزینه (۴) می‌باشد.

۳ـ گزینه «۱» ابتدا تابع $f(x)$ داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$f(x)=\underbrace{\sin^۴ x}+\underbrace{\sin^۴ x+\cos^۴ x}$$

$۰\le \sin^۴ x\le ۱ \rightarrow$ ماکزیمم مقدار این تابع برابر ۱ می‌باشد

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۲(\sin x\cos x)^۲=۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=۱-۲(\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$$

$$۰\le \sin^۲ ۲x\le ۱ \Rightarrow \begin{cases}\text{ماکزیمم مقدار عبارت دوم}=۱-۰=۱\\ \text{مینیمم مقدار عبارت دوم}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

پس در کل ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر است با: $\max(f(x))=۱+۱=۲$

۴ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که مشتق $\arcsin u$ برابر $\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$ می‌باشد، داریم:

$$y=\arcsin x \Rightarrow y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}=(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y''=-\frac{۱}{۲}(۱-x^۲)^{-\frac{۳}{۲}}(-۲x) \Rightarrow y''=x(۱-x^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$$

در محاسبه y'' از فرمول مشتق تابع $(f(x))^n$ که به صورت $n(f(x))^{n-۱}\times f'(x)$ است کمک گرفتیم. با توجه به گزینه‌ها دو طرف تساوی را در $(۱-x^۲)$ ضرب می‌کنیم.

$$(۱-x^۲)y''=x\underbrace{(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}_{y'} \Rightarrow (۱-x^۲)y''=xy'$$

۵ـ گزینه «۳» صورت و مخرج کسر جلوی انتگرال را در e^x ضرب می‌کنیم و داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{۰}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}=\int_{-\infty}^{۰}\frac{e^x dx}{(e^x)^۲+e^۰}=\int_{-\infty}^{۰}\frac{e^x dx}{۱+(e^x)^۲}\xrightarrow[e^x dx=du]{e^x=u}\int\frac{du}{۱+u^۲}=\text{Arc tg}(u)$$

توجه داشته باشید که با توجه به وجود عامل e^x در صورت کسر که مشتق عامل e^x موجود در مخرج کسر می‌باشد، e^x مخرج را u فرض می‌کنیم و کل صورت کسر را du در نظر می‌گیریم و با استفاده از انتگرال $\int\frac{du}{a^۲+u^۲}$ که برابر $\frac{۱}{a}\text{Arctg}\frac{u}{a}$ می‌باشد، حاصل انتگرال را به دست آوردیم.

$$\Rightarrow I=\text{Arctg}(e^x)_{-\infty}^{۰}=\text{Arctg}(e^۰)-\text{Arctg}(e^{-\infty})=\text{Arctg}(۱)-\text{Arctg}(۰)=\frac{\pi}{۴}-۰=\frac{\pi}{۴}$$

۶ـ گزینه «۲» با فرض $\begin{cases} f: xu^۲ - ۴x^۲v + y + ۸ = ۰ \\ g: ۴ye^u - v^۳ + x - ۱ = ۰ \end{cases}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} u^۲ - ۸xv & -۴x^۲ \\ ۱ & -۳v^۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲xu & -۴x^۲ \\ ۴ye^u & -۳v^۲ \end{vmatrix}}$$

اکنون باید با داشتن مقادیر y, x, u مقدار v را بیابیم:

$$u(۲,۰) = ۲ \xrightarrow[y=۰]{x=۲} ۲(۲)^۲ - ۴(۲)^۲ v + ۰ + ۸ = ۰ \Rightarrow ۱۶ = ۱۶v \Rightarrow v = ۱$$

پس داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -۱۲ & -۱۶ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸ & -۱۶ \\ ۰ & -۳ \end{vmatrix}} = -\frac{(۳۶+۱۶)}{(-۲۴)} = -(\frac{۵۲}{-۲۴}) = \frac{۱۳}{۶}$$

۷ـ گزینه «۳» ابتدا با محاسبه دترمینان ماتریس داده شده، تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x(۱۲x^۲ - ۶x^۲) - x^۲(۶x - ۰) + x^۳(۲ - ۰) = ۶x^۳ - ۶x^۳ + ۲x^۳ = ۲x^۳$$

حال داریم:

$$\int_۱^۲ ۲x^۳ dx = ۲(\frac{x^۴}{۴})_۱^۲ = ۲(\frac{۱۶}{۴} - \frac{۱}{۴}) = ۲(\frac{۱۵}{۴}) = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

۸ـ گزینه «۳» حاصل جمع ریشه‌های معادله درجه دوم به فرم کلی $ax^۲ + bx + c = ۰$ را با $S = \frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب آنها را با $P = \frac{c}{a}$ نشان می‌دهیم.

$$ax^۲ + bx - c = ۰$$

$$S = P + ۲ \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{-c}{a} + ۲ \Rightarrow ۲a + b = c$$

$a = ۱ \Rightarrow ۲ + b = c \Rightarrow$ ۷ حالت: $\begin{cases} b = ۱ \\ \text{تا} \\ b = ۷ \end{cases}$ چون قرار است c هم یک رقمی باشد، پس b نمی‌تواند از ۷ بزرگتر باشد.

$a = ۲ \Rightarrow ۴ + b = c \Rightarrow$ ۵ حالت: $\begin{cases} b = ۱ \\ \text{تا} \\ b = ۵ \end{cases}$ چون قرار است c هم یک رقمی باشد، پس b نمی‌تواند از ۵ بزرگتر باشد.

$a = ۳ \Rightarrow ۶ + b = c \Rightarrow$ ۳ حالت: $\begin{cases} b = ۱ \\ \text{تا} \\ b = ۳ \end{cases}$ چون قرار است c هم یک رقمی باشد، پس b نمی‌تواند از ۳ بزرگتر باشد.

$a = ۴ \Rightarrow ۸ + b = c \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow$ ۱ حالت

جمعاً $(۱۶ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷)$ حالت می‌توان با شرایط داده شده، معادله نوشت.

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۱۴۰۰

۱ــ هزینهٔ کل تولیدکننده‌ای $TC = me^{nx}$ است. او می‌خواهد مقدار x ــ‌ای را تولید کند، که هزینهٔ هر واحد او حداقل باشد. هزینهٔ هر واحد او کدام است؟

۱) nme ۲) $\frac{m}{n}e$ ۳) me^{n} ۴) me^{n-1}

۲ــ در تابع $y = x^2e^{-x}$، کدام مورد درست نیست؟

۱) تابع در $x = 0$ مینیمم موضعی (نسبی) است.
۲) تابع در $x = 2$ ماکزیمم موضعی (نسبی) است.
۳) طول نقطهٔ عطف تابع $x = -2+\sqrt{2}$ است.
۴) برد تابع $[0,+\infty)$ است.

۳ــ مرتبهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $R(A)=2$ ۲) $R(A)=3$ ۳) $R(A)=4$ ۴) $R(A)=5$

۴ــ عناصر ماتریس $A = \begin{pmatrix} B & I_2 \\ 0 & C \end{pmatrix}$، به‌صورت ماتریس‌های 2×2 هستند. اگر $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ باشد، کدام مورد درست نیست؟

۱) $Z=0$ ۲) $T=C^{-1}$ ۳) $X=B^{-1}$ ۴) $Y=C^{-1}B^{-1}$

۵ــ علامت فرم درجه دوم مقید $Q_A(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$ کدام است؟

۱) شبه معین مثبت ۲) شبه معین منفی ۳) معین منفی ۴) معین مثبت

۶ــ برای حداکثرسازی مقید $\begin{cases} Max\ x+y \\ s.t. \\ x^2+y^2 \le 2 \end{cases}$، کدام مورد درست نیست؟

۱) ماکزیمم تابع ۲ است.
۲) $(1,1)$ مختصات نقطهٔ بحرانی است.
۳) ماکزیمم تابع ۲ و اندازهٔ ضریب لاگرانژ آن $\frac{1}{4}$ است.
۴) طول نقطهٔ بحرانی ۱ و اندازهٔ ضرایب لاگرانژ آن $\frac{1}{2}$ است.

۷ــ مقدار $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$، کدام است؟

۱) $\cosh^{-1}(1)$ ۲) $\sinh^{-1}(1)$ ۳) ۱ ۴) صفر

۸ــ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y = 0$، کدام است؟

۱) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$ ۲) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ ۳) $y = Ce^{2x} + e^{-2x}$ ۴) $y = Ce^{x} + e^{-x}$

۹ــ در الگوی تارعنکبوتی $D: q_t = 10 - 2P_t$ و $S: q_t = P_{t-1} + 2$، قیمت $P_0 = 2$، P_1 کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰ــ اگر $y = e^x$ تابع عرضه و قیمت تعادلی (واحد پول) $y_e = 5$ باشد، مازاد «عرضه‌کننده» کدام است؟

۱) $e^5 - 5$ ۲) $e^5 - 4$ ۳) $5\ln 5 - 4$ ۴) $5\ln 5 - 5$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۱۴۰۰

۱ــ گزینه «۱» در واقع باید هزینه‌ی متوسط را به‌دست آوریم و از آن مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\text{هزینه متوسط} = \frac{Tc}{x} = \frac{me^{nx}}{x}$$

$$(\text{هزینه متوسط})' = \frac{mne^{nx}x - me^{nx}}{x^2} = 0 \Rightarrow me^{nx}(nx-1) = 0 \Rightarrow nx - 1 = 0 \Rightarrow nx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

پس با جایگذاری $x = \frac{1}{n}$ در هزینه متوسط داریم:

$$\frac{me^{n(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} = mne$$

۲ــ گزینه «۳» ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم تا طول نقاط اکسترمم نسبی را به‌دست آوریم.

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

برای به‌دست آوردن طول نقطه‌ی عطف، مشتق دوم تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = 0 \Rightarrow e^{-x}(2 - 4x + x^2) = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

برای به دست آوردن نوع نقاط اکسترمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق دوم داریم:

$f''(0) = e^0(2 - 0 + 0) = 2 > 0$ مینیمم نسبی

$f''(2) = e^{-2}(2 - 8 + 4) = \frac{1}{e^2}(-2) < 0$ ماکزیمم نسبی

توجه داشته باشید که با توجه به این که تابع $y = x^2e^{-x}$ به دلیل وجود x^2 همواره بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد و e^{-x} نیز یک عامل همواره مثبت می‌باشد، پس برد تابع همواره بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد.

۳ــ گزینه «۲» با توجه به این‌که ماتریس داده شده (4×4) می‌باشد، حداکثر رتبه ماتریس می‌تواند ۴ باشد. اکنون باید وابستگی بین سطرها یا ستون‌های ماتریس را بیابیم.

سطر چهارم = سطر سوم + (سطر اول) ۲

پس رتبه ماتریس تا اینجا ۳ می‌شود، با محاسبه یک دترمینان 3×3 از ماتریس A داریم:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(1-4) - 2(2-2) - 1\times(4-1) = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

چون اولین دترمینان حاصل مخالف صفر می‌باشد، پس هیچ وابستگی دیگری بین سطرها یا ستون‌ها وجود ندارد و رتبه ماتریس همان ۳ می‌باشد.

۴ــ گزینه «۴» با توجه به این که معکوس ماتریس A برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}N'$$

پس داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{BC}\begin{bmatrix} C & -I_2 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -C^{-1}B^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-1},\ Z = 0,\ T = C^{-1},\ Y = -C^{-1}B^{-1}$$

بنابراین گزینه (۴) غلط می‌باشد.

۵ــ گزینه «۴» ابتدا باید ماتریس هشین را تشکیل دهیم.

$$Q_{x_1} = 8x_1 + 3x_2,\ Q_{x_1x_1} = 8,\ Q_{x_1x_2} = 3,\ Q_{x_2} = 3x_1 + 4x_2 \Rightarrow Q_{x_2x_2} = 4$$

$$H = \begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} \\ Q_{x_2x_1} & Q_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = 8 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 9 = 23 > 0$$

چون همه H ها مثبت هستند، پس ماتریس معین مثبت است.

۶ـ گزینه «۳»

روش اول: می‌خواهیم حداکثر تابع $f: x+y$ را تحت قید $g: x^۲+y^۲-۲=۰$ به‌دست آوریم و داریم:

$$u=f+\lambda g \Rightarrow u=(x+y)+\lambda(x^۲+y^۲-۲)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=۱+۲\lambda x=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲\lambda}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=۱+۲\lambda y=۰ \Rightarrow y=\frac{-۱}{۲\lambda}\end{cases}$$

با جایگذاری x و y به‌دست آمده در قید داده شده مقدار λ که همان ضریب لاگرانژ می‌باشد را به‌دست می‌آوریم.

$$(-\frac{۱}{۲\lambda})^۲+(\frac{-۱}{۲\lambda})^۲=۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴\lambda^۲}+\frac{۱}{۴\lambda^۲}=۲ \Rightarrow \frac{۲}{۴\lambda^۲}=۲ \Rightarrow \lambda^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\lambda=\frac{-۱}{۲}} x=۱\ ,\ y=۱ \Rightarrow (۱,۱)$$ بحرانی

$$\max(x+y)=۱+۱=۲$$

روش دوم: برای حل این سؤال می‌توان از روش ساده شده لاگرانژ به صورت زیر استفاده کرد:

$$f(x,y)=x+y \quad ; \quad g(x,y)=x^۲+y^۲=۲$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۲y} \Rightarrow x=y \Rightarrow x^۲+x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm۱, y=\pm۱$$

$$\begin{cases}x=y=۱ \Rightarrow f(x,y)=x+y=۲\\ x=y=-۱ \Rightarrow f(x,y)=x+y=-۲\end{cases} \Rightarrow \max(x+y)=۲$$

۷ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه‌ی $\int \frac{du}{\sqrt{u^۲+a^۲}}=\text{Ln}(u+\sqrt{u^۲+a^۲})$ که این تساوی نیز برابر $\sinh^{-۱}(u)$ می‌باشد، داریم:

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{x^۲+۱}}=\text{Ln}(x+\sqrt{x^۲+۱})=\sinh^{-۱}(x))_۰^۱=\sinh^{-۱}(۱)-\underbrace{\sinh^{-۱}(۰)}_{۰}=\sinh^{-۱}(۱)$$

۸ـ گزینه «۲» با استفاده از معادله‌ی مشخصه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن داریم:

$$\lambda^۲-۴=۰ \Rightarrow \lambda^۲=۴ \Rightarrow \lambda=\pm۲$$

$$y=c_۱e^{\lambda_۱x}+c_۲e^{\lambda_۲x} \Rightarrow y=c_۱e^{۲x}+c_۲e^{-۲x}$$

۹ـ گزینه «۴»

$$t=۱ \longrightarrow q_۱=P_۰+۲ \xrightarrow{P_۰=۲} ۲+۲=۴$$

$$q_۱=۱۰-۲P_۱ \Rightarrow ۴=۱۰-۲P_۱ \Rightarrow ۲P_۱=۶ \Rightarrow P_۱=۳$$

۱۰ـ گزینه «۳» ابتدا باید x تعادل را بیابیم و داریم:

$$e^x=۵ \Rightarrow x=\text{Ln}۵$$

مازاد عرضه‌کننده برابر است با:

$$\text{مازاد عرضه‌کننده}=\int_۰^{\text{Ln}۵}(y_e-\text{عرضه}\ y)\,dx=\int_۰^{\text{Ln}۵}(۵-e^x)dx=(۵x-e^x)_۰^{\text{Ln}۵}=۵\text{Ln}۵-e^{\text{Ln}۵}-(۰-e^۰)=۵\text{Ln}۵-۵+۱=۵\text{Ln}۵-۴$$

توجه داشته باشید که از رابطه‌ی $e^{\text{Ln}x}=x$ استفاده کرده‌ایم.

سؤالات آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۱

۱ـ جمله هشتم یک تصاعد حسابی برابر ۲۰ و جمله سی و هشتم آن برابر ۱۴۰ است. جمله صدم آن کدام است؟

۱) ۳۸۸ ۲) -۳۸۸ ۳) ۴۰۴ ۴) -۴۰۴

۲ـ ریشه‌های معادله $z^۳ - (\frac{۱-i}{۱+i})^{۱۰} = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -۱$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{i}{۲}, -۱$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{i}{۲}, -۱$ ۴) $\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -۱$

۳ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = Ln\sqrt{x}$، محور X و خط $x = e$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{e}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $e - ۲$

۴ـ حاصل $\lim_{n\to\infty} \sqrt[۲n]{۶^n + ۷^n + ۹^n}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵ـ اگر $\lim_{x\to\infty} (\frac{۴x^۲ - ۷x + ۱۲}{x - ۲} + ax + b) = ۰$، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) -۲ ۴) -۵

۶ـ بازهٔ همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x+۱)^n}{(n+۱)Ln^۲(n+۱)}$ کدام است؟

۱) $[۰, ۲]$ ۲) $[-۲, ۰]$ ۳) $[-۲, ۰)$ ۴) $[۰, ۲)$

۷ـ در کدام نقاط از منحنی $f(x) = x^۵ + ۵x - ۵$ خط مماس بر منحنی بر خط $x + ۱۰y = ۰$ عمود است؟

۱) $(۲, ۳۷), (-۲, -۴۷)$ ۲) $(۱, ۱), (-۱, -۱۱)$ ۳) $(۰, -۵)$ ۴) چنین نقاطی وجود ندارد.

۸ـ کدام گزینه در مورد تابع $z = ۶y^۲ - ۹y - ۳xy - ۷x + ۵x^۲ - ۲$ درست است؟

۱) $(۱, -۱, ۱۴)$ نقطه ماکسیمم تابع است. ۲) $(-۱, ۱, ۱۰)$ نقطه زینی تابع است.

۳) $(۱, ۱, -۱۰)$ نقطه مینیمم تابع است. ۴) $(-۱, -۱, ۲۲)$ نقطه مینیمم تابع است.

پاسخنامه آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۱

۱ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه اصلی جملات یک تصاعد حسابی داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$
$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{۱۴۰ - ۲۰}{۳۸ - ۸} = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴$$
$$a_۸ = a_۱ + ۷(۴) = ۲۰ \Rightarrow a_۱ = -۸$$
$$a_{۱۰۰} = -۸ + ۹۹(۴) = ۳۸۸$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا با کمک فرم قطبی اعداد مختلط داریم:

$$(\frac{۱-i}{۱+i})^{۱۰} = (\frac{\sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۴}}}{\sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}})^{۱۰} = (e^{-i\frac{\pi}{۲}})^{۱۰} = e^{-i۵\pi} = e^{i\pi}$$

حالا معادله $z^۳ = e^{i\pi}$ را حل می‌کنیم:

$$z = \sqrt[۳]{۱}e^{i\frac{\pi + ۲k\pi}{۳}} \quad k = ۰, ۱, ۲ \Rightarrow \begin{cases} z_۰ = e^{i\frac{\pi}{۳}} = \frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ z_۱ = e^{i\frac{۳\pi}{۳}} = -۱ \\ z_۲ = e^{i\frac{۵\pi}{۳}} = \frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه یک سمت ناحیه با محور X محدود شده است، پس یکی از حدود انتگرال از معادله $Ln\sqrt{x}=0$ به دست می‌آید که $x=1$ است. در نتیجه برای محاسبه مساحت مورد نظر داریم:

$$S=\int_1^e Ln\sqrt{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^e Lnxdx=\frac{1}{2}(xLnx-x)_1^e=\frac{1}{2}[(e-e)-(0-1)]=\frac{1}{2}$$

۴ـ گزینه «۱» با توجه قانون رشد توابع نمایی، حد داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{6^n+7^n+9^n}\sim\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{9^n}=\lim_{n\to\infty}9^{\frac{n}{2n}}=9^{\frac{1}{2}}=3$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا حد داده شده را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^2-7x+12}{x-2}+ax+b)=\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^2-7x+12+ax^2+(b-2a)x-2b}{x-2})=\lim_{x\to\infty}(\frac{(4+a)x^2+(b-2a-7)x+(12-2b)}{x-2})$$

برای اینکه حاصل حد فوق صفر باشد، باید ضریب x^2 و x در صورت صفر شود. یعنی داریم:

$$\begin{cases}4+a=0\Rightarrow a=-4\\ b-2a-7=0\Rightarrow b=-1\end{cases}\Rightarrow a+b=-4-1=-5$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه سری توانی داده شده به فرم $\sum a_n(x-a)^n$ است، بازه همگرایی باید نسبت به $x=a=-1$ متقارن باشد که فقط گزینه (۲) و (۳) این گونه است. برای تشخیص گزینه صحیح، کافیست همگرایی در تنها وجه تمایز آنها یعنی $x=0$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)Ln^2(n+1)}$$

در بررسی همگرایی این سری از این نکته بسیار کاربردی که در سری‌های به فرم $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(Lnn)^q}$ اگر $p=1$ باشد، به ازای $q>1$ همگراست کمک می‌گیریم. پس سری داده شده چون $q=2$ است همگراست و بازه همگرایی باید شامل 0 باشد؛ یعنی گزینه (۲) صحیح است.

۷ـ گزینه «۲» با توجه به این که شیب خط داده شده $m'=-\frac{1}{10}$ است، باید نقاطی از منحنی را پیدا کنیم که شیب خط مماس (مقدار مشتق) برابر $m=-\frac{1}{m'}=10$ باشد. پس داریم:

$$m=y'=5x^4+5=10\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm1$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x,y)=5x^2-7x-3xy+6y^2-9y-2$$

$$\left.\begin{matrix}f_x=10x-7-3y=0\\ f_y=12y-9-3x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(x,y)=(1,1)\Rightarrow z=-10$$

با توجه به اینکه فقط در یک گزینه این نقطه آمده است نیازی به بررسی نوع نقطه بحرانی نیست؛ ولی محض اطمینان داریم:

$$\left.\begin{matrix}f_{xx}=10\\ f_{yy}=12\\ f_{xy}=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=(10)(12)-(-3)^2=120-9=111>0$$

پس این نقطه از نوع مینیمم نسبی است.

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۱۴۰۱

۱ــ حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sin\sqrt{x}}$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۲ــ به ازای تابع $f(x)=x^2-2x+1$ با دامنه $[1,+\infty)$، حاصل $(f^{-1})'(1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳ــ در تابع پارامتری $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه متناظر با $t=\pi$ ، کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) π

۴ــ مقدار انتگرال $\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}dx$ کدام است؟

۱) $e-2$ ۲) $2e-1$ ۳) $6e-3$ ۴) $3e-6$

۵ــ اگر $f^{(k)}(x)$ بیانگر مشتق مرتبه k ام تابع $f(x)=x^4\sin x-x^5\cos x$ باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $f^{(7)}(0)<0$ ۲) $f^{(7)}(0)>0$ ۳) $f^{(5)}(0)>0$ ۴) $f^{(5)}(0)<0$

۶ــ اگر $f(x,y)=e^{xy}+\frac{x}{y}$، آن‌گاه $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)$ ، کدام است؟

۱) $e^2+\frac{1}{4}$ ۲) $e^2+\frac{1}{2}$ ۳) $2e^2-\frac{1}{2}$ ۴) $2e^2-\frac{1}{4}$

۷ــ اگر x و y متغیرهای مستقل و نیز u و v نسبت به هم مستقل باشد و $x=u-v$ و $y=2uv$ ، آن‌گاه $\frac{\partial v}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{v}{u+v}$ ۲) $-\frac{u}{u+v}$ ۳) $\frac{v}{u-v}$ ۴) $\frac{u}{u-v}$

۸ــ ماکزیمم و مینیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=x+2y-3z$ بر ناحیه $D=\{(x,y,z):x^2+4y^2+9z^2\le 108\}$ کدام است؟

۱) ۹ و ۱۸- ۲) ۹ و ۹- ۳) ۱۸ و ۹- ۴) ۱۸ و ۱۸-

۹ــ حاصل $\int_0^3\int_0^{9-x^2}\frac{x^3e^y}{9-y}dydx$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}(e^3-10)$ ۲) $\frac{1}{4}(e^9-10)$ ۳) $\frac{1}{2}(e^9-10)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^3-10)$

۱۰ــ اگر y جواب معادله دیفرانسیل $xy'-y=x^2\sin x$ با شرط اولیه $y(\frac{\pi}{2})=1$ باشد، آن‌گاه $y(\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}-2$ ۲) $\frac{\pi}{2}+2$ ۳) $\pi-2$ ۴) $\pi+2$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ــ دکتری ۱۴۰۱

۱ــ گزینه «۴» توجه داشته باشید حد داده شده به یک دلیل بنیادی و بسیار ساده وجود ندارد؛ آن هم عدم تعریف تابع در بازه چپ $x = 0$ است. به همین خاطر حد چپ تابع تعریف نشده و در کل حد وجود ندارد.

۲ــ گزینه «۳» تابع داده شده در واقع $f(x) = (x-1)^2$ است. پس به راحتی تابع معکوس را استخراج می‌کنیم:

$$y = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = x-1 \Rightarrow x = 1+\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

۳ــ گزینه «۲» به راحتی با استفاده از مشتق توابع پارامتری داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\sin t + \sin t + t\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = tgt$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+tg^2t}{t\cos t} \xrightarrow{t=\pi} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+0}{\pi(-1)} = -\frac{1}{\pi}$$

۴ــ گزینه «۴» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $\sqrt[3]{x} = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$$

$$I = \int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^1 e^t 3t^2dt = 3\underbrace{\int_0^1 t^2e^tdt}_{I_1}$$

برای حل انتگرال I_1 نیز با استفاده از روش جدول جزء به جزء داریم:

	t^2	e^t
+	$2t$	e^t
−	2	e^t
+	0	e^t

$$I_1 = \int_0^1 t^2e^tdt = (t^2-2t+2)e^t\Big|_0^1 = (1-2+2)e-(0-0+2) = e-2 \Rightarrow I = 3I_1 = 3e-6$$

۵ــ گزینه «۲» با توجه به اینکه مشتق حداکثر از مرتبه ۷ تابع در مبدأ مورد بررسی است، از بسط مک‌لورن ۲ تابع $\sin x$ و $\cos x$ (تا درجه‌ای که بعد از ضرب در تابع چندجمله‌ای قبل از حداکثر از درجه ۷ شود) در تابع استفاده کرده و داریم:

$$f(x) = x^4\sin x - x^5\cos x = x^4\left(x - \frac{x^3}{3!}+\cdots\right) - x^5\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^7+\cdots = \frac{1}{3}x^7+\cdots$$

با توجه به با ادامه بسط مک‌لورن فقط عباراتی از توان بالاتر اضافه می‌شود، از مشتق مرتبه ۱ تا مرتبه ۵ تابع و همچنین مشتقات از مراتب بالاتر از ۷ در مبدأ صفر خواهد بود؛ اما در مورد مشتق مرتبه هفتم واضح است که داریم: $f^{(7)}(x) = \frac{1}{3}(7!) > 0$

۶ــ گزینه «۳» به راحتی با محاسبه مشتق جزئی تابع داریم:

$$f(x,y) = e^{xy} + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2} \xrightarrow{(1,2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^2 + 2e^2 - \frac{1}{4} = 3e^2 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x^2e^{xy} + \frac{2x}{y^3} \xrightarrow{(1,2)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^2 + \frac{1}{4}$$

با توجه به محاسبات بالا، مقدار خواسته شده در سوال برابر است با: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 3e^2 - \frac{1}{4} - \left(e^2 + \frac{1}{4}\right) = 2e^2 - \frac{1}{2}$

۷ـ گزینه «۱» به راحتی با استفاده از روابط محاسبه مشتق جزئی با کمک ماتریس ژاکوبین داریم:

$$F(x,y,u,v)=x-u+v=0\ ;\quad G(x,y,u,v)=y-2uv=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2u & -2v\end{vmatrix}}=-\frac{-2v}{-2v-2u}=-\frac{v}{v+u}$$

۸ـ گزینه «۴» به راحتی با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

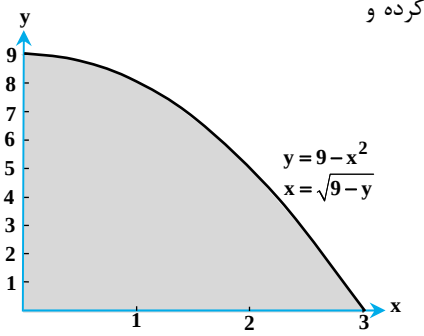
$$f(x,y,z)=x+2y-3z\ \ ;\quad g(x,y)=x^2+4y^2+9z^2=108$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{1}{2x}=\frac{2}{8y}=\frac{-3}{18z}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x\ ;\ z=-\frac{1}{3}x$$

$$x^2+4y^2+9z^2=x^2+4(\frac{1}{2}x)^2+9(-\frac{1}{3}x)^2=3x^2=108\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\pm6\,;\,y=\pm3\ ,\ z=\mp2$$

$$f(6,3,-2)=6+6-3(-2)=18\ ;\ f(-6,-3,2)=-6-6-3(2)=-18$$

۹ـ گزینه «۲» حل انتگرال داده شده به این ترتیب امکان‌پذیر نیست. پس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده و با کمک رسم ناحیه، حدود انتگرال جدید را به دست می‌آوریم:



$$I=\int_0^3\int_0^{9-x^2}\frac{x^3e^y}{9-y}dydx=\int_0^9\int_0^{\sqrt{9-y}}\frac{x^3e^y}{9-y}dxdy$$

$$=\int_0^9\frac{e^y}{9-y}(\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^{\sqrt{9-y}}dy=\frac{1}{4}\int_0^9\frac{e^y}{9-y}(9-y)^2dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^9e^y(9-y)dy=\frac{1}{4}[e^y(9-y+1)]_0^9=\frac{1}{4}[e^9(9-9+1)-(9-0+1)]=\frac{1}{4}(e^9-10)$$

۱۰ـ گزینه «۴» برای حل معادله دیفرانسیل داده شده، کافیست به صورت زیر عمل کنیم:

$$xy'-y=x^2\sin x\xrightarrow{x=0}-y=0\Rightarrow y(0)=0$$

$$x\neq0\Rightarrow\frac{xy'-y}{x^2}=\sin x\Rightarrow(\frac{y}{x})'=\sin x\Rightarrow\frac{y}{x}=-\cos x+c\Rightarrow y=-x\cos x+cx$$

$$y(\frac{\pi}{2})=-(\frac{\pi}{2})(0)+c(\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow c=\frac{2}{\pi}\Rightarrow y=-x\cos x+\frac{2}{\pi}x$$

$$y(\pi)=-(\pi)(-1)+\frac{2}{\pi}(\pi)=\pi+2$$

سؤالات آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۲

۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x^۳-\left[x^۳\right]}{x-۳}$، کدام است؟

۱) -۲۷ ۲) -۹ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۲ـ تعداد مجانب‌های تابع $y=\frac{۲^x+۱}{۲^x-۸}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳ـ اگر $|x|<۱$، داشته باشیم $x\le f(x)\le x+x^۲$، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴ـ تقریب خطی تابع عرضه $y=\sqrt[۳]{۴+۵x}$، کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}(۱+\frac{۵}{۱۲}x)$ ۲) $\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۵}x$ ۳) $\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳}x$ ۴) $۴+\frac{۵}{۳}x$

۵ـ مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^۲}$، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\pi$

۶ـ حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{dx}{۱-\sin x}$، کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۱+\sqrt{۳}$ ۳) $۴-\sqrt{۲}$ ۴) $۳-\sqrt{۲}$

۷ـ فرض کنید شرکتی دستگاهی خریداری کرده که سود اضافه حاصل از آن (تفاضل درآمد اضافی از هزینه اضافی) در هر لحظه از زمان، به صورت $۲۲۵-\frac{۱}{۴}t^۲$ است. اگر هزینه تعمیر و نگهداری $۲t^۲$ باشد و مجاز به فروش دستگاه در هر زمانی بدون انجام هزینه با ارزش اسقاط باشیم، زمان فروش (t) و ماکزیمم سود اضافی $(T(t))$ چند واحد است؟

۱) $T(t)=۱۲۰۰, t=۱۰$ ۲) $T(t)=۱۵۰۰, t=۱۰$ ۳) $T(t)=۱۲۰۰, t=۱۵$ ۴) $T(t)=۱۵۰۰, t=۱۵$

۸ـ برای جفت توابع تقاضا و عرضه $y=۴۰-۲x^۲$ و $y=۴+x^۲$، ماکزیمم درآمد مالیاتی که توسط دولت دریافت می‌شود، کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۳۳

پاسخنامه آزمون حسابداری ـ دکتری ۱۴۰۲

۱ـ گزینه «۴» ابتدا حاصل جزء صحیح را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{x^۳-\left[(۳^+)^۳\right]}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x^۳-\left[۲۷^+\right]}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x^۳-۲۷}{x-۳}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۳^+}\frac{۳x^۲}{۱}=۳(۹)=۲۷$$

۲ـ گزینه «۴»

مجانب قائم $\boxed{x=۳}\Leftarrow$ مخرج: مجانب قائم $=۰\Rightarrow ۲^x-۸=۰\Rightarrow ۲^x=۸=۲^۳\Rightarrow$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\frac{۲^x}{۲^x}=۱\Rightarrow y=۱$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\frac{۲^x+۱}{۲^x-۸}=\frac{۲^{-\infty}+۱}{۲^{-\infty}-۸}=\frac{۰+۱}{۰-۸}=-\frac{۱}{۸}$

بنابراین تابع ۳ خط مجانب دارد.

۳ـ گزینه «۳» از دو طرف نامساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$x\le f(x)\le x+x^۲\xrightarrow{\text{مشتق}}۱\le f'(x)\le ۱+۲x\xrightarrow{x=۰}۱\le f'(۰)\le ۱\Rightarrow f'(۰)=۱$$

۴ـ گزینه «۱» ابتدا تابع داده شده را از رادیکال خارج می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{4+5x}=(4+5x)^{\frac{1}{3}}=(4(1+\frac{5}{4}x))^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}(1+\frac{5}{4}x)^{\frac{1}{3}}$$

با استفاده از هم‌ارزی $(1+u)^n \underset{u\to 0}{\sim} 1+nu$ داریم:

$$=\sqrt[3]{4}(1+\frac{1}{3}(\frac{5}{4}x))=\sqrt[3]{4}(1+\frac{5}{12}x)$$

۵ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه زیر داریم:

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\text{Arc}\tan(\frac{u}{a})$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{Arc}\tan(\frac{x}{1})=\text{Arc}\tan(x)_{-\infty}^{+\infty}=\text{Arc}\tan(+\infty)-\text{Arc}\tan(-\infty)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

۶ـ گزینه «۲» ابتدا کسر جلوی انتگرال را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\int\frac{dx}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

حال چون $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ می‌باشد، داریم:

$$\int(1+\tan^2 x)dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

با تغییر متغیر $u=\cos x$ در انتگرال دوم داریم: $(du=-\sin x dx)$

$$=\tan x)_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\frac{-du}{u^2}=\sqrt{3}-\int u^{-2}du=\sqrt{3}-(\frac{u^{-1}}{-1})=\sqrt{3}+(\frac{1}{u})=\sqrt{3}+(\frac{1}{\cos x})_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}+(\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1})=\sqrt{3}+(2-1)=\sqrt{3}+1$$

۷ـ گزینه «۲» برای محاسبه سود باید درآمد را منهای هزینه کنیم و سپس از آن انتگرال بگیریم:

$$T(x)=\int((225-\frac{1}{4}t^2)-(2t^2))dt=\int(225-\frac{9}{4}t^2)dt$$

$$T(x)=225t-\frac{9}{12}t^3\ \Rightarrow T'(x)=225-\frac{27}{12}t^2=0$$

$$225-\frac{9}{4}t^2=0\Rightarrow t^2=\frac{225\times 4}{9}\Rightarrow t=\frac{15\times 2}{3}=10$$

اکنون $T(10)$ برابر است با:

$$T(10)=225(10)-\frac{9}{12}(10)^3=2250-\frac{9}{12}(1000)=2250-750=1500$$

۸ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن قیمت واقعی باید مقدار مالیات t را به تابع عرضه اضافه کنیم و سپس توابع عرضه و تقاضا را با هم مساوی قرار دهیم و از روی آن t را برحسب x بیابیم:

$$4+x^2+t=40-2x^2\ \Rightarrow t=-3x^2+36$$

درآمد مالیاتی دولت برابر است با مقدار عرضه ضربدر مقدار مالیات هر واحد و داریم:

$$\text{درآمد مالیاتی } T(x)=tx=(-3x^2+36)x=-3x^3+36x$$

$$T'(x)=-9x^2+36=0\ \Rightarrow x^2=4\ \Rightarrow x=2$$

اکنون $T(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$T(2)=-3(2)^3+36(2)=-24+72=48$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ دکتری ۱۴۰۲

۱ـ حاصل‌ضرب مقادیر ویژه ماتریس $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) -12 ۴) -16

۲ـ اگر $A = \lim_{x\to-\infty} (\frac{3x-4}{3x+2})^{\frac{x+1}{3}}$، مقدار $\ln A$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳ـ اگر به ازای $(x,y)=(a,b)$، عبارت $5x^2+9y^2-12xy-6x+14$ حداقل شود، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴ـ مساحت قسمتی از صفحهٔ مختصات که به وسیلهٔ منحنی $y^2=x^2-x^4$ محصور می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۵ـ یک تولیدکنندهٔ کالا در می‌یابد که پس از فروش x کالا، درآمد نهایی بابت هر کالا $-5e^{-\frac{x}{50}}+15$ واحد پول است. درآمد کل او از فروش ۱۰۰ کالا، چند واحد پول است؟

۱) $1250-250e^{-2}$ ۲) $1500-250e^{-2}$ ۳) $1250+250e^{-2}$ ۴) $1500+250e^{-2}$

۶ـ جریان پیوسته‌ای از پرداخت‌ها با آهنگ ثابت ده‌هزار واحدپول در سال برقرار است. اگر بخواهیم این جریان همیشگی بوده و با فرض اینکه نرخ بهرهٔ سالانه ده درصد که به‌طور پیوسته به سرمایه اضافه می‌شود، باشد، ارزش فعلی آن چند هزار واحدپول است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۰

۷ـ تابع هزینهٔ نهایی یک واحد تولیدی $f(x)=15x^2+8x-1$ و هزینه کل در زمان تأسیس این واحد ۱۰۰ هزار واحد پول است. هزینهٔ کل ۲ سال پس از تأسیس این واحد، چند هزار واحد پول است؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۵ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۷۵

۸ـ فرض کنید تابع تقاضا به صورت $y=4-3^x$ و $x_0=1$ باشد. مقدار مازاد مصرف، کدام است؟

۱) $\frac{\ln 27-2}{\ln 3}$ ۲) $\frac{4\ln 3-2}{\ln 3}$ ۳) $\frac{\ln 3}{\ln 3-2}$ ۴) $\frac{2}{\ln 3}$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ دکتری ۱۴۰۲

۱ـ گزینه «۱» حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با دترمینان ماتریس، پس داریم:

$$\text{دترمینان} = -3(-10+6)-1\times(14-6)-1\times(-42+30)=12-8+12=16$$

سازمان سنجش گزینه (۳) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما با توجه به توضیحات فوق، گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۲ـ گزینه «۲» حالت مبهم $(1)^{\infty}$ است که به صورت زیر آن را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(f)^g \to \lim_{x\to\infty} e^{(f-1)\times g}$$

بنابراین داریم:

$$A = e^{\lim_{x\to-\infty}(\frac{3x-4}{3x+2}-1)(\frac{x+1}{3})} = e^{\lim_{x\to-\infty}(\frac{-6}{3x+2})(\frac{x+1}{3})} = e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x}{9x}} = e^{-\frac{6}{9}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

پس خواهیم داشت:

$$\ln A = \ln e^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}\underbrace{\ln e}_{1} = -\frac{2}{3}$$

۳ـ گزینه «۴» از تابع داده شده نسبت به x و y جداگانه مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$f_x : ۱۰x - ۱۲y - ۶ = ۰$$

$$f_y : ۱۸y - ۱۲x = ۰ \Rightarrow ۱۸y = ۱۲x \xrightarrow{\div ۶} ۳y = ۲x \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه اول داریم:

$$۱۰x - ۱۲(\frac{۲}{۳}x) - ۶ = ۰ \Rightarrow ۱۰x - ۸x = ۶ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

پس y هم برابر است با:

$$y = \frac{۲}{۳}(۳) = ۲$$

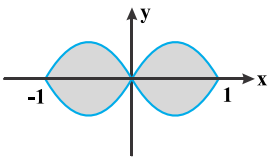
بنابراین $(x, y) = (۳, ۲)$ می‌باشد و مقدار ab برابر $(۶ = ۲ \times ۳)$ است.

۴ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که با تبدیل x به $-x$ و همچنین y به $-y$ معادله منحنی تغییری نمی‌کند، پس این منحنی نسبت به محورهای x و y متقارن است و ریشه‌های آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y^۲ = x^۲ - x^۴ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow x^۲ - x^۴ = ۰ \Rightarrow x^۲(۱ - x^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \ , \ x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \text{ و } y = \sqrt{x^۲ - x^۴} = |x|\sqrt{۱ - x^۲}$$

با توجه به متقارن بودن منحنی تابع، حاصل انتگرال تابع از صفر تا ۱ را به دست می‌آوریم و سپس آن را ۴ برابر می‌کنیم:



$$S = ۴ \times \int_۰^۱ x\sqrt{۱ - x^۲}\,dx \xrightarrow[-۲xdx = du]{۱ - x^۲ = u}$$

$$= ۴(-\frac{۱}{۲})\int \sqrt{u}\,du = -۲\int u^{\frac{۱}{۲}}du = -۲ \times \frac{۲}{۳}(u^{\frac{۳}{۲}}) = -\frac{۴}{۳}((۱ - x^۲)^{\frac{۳}{۲}})_۰^۱ = -\frac{۴}{۳}(۰ - ۱) = \frac{۴}{۳}$$

۵ـ گزینه «۴» اگر بخواهیم از درآمد نهایی به درآمد کل برسیم باید از آن انتگرال بگیریم، بنابراین داریم:

$$\text{درآمد کل} = \int (۱۵ - ۵e^{-\frac{x}{۵۰}})dx = ۱۵x - ۵(-۵۰)e^{-\frac{x}{۵۰}} \xrightarrow{x = ۱۰۰} ۱۵۰۰ + ۲۵۰e^{-\frac{۱۰۰}{۵۰}} = ۱۵۰۰ + ۲۵۰e^{-۲}$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه ارزش فعلی یک جریان نقدی ابدی (Perpetuity) برابر مقدار ثابت پرداختی در هر سال تقسیم بر نرخ بهره است، داریم:

$$PV = \frac{c}{i} = \frac{۱۰}{\%۱۰} = ۱۰۰$$

۷ـ گزینه «۳» برای به دست آوردن هزینه کل باید از تابع هزینه نهایی انتگرال بگیریم، بنابراین داریم:

$$\text{هزینه کل} = \int (\text{هزینه نهایی})\,dx \Rightarrow Tc = \int (۱۵x^۲ + ۸x - ۱)\,dx$$

$$= ۵x^۳ + ۴x^۲ - x \xrightarrow{x = ۲} ۵(۲)^۳ + ۴(۲)^۲ - ۲ = ۴۰ + ۱۶ - ۲ = ۵۴$$

با توجه به این که هزینهٔ اولیه ۱۰۰ هزار واحد پول بوده است. پس بعد از دو سال هزینه برابر $(۱۰۰ + ۵۴ = ۱۵۴)$ هزار واحد پول می‌باشد.

۸ـ گزینه «۱»

$$x_۰ = ۱ \Rightarrow y_۰ = ۴ - ۳ = ۱$$

حال با استفاده از فرمول مازاد مصرف کننده، داریم:

$$\text{مازاد مصرف کننده} = \int_۰^{x_۰} (\text{تابع تقاضا} - y_۰)dx = \int_۰^۱ (۴ - ۳^x - ۱)dx = \int (۳ - ۳^x)\,dx$$

انتگرال $\int a^x dx$ برابر است با $\frac{a^x}{Lna}$ بنابراین داریم:

$$(۳x - \frac{۳^x}{Ln۳})_۰^۱ = (۳ - \frac{۳}{Ln۳}) - (۰ - \frac{۱}{Ln۳}) = ۳ - \frac{۲}{Ln۳} = \frac{۳Ln۳ - ۲}{Ln۳} = \frac{Ln(۳)^۳ - ۲}{Ln۳} = \frac{Ln۲۷ - ۲}{Ln۳}$$