مدرسان شریف

# فصل اول

## «بردارها و دستگاه‌های مختصات»

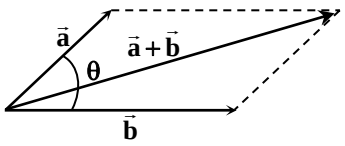
❖ **تعریف کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر):** کمیت‌هایی هستند که با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص می‌شوند و از این رو فقط دارای بزرگی هستند. برخی از کمیت‌های اسکالر فیزیکی عبارتند از: زمان، چگالی، انرژی و دما. محاسبات مربوط به کمیت‌های نرده‌ای به کمک جبر معمولی انجام می‌شود.

❖ **تعریف کمیت‌های برداری:** کمیت‌هایی هستند که هم بزرگی و هم جهت دارند و طبق قواعد جمع بردارها با هم جمع می‌شوند. برخی از کمیت‌های برداری فیزیکی عبارتند از: جابجایی، سرعت، شتاب و نیرو.

## درسنامه (۱): مفاهیم اولیه بردارها

### برآیند دو بردار در حالت کلی

برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با یکدیگر زاویه $\theta$ می‌سازند عبارت است از قطر متوازی‌الاضلاعی که توسط این دو بردار ساخته می‌شود. طول بردار برآیند از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:




$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

**مثال۱: بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازهٔ یکسان برابر ۵ هستند. اگر جمع این دو بردار برابر $6\hat{j}$ باشد، زاویهٔ میان این دو بردار کدام است؟**

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\cos^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)$ ۲) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ ۳) $120^\circ$ ۴) $30^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از رابطه ضرب داخلی دو بردار می‌توانیم به راحتی اندازه بردار حاصل جمع را تعیین کنیم.

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2=(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2\vec{A}.\vec{B}$$

طبق صورت سؤال $|A|=5$، $|B|=5$ و $|\vec{A}+\vec{B}|=6$ است. بنابراین داریم:

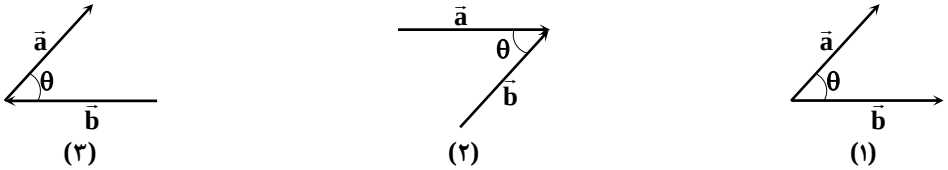
$$36=25+25+2\vec{A}.\vec{B} \Rightarrow -14=2\vec{A}.\vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=-7$$

دوباره با استفاده از تعریف ضرب داخلی بردارها برحسب زاویه بین دو بردار داریم:

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta \Rightarrow -7=5\times5\times\cos\theta$$

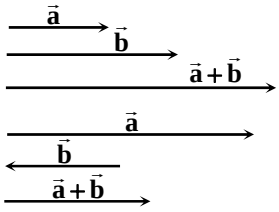
$$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{7}{25} \Rightarrow \theta=\cos^{-1}(-\frac{7}{25})$$

**نکته۱:** در شکل‌های (۱) و (۲)، $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است اما در شکل (۳) زاویه بین دو برابر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عبارت است از مکمل زاویه $\theta$.




**تعریف مکمل یک زاویه:** دو زاویه‌ی $\alpha$ و $\beta$، مکمل یکدیگر نامیده می‌شوند، هرگاه $\alpha+\beta=\pi$ باشد.

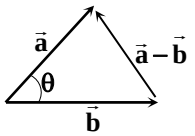
در بررسی جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حالات خاص زیر را داریم:




۱) $\theta=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲}$ (قضیه فیثاغورث)

۲) $\theta=۰ \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

۳) $\theta=\pi \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}| \quad ; \quad |\vec{a}|>|\vec{b}|$




عمل تفریق برداری را می‌توان با تعریف یک بردار منفی به صورت برداری که از نظر بزرگی مساوی با بردار اصلی ولی در جهت مخالف آن است، انجام داد. پس می‌توان نوشت: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

**مثال۲: برآیند دو بردار $\vec{V}_۱=۲a\hat{e}_۱$ و $\vec{V}_۲=۳a\hat{e}_۲$ بردار $\vec{V}=۴a\hat{e}$ شده است که هر سه بردار $\hat{e}_۱$، $\hat{e}_۲$ و $\hat{e}$ بردارهای یکه هستند و a عددی مثبت است. زاویه بین دو بردار $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ کدام است؟** (فیزیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $۷۵^\circ$ ۲) $\text{Arc}\cos\frac{۱}{۴}$ ۳) $۶۰^\circ$ ۴) $\text{Arc}\cos\frac{۲}{۳}$

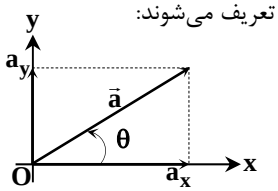
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای به دست آوردن زاویه‌ی بین دو بردار، کافی است از رابطه اندازه بردار برایند استفاده کنیم. اگر $\alpha$ زاویه بین دو بردار باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{V}_۱+\vec{V}_۲=\vec{V} \Rightarrow \vec{V}_۱^۲+\vec{V}_۲^۲+۲V_۱V_۲\cos\alpha=V^۲ \Rightarrow ۴a^۲+۹a^۲+۱۲a^۲\cos\alpha=۱۶a^۲ \Rightarrow ۱۲a^۲\cos\alpha=۳a^۲ \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۳}{۱۲}$$

$$\alpha=\text{Arc}\cos\frac{۱}{۴}$$

## تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های آن در یک دستگاه مختصات معین

اگر از انتهای بردار a خطوطی عمود بر محورهای مختصات رسم کنیم، کمیت‌های $a_x$ و $a_y$ به دست می‌آیند، که مؤلفه‌های بردار a نام دارند. این فرآیند را تجزیه یک بردار به مؤلفه‌هایش می‌نامند. مطابق شکل مقابل، مؤلفه‌های $a_x$ و $a_y$ بردار $\vec{a}$ در صفحه xoy به صورت زیر تعریف می‌شوند:




$$\begin{cases} a_x=|\vec{a}|\cos\theta \\ a_y=|\vec{a}|\sin\theta \end{cases}$$

$\theta$، زاویه‌ای است که بردار $\vec{a}$ با جهت **مثبت** محور x می‌سازد و نسبت به این محور، به صورت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. مؤلفه‌های هر بردار، تنها زمانی کاملاً مشخص می‌شوند که نوع دستگاه مختصات به کار رفته مشخص شده باشد.

به این ترتیب بردار $\vec{a}$ را بر حسب مؤلفه‌های آن می‌توان به صورت زیر نوشت: $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه، به ترتیب در راستای محورهای x و y هستند.

با داشتن $a_x$ و $a_y$ می‌توان طول بردار $\vec{a}$ و زاویه آن با محور x ها را پیدا کرد. $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^۲+a_y^۲} \quad , \quad \tan\theta=\frac{a_y}{a_x}$

برای یافتن برآیند دو بردار، می‌توانیم مؤلفه‌های آن‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم.

**نکته۲:** یک بردار را در سه بعد، می‌توان به کمک زوایای هادی معرفی کرد: $\vec{a}=|\vec{a}|(\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k})$

که در آن $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایای هادی بوده و در حقیقت زاویه بردار $\vec{a}$ با محورهای مختصات می‌باشند.

مقدار آن‌ها برابر است با: $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|} \ , \ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|} \ , \ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$

رابطه $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$ بین زوایای هادی برقرار است.

## تساوی بردارها

در یک دستگاه مختصات معین، دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فقط به شرطی می‌توانند با هم برابر باشند که اندازه آن‌ها با هم برابر باشد، هم راستا باشند و همچنین هم جهت باشند. از دیدگاه تحلیلی می‌توان بردارها را براساس مؤلفه‌هایشان تعریف کرد، در این صورت دو بردار تنها در صورتی با هم برابرند که مؤلفه‌های متناظرشان با هم برابر باشند یعنی:

$$\vec{a}=\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_x=b_x \\ a_y=b_y \\ a_z=b_z \end{cases}$$

مدرسان شریف

# فصل دوم

## «سینماتیک یک، دو و سه بعدی»

### درسنامه (۱): انواع معادله حرکت

## مفاهیم اولیه

حرکت به طور کلی ممکن است در سه بعد رخ دهد.

**حرکت یک بعدی:** ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت بر روی خط راست است.

☜ سرعت ذره، آهنگ تغییر بردار مکان ذره نسبت به زمان است. ابتدای بردار مکان در مبدأ مختصات و انتهای آن در مکان جسم است. بدیهی است که بردار مکان به انتخاب مبدأ مختصات بستگی دارد.

☜ در حرکت یک بعدی نیازی به استفاده از جبر برداری نیست. زیرا تمام کمیت‌های برداری با یک عدد مثبت یا منفی به طور کامل مشخص می‌شوند.

بردار ناشی از تفاضل بردار مکان متحرک در دو نقطه متفاوت، بردار جابه‌جایی نامیده می‌شود و در یک بعد عبارت است از: $\Delta x = x_2 - x_1$

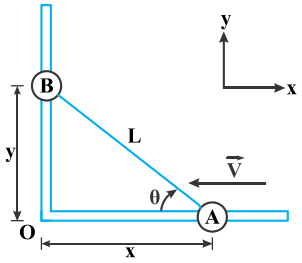
☜ سرعت متوسط یک متحرک که بر روی خط راست حرکت می‌کند از رابطه $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست می‌آید. سرعت متوسط هیچ اطلاعاتی راجع به چگونگی و مسیر حرکت نمی‌دهد. سرعت کمیتی برداری است که با یکای متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ بیان می‌شود.

### سرعت لحظه‌ای

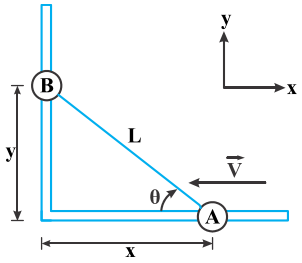
اگر در معادله سرعت متوسط، تغییرات زمان به سمت صفر میل کند، مقدار سرعت در هر لحظه به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

بردار سرعت لحظه‌ای همواره مماس بر مسیر حرکت و جهت آن هم جهت با حرکت است.

**مثال۱: دو جسم A و B توسط میله صلب به طول L به یکدیگر متصل شده‌اند. این دو جسم مطابق شکل زیر در امتداد دو ریل عمود بر هم می‌لغزند. اگر جسم A با تندی ثابت $12m/s$ به سمت چپ بلغزد تندی لغزش جسم B وقتی‌که زاویه $\theta = 60^\circ$ باشد، تقریباً چند متر بر ثانیه است؟** (فیزیک ـ سراسری ۱۴۰۰)




۱) ۶/۹
۲) ۱۳/۹
۳) ۱۰/۴
۴) ۱۲/۰




☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به شکل می‌دانیم که:

$$x = L\cos\theta$$
$$y = L\sin\theta$$

می‌توانیم با استفاده از این روابط سرعت در راستای $x$ و $y$ را به راحتی تعیین کنیم.

$$x = L\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = V_x = -L\sin\theta \Rightarrow |V_x| = L\sin\theta$$
$$y = L\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{dt} = V_y = L\cos\theta$$

با تقسیم این دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{|V_x|}{V_y}=\frac{L\sin\theta}{L\cos\theta}=\tan\theta \Rightarrow V_y=\frac{|V_x|}{\tan\theta}=|V_x|\cot\theta \Rightarrow V_y=۱۲\times\cot ۶۰=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۴\sqrt{۳}\simeq ۶/۹\frac{m}{s}$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۲: سرعت یک ذره که در راستای x در حرکت است بر طبق رابطهٔ $v_x=۳۰-۶t^۲$ تغییر می‌کند که $v_x$ برحسب $\frac{m}{s}$ و t برحسب s است. مقدار جابه‌جایی ذره در بازهٔ زمانی از $t=۲s$ تا $t=۵s$ چند متر است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۳۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۳۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از انتگرال سرعت برحسب زمان می‌توانیم معادله جابه‌جایی ذره را تعیین کنیم. $v_x=۳۰-۶t^۲$

$$\frac{dx}{dt}=۳۰-۶t^۲ \Rightarrow dx=(۳۰-۶t^۲)dt \Rightarrow \int_{x_۱}^{x_۲}dx=\int_{t_۱}^{t_۲}(۳۰-۶t^۲)dt \Rightarrow \Delta x=۳۰t-۲t^۳\Big|_{t_۱=۲}^{t_۲=۵}$$

$$\Rightarrow \Delta x=۱۵۰-۲۵۰-۶۰+۱۶=-۱۴۴m$$

بنابراین مقدار جابه‌جایی جسم برابر با قدر مطلق این عدد یعنی $|\Delta x|=۱۴۴m$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

### شتاب متوسط

شتاب ذره، آهنگ تغییر سرعت آن نسبت به زمان است. بنابراین، شتاب متوسط یک متحرک در حرکت از A به B به صورت تغییر سرعت در نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر تقسیم بر بازه زمانی رفتن از A به B تعریف می‌شود. $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$

شتاب، کمیتی برداری است که با یکای متر بر مجذور ثانیه $(\frac{m}{s^۲})$ بیان می‌شود.

**مثال۳: a، شتاب یک جسم، برحسب x مکان آن، با رابطه $a=k^{\frac{۲}{۳}}x^{\frac{۳}{۲}}$ داده می‌شود که x برحسب m و زمان برحسب s است. یکای k کدام است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۵)

۱) $m^{-\frac{۴}{۳}}s^{-۳}$ ۲) $m^{-\frac{۳}{۴}}s^{-۳}$ ۳) $m^{-\frac{۳}{۴}}s^{-۲}$ ۴) $m^{-۳}s^{-۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توانیم با توجه به این‌که یکای شتاب $\frac{m}{s^۲}$ و یکای مکان m است، به‌راحتی یکای k را با استفاده از رابطه بین مکان و شتاب به‌دست آوریم.

$$a=k^{\frac{۲}{۳}}x^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow [a]=[k]^{\frac{۲}{۳}}[x]^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{m}{s^۲}=[k]^{\frac{۲}{۳}}\times m^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow [k]^{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{m}{s^۲}}{m^{\frac{۳}{۲}}}=s^{-۲}m^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow [k]=\left(s^{-۲}m^{-\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}}=s^{-۳}m^{-\frac{۳}{۴}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

### شتاب لحظه‌ای

اگر در معادله شتاب متوسط، تغییرات زمان به سمت صفر میل کند، مقدار شتاب در هر لحظه به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $a=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\ddot{x}$

اگر نسبت تغییر سرعت به زمان سپری شده‌ی مربوط به آن ثابت بماند، به ازای هر بازه‌ی زمانی دلخواه که در آن شتاب را اندازه می‌گیریم، شتاب ثابت خواهد بود.
حرکت را بر حسب شتاب ذره می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

**حرکت با سرعت ثابت** که در طی آن شتاب ذره صفر بوده و سرعتش ثابت باقی می‌ماند.

**حرکت با شتاب ثابت** که در طی آن، شتاب مقدار ثابتی داشته و تغییر نمی‌کند. در این حالت، شتاب متوسط و لحظه‌ای با هم برابر هستند.

**حرکت با شتاب متغیر** که در طی آن شتاب ذره با گذشت زمان تغییر خواهد کرد.

در ادامه به بررسی دو مورد اول خواهیم پرداخت.

**مثال۴: بردار مکان ذره‌ای که در صفحه $x-y$ در حرکت است به شکل $\vec{r}=(۳t+۲)\hat{i}+(t+۲)\hat{j}$ است که r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. شتاب شعاعی (مؤلفه شتاب در امتداد بردار مکان) ذره در لحظه $t>۰$ بر حسب $\frac{m}{s^۲}$ کدام است؟** (فیزیک ـ سراسری ۹۸)

۱) صفر ۲) $\frac{۳۲}{(۱۰t^۲+۱۶t+۸)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۳) $\frac{-۳۲}{(۱۰t^۲+۱۶t+۸)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با دو بار مشتق گرفتن از بردار مکان به‌راحتی می‌توانیم مؤلفه شتاب در راستای بردار مکان را به‌دست آوریم.

$$\vec{r}=(۳t+۲)\hat{i}+(t+۲)\hat{j} \Rightarrow \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=۳\hat{i}+\hat{j} \Rightarrow \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=۰$$

مدرسان شریف

# فصل سوم

## «دینامیک»

### درسنامه (۱): اثر نیرو بر حرکت اجسام

## قوانین نیوتن

❖ **تعریف نیرو:** نیرو عامل ایجاد تغییر در حالت سیستم است که یک کمیت برداری بوده و از قوانین حاکم بر بردارها پیروی می‌کند. واحد اندازه‌گیری آن در دستگاه بین‌المللی SI نیوتن است که با N نشان داده می‌شود. به بیان دیگر نیرو عامل تغییر اندازه حرکت است، کار انجام می‌دهد و سبب می‌شود که جسم شتاب بگیرد.

**۱) قانون اول نیوتن:** چنانچه بر جسمی نیرو وارد نشود و یا برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد:

الف ـ اگر جسم ساکن باشد، ساکن می‌ماند. ب ـ اگر جسم حرکت یکنواخت داشته باشد، با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

به این قانون، قانون لختی، اینرسی یا ماند نیز گفته می‌شود، یعنی اجسام تمایل به ماندن در وضعیت قبل خود را دارند.

**۲) قانون دوم نیوتن:** هرگاه بر جسم نیرو وارد شود جسم در جهت نیرو شتاب می‌گیرد. این شتاب با اندازه‌ی نیرو متناسب است و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$a \propto \frac{F}{m} \Rightarrow F \propto ma$$

در دستگاه SI رابطه تناسب بالا به تساوی تبدیل می‌شود و داریم:

$$F = ma$$

**۳) قانون سوم نیوتن:** برای هر عملی، عکس‌العملی است هم‌اندازه با آن و در خلاف جهت آن.

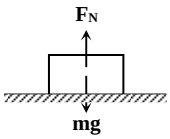
نیروهای عمل و عکس‌العمل به دو جسم متفاوت اعمال می‌شوند، بنابراین برآیندگیری از آن‌ها خطاست. زیرا ما زمانی مجاز به برآیندگیری از چند نیرو هستیم که همه آن نیروها بر یک جسم واحد اعمال شده باشند.

**سؤال:** آیا وزن و نیروی عکس‌العمل سطح، $F_N$، عمل و عکس‌العمل هستند؟ خیر، زیرا:

۱ـ $F_N$ و وزن هر دو به یک جسم وارد می‌شوند. در صورتی‌که نیروی عمل و عکس‌العمل باید بر دو جسم وارد شوند.

۲ـ مثال‌هایی یافت می‌شوند که اندازه‌های $F_N$ و وزن با هم برابر نیست.

* حال که مطمئن شدیم $F_N$ و وزن، عمل و عکس‌العمل نیستند، می‌توانیم از آن‌ها برآیند بگیریم و برآیندشان در حالتی که نیروی سومی حضور نداشته باشد و جسم مورد نظر روی یک سطح افقی قرار گرفته باشد، صفر است.




$$F_N = mg$$

### راهنمای حل مسائل دینامیک

۱ـ شکل مسئله را رسم کنید و نیروهای وارد بر اجسام را مشخص کنید.

۲ـ دستگاه محورهای مختصاتی را در نظر بگیرید که حل مسئله را راحت‌تر کند. معمولاً $x+$ را در امتداد حرکت احتمالی جسم و $y+$ را عمود بر جهت حرکت در نظر می‌گیرند. به عنوان مثال روی سطح شیب‌دار، $x+$ موازی با سطح رو به بالا یا پایین در نظر گرفته می‌شود.

۳ـ یک راستا برای جهت حرکت جسم در نظر بگیرید. در بسیاری از مسائل این کار بسیار ساده است. در صورتی که اصطکاک وجود نداشته باشد، اگر جهت حرکت اشتباه فرض شود، شتاب منفی به دست می‌آید ولی مقدار آن صحیح است. در صورتی که اصطکاک وجود داشته باشد و شتاب منفی به دست آید باید مسئله را با فرض حرکت در جهت عکس دوباره حل کنید.

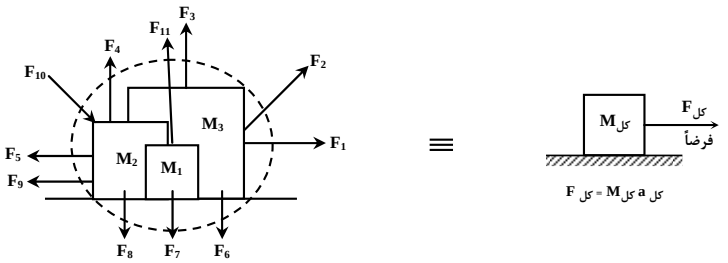
۴ـ نیروها را در راستای $x$ و $y$ مشخص شده، تجزیه کنید. مؤلفه‌های نیرویی را که در راستای حرکت جسم قرار می‌گیرند نیروهای محرک و مؤلفه‌های نیرویی که در جهت عکس قرار می‌گیرند نیروهای مقاوم می‌نامیم. نیروهای محرک با علامت مثبت و نیروهای مقاوم با علامت منفی معین می‌شوند.

۵ـ در نهایت قانون دوم نیوتن را برای هر یک از اجسام موجود در سیستم نوشته و با حل کردن دستگاه تشکیل شده، شتاب حرکت هر جسم را به دست آورید.

$$\sum F_i = m_i a_i$$

**نکته۱:** اگر همه جرم‌ها با هم حرکت کنند، مانند حالتی که ریسمان بین جرم‌ها کشیده شده است، چون شتاب همه جرم‌ها با هم برابر است می‌توان نوشت: $\sum F = (\sum m)a$

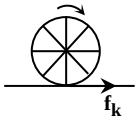
**نکته۲:** اگر جسم از ابتدا در حال سکون باشد و پس از رها شدن جسم به بررسی حرکت بپردازیم، در صورتی که نیروی اصطکاک به جسم وارد شود و پس از محاسبات شتاب، در هر دو جهت فرضی حرکت منفی به دست آید به معنی آن است که جسم ساکن باقی می‌ماند.




برآیند نیروهای وارد بر یک سیستم برابر است با جرم سیستم در شتاب آن.

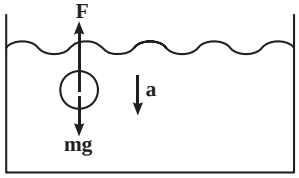
**آشنایی با برخی از نیروهای این فصل:**

در این فصل F نیروی محرک، T نیروی کشش در طول نخ یا فنر با جرم ناچیز، $F_k$ یا $F_s$ نیروی اصطکاک و N یا $f_N$ نیروی عمود بر سطح می‌باشند.




**مثال۱: جسمی به جرم یک کیلوگرم با شتاب ثابت ۶۰ درصد شتاب جاذبه، در یک مایع سقوط می‌کند. نیروی مقاومت در مقابل حرکت جسم چند نیوتن است؟** $(g \approx 10\frac{m}{s^2})$. (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰




**پاسخ:** گزینه «۱» اگر F نیروی مقاومت حاصل از مایع باشد، طبق قانون دوم نیوتن داریم:

$$mg - F = ma \Rightarrow F = m(g - a)$$

باتوجه به‌صورت سؤال $a = 0/6g$ بنابراین داریم:

$$F = m(g - 0/6g) = 0/4mg \Rightarrow F = 0/4 \times 1 \times 10 = 4N$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۲: نیروی معینی به جسمی به جرم $m_1$ شتابی برابر $6\frac{m}{s^2}$ و به جسمی به جرم $m_2$ شتابی برابر $4\frac{m}{s^2}$ می‌دهد. اگر این نیرو به جسمی به جرم $m_1 + m_2$ اثر کند، چه شتابی برحسب $\frac{m}{s^2}$ پیدا می‌کند؟** (فناوری نانو ـ نانومواد ـ دکتری ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۲ ۴) ۲/۴

**پاسخ:** گزینه «۴» **روش تشریحی:** چون نیرو ثابت است، بنابراین خواهیم داشت: $m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow 6m_1 = 4m_2 \Rightarrow m_1 = \frac{4}{6}m_2$

از طرفی چون همین نیرو به مجموعه دو جسم نیز وارد شده است، می‌توانیم بنویسیم:

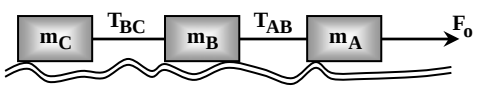
$$(m_1 + m_2)a = m_2 a_2 \Rightarrow (\frac{4}{6}m_2 + m_2)a = 4m_2 \Rightarrow \frac{10}{6}m_2 a = 4m_2 \Rightarrow a = \frac{4}{\frac{10}{6}} = 2/4\frac{m}{s^2}$$

**روش تستی:** با استفاده از روش نسبت تناسب داریم:

$$a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = 2/4\frac{m}{s^2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۳: قایق موتوری A با نیروی کششی ثابت $F_0$ کار می‌کند تا خود و دو انبار یدکی B و C را به حرکت درآورده و جابجا کند. جرم هر یک از این سه قایق به ترتیب $m_A$ و $m_B$ و $m_C$ بوده و نیروی مقاومت آب در مقابل حرکت آن‌ها با ضریب اصطکاک حرکتی ثابت $\mu_0$ مشخص می‌گردد، یعنی $f_j = -\mu_0 m_j g$ برای $j = A,B,C$، نیروی کشش در طناب اتصال دهنده قایق B و C کدام است؟** (علوم دریایی و اقیانوسی، فیزیک دریا ـ سراسری ۹۰)




۱) $F_0$

۲) $F_0 - \mu_0 m_C g$

۳) $\frac{m_C}{m_A + m_B + m_C}F_0$

۴) $\frac{m_C}{m_A + m_B + m_C}F_0 - \mu_0 m_C g$

مدرسان شریف

# فصل چهارم

# «برخورد و مرکز جرم»

## درسنامه (۱): انواع برخورد

### مفاهیم اولیه

در فصل دینامیک رابطه بین نیروی وارد بر یک جسم و تغییر تکانه آن را به صورت زیر تعریف کردیم:

$F = \frac{dP}{dt}$: نیروی لحظه‌ای و $\overline{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ : نیروی متوسط

اگر نیروی خالص $F$ در یک بازه زمانی بسیار کوتاه بر جسم وارد شود، کمیت برداری ضربه را می‌توانیم به صورت روبرو تعریف کنیم: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

**قضیه ضربه ـ تکانه:** تغییر تکانه یک ذره طی یک فاصله زمانی با ضربه‌ی نیروی خالصی که در این فاصله زمانی به ذره وارد می‌شود برابر است.

$\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

❖ **تعریف برخورد:** اگر دو جسم طی زمان کوتاهی به هم نزدیک شده، با هم برهم‌کنش داشته باشند و سپس از هم دور شوند و در این برهم‌کنش متقابل بین آن‌ها انرژی و تکانه مبادله شود می‌گوییم دو جسم باهم برخورد کرده‌اند.

اگر نیروهای بین اجسام (نیروهای داخلی) از نیروهای خارجی بسیار بزرگ‌تر باشند (که در اکثر برخوردها چنین است)، می‌توانیم از جمع نیروهای خارجی صرف‌نظر کرده $(\sum F_{ext} = 0)$ و تکانه را طی برخورد پایسته در نظر بگیریم. در این حالت تکانه‌ی کل سیستم قبل و بعد از برخورد مقدار یکسانی دارد.

**۱ـ برخورد کشسان:** اگر نیروهای داخلی بین اجسام، پایستار باشند، انرژی جنبشی سیستم نیز پایسته می‌ماند. چنین برخوردی را کشسان می‌نامند.

**۲ـ برخورد ناکشسان:** در این نوع برخورد انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد با انرژی جنبشی قبل از برخورد برابر نیست، اما اندازه حرکت همچنان پایسته است.

**نکته۱:** اگر در برخورد ناکشسان انرژی جنبشی افزایش یابد، آن را «برخورد ناکشسان انرژی‌گیر» و اگر انرژی جنبشی کاهش یابد، آن را «برخورد ناکشسان انرژی‌ده» می‌گوییم.

برخورد ناکشسانی که در آن اجسام برخوردکننده به هم می‌چسبند و با هم حرکت می‌کنند، برخورد کاملاً ناکشسان نامیده می‌شود.

**اصل پایستگی تکانه:** اگر جمع برداری نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشد، تکانه کل سیستم ثابت می‌ماند. این اصل نتیجه مستقیم قانون سوم نیوتن است.

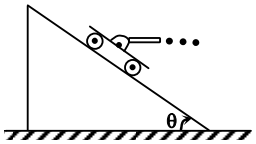
**مثال۱: فردی به یک توپ با جرم ۰/۴ کیلوگرم که روی سطح زمین ساکن است، با پا ضربه‌ای می‌زند. سرعت اولیه توپ ناشی از آن ۵ متر بر ثانیه و راستایش با افق زاویه ۶۰ درجه است، اندازه ضربه وارد شده چند N.s است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تعریف تکانه خطی که همان ضربه وارد به جسم است داریم: $P = mv = ۰/۴ \times ۵ = ۲ N.S$

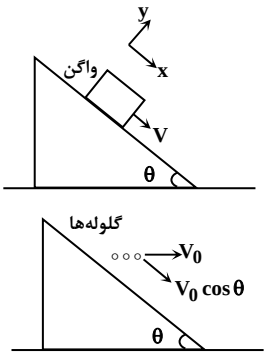
در این رابطه $m$ جرم توپ و $v$ سرعت توپ در اثر ضربه وارد شده به آن یعنی سرعت اولیه‌ی حرکت توپ است.

**مثال۲: جرم یک واگن روباز در حالی که اسلحه‌ای روی آن سوار است $M$ بوده و با سرعت $V$ روی سطح شیب‌داری با شیب $\theta$ به سمت پایین حرکت می‌کند. اگر در زمان $t = ۰$ واگن ساکن بوده و اسلحه شروع به شلیک کرده و در واحد زمان $n$ گلوله که جرم هر کدام $m$ است، با سرعت $V_۰$ نسبت به واگن موازی افق و به سمت جلو شلیک کند، سرعت واگن بعد از گذشت زمان $t$ کدام است؟ (فرض کنید نیروی اصطکاک به جرم واگن بستگی ندارد)** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)



۱) $\frac{MV - ntmV_۰}{M}$ ۲) $\frac{MV - ntmV_۰}{M - ntm}$

۳) $\frac{MV - ntmV_۰\cos\theta}{M}$ ۴) $\frac{MV - ntmV_۰\cos\theta}{M - ntm}$




☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه پایستگی تکانه خطی استفاده می‌کنیم. اگر محور $x$ها را موازی سطح شیب‌دار در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$P_i = Mv$$

تکانه خطی نهایی سیستم شامل تکانه واگن (البته مربوط به جرمی که از آن باقی‌مانده) و تکانه خطی گلوله‌ها در جهت محور $x$ها است.

$$P_f = (M - M')v' + M'v_۰\cos\theta$$

$M'$ جرمی از گلوله‌ها است که در زمان $t$ شلیک می‌شوند، بنابراین: $M' = nmt$. با توجه به قانون پایستگی اندازه حرکت داریم:

$$P_i = P_f \Rightarrow Mv = (M - nmt)v' + nmtv_۰\cos\theta \Rightarrow (M - nmt)v' = Mv - nmtv_۰\cos\theta \Rightarrow v' = \frac{Mv - nmtv_۰\cos\theta}{M - nmt}$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۳: جسمی به جرم $m$ در فضا با سرعت $v$ نسبت به یک ناظر در حرکت است. در یک لحظه این جسم منفجر شده و به دو قطعه چنان تقسیم می‌شود که قطعه اول جرمی ۵ برابر قطعه دوم دارد. قطعه دوم نسبت به ناظر ساکن است. انرژی جنبشی مجموعه پس از انفجار ..... درصد نسبت به انرژی جنبشی اولیه جسمِ قبل از انفجار ..... یافته است.** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲۰، افزایش ۲) ۲۰، کاهش ۳) ۲۵، افزایش ۴) ۲۵، کاهش

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پیش از انفجار، جرم $m$ با سرعت $v$ حرکت می‌کند. بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با: $K_i = \frac{۱}{۲}mv^۲$

پس از انفجار، جرم به دو قطعه $m_۱$ و $m_۲$ تقسیم می‌شود که از شرط $m_۱ = ۵m_۲$ پیروی می‌کنند. بنابراین خواهیم داشت:

$$m_۱ + m_۲ = m \Rightarrow ۵m_۲ + m_۲ = m \Rightarrow ۶m_۲ = m \Rightarrow m_۲ = \frac{۱}{۶}m \Rightarrow m_۱ = \frac{۵}{۶}m$$

حال با استفاده از قانون پایستگی تکانه خطی، سرعت جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را به دست می‌آوریم. $P_i = P_f \Rightarrow mv = m_۱v_۱ + m_۲v_۲$

در صورت مسئله ذکر شده که $v_۲ = ۰$ بنابراین خواهیم داشت: $mv = m_۱v_۱ \Rightarrow v_۱ = \frac{m}{m_۱}v = \frac{۶}{۵}v$

انرژی جنبشی دستگاه پس از انفجار برابر است با انرژی جنبشی جرم $m_۱$ که با سرعت $v_۱$ در حرکت است. بنابراین داریم:

$$K_f = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۶}m)\times(\frac{۶}{۵}v)^۲ \Rightarrow K_f = \frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۵}mv^۲ = \frac{۶}{۵}K_i$$

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی برابر است با: $\frac{K_f - K_i}{K_i}\times۱۰۰ = \frac{\frac{۶}{۵}K_i - K_i}{K_i}\times۱۰۰ = \frac{۱}{۵}\times۱۰۰ = ۲۰\%$

علامت مثبت نشان‌دهنده افزایش انرژی جنبشی نسبت به قبل است.

## برخورد کشسان یک بعدی

برخورد رودرروی دو کره صیقلی که در امتداد خط واصل مرکزهایشان به هم نزدیک می‌شوند یک برخورد کشسان یک بعدی است. در حین این برخورد هم انرژی جنبشی پایسته می‌ماند و هم اندازه حرکت کل ذرات. اگر جرم کره‌ها $m_۱$ و $m_۲$، مؤلفه‌های سرعت قبل از برخورد آن‌ها، $v_{۱i}$ و $v_{۲i}$ و بعد از برخوردشان $v_{۱f}$ و $v_{۲f}$ باشد، طبق اصل پایستگی تکانه و انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$m_۱v_{۱i} + m_۲v_{۲i} = m_۱v_{۱f} + m_۲v_{۲f} \qquad \frac{۱}{۲}m_۱v_{۱i}^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_{۲i}^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_{۱f}^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_{۲f}^۲$$

با حل دو معادله فوق می‌توانیم سرعت نهایی اجسام را به دست آوریم.

$$v_{۱f} = (\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲})v_{۱i} + (\frac{۲m_۲}{m_۱ + m_۲})v_{۲i} \qquad v_{۲f} = (\frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲})v_{۱i} + (\frac{m_۲ - m_۱}{m_۱ + m_۲})v_{۲i}$$

مدرسان شریف

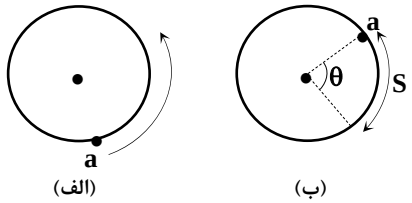
# فصل پنجم

# «دوران»

## درسنامه (۱): مفاهیم دوران

### سینماتیک دورانی

جسم صلب جسمی است که اجزای آن نسبت به یکدیگر فاصله ثابتی دارند یا به عبارتی اجزای آن نسبت به هم شتاب ندارند. یعنی جسم، شکل و اندازه کاملاً مشخص و نامتغیر دارد. در این قسمت حرکت دورانی اجسام صلب با محور دوران ثابت را مطالعه می‌کنیم. وقتی می‌گوییم جسم حرکت دورانی محض دارد، منظورمان آن است که هر ذره از جسم بر روی یک دایره حرکت می‌کند که مراکز این دایره‌ها بر روی خط مستقیمی هستند که «محور دوران» نامیده می‌شود.




اما در حالت کلی حرکت جسم صلب به جای دوران محض ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی است. چرخی که روی زمین می‌چرخد و جلو می‌رود را در نظر بگیرید. هم تمام اجزای چرخ حول محور چرخ می‌چرخند و هم مرکز چرخ مسافتی را روی زمین طی می‌کند.

در شکل بالا می‌بینیم نقطه $a$ برای رسیدن از حالت (الف) به حالت (ب) باید طول $S$ را روی چرخ طی کند یا به عبارتی زاویه $\theta$ را جاروب کند. از طرفی با استفاده از ریاضیات می‌توان نوشت:

$$S = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{S}{r}$$

که در آن $S$ طول کمان طی شده توسط ذره مورد نظر و $r$ شعاع مسیر دایره‌ای است.

جهت مثبت تغییرات $\theta$ را در جهت چرخش پادساعتگرد ذره در نظر می‌گیریم. اگر جهت چرخش ساعتگرد باشد جابه‌جایی زاویه‌ای ذره منفی خواهد بود.

مشابه $\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ که برای سرعت متوسط انتقالی تعریف شد سرعت متوسط دورانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

مشابهاً سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

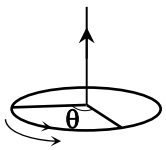
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

حد مقدار متوسط $\overline{\omega}$ وقتی $\Delta t \to 0$ برابر است با مقدار لحظه‌ای $\omega$. مقدار سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای کاربرد بیشتری در مسائل دارد.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

که جهت $\overline{\omega}$ را می‌توان با قانون دست راست مشخص کرد. چنانچه چهار انگشت دست راست در جهت جاروب شدن $\theta$ خم شود، انگشت شست جهت $\overline{\omega}$ را نشان می‌دهد.

به عنوان مثال برای شکل مقابل داریم:




$$\overline{\omega} = \overline{\omega}\hat{z}$$

**مثال۱: سرعت زاویه‌ای یک چرخ به سبب وجود اصطکاک بر طبق رابطه $\omega = \omega_\circ e^{-\alpha t}$ با زمان تغییر می‌کند که در آن $\omega_\circ = 84\pi \frac{rad}{s}$ و $\alpha = 3s^{-1}$ است. این چرخ قبل از آن که ساکن شود چند دور می‌زند؟ $(\ln 3 = 1/1)$** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۲۶/۶ ۲) ۲۸ ۳) ۱۳/۳ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق رابطه $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ می‌توانیم معادله زاویه برحسب زمان را برای این چرخ تعیین کنیم.

$$\omega = \omega_\circ e^{-\alpha t} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega_\circ e^{-\alpha t} dt$$

با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$\int d\theta = \int \omega_\circ e^{-\alpha t} dt \Rightarrow \Delta\theta = -\frac{\omega_\circ}{\alpha} e^{-\alpha t}$$

از آنجایی که میزان چرخش تا پیش از توقف خواسته شده است، باید لحظه توقف که در آن $\omega = \circ$ است را تعیین کنیم. اگر لحظه توقف را $t'$ بنامیم، داریم:

$$\omega(t') = \circ \Rightarrow \omega_\circ e^{-\alpha t'} = \circ \Rightarrow e^{-\alpha t'} = \circ$$

حال می‌توانیم از لحظه $t = \circ$ تا $t = t'$ میزان چرخش چرخ را تعیین کنیم.

$$\Delta\theta = \theta(t') - \theta(\circ) = -\frac{\omega_\circ}{\alpha} e^{-\alpha t'} + \frac{\omega_\circ}{\alpha} e^{-\circ} = \circ + \frac{\omega_\circ}{\alpha} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega_\circ}{\alpha} = \frac{84\pi}{3} = 28\pi = 14(2\pi)$$

یعنی چرخ تا قبل از توقف ۱۴ دور کامل می‌چرخد.

---

بُعد سرعت زاویه‌ای عکس بُعد زمان $(T^{-1})$ است و یکاهای آن را معمولاً رادیان بر ثانیه $(\frac{rad}{s})$ یا دور بر ثانیه $(\frac{rev}{s})$ انتخاب می‌کنند. می‌توان با استفاده از رابطه زیر رادیان و درجه را به هم مربوط کرد. رادیان، یکای صرفاً هندسی است و بعد فیزیکی ندارد زیرا نسبت دو طول است. $\pi\, rad = 180^\circ$

مشابهاً شتاب متوسط و لحظه‌ای زاویه‌ای به صورت روبه‌رو تعریف می‌شوند:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{(متوسط)}$$

$$\alpha = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{(لحظه‌ای)}$$

بُعد شتاب زاویه‌ای عکس مجذور زمان $(T^{-2})$ است و یکاهای آن معمولاً عبارتند از: رادیان بر مجذور ثانیه $(\frac{rad}{s^2})$ یا دور بر مجذور ثانیه $(\frac{rev}{s^2})$.

همچنین ارتباط شتاب و سرعت زاویه‌ای و خطی از روابط زیر به‌دست می‌آید:

رابطه شتاب خطی و دورانی $a = r\alpha$ و رابطه سرعت خطی و دورانی $v = r\omega$

متغیرهای سینماتیکی در حرکت دورانی $\theta$، $\omega$ و $\alpha$ و در حرکت انتقالی $x$، $v$ و $a$ هستند که مطابق جدول زیر این کمیت‌ها دوبه‌دو با هم متناظرند. تنها تفاوت این است که کمیت‌های زاویه‌ای از نظر ابعادی با کمیت‌های خطی متناظرشان در یک عامل طول اختلاف دارند.

| حرکت انتقالی | حرکت دورانی |
|---|---|
| $v = v_\circ + at$ | $\omega = \omega_\circ + \alpha t$ |
| $x = \frac{v + v_\circ}{2} t$ | $\theta = \frac{\omega_\circ + \omega}{2} t$ |
| $x = \frac{1}{2} a t^2 + v_\circ t$ | $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_\circ t$ |
| $v^2 = v_\circ^2 + 2ax$ | $\omega^2 = \omega_\circ^2 + 2\alpha\theta$ |

قبلاً گفتیم مؤلفه شعاعی شتاب ذره‌ای که روی یک دایره حرکت می‌کند برابر $\frac{v^2}{r}$ است. با توجه به رابطه میان سرعت خطی و زاویه‌ای می‌توان نوشت:

$$a_R = \frac{v^2}{r} \overset{v = r\omega}{=\!=\!=} \omega^2 r$$

توصیف زاویه‌ای حرکت نسبت به توصیف خطی این برتری را دارد که از آنجا که توصیف خطی به نقطه‌ای از جسم که قرار است مورد بررسی قرار گیرد، بستگی دارد؛ شتاب خطی و سرعت خطی نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی سرعت و شتاب زاویه‌ای جسم صلبی که حول محور ثابتی می‌چرخد مقدار ثابتی است.

با توجه به اینکه می‌توان نوشت $a_T = \frac{dv}{dt}$ با جایگذاری مقدار $v = r\omega$ در رابطه می‌توان نوشت (با فرض شعاع ثابت): $\frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$

$r\alpha$ مؤلفه شتاب مماسی دورانی است. پس می‌توان گفت: $a_T = r\alpha \rightarrow a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2}$

**نکته۱:** در حالت برداری می‌توان رابطه میان کمیت‌های سرعت و شتاب دایره‌ای و خطی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R \quad , \quad \begin{cases} \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{cases}$$

مدرسان شریف

# فصل ششم

## «نوسان»

❖ **حرکت تناوبی:** هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است.

❖ **حرکت نوسانی:** اگر ذره‌ای که حرکت تناوبی دارد روی یک مسیر واحد حرکت رفت و برگشت انجام دهد، حرکت آن را نوسانی یا ارتعاشی می‌نامند. حرکت نوسانی غالباً حول یک نقطه تعادل انجام می‌شود که به آن مرکز نوسان گفته می‌شود.

❖ **حرکت نوسانی میرا:** چنانچه حرکت جسم نوسان‌کننده همراه با اصطکاک یا مقاومت هوا باشد به این حرکت نوسانی میرا گفته می‌شود. اثر اصطکاک رامی‌توان با دادن انرژی به دستگاه حذف کرد.

❖ **دامنه نوسان:** به بیشترین فاصله از مرکز نوسان (بعد ماکزیمم) دامنه نوسان گفته شده و آن را با $A$ نشان می‌دهند.

❖ **دوره یا زمان تناوب:** عبارت است از زمان لازم برای انجام یک حرکت رفت و برگشت، یعنی زمان یک نوسان یا چرخه‌ی کامل. دوره تناوب را با $T$ نشان می‌دهند و یکای آن ثانیه است.

❖ **بسامد یا فرکانس حرکت:** عبارت است از تعداد نوسان‌ها (چرخه‌ها) در یکای زمان. بسامد را با $\nu$ نشان می‌دهند و یکای آن عکس ثانیه $(s^{-1})$ یا هرتز $(Hz)$ است. بسامد، عکس دوره تناوب می‌باشد. $\nu = \frac{1}{T}$

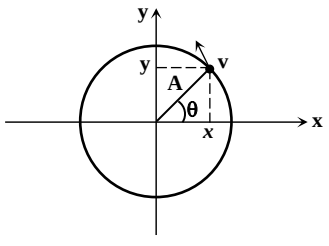
**نکته ۱:** در دو انتهای مسیر به علت تغییر جهت حرکت نوسانگر، سرعت آن صفر است، ولی بُعد نوسانگر از نظر مقدار ماکزیمم می‌باشد.

**نکته۲:** در دو انتهای مسیر نیروی اعمالی بر نوسانگر و در نتیجه شتاب نوسانگر از نظر مقدار ماکزیمم است.

## درسنامه (۱): مفاهیم اولیه نوسان

### معادله حرکت نوسانی ساده

اگر ذره‌ای با سرعت ثابت $v$ در مسیر دایره‌ای حرکت کند، مؤلفه‌های $x$ و $y$ آن می‌توانند نمایانگر حرکت نوسانی ساده باشند. اگر شعاع دایره را $A$ فرض کنیم خواهیم داشت:




$$\cos\theta = \frac{x}{A} \Rightarrow \boxed{x = A\cos\theta}$$

و

$$\sin\theta = \frac{y}{A} \Rightarrow \boxed{y = A\sin\theta}$$

بنابراین حرکت نوسانی ساده، حرکتی است که معادله آن سینوسی یا کسینوسی باشد. از طرفی می‌دانیم که:

$$\left.\begin{matrix}\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\\ \bar{\omega}=\omega\end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\theta-\theta_\circ}{t-t_\circ} \quad , \; t_\circ = \circ \Rightarrow \theta - \theta_\circ = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \omega t + \theta_\circ}$$

با جایگذاری در روابط بالا خواهیم داشت:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \theta_\circ)} \quad \text{و} \quad \boxed{y = A\sin(\omega t + \theta_\circ)}$$

دامنه نوسانگر = $A$، بسامد زاویه‌ای = $\omega$، فاز اولیه = $\theta_\circ$

**نکته ۳:** چون نوسانگر هماهنگ ساده یک دور کامل $(\theta = ۲\pi)$ را در یک زمان تناوب $T$ طی می‌کند، خواهیم داشت:

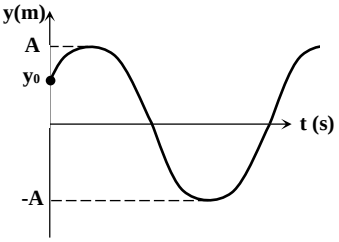
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega = ۲\pi\nu}$$

در ادامه مبحث، مؤلفه‌ی $y$ را بررسی می‌کنیم:

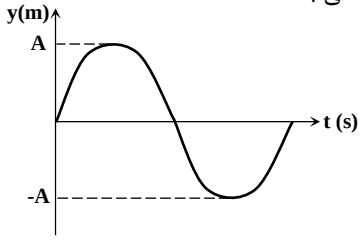
**نکته ۴:** فاز اولیه با استفاده از شرایط اولیه $(t = ۰, \theta = \theta_۰ \ , \ y = y_۰)$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} t = ۰ \\ y = y_۰ \Rightarrow y_۰ = A\sin\theta_۰ \Rightarrow \\ \theta = \theta_۰ \end{cases} \quad \boxed{\sin\theta_۰ = \frac{y_۰}{A}}$$

در حالت کلی نمودار حرکت نوسانگر ساده به صورت زیر است، که با توجه به شرایط مسئله می‌تواند تغییر کند.




**حالت خاص:** اگر فاز اولیه نداشته باشیم نمودار از مبدأ شروع می‌شود. توجه شود که زمان نمی‌تواند منفی باشد.




**نکته ۵:** هرگاه متحرکی از مبدأ مکان $(\theta_۰ = ۰)$ شروع به نوسان کند، برای زمان عبورش از مرکز نوسان و دو انتهای مسیر خواهیم داشت:

زمان عبور از دو انتهای مسیر $t = (۲k-۱)\frac{T}{۴}$ زمان عبور از مرکز نوسان $t = (۲k)\frac{T}{۴}$

در روابط بالا $T$ دوره تناوب و $k$ یک عدد صحیح مثبت است.

❖ **سرعت نوسانگر:** کافیست از معادله مکان ـ زمان یک‌بار نسبت به زمان مشتق بگیریم.

$$\begin{cases} y = A\sin(\omega t + \theta_۰) \\ v = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow v = A\omega\cos(\omega t + \theta_۰)$$

در نتیجه اندازه‌ی سرعت ماکزیمم برابر $A\omega$ و اندازه‌ی سرعت مینیمم برابر صفر خواهد بود.

**نکته ۶:** بین بعد نوسانگر و سرعت نوسانگر $\frac{\pi}{۲}$ اختلاف فاز است و سرعت به اندازه $\frac{\pi}{۲}\text{rad}$ از بعد نوسانگر جلوتر خواهد بود.

❖ **شتاب نوسانگر:** کافیست از معادله مکان ـ زمان نوسانگر دو بار نسبت به زمان یا از معادله سرعت ـ زمان نوسانگر یک‌بار نسبت به زمان مشتق بگیریم.

$$x = A\sin(\omega t + \theta_۰) \Rightarrow v = A\omega\cos(\omega t + \theta_۰) \Rightarrow a = -A\omega^۲\sin(\omega t + \theta_۰)$$

**نکته ۷:** شتاب نوسانگر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان نسبت به سرعت نوسانگر تقدم فاز دارد.

**نکته ۸:** شتاب نوسانگر به اندازه $\pi$ رادیان نسبت به مکان نوسانگر تقدم فاز دارد.

**نکته ۹:** رابطه بین شتاب و بُعد نوسانگر به صورت $a = -\omega^۲ y$ است زیرا:

$$\begin{cases} a = -A\omega^۲\sin(\omega t + \theta_۰) \\ y = A\sin(\omega t + \theta_۰) \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{a = -\omega^۲ y}$$

شتاب ماکزیمم برابر $A\omega^۲$ است.

**مثال۱: جسمی به جرم ۴۰۰g در یک بعد حرکت نوسانی ساده با دامنه ۸cm و پریود ۴s دارد. بیشینه نیرویی که به این جسم وارد می‌شود، تقریباً چند نیوتن است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۴)

۱) $۵/۰\times۱۰^{-۲}$ ۲) $۷/۹\times۱۰^{-۲}$ ۳) $۳/۹۵\times۱۰^{-۲}$ ۴) $۱/۹۷\times۱۰^{-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای جسمی که حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد اندازه نیروی بیشینه برابر است با:

$$F_{max} = mA\omega^۲ = mA(\frac{۲\pi}{T})^۲ = \frac{۴\pi^۲ mA}{T^۲} \Rightarrow F_{max} = \frac{۴\pi^۲\times۰/۴\times۰/۰۸}{۱۶} = ۸\pi^۲\times۱۰^{-۳} \simeq ۷/۹\times۱۰^{-۲}$$

مدرسان شریف

# فصل هفتم

# « نیروهای مرکزی، گرانش و قوانین کپلر »

## درسنامه (۱): مفاهیم اولیه گرانش

**قانون جهانی گرانش:** نیرویی که دو ذره به جرم‌های $m_1$ و $m_2$ و به فاصله‌ی $r$ از هم به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروی جاذبه‌ای است که در امتداد خط واصل دو ذره اثر می‌کند و بزرگی آن برابر است با:

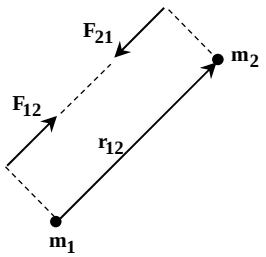
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G$: ثابت جهانی گرانش و یک کمیت نرده‌ای بوده، مقدار عددی آن برابر است با:

$$G = 6/6720\times10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$$

بیان برداری این قانون به صورت روبرو است:

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\right)$$




که در آن $F_{12}$ عبارت است از نیروی وارد بر ذره ۱ به جرم $m_1$ از جانب ذره ۲ با جرم $m_2$. بردار $\vec{r}_{12}$ مطابق شکل، پاره‌خط جهت‌داری است از ذره ۱ به سمت ذره ۲.

**نکته۱:** قانون گرانش یک قانون عکس مجذوری است یعنی با عکس مجذور فاصله دو ذره متناسب است.

## خصوصیات نیروی گرانشی

۱ـ نیروهای گرانشی میان دو ذره، زوج نیروهای کنش‌ـ واکنش هستند. یعنی بزرگی این نیروها مساوی و جهت آن‌ها خلاف یکدیگر است.۲ـ نیروی گرانشی میان دو ذره از اجسام دیگر مستقل است و به خواص فضای اطراف آن‌ها بستگی ندارد. ۳ـ این نیرو یک نیروی مرکزی است یعنی یک نیروی کاملاً شعاعی است و از نقطه معینی به نام مرکز نیرو می‌گذرد.۴ـ این نیرو تقارن کروی دارد یعنی بزرگی نیرو تنها تابع فاصله شعاعی از مرکز نیرو است و نه جهت آن. ۵ـ چون نیروهای مرکزی با تقارن کروی، پایستارند بنابراین نیروی گرانشی نیز یک نیروی پایستار است و به راحتی می‌توان به آن یک انرژی پتانسیل نسبت داد.

**نکته۲:** نیروی گرانش وارد بر ذره‌ای واقع در داخل یک پوسته کروی یکنواخت صفر است.

**نکته ۳:** هر جسم کروی یکنواخت ذره خارجی را چنان جذب می‌کند که گویی تمام جرم کره در مرکز آن متمرکز است. این موضوع در مورد هر کره نایکنواخت به شرطی که چگالی‌اش فقط به فاصله شعاعی $r$ بستگی داشته باشد نیز صدق می‌کند.

**مثال۱: بنابر تجزیه و تحلیل آخرین داده‌های اخترشناسی کدام گزاره نادرست است؟** (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) جهان کاملاً غیر تخت (انحنادار) است.
۲) طول عمر جهان ۱۳/۷ میلیارد سال است.
۳) جهان در حال انبساط و سرعت این انبساط در حال افزایش است.
۴) تشعشع زمینه کیهانی در کل جهان کاملاً یکنواخت نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چگونگی انتهای جهان هستی به آغاز پیدایش آن به نظریه‌ی مهبانگ برمی‌گردد. از تحلیل یافته‌های اخترشناسان می‌توان پی برد که جهان هستی، کاملاً انحنادار (غیرتخت= پخت) نیست. همچنین حدود ۱۳/۷ میلیارد سال است که از عمر جهان می‌گذرد. با رصد کردن طیف به دست آمده از ستارگان که در سرتاسر مجموعه آفرینش دیده می‌شوند، پدیده‌ی جابه‌جایی به قرمز دیده می‌شود. با دانستن اثر دوپلر این پدیده گویای دور شدن ستارگان از ما، با سرعت افزایشی یا همان انبساط جهان آفرینش است. جهان در حال انبساط است و بر سرعت آن افزوده می‌شود. ذکر این نکته سودمند است که برخی برای انبساط جهان پایانی دانسته‌اند و بیان می‌کنند.

جهان تا جایی منبسط می‌شود و در نقطه‌ای بحرانی از انبساط ایستاده و شروع به انقباض می‌کند. این فرضیه پایان جهان را به صورت برخوردهای ستارگان و اجرام آسمانی با همدیگر می‌داند. (در صورت درست بودن فرضیه اخیر باید خوشحال باشیم که هنوز جهان در حال انبساط است و حتی نقطه بحرانی نزدیک نشده و تا برچیده شدن زندگی روی زمین فاصله‌ی بسیاری داریم! تشعشع زمینه کیهانی را به مهبانگ ارتباط می‌دهند. این تشعشع در کل جهان کاملاً یکنواخت نیست.)

**مثال۲: آیا امکان دارد که با سه ثابت جهانی $\hbar$ (ثابت پلانک)، $c$ (سرعت نور در خلأ) و $G$ (ثابت جهانی گرانش) یک ثابت با بعد طول به وجود آورد؟** (فیزیک ـ سراسری ۹۲)

۱) آری، به صورت $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^۳}}$ ۲) آری، به صورت $\sqrt{\frac{c\hbar}{G^۳}}$ ۳) آری، به صورت $\sqrt{\frac{Gc}{\hbar^۳}}$ ۴) خیر، اصولاً امکان ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا ابعاد هر یک از کمیت‌های داده شده را به دست می‌آوریم. حال با توجه به گزینه‌ها، تنها با جایگذاری ابعاد در گزینه‌ی ۱ می‌توان به بعد طول رسید.

$$\hbar:[JT]=[NLT]=[\frac{ML^۲}{T}]\ ;\ C:[\frac{L}{T}]$$

$$G:[\frac{NL^۲}{M^۲}]=[\frac{ML}{T^۲}\frac{L^۲}{M^۲}]=[\frac{L^۳}{T^۲M}]\ \Rightarrow\sqrt{\frac{G\hbar}{C^۳}}=\sqrt{\frac{[\frac{L^۳}{T^۲M}][\frac{ML^۲}{T}]}{[\frac{L}{T}]^۳}}=\sqrt{\frac{\frac{L^۵}{T^۳}}{\frac{L^۳}{T^۳}}}=[L]$$

## شدت میدان گرانش (شتاب گرانشی)

شدت میدان گرانش عبارت است از نیروی گرانشی زمین به ازای واحد جرم. اگر رابطه $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$ را بین زمین و جسمی به جرم $m$ در نظر بگیریم آن گاه $F$، وزن جسم خواهد بود.

$$F=G\frac{\cancel{m}M_e}{R_e^۲}=\cancel{m}g$$

در رابطه فوق $M_e$ و $R_e$ به ترتیب جرم و شعاع زمین هستند، در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow g=\frac{GM_e}{R_e^۲}$$

**نکته۴:** شتاب گرانش $g$ برعکس ثابت گرانش $G$ یک کمیت ثابت نیست و با ارتفاع (فاصله از مرکز زمین) تغییر می‌کند. همچنین $\vec{g}$ یک کمیت برداری است که جهت آن همواره به سمت مرکز زمین است.

**تغییرات شتاب گرانشی:** برای محاسبه تغییرات $g$ بر حسب فاصله از مرکز زمین، از رابطه $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$ دیفرانسیل می‌گیریم.

$$F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}\ \Rightarrow\ dF=-۲\frac{Gm_۱m_۲}{r^۳}dr\ \Rightarrow\ \frac{dF}{F}=-۲\frac{dr}{r}\qquad \text{از طرفی: } F=mg\ \Rightarrow\ dF=mdg\ \Rightarrow\frac{dF}{F}=\frac{dg}{g}\ \Rightarrow\ \frac{dg}{g}=-۲\frac{dr}{r}$$

**نکته۵:** شتاب گرانش یا همان میدان گرانش را بر حسب جرم اجسام دیگر به جز زمین نیز می‌توان نوشت. در این صورت رابطه $g=\frac{GM_e}{R_e^۲}$ به صورت مقابل در می‌آید. در این رابطه، $m$ جرم جسم (ذره) و $r$ فاصله شعاعی از مرکز جرم آن است.

$$g(r)=\frac{Gm}{r^۲}$$

در توزیع‌های پیوسته جرم روابط زیر را برای میدان گرانشی داریم:

توزیع خطی جرم: $dm=\lambda d\ell\ \Rightarrow\ \vec{g}(r)=-G\int\frac{\lambda\times(\vec{r}_۲-\vec{r}_۱)}{|\vec{r}_۲-\vec{r}_۱|^۳}d\ell$

توزیع سطحی جرم: $dm=\sigma ds\ \Rightarrow\ \vec{g}(r)=-G\int\frac{\sigma\times(\vec{r}_۲-\vec{r}_۱)}{|\vec{r}_۲-\vec{r}_۱|^۳}ds$

توزیع حجمی جرم: $dm=\rho dv\ \Rightarrow\ \vec{g}(r)=-G\int\frac{\rho\times(\vec{r}_۲-\vec{r}_۱)}{|\vec{r}_۲-\vec{r}_۱|^۳}dv$

**مثال۳: در چه ارتفاعی از سطح زمین، شتاب گرانشی به نصف مقدار خود در سطح زمین می‌رسد؟ $R_e$ شعاع متوسط زمین است.** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۲)

۱) $۲R_e$ ۲) $\sqrt{۲}R_e$ ۳) $(\sqrt{۲}-۱)R_e$ ۴) $(\sqrt{۲}+۱)R_e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌خواهیم ارتفاعی که در آن شتاب گرانشی نصف مقدار آن در روی سطح می‌شود را به دست آوریم، می‌دانیم که رابطه‌ی شتاب گرانشی با ارتفاع به صورت روبرو می‌باشد:

$$g\propto\frac{۱}{r^۲}$$

$r$ فاصله از مرکز زمین است، لذا داریم: $r=R_e+h$ که $h$ ارتفاع از سطح زمین و $R_e$ شعاع زمین می‌باشد، در نتیجه خواهیم داشت: $g_۲=\frac{۱}{۲}g_۱\ \Rightarrow\frac{۱}{r_۲^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{۱}{r_۱^۲}$

که $r_۲=R_e+h$ و $r_۱=R_e$ می‌باشد، با جای‌گذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{(R_e+h)^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{۱}{R_e^۲}\ \Rightarrow ۲R_e^۲=R_e^۲+h^۲+۲R_eh\ \rightarrow R_e^۲-۲R_eh-h^۲=۰\ \rightarrow\sqrt{۲}R_e=R_e+h\ \Rightarrow h=R_e(\sqrt{۲}-۱)$$

در نتیجه در ارتفاع $h=R_e(\sqrt{۲}-۱)$، شتاب گرانشی به نصف تقلیل می‌یابد.

مدرسان شریف

# فصل هشتم

## «الکترواستاتیک»

### درسنامه (۱): بار الکتریکی و قانون کولن

## مفاهیم اولیه

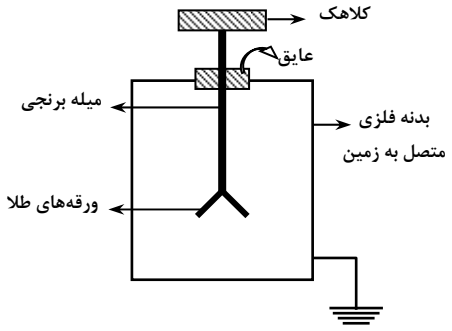
تمام مواد از ذرات ریزی به نام اتم تشکیل شده‌اند. دانشمندان وجود سه ذره را در اتم تشخیص داده‌اند که این ذرات پروتون، الکترون و نوترون هستند. الکترون بار منفی و پروتون به همان اندازه بار مثبت دارد، نوترون خنثی و بدون بار است. پس بار خالص موجود در اتم به دلیل برابری بار الکترون و پروتون صفر است. زمانی که مثلاً با مالش یک شانه به پارچه پشمی تعدادی از الکترون‌های پارچه به شانه منتقل می‌شود شانه بار منفی پیدا می‌کند و چون از تعداد الکترون‌های پارچه کم شده است، تعداد بارهای مثبت (پروتون‌ها) نسبت به الکترون‌ها در پارچه بیشتر شده و پارچه دارای بار مثبت می‌شود. بار الکتریکی را با $q$ یا $Q$ نمایش می‌دهیم و واحد آن در دستگاه SI کولن $(C)$ می‌باشد. بار هر الکترون برابر $q_e = -1/6\times10^{-19}\ C$ و بار هر پروتون برابر $q_p = +1/6\times10^{-19}\ C$ می‌باشد. یک کولن مقدار باری است که در هنگام عبور جریان یک آمپر به مدت یک ثانیه از سطح مقطع سیم عبور می‌کند.

### باردار کردن میله شیشه‌ای و پلاستیکی

هنگامی که یک میله شیشه‌ای به ابریشم مالش داده می‌شود، شیشه مقادیری از بارهای منفی خود را از دست می‌دهد، در نتیجه تعداد بارهای مثبت شیشه بیشتر از بارهای منفی آن می‌گردد. اگر با یک میلهٔ شیشه‌ای دیگر به همین شکل رفتار کنیم و دو میلهٔ شیشه‌ای را به هم نزدیک کنیم، دو میله همدیگر را دفع خواهند کرد (چون هر دو میله دارای بار مثبت هستند). هنگامی که یک میله پلاستیکی را با خز مالش دهیم، از خز تعدادی الکترون به میله پلاستیکی منتقل می‌شود، در نتیجه میله پلاستیکی دارای بار منفی خواهد شد و اگر با یک میلهٔ پلاستیکی دیگر به همین شکل رفتار کنیم و دو میله پلاستیکی را به هم نزدیک کنیم، دو میله همدیگر را دفع خواهند کرد (چون دو میله دارای بار منفی هستند). اما اگر یک میله پلاستیکی و یک میله شیشه‌ای که با شرایط توضیح داده شده در فوق باردار شده‌اند را به هم نزدیک کنیم، آنگاه دو میله یکدیگر را جذب می‌کنند.

**نتیجه:** بارهای همنام، یکدیگر را دفع و بارهای غیرهمنام، یکدیگر را جذب می‌کنند.

### الکتروسکوپ (برق‌نما)




الکتروسکوپ یا برق‌نما وسیله‌ای است که برای تعیین وجود بارهای الکتریکی با مقادیر کم و مشخص کردن نوع بار به کار می‌رود.

این وسیله مطابق شکل از یک کلاهک، یک میله برنجی که یک سر آن به کلاهک و سر دیگر آن به دو ورقه طلا متصل است، عایقی که میله برنجی از آن عبور می‌کند و یک محفظه فلزی که به زمین متصل است تشکیل شده است. اگر جسم باردار را به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم و یا با آن تماس دهیم، بار الکتریکی از طریق میله برنجی به ورقه‌های طلا می‌رسد و چون هر دو ورقه یک نوع بار دارند از یکدیگر دور می‌شوند. هر چه ورقه‌ها بیشتر از هم دور شوند مقدار بار بیشتر است.

برای تعیین نوع بار باید یک الکتروسکوپ را باردار کرده و سپس یک جسم را به آن نزدیک کنیم. اگر بار جسم موافق بار الکتروسکوپ باشد، زاویه بین ورقه‌های طلا زیاد می‌شود و اگر بار جسم، مخالفِ بار الکتروسکوپ باشد زاویه بین ورقه‌های طلا ابتدا کم و سپس زیاد می‌گردد.

**اجسام رسانا (هادی):** به اجسامی مانند فلزات و ... که در آن‌ها الکترون آزاد (به تعداد زیاد) وجود دارد و بار الکتریکی در آن‌ها به راحتی جابه‌جا می‌شود رسانا گفته می‌شود.

**اجسام نیمه‌رسانا (نیمه‌هادی) :** بعضی از اجسام مانند سیلیسیوم در دمای حدود $۲۰^\circ C$ الکترون آزاد ندارند و با بالا رفتن درجه حرارت آن‌ها الکترون آزاد ایجاد می‌شود و هادی می‌شوند، به این مواد نیمه‌رسانا می‌گویند.

**اجسام نارسانا (عایق) :** به اجسامی مانند آب خالص، چوب، پلاستیک و ... که بار الکتریکی در آن‌ها امکان جابه‌جایی ندارد یا به عبارت دیگر الکترون آزاد ندارند نارسانا گفته می‌شود.

**چگونگی توزیع بار در هادی‌ها و عایق‌ها :** هرگاه به یک جسم هادی بار الکتریکی بدهیم، بارها حرکت خواهند کرد و روی سطح خارجی فلز پخش خواهند شد. اگر شکل جسم هادی نامتقارن باشد، چگالی سطحی بار در نقاط نوک‌تیز بیشتر است. هرگاه به یک جسم عایق (نارسانا) بار الکتریکی بدهیم، بارها در همان نقطه باقی خواهند ماند.

## ناپیوستگی بار الکتریکی

هر بار مثبت یا منفی $q$ را می‌توان به صورت مضربی از یک بار بنیادی $(e = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ C)$ نمایش داد. $q = ne\ ,\ (n = \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, ...)$

به عبارت دیگر بار الکتریکی کمیتی گسسته می‌باشد.

## قانون کولن

می‌دانیم که دو جسم باردار بر یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. اگر دو بار هم نام (هر دو مثبت یا هر دو منفی) باشند، نیروی دافعه (رانشی) و اگر دو بار غیرهمنام باشند نیروی جاذبه (ربایشی) بر یکدیگر وارد می‌کنند. دو بار نقطه‌ای با بزرگی $q_۱$ و $q_۲$ که به فاصله $r$ از یکدیگر قرار دارند را در نظر می‌گیریم. بزرگی این نیرو با استفاده از قانون کولن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{F = K\frac{|q_۱ q_۲|}{r^۲}}$$

در این رابطه $K$ در سیستم‌های SI ثابت کولن و برابر $K = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} = ۹\times ۱۰^۹\ (\frac{N.m^۲}{C^۲})$ می‌باشد که در آن $\varepsilon_\circ$، ضریب گذردهی خلأ نام دارد و برابر $۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\ (\frac{C^۲}{N.m^۲})$ است. لازم به توضیح است که در فرمول فوق $r$ برحسب متر و $q_۱$ و $q_۲$ برحسب کولن $(C)$ بیان می‌شوند.

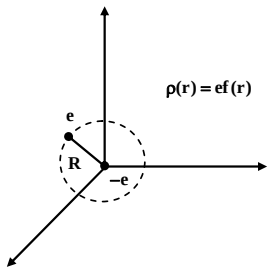
**تذکر۱:** اندازه نیروی وارده بین دو بار نقطه‌ای با حاصل‌ضرب دو بار نسبت مستقیم و با مجذور فاصله آن دو بار از یکدیگر نسبت عکس دارد.

**مثال۱: درون ناحیه‌ای از فضا توزیع بار الکتریکی مثبتی با چگالی حجمی $\rho(\vec{r}) = ef(r)$ (که در آن $e$ قدر مطلق بار الکترون و $f(r)$ تابعی از مختصه شعاعی $r$ در مختصات کروی است) و یک بار ساکن و ثابت به اندازه $e-$ در مبدأ مختصات وجود دارد. الکترونی دیگر به جرم $m$ در این ناحیه حول مبدأ مختصات در مسیر دایره شکلی به شعاع $R$ با بسامد زاویه‌ای ثابت $\omega$ در چرخش است. اندازه $\omega$ کدام است؟** $\int_\circ^R ۴\pi r^۲ f(r)dr = \alpha > ۱$

(فیزیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{e}{R}\frac{\alpha-۱}{\sqrt{۲\pi\varepsilon_\circ mR}}$ ۲) $\frac{e}{R}\sqrt{\frac{\alpha-۱}{۴\pi\varepsilon_\circ mR}}$ ۳) $\frac{e}{R}\sqrt{\frac{\alpha-۱}{۲\pi\varepsilon_\circ mR}}$ ۴) $\frac{e}{R}\frac{\alpha-۱}{\sqrt{۴\pi\varepsilon_\circ mR}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توانیم بار حجمی را به صورت یک بار نقطه‌ای در مبدأ مختصات در نظر بگیریم. برای این منظور بار کل فضایی را برای کره‌ای به شعاع $R$ محاسبه می‌کنیم. فقط این بخش از بار باعث حرکت دورانی بار نقطه‌ای می‌شود.




چون تقارن کروی داریم:

$$dq = \rho dv = ef(r)۴\pi r^۲ dr$$
$$\Rightarrow Q = \int_\circ^R dq = e\int_\circ^R ۴\pi r^۲ f(r)dr = e\alpha$$

حال نیروی کل وارد بر بار $e$ که در حال دوران است را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} F_۱ &= \frac{ke(-e)}{R^۲} = -\frac{ke^۲}{R^۲} \\ F_۲ &= \frac{ke(Q)}{R^۲} = \frac{ke^۲\alpha}{R^۲} \end{aligned}\right\} = F_T = F_۱ + F_۲ = -\frac{ke^۲}{R^۲} + \frac{ke^۲\alpha}{R^۲} = \frac{ke^۲}{R^۲}(\alpha - ۱) \Rightarrow F_T = \frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}(\alpha - ۱)$$

مدرسان شریف

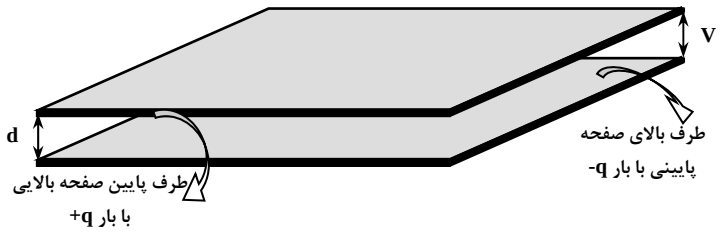
# فصل نهم

# «خازن، جریان و مقاومت»

## درسنامه (۱): خازن و روابط حاکم بر آن

### مفهوم خازن

خازن عبارت است از وسیله‌ای که از دو صفحه رسانا تشکیل شده و بارهای مساوی و ناهمنام روی آن‌ها نشسته است. این دو صفحه نسبت به هم عایق‌اند و انرژی را در خود ذخیره کرده و در موقع لزوم آن را برای مصرف ارائه می‌کند. نمادی که برای خازن استفاده می‌شود ⊣⊢ و یا ⊣ ⊢ می‌باشد. یک نوع خازن، خازن تخت می‌باشد که از دو صفحه رسانای موازی با مساحت $A$ که به فاصله $d$ از یکدیگر قرار دارند، تشکیل شده است. هرگاه خازنی باردار شود صفحه‌های آن دارای بارهای $+q$ و $-q$ می‌شوند. توجه شود وقتی از بار خازن صحبت می‌شود منظور مقدار مطلق $q$ می‌باشد. شکل زیر دو صفحه خازن را نشان می‌دهد که به فاصله $d$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند و بار $q$ روی سطوح با علامت مخالف توزیع شده است و اختلاف پتانسیل $V$ بین این دو صفحه وجود دارد. به علت وجود بار روی صفحات، میدان الکتریکی یکنواختی در فضای بین دو صفحه ایجاد می‌شود که جهت آن از صفحهٔ با بار مثبت به طرف صفحهٔ با بار منفی است. انرژی خازن در داخل همین میدان الکتریکی ذخیره می‌شود.

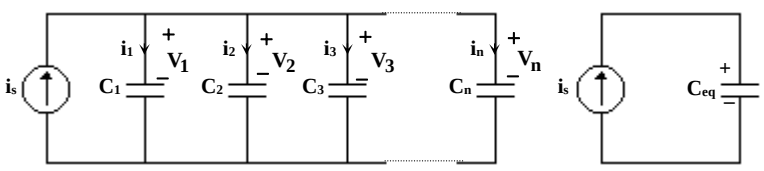



### ظرفیت خازن

نسبت بار ذخیره شده در خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن همواره مقداری ثابت است که ظرفیت خازن نامیده می‌شود و آن را با نماد $C$ نمایش می‌دهند، واحد آن در $SI$ کولن بر ولت است که فاراد نامیده می‌شود. مقدار ظرفیت فقط به مشخصات ساختمانی خازن بستگی دارد و به بار یا اختلاف پتانسیل آن وابسته نیست. با افزایش بار خازن، اختلاف پتانسیل آن نیز زیاد می‌شود به گونه‌ای که نسبت این دو همواره مقدار ثابتی است.

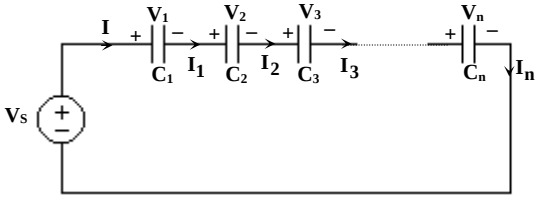
$$C = \frac{q}{V}$$

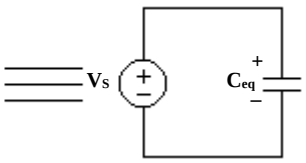
اگر $n$ خازن با یکدیگر موازی باشند، آنگاه ظرفیت معادل آن‌ها برابر مجموع ظرفیت خازن‌ها خواهد بود.




$$\begin{cases} C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \\ i_s = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n \\ V_1 = V_2 = V_3 = \cdots = V_n \end{cases}$$

اگر n خازن به صورت سری به یکدیگر متصل باشند ، آنگاه ظرفیت معادل آن‌ها به صورت شکل زیر محاسبه می‌گردد:

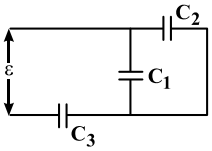



$$\begin{cases}\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\cdots+\frac{1}{C_n}\\ I=I_1=I_2,\cdots\\ V_S=V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n\end{cases}$$

**مثال۱: در شکل زیر $C_1=20\mu F$ ، $C_2=4\mu F$ ، $C_3=8\mu F$ و $\varepsilon=150V$ و مدار در حالت تعادل است. اگر $C_3$ دچار فروریزش الکتریکی شود به‌طوری که معادل یک سیم رسانا گردد، پس از رسیدن به تعادل، بار الکتریکی خازن $C_1$ چند برابر بار خود قبل از این فروریزش خواهد شد؟**

(فیزیک ـ سراسری ۹۸)




۱) ۱/۶
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل ظرفیت‌های $C_1$ و $C_2$ موازی و با ظرفیت $C_3$ متوالی هستند. بنابراین ظرفیت معادل مدار برابر است با:

$$\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_1+C_2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4+20}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}\Rightarrow C_T=6\mu F$$

حال می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سر خازن $C_1$ را به‌دست آوریم:

$$V_1=\frac{Q}{C_1+C_2}=\frac{C_TV}{C_1+C_2}=\frac{6\times150}{24}=\frac{150}{4}=37/5V$$

حال می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سر خازن در اثر عدم حضور $C_3$ را تعیین کنیم.

$$\Delta V_1=150-37/5=112/5V$$

به این ترتیب تغییرات در بار الکتریکی موجود در خازن $C_1$ به‌راحتی قابل محاسبه است.

$$\Delta q_1=C_1\Delta V_1=20\times112/5=2250\mu F$$

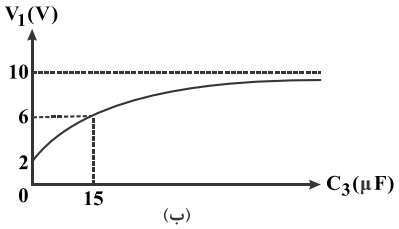
$$\Delta q_1=q_1'-q_1\Rightarrow2250=q_1'-C_1V_1\Rightarrow2250=q_1'-20\times37/5=q_1'-750\Rightarrow q_1'=2250+750=3000$$

حال می‌توانیم به‌راحتی نسبت بار نهایی به بار اولیه خازن را به‌دست آوریم:

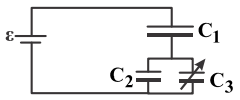
$$\frac{q_1'}{q_1}=\frac{3000}{750}=4$$

**مثال۲: در شکل (الف) خازن شماره ۳ یک خازن متغیر است و در شکل (ب) نمودار $V_1$ ، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱، برحسب ظرفیت $C_3$ رسم شده است. مقدار ظرفیت خازن $C_1$ چند میکروفاراد است؟**

(فناوری نانو ـ نانو مواد ـ دکتری ۹۹)




(ب)




(الف)

۱) ۳
۲) ۳/۶
۳) ۵
۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در آغاز ظرفیت‌های $C_1$، $C_2$ و $C_3$ یک ظرفیت مرکب را تشکیل می‌دهد که آن را با $C_{123}$ نمایش می‌دهیم و با توجه به نمودار داریم:

$$\frac{1}{C_{123}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}=\frac{C_1+C_2+C_3}{C_1(C_2+C_3)}$$

همچنین با استفاده از رابطه $C=\frac{q}{V}$ و با استفاده از این حقیقت که q با $q_1$ برابر است، داریم:

$$q=q_1\Rightarrow C_{123}\varepsilon=C_1V_1\Rightarrow V_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{q}{C_1}=\frac{C_{123}\varepsilon}{C_1}=\frac{C_2+C_3}{C_1+C_2+C_3}\varepsilon$$

در حالتی که $C_3\to\infty$ میل کند به‌صورت اتصال کوتاه عمل کرده و خازن $C_2$ را از مدار حذف می‌کند، به این ترتیب رابطه $V_1=\varepsilon$ برقرار خواهد شد.
پس چون در $C_3\to\infty$ طبق نمودار $V_1=10$ است، خواهیم داشت $\varepsilon=10$.
در حالتی که $C_3=0$ باشد، طبق نمودار $V_1=2V$ است.

$$\Rightarrow V_1=\frac{C_2+C_3}{C_1+C_2+C_3}\varepsilon\Rightarrow2=\frac{C_2}{C_1+C_2}\times10\Rightarrow2C_1+2C_2=10C_2\Rightarrow2C_1=8C_2\Rightarrow C_1=4C_2$$

مدرسان شریف

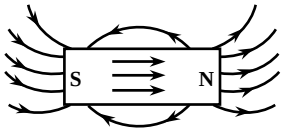
# فصل دهم

# «میدان‌های مغناطیسی»

## درسنامه (۱): قانون بیوساوار

### مفهوم میدان مغناطیسی

نخستین نشانه‌ای که از یک میدان مغناطیسی می‌توان درک کرد توسط آهن‌ربا نمایان می‌شود. یک آهن‌ربا در فضای اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد کرده و به آهن‌رباهای کنار خود نیرو وارد می‌کند و اجسام فلزی را جذب (به عبارتی بر آن‌ها نیز نیرو وارد می‌نماید) این خاصیت در قسمت‌هایی از آهن‌ربا که **قطب‌های** آهن‌ربا نام دارند بیشتر است.




وقتی یک آهن‌ربا را با یک نخ آویزان کنیم به طوری که بتواند حول محورش بچرخد همواره در امتداد جنوب به شمال زمین قرار می‌گیرد. قطبی که به سمت شمال قرار می‌گیرد را $N$ و قطبی که به سمت جنوب قرار می‌گیرد را $S$ می‌نامیم، همان طور که در شکل نشان داده شده است جهت خطوط میدان مغناطیسی در داخل آهن‌ربا از قطب $S$ به قطب $N$ است و در اطراف آهن‌ربا از قطب $N$ شروع و به قطب $S$ ختم می‌شوند.

**تذکر۱:** خطوط میدان مغناطیسی هیچ‌گاه همدیگر را قطع نمی‌کنند. در اطراف قطب‌ها تراکم خطوط بیشتر است که نشان‌دهنده بزرگی میدان مغناطیسی در آن نقاط می‌باشد.

**تذکر۲:** اگر دو آهن‌ربا را به یکدیگر نزدیک کنیم قطب‌های همنام یکدیگر را دفع و قطب‌های غیرهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

**تذکر۳:** وقتی یک آهن‌ربا را از وسط نصف کنیم هر نیمه آن یک آهن‌ربای کامل با دو قطب غیرهمنام می‌باشد و این موضوع نشان‌دهنده این است که در طبیعت تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد.

**تذکر۴:** اگر کره زمین را یک آهن‌ربای بزرگ فرض کنیم، قطب شمال این آهن‌ربا نزدیک قطب جنوب جغرافیایی و قطب جنوب این آهن‌ربا نزدیک قطب شمال جغرافیایی خواهد بود.

**نکته۱:** در مواد ابررسانا میدان مغناطیسی صفر است.

**مثال۱: اولین بار پدیده‌ی ابر رسانایی در چه سالی در آزمایشگاه مشاهده شد؟** (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۸۹۰ ۲) ۱۹۱۱ ۳) ۱۹۵۶ ۴) ۱۹۸۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابر رسانایی نخستین‌بار در سال ۱۹۱۱ دیده شد و در سال ۱۹۸۶ دستیابی به ابر رسانایی در دمای بالا ممکن شد.

◆ ◆ ◆ ◆

**به دست آوردن میدان مغناطیسی:**

**۱. قانون بیوساوار:** دقیقاً مشابه قانون کولن در الکتریسیته، در مورد میدان مغناطیسی نیز می‌توان مقدار این میدان را از طریق قانون بیوساوار محاسبه نمود. در حقیقت در اینجا نیز میدان مغناطیسی با مقدار جریان تولید کننده‌اش نسبت مستقیم و با عکس فاصله، رابطه توان دوم دارد. تفاوت عمده قانون کولن و بیوساوار در آن است که چون میدان مغناطیسی حاصل از بار متحرک است و هر تحرکی متناسب با یک بردار سرعت است شکل این قانون به صورت برداری می‌باشد.

رابطه‌ی قانون کولن و بیوساوار:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & \text{قانون کولن} \\ B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{L}\times\hat{r}}{r^2} & \text{قانون بیوساوار} \end{cases} \xrightarrow{\text{در حالت پیوسته}} \begin{cases} E = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} \\ B = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{L}\times\hat{r}}{r^2} \end{cases}$$

اگر بخواهیم میدان حاصل از یک سیم غیر راست را محاسبه نماییم باید سیم را به تکه‌های کوچک (المان‌های $dl$) تقسیم کنیم و میدان حاصل از تک‌تک المان‌ها را به دست آوریم و در نهایت برآیندگیری انجام دهیم. به این ترتیب داریم:

اندازه میدان مغناطیسی با استفاده از قانون بیوساوار: $B = dB_1 + dB_2 + dB_3 + \cdots = \int dB = \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} I\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} I\frac{dlr\sin\theta}{r^3}$

با توجه به آنکه جریان تنها در مسیر بسته می‌تواند حضور داشته باشد، انتگرال‌گیری روی مسیر بسته انجام شده است.

**مثال۲: کدام عبارت در مورد منشأ مغناطیس کره زمین توضیح نادرست می‌دهد؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۲)

۱) وجود اتم‌ها و مولکول‌های مغناطیسی بسیار قوی در مرکز زمین
۲) وجود جریان‌های الکتریکی درون کره زمین
۳) جدا شدن بارهای الکتریکی مثبت و منفی درون زمین در اثر گرادیان دما
۴) چرخش کره زمین به دور خود

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه‌ی (۱) نادرست می‌باشد زیرا طبق قانون عدم وجود تک قطبی‌های مغناطیسی، هیچ‌گاه یک تک‌قطبی مغناطیسی یا اتم و مولکول مغناطیسی نخواهیم داشت و حداقل یک دوقطبی مغناطیسی داریم اما سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشد، چون طبق قانون بیوساوار، وجود جریان الکتریکی منجر به ایجاد میدان مغناطیسی می‌شود و به دلیل این که می‌توانیم اتم‌ها و مولکول‌های یونیزه داشته باشیم، مواد مذابی که به صورت یونیزه شده می‌باشند و در حال حرکت هستند، باعث ایجاد میدان مغناطیسی می‌شوند. علاوه بر این، چون مرکز زمین بسیار داغ است، در نتیجه یک گرادیان دمایی وجود دارد که همین گرادیان دمایی باعث یونیزه شدن مواد مذاب و جدایی اتم‌ها و مولکول‌های مثبت و منفی از یکدیگر می‌شود اما حرکت زمین به دور خودش باعث جابه‌جایی این مواد مذاب یونیزه و تولید جریان الکتریکی می‌شود. بنابراین، تمامی این عوامل دست به دست هم می‌دهند تا میدان مغناطیسی زمین شکل بگیرد.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۳: در رابطه $M = C\frac{B}{\theta}$ اگر M مغناطش (ممان مغناطیسی در واحد حجم)، B مقدار میدان مغناطیسی خارجی و $\theta$ دمای ماده پارامغناطیسی باشد، واحد ضریب C در سیستم واحدهای SI کدام است؟** (فیزیک ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{A\cdot K}{s\cdot m^2}$ ۲) $\frac{A\cdot K}{T\cdot m}$ ۳) $\frac{m\cdot K}{T\cdot A}$ ۴) $\frac{m^2\cdot A}{s\cdot K}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این مثال را می‌توان به راحتی با استفاده از تحلیل ابعادی حل کرد.

$$M = C\frac{B}{\theta} \Rightarrow [M] = [C]\frac{[B]}{[\theta]}$$

در دستگاه بین‌المللی یکاها ( SI ) می‌دانیم که:

$$[M] = \frac{A}{m} \;;\; [B] = T \;;\; [\theta] = K$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{A}{m} = [C]\times\frac{T}{k} \Rightarrow [C] = \frac{A.K}{m.T}$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۴: در آزمایش ارستد ـ رولاند این مشاهده که.... در چارچوب فلسفه‌ی مکانیکی قابل تبیین نبود.** (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) جریان الکتریکی بر عقربه مغناطیسی تأثیر داشت و آن را باردار می‌کرد.
۲) نیروی وارد بر عقربه آهن‌ربا به سرعت حرکت بار (یعنی شدت جریان الکتریکی) بستگی داشت و در امتداد خط واصل میان عقربه آهن‌ربا و بار (یعنی بردار مکان) نبود.
۳) در سیم حامل جریان گرما تولید می‌شد.
۴) اگر آهن‌ربا از وسط به دو نیم تقسیم می‌شد دو قطب مثبت و منفی جدا از هم تولید نمی‌شد.

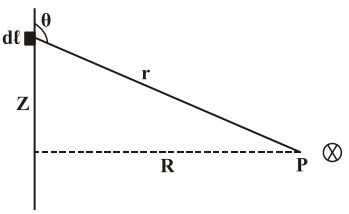
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نخستین بار اورستد نشان داد سیم حامل جریان پیرامون خود، میدان مغناطیسی تولید می‌کند و این میدان بر عقربه آهن‌ربا نیرو وارد کرده و آن را منحرف می‌کند. اینکه نیروی وارد شده در امتداد خط واصل عقربه و بارهای متحرک نبود و همچنین رابطه میدان الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب فلسفه مکانیکی آن زمان نمی‌گنجید.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۵: از سیم مستقیمی به طول ۸۰cm جریانی به شدت ۱۰A می‌گذرد. اندازه میدان مغناطیسی در نقطه‌ای روی عمودمنصف سیم و به فاصله ۳۰cm از سیم چند تسلا است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۴)

۱) $۵/۳۳\times۱۰^{-۶}$ ۲) $۳/۳۳\times۱۰^{-۷}$ ۳) $۶/۶۷\times۱۰^{-۷}$ ۴) $۲\times۱۰^{-۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از قانون بیوساوار، میدان مغناطیسی حاصل از قطعه سیم را به دست می‌آوریم:




$$\vec{B} = \int\frac{\mu_\circ I\, d\vec{\ell}\times\vec{r}}{۴\pi r^3} = \int\frac{\mu_\circ I}{۴\pi r^3}\, d\ell r\sin\theta$$

اگر راستای سیم را در جهت محور z ها فرض کنیم $d\ell = dz$ و همچنین $r = \sqrt{R^2+z^2}$ است. از طرفی بر طبق شکل، $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$ می‌باشد.

پس در کل داریم:

$$B = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\int\frac{dz\sqrt{z^2+R^2}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\mu_\circ RI}{۴\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ RI}{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\ell}{2}}\frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi R}\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+۴R^2}}$$

حال با استفاده از اطلاعات اولیه مسئله مقدار میدان مغناطیسی مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = ۸\circ cm = \circ/۸m \;;\; I = ۱\circ A \;;\; R = ۳\circ cm = \circ/۳m \;;\; \mu_\circ = ۴\pi\times۱\circ^{-۷}$$

$$\Rightarrow B = \frac{۴\pi\times۱\circ^{-۷}\times۱\circ}{۲\pi\times\circ/۳}\times\frac{\circ/۸}{\sqrt{(\circ/۸)^2+۴(\circ/۳)^2}} = \frac{۲}{\circ/۳}\times۱\circ^{-۶}\times\frac{\circ/۸}{\sqrt{\circ/۶۴+\circ/۳۶}} = \frac{۱۶}{۳}\times۱\circ^{-۶} \simeq ۵/۳۳\times۱\circ^{-۶}$$

مدرسان شریف

# فصل یازدهم

## «القای الکترومغناطیسی»

### درسنامه (۱): شار مغناطیسی و قانون القای فارادی

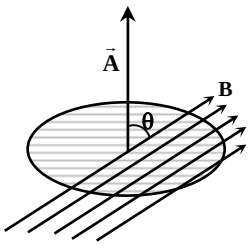
#### تعریف شار مغناطیسی

برای هر سطحی به مساحت $A$ ( و بردار عمود بر سطح $\vec{A}$ ) که در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گیرد به طوری که راستای بردار عمود بر سطح $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با هم زاویه $\theta$ بسازند می‌توان شار مغناطیسی $\varphi_B$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varphi_B = \vec{B}.\vec{A} = |\vec{B}|.|\vec{A}|\cos\theta$$

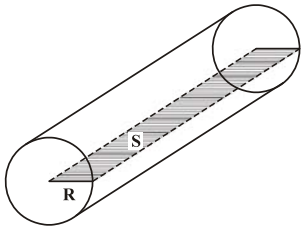
شار مغناطیسی $\varphi_B$ نشان‌دهنده مجموعه خطوط میدان مغناطیسی است که از یک سطح عبور می‌کند. یکای شار مغناطیسی در SI ، وبر (Wb) می‌باشد. پس یک وبر برابر یک تسلا مترمربع است. در بعضی مسائل شار مغناطیسی برحسب ماکسول داده می‌شود که یک ماکسول برابر $10^{-8}$ وبر است.

$$1Wb = 1T.m^2 = 1(\frac{N.m}{A}) = 1V.s = 1\frac{j}{A}$$




همان طور که از رابطه $\varphi_B$ بر می‌آید هر چه سطح $A$ بزرگ‌تر یا میدان مغناطیسی قوی‌تر باشد به طوری که خطوط میدان متراکم‌تر باشد، شار عبوری از سطح مفروض $A$ بیشتر است. به علاوه با تغییر زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شار تغییر می‌کند. اگر سیم‌پیچی (یا هر سطح دیگری ) عمود بر میدان مغناطیسی باشد، بردار سطح موازی با میدان خواهد بود. لذا در این حالت $\theta = \pi$ یا $\theta = 0$ است که در نتیجه آن شار ماکسیمم مقدار خود، یعنی $\varphi_{max} = BA$ را خواهد داشت. اگر سیم‌پیچ موازی میدان مغناطیسی باشد بردار سطح عمود بر میدان است. لذا $\theta = \frac{3\pi}{2}$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$ و نتیجتاً شار مغناطیسی عبوری از سطح سیم‌پیچ صفر خواهد بود $(\varphi = 0)$.

**مثال۱: یک سیم استوانه مسی به شعاع R حامل شدت جریان I با چگالی جریان یکنواخت در امتداد محور خود است. شار مغناطیسی در واحد طول که از سطح تخت S نشان داده شده در شکل زیر می‌گذرد، کدام است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۲)




۱) $\frac{\mu_0 I}{\pi}$

۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$

۳) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$

۴) $\frac{2\mu_0 I}{\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که میدان درون سیم استوانه‌ای عبارت است از: $B=\frac{\mu_\circ Ir}{2\pi R^2}$

شار عبارت است از میدان عبوری از سطح که طبق تعریف بدین قرار است: $\phi=\int B\,da$

اما با توجه به شکل، المان سطح را باید طوری در نظر بگیریم که سطح S را پوشش دهد، خواهیم داشت: $da=drdz$

که حدود r از صفر تا R می‌باشد و حدود Z از صفر تا یک است، در نتیجه داریم: $\phi=\int\frac{\mu_\circ Ir}{2\pi R^2}drdz=\frac{\mu_\circ I}{2\pi R^2}\int rdrdz=\frac{\mu_\circ I}{2\pi R^2}\frac{R^2}{2}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}$

## قانون القای فارادی

فارادی با ترتیب دادن یک آزمایش ساده توانست اثبات کند که اگر شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح با زمان تغییر کند، یک میدان الکتریکی در دو سر این سطح القا می‌گردد و بدین ترتیب دو کمیت میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به یکدیگر مرتبط شدند. رابطه ریاضی این قانون به صورت زیر قابل بیان است. در این رابطه $\varepsilon$ نیروی محرکه القایی نام دارد که همان اختلاف پتانسیل می‌باشد: $\varepsilon=\oint E.dl=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\int B.ds$

اثبات این رابطه به دانستن معادلات ماکسول وابسته است که در اینجا از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. علامت منفی در اینجا این نکته را بیان می‌کند که جهت القای میدان الکتریکی و جهت تغییرات شار مغناطیسی عکس یکدیگر می‌باشند که به نوبه خود به قانون لنز معروف است.

**تذکر۱:** تغییر شار گذرنده از مدار و نه خود شار باعث ایجاد emf می‌باشد و اگر شار گذرنده از مدار ثابت باشد، emf به وجود نخواهد آمد.

**تذکر۲:** شار مغناطیسی ممکن است با شرایط مختلف (تغییر میدان مغناطیسی، تغییر در مساحت حلقه و یا تغییر زاویه بین جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و بردار عمود بر سطح $\vec{A}$) تغییر کند.

**تذکر۳:** اگر پیچه‌ای شامل N حلقه داشته باشیم به طوری که شار مغناطیسی یکسان از تمام حلقه‌ها عبور کند، رابطه emf القائی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varepsilon=-N\frac{d\varphi}{dt}$$

طبق این رابطه هر چه شار سریع‌تر یعنی در زمان کوتاه‌تری تغییر کند، نیروی محرکه القایی بیشتر می‌شود.

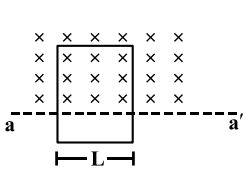
**تذکر۴:** اگر مدار دارای مقاومت R باشد، جریان القائی در مدار که علامت و جهتش همان جهت emf القائی می‌باشد را می‌توان از رابطه $I=\frac{\varepsilon}{R}$ محاسبه نمود.

**تذکر۵:** روابط بیان شده نیروی محرکهٔ القائی لحظه‌ای را مشخص می‌کند، رابطه نیروی محرکه القائی متوسط را به صورت زیر می‌توان نوشت:

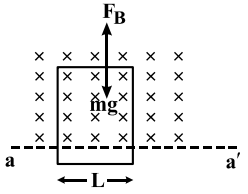
$$\bar{\varepsilon}=-N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

**تذکر۶:** یکای نیروی محرکه القائی در SI ولت (V) می‌باشد. ملاحظه می‌گردد که یک ولت معادل یک وبر بر ثانیه می‌باشد.

**مثال۲: یک حلقهٔ رسانای بزرگ مستطیلی شکل به عرض $L=2m$، مقاومت $R=200\Omega$ و جرم $m=50g$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=7T$ که جهت آن عمود بر صفحه حلقه و به سمت داخل صفحه کاغذ است و فقط در بالای خط $aa'$ وجود دارد، آویزان است. در یک لحظه حلقه رها می‌شود. حلقه تا رسیدن به تندی حدی $v_c$ شتاب می‌گیرد. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، اندازه $v_c$ چند $\frac{m}{s}$ است؟ $(g=9/8\frac{m}{s^2})$** (فیزیک ـ سراسری ۹۸)




۱) ۰/۱۷
۲) ۰/۵
۳) ۱/۰
۴) ۱/۵




☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نیروهای وارد بر حلقه نیروی وزن و نیروی مغناطیسی ناشی از میدان یکنواخت B هستند.

بنابراین نیروی خالص وارد بر حلقه برابر است با: $F_{net}=F_B-mg=ILB-mg$

در حالتی که حلقه به سرعت حدی $v_C$ می‌رسد، شتاب حرکت آن صفر است و بنابراین نیروی خالص وارد بر حلقه نیز صفر خواهد شد. یعنی: $F_{net}=\circ\Rightarrow ILB-mg=\circ\Rightarrow I=\frac{mg}{LB}$

مدرسان شریف

# فصل دوازدهم

## «شاره‌ها»

### درسنامه (۱): فشار در جامدات و مایعات

## تعریف شاره

شاره‌ها برخلاف جامدها موادی هستند که می‌توانند جاری شوند، شکل آن‌ها به مرزهای ظرف حاوی آن‌ها محدود می‌شود و این خاصیت از آنجا ناشی می‌شود که یک شاره نمی‌تواند نیروی مماسی وارد بر سطح خود را تحمل کند. مایعات و گازها هر دو در یک گروه منظور می‌شوند و شاره نام دارند.

## چگالی

چگالی کمیتی نرده‌ای است و با مقدار جرم تشکیل‌دهنده ماده در حجم اشغال شده توسط آن ماده برابر است.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

واحد اندازه‌گیری آن در دستگاه یکاهای بین‌المللی SI کیلوگرم بر مترمکعب $(\frac{kg}{m^3})$ است. چگالی را برحسب گرم بر سانتیمترمکعب $(\frac{g}{cm^3})$ نیز اندازه‌گیری می‌کنند:

$$1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3}$$

چگالی گازها بر حسب فشار به نحو چشمگیری تغییر می‌کند، اما چگالی مایعات چنین تغییراتی ندارد، یعنی گازها به آسانی تراکم‌پذیرند اما مایعات تراکم‌پذیر نیستند. همچنین چگالی گازها به شدت نسبت به تغییرات دما حساس است در حالی که چگالی مایعات به تغییرات دما بستگی چندانی ندارد.

**نکته۱:** آلیاژها از اختلاط و ذوب دو یا چند فلز به دست می‌آیند. در صورتی که جرم هر فلز $m_1$، $m_2$، $m_3$ و ... و حجم هر کدام $V_1$، $V_2$، $V_3$ و ... باشد، چگالی آلیاژ از رابطه مقابل تعیین می‌شود:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots} \Rightarrow \rho = \frac{\sum m}{\sum V}$$

**مثال۱: چرا یخ‌ها در سطح آب دریاها تشکیل می‌شوند؟** (علوم دریایی و اقیانوسی، فیزیک دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) چگالی یخ از چگالی آب بزرگ‌تر است.

۲) گرمای ویژه‌ی یخ از گرمای ویژه‌ی آب کمتر است.

۳) چگالی یخ از چگالی آب کمتر است.

۴) گرمای ویژه‌ی یخ از گرمای ویژه‌ی آب بزرگ‌تر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دلیل آنکه یخ‌ها در سطح آب دریاها تشکیل می‌شوند، آن است که چگالی یخ از چگالی آب کمتر است. پس بنا به قانون ارشمیدس، باید یخ که چگالی کمتری دارد در آب که چگالی بیشتری دارد، شناور بماند و در سطح قرار بگیرد. در نتیجه، همواره یخ‌ها در بالاترین سطح ممکن قرار خواهند گرفت. در حالت منجمد چون فاصله‌ی بین مولکول‌های آب بیشینه است، در نتیجه، چگالی یخ کمتر از چگالی آب خواهد بود، پس گزینه‌ی (۱) نادرست است، اما گزینه‌ی (۲) با آنکه از نظر مفهومی درست است اما علت یخ زدن سطح آب دریاها نمی‌باشد پس جواب مورد نظر سؤال نیست و گزینه‌ی (۴) نیز از نظر مفهومی نادرست می‌باشد.

**مثال۲: وقتی که یک کشتی از آب دریا با چگالی $۱۰۳۰\frac{kg}{m^۳}$ وارد بندری که چگالی آب آن $۱۰۰۵\frac{kg}{m^۳}$ است می‌شود، میزان فرو رفتن بدنه کشتی در آب چه تغییری می‌کند؟** (علوم دریایی و اقیانوسی، فیزیک دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) بیشتر می‌شود. ۲) کمتر می‌شود.

۳) تغییری نمی‌کند. ۴) کمتر یا بیشتر فرورفتن بستگی به جنس بدنه کشتی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرو رفتگی جسم جامد در یک مایع با چگالی آن نسبت عکس دارد؛ به طوری که هر چه چگالی مایع کمتر باشد، میزان فرو رفتگی جسم جامد در آن بیشتر خواهد بود. بنابراین چون کشتی از محیطی با چگالی بیشتر وارد محیطی با چگالی کمتر شده است، میزان فرو رفتگی آن در محیط بیشتر خواهد شد.

**مثال۳: جعبه‌ای با دیواره‌های نازک، حجمی برابر با $۱۲۰۰cm^۳$ و جرمی برابر با $۲۰۰g$ دارد. حداقل چند عدد ساچمه سربی باید روی جعبه قرار داد تا کاملاً در آب فرو رود؟ (جرم هر ساچمه $۱۰g$ است.)** (فناوری نانو ـ نانو مواد ـ دکتری ۱۴۰۰)

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای اینکه جعبه به طور کامل در آب فرو رود باید چگالی آن پس از اضافه کردن ساچمه‌ها با چگالی آب برابر شود، یعنی:

$$\rho=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}=\frac{۲۰۰+۱۰n}{۱۲۰۰+vn}=۱$$

که در آن $n$: تعداد ساچمه‌ها و $v$: حجم هر ساچمه است. چون ساچمه‌ها از جنس سرب هستند، با توجه به اینکه چگالی سرب $\rho=۱۱/۳۴\frac{g}{cm^۳}$ است، حجم هر ساچمه برحسب جرم آن برابر است با: $v=\frac{m}{\rho}=\frac{۱۰}{۱۱/۳۴}$. به این ترتیب داریم:

$$\frac{۲۰۰+۱۰n}{۱۲۰۰+\frac{۱۰n}{۱۱/۳۴}}=۱\Rightarrow ۲۰۰+۱۰n=۱۲۰۰+\frac{۱۰n}{۱۱/۳۴}\Rightarrow ۱۰n-\frac{۱۰n}{۱۱/۳۴}=۱۰۰۰\Rightarrow \frac{۱۱۳/۴n-۱۰n}{۱۱/۳۴}=۱۰۰۰\Rightarrow ۱۰۳/۴n=۱۱۳۴۰$$

$$\Rightarrow n=\frac{۱۱۳۴۰}{۱۰۳/۴}\simeq ۱۱۰$$

گزینه (۳) انتخاب نمی‌شود چون حداقل تعداد ساچمه‌ها خواسته شده است، بنابراین نباید عدد بزرگ‌تر از ۱۱۰ انتخاب شود.

## فشار

طبق تعریف، فشار برابر است با نیرویی که به طور عمود بر واحد سطح وارد می‌شود. تحت تأثیر نیروی یکسان، فشار با مساحت آن سطح رابطه معکوس دارد. هر چقدر مساحت سطح کوچک‌تر باشد، فشار ناشی از نیروی وزن بر آن بیشتر خواهد بود. $P=\frac{F}{A}$

واحد فشار در سیستم SI نیوتن بر مترمربع $(\frac{N}{m^۲})$ می‌باشد که نام خاص آن پاسکال ( با نماد $Pa$ ) است.

یکاهای دیگری چون اتمسفر $(atm)$ که تقریباً فشار متوسط سطح دریاست و نیز یکای «تور» به افتخار توریچلی که جوسنج جیوه‌ای را اختراع کرد و یکاهای میلی‌متر جیوه و پوند بر اینچ مربع $(\frac{Ib}{in^۲})$، یکاهای دیگر محاسبه فشار هستند.

$$۱\ Pa=۱\frac{N}{m^۲}\qquad ۱\ atm=۷۶۰\ torr=۷۶۰\ mmHg$$

$$۱\ bar=۱۰^۵\ Pa\qquad ۱\ atm=۱۰۱۳۲۵\ Pa\qquad ۱\ torr=۱۳۳/۳۲\ Pa\qquad ۱\ torr=۱mmHg$$

مدرسان شریف

# فصل سیزدهم

## «ترمودینامیک»

### درسنامه (۱): دما و دماسنج

ترمودینامیک علمی است که با دیدگاه ماکروسکوپیکی، بر آن دسته از کمیت‌های میکروسکوپی تأکید می‌کند که رابطه‌ای با حالت داخلی سیستم داشته باشند. به عبارت دیگر، آن کمیت‌هایی که به حالت داخلی سیستم مربوطند، مختصات ترمودینامیکی خوانده می‌شوند. این مختصات برای تعیین انرژی داخلی و سایر ویژگی‌های سیستم به کار می‌روند. هدف ترمودینامیک پیدا کردن روابط کلی بین این مختصات ترمودینامیکی است که با قوانین بنیادی ترمودینامیک سازگار باشند.

**ترمودینامیک:** متشکل از دو واژه ترمو (گرما) و دینامیک ( پویایی) است.

**سیستم:** قسمت برگزیده از جهان که مورد توجه قرار می‌گیرد و خواص ترمودینامیکی آن مدنظر است.

**محیط:** هر آنچه در خارج سیستم قرار دارد و در نحوه رفتار آن نقش مستقیم دارد محیط خوانده می‌شود.

**کمیت‌های میکروسکوپیک:** کمیت‌های ریز و غیر قابل اندازه‌گیری هستند.

**کمیت‌های ماکروسکوپیک:** کمیت‌های اساسی و قابل اندازه‌گیری هستند.

**تعادل گرمایی**

حالتی که دو سیستم (یا بیشتر) که با مقادیر محدود مختصاتشان مشخص شده‌اند پس از اینکه توسط دیواره‌های گرمابر با یکدیگر در تماس قرار گرفتند به آن می‌رسند، این ویژگی را دارند که کمیت‌های حالت ماکروسکوپی سیستم پس از آن ثابت می‌مانند. اگر دو سیستم هر یک با سیستم سومی در تعادل گرمایی باشند، حتی بدون اینکه با یکدیگر در تماس باشند، خود با یکدیگر در تعادل گرمایی هستند. این اصل به **قانون صفرم** ترمودینامیک موسوم است. چرا قانون صفرم؟ زیرا این قانون سال‌ها پس از قانون اول و دوم شناخته شده است و چون مفهوم دما اساس این قانون است، پس قانونی که دما را به عنوان یک مفهوم معتبر بیان می‌کند باید کمترین شماره ـ شماره صفر ـ را داشته باشد.

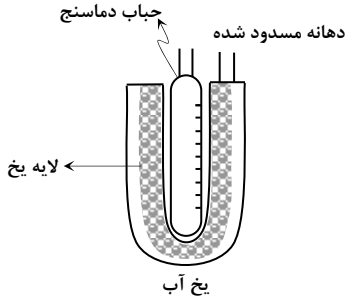
**منحنی هم‌دما**

مکان هندسی تمام نقاطی است که حالاتی را که یک سیستم با حالتی از سیستم دیگر در تعادل گرمایی است نشان می‌دهد. دمای یک سیستم یک ویژگی است که تعیین می‌کند آیا یک سیستم با سیستم‌های دیگر در تعادل گرمایی قرار دارد یا خیر.

**تعادل گرمایی**

هرگاه دو جسم در تماس با یکدیگر باشند، گرما بین آن‌ها مبادله می‌شود و در نهایت دو جسم به حالتی می‌رسند که به آن تعادل گرمایی گفته می‌شود. در تعادل گرمایی، جمع جبری گرمای مبادله شده بین آن‌ها صفر است.

## اندازه‌گیری دما




دمای نقطه سه‌گانه آب، نقطه ثابت استاندارد دماسنجی است. برای رسیدن به نقطه سه‌گانه، آب بسیار خالصی را که ترکیب ایزوتوپی آن عمدتاً شبیه آب اقیانوس است در ظرفی شبیه شکل روبرو تقطیر می‌کنند. پس از اینکه تمام هوا از ظرف خارج شد دهانه ظرف را مسدود کرده، با کمک یک مخلوط سرد کننده در حفره داخلی، یک لایه یخ در اطراف این حفره تشکیل می‌دهند. وقتی که مخلوط سرد کننده با یک حباب دماسنج جایگزین شود یک لایه نازک یخ در اطراف این دماسنج ذوب می‌شود. مادامی‌که فازهای جامد، مایع و بخار با یکدیگر در تعادل به سر می‌برند، سیستم در نقطه سه‌گانه است. که بنابر توافق بین‌المللی مقدار $۲۷۳/۱۶\,K$ به عنوان نقطه ثابت استاندارد برای مدرج کردن دماسنج‌ها به نقطه سه‌گانه آب نسبت داده شده است.

بنابراین توافق اندازه یک کلوین به عنوان $\frac{۱}{۲۷۳/۱۶}$ برابر اختلاف دمای میان نقطه سه‌گانه آب و صفر کلوین معرفی شده است. $\mathrm{tr(triple-point)}$ علامت اختصاری نقطه سه‌گانه است و برای سهولت ۲۷۳/۱۶ به صورت تقریبی ۲۷۳ در نظر گرفته شده است.

**مثال۱: دماسنجی که طریقه‌ی مدرج کردن آن معلوم نیست، دمای $۵^\circ C$ را ۵۰ درجه و دمای $-۲۰^\circ C$ را ۱۰ درجه نشان می‌دهد. این دماسنج در چه دمایی همان عددی را نشان می‌دهد که دماسنج سانتی‌گراد نشان می‌دهد؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-۷۰^\circ C$ ۲) $-۴۰^\circ C$ ۳) $-۳۵^\circ C$ ۴) $۹۵^\circ C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» رابطه میان دمای دماسنج مربوطه با دمای سلسیوس را به صورت $T_x = \alpha T_c + \beta$ بیان می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix}\text{if} \quad T_c = ۵^\circ C \rightarrow ۵۰ = \alpha \times ۵ + \beta \\ \text{if} \quad T_c = -۲۰^\circ C \rightarrow (۱۰ = \alpha \times (-۲۰) + \beta) \times -۱\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵۰ = ۵\alpha + \beta \\ -۱۰ = ۲۰\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{۸}{۵}, \beta = ۴۲$$

پس برای دماسنج فوق رابطه دمایی به صورت $T_x = \frac{۸}{۵}T_c + ۴۲$ بیان می‌شود. پس در حالتی که $T_x = T_c$ می‌توان نوشت:

$$T_c = \frac{۸}{۵}T_c + ۴۲ \rightarrow -\frac{۳}{۵}T_c = ۴۲ \Rightarrow T_c = -۷۰^\circ C$$

## دماسنج گازی

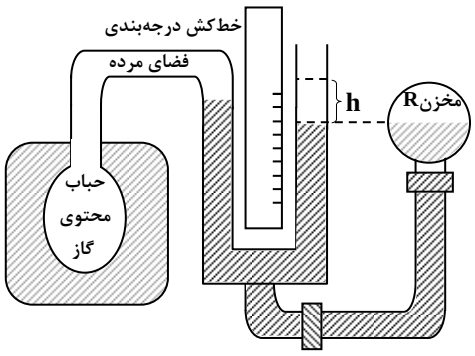
دماسنجی استاندارد است که با آن دماسنج‌های دیگر درجه‌بندی می‌شوند، مبتنی بر فشار گاز در یک حجم ثابت است و با توجه به شکل، شامل یک حباب متصل به فشارسنج جیوه‌ای از طریق یک لوله است. با بالا و پایین بردن مخزن R، سطح جیوه در لوله طرف چپ روی صفر ثابت نگه داشته می‌شود تا حجم گاز ثابت بماند. مقادیر مختلف فشار باید با توجه به خطاهای زیر تصحیح شوند:

۱ـ گاز موجود در فضای مرده در دمایی متفاوت با دمای گاز داخل حباب است. ۲ـ گاز داخل لوله مویین که حباب را به فشارسنج وصل می‌کند دارای شیب دماست یعنی دمای آن یکنواخت نیست. ۳ـ اگر قطر لوله مویین با مسیر آزاد میانگین مولکول‌های گاز قابل مقایسه باشد یک شیب فشار در لوله مویین وجود دارد. ( اثر نودسن) ۴ـ اثرات ناشی از تراکم‌پذیری جیوه و دما نیز باید منظور شوند.

دمای هر جسمی که با حباب در تماس گرمایی باشد به صورت $T = CP$ تعریف می‌شود.

از طرفی طبق رابطه $P = P_۰ + \rho gh$ ، $P$ را می‌توان حساب کرد. در نقطه سه‌گانه $T_{tr} = CP_{tr}$ می‌باشد و لذا با تقسیم دو رابطه دمایی داریم:

$$T = T_{tr}\left(\frac{P}{P_{tr}}\right) = ۲۷۳\left(\frac{P}{P_{tr}}\right)$$



**شکل دماسنج گازی**

دمای خوانده شده توسط دماسنج گازی در مقادیر عادی فشار اولیه به نوع گاز مورد استفاده بستگی دارد. اما هنگامی که فشار اولیه کاهش می‌یابد، مقادیر خوانده شده دما توسط دماسنج گازی که در آن‌ها از گازهای مختلف استفاده شده است، به یک مقدار واحد نزدیک می‌شوند و در این حالت مقادیر دما دیگر به جنس گاز بستگی نداشته و فقط به خواص عمومی گازها وابسته است.

بنابراین برای اینکه نتیجه، به نتیجه واقعی نزدیک‌تر شود کافی است مقدار گاز را به سمت صفر میل دهیم یعنی تا می‌توانیم چگالی گاز (گاز موجود در واحد حجم) را کاهش دهیم. وضعیت پیش رو کاملاً مشابه گاز ایده‌آل رفتار می‌کند. در نتیجه دمای به دست آمده، دمای گاز کامل بوده و با مقیاس کلوین سازگاری بسیار خوبی خواهد داشت.

پایین‌ترین دمایی که می‌توان با یک دماسنج گازی اندازه گرفت در حدود یک کلوین است که برای به دست آوردن آن باید از هلیوم با فشار کم در دماسنج استفاده کنیم. چون هلیوم در دمایی مایع می‌شود که پایین‌تر از دمای میعان هر گاز دیگری است، بنابراین دماسنج گازی حاوی هلیوم کم فشار بالاترین دقت در دماسنج‌های گازی را خواهد داشت.

**مقیاس‌های اندازه‌گیری دما**

الف) مقیاس سلسیوس ( سانتی‌گراد) $T_C$ ب) مقیاس کلوین که رابطه آن با درجه سانتی‌گراد به صورت $T_K = T_C + ۲۷۳/۱۶$ است.

**نکته۱:** تغییرات دمای یک جسم برحسب کلوین و سلسیوس برابر یکدیگر هستند: $\Delta T(K) = \Delta\theta(^\circ C)$

ج) مقیاس فارنهایت که رابطه آن با درجه سانتی‌گراد به صورت $T_F = \frac{۹}{۵}T_C + ۳۲^\circ C$ است.

## مقیاس دمایی گاز کامل (نقطه سه گانه آب)

نقطه سه‌گانه‌ی آب: نقطه‌ی ثابت استانداردی است که همه‌ی دماسنج‌ها در آن نقطه مقدار یکسانی نشان می‌دهند. این نقطه طوری انتخاب می‌شود که در آن یخ، آب و بخار آب با هم در تعادل هستند و نقطه‌ی سه‌گانه‌ی آب نامیده می‌شود. این حالت فقط در فشار بخار آب پیش می‌آید و یگانه است. دما در این نقطه ثابت و برابر ۲۷۳/۱۶ درجه کلوین است.

مقیاس دمایی گاز کامل مقدار برون‌یابی شده دما است که فقط به خواص عمومی گازها بستگی دارد:

$$T = \left[\lim_{P_{tr} \to ۰}\left(\frac{P}{P_{tr}}\right)\right] \times ۲۷۳/۱۶ K$$

که در آن $P_{tr}$ فشار گاز در دمای نقطه‌ی سه‌گانه یعنی ۲۷۳/۱۶ درجه کلوین است.

مدرسان شریف

# فصل چهاردهم

# «امواج و موج صوتی»

## درسنامه (۱): معادلات تحول امواج مکانیکی

### موج‌های مکانیکی

امواج مکانیکی از تغییر مکان قسمتی از یک محیط کشسان نسبت به وضعیت عادی‌اش ناشی می‌شوند، که این امر موجب نوسان آن قسمت حول وضعیت تعادلش می‌شود.

محیط کشسان محیطی است که خاصیت ارتجاعی دارد مثل کش یا فنر.

**نکته۱:** می‌توان گفت همه‌ی محیط‌ها در حد میکروسکوپیک کشسانند ولی در فضای ماکروسکوپیک این‌طور به نظر نمی‌رسند.

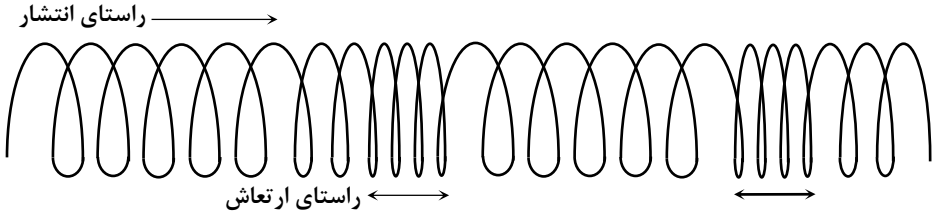
اینرسی و کشسانی خواصی از محیط‌اند که سرعت موج را در آن محیط تعیین می‌کنند. کشسانی باعث می‌شود که در هر جزء جابه‌جا شده از محیط، نیروی بازگرداننده ایجاد شود و اینرسی، نوع واکنش جزء مورد نظر نسبت به نیروی باز گرداننده را تعیین می‌کند.

**نکته۲:** سرعت انتشار موج در یک محیط به مشخصات فیزیکی محیط (مثل جنس و دمای محیط) بستگی دارد اما به شرایط فیزیکی چشمه نظیر بسامد، دامنه و ... بستگی ندارد.

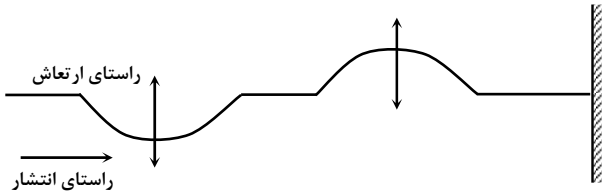
**نکته۳:** سرعت ارتعاش ذره طبق رابطه‌ی $v = A\omega\cos(\omega t + \theta_\circ)$ به دامنه و بسامد آن ذره بستگی دارد.

امواج مکانیکی را با توجه به رابطه بین حرکت ذرات ماده با راستای انتشار خود امواج می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

**۱ـ امواج طولی:** اگر راستای انتشار آشفتگی در موج بر راستای ارتعاش آن منطبق باشد آن را موج طولی می‌نامند. مثل موجی که در فنر شکل زیر ایجاد شده است.




**۲ـ امواج عرضی:** اگر راستای ارتعاش (نوسان) نقاط محیط حامل موج بر راستای انتشار موج در آن محیط عمود باشد آن را موج عرضی می‌نامند. مثل موجی که در طناب شکل روبرو ایجاد شده است.




امواج از نظر محیط انتشار به دو دسته تقسیم می‌شوند. ۱ـ امواج مکانیکی ۲ـ امواج غیرمکانیکی یا الکترومغناطیسی

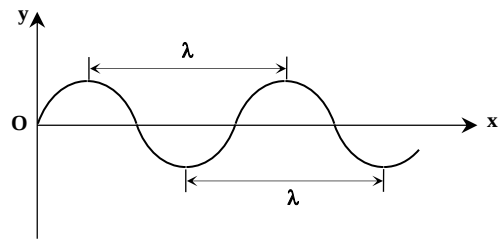
**خصوصیات امواج مکانیکی:**

۱ـ برای انتشار به محیط مادی نیاز دارند. ۲ـ حامل انرژی‌اند. ۳ـ تقدم و تأخر زمانی در نوسان (ارتعاش) نقاط مختلف محیط وجود دارد.

۴ـ نقاط مختلف محیط حامل موج حول وضعیت تعادل خود مرتعش می‌شوند و موج را منتقل می‌کنند. منظور آن است که خود همراه موج منتقل نمی‌شوند.

**خصوصیات امواج غیرمکانیکی یا الکترومغناطیسی:**

۱ـ برای انتشار به محیط مادی احتیاج ندارد. ۲ـ حرکت آشفتگی حرکت عادی نیست، بلکه حرکت میدان الکترومغناطیسی است.

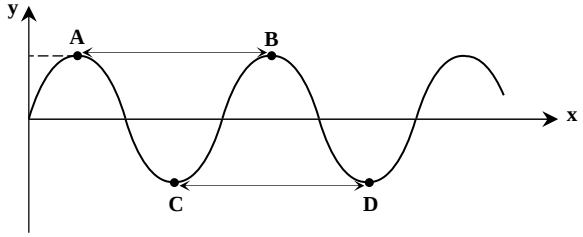



معادله عمومی هر شکلی از موج که به طرف راست حرکت کند به صورت $y = f(x - vt)$ و هر شکلی از موج که به طرف چپ حرکت کند به صورت $y = f(x + vt)$ است که در آن‌ها $v$ سرعت انتشار موج بوده و ثابت فرض می‌شود. به سرعت انتشار موج سرعت فاز نیز گفته می‌شود. باید توجه داشت که سرعت فاز نمی‌تواند از سرعت نور بزرگتر باشد. برای بررسی امواج لازم است که کمیت‌های زیر در مورد آن‌ها شناخته شود:

**طول موج** $(\lambda)$: مسافتی است که موج در هر دوره $(T)$ می‌پیماید و واحد آن متر است.

**نقاط هم‌فاز:** نقاطی از محیط انتشار موج هستند که فاصله آن‌ها از یکدیگر مضرب درستی از طول موج است. یعنی:

$\Delta x = n\lambda \rightarrow$ فاصله نقاط هم‌فاز از یکدیگر




مثلاً در شکل نقاط $(B,A)$ یا $(D,C)$ با هم هم‌فازند.

اختلاف فاز بین نقاط هم‌فاز مضرب زوج $\pi$ یعنی $n\pi$ ۲ می‌باشد.

**نقاط در فاز متقابل:** نقاطی هستند که فاصله آن‌ها از یکدیگر مضرب فردی از نصف طول موج است.

$\Delta x' = (2n-1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$ فاصله نقاط در فاز متقابل

مثلاً در شکل نقاط $(A,C)$ یا $(B,D)$ در فاز متقابل هستند.

توجه شود در اینجا اختلاف فاز بین نقاط، مضرب فرد $\pi$ یعنی $(2n-1)\pi$ است.

**دامنه موج:** عبارت است از بیشینه جابجایی جسم نوسان‌کننده از موضع تعادل آن.

**دوره تناوب:** دوره تناوب هر نوسان، مدت زمانی است که طول می‌کشد، تا یک نوسان کامل انجام شود.

**فرکانس موج:** عکس دوره تناوب را بسامد یا فرکانس می‌گویند. واحد آن عکس ثانیه می‌باشد که در اصطلاح علمی هرتز $(Hz)$ خوانده می‌شود.

$\omega = 2\pi\nu$ (بسامد زاویه‌ای یا فرکانس زاویه‌ای)

**سرعت فاز:** همان سرعت انتشار امواج در محیط است که می‌توان آن را به روش زیر محاسبه کرد:

$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow$ دوره تناوب

زیرا: $\left.\begin{array}{l} v = \frac{x}{t} \\ x \to \lambda \\ t = T \end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$ از طرفی $T = \frac{1}{\nu}$ در نتیجه می‌توانیم داشته باشیم:

$v = \lambda\nu \rightarrow$ بسامد

**نکته۴:** بین دو حالت خواهیم داشت:

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \frac{T_1}{T_2}$ یا $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \frac{\nu_2}{\nu_1}$

**حالت خاص:** اگر برای دو حالت، منبع تولید موج ثابت بماند (ثابت $= \nu$) خواهیم داشت:

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

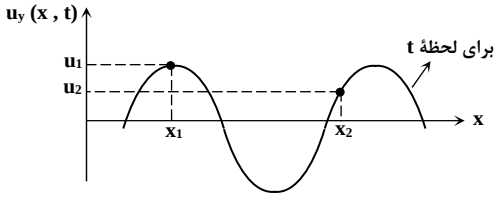
توجه شود بسامد $(\nu)$ از ویژگی‌های منبع تولید موج است و به محیط انتشار بستگی ندارد.

**تابع موج:** در این مبحث فقط امواج سینوسی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در حالت کلی تابع موج عرضی به یکی از دو صورت زیر است:

$$u_y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) \quad (I) \qquad \text{یا} \qquad u_y(x,t) = A\sin(\omega t + kx) \quad (II)$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود تابع موج می‌تواند تابع مکان و زمان باشد.

**اختلاف فاز مکانی و اختلاف فاز زمانی:**




اگر در یک لحظه، به دو نقطه از موج نگاه کنیم برابر نبودن مقدار عددی تابع موج آن‌ها به علت یکسان نبودن مکان آن‌هاست در نتیجه مقدار اختلاف فاز بین دو نقطه، مکانی خواهد بود و از رابطه‌ی $\Delta\phi = k\Delta x$ به دست می‌آید. زیرا:

$$u_1(x_1,t) = A\sin(\omega t - kx_1) \quad ; \quad u_2(x_2,t) = A\sin(\omega t - kx_2)$$

مدرسان شریف

# فصل پانزدهم

## «نـــور»

### درسنامه (۱): بازتاب و شکست نور

## قوانین بازتابش و شکست نور

می‌دانیم نور از دسته امواج الکترومغناطیسی است. وقتی در محیط انتشار می‌یابد خصوصیات زیر در مورد آن صادق می‌باشد.

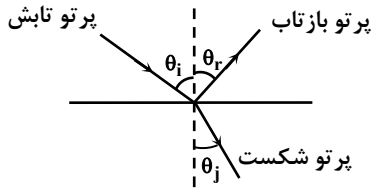
۱ـ برای انتشار نیازی به محیط مادی ندارد، یعنی می‌تواند در خلأ هم انتشار یابد. ۲ـ نور به خط راست سیر می‌کند.

وقتی نور از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود، در فصل مشترک دو محیط به صورت سه دسته پرتو قابل بررسی است.

(الف) دسته پرتوهای فرودی (تابشی)

(ب) دسته پرتوهای شکسته شده (عبوری)

(ج) دسته پرتوهای بازتابی




**قوانین بازتاب نور:**

۱ـ پرتو تابش، پرتو بازتاب و خط عمود بر فصل مشترک در نقطه تابش، هر سه در یک صفحه‌اند. ۲ـ زاویه تابش $\theta_i$ و زاویه بازتاب $\theta_r$ با هم برابرند. $(\theta_i = \theta_r)$

**قوانین شکست نور:**

۱ـ پرتو تابش، پرتو بازتاب، پرتو شکست و خط عمود بر فصل مشترک در نقطه تابش همگی در یک صفحه‌اند. ۲ـ میان زاویه تابش، زاویه شکست و ضـریب شکست دو محیط رابطه روبرو که به رابطه اسنل ـ دکارت موسوم است برقرار می‌باشد. $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_۲}{n_۱} = n_{۲۱}$

ضریب شکست هر محیط، با توجه به غلظت آن محیط، دارای مقدار متفاوتی است. کمترین ضریب شکست مربوط به خلأ است، که مقدار آن $n = ۱$ می‌باشد.

ضریب شکست یک محیط نسبت به محیط دیگر، عموماً با طول موج تغییر می‌کند؛ با استفاده از همین خاصیت پدیده شکست است که می‌توانیم نـور را بـه طول موج‌های تشکیل دهنده آن تجزیه کنیم.

قانون بازتابش را اقلیدس هم می‌دانست. اما قانون شکست را اسنل، به طریق تجربی کشف کرد و دکارت آن را از نظریه قدیم ذره‌ای بودن نور نتیجه گرفت.

قوانین بازتابش و شکست را می‌توان از معادلات ماکسول به دست آورد، و این یعنی این قوانین باید برای تمام نواحی طیف الکترومغناطیس، صادق باشند.

**نکته۱:** موادی مانند کوارتز که دارای دو ضریب شکست می‌باشند اصطلاحاً دو شکستی گفته می‌شوند.

**نکته۲:** اگر پرتو نوری به منشوری تحت زاویه $\theta$ بتابد و بخواهیم پرتو خارج شده از منشور هم همان زاویه $\theta$ را با خط قائم در وجه دیگـر بسـازد، ضریب شکست منشور، از رابطه روبرو تبعیت می‌کند. $n = \frac{\sin\frac{۱}{۲}(\psi + \phi)}{\sin(\frac{\phi}{۲})}$

که در رابطه بالا $\phi$ زاویه رأس منشور و $\psi$ زاویه انحراف مینیمم می‌باشد.

**اصل هویگنس:** تمام نقاط روی یک جبهه موج را می‌توان چشمه‌هایی دانست که مولد موجک‌های کروی ثانویه هستند. بعد از زمان t، مکان جدید این جبهه موج سطحی است که بر این موجک‌های ثانویه مماس است. از این اصل در حقیقت می‌توان برای پیشگویی مکان یک جبهه موج معلوم در آینده استفاده کرد.

**مثال۱: بنا بر اصل فرما پرتو نورانی در جابه‌جایی از نقطه ثابت و مشخص A به نقطه ثابت و مشخص B آن چنان مسیر منحنی‌وار پیوسته‌ای را طی می‌کند که مقدار..... ذره بین دو نقطه A و B ..... باشد.** (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) مدت زمان حرکت، بیشینه ۲) طول راه نوری، بیشینه ۳) طول راه نوری، کمینه ۴) مدت زمان حرکت، کمینه

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق اصل فرما و نور برای حرکت میان دو نقطه. مسیری را انتخاب می‌کند که مسافت میان آن دو نقطه را به صورت کمینه بپیماید.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۲: در عبور نور از مرز مشترک دو محیط شفاف، اولی با ضریب شکست $n_1$ و دومی با ضریب شکست $n_2$ قانون اسنل به شکل $(n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2)$ از کدام اصل و قانون اساسی‌تر فیزیک به دست می‌آید؟ اصل فرما مبتنی بر دیدگاه ذره‌ای بودن نور واصل هویگنس مبتنی بر دیدگاه موجی بودن نور استوار است.** (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) فقط از اصل هویگنس ۲) هم از اصل فرما و هم از اصل هویگنس به طور جداگانه

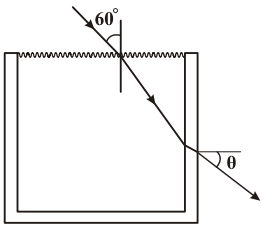
۳) فقط از اصل فرما ۴) از ترکیب هر دو اصل فرما و اصل هویگنس

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اصل فرما: نور را به صورت ذره در نظر می‌گیرد و بیان می‌دارد برای اینکه نور از نقطه A به نقطه B برود کوتاه‌ترین مسیر را می‌پیماید. در مکانیک لاگرانژی قانون اسنل با فرض ذره‌ای بودن نور از اصل فرما به دست می‌آید.

اصل هویگنس: اصل هویگنس نور را دارای ماهیت موجی می‌داند و قانون شکست اسنل را جداگانه به دست می‌آورد.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۳: یک استوانه شیشه‌ای (مطابق شکل) به ضخامت ۵ mm، ضریب شکست $\frac{3}{2}$ و شعاع ۱۰ cm با مایعی به ضریب شکست $\sqrt{\frac{3}{2}}$ پر شده است. پرتو نوری از هوا با زاویه $60^\circ$ به نقطه‌ای از سطح آب که روی محور استوانه است می‌تابد، زاویه $\theta$ چند درجه است؟** (فیزیک ـ سراسری ۹۶)



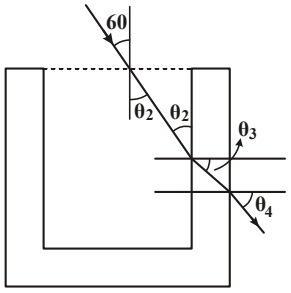

۱) $60^\circ$

۲) $30^\circ$

۳) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

۴) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش تشریحی:** با استفاده از رابطه ضریب شکست و زاویه شکست در عبور پرتو از محیط‌های مختلف می‌توانیم زاویه‌های $\theta_2$، $\theta_3$ و $\theta_4$ را برحسب $\theta_1 = 60^\circ$ به دست آوریم.




اگر ضریب شکست مایع را با $n_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و ضریب شکست تیغه را با $n_3 = \frac{3}{2}$ و ضریب شکست محیط اطراف را با $n_1 = 1$ نشان دهیم، داریم:

مرحله اول: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 60 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta_2$

$$\Rightarrow 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_2 = 45^\circ$$

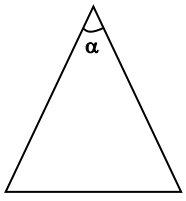
مرحله دوم: $n_2 \sin(90 - \theta_2) = n_3 \sin\theta_3 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \sin 45 = \frac{3}{2} \sin\theta_3 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \sin\theta_3 \Rightarrow \sin\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مرحله سوم: $n_3 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4 \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \times \sin\theta_4 \Rightarrow \sin\theta_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_4 = 60^\circ$

روش تستی: چون پرتو نور از محیط اول که هوا است، وارد چند محیط دیگر شده و در نهایت دوباره به همان محیط هوا بازگشته است، بنابراین زاویه فرود آن با زاویه عبورش به محیط با هم برابر هستند. پس چون زاویه فرود $60^\circ$ است، زاویه عبورش از تیغه و بازگشت به محیط اولیه همان $60^\circ$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۴: یک پرتو نور تک رنگ با زاویه تابش نسبتاً کوچکی به یک وجه منشوری به زاویه رأس $\alpha$ می‌تابد و از وجه مقابل خارج می‌شود ضریب شکست منشور $n_r$ و ضریب شکست محیط $n_i$ است زاویه انحراف با استفاده از تقریب زوایای کوچک کدام است؟** (علوم دریایی و اقیانوسی، فیزیک دریا ـ سراسری ۸۶)




۱) $(n_r - 1)\hat{\alpha}$

۲) $(n_r + 1)\hat{\alpha}$

۳) $(\frac{n_r}{n_i} - 1)\hat{\alpha}$

۴) $(\frac{n_r}{n_i} + 1)\hat{\alpha}$