مدرسان شریف

«مقدمه»

انتقال انرژی ناشی از اختلاف دما را انتقال حرارت می‌نامیم. بنابراین زمانی که بین نقاط مختلف یک ماده اختلاف دما وجود داشته باشد، در داخل آن ماده انتقال حرارت رخ خواهد داد. حرارت از نقطه با دمای بالاتر به نقطه با دمای پایین‌تر منتقل می‌شود (طبق قانون دوم ترمودینامیک). همچنین زمانی که بین دو ماده اختلاف دما وجود داشته باشد، حرارت از ماده با دمای بیشتر به ماده با دمای کمتر منتقل می‌شود. هرچه اختلاف دما بیشتر باشد، میزان انتقال حرارت بیشتر خواهد بود.
در حالت کلی انتقال حرارت به سه طریق انجام می‌گیرد: ۱) انتقال حرارت هدایتی (رسانشی)، ۲) انتقال حرارت جابه‌جایی، ۳) انتقال حرارت تشعشعی (تابشی)

انتقال حرارت هدایتی (رسانشی)

انتقال حرارت هدایتی نوعی از انتقال حرارت است که در آن گرما به واسطه اختلاف دما در داخل جسم جامد و یا سیال ساکن انتقال می‌یابد. این نوع از انتقال حرارت در همه فازهای جامد، مایع و گاز انجام می‌گیرد. انتقال حرارت هدایتی در جامدات به امواج شبکه‌ای ناشی از حرکت اتم‌ها نسبت داده می‌شود. هدایت گرمایی در جامدات با هدایت الکتریکی آن‌ها رابطه مستقیم دارد. در اجسام نارسانا انتقال حرارت هدایتی تنها از طریق امواج شبکه‌ای رخ می‌دهد، در حالی که در اجسام رسانا (مانند فلزات) حرکت انتقالی الکترون‌های آزاد نیز در انتقال حرارت موثر است. علت اصلی بالا بودن رسانایی گرمایی در فلزات وجود الکترون‌های آزاد در آن‌ها است. هدایت در سیالات (مایعات و گازها) به واسطه برخورد مولکول‌ها در اثر حرکت تصادفی آن‌ها صورت می‌گیرد.

مثال ۱: علت بالا بودن هدایت حرارتی در فلزات چیست؟

۱) بالا بودن گرمای ویژه فلز ۲) وجود الکترون‌های آزاد فلز ۳) بالا بودن انرژی سطحی فلز ۴) خاصیت جذبی فلز

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که گفتیم علت بالا بودن هدایت حرارتی در فلزات وجود الکترون‌های آزاد در آن‌ها است.

مثال ۲: موادی که دارای ..... باشند، هدایت حرارتی آن‌ها مطلوب است.

۱) انرژی آزاد مناسب ۲) آنتالپی مناسب ۳) تفاوت حرارت مناسب ۴) خاصیت هدایت الکتریکی مناسب

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان طور که گفتیم هدایت حرارتی در جامدات با هدایت الکتریکی آن‌ها رابطه مستقیم دارد.

قانون فوریه

میزان حرارت هدایتی منتقل شده در ماده را با استفاده از قانون فوریه بدست می‌آوریم. قانون فوریه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$q = -kA\frac{dT}{dx} \qquad (۱)$$

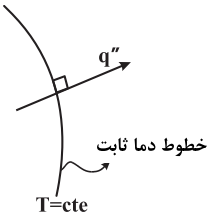
قانون فوریه بیان می‌کند که مقدار حرارت منتقل شده به طریق هدایتی در هر نقطه‌ای در داخل ماده با مساحت مقطع عمود بر جهت انتقال حرارت (A) و گرادیان دما در آن نقطه $(\frac{dT}{dx})$ و ضریب هدایت حرارتی ماده (k) رابطه مستقیم دارد. ضریب هدایت حرارتی (k) خاصیتی از ماده است که توانایی آن ماده را در هدایت گرما نشان می‌دهد و به جنس ماده بستگی دارد. علامت منفی در عبارت قانون فوریه نشانه‌ی آن است که گرما در جهت کاهش دما منتقل می‌شود. همچنین شار حرارتی هدایتی (q'') به‌صورت نسبت انتقال حرارت هدایتی (q) به سطح مقطع عمود بر جهت جریان گرما (A) تعریف می‌شود. بعبارت دیگر:

$$q'' = \frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx} \qquad (۲)$$

مثال ۳: در یک جسم دو بعدی اگر از طریق تجربی دمای نقاط مختلف جسم را بتوانیم اندازه‌گیری کنیم، آیا دستیابی به خطوط (مسیرهای) جریان حرارت، امکان‌پذیر است؟ (پلیمر ـ سراسری ۹۵)

۱) بله ۲) نیاز به محاسبه معادله‌ی q داریم.

۳) خیر ۴) نیاز به محاسبه معادله‌ی توزیع دما داریم.



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق قانون فوریه ($q''_n = -k\frac{dT}{dn}$)، بردار شار گرما در تمام نقاط بر خطوط دما ثابت، عمودند.

در نتیجه با داشتن دما در یک جسم دوبعدی به صورت تجربی و اتصال نقاط هم‌دما به هم، می‌توان خطوط دما ثابت را رسم کرد. بعد از رسم خطوط دما ثابت، با رسم خطوط عمود بر آن، خطوط جریان حرارت به‌دست می‌آید.

انتقال حرارت جابه‌جایی

این نوع از انتقال حرارت فقط در سیالات رخ می‌دهد. زمانی که یک سیال و یک سطح جامد که دارای دماهای متفاوتی هستند، در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند به‌دلیل اختلاف دما، بین آن‌ها انتقال حرارت انجام می‌شود و عامل این انتقال حرارت حرکت توده‌ای سیال است. به این نوع از انتقال حرارت، جابه‌جایی می‌گوییم. انتقال حرارت جابه‌جایی به دو نوع جابه‌جایی آزاد (طبیعی) و جابه‌جایی اجباری دسته‌بندی می‌شود. زمانی که سیال مجاور سطح در ابتدا ساکن باشد، انتقال حرارت را جابه‌جایی آزاد و زمانی که سیال مجاور سطح به وسیله یک عامل خارجی (مثلاً پنکه) دارای حرکت باشد، انتقال حرارت را از نوع جابه‌جایی اجباری می‌نامیم.
میزان حرارت منتقل شده از یک سطح جامد به سیال مجاور آن (و یا برعکس) را با استفاده از قانون سرمایش نیوتن بدست می‌آوریم. قانون سرمایش نیوتن به‌صورت زیر است:

$$q = hA(T_s - T_\infty) \qquad (۳)$$

در رابطه بالا، q میزان حرارت منتقل شده از سطح به سیال (و یا برعکس)، A سطح انتقال حرارت، T_s دمای سطح و T_∞ دمای سیال می‌باشد. h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی نام دارد و مقدار آن به نوع سیال، ماهیت جریان و هندسه سطح بستگی دارد. شار حرارتی جابه‌جایی (q'') نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty) \qquad (۴)$$

مثال ۴: جسمی داغ با دمای $۹۰^\circ c$ را در هوای اتاق با دمای $۲۰^\circ c$ قرار داده‌ایم. اگر ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی هوا (h) برابر $۶۰\frac{W}{m^۲ {}^\circ C}$ باشد، شار حرارتی جابه‌جایی از جسم به هوای اتاق چقدر است؟

۱) $۴۲۰۰\frac{W}{m^۲}$ ۲) $۲۱۰۰\frac{W}{m^۲}$ ۳) $۶۳۰۰\frac{W}{m^۲}$ ۴) $۸۴۰۰\frac{W}{m^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از معادله (۴) داریم:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) = ۶۰(۹۰ - ۲۰) = ۴۲۰۰\frac{W}{m^۲}$$

انتقال حرارت تشعشعی (تابشی)

در این نوع از انتقال حرارت، گرما به‌وسیله امواج الکترومغناطیس(یا فوتون‌ها) از یک محیط به محیط دیگر منتقل می‌شود. علی‌رغم انتقال حرارت هدایتی و جابه‌جایی که به محیط مادی نیاز دارند، انتقال حرارت تشعشعی نیازمند چنین محیطی نیست و در خلأ نیز قابل انتقال است. در واقع انتقال حرارت تشعشعی در خلأ بهتر از محیط مادی انجام می‌شود. تمامی اجسام و مواد در همه دماها از خود تابش می‌کنند و این انرژی تابشی صادر شده، توسط اجسام دیگر جذب می‌شود و بدین ترتیب بین آن‌ها انتقال حرارت تشعشعی (تابشی) انجام می‌شود. مقدار تابش صادر شده از یک جسم، به جنس و دمای آن بستگی دارد. میزان تابش یک جسم در دماهای مختلف، متفاوت است. هرچه دمای جسم بیشتر باشد، تابش آن نیز بیشتر است. همچنین میزان تابش اجسام متفاوت در دمای برابر، متفاوت است. در یک دمای مشخص، از بین تمامی اجسام بیشترین تابش توسط جسم سیاه انجام می‌شود. جسم سیاه جسمی ایده‌آل است که تمام تابش ورودی به خود را جذب می‌کند و در یک دمای مشخص بیشترین تابش را صادر می‌کند. میزان انرژی تابشی صادر شده از جسم سیاه با استفاده از قانون استفان ـ بولتزمن بدست می‌آید. قانون استفان ـ بولتزمن به‌صورت زیر است:

$$E_b = \sigma T^۴ \qquad (۵)$$

در رابطه بالا، E_b شار حرارتی تابشی صادر شده از جسم سیاه و T دمای سطح آن است. σ ثابت استفان ــ بولتزمن است و مقدار آن $۵/۶۷\times۱۰^{-۸}\ \frac{W}{m^۲.K^۴}$ می‌باشد. دقت کنید که در رابطه بالا دما برحسب کلوین (K) است. شار حرارتی صادر شده از اجسام دیگر، کمتر از جسم سیاه بوده و برابر است با:

$$E = \varepsilon\sigma T^۴ \qquad (۶)$$

در رابطه بالا ε ضریب صدور سطح نام دارد و مقدار آن بین ۰ و ۱ می‌باشد $(۰ < \varepsilon \le ۱)$. مقدار ضریب صدور یک سطح (ε) بستگی به جنس و دمای آن سطح دارد.

مثال ۵: میزان شار حرارتی تابشی از یک جسم سیاه برابر $۴۶۰\frac{W}{m^۲}$ می‌باشد. دمای آن چقدر است؟

۱) $۳۴^\circ c$ ۲) $۵۸^\circ c$ ۳) $۱۵۸^\circ c$ ۴) $۲۷^\circ c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از معادله (۵) داریم:

$$E_b = \sigma T^۴ \Rightarrow T = (\frac{E_b}{\sigma})^{\frac{۱}{۴}} = (\frac{۴۶۰}{۵/۶۷\times۱۰^{-۸}})^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow T = ۳۰۰^\circ K = ۲۷^\circ C$$

مدرسان شریف

فصل دوم

«انتقال حرارت هدایتی یک‌بعدی»

درسنامه(۱): هدایت یک‌بعدی پایا

در انتقال حرارت هدایتی یک بعدی، گرادیان دما فقط در یک جهت وجود دارد و گرما تنها در این جهت انتقال می‌یابد.

انتقال حرارت یک بعدی، پایا و بدون منبع حرارتی داخلی

۱ـ دیوار مسطح

در هدایت حرارتی یک بعدی در یک دیوار مسطح، دما فقط تابعی از x می‌باشد و انتقال حرارت تنها در این جهت رخ می‌دهد.

در این حالت معادله انتقال حرارت هدایتی بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad (۱)$$

با توجه به قانون فوریه داریم: $k\frac{dT}{dx}=-q''_x$. اگر این عبارت را در رابطه بالا جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{dq''_x}{dx}=0 \Rightarrow q''_x=cte \qquad (۲)$$

نتیجه ۱: در انتقال حرارت هدایتی یک بعدی ، پایا و بدون منبع حرارتی در دیوار مسطح، شار حرارتی (q'') در داخل دیوار ثابت است (حتی اگر ضریب هدایت حرارتی (k) ثابت نباشد).

الف) ضریب هدایت حرارتی (k) ثابت

اگر ضریب هدایت حرارتی (k) ثابت باشد، معادله هدایت حرارتی بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \qquad (۳)$$

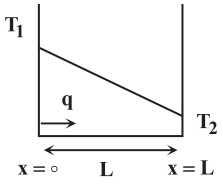
با حل معادله بالا توزیع دما در دیوار بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow T=c_1x+c_2 \qquad (۴)$$

نتیجه ۲: در هدایت حرارتی یک بعدی ، پایا و بدون منبع حرارتی در دیوار مسطح، درصورتی که ضریب هدایت دیوار (k) ثابت باشد، توزیع دما در دیوار خطی است (شیب نمودار دما $(\frac{dT}{dx})$ ثابت است).

ثابت‌های c_1 و c_2 از شرایط مرزی بدست می‌آیند. اگر دمای دو طرف دیوار را T_1 و T_2 بنامیم (شکل (۱))، در اینصورت c_1 و c_2 بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=0: T=T_1 \\ x=L: T=T_2 \end{cases} \Rightarrow c_1=\frac{T_2-T_1}{L} \quad , \quad c_2=T_1$$



شکل (۱)

درنتیجه معادله توزیع دما بصورت زیر در می‌آید:

$$T(x)=\frac{T_۲-T_۱}{L}x+T_۱ \qquad (۵)$$

نکته ۱: شیب نمودار دما برابر است با: $\frac{T_۲-T_۱}{L}$.

مثال۱: در یک دیوار مسطح به ضخامت $۲۰\,cm$ و ضریب هدایت $۵\frac{W}{m^{\circ}C}$ درصورتی که اختلاف دمای دو طرف دیوار $۳۰^{\circ}C$ باشد، شار حرارتی عبوری از دیوار در شرایط پایا چقدر است؟

۱) $۵۰۰\frac{W}{m^۲}$ ۲) $۲۵۰\frac{W}{m^۲}$ ۳) $۷۵۰\frac{W}{m^۲}$ ۴) $۱۰۰۰\frac{W}{m^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$q''_x=\frac{k}{L}(T_۱-T_۲)=\frac{۵}{۰/۲}\times ۳۰=۷۵۰\frac{W}{m^۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: در انتقال حرارت یک بعدی پایا و بدون منبع حرارتی در دیوار مسطح اگر ضخامت دیوار را افزایش دهیم و اختلاف دمای دو سمت دیوار را ثابت نگه داریم، شیب نمودار دما چه تغییری می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد ۲) کاهش می‌یابد

۳) تغییری نمی‌کند ۴) بستگی به ضریب هدایت دیوار دارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شیب نمودار دما برابر است با $\frac{T_۲-T_۱}{L}$. در نتیجه با ثابت بودن $(T_۲-T_۱)$ و افزایش L، شیب نمودار دما کاهش می‌یابد.

◆ ◆ ◆ ◆

با داشتن توزیع دما و با استفاده از قانون فوریه، نرخ انتقال حرارت هدایتی (q_x) و شار حرارتی هدایتی (q''_x) در داخل دیوار بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$q_x=-kA\frac{dT}{dx}=\frac{kA}{L}(T_۱-T_۲) \qquad (۶)$$

$$q''_x=\frac{q_x}{A}=\frac{k}{L}(T_۱-T_۲) \qquad (۷)$$

نتیجه ۳: در هدایت حرارتی یک بعدی، پایا و بدون منبع حرارتی در دیوار مسطح، درصورتی که ضریب هدایت دیوار (k) ثابت باشد:

۱- نرخ انتقال حرارت (q_x) و شار حرارتی هدایتی (q''_x) در طول دیوار ثابت هستند.

۲- شار حرارتی (q''_x) با ضریب هدایت حرارتی دیوار (k) و اختلاف دمای دو طرف دیوار $(T_۱-T_۲)$ رابطه مستقیم و با ضخامت دیوار (L) رابطه عکس دارد.

مثال۳: اگر ضریب هدایت حرارتی دیوار مسطح، دو برابر و ضخامت آن نصف شود، درصورتی که اختلاف دمای دو طرف دیوار ثابت باشد، شار حرارتی عبوری در داخل دیوار چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ برابر ۲) ۴ برابر ۳) $\frac{۱}{۲}$ برابر ۴) تغییری نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از رابطه (۷) و با توجه به این‌که اختلاف دما $(T_۱-T_۲)$ ثابت است، داریم:

$$q''_۱=\frac{k}{L}(T_۱-T_۲)\Rightarrow q''_۲=\frac{۲k}{\frac{L}{۲}}(T_۱-T_۲)=\frac{۴k}{L}(T_۱-T_۲)=۴q''_۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

ب) ضریب هدایت حرارتی (k) تابع دما

اگر ضریب هدایت حرارتی دیوار تابع دما باشد $(k=k(T))$، در این‌صورت معادله هدایت حرارتی بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=۰ \qquad (۸)$$

دقت کنید که در رابطه بالا از آن‌جا که k تابع دما است و دما هم در طول دیوار تغییر می‌کند، بنابراین k به‌طور ضمنی تابع x می‌باشد و در نتیجه نمی‌توانیم آن‌را از داخل مشتق بیرون بیاوریم.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم در این حالت هم شار حرارتی (q''_x) در داخل دیوار ثابت است زیرا:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0\ ,\ k\frac{dT}{dx}=-q''_x\ \Rightarrow\ \frac{dq''_x}{dx}=0\ \Rightarrow\ q''_x=cte$$

برای بدست آوردن مقدار شار حرارتی در حالتی که ضریب هدایت دیوار تابع دما می‌باشد با استفاده از قانون فوریه به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$q''_x=-k\frac{dT}{dx}\ \Rightarrow\ q''_x dx=-kdT\ \Rightarrow\ \int_0^L q''_x dx=\int_{T_1}^{T_2}-kdT\ \Rightarrow\ q''_x.L=\int_{T_1}^{T_2}-kdT\ \Rightarrow\ q''_x=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}kdT \qquad (۹)$$

مثال۴: تغییرات ضریب هدایت حرارتی با دما در یک دیوار مسطح به ضخامت L به صورت $k=T^2$ می‌باشد. مقدار شار حرارتی در این دیوار چقدر است؟

۱) $\frac{T_1-T_2}{L}$　　۲) $\frac{T_1^2-T_2^2}{2L}$　　۳) $\frac{T_1^3-T_2^3}{3L}$　　۴) $\frac{T_1+T_2}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از قانون فوریه داریم:

$$q''=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}kdT=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}T^2dT=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{3}T^3\right)\Big|_{T_2}^{T_1}\Rightarrow q''=\frac{T_1^3-T_2^3}{3L}$$

در بسیاری از موارد، تغییرات ضریب هدایت حرارتی با دما، خطی و بصورت $k=k_0(1+\beta T)$ می‌باشد، بنابراین در ادامه این بخش توجه خود را به این حالت معطوف می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۹)، مقدار شار حرارتی در این حالت برابر است با:

$$q''=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}kdT=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}k_0(1+\beta T)dT=\frac{k_0}{L}\left(T+\frac{\beta}{2}T^2\right)_{T_2}^{T_1}\ \Rightarrow\ q''=\frac{k_0}{L}(T_1-T_2)+\frac{\beta k_0}{2L}(T_1^2-T_2^2) \qquad (۱۰)$$

رابطه بالا مقدار شار حرارتی (q'') را در حالتی که ضریب هدایت حرارتی دیوار تابع دما و بصورت $k=k_0(1+\beta T)$ می‌باشد، ارائه می‌دهد. از رابطه بالا ملاحظه می‌کنیم که اگر $\beta=0$ باشد (به عبارت دیگر ضریب هدایت دیوار ثابت باشد)، آنگاه $q''=\frac{k_0}{L}(T_1-T_2)$. این همان رابطه‌ای است که در بخش قبل برای شار حرارتی در حالتی که ضریب هدایت دیوار ثابت است $(k=k_0)$ بدست آوردیم.

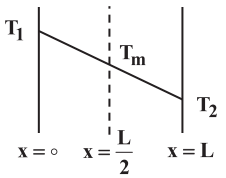
اگر ضریب هدایت دیوار با افزایش دما، افزایش یابد $(\beta>0)$ در این‌صورت شار حرارتی نسبت به حالتی که ضریب هدایت دیوار ثابت است $(\beta=0)$ بیشتر می‌باشد و اگر ضریب هدایت دیوار با افزایش دما، کاهش یابد $(\beta<0)$ در این‌صورت شار حرارتی نسبت به حالتی که ضریب هدایت دیوار ثابت است $(\beta=0)$ کمتر می‌باشد. به‌طور خلاصه داریم:

$$\begin{cases}k_1=k_0(1+\beta T) & \beta>0\\ k_2=k_0(1+\beta T) & \beta=0\\ k_3=k_0(1+\beta T) & \beta<0\end{cases}\ \Rightarrow\ k_1>k_2>k_3\ \Rightarrow\ q_1>q_2>q_3$$

اکنون شکل نمودار دما در داخل دیوار را در این سه حالت بررسی می‌کنیم:

۱) ضریب هدایت دیوار ثابت باشد: $k=k_0\ (\beta=0)$.

این حالت را در بخش قبل بررسی کردیم. در این حالت توزیع دما در داخل دیوار خطی و بصورت شکل (۲) می‌باشد و داریم: $T_m=\frac{T_1+T_2}{2}$ که T_m دمای وسط دیوار می‌باشد.

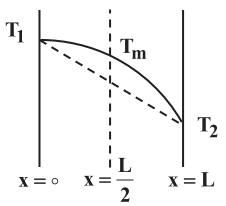


شکل(۲)

۲) ضریب هدایت دیوار با افزایش دما، افزایش یابد: $\beta>0$ و $k=k_0(1+\beta T)$.

با استفاده از قانون فوریه داریم: $q''=-k\frac{dT}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{dT}{dx}=-\frac{q''}{k}=-\frac{q''}{k_0(1+\beta T)}$

با توجه به رابطه بالا با افزایش دما (T)، ضریب هدایت حرارتی (k) افزایش می‌یابد و درنتیجه شیب نمودار دما $(\frac{dT}{dx})$ کاهش می‌یابد. بنابراین نمودار دما بصورت شکل (۳) می‌باشد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌کنیم، تقعر منحنی رو به پایین است و داریم: $T_m>\frac{T_1+T_2}{2}$.



شکل(۳)

درسنامه (۴): عایق‌های حرارتی

عایق بندی

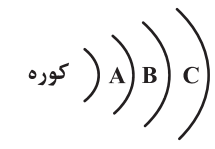
به منظور کاهش میزان انتقال حرارت از یک منبع گرمایی به محیط اطراف آن از عایق استفاده می‌کنیم. عایق‌ها موادی با ضریب هدایت حرارتی پایین و در نتیجه مقاومت حرارتی بالا هستند و به میزان قابل توجهی از انتقال حرارت جلوگیری می‌کنند. در برخی عایق‌ها که به عایق‌های لیفی معروفند (مثل پشم شیشه) حجم هوای به تله افتاده در عایق در کیفیت آن موثر می‌باشد. هر چه حجم هوای داخل عایق بیشتر باشد، کیفیت عایق بهتر است و مقاومت بیشتری در مقابل انتقال حرارت دارد زیرا ضریب هدایت هوا بسیار پایین است.

نکته ۳۲: اگر برای کاهش انتقال حرارت از یک منبع گرمایی (مانند کوره) به محیط بخواهیم از چند نوع عایق (با ضرایب هدایت متفاوت) استفاده کنیم، آنگاه ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها مهم است. اگر ضریب هدایت حرارتی عایق‌ها تابع دما باشد، برای اینکه بیشترین مقاومت حرارتی (و در نتیجه کمترین میزان انتقال حرارت) را داشته باشیم ابتدا باید عایق‌هایی را قرار دهیم که ضریب هدایت آنها تابع نزولی از دما می‌باشد. سپس عایق‌هایی قرار می‌گیرند که ضریب هدایت حرارتی آنها ثابت است و با دما تغییر نمی‌کند. در بین عایق‌هایی که ضریب هدایت آن‌ها ثابت می‌باشد ابتدا عایقی قرار می‌گیرد که ضریب هدایت حرارتی آن کوچکتر باشد. در نهایت عایق‌هایی قرار می‌گیرند که ضریب هدایت حرارتی آن‌ها تابع صعودی از دما می‌باشد. به عنوان مثال اگر بخواهیم برای عایق بندی یک کوره حرارتی از سه نوع ماده عایق A، B و C با ضریب هدایت حرارتی k_A، k_B و k_C استفاده کنیم، بطوریکه:

$$k_A = k_\circ(1-\alpha T) \ , \ k_B = k_\circ \ , \ k_C = k_\circ(1+\alpha T) \ , \ \alpha > 0$$

به عبارت دیگر k_A تابع نزولی از دما، k_B ثابت و k_C تابع صعودی از دما باشد، در اینصورت برای اینکه بیشترین کاهش را در میزان انتقال حرارت از کوره به محیط داشته باشیم (عایق بندی بهتری داشته باشیم) ، ابتدا باید عایق A، سپس عایق B و در نهایت عایق C را قرار دهیم (مطابق شکل ۱۸).

بدترین عایق‌بندی زمانی است که ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها عکس حالت فوق باشد.



شکل (۱۸)

مثال ۱۳۵: برای کاهش نرخ انتقال حرارت از یک کوره از سه لایه عایق با ضریب هدایت حرارتی $k_1 = k_\circ(1+\frac{\alpha}{T})$ و $k_2 = k_\circ$ و $k_3 = k_\circ(1+\alpha T)$ استفاده می‌کنیم. ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها چگونه باشد تا کمترین اتلاف حرارتی از کوره را داشته باشیم؟

۱) k_3, k_2, k_1 ۲) k_1, k_2, k_3 ۳) k_3, k_1, k_2 ۴) k_2, k_3, k_1

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای اینکه کمترین اتلاف را داشته باشیم، ابتدا عایقی را قرار می‌دهیم که ضریب هدایت آن تابع نزولی از دما می‌باشد، سپس عایقی که ضریب هدایت آن ثابت و در نهایت عایقی که ضریب هدایت آن تابع صعودی از دما می‌باشد. بنابراین ابتدا لایه k_1، سپس k_2 و در آخرلایه k_3 را قرار می‌دهیم.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۳۶: برای کاهش اتلاف حرارتی از یک کوره از سه لایه عایق با ضرایب هدایت حرارتی ثابت $k_3 < k_2 < k_1$ استفاده می‌کنیم. ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها جهت حداقل شدن اتلاف حرارتی باید چگونه باشد؟

۱) k_3, k_2, k_1 ۲) k_1, k_2, k_3 ۳) k_1, k_3, k_2 ۴) ترتیب مهم نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان طور که گفتیم زمانی که ضریب هدایت حرارتی عایق‌ها ثابت باشد، برای حداقل شدن اتلاف حرارتی ابتدا باید عایقی قرار گیرد که کمترین ضریب هدایت حرارتی را دارد و در آخر عایقی که بیشترین ضریب هدایت را داراست. بنابراین ابتدا باید لایه k_3 و سپس k_2 و در انتها k_1 را قرار دهیم.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته ۳۳: اگر منبع گرمایی (مثلاً کوره) بصورت مکعب باشد (به شکل استوانه و کره نباشد) و ضرایب هدایت حرارتی همه عایق‌ها ثابت باشد (تابع دما نباشد) ، در این صورت ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها در میزان اتلاف حرارتی تاثیری ندارد و عایق‌ها به هر ترتیبی که قرار گیرند میزان اتلاف حرارتی ثابت می‌باشد.

اگر کوره به شکل مکعب باشد در صورت مسأله قید می‌شود و اگر قید نشود کوره را استوانه‌ای (یا کروی) در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۳۷: برای کاهش اتلاف حرارتی از یک کوره به شکل مکعب مستطیل از سه لایه عایق با ضرایب هدایت حرارتی ثابت $k_3 < k_2 < k_1$ استفاده می‌کنیم. ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها چگونه باشد تا اتلاف حرارتی از کوره حداقل شود؟

۱) k_3, k_2, k_1 ۲) k_1, k_2, k_3

۳) k_3, k_1, k_2 ۴) ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها مهم نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان طور که گفتیم در یک کوره مکعبی اگر ضرایب هدایت حرارتی عایق‌ها ثابت باشد، ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها مهم نیست.

مثال ۱۳۸: دو لایه عایق با جنسهای متفاوت ($k_۲ = ۲k_۱$) و با ضخامت یکسان را روی لوله‌ای که دمای سطح آن ثابت است می‌بندیم. در صورتی که h و T_∞ اطراف لوله ثابت باشد، ابتدا کدام لایه ۱ یا ۲ را روی لوله قرار دهیم تا انتقال حرارت کمتری به بیرون منتقل شود؟ ($T_۱ > T_\infty$)

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)

۱) ابتدا لایه ۱ سپس لایه ۲
۲) ابتدا لایه ۲ سپس لایه ۱
۳) تفاوتی ندارد
۴) با اطلاعات موجود نمی‌توان گفت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر برای عایق‌بندی یک استوانه یا کره بخواهیم از چند نوع عایق با ضرایب هدایت (k) متفاوت استفاده کنیم آنگاه ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها در میزان اتلاف حرارتی تأثیرگذار است. اگر ضریب هدایت حرارتی عایق‌ها تابع دما باشد، برای اینکه بیشترین مقاومت حرارتی (و در نتیجه کمترین میزان انتقال حرارت) را داشته باشیم ابتدا باید عایق‌هایی را قرار دهیم که ضریب هدایت آنها تابع نزولی از دما باشد، سپس عایق‌هایی که ضریب هدایت آن ثابت (و تابع دما نباشد) و در آخر هم عایق‌هایی که ضریب هدایت آنها تابع صعودی از دما باشد.

اگر ضریب هدایت (k) همه عایق‌ها ثابت باشد (مثل همین مسأله) ترتیب قرار گرفتن عایق‌ها از عایق با ضریب هدایت کوچکتر به عایق با ضریب هدایت بزرگ‌تر می‌باشد. بنابراین ابتدا لایه (۱) و سپس لایه (۲) را قرار می‌دهیم.

مثال ۱۳۹: در یک راکتور کروی دارای عایق، واکنش گرمازایی به‌صورت پایا در حال انجام است. در صورتی که ضخامت عایق بیشتر شود و واکنش همچنان به‌صورت پایا و با همان نرخ پیشین ادامه یابد، در این شرایط، مقدار اتلاف انرژی از کره با افزایش ضخامت عایق چه تغییری می‌کند؟ ($H = ۲K$)

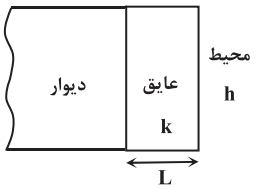
(مهندسی شیمی ـ سراسری ۹۷)

۱) کمتر می‌شود.
۲) بیشتر می‌شود.
۳) تغییری نمی‌کند.
۴) ممکن است بیشتر یا کمتر شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در شرایط پایا، تمام انرژی حرارتی تولید شده داخل رآکتور با انرژی خارج شده از آن برابر است. بنابراین در حالت دوم که نرخ تولید حرارت داخل رآکتور با نرخ پیشین برابر است. انرژی خارج شده از آن نیز با حالت قبل برابر خواهد بود.

شعاع بحرانی عایق

همان‌طور که در بخش قبل اشاره کردیم، برای کاهش میزان انتقال حرارت از عایق استفاده می‌کنیم. در سیستم‌های دکارتی (مانند دیوار مسطح) افزایش ضخامت عایق باعث افزایش مقاومت حرارتی و در نتیجه کاهش میزان انتقال حرارت می‌شود. به عنوان مثال یک دیوار مسطح را درنظر بگیرید که یک طرف آن‌را با ماده‌ای با ضریب هدایت حرارتی k و ضخامت L عایق بندی کرده‌ایم (شکل ۱۹). مقاومت حرارتی کل بین دیوار و محیط برابر است با مجموع مقاومت هدایتی عایق $(\frac{L}{kA})$ و مقاومت جابه‌جایی بین عایق و محیط $(\frac{۱}{hA})$:

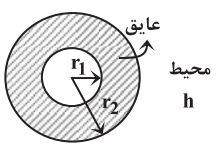


شکل (۱۹)

$$R = \frac{L}{kA} + \frac{۱}{hA}$$

با افزایش ضخامت عایق (L) مقاومت هدایتی عایق $(\frac{L}{kA})$ افزایش می‌یابد و مقاومت جابه‌جایی $(\frac{۱}{hA})$ ثابت می‌ماند. بنابراین با افزایش ضخامت عایق، مقاومت حرارتی کل بین دیوار و محیط افزایش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت از دیوار به محیط کاهش می‌یابد. در حالت حدی اگر ضخامت عایق به سمت بی‌نهایت میل کند $(L \to \infty)$، نرخ انتقال حرارت به سمت صفر میل می‌کند.

اما در سیستم‌های شعاعی (استوانه و کره) این‌گونه نیست. در سیستم‌های شعاعی، وجود عایق از یک‌طرف مقاومت هدایتی را افزایش می‌دهد و از طرف دیگر باعث کاهش مقاومت جابه‌جایی می‌شود زیرا سطح تبادل حرارت با محیط را افزایش می‌دهد. برای فهم این مطلب یک استوانه به شعاع $r_۱$ را در نظر بگیرید که در محیطی با ضریب جابه‌جایی h قرار دارد و می‌خواهیم برای کاهش انتقال حرارت از استوانه به محیط، سطح آن‌را با عایقی با ضریب هدایت حرارتی k بپوشانیم (شکل ۲۰). مقاومت حرارتی کل بین سطح خارجی استوانه و محیط برابر است با مجموع مقاومت هدایتی عایق $(\frac{\ln(r_۲/r_۱)}{۲\pi Lk})$ و مقاومت جابه‌جایی بین سطح خارجی عایق و محیط $(\frac{۱}{h(۲\pi r_۲ L)})$:



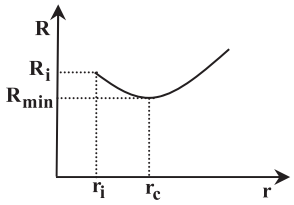
شکل (۲۰)

$$R = \frac{\ln(r_۲/r_۱)}{۲\pi Lk} + \frac{۱}{h(۲\pi r_۲ L)}$$

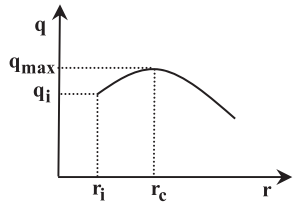
در رابطه بالا r_1 شعاع استوانه بدون عایق ، r_2 شعاع استوانه به همراه عایق و L طول استوانه می‌باشد. همان‌طور که در رابطه بالا ملاحظه می‌شود با افزایش ضخامت عایق (افزایش r_2)،مقاومت هدایتی عایق افزایش و مقاومت جابه‌جایی محیط کاهش می‌یابد ، بنابراین نمی‌دانیم که مقاومت حرارتی کل (R) با افزایش ضخامت عایق (افزایش r_2) ، افزایش می‌یابد یا کاهش. به منظور بررسی تغییرات مقاومت کل برحسب r_2 ، مشتق آن نسبت به r_2 را برابر صفر قرار می‌دهیم. با انجام این کار ملاحظه می‌کنیم که مشتق R نسبت به r_2 در شعاع $r_2 = \frac{k}{h}$ صفر می‌شود. همچنین مشتق دوم R نسبت به r_2 در شعاع $r_2 = \frac{k}{h}$ مثبت است، بنابراین مقدار R در $r_2 = \frac{k}{h}$ مینیمم می‌باشد. به عبارت دیگر در حالتی که شعاع عایق (r_2) برابر با $\frac{k}{h}$ باشد، مقاومت حرارتی کل بین استوانه و محیط ، حداقل بوده و در نتیجه نرخ انتقال حرارت از استوانه به محیط حداکثر مقدار خود را خواهد داشت. این شعاع عایق را شعاع بحرانی (r_c) می‌نامیم $(r_c = \frac{k}{h})$. پس شعاع بحرانی عایق (r_c)، شعاعی از استوانه (به همراه عایق) است که در آن اتلاف حرارتی از استوانه به محیط، حداکثر می‌باشد.

به همین ترتیب می‌توانیم شعاع بحرانی عایق را برای کره بدست آوریم. شعاع بحرانی عایق (r_c) در یک کره که سطح آن با عایقی با ضریب هدایت k پوشانده شده و در محیطی با ضریب جابه‌جایی h قرار دارد، برابر $\frac{2k}{h}$ می‌باشد.

نحوه تغییرات مقاومت حرارتی کل (R) و اتلاف حرارتی (q) نسبت به شعاع عایق (r) در شکل‌های زیر نشان داده شده است:



شکل (۲۱)



شکل (۲۲)

در شکل‌های بالا، r_i شعاع استوانه (یا کره) بدون عایق، r_c شعاع بحرانی، q_i اتلاف حرارتی در حالت بدون عایق و q_{max} بیشترین اتلاف حرارتی است که در شعاع بحرانی رخ می‌دهد.

اگر شعاع عایق از شعاع بحرانی کمتر باشد، با افزایش ضخامت عایق، نرخ انتقال حرارت همین‌طور افزایش پیدا می‌کند تا شعاع عایق به شعاع بحرانی برسد. در شعاع بحرانی بیشترین اتلاف حرارتی را داریم. از این به بعد (یعنی زمانی که شعاع عایق برابر شعاع بحرانی است) با افزایش ضخامت عایق نرخ انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

نکته ۳۴: در رابطه شعاع بحرانی استوانه $(\frac{k}{h})$ و کره $(\frac{2k}{h})$، k ضریب هدایت حرارتی عایق است نه ضریب هدایت استوانه و کره.

مثال ۱۴۰: جسمی کروی شکل به قطر ۱۰ میلی‌متر از عایقی به ضخامت ۴ میلی‌متر پوشیده شده است و در محیطی با ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی $50\frac{W}{m^2{}^\circ C}$ قرار دارد. اگر ضریب هدایت حرارتی عایق برابر $0/3\frac{W}{m^\circ C}$ باشد، شعاع بحرانی عایق چند میلی‌متر است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۷)

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شعاع بحرانی عایق برای یک جسم کروی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r_{cr} = \frac{2k}{h} = \frac{2\times 0/3}{50} = \frac{0/6}{50} m = 12mm$$

مثال۱۴۱: یک کره گرم در هوا قرار دارد. برای کاهش اتلاف گرمایی آن را با ماده عایقی که ضریب هدایت حرارتی آن k است، عایق‌پیچی می‌کنیم. ضریب جابه‌جایی حرارت برابر h است. شعاع بحرانی عایق‌پیچی کدام است؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون در صنایع نفت ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{k}{h}$ ۲) $\frac{2k}{h}$ ۳) $\frac{4k}{h}$ ۴) $\frac{5k}{h}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مقدار شعاع بحرانی برای یک جسم کروی از رابطه‌ی $r_{cr} = \frac{2k}{h}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۴۲: کدام رابطه برای شعاع بحرانی عایق در یک کره صادق می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)

۱) h/k ۲) $h/2k$ ۳) k/h ۴) $2k/h$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شعاع بحرانی عایق برای کره $\frac{2k}{h}$ است.

مثال ۱۴۳: در عایق‌بندی لوله‌ها شعاع بحرانی به صورت $r_{crit}=\frac{k}{h}$ تعریف می‌شود. این شعاع بیانگر این مطلب است که:

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۷۶)

۱) شعاع بحرانی باید از شعاع لوله بیشتر باشد.

۲) شعاع بحرانی باید از شعاع لوله کوچک‌تر باشد و با افزایش عایق‌بندی به شعاع بحرانی می‌توان رسید.

۳) مادامی که شعاع عایق‌کاری کمتر از r_{crit} باشد، اتلاف حرارت با افزایش عایق‌بندی افزایش می‌یابد.

۴) مادامی که شعاع عایق‌کاری بیشتر از r_{crit} باشد، اتلاف حرارت با افزایش عایق‌بندی افزایش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر شعاع عایق از شعاع بحرانی (r_c) کمتر باشد، با افزایش عایق بندی (افزایش شعاع عایق) اتلاف حرارتی از لوله افزایش می‌یابد. همچنین اگر شعاع عایق از شعاع بحرانی (r_c) بیشتر باشد با افزایش عایق بندی، اتلاف حرارتی کاهش می‌یابد. بیشترین اتلاف حرارتی در شعاع بحرانی عایق می‌باشد.

مثال ۱۴۴: لوله داغی را با عایق پوشانده‌ایم. اگر شعاع عایق از شعاع بحرانی بیشتر باشد،کدام گزینه صحیح است؟

۱) با افزایش ضخامت عایق ، اتلاف حرارتی از لوله افزایش می‌یابد.

۲) با افزایش ضخامت عایق ، اتلاف حرارتی از لوله کاهش می‌یابد.

۳) با افزایش ضخامت عایق ، اتلاف حرارتی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۴) با افزایش ضخامت عایق ، اتلاف حرارتی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که گفتیم (و در شکل (۲۲) نیز ملاحظه می‌کنید) ، اگر شعاع عایق از شعاع بحرانی بیشتر باشد ، با افزایش ضخامت عایق، اتلاف حرارتی کاهش می‌یابد.

مثال ۱۴۵: برای عایق بندی یک لوله استوانه‌ای با ضریب هدایت حرارتی $k=50\frac{W}{mK}$ که در محیطی با ضریب جابه‌جایی $h=10\frac{W}{m^2K}$ قرار دارد، از عایقی با ضریب هدایت حرارتی $k=0/1\frac{W}{mK}$ استفاده می‌کنیم. شعاع بحرانی عایق چقدر است؟

۱) $1cm$ ۲) $2cm$ ۳) $0/1m$ ۴) $5m$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که گفتیم شعاع بحرانی عایق در استوانه برابر با $r_c=\frac{k}{h}$ است که در این رابطه k ضریب هدایت عایق می‌باشد، بنابراین در این مسأله شعاع بحرانی عایق برابر است با:

$$r_c=\frac{k}{h}=\frac{0/1}{10}=0/01m=1cm$$

مثال ۱۴۶: شعاع بحرانی عایق در یک سامانه‌ی استوانه‌ای، کدام‌یک از شرایط زیر را توصیف می‌کند؟ (پلیمر ـ سراسری ۹۵)

۱) جریان حرارت، بی‌نهایت است. ۲) جریان حرارت، بیشینه است. ۳) جریان حرارت، صفر است. ۴) جریان حرارت، کمینه است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در شعاع بحرانی، میزان انتقال حرارت بیشینه است.

مثال ۱۴۷: با افزایش ضخامت عایق بر روی یک لوله، کدام مورد درست است؟ (مهندسی پلیمر ـ دکتری ۹۶)

۱) مقاومت هدایتی افزایش، مقاومت جابه‌جایی کاهش و مقاومت کل ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد.

۲) مقاومت جابه‌جایی کاهش، مقاومت هدایتی افزایش و مقاومت کل ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد.

۳) مقاومت جابه‌جایی افزایش، مقاومت هدایتی کاهش و مقاومت کل ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد.

۴) مقاومت هدایتی افزایش، مقاومت جابه‌جایی کاهش و مقاومت کل افزایش می‌یابد.

مدرسان شریف

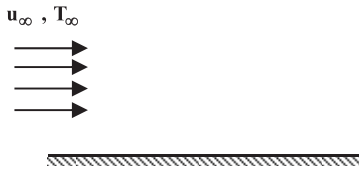
فصل ششم

«انتقال حرارت جابه‌جایی»

هنگامی که یک سیال و یک سطح جامد که دارای دماهای متفاوتی هستند در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند به‌دلیل اختلاف دما، بین آن‌ها انتقال حرارت انجام می‌شود که عامل این انتقال حرارت حرکت سیال می‌باشد. به این نوع از انتقال حرارت، انتقال حرارت جابه‌جایی می‌گوییم. انتقال حرارت جابه‌جایی به دو نوع جابه‌جایی آزاد (طبیعی) و جابه‌جایی اجباری دسته‌بندی می‌شود.

زمانی که سیال مجاور سطح در ابتدا ساکن باشد، انتقال حرارت را از نوع جابه‌جایی آزاد و زمانی که سیال مجاور سطح دارای حرکت باشد، انتقال حرارت را از نوع جابه‌جایی اجباری می‌نامیم. موضوع بحث ما در این فصل انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی اجباری می‌باشد.

مطابق شکل (۱)، سطحی را با دمای T_S درنظر بگیرید که سیالی با دمای T_∞ بر روی آن جریان دارد $(T_\infty \neq T_S)$. بر اثر اختلاف دما، بین سطح و سیال انتقال حرارت جابه‌جایی انجام می‌گیرد. مقدار شار حرارتی منتقل شده از رابطه زیر بدست می‌آید:



شکل (۱)

$$q'' = h(T_S - T_\infty) \qquad (۱)$$

در این رابطه، h ضریب جابه‌جایی موضعی سیال نام دارد و مقدار آن به خواص سیال (چگالی، لزجت، ضریب هدایت و گرمای ویژه)، ماهیت جریان (آرام و یا مغشوش بودن جریان) و هندسه سطح بستگی دارد. مقدار h در نقاط مختلف سطح تغییر می‌کند، بنابراین مقدار شار حرارتی در نقاط مختلف سطح، متفاوت است. درنتیجه مقدار انتقال حرارت کل با انتگرال‌گیری از رابطه فوق بر روی کل سطح بدست می‌آید:

$$q = \int_A q''dA = (T_S - T_\infty)\int_A h\,dA \qquad (۲)$$

با تعریف ضریب جابه‌جایی متوسط $\bar{h}$ برای تمام سطح ، نرخ انتقال حرارت کل را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

$$q = \bar{h}A(T_S - T_\infty) \qquad (۳)$$

که در رابطه بالا، A مساحت تماس بین سطح جامد و سیال و به‌عبارت دیگر سطح انتقال حرارت می‌باشد.

ضریب جابه‌جایی متوسط $(\bar{h})$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{h} = \frac{1}{A}\int_A h\,dA \qquad (۴)$$

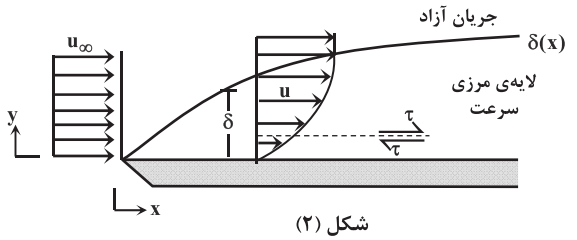
و برای جریان روی صفحه تخت داریم:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h\,dx \qquad (۵)$$

درسنامه (۱): لایه مرزی

لایه مرزی سرعت (هیدرودینامیکی)

برای توضیح لایه مرزی سرعت به شکل (۲) توجه فرمائید. این شکل سیالی را نشان می‌دهد که بر روی صفحه تختی در جریان است. هنگامی که جریان سیال از روی صفحه عبور می‌کند، ذراتی از سیال که در مجاورت سطح قرار دارند، بر اثر اصطکاک سطح، به آن می‌چسبند و سرعت آن‌ها صفر می‌شود. سپس این ذرات بر روی ذرات لایه بالاتر از خود نیز اثر گذاشته و سرعت آن‌ها را کاهش می‌دهند. این تأثیر، لایه به لایه در سیال منتقل می‌شود و تا فاصله $y = \delta$ از سطح که در آن از این اثر صرفنظر می‌شود، ادامه می‌یابد.



شکل (۲)

این کند شدن حرکت سیال به تنش‌های برشی τ نسبت داده می‌شود. با افزایش فاصله y از سطح، سرعت سیال (u) از مقدار صفر بر روی سطح تا سرعت جریان آزاد (u_∞) افزایش می‌یابد. کمیت δ ضخامت لایه مرزی نام دارد و فاصله‌ای از سطح است که در آن $\frac{u}{u_\infty} = ۰/۹۹$ می‌شود. بنابراین جریان سیال بر روی صفحه به دو ناحیه تقسیم می‌شود:

۱ـ ناحیه لایه مرزی که در آن گرادیان سرعت و تنش‌های برشی وجود دارد.

۲- ناحیه بیرون از لایه مرزی (جریان آزاد) که در آن اثر سطح بر روی سیال از بین رفته و در آن تنش برشی وجود نداشته و سرعت سیال ثابت (u_∞) می‌باشد.

با افزایش فاصله از لبه صفحه، اثرات لزجت هرچه بیشتر به داخل جریان آزاد نفوذ کرده و لایه مرزی رشد می‌کند ، به‌عبارت دیگر با افزایش x ، ضخامت لایه مرزی سرعت (δ)افزایش می‌یابد.

لایه مرزی نقش مهمی در تعیین ضریب اصطکاک موضعی دارد. این ضریب یک کمیت بی‌بعد است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho \frac{u_\infty^۲}{۲}} \qquad (۶)$$

در رابطه بالا τ_s تنش برشی روی سطح است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=۰} \qquad (۷)$$

در این رابطه، μ خاصیتی از سیال است که لزجت دینامیکی نامیده می‌شود. نیروی اصطکاک بر روی کل سطح از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F = \overline{\tau}_s A = \overline{C}_f A \rho \frac{u_\infty^۲}{۲} \qquad (۸)$$

که در رابطه بالا، $\overline{\tau}_s$ تنش برشی متوسط و $\overline{C}_f$ ضریب اصطکاک متوسط سطح می‌باشند.

مثال۱: معادله توزیع دمای یک سیال گذرنده بر روی یک صفحه تخت در لایه مرزی حرارتی آن به ضخامت δ و با دمای جداره T_w و دمای سیال T_∞ در خارج از لایه مرزی به صورت تابع زیر به دست آمده است. مقدار ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی این سیستم کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۹۰)

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = -\frac{۳}{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{۵}{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right)^۳ + ۱$$

۱) $\frac{k}{\delta}$ ۲) $\frac{۱/۵k}{\delta}$ ۳) $۰/۵\frac{k}{\delta}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضریب انتقال حرارت جابجایی از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$$h = \frac{-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۰}}{T_w - T_\infty}$$

ابتدا با استفاده از توزیع دمای داده شده $\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۰}$ را بدست می‌آوریم:

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty)\left(۱ - \frac{۳}{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{۵}{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right)^۳\right) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۰} = -\frac{۳}{۲\delta}(T_w - T_\infty)$$

بنابراین ضریب جابجایی برابر است با:

$$h = \frac{-k \times -\frac{۳}{۲\delta}(T_w - T_\infty)}{T_w - T_\infty} \Rightarrow h = \frac{۳k}{۲\delta}$$

مدرسان شریف

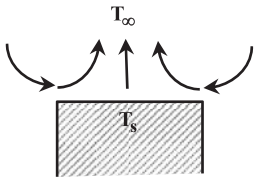
فصل هشتم

«جابه‌جایی آزاد»

در دو فصل گذشته جابه‌جایی اجباری را مورد بررسی قرار دادیم. در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری، سیال مجاور سطح جامد دارای حرکت است و حرکت سیال ناشی از یک عامل خارجی مانند پمپ، پنکه و ... می‌باشد. در این فصل به مبحث جابه‌جایی آزاد (طبیعی) می‌پردازیم. در جابه‌جایی آزاد، سیال مجاور سطح جامد در ابتدا ساکن است و حرکت سیال ناشی از به‌وجود آمدن نیروی شناوری در سیال است. نیروی شناوری بر اثر گرادیان چگالی سیال و نیروی جسمی بوجود می‌آید. گرادیان چگالی ناشی از گرادیان دما در داخل سیال و نیروی جسمی ناشی از میدان گرانش زمین می‌باشد.

نکته ۱: شرط اساسی برای وجود انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد وجود گرانش زمین است. اگر گرانش نباشد، جابه‌جایی آزاد وجود ندارد.

نکته ۲: چون سرعت‌های جریان در جابه‌جایی آزاد از جابه‌جایی اجباری کمتر است، ضریب جابه‌جایی سیال (h) و در نتیجه نرخ انتقال حرارت در جابه‌جایی آزاد از جابه‌جایی اجباری کمتر می‌باشد.



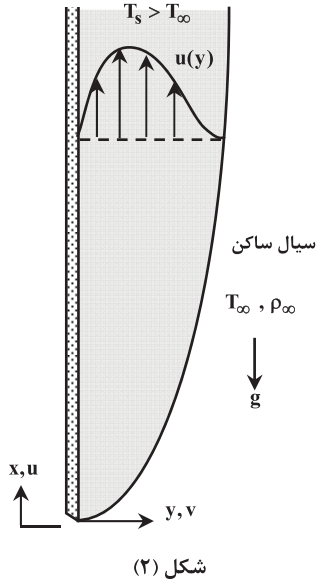
شکل (۱)

برای توضیح بیشتر جابه‌جایی آزاد به شکل (۱) توجه فرمایید. این شکل یک سطح جامد با دمای T_s را نشان می‌دهد که در بالای آن سیال ساکن با دمای T_∞ قرار دارد $(T_s > T_\infty)$. بر اثر انتقال حرارت از سطح به سیال مجاور آن، دمای سیال بالا می‌رود و بر اثر افزایش دما چگالی سیال کاهش می‌یابد. در نتیجه سیال گرم شده به سمت بالا حرکت می‌کند و سیال سرد جایگزین آن می‌شود و این روند همین‌طور ادامه پیدا می‌کند.

درسنامه (۱): سطح عمودی

جابه‌جایی آزاد روی یک سطح عمودی

شکل (۲) یک سطح عمودی با دمای T_s را که در مجاورت سیال با دمای T_∞ قرار دارد، نشان می‌دهد $(T_s > T_\infty)$. بر اثر انتقال حرارت از سطح به سیال مجاور آن دمای سیال بالا رفته و چگالی آن پایین می‌آید. در نتیجه سیال گرم و سبک به سمت بالا حرکت می‌کند و سیال ساکن محیط جای آن را می‌گیرد. بنابراین در نزدیکی سطح، جریانی از سیال به سمت بالا بوجود می‌آید. به این ناحیه از سیال در نزدیکی سطح که در آن گرادیان دما (و در نتیجه گرادیان چگالی) و جریان سیال وجود دارد، لایه مرزی می‌گوییم. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، پروفیل سرعت لایه مرزی در این حالت شباهتی به پروفیل سرعت در لایه مرزی جابه‌جایی اجباری ندارد، زیرا در این حالت سرعت سیال بر روی سطح $(y = 0)$ و در لبه لایه مرزی $(y = \delta)$ صفر است و سیال فقط داخل لایه مرزی دارای سرعت می‌باشد. سرعت سیال در داخل لایه مرزی از مقدار صفر بر روی سطح افزایش یافته و به یک مقدار حداکثر می‌رسد و سپس کاهش یافته و در لبه لایه مرزی به صفر می‌رسد. دلیل صفر شدن سرعت در لبه لایه مرزی این است که سیال در خارج از لایه مرزی ساکن می‌باشد.



شکل (۲)

نکته ۳: توزیع دما در داخل لایه مرزی در جابه‌جایی آزاد شبیه به جابه‌جایی اجباری است و مقدار دما از T_s بر روی سطح $(y = 0)$ تا T_∞ در لبه لایه مرزی کاهش می‌یابد.

نکته ۴: بیشترین سرعت سیال در داخل لایه مرزی در فاصله $y = \frac{\delta}{3}$ از سطح می‌باشد.

نکته ۵: هرچه به سمت بالا می‌رویم (افزایش x) ضخامت لایه مرزی (δ) افزایش می‌یابد.

نکته ۶: در جابه‌جایی آزاد بر روی سطح عمودی، ضریب جابه‌جایی سیال (h)، برابر است با:

$$h = \frac{2k}{\delta} \quad (1)$$

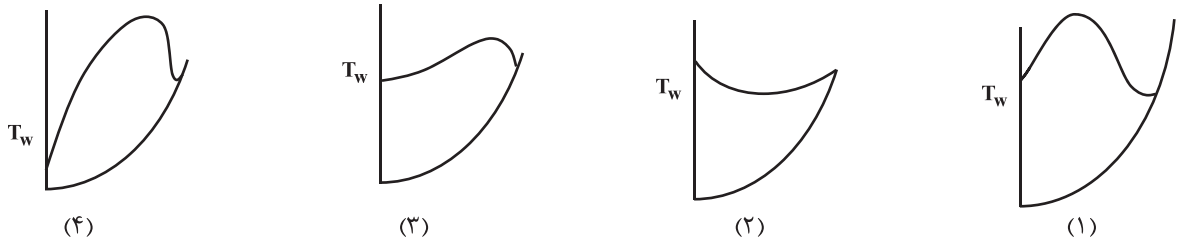
با استفاده از رابطه بالا مقدار عدد نوسلت نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Nu = \frac{2x}{\delta} \quad (2)$$

نکته ۷: از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که با افزایش ضخامت لایه مرزی (δ)، ضریب جابه‌جایی سیال (h) و عدد نوسلت (Nu) کاهش می‌یابند.

نکته ۸: اگر $T_S < T_\infty$ باشد، حرکت سیال رو به پایین خواهد بود و لایه مرزی به‌سمت پایین رشد می‌کند (هرچه به سمت پایین می‌رویم ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد).

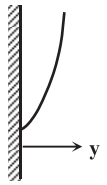
مثال ۱: صفحه‌ای عمودی و داغ در یک سیال ساکن سرد قرار دارد. پروفیل سرعت در اثر جابه‌جایی آزاد با کدامیک از اشکال زیر تطابق دارد؟
(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۳)



(۴) (۳) (۲) (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» سیالی که در تماس با دیواره است ساکن بوده و سرعتش صفر می‌باشد. به تدریج با فاصله گرفتن از سطح دیواره، بعلت نیروهای شناوری که به سیال وارد می‌شود، مقدار سرعت سیال تا یک حد ماکزیمم افزایش می‌یابد و مجدداً در لبه لایه مرزی به صفر می‌رسد زیرا سیال در خارج از لایه مرزی ساکن است. همچنین فاصله نقطه ماکزیمم سرعت تا سطح دیواره کمتر از فاصله آن تا لبه لایه مرزی است. (فاصله نقطه ماکزیمم تا سطح دیواره نصف فاصله آن تا لبه لایه مرزی می‌باشد.) بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۲: هوای گرم در مجاورت یک صفحه عمودی در اثر انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی بالا می‌رود. اگر y فاصله افقی از روی صفحه باشد، حداکثر سرعت سیال در کجا اتفاق می‌افتد؟
(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۸)



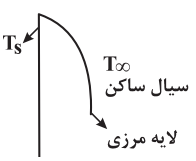
۱) در $y > \frac{\delta_t}{2}$
۲) در $y = \frac{\delta_t}{2}$
۳) در $y < \frac{\delta}{2}$
۴) در $y = \delta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حداکثر سرعت سیال در $y = \frac{\delta}{3}$ می‌باشد. بنابراین گزینه «۲» $(y < \frac{\delta}{2})$ صحیح می‌باشد.

مثال ۳: انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی بدون تلاطم در یک صفحه قائم سرد با دمای ثابت را درنظر بگیرید:
(مهندسی شیمی ـ سراسری ۹۶)

۱) شار حرارتی در بالای صفحه کمتر از شار حرارتی در پایین صفحه است.
۲) شار حرارتی در بالای صفحه بیشتر از شار حرارتی در پایین صفحه است.
۳) شار حرارتی ثابت است چرا که دمای صفحه ثابت است.
۴) بدون دانستن خواص فیزیکی سیال نمی‌توان اظهارنظر کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مطابق شکل مقابل با توجه به اینکه $T_S < T_\infty$ می‌باشد، سیال سرد شده و به طرف پایین جریان یافته و ضخامت لایه مرزی جابه‌جایی آزاد رو به پایین افزایش می‌یابد. با توجه به این که ضخامت لایه مرزی در بالای صفحه نسبت به پایین آن کمتر است، در نتیجه شار حرارتی در بالای صفحه نسبت به پایین آن بیشتر خواهد بود.



مثال ۴: کدامیک از جملات زیر در مورد جابه‌جایی آزاد روی یک سطح قائم گرم، با دمای T_W صحیح است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) ضریب جابه‌جایی آزاد مستقل از ضخامت لایه مرزی می‌باشد.

۲) ضریب جابه‌جایی آزاد با کاهش ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد.

۳) ضریب جابه‌جایی آزاد با افزایش ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد.

۴) ضریب جابه‌جایی آزاد با افزایش ضخامت لایه مرزی ابتدا افزایش و پس از محدودهٔ خاصی از ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ضریب جابه‌جایی (h) با ضخامت لایه مرزی (δ) رابطه عکس دارد، بنابراین با افزایش ضخامت لایه مرزی، ضریب جابه‌جایی کاهش می‌یابد.

مثال ۵: در انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد سیال مجاور یک صفحه عمودی (لایه مرزی) جریان آرام یکنواخت، همواره ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی موضعی: (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) متناسب با عکس ضخامت لایه مرزی هیدرولیکی است.

۲) متناسب با عکس ضخامت لایه مرزی حرارتی است.

۳) ثابت و بستگی به دمای سیال و فشار اشباع دارد.

۴) بستگی به عدد اولر و عدد پرانتل دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در جابه‌جایی آزاد سیال مجاور یک صفحه عمودی، رابطه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی موضعی (h) بصورت $h = \frac{2k}{\delta}$ می‌باشد، در این رابطه، δ ضخامت لایه مرزی سرعتی (هیدرولیکی) است. بنابراین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی موضعی، متناسب با عکس ضخامت لایه مرزی هیدرولیکی می‌باشد.

مثال ۶: صفحه گرمی در یک سیال سرد ساکن به طور عمودی واقع شده است. عدد نوسلت جابه‌جایی آزاد در نقاط مختلف بر حسب ضخامت لایه مرزی چگونه تغییر می‌کند؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۵)

۱) با کاهش ضخامت لایه مرزی و کاهش فاصله از بالاترین نقطهٔ صفحه کاهش می‌یابد.

۲) با افزایش ضخامت لایه مرزی و افزایش فاصله از بالاترین نقطهٔ صفحه کاهش می‌یابد.

۳) با افزایش ضخامت لایه مرزی افزایش و با افزایش فاصله از بالاترین نقطهٔ صفحه کاهش می‌یابد.

۴) با کاهش ضخامت لایه مرزی افزایش و با افزایش از بالاترین نقطهٔ صفحه افزایش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در جابه‌جایی آزاد بین یک صفحه عمودی و سیال مجاور آن رابطه عدد نوسلت (Nu) با ضخامت لایه مرزی (δ) و فاصله از پایین‌ترین نقطه صفحه (x) بصورت مقابل می‌باشد:

$$Nu_x = \frac{2x}{\delta}$$

بنابراین با توجه به رابطه بالا، ملاحظه می‌کنیم که عدد نوسلت (Nu) با افزایش ضخامت لایه مرزی (δ) و افزایش فاصله از بالاترین نقطه صفحه (کاهش x)، کاهش می‌یابد.

مثال ۷: یک صفحه عمودی با دمای ثابت در داخل سیال سرد قرار دارد. اگر جریان آرام باشد کدام یک از جملات زیر صحیح است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۶)

۱) ضریب جابجایی محلی در بخش بالای صفحه بیشتر بوده و با ضخامت لایه مرزی نسبت عکس دارد.

۲) ضریب جابجایی محلی در بخش بالای صفحه کمتر بوده و با ضخامت لایه مرزی نسبت عکس دارد.

۳) ضریب جابجایی محلی در بخش بالای صفحه بیشتر بوده و با ضخامت لایه مرزی نسبت مستقیم دارد.

۴) ضریب جابجایی محلی در بخش بالای صفحه کمتر بوده و با ضخامت لایه مرزی نسبت مستقیم دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در جابه‌جایی آزاد بین صفحه عمودی و سیال مجاور آن، رابطه ضریب جابه‌جایی موضعی (h_x) به صورت $h_x = \frac{2k}{\delta}$ می‌باشد.

بنابراین طبق رابطه بالا ضریب جابه‌جایی موضعی با ضخامت لایه مرزی رابطه عکس دارد $(h_x \propto \frac{1}{\delta})$. در بالای صفحه ضخامت لایه مرزی بیشتر است و در نتیجه ضریب جابه‌جایی موضعی در بالای صفحه کمتر می‌باشد.

مثال ۸: صفحه‌ای مستطیلی با طول و عرض $10\,mm$ و $5mm$ در دمای ثابت $35^\circ C$ قرار داشته و با هوای اطراف در $20^\circ C$ به میزان $0/0075W$ انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد دارد. عدد ناسلت کدام است؟ $k = 0/016\frac{W}{mK}$

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در صورتی‌که صفحه مستطیلی قائم باشد، جواب مسئله در حالتی که صفحه از طرف طول و یا از طرف عرض قائم باشد، متفاوت از هم خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در این مسئله صفحه به‌صورت افقی می‌باشد. در این حالت طول مشخصه به‌صورت رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$L=\frac{A}{P}=\frac{۵۰\,mm^۲}{۳۰\,mm}=۱/۶mm=۱/۶\times۱۰^{-۳}$$

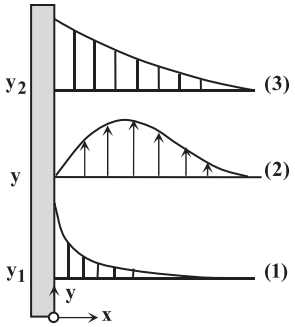
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی مطابق رابطه مقابل به‌دست خواهد آمد:

$$h=\frac{q}{A.\Delta T}=\frac{۰/۰۷۵}{۵۰\times۱۰^{-۶}\times۱۵}=۱۰۰\frac{w}{m^۲K}$$

در نهایت عدد نوسلت برابر است با:

$$Nu=\frac{hL}{K}=\frac{۱۰۰\times۱/۶\times۱۰^{-۳}}{۰/۰۱۶}=۱۰$$

مثال۹: یک صفحه نازک داغ با دمای $T=T_۰$ در پهنه بزرگی از سیال در دمای $T_۱$ آویزان شده است. پروفایل‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (مهندسی پلیمر ـ دکتری ۹۷)



۱) $(T-T_۱)\big|_{y_۲} - V_y(x) - (T-T_۱)\big|_{y_۱}$

۲) $(T-T_۱)\big|_{y_۲} - P_y(x) - (T-T_۱)\big|_{y_۱}$

۳) $(T_۰-T_۱)\big|_{y_۲} - T_y(x) - (T_۰-T_۱)\big|_{y_۱}$

۴) $(T_۰-T_۱)\big|_{y_۲} - V_y(x) - (T_۰-T_۱)\big|_{y_۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نمودار (۲) مربوط به نمودار سرعت در داخل لایه مرزی است $(V_y(x))$ بنابراین گزینه (۱) یا (۴) صحیح است. همچنین نمودار اختلاف دما $(T-T_۱)$ برحسب y در نقاط $y_۱$ و $y_۲$ مطابق روابط گزینه (۱) می‌باشد.

مثال۱۰: کدام عبارت صحیح نیست؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۹۴)

۱) ضخامت لایه‌های مرزی سیالاتی و حرارتی در جابجایی طبیعی مربوط به سیال مجاور یک دیواره عمودی گرم با یکدیگر برابر هستند.

۲) گرادیان دما در لایه هوای چسبیده به یک دیواره عمودی گرم با افزایش ارتفاع افزایش می‌یابد.

۳) در خارج از جو مکانیسم انتقال حرارت از یک دیواره گرم عمودی به هوای درون سفینه فضایی مکانیسم هدایتی است.

۴) برای جریان سیال در درون یک لوله عمودی که با اعمال حرارت دیواره، سیال را گرم می‌کنیم و نسبت $\frac{Gr}{Re^۲}$ آن نزدیک به عدد ۱ است، میزان گرمایش سیال در حالت جریان از پایین به بالا نسبت به حالت جریان از بالا به پایین بیشتر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با افزایش ارتفاع، ضخامت لایه مرزی افزایش و در نتیجه گرادیان دما کاهش می‌یابد.

معادلات حاکم

معادلات حاکم در لایه مرزی جابه‌جایی آزاد بصورت زیر می‌باشند:

معادله پیوستگی: $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=۰ \quad (۳)$$

معادله انرژی: $$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲} \quad (۴)$$

معادله اندازه حرکت: $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta(T-T_\infty)+\nu\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} \quad (۵)$$

دقت داشته باشید که در معادله انرژی از تلفات لزجت صرف‌نظر شده است. دلیل این موضوع آن است که در جابه‌جایی آزاد، سرعت سیال کم است و تلفات لزجت بسیار ناچیز می‌باشد. در معادله اندازه حرکت، β ضریب انبساط حجمی سیال است و مقدار آن برای گازهای ایده‌آل برابر است با:

$$\beta=\frac{۱}{T_f}\ ,\ T_f=\frac{T_s+T_\infty}{۲} \quad (۶)$$