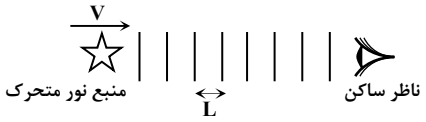
اثر دوپلرنسبیتی

یک منبع نور با زمان تناوب $\tau_\circ = \frac{1}{\nu_\circ}$ و فرکانس تابشی $\nu_\circ$ را در نظر بگیرید که در چارچوب خود در حال درخشش است. فرض کنید این منبع نوری با سرعت V به طرف یک ناظر در حرکت باشد.

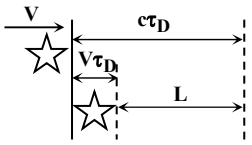
پارامتر L طول موجی است که ناظر می‌بیند که اصطلاحاً به آن **طول جدایی** در چارچوب ناظر گفته می‌شود با توجه به شکل (۵) این طول برابر است با:

$$L = c\tau_D - V\tau_D = (c-V)\tau_D$$

τ_D، زمان تناوب از نظر ناظر می‌باشد.



شکل۴: طول جدایی از دید ناظر



شکل ۵: منبع نور به واسطه سرعتی (V) که دارد، هر بار که یک تپ نور از خود ساطع می‌کند، فاصلهٔ جدایی این تپها از هم به اندازهٔ $L = (C-V)\tau_D$ از نظر ناظر ساکن دیده می‌شود.

به دلیل اتساع زمانی که رخ می‌دهد از نظر ناظر ساکن زمان تناوب منبع τ_D چنین است: $\tau_D = \gamma\tau_\circ$

از آنجاییکه سرعت نور یک ثابت عمومی است، تپها با سرعت c به ناظر می‌رسند. در حالیکه سرعت نسبی در حالت کلاسیک نقش اساسی در اثر دوپلر ایفا می‌کند و تفاوت دیدگاه کلاسیک و نسبیتی در همین امر نهفته است.

بسامد تپهایی که از نظر ناظر ساکن اندازه‌گیری می‌شود برابر است با سرعت تپ رسیده به ناظر تقسیم بر فاصلهٔ بین دو تپ که از دیدگاه ناظر اندازه‌گیری می‌شود. بدیهی است که این فاصله، همان طول جدایی، یعنی L می‌باشد.

پس برای بسامد آشکار شده از سوی ناظر داریم: $\nu_D = \frac{c}{L}$

از معادله اول خواهیم داشت: $\nu_D = \frac{c}{(c-V)\tau_D}$ $\nu_D = \frac{1}{1-\frac{V}{c}}\ \frac{1}{\gamma\tau_\circ}$

و از رابطه اتساع زمانی داریم:

و یا با قراردادن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}$ و اینکه $\nu_\circ = \frac{1}{\tau_\circ}$

$$\nu_D = \nu_\circ \frac{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}{1-\frac{V}{c}}$$

و در نهایت:

$$\nu_D = \nu_\circ\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}} \quad \Rightarrow \quad (I)$$

$$\boxed{\nu_D = \nu_\circ\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

مشاهده می‌شود فرکانس مشاهده شده $(\nu_{Detected})$ از فرکانس منبع $\nu_\circ$ بیشتر است و دلیل این امر نزدیک شدن منبع به ناظر است.

با همین روندی که پیش رفتیم می‌توان فرکانس مشاهده شده (ν_D) را در حالتی که منبع از ناظر دور می‌شود تعیین کنیم که در آن صورت L برابر است با:

$$L = (c+V)\tau_D$$

بنابراین خواهیم داشت: $\boxed{\nu_D = \nu_\circ\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$ (II) (وقتی منبع از ناظر دور شود.)

مشاهده می‌شود فرکانس دریافتی در این حالت، از فرکانس منبع $\nu_\circ$ کمتر است.

مثال ۱۳: یکی از خطهای گسیلی از کهکشان‌های دور ناشی از هیدروژن می‌باشد که دارای طول موج ۱۲۲nm می‌باشد. این طول موج در ناحیه فرابنفش است، حال اگر بخواهیم یکی از خطهای کهکشان در ناحیه مرئی ۳۶۶nm دیده شود، این کهکشان با چه سرعتی باید از ما دور شود؟

۱) $0/8c$ ۲) $0/6c$ ۳) $0/9c$ ۴) $0/5c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه‌ی دوپلر برای وقتی که منبع از ما دور می‌شود داریم:

$$\nu_D = \nu_\circ \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_D} = \frac{1}{\lambda_\circ}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

با بازآرایی این رابطه و حل آن برحسب λ_D داریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_\circ^2}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}} \Rightarrow \lambda_D^2 - \lambda_D^2\frac{v}{c} = \lambda_\circ^2 + \lambda_\circ^2\frac{v}{c}$$

این رابطه را می‌توان به شکل سادهٔ مقابل نوشت:

$$\Rightarrow \lambda_D^2 - \lambda_\circ^2 = \frac{v}{c}(\lambda_\circ^2 + \lambda_D^2)$$

در نهایت می‌توان مقدار $\beta = \frac{v}{c}$ را اینچنین تعیین کرد:

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\lambda_D^2 - \lambda_\circ^2}{\lambda_\circ^2 + \lambda_D^2} = \frac{\lambda_D^2 - \lambda_\circ^2}{\lambda_D^2 + \lambda_\circ^2} \quad , \begin{cases}\lambda_\circ = 122\text{nm} \\ \lambda_D = 366\text{nm}\end{cases}$$

با قراردادن مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{366^2 - 122^2}{366^2 + 122^2} = \frac{133956 - 14884}{133956 + 14884} = 0/8 \Rightarrow v = 0/8c$$

که اگر قرار دهیم $c = 3\times10^8\ \frac{m}{s}$

$$\Rightarrow v = 2/4\times10^8\ \frac{m}{s}$$

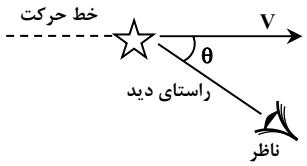
پس اگر کهکشان با سرعت $0/8c$ از ما دور شود طول موجی که به ما می‌رسد از ۱۲۲nm به ۳۶۶nm شیفت پیدا می‌کند.

اگر طول موج منبع نور $\lambda_\circ$ باشد و طول موجی که ما دریافت می‌کنیم λ_D باشد در آن صورت سرعت حرکت منبع از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید که اگر V مثبت باشد یعنی منبع از ما دور می‌شود و اگر V منفی باشد به معنای نزدیک شدن منبع می‌باشد.

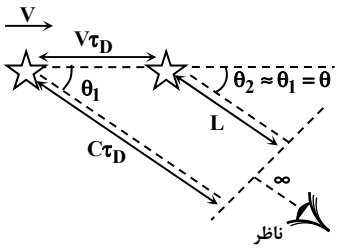
$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_D^2 - \lambda_\circ^2}{\lambda_D^2 + \lambda_\circ^2} \Rightarrow \begin{cases} V > 0 \Rightarrow \lambda_D^2 > \lambda_\circ^2 & \text{دور شدن} \\ V < 0 \Rightarrow \lambda_D^2 < \lambda_\circ^2 & \text{نزدیک شدن}\end{cases}$$

اثر دوپلر برای ناظر در خارج از خط حرکت منبع

موضوع جالبی که در اثر دوپلر نسبیتی رخ می‌دهد، اتفاق افتادن این اثر در حالت زاویه‌دار بودن مسیر حرکت منبع و راستای دید ناظر است.



شکل ۶



شکل ۷: «اندازه‌گیری پارامتر جدایی L، در حالتی که منبع در راستای خط دید حرکت نکند، فرض می‌کنیم منبع به قدری از ناظر دور است که عملاً $\theta_1 \simeq \theta_2 = \theta$ باشد. یعنی جابجایی منبع در زمان یک دوره تناوب (τ_D) در مقایسه با فاصله منبع تا ناظر ناچیز باشد.»

برای یافتن جابجایی فرکانسی که ناظر دریافت می‌کند باید پارامتر طول جدایی یعنی L را در این حالت به درستی تعیین کنیم، با توجه به شکل ۷ خواهیم داشت:

$$L = c\tau_D - V\tau_D\cos\theta = (c - V\cos\theta)\tau_D$$

بنابراین برای فرکانس آشکار شده ν_D از طرف ناظر داریم:

$$\nu_D = \frac{c}{L} = \frac{c}{(C - V\cos\theta)\tau_D} = \frac{1}{\tau_D}$$

با استفاده از رابطه اتساع زمانی $\tau_D = \gamma\tau_\circ$ داریم:

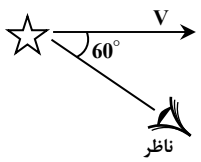
$$\nu_D = \frac{c}{(c - V\cos\theta)\gamma\tau_\circ} = \frac{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta}\frac{1}{\tau_\circ}$$

و یا با نوشتن معادله بالا برحسب ν_D داریم:

$$\nu_D = \nu_\circ \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \qquad (III)$$

در اینجا θ زاویه اندازه‌گیری شده در چارچوب ساکن (ناظر) است.

مثال۱۴: ستاره‌ای با سرعت $0/8C$ در حال حرکت است اگر فرکانس نوری که به چشم ما می‌رسد $500THz$ باشد و راستای حرکت این ستاره با راستای دید ما 60° باشد فرکانس واقعی ستاره چند THz بوده است؟



۱) ۴۰۰

۲) ۸۰۰

۳) ۵۰۰

۴) ۲۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از اثردوپلر داریم: $\nu_D = \nu_\circ \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta},\ \beta = 0/8$

که با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 500 = \nu_\circ \frac{\sqrt{1-0/64}}{1-0/8\times\frac{1}{2}} \Rightarrow 500 = \nu_\circ \frac{0/6}{0/3} \rightarrow 500 = 2\nu_\circ \Rightarrow \nu_\circ = 250\,THz$$

معادله (III) پیامدهای جالبی دارد که برحسب θهای مختلف تعیین می‌شود در حالت $\theta = 0$ معادلهٔ (I) را به ما می‌دهد که منبع به ناظر نزدیک می‌شود و در حالت $\theta = \pi$ معادله (II) حاصل می‌شود که بیانگر دور شدن منبع از ناظر است. جالبترین پیامد رابطهٔ (III) برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد که اثر دوپلر «عرضی» نامیده می‌شود که این حالت تفاوت بارز کلاسیک با نسبیت است. این اثر عرضی ناشی از اتساع زمان است. به عبارتی گفته می‌شود:

«چراغ در حال درخشش، یک نوع ساعت متحرک است»

این جمله را حتماً به خاطر بسپارید.

در اثر دوپلر عرضی فرکانس مشاهده شده ν_D به اندازه ضریب $\sqrt{1-\beta^2}$ با آنچه در کلاسیک داریم تفاوت دارد یعنی: اثر دوپلر عرضی $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\nu_D = \nu_\circ\sqrt{1-\beta^2}$$

- **توضیح کاربردی:** اثر دوپلر نسبیتی با نتیجهٔ کلاسیک از مرتبه $\frac{V}{c}$ سازگار است به طوری که اگر آزمایش بخواهد فرق بین آن‌ها را مشخص کند باید به اثرهایی از مرتبهٔ $(\frac{V}{c})^2$ حساس باشد که عملاً کار مشکلی است. این تقریب‌ها به علّت در نظر گرفتن $\theta_1 \simeq \theta_2 = \theta$ در شکل (۷) وارد معادلات ما نشدند.

رعایت نکات زیر در به کاربردن معادلات سینماتیک نسبیتی و تبدیلات لورنتس، ما را از اشتباه در محاسبات دور می‌کند.

۱ـ در هر مسئله ابتدا دستگاه ثابت و متحرک S و S' را تعیین کنید و فرق بین آن‌ها را برای خود از اول مشخص کنید، سپس تمام روابط بیان شده تا اینجا را با توجه به سوال مطرح شده با خیال راحت به کار بگیرید.

۲ـ در مسائلی که دو ناظر برای اندازه‌گیری سرعت یک جسم متحرک وجود دارد، به طوری که یکی از ناظرها هم خود در حرکت نسبت به ناظر ساکن است، باید از روابط تبدیل سرعت نسبیتی برای ناظر متحرک استفاده کنیم تا سرعت نسبی ناظر متحرک و جسم متحرک را تعیین کنیم و برای ناظر ساکن، سرعت نسبی جسم و ناظر، همان سرعت جسم می‌باشد.

۳ـ اگر در پاسخ‌ها به جواب‌هایی از قبیل $L' > L$ و $\Delta t' < \Delta t$ و $V > c$ دست یافتید مطمئناً اشتباه کرده‌اید و باید مسئله را با دقت بیشتری حل کنید معمولاً این اشتباه‌ها از تعیین نادرست مرجع ساکن رخ می‌دهند.

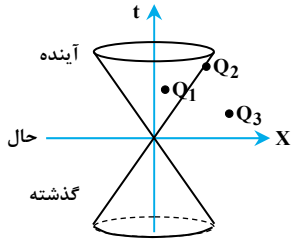
*** حد شیب مسیر فضا ـ زمانی:**

طبق اصل موضوع دوم اینشتین، سرعت نور بیشینه سرعتی است که جسم می‌تواند به آن دست یابد و این از نظر تمام ناظرها نیز یکسان است و لذا سرعت جسم در هیچ دستگاه لختی نمی‌تواند از c بیشتر شود.

اگر یکاهای مکانی و زمانی را به انتخاب خود طوری تعیین کرده باشیم که $c=1$ گردد در این صورت، شیب بیشینه در مسیر فضا ـ زمانی برابر ۱ خواهد شد و در حدّ ۱ مسیر فضا ـ زمانی معرف مسیر حرکت یک تپ نوری است که در خلأ در حال انتشار می‌باشد. (زیرا می‌دانیم اجسام مادی هرگز به سرعت c دست نمی‌یابند پس از عبارت تپ نوری به جای جسم مادی در سرعت نور باید استفاده کنیم.)

بنابراین برای θ_{max} داریم: $u_{max}=\tan\theta_{max}=c=1\Rightarrow\theta_{max}=45^\circ$

*** مخروط نوری:** اگر خطی که مسیر حرکت یک تپ نوری را (با $\theta=45^\circ$) در نمودار فضا ـ زمانی نشان می‌دهد، حول محور زمان دوران دهیم یک مخروط با زاویه رأس 90° حاصل خواهد شد که اگر اطلاعات زمان گذشته تپ را نیز لحاظ کنیم دو مخروط خواهیم داشت که از رأس به هم چسبیده‌اند، به شکل حاصل مخروط نوری می‌گوئیم که با توجه به اصول موضوع نسبیت خاص، می‌توان نکات زیر را از آن استخراج کرد:



توانایی هر رویدادی مانند Q_1 که داخل مخروط نوری قرار گرفته محدود به تأثیرپذیری از گذشته رویداد و یا تأثیرگذاری برآینده آن است و ما فقط حال حاضر آنرا مشاهده کرده‌ایم (رأس مخروط نوری).

رویدادهایی که در نیمه پایینی زمان واقع می‌شوند رویدادهای زمان گذشته نام داشته و می‌توانند بر حال حاضر یعنی بر مبدأ مختصات تأثیر بگذارند. ولی رویدادهایی که در حال حاضر واقع‌اند فقط می‌توانند بر آینده تأثیرگذار باشند.

رویداد Q_2 مربوط به یک تپ نوری است که با حداکثر سرعت ممکن $u=c$ از روی مرز مخروط نوری در حال گذر است و نهایت مسیر رویدادها را بیان می‌کند.

رویدادی که در خارج مخروط نوری واقع باشد مانند Q_3 نمی‌تواند بر رویدادی واقع در رأس مخروط مؤثر باشد، زیرا در غیر اینصورت اطلاعات باید با سرعتی بیش از سرعت نور $(\theta>45^\circ)$ از رأس به Q_3 برسد که با اصل موضوع ۲ در تناقض است.

از نکات بالا نتیجه بسیار مهم زیر بدست می‌آید:

«تمام رویدادهای داخل مخروط نوری می‌توانند به طور علّی به یک رویداد در رأس آن مربوط شوند ولی هیچ یک از رویدادهای خارج از مخروط نمی‌توانند به رویداد در رأس مخروط مربوط شوند.»

*** کمیت ΔS^2:** کمیت ΔS^2 یک بازهٔ فضا ـ زمانی نامیده می‌شود که به صورت مقابل بیان می‌شود: $\Delta S^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(c\Delta t)^2$

که در آن:

$$\Delta x=x_2-x_1 \qquad \Delta y=y_2-y_1 \qquad \Delta z=z_2-z_1 \qquad \Delta t=t_2-t_1$$

بازه‌های فضا و زمانی دو رویداد Q_1 و Q_2 که دارای مختصات (x_1,y_1,z_1,t_1) و (x_2,y_2,z_2,t_2) می‌باشند، هر دو از نظر ناظر S (در دستگاه ناظر S رخ داده‌اند.

تذکر: کمیت ΔS^2 که بازهٔ فضا ـ زمانی نام دارد، یک کمیت ناوردا است. یعنی در همه دستگاه‌های مرجع لخت و از نظر تمامی ناظرها یکسان می‌باشد. پس براساس آنچه گفته شد اگر ناظر S بازهٔ فضا زمانی ΔS^2 را اندازه بگیرد نباید با آنچه ناظر S' اندازه گرفته فرقی کند بنابراین:

$$\Delta S^2=\Delta S'^2$$

و یا: $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-c^2(\Delta t')^2$

مثال۱۰: دو ناظر در چارچوب‌های O و O' دو رویدادر A و B را ثبت می‌کنند. سرعت نسبی این چارچوب $0/7\,c$ است. ناظر O مختصات زیر را برای این دو رویداد ثبت می‌کند:

$$\begin{cases}(x_A=3\ ,\ y_A=1\ ,\ z_A=2\ ,\ t_A=2)\\(x_B=5\ ,\ y_B=3\ ,\ z_B=2\ ,\ t_B=4)\end{cases}$$

فاصلهٔ مکان‌ـ زمان این دو رویداد چقدر است؟ $(c=1)$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافی است که $(\Delta S)^2$ را از دید هرکدام از ناظرها حساب کنیم منتها چون $(\Delta S)^2$ یک کمیت ناورد است لذا فرقی نمی‌کند از دید کدام ناظر به‌دست آید، پس:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta S')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

$$\Delta x = x_A - x_B = -2 \quad , \quad \Delta y = y_A - y_B = -2 \quad , \quad \Delta z = z_A - z_B = 0 \quad , \quad \Delta t = t_A - t_B = -2$$

پس:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta S')^2 = 2^2 + 2^2 - 2^2 = 4 \quad \Rightarrow |\Delta S| = |\Delta S'| = 2$$

نواحی مختلف فضا زمانی برحسب بازهٔ فضا زمانی ΔS^2:

به طور کل نواحی ۳ گانه‌ای را برحسب علامت ΔS^2 می‌توان برای نمودار فضا زمانی لحاظ کرد:

ناحیه اوّل: $\Delta S^2 < 0$: معروف به ناحیه زمان گونه می‌باشد که با توجه به نکات بیان شده در قسمت قبل ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

ویژگی‌اول: تمام نقاطی که داخل ناحیه اول قرار دارند. $\Delta S^2 < 0$ بیانگر رویدادهایی هستند که به طور علّی به رویداد واقع در رأس مخروط $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ مربوط می‌شوند یعنی همهٔ این رویدادها داخل مخروط نوری واقع شده‌اند. پس: مخروط نوری ناحیه‌ای از فضا ـ زمان است که در آن $\Delta S^2 < 0$ می‌باشد.

ویژگی دوم: هرگاه Q_1 و Q_2 دو رویداد در این ناحیه باشند و اگر از نظر یک ناظر مانند S رویداد Q_1 زودتر از رویداد Q_2 رخ دهد در این صورت (به علّت ناوردایی ΔS^2) باید همهٔ ناظرین دیگر نیز Q_1 را زودتر از Q_2 مشاهده کنند. به عبارتی: ترتیب رخ دادن دو رویداد از نظر تمام ناظرین یکسان خواهد بود.

با توجه به آنچه گفته شد: **در ناحیه زمان گونه علیت پایسته می‌ماند.**

به عبارتی:

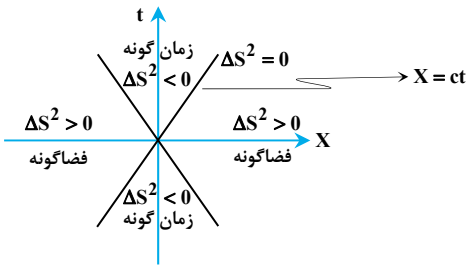
ناحیه زمان گونه داخل مخروط نوری $\begin{cases} x < ct \\ \Delta S^2 = X^2 - c^2t^2 \Rightarrow \Delta S^2 < 0 \\ \theta < 45^\circ \ , \ u < c \end{cases}$

ناحیه دوم: $\Delta S^2 > 0$: معروف به ناحیه فضاگونه می‌باشد که دارای ویژگی‌های زیر است.

ویژگی اول: رویدادهای واقع در این ناحیه به طور علّی به رویداد واقع در رأس مخروط $(0, 0, 0, 0)$ مربوط نمی‌شوند زیرا باید اطلاعات با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت کنند که محال است.

ویژگی دوم: ترتیب روی دادن برای رویدادهای مختلف (مانند آنچه در ناحیه داخل مخروط نوری بود) وجود ندارد.

ویژگی سوم: ناحیهٔ $\Delta S^2 > 0$ خارج از مخروط نوری قرار دارد.



ناحیه سوم: $\Delta S^2 = 0$: این ناحیه فقط مرز مخروط نوری را شامل می‌شود و تنها مخصوص رویدادهایی است که با سرعت نور حرکت می‌کنند پس تنها مربوط به تپه‌های نوری و نه اجسام مادی می‌شود. همهٔ آنچه که تا به حال در مورد مخروط نوری، کمیت ΔS^2 و نواحی سه گانه بیان کردیم در شکل روبه‌رو خلاصه می‌شود:

مثال۱۱: مختصات فضاـ زمانی دو رویداد به ترتیب برابر است با:

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) = (1, 2, -1, \frac{4}{c}) \ , (x_2, y_2, z_2, t_2) = (-1, 3, 1, \frac{1}{c})$$

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) ارتباط علّی میان دو رویداد امکان‌پذیر است.

۲) در مورد ارتباط علّی میان دو رویداد نمی‌توان هیچ نتیجه‌ای گرفت.

۳) رویداد دوم نمی‌تواند از رویداد اول اثر بپذیرد.

۴) رویداد اول نمی‌تواند از رویداد دوم اثر بپذیرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همانطور که گفتیم باید برای تعیین روابط علّی بین رویدادها، علامت $(\Delta S)^2$ را تعیین کنیم، لذا:

$$(\Delta S)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1) \Rightarrow (\Delta S)^2 = 4 + 1 + 4 - 9 = 0 \quad \Rightarrow (\Delta S)^2 = 0$$

لذا چون $(\Delta S)^2 = 0$ شد، پس رویدادها روی خط مخروط نوری مختصات فضاـزمان قرار دارند و ارتباط علّی و معلولی بین دو رویداد امکان‌پذیر خواهد بود.

تبدیل نسبیتی یکاهای جرم و انرژی به یکدیگر:

از آنجایی که معادلات نسبیتی انرژی نشان می‌دهند، جرم و انرژی از یک مقوله‌اند و لذا گاهی در فیزیک هسته‌ای، جرم ذرات را بر حسب «یکای واحد جرم اتمی» یا به طور اختصار $(a.m.u)$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعیین می‌شود.

«یک یکای جرم اتمی به صورت یک دوازدهم جرم اتم کربن خنثی تعریف می‌شود»

البته مقیاس $\frac{۱}{۱۲}$ به دلیل انتخاب ایزوتوپ ۱۲ اتم کربن می‌باشد.

$$۱(a.m.u)=\frac{۱}{۱۲}\left(\frac{۱۲}{۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}}\right)=۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}\ kg \Leftarrow (\text{مول/ذره})\ \frac{gr}{۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}}=۱۲ \text{ یک اتم کربن خنثی}$$

و از اینرو رابطه بین $(a.m.u)$ یا یکای جرم اتمی با انرژی برحسب Mev به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$۱(a.m.u)=۹۳۱/۵\times۱۰^{۶}\ \frac{ev}{c^{۲}}$$

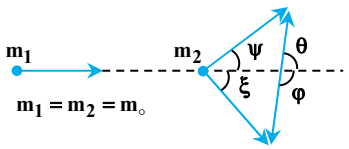
به عنوان مثال برای انرژی سکون الکترون داریم:

$$E_e=۰/۵۱Mev=(۰/۵۱\times۱۰^{۶}\ ev)=۵\times۱۰^{-۴}\ (a.m.u).c^{۲}$$

نظریه برخورد و پراکندگی در نسبیت خاص:

به طور کلی پرداختن به موضوع پراکندگی نسبیتی و برخوردهای دو جسم در حدّ سرعت‌های نزدیک نور، خود یک مقوله‌ی کاملاً مفصل می‌باشد که پرداختن به جزئیات آن در اینجا هدف ما نیست و فقط به منظور آشنایی با برخوردهای نسبیتی، تنها حالتی که جرم سکون دو ذره برابر $m_۰$ باشد، را بررسی می‌کنیم.

زوایای پراکندگی در یک برخورد الاستیک چنین تعیین می‌شوند:



$$\left.\begin{aligned}\tan\psi&=+\sqrt{\frac{۲}{۱+\gamma}}\times\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta}\\ \tan\xi&=-\sqrt{\frac{۲}{۱+\gamma}}\times\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tan\psi\tan\xi=\frac{۲}{۱+\gamma}\ ,\ \gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}},\beta=\frac{u}{c}$$

که در آن θ و φ زوایای پراکندگی در سیستم مرکز جرم و ψ و ξ زوایای پراکندگی در سیستم آزمایشگاه است.

البته توجه به این نکته نیز ضروری است که در حالتی که دو ذره با جرم‌های یکسان برخورد نسبیتی کنند، دیگر مجموع ψ و ξ ، $\frac{\pi}{۲}$ نخواهد شد بلکه به این دلیل که پارامتر γ بزرگتر از یک است $(\gamma>۱)$ در برخوردهای نسبیتی:

$$\Psi+\xi<\frac{\pi}{۲}$$

خواهد شد و این در حالی است که در مکانیک کلاسیک می‌دانیم هرگاه دو ذره با جرم‌های مساوی $(m_۱=m_۲=m)$ به هم برخورد کنند زاویهٔ پراکندگی آن دو ذره مجموعاً ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. پس در مقایسه دو برخورد کلاسیکی با نسبیتی خواهیم داشت.

$$m_۱\Big|_{\text{سکون}}=m_۲\Big|_{\text{سکون}}=m_۰ \qquad \text{نسبیت } \psi+\xi<\frac{\pi}{۲} \qquad m_۱=m_۲=m \qquad \text{کلاسیک } \psi+\xi=\frac{\pi}{۲}$$

اثبات این موضوع بسیار ساده است کافی است تانژانت‌های پراکندگی را در هم ضرب کنیم.

$$\tan\psi\tan\xi=\frac{۲}{۱+\gamma}\xrightarrow{\gamma>۱}\tan\psi\tan\xi<۱\Rightarrow\sin\psi\sin\xi-\cos\psi\cos\xi<۰\Rightarrow\cos(\psi+\xi)>۰\Rightarrow(\psi+\xi)<\frac{\pi}{۲}$$

مثال۱۲: ذره‌ای به جرم سکون $m_۰$ با ذرهٔ دیگری به جرم سکون $m_۰$ که در حال سکون است، برخورد کشسان می‌کند. اگر زاویهٔ پراکندگی هریک از دو ذره نسبت به امتداد حرکت ذره اول، برابر ۳۰° باشد، سرعت نسبی دو ذره قبل از برخورد چقدر بوده است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}c$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}c$ ۳) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}c$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}c$

مدرسان شریف

فصل سوم

«رفتار ذره‌ای»

اثرهای کوانتومی: جنبه‌های ذره‌ای تابش الکترومغناطیس

تا اواخر قرن نوزدهم فیزیک کلاسیک شامل مکانیک نیوتنی، الکترومغناطیس کلاسیک و ترمودینامیک بود که مکانیک کلاسیک، دینامیک و استاتیک اجسام مادی و الکترومغناطیس ماکسول، تابش را مورد بررسی قرار می‌داد. یعنی ذره و موج به صورت دو مفهوم کاملاً جداگانه مورد بررسی قرار می‌گرفتند. در آغاز قرن بیستم مفاهیم فیزیک کلاسیک، از دو دیدگاه مورد حمله قرار گرفتند.

از دیدگاه نسبیت: با ظهور نظریه نسبیت اینشتین اعتبار مفاهیم کلاسیک در قلمرو سرعت‌های بالا (نزدیک سرعت نور) مورد خدشه قرار گرفت.

از دیدگاه میکروسکوپی: بررسی ساختارهای اتمی و زیراتمی مفاهیم جدیدی را بیان نمود که دیگر با دیدگاه فیزیک کلاسیک قابل توجیه نبودند. پس لازم بود مفاهیم جدید دیگری برای توجیه وارد عرصه فیزیک شوند. در این فصل تابش الکترومغناطیس از دیدگاه ذره‌ای مورد بررسی قرار خواهد گرفت و پدیده‌هایی که با این خاصیت قابل توجیه‌اند معرفی خواهند شد. در این نوع بررسی، موج الکترومغناطیس را متشکل از بسته‌های انرژی (فوتون) درنظر گرفته و با این دیدگاه تابش الکترومغناطیس را برهم کنش میان فوتون و ماده در نظر می‌گیرند.

کوانتوم‌های انرژی و یا بسته‌های انرژی (فوتون)

طبق نظریات پلانک و استنتاجی که آلبرت اینشتین از آن‌ها نمود، برای هر تابش معین یک فرکانس تابشی ν معین معرفی شد از این‌رو هر کوانتای انرژی یا بسته‌های انرژی به صورت $E = h\nu$ تعریف می‌شود که در آن h ثابت پلانک و برابر با $h = ۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۳۴}$ J.S می‌باشد.

حال برای n ذره با انرژی $h\nu$ یا به عبارتی برای شاری از ذرات که از یک منبع نور با فرکانس تابشی ν جاری می‌شوند می‌توان انرژی این سیستم را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E = nh\nu$$

به هر ذره‌ای که حامل انرژی $h\nu$ باشد اصطلاحاً یک فوتون گفته می‌شود، فوتون‌ها با چند ویژگی منحصر به فرد توصیف می‌شوند:

۱) فوتون‌ها مانند امواج الکترومغناطیسی، با سرعت نور حرکت می‌کنند.

۲) جرم و انرژی سکون فوتون‌ها صفر است.

۳) فوتون‌ها حامل انرژی و تکانه‌اند، انرژی فوتون‌ها با $E = h\nu$ و تکانهٔ آن‌ها با $P = \frac{E}{c}$ توصیف می‌شود.

۴) در پدیده‌ی گسیل و جذب، فوتون‌ها می‌توانند تولید و یا نابود شوند.

۵) فوتون‌ها با سایر ذرات می‌توانند برخوردهای ذره گونه انجام دهند، درست مانند الکترون‌ها.

توصیفات فوق تنها در حوزهٔ ذره‌ای تصویر درستی از فوتون را به ما می‌دهد، در حالی که در توصیف موجی، فوتون‌ها از طریق امواج الکترومغناطیس و قوانین حاکم بر امواج شبیه‌سازی می‌شوند. به عنوان مثال انرژی فوتون در توصیف موجی به صورت هموار و پیوسته روی جبهه‌های موج پخش می‌شوند که با آنچه در توصیف ذره‌ای از فوتون کردیم مغایرت دارد؛ از این‌رو دو دیدگاه درست ولی متفاوت در مورد فوتون وجود دارد که هر یک به تنهایی راه‌گشای حل مسائل خواهند بود.

اثر فوتوالکتریک

تولید جریان الکتریکی در اثر تابش نور به سطح یک فلز که در میدان الکتریکی واقع شده باشد را اثر فوتوالکتریک می‌نامند. و به الکترون‌های آزاد شده فوتوالکترون گویند.

فرایندهای دیگری نیز که در زیر معرفی شده‌اند فرایندهایی هستند که توسط آن‌ها می‌توان الکترون‌ها را از قید ماده رها کرد. این فرایندها عبارتند از:

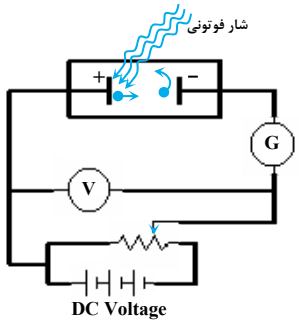
گسیل گرمایونی: گرم کردن فلزات، انرژی گرمایی به الکترون‌ها داده و به طور موثر آن‌ها را به سطح فلز نزدیک و از سطح آن خارج می‌کند.

گسیل ثانوی: انتقال انرژی جنبشی از ذراتی که با سطح فلز برخورد می‌کنند به الکترون‌های آن فلز.

گسیل میدانی: استخراج الکترون‌ها از فلز به وسیله یک میدان الکتریکی قوی خارجی.

اما در مورد اثر فوتوالکتریک که در ابتدا اشاره شد، کمترین مقدار انرژی لازم برای رهایی الکترون از سطح فلز را تابع کار فلز گویند و آن را با $W_\circ$ نشان می‌دهند.

در این پدیده متغیرهایی چون بسامد نور، شدت باریکه نور تابیده شده I، جریان فوتوالکتریک، انرژی جنبشی و جنس سطحی که الکترون‌ها از آن خارج می‌شوند نقش اساسی را ایفا می‌کنند. شکل ۱ مربوط به طرحواره آزمایش فوتوالکتریک می‌باشد.



شکل ۱. طرح واره دستگاه آزمایش فوتوالکتریک

وقتی نور تک‌رنگ بر سطح فلز آند می‌تابد با گسیل فوتوالکترون‌ها، بعضی از الکترون‌ها به سوی کاتد حرکت می‌کنند و با رسیدن به کاتد جریانی را در مدار برقرار می‌کنند. فوتوالکترون‌ها با انرژی‌های مختلف آند را ترک می‌کنند، کاتد که دارای بار منفی است این الکترون‌ها را دفع می‌کند. وقتی کار انجام شده توسط یک میدان الکترو استاتیکی ترمزی با اختلاف پتانسیل φ بر روی یک فوتوالکترون با انرژی جنبشی اولیه فوتوالکترون برابر شود، فوتو الکترون درست جلوی کاتد به حالت سکون در می‌آید و این یعنی، $e\varphi = \frac{1}{2}mv^2$ که در این رابطه v سرعت فوتوالکترون و φ اختلاف پتانسیلی است که باعث توقف فوتوالکترون‌ها در جلوی کاتد می‌شود که اگر تمام فوتو الکترون‌های دیگر نیز متوقف شوند، دیگر هیچ جریان فوتوالکترونی برقرار نخواهد شد. در این صورت فوتوالکترون‌هایی که خارج شده‌اند دارای حداکثر سرعت ممکن V_{max} می‌باشند.

در واقع این مبحث را بطور خلاصه می‌توان چنین نوشت: $e\varphi_\circ = \frac{1}{2}mv^2_{max}$ که در آن $\varphi_\circ$ اختلاف پتانسیلی است که به ازای آن جریان فوتوالکترونی i قطع می‌شود.

بحث I) اگر انرژی‌ای را که میزان تقید الکترون به سطح فلز را نشان می‌دهد با $W_\circ$ نشان دهیم و اگر $E < W_\circ$ باشد، هیچ الکترونی کنده نشده و پدیده فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. در اینجا E انرژی فوتون فرودی می‌باشد.

بحث II) اگر $E = W_\circ$ باشد دیگر هیچ انرژی جنبشی برای حرکت الکترون باقی نمی‌ماند یعنی $K = \circ$ که در این حالت $h\nu = h\frac{c}{\lambda} = W_\circ$ یعنی در واقع پدیده فوتوالکتریک بطور کامل صورت نمی‌پذیرد. در این حالت به طول موج فوتون تابیده شده، طول موج آستانه λ_{max} و به فرکانس آن، فرکانس قطع $\nu_\circ$ گویند. بنابراین:

$$E_{min} = h\nu_\circ = h\frac{c}{\lambda_{max}} = W_\circ$$

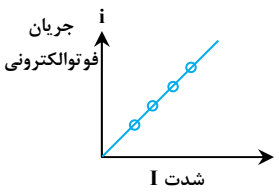
نتایج تجربی اثر فوتوالکتریک

۱ـ با تابش نور به یک سطح فلزی فوتوالکترون‌ها گسیل و جریان فوتوالکتریک i به طور آنی آغاز می‌شود. (به شرطی که فرکانس نور تابیده شده بیشتر از فرکانس قطع باشد.)

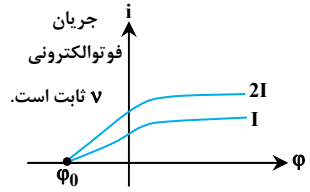
۲ـ برای هر بسامد ثابت $(\nu > \nu_\circ)$ و پتانسیل ترمزی $|\varphi| < |\varphi_\circ|$، جریان فوتوالکترونی i مستقیماً با شدت I باریکه نور متناسب است. (نمودار (۱))

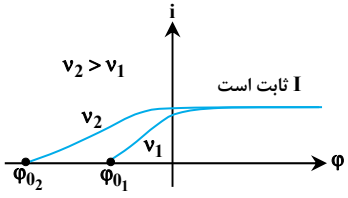
۳ـ برای بسامد ثابت ν و شدت نور I، جریان فوتو الکترونی با افزایش پتانسیل ترمزی φ کاهش می‌یابد. سرانجام وقتی φ برابر $\varphi_\circ$ شود جریان فوتوالکترونی به صفر می‌رسد. (نمودار (۲)) توجه شود که چون φ منفی است لذا اصولاً قدرمطلق آن را در نظر می‌گیرند.

۴ـ مقدار پتانسیل بازدارنده $\varphi_\circ$ برای هر سطح بخصوص، به بسامد نور بستگی دارد ولی از شدت نور مستقل است.

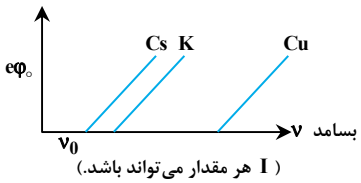


نمودار (۱)





نمودار (۲)



نمودار (۳)

سه ویژگی عمده اثر فوتوالکتریک که بر حسب نظریه موجی نور در فیزیک کلاسیک قابل توجیه نیستند به شرح زیر است:

الف) **مسئله شدت:** براساس نظریه موجی، زیادشدن شدت نور باید باعث افزایش دامنه بردار میدان الکتریکی (E) نوسان‌کننده نور شود، زیرا نیروی وارد بر الکترون برابر eE است پس انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها هم باید با افزایش شدت، افزایش یابند که با توجه به نمودار (۳) می‌بینیم k_{max} یا همان $e\varphi_{\circ}$ مستقل از شدت نور است. در واقع با افزایش شدت تنها تعداد فوتون‌ها زیادتر می‌شود ولی هیچ کدام انرژی‌شان تغییر نمی‌کند. در اینجا k_{max} بیشترین انرژی جنبشی الکترون، خارج از سطح فلز می‌باشد.

ب) **مسئله بسامد:** اثر فوتوالکتریک باید برای هر بسامدی بالاتر از بسامد قطع $\nu_{\circ}$ اتفاق بیفتد البته به شرطی که انرژی نور به قدری باشد که قادر به تأمین انرژی لازم برای کنده‌شدن و گسیل فوتوالکترون‌ها باشد، در صورتیکه برای هر سطحی یک بسامد قطع $\nu_{\circ}$ وجود دارد که مشخصه آن سطح است برای بسامدهای کمتر از $\nu_{\circ}$، شدت نور فرودی هرچه قدر هم زیاد باشد اثر فوتوالکتریک رخ نخواهد داد.

ج) **مسئله تأخیر زمانی:** اگر انرژی نور فرودی از یک حدی ضعیف‌تر باشد (نه کمتر از $h\nu_{\circ}$) باید بین برخورد نور و کنده شدن فوتوالکترون منتظر یک تأخیر قابل اندازه‌گیری باشیم. این تأخیر مدتی است که باید طول بکشد تا الکترون بتواند برای گریز از سطح فلز به قدر کافی از باریکه فرودی انرژی جذب کند اما تاکنون هیچ تاخیری که قابل آشکارسازی و اندازه‌گیری باشد مشاهده نشده است.

تعبیر کوانتومی اثر فوتوالکتریک

مطابق فرضیه اینشتین، نور در بعضی شرایط طوری رفتار می‌کند که گویی انرژی آن در بسته‌هایی ـ که بعداً فوتون نامیده شدند ـ جایگزیده است. انرژی هر فوتون از رابطه $E = h\nu$ به دست می‌آید. مشاهده می‌شود این مفهوم که باریکه نور همانند جریانی از ذرات است با مفهوم رفتار موجی در تناقض است. در نظریه موجی نور، انرژی در بسته‌ها متمرکز نیست بلکه به طور یکنواخت در تمام جبهه موج پخش است.

وقتی پلانک قانون تابش را به کاربرد و برای اولین بار کمیت h را وارد فیزیک کرد رابطه $E = h\nu$ را به کار برد.

البته توجه کنید وی این رابطه را در مورد نوسانگرهای اتمی تشکیل دهنده دیواره کاواک به کار گرفت اگر مفهوم فوتون اینشتین را در مورد اثر فوتوالکتریک به کار ببریم می‌توان نوشت:

$$h\nu = w_{\circ} + k_{max}$$

$w_{\circ}$ تابع کار فلز است و صرف بیرون راندن الکترون از سطح فلز می‌شود و اختلاف انرژی $(h\nu - w_{\circ})$ به صورت انرژی جنبشی الکترون در می‌آید. به شرط اینکه الکترون موقع رانده شدن از سطح فلز گرفتار برخوردهای داخلی نشود، به انرژی جنبشی الکترون در می‌آید. به عبارتی k_{max} بیانگر بیشترین انرژی جنبشی است که فوتوالکترون می‌تواند به ازای انرژی فوتون تابیده شده در بیرون سطح داشته باشد. حالا ببینیم نظریه فوتون اینشتین چگونه ایرادهای وارده بر تعبیر موجی را توجیه می‌کند.

در مورد اشکال اول (مسئله شدت)، باید گفت نظریه فوتون کاملاً با آزمایش وفق می‌کند یعنی اگر شدت نور را دو برابر کنیم، در واقع تعداد فوتون‌ها را دو برابر کرده‌ایم. در نتیجه جریان فوتوالکتریک هم دو برابر می‌شود با این کار تغییر در انرژی تک تک فوتون‌ها یا در ماهیت تک تک فرایندهای فوتوالکتریکی به وجود نمی‌آید.

در مورد اشکال دوم (مسئله بسامد)، در این معادله اگر k_{max} برابر صفر باشد داریم:

$$h\nu = w_{\circ} \quad (I)$$

به این معنی است که انرژی فوتون درست به اندازه‌ای است که بتواند فوتوالکترون را از جا بکند و اضافه بر این چیزی نمی‌ماند که به شکل انرژی جنبشی ظاهر شود اگر ν کمتر از $\nu_{\circ}$ باشد تک تک فوتون‌ها انرژی کافی برای کندن فوتوالکترون نخواهند داشت و هیچ فرقی نمی‌کند که تعداد آن‌ها (شدت) چه قدر باشد.

و در مورد اشکال سوم (مسئله تأخیر زمانی)، با توجه به نظریه فوتون انرژی لازم به صورت یک بسته متمرکز فراهم می‌شود یعنی این انرژی، برخلاف آنچه در نظریه موجی تصور می‌شود به طور یکنواخت در سطح مقطع باریکه نور توزیع نشده است. اگر در معادله فوتوالکتریک اینشتین به جای k_{max} معادلش را قرار دهیم داریم:

$$\varphi_{\circ} = (\frac{h}{e})\nu - (\frac{w_{\circ}}{e}) \quad (II)$$

لازم به ذکر است که $\frac{1}{2}mV_{max}^{2} = k_{max} = e\varphi_{\circ}$. پس طبق نظریه اینشتین میان $\varphi_{\circ}$ و ν یک رابطه خطی وجود دارد که کاملاً با نتیجه آزمایش سازگار است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم سرعت فاز موج از رابطه روبه‌رو قابل محاسبه است.

$$V_{ph}=\frac{\omega}{k}=\frac{B}{C}\lambda$$

پس برای ω می‌توان نوشت:

$$\omega=\frac{B}{C}\lambda\times k=\frac{B}{C}\lambda\times\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi B}{C}$$

از طرفی سرعت گروه از رابطه مقابل قابل محاسبه است.

$$V_g=\frac{d\omega}{dk}\rightarrow\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}(\frac{2\pi B}{C})=0$$

مثال ۱۳: **رابطه سرعت فاز و گروه یک موج به صورت $V_g=kV_{ph}$ است رابطه میان k,ω چگونه است.**

۱) $\omega=e^{k}$ ۲) $\omega=e^{-k}$ ۳) $\omega=0$ ۴) $\omega=e^{2k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» کافی است به جای سرعت فاز و سرعت گروه معادل آن‌ها یعنی $v_g=\frac{d\omega}{dk}$ و $v_{ph}=\frac{\omega}{k}$ را قرار دهیم. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{d\omega}{dk}=k\frac{\omega}{k}\rightarrow\frac{d\omega}{\omega}=dk\xrightarrow{\text{با انتگرال‌گیری}}\ln\omega=k\rightarrow\omega=e^{k}$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

طبق اصل مکملیت کاربرد همزمان توصیف‌های موجی و ذره‌ای در مورد یک ذره مادی یا یک فوتون غیرممکن است مطابق اصل عدم قطعیت اگر تابش الکترومغناطیس را به زبان ذرات بیان کنیم و مکان را در هر لحظه با دقت تعیین کنیم، عدم قطعیت در مکان و زمان هر دو صفرند یعنی $\Delta t=\Delta x=0$ اما عدم قطعیت در آنچه به فوتون نسبت داده می‌شود بی‌نهایت بزرگ خواهد شد یعنی، $\Delta\lambda=\Delta\nu=\infty$

روابط عدم قطعیت که ما با آن‌ها سر و کار داریم یکی رابطه عدم قطعیت میان مکان و تکانه در راستای مکان و دیگری عدم قطعیت میان انرژی و زمان است که این دو رابطه در زیر بیان شده‌اند.

عدم قطعیت در مکان و تکانه:

$$\Delta x\Delta p_x\geq\frac{\hbar}{2}$$

این رابطه برای مؤلفه z,y مختصات مکان و تکانه نیز برقرار است.

عدم قطعیت در انرژی و زمان:

$$\Delta E\Delta t\geq\frac{\hbar}{2}$$

مطابق رابطه‌های بالا و طبق اصل عدم قطعیت تعیین همزمان و بی‌نهایت دقیق اندازه حرکت خطی یک ذره یا فوتون و مکان متناظر با این اندازه حرکت و نیز تعیین همزمان و بی‌نهایت دقیق انرژی و زمان اندازه‌گیری این انرژی غیرممکن است.

مثال ۱۴: **برای ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، $E=\frac{3}{2}mV^2$ می‌باشد. اگر $\Delta P\Delta X\geq\hbar$ باشد، آن‌گاه داریم:**

۱) $\Delta E\Delta t\geq\frac{3h}{2\pi}$ ۲) $\Delta E\Delta t\geq\frac{h}{6\pi}$ ۳) $\Delta E\Delta t\geq\frac{3h}{4\pi}$ ۴) $\Delta E\Delta t\geq\frac{h}{3\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم که $P=mV$ بنابراین می توان انرژی را چنین نوشت:

$$E=\frac{3}{2}mV^2=\frac{3}{2}\frac{P^2}{m}$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\Delta E=\frac{3}{2}\frac{2P\Delta P}{m}=\frac{3P\Delta P}{m}=\frac{3mV\Delta P}{m}$$

از طرفی در صورت مسئله $\Delta P\Delta X\geq\hbar=\frac{h}{2\pi}$ داده شده است، پس:

$$\Delta P\Delta X\geq\frac{h}{2\pi}\Rightarrow\frac{\Delta E}{3V}\Delta X\geq\frac{h}{2\pi}\Rightarrow\Delta E(\frac{\Delta X}{V})\geq\frac{3h}{2\pi}\Rightarrow\Delta E\Delta t\geq\frac{3h}{2\pi}$$

مثال ۱۷: بسته موج متناظر با $\phi(p) = Ae^{-\gamma|p|}$ که در فضای تکانه است، در فضای X یعنی $\psi(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+(\frac{X}{\hbar})^2}$ ۲) $\frac{A}{\sqrt{\pi\hbar}}\frac{1}{\gamma+\frac{iX}{\hbar}}$ ۳) $\frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{\gamma+\frac{iX}{\hbar}}$ ۴) $\frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{-\gamma+\frac{iX}{\hbar}}e^{-p\gamma}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اصولاً به تابع موج در فضای مومنتوم $\phi(P)$ گویند که در اصل تبدیل فوریه تابع موج شرودینگر در فضای مختصات $\psi(X)$ است.

برای تبدیل $\phi(P)$ به $\psi(X)$ و برعکس داریم:

$$\phi(P)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(X)e^{-\frac{iPX}{\hbar}}dX \quad \text{و} \quad \psi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(P)e^{\frac{iPX}{\hbar}}dP$$

بنابراین داریم:

$$\psi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int Ae^{-\gamma|P|}e^{\frac{iPX}{\hbar}}dP$$

با تفکیک بازهٔ انتگرال‌گیری برای قدر مطلق داریم:

$$\Rightarrow \psi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{0}^{\infty}Ae^{P(-\gamma+\frac{iX}{\hbar})}dP+\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{0}Ae^{P(+\gamma+\frac{iX}{\hbar})}dP$$

با انتگرال‌گیری‌های فوق خواهیم داشت:

$$\psi(X)=\frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[\frac{1}{\gamma-\frac{iX}{\hbar}}+\frac{1}{+\gamma+\frac{iX}{\hbar}}\right]=\frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+(\frac{X}{\hbar})^2}$$

ویژگی‌های معادله شرودینگر

این معادله با پایستگی انرژی سازگار است یعنی طبق اصل بقای انرژی به دست آمده است.

هم‌چنین یک معادله خطی است یعنی اصل جمع آثار و برهم نهی در مورد آن برقرار است و جواب آن برای ذره آزاد، موجی است که با موج دوبروی تطابق دارد.

برای نوشتن معادله کافی است تابع موج ذره را بدانیم و یا با دانستن پتانسیل (V) و انرژی کل ذره، تابع موج ذره را محاسبه کنیم.

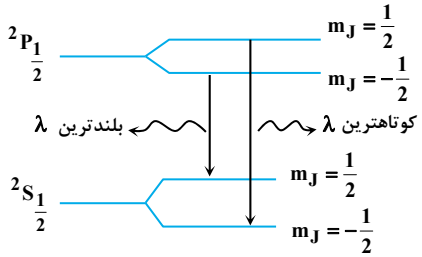
حل این معادله در مورد ذره آزاد، ذره در جعبه و نوسانگر هماهنگ ساده، مختصراً در فصل ۶ و در مکانیک کوانتومی به طور کامل مورد تحلیل و بررسی قرار خواهد گرفت.

جابجائی انرژی خالص با بلندترین طول موج عبارتست از:

$$-\frac{e\hbar}{2m_e}B-\frac{e\hbar B}{6m_e}=\frac{-2e\hbar B}{3m_e}$$

و جابجائی با کوتاهترین طول موج عبارتست از:

$$\frac{e\hbar}{2m_e}B+\frac{e\hbar B}{6m_e}=\frac{2}{3}\frac{e\hbar B}{m_e}$$



$$\Delta E=\frac{2}{3}\frac{e\hbar B}{m_e}+\frac{2}{3}\frac{e\hbar B}{m_e}=\frac{4}{3}\frac{e\hbar B}{m_e}$$

$$\Delta\lambda=\Delta(\frac{hc}{E})\approx-\frac{hc}{E^2}\Delta E\approx\frac{-\lambda^2}{hc}\Delta E$$

$$\Delta\lambda(\lambda=5898A^\circ,B=0/2T)=0/17A^\circ$$

که تقریباً برابر گزینه ۴ می‌باشد.

مثال ۲۳: در اثر عادی زیمان فاصله بازشدگی دو تراز.....و برابر..... است.

۱) متفاوت و $\frac{eB\hbar}{2m_e}$ ۲) مساوی و $\frac{eB}{2m_e}$ ۳) مساوی و $\frac{eB\hbar}{2m_e}$ ۴) متفاوت و $\frac{eB}{2m_e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی یکنواخت بدون در نظر گرفتن اسپین به اثر زیمان عادی مشهور است. در این حالت انرژی سیستم به اندازهٔ $(\mu_B.B)$ جابجا می‌شود که در آن $\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}$ ماگنتون بور نامیده می‌شود بنابراین:

$$H=H_0+\frac{eB}{2m_e}L_z$$

و در نتیجه با دانستن اینکه:

$$L_z=m_l\hbar$$

خواهیم داشت:

$$E=E_0+\frac{eB\hbar}{2m_e}m_l$$

پس در اثر عادی زیمان، فاصلهٔ بازشدگی دو تراز مساوی و برابر $\frac{eB\hbar}{2m_e}$ می‌باشد.

گذار بین ترازها از قواعد گزینش خاصی پیروی می‌کند که به صورت زیر است:

$$\Delta J=0,\pm1 \quad , \quad \Delta l=\pm1$$
$$\Delta m_J=0,\pm1 \quad \Delta S=0$$

بنابراین گذارهایی که از این قواعد گزینش پیروی می‌کنند مجازند و گذارهای دیگر ممنوع است و این به معنی ممنوع مطلق بودن آن‌ها نیست بلکه بسیار به ندرت اتفاق می‌افتد.

مثال ۲۴: از میان گذارهای زیر کدام یک اتفاق نمی‌افتد؟

۱) $2S\to1S$ ۲) $3P\to2S$ ۳) $4P\to1S$ ۴) $4D\to2P$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به قاعدهٔ گزینش (Selection rule) ، تنها گذار میان حالاتی رخ می‌دهد که $\Delta m=0,\pm1$ و $\Delta\ell=\pm1$ باشد؛ پس چون در گزینه (۱) گذار از $2S$ با $\ell=0$ به $1S$ با $\ell=0$ رخ داده لذا $\Delta\ell=0$ خواهد شد که غیرمجاز است.

سایر گزینه‌ها:

گزینه۲: $\Delta l=+1\Rightarrow(2S:l=0\ ,1S:l=0)$ گزینه ۳: $\Delta l=+1\Rightarrow(3P:l=1\ ,2S:l=0)$ گزینه ۴: $\Delta l=+1\Rightarrow(4P:l=1\ ,1S:l=0)$

مثال ۲۵: کدام یک از گذارهای ممکن زیر نمی‌تواند رخ دهد؟

۱) از $m_\ell=2$ به $m_\ell=1$ ۲) از $m_\ell=2$ به $m_\ell=0$ ۳) از $m_\ell=1$ به $m_\ell=0$ ۴) از $m_\ell=0$ به $m_\ell=-1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همانطور که در قاعده گزینش گفتیم گذارهای مجاز آن‌هایی هستند که $\Delta l=\pm1$ و $\Delta m=0,\pm1$ باشد پس:

گزینه (۱): $\Delta m=-1$ گزینه (۲) : $\Delta m=-2$ گزینه (۳) : $\Delta m=-1$ گزینه (۴): $\Delta m=-1$

در یک میدان مغناطیسی خارجی قوی برهمکنش بین گشتاورهای مغناطیسی مداری و اسپینی نسبت به برهمکنش هر یک از آن‌ها با میدان خارجی خیلی ضعیف‌تر است و تنها برهمکنش هر کدام با میدان مغناطیسی خارجی را در نظر می‌گیریم و بنابراین داریم:

$$\mu = \frac{-e\hbar}{2m_e}(m_l + 2m_s) \quad , \quad U = -\mu.B = (m_l + 2m_s)\frac{e\hbar B}{2m_e}$$

به برهم‌کنش بین گشتاور مغناطیسی الکترون μ_s، با میدان مغناطیسی ناشی از حرکت الکترون به دور هسته، ساختار ریز گویند. $(L.S)$ که در آن L تکانه زاویه‌ای ناشی از چرخش الکترون به دور هسته می‌باشد.

همچنین به برهم‌کنش بین گشتاور مغناطیسی الکترون μ_s و میدان مغناطیسی ذاتی پروتون (هسته) ساختار فوق ریز گویند. $(I_B.S)$ که در آن I_B گشتاور مغناطیسی ذاتی هسته است.

مثال ۲۶: در مورد طیف اتم هیدروژن کدام گزینه صحیح است؟

۱) ساختار فوق ریز ناشی از برهمکنش اسپین الکترون با میدان مغناطیسی ناشی از حرکت هسته به دور آن است.

۲) ساختار فوق ریز ناشی از تصحیحات مربوط به حرکت سریع الکترون داخل اتم هیدروژن است.

۳) ساختار ریز ناشی از برهمکنش اسپین الکترون با میدان الکتریکی هسته است.

۴) ساختار فوق ریز ناشی از برهمکنش اسپین الکترون با میدان مغناطیسی ناشی از گشتاور ذاتی هسته است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همانطور که بیان کردیم اساس ساختار فوق ریز ناشی از میدان مغناطیسی ذاتی هسته است که به آن اثر زیمان دائمی نیز گویند که گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته باعث ایجاد آن می‌شود. از طرفی هم اندرکنش اسپین ـ مدار $(S.L)$ و تصحیحات نسبیتی، ساختار ریز را به وجود می‌آورند. در ساختار فوق ریز اندرکنش اسپین الکترون با میدان مغناطیسی ذاتی هسته بررسی می‌شود. $(I_B.S)$

مثال ۲۷: برهمکنش اسپین ـ مدار $(\vec{S}.\vec{L})$ در یک اتم با افزایش Z (عدد اتمی) چه تغییری می‌کند؟

۱) بسته به مقدار Z گاهی افزایش و گاهی کاهش می‌یابد.

۲) زیاد می‌شود.

۳) تغییر نمی‌کند.

۴) کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که تغییرات انرژی ΔE متناسب با Z^4 تغییر می‌کند، لذا با افزایش عدد اتمی ΔE نیز افزایش می‌یابد.

جهت یادآوری: بهتر است بدون اثبات بدانیم که تغییرات انرژی در اثر جفت‌شدگی اسپین ـ مدار از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$H_2 = \frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}(S.L) \quad , \quad H_t = H_0 + H_2$$

که H_0 و H_2 به ترتیب هامیلتونی حالت پایه و هامیلتونی تصحیح یافته در اثر جفت‌شدگی اسپین‌ـ مدار می باشد. بنابر نظریه اختلال تغییرات انرژی چنین تعیین می‌شود:

$$\Delta E_{(S.L)} = \langle \psi | H_2 | \psi \rangle = \frac{1}{4}m_e c^2 (Z\alpha)^4 \frac{\begin{Bmatrix} \ell \\ -\ell - 1 \end{Bmatrix}}{n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)} \quad , \quad \ell \neq 0$$

که در آن m_e جرم الکترون، Z عدد اتمی، c سرعت نور، α ساختار ریز که برابر $\alpha = \frac{1}{137}$ می‌باشد و n و ℓ هم اعداد کوانتومی هستند.

لازم به ذکر است که H_1 مربوط به تصحیحات نسبیتی است.

به کمیت $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$، مگنتون بور می‌گویند که جزء مباحث مربوط به اسپین ذاتی الکترون می‌باشد. و مقدار آن برابر است با:

$$\mu_B = 9/274 \times 10^{-24} \frac{j}{T}$$ (واحد آن ژول بر تسلا می‌باشد.)

بررسی اتم هیدروژن در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی را اثر پاشن باخ گویند. در این اثر به علت قوی بودن میدان مغناطیسی خارجی، دیگر اثر اسپین ـ مدار $\vec{L}.\vec{S}$ را در نظر نمی‌گیرند.

سؤالات آزمون دکتری ۱۳۹۶ ـ مجموعه فوتونیک

۱ـ سرعت فاز الکترونی با انرژی جنبشی $1MeV$ چند برابر سرعت نور است؟ (انرژی سکون الکترون را تقریباً $\frac{1}{2}MeV$ در نظر بگیرید)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

۲ـ برای یک ذره آزاد نسبیتی به جرم سکون m_0، انرژی جنبشی K و تکانه خطی $\vec{P}$ داریم $\frac{P^2}{2m_0K}=\frac{3}{2}$، تندی این ذره چند برابر سرعت نور است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{\frac{7}{8}}$

۳ـ حاصل برخورد نسبیتی رو در رو بین ذره متحرک A و ذره ساکنی که جرم سکونش دو برابر جرم سکون ذره A است، نابودی آن‌ها و خلق ذره‌ای جدید با جرم سکون $\sqrt{10}$ برابر جرم سکون A است. اگر هیچ‌گونه اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، تندی قبل از برخورد ذره متحرک A کدام گزینه است؟

۱) $0/4c$ ۲) $0/5c$ ۳) $0/6c$ ۴) $0/8c$

۴ـ طول موج کامپتون ذره‌ای با جرم سکون m_0، نصف طول موج دوبروی آن است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) تندی این ذره $\frac{c}{2}$ است.
۲) تندی حرکت این ذره $\frac{\sqrt{5}c}{5}$ است.
۳) مقدار تکانه خطی این ذره $\frac{m_0c}{2}$ است.
۴) مقدار تکانه خطی این ذره $\frac{\sqrt{5}m_0c}{4}$ است.

۵ـ بیشترین تعداد پوزیترونی که می‌تواند در یک بارش آبشاری توسط یک فوتون با انرژی $2GeV$ تولید شود، چقدر است؟ $(m_ec^2=0/511MeV)$

۱) ۳۹۲ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۵۷ ۴) ۳۹۱۴

۶ـ یک پرتو فوتونی تکفام به یک ورقه مسی تابیده می‌شود و پراکندگی کامپتون اتفاق می‌افتد. معلوم شده است که الکترون‌های پس زده شده دارای انرژی جنبشی بیشینه برابر با E_0 هستند که E_0 انرژی سکون الکترون است. انرژی فوتون‌های اولیه چند E_0 است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۷ـ ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q با سرعت v در میدان مغناطیسی یکنواخت B (عمود بر صفحه حرکت آن) حرکت دایره‌ای دارد. تصحیح زمان تناوب حرکت دایره‌ای تا اولین مرتبه غیرصفر $\frac{v}{c}$ بر حسب T_0 (دوره تناوب حرکت غیرنسبیتی) کدام است؟

۱) $T_0\frac{v}{c}$ ۲) $-T_0\frac{v}{c}$ ۳) $-\frac{T_0}{2}\frac{v^2}{c^2}$ ۴) $\frac{T_0}{2}\frac{v^2}{c^2}$

۸ـ یک خط بار مستقیم و نامتناهی با چگالی بار خطی λ و یک بار نقطه‌ای q در فاصله r از آن (نسبت به یک ناظر ساکن) را در نظر بگیرید. از نظر ناظری که با سرعت نسبیتی u موازی سیم حرکت می‌کند، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q بر حسب $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\gamma^2r}$ ۲) $\frac{\gamma q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ۳) $\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\gamma r}$ ۴) $\frac{q\lambda\gamma^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$

۹ـ ستارگان جوان عمدتاً از گاز هیدروژن تشکیل شده‌اند. اگر حداکثر تابش گرمایی از یکی از این ستارگان، خط دوم طیف سری بالمر اتم هیدروژن باشد، دمای سطح این ستاره تقریباً چند درجه کلوین است؟ (انرژی حالت پایه اتم هیدروژن $-13/6eV$ است) $(\lambda_{max}T=2/9\times10^{-3}\ m.K)$

۱) ۸۸۰۰ ۲) ۶۰۰۰ ۳) ۱۲۰۰۰ ۴) ۴۴۰۰

۱۰ـ تابش حاصل از اولین خط طیف سری بالمر اتم‌های هیدروژن موجود در کهکشانی که از ما دور می‌شود، در روی زمین به طول موج $9\frac{ch}{\varepsilon_0}$ آشکارسازی می‌شود که ε_0 انرژی حالت پایه اتم هیدروژن است. تندی دور شدن کهکشان چه کسری از سرعت نور است؟

۱) $0/46$ ۲) $0/34$ ۳) $0/28$ ۴) $0/22$

۱۱ـ طول عمر یک حالت برانگیخته در اتم در حدود $10^{-8}\ s$ است. پهنای انرژی این حالت برانگیخته تقریباً چند الکترون ولت است؟

۱) 10^{-1} ۲) 10^{-2} ۳) 10^{-7} ۴) 10^{-10}

۱۲ـ ظرفی محتوی اتم‌های گاز هیدروژن در دمای T است. حداقل مقدار T برحسب کلوین از چه مرتبه‌ای باشد تا در طیف نگاری از این گاز، خطوط جذبی سری بالمر به راحتی مشاهده شود؟ $(K_B = 8/6\times10^{-5}\ \frac{eV}{K})$

۱) 10^{2} ۲) 10^{3} ۳) 10^{5} ۴) 10^{7}

۱۳ـ انرژی‌های اندازه‌گیری شده پرتوی ایکس تابشی از فلز نقره $(Z = 47)$ $k_\alpha = 22keV$ و $k_\beta = 25/1keV$ و انرژی بستگی الکترون در تراز K برابر $25/5keV$ است. اندازه انرژی بستگی الکترون در تراز L چند keV است؟

۱) ۲۸/۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۲۲/۴ ۴) ۳/۵

۱۴ـ توصیف طیف‌نگاری حالت پایه اتم نیتروژن $N(Z = 7)$ کدام است؟

۱) $^{4}S_{\frac{3}{2}}$ ۲) $^{4}P_{\frac{5}{2}}$ ۳) $^{2}S_{\frac{1}{2}}$ ۴) $^{2}P_{\frac{3}{2}}$

۱۵ـ جو مریخ از مولکول‌های CO_2 تشکیل شده است. اگر انرژی تراز حالت پایه مولکول CO_2 را $E_0 = 0$ در نظر بگیریم، انرژی اولین و دومین تراز برانگیخته به ترتیب $0/165eV$ و $0/289eV$ است. تابش نور خورشید به این مولکول‌ها می‌تواند یک لیزر طبیعی ایجاد کند. به ترتیب از راست به چپ، چه ناحیه‌ای از طیف نورخورشید سبب برانگیختگی این لیزر می‌شود و طول موجی که این لیزر گسیل می‌کند در چه ناحیه‌ای است؟

۱) فروسرخ، فروسرخ ۲) فرابنفش، فروسرخ ۳) فروسرخ، فرابنفش ۴) فرابنفش، فرابنفش

۱۶ـ با اعمال پتانسیل $V = 20mV$ به دو وجه جانبی یک مکعب از جنس ژرمانیم به اضلاع $10mm$، جریان $16mA$ از آن می‌گذرد. اگر موبیلیته $\mu_n = 0/4\ \frac{m^2}{V.sec}$ باشد و با فرض الکترون بودن حامل‌ها، چگالی تعداد حامل‌ها برحسب m^{-3} کدام است؟

۱) $1/25\times10^{18}$ ۲) $5/0\times10^{20}$ ۳) $2/0\times10^{20}$ ۴) $1/25\times10^{21}$

۱۷ـ در زنجیره واپاشی‌های هسته‌ای $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y \rightarrow {}^{A-4}_{Z-1}B^{*} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-1}B$ در واکنش اول تا سوم به ترتیب از راست به چپ چه ذراتی گسیل می‌شوند؟

۱) γ, α, β ۲) α, γ, β ۳) γ, β, α ۴) α, β, γ

۱۸ـ در یک فسیل نسبت تعداد اتم‌های ^{14}C به اتم‌های ^{12}C تقریباً $\frac{1}{16}$ این نسبت در یک موجود زنده است. عمر این فسیل تقریباً چند سال است؟

(نیمه عمر ^{14}C برابر ۵۷۳۰ سال است.)

۱) ۱۶۰۴۴ ۲) ۲۲۹۲۰ ۳) ۱۱۴۶۰ ۴) ۳۲۷۴۲

۱۹ـ نمونه‌ای ابتدائاً خالص از ^{67}Ga به جرم $3/5g$ و نیمه عمر $78h$ را در نظر بگیرید. آهنگ تلاشی این نمونه در ابتدا چند بکرل است؟

(جرم مولی گالیم $70\ \frac{g}{mol}$ فرض شود و $\ln 2 = 0/7$)

۱) $2/69\times10^{19}$ ۲) $5/49\times10^{18}$ ۳) $1/53\times10^{17}$ ۴) $7/48\times10^{16}$

۲۰ـ نسبت انرژی پیوندی به ازای هر نوکلئون در هسته هلیوم $^{4}_{2}He$ به هسته لیتیوم $^{7}_{3}Li$ تقریباً کدام است؟

$(m_{Li} = 6/939\ 00u\ ,\ m_{He} = 4/00\ 260u\ ,\ m_n = 1/00\ 867u\ ,\ m_p = 1/00\ 783u)$

۱) ۰/۵۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۲۶

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۹۸ ـ مجموعه فوتونیک

۱ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه انقباض طول، فقط اضلاعی که در راستای حرکت هستند کوتاه می‌شوند. در نتیجه طول مستطیل کوتاه می‌شود ولی عرض آن ثابت باقی می‌ماند. از طرفی می‌دانیم که قطر مستطیل از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$\text{قطر مستطیل} = \sqrt{(\text{طول})^2 + (\text{عرض})^2}$$

بنابراین اگر طول مستطیل را با x ، عرض آن را با y و قطر آن را با d نمایش دهیم، داریم:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

همچنین با استفاده از رابطه انقباض طول، طول مستطیل از دید ناظر برابر است با:

$$x' = x\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow x' = 5\sqrt{1-\beta^2}$$

به این ترتیب قطر مستطیل از دیدگاه ناظر برابر است با:

$$d' = \sqrt{x'^2 + y^2} \Rightarrow d'^2 = x'^2 + y^2 \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{1-\beta^2})^2 + (3)^2 \Rightarrow 18 = 25(1-\beta^2) + 9$$

$$\Rightarrow 9 = 25(1-\beta^2) \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \beta^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} = 0/8 \Rightarrow v = 0/8c$$

---

۲ ـ گزینه «۲» می‌دانیم که انرژی کل از رابطه $E = K + E_0$ محاسبه می‌شود پس در حالت اول می‌توانیم بگوییم که انرژی جنبشی ذره $K = E_0$ است. در حالت دوم انرژی جنبشی ذره دو برابر می‌شود بنابراین انرژی جنبشی ذره در حالت دوم $K' = 2E_0$ خواهد بود.

حال با استفاده از رابطه بین انرژی کل و تکانه داریم:

$$E^2 = E_0^2 + P^2c^2$$

همچنین با استفاده از $E = K + E_0$ می‌توانیم رابطه فوق را برحسب انرژی جنبشی و تکانه خطی بسط دهیم.

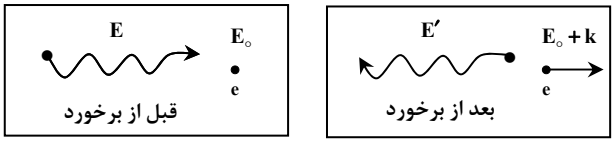
$$\left.\begin{aligned} E^2 &= E_0^2 + P^2c^2 \\ E^2 &= (E_0 + K)^2 \Rightarrow E^2 = E_0^2 + 2E_0K + K^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K^2 + 2E_0K = P^2c^2$$

حال می‌توانیم به راحتی دو حالت مسئله را مقایسه کنیم:

$$\frac{K'^2 + 2E_0K'}{K^2 + 2E_0K} = \frac{P'^2c^2}{P^2c^2} \Rightarrow \frac{(2E_0)^2 + 2E_0(2E_0)}{E_0^2 + 2E_0(E_0)} = (\frac{P'}{P})^2$$

$$\Rightarrow \frac{8E_0^2}{3E_0^2} = (\frac{P'}{P})^2 \Rightarrow \frac{8}{3} = (\frac{P'}{P})^2 \Rightarrow \frac{P'}{P} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۳ـ گزینه «۲» برای اینکه در برخورد فوتون با الکترون (پدیده کامپتون) بیشترین انرژی جنبشی به الکترون وارد شود، باید برخورد رودرو بوده $(\theta = 180^\circ)$ و در این صورت انرژی فوتون پراکنده شده E' مینیمم خواهد شد. پس با توجه به این توضیحات با توجه به شکل برای قوانین بقای انرژی و تکانه داریم:



بقای انرژی:

$$E + E_0 = E' + E_0 + K \Rightarrow E = E' + K \qquad (I)$$

بقای تکانه:

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}_e$$

که در آن:

$$P = \frac{E}{c}\ ;\ P' = \frac{E'}{c}\ ;\ P_e = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2KE_0}$$

با رعایت جهت حرکت فوتون و در نتیجه علامت تکانه آن خواهیم داشت:

$$\frac{E}{c} = \frac{-E'}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2KE_0} \Rightarrow E' = \sqrt{K^2 + 2KE_0} - E \qquad (II)$$

۱۰ـ ذرات آلفا با انرژی جنبشی $5MeV$ از یک ورقه طلا $(Z = 79)$ به ضخامت یک میکرون پراکنده می‌شوند. مرتبه بزرگی کسری از ذرات آلفای فرودی که تحت زاویه $\theta \geq 90^\circ$ پراکنده می‌شوند، چقدر است؟

(جرم مولی طلا $197\frac{g}{mol}$، جرم حجمی طلا $19/3\frac{g}{cm^3}$ و $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1/44eV.nm$ است.)

۱) 10^{-2} ۲) 10^{-4} ۳) 10^{-6} ۴) 10^{-8}

۱۱ـ نسبت احتمال گسیل خودبه‌خودی به گسیل القایی برای دستگاهی متشکل از اتم‌ها و تابش گرمایی که در تعادل گرمایی در دمای اتاق $(T = 300K)$ هستند، چقدر است؟

۱) $0/004$ ۲) $1/04$ ۳) $0/04$ ۴) $1/004$

۱۲ـ در لامپ‌های LED تجاری که در ناحیه نور مرئی طراحی شده‌اند، نیمه‌رساناهای نوع n و p آن به‌ترتیب از راست به چپ از کدام مواد ساخته شده‌اند؟

۱) گالیم آلاییده با فسفر، گالیم آلاییده با آرسنیک
۲) گالیم آلاییده با آرسنیک، گالیم آلاییده با فسفر
۳) ژرمانیوم آلاییده با آرسنیک، گالیم آلاییده با فسفر
۴) سلسیوم آلاییده با فسفر، سلسیوم آلاییده با بیسموت

پاسخنامه آزمون دکتری ۱۳۹۹ ـ مجموعه فوتونیک

۱ـ گزینه «۳» طول عمر ذره از دیدگاه ناظر زمینی با توجه به اتساع زمان نسبیتی برابر است با:

$$\left.\begin{matrix} t = \gamma t_0 \\ t_0 = 3ns \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}} \\ V = 0/8c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0/64}} = \frac{1}{0/6} = \frac{10}{6} \Rightarrow t = \frac{10}{6} \times 3 = 5ns$$

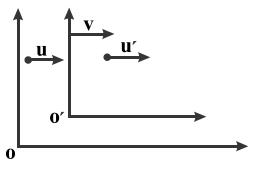
بنابراین مسافت طی‌شده از دید ناظر زمینی برابر است با:

$$x = Vt = 0/8c \times 5ns = 4c \times 10^{-9} = 4 \times 3 \times 10^8 \times 10^{-9} = 1/2m$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به روابط سرعت‌های نسبیتی داریم:

$$u' = \frac{u+v}{1+\frac{v}{c^2}u}$$

که در آن u سرعت جسم قبل از تلاشی نسبت به مرجع آزمایشگاه و v سرعت نسبی دو ذره بعد از تلاشی است. هر دو هم‌جهت هستند، پس هم‌علامت بوده و باید با هم جمع شوند. در نهایت u' سرعت ذره آزادشده از تلاشی نسبت به مرجع آزمایشگاه است.



$$u' = \frac{(0/6+0/2)c}{1+\frac{0/2}{c^2}(0/6)} = \frac{0/8}{1+0/12}c = 0/71c$$

نزدیک‌ترین جواب، گزینه (۳) می‌باشد.

۳ـ گزینه «۱» از رابطه انقباض طول نسبتی برای سیم به طول L_0 داریم:

$$L = \gamma^{-1}L_0$$

بنابراین طول این سیم از دید ناظر ساکن در آزمایشگاه برابر خواهد شد با:

$$L_0 = \gamma L \ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0/64}} = \frac{10}{6}$$

از طرفی اگر چگالی خطی بار را به صورت زیر در نظر بگیریم، داریم (با توجه به بقای بار Q):

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{L}{L_0} \Rightarrow \lambda = \frac{L_0}{L}\lambda_0 = \gamma^{-1}\lambda_0 = \frac{6}{10}\lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{3}{5}$$

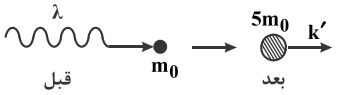
۴ـ گزینه «۲» برای اینکه ناظری اختلاف زمانی Δt بین این دو پدیده را که در راستای x و y اتفاق افتاده کمینه اندازه‌گیری کند، باید در مرکز مخروط نوری، این پدیده‌ها را مشاهده کند. لذا الزاماً داریم: $\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2=0$

چون پدیده در دو بعد رخ داده است پس $\Delta z=0$ و داریم: $\Delta x^2+\Delta y^2=c^2\Delta t^2 \Rightarrow L_0^2+L_0^2=c^2\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t=\sqrt{2}\frac{L_0}{c}=\sqrt{2}\Delta t_0$

حال از رابطه اتساع زمان نسبتی برای ناظری با سرعت V داریم:

$$\Delta t=\gamma\Delta t_0 \Rightarrow \gamma=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{1-(\frac{V}{c})^2}=2 \Rightarrow (\frac{V}{c})^2=\frac{1}{2} \Rightarrow V=\frac{\sqrt{2}}{2}c$$

۵ـ گزینه «۱» از بقای انرژی و تکانه قبل و بعد از برخورد داریم:



$$E_{\text{قبل}}=Pc+E_0 \quad , \quad P=\frac{h}{\lambda} \quad , \quad E_0=m_0c^2$$
$$E_{\text{بعد}}=k'+E_0' \quad , \quad E_0'=5m_0c^2$$

که در آن k' انرژی جنبشی ذره به جرم $5m_0$ بعد از برخورد می‌باشد. حال برای بقای تکانه‌ها داریم: $P_{\text{قبل}}=P_{\text{بعد}} \quad , \quad P_{\text{قبل}}=\frac{h}{\lambda} \quad , \quad P_{\text{بعد}}=P'$

از طرفی از روابط نسبیتی برای انرژی کل E' یک ذره با انرژی سکون E_0' و انرژی جنبشی k' و تکانه P' داریم:

$$E'=K'+E_0'=\sqrt{(P'c)^2+E_0'^2} \Rightarrow k'=\sqrt{(P'c)^2+E_0'^2}-E_0'$$

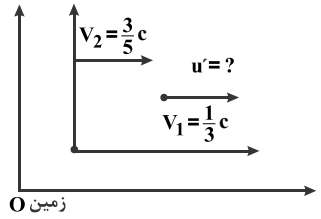
از بقای انرژی داریم: $E_{\text{قبل}}=E_{\text{بعد}} \Rightarrow Pc+E_0=K'+E_0'=\sqrt{(P'c)^2+E_0'^2}$

عبارت را به توان ۲ می‌رسانیم و می‌دانیم که $E_0'=5E_0=5m_0c^2$:

$$\Rightarrow P^2c^2+E_0^2+2PcE_0=(P'c)^2+25E_0^2 \Rightarrow 2PcE_0=24E_0^2 \Rightarrow Pc=12E_0=12m_0c^2$$
$$\Rightarrow Pc=\frac{hc}{\lambda}=12m_0c^2 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{12}(\frac{h}{m_0c})$$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا سرعت نسبی هر دو کهکشان را نسبت به زمین می‌سنجیم:

$$\nu_D=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_0 \xrightarrow{\nu=\frac{c}{\lambda}} \lambda_D=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_0 \ , \ \beta=\frac{V}{c}$$



$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_{D_1}=600\\ \lambda_0=420\end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}}=1/4 \Rightarrow V_1=\frac{1}{3}c$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_{D_2}=840\\ \lambda_0=420\end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}=2 \Rightarrow V_2=\frac{3}{5}c$$

حال سرعت نسبی دو کهکشان نسبت به هم برابر است با: $u'=\frac{V_2-V_1}{1-\frac{V_2V_1}{c^2}}=\frac{(\frac{3}{5}-\frac{1}{3})}{1-\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}c=\frac{1}{3}c\simeq 0/33c$

نزدیک‌ترین جواب گزینه (۴) می‌باشد.

۷ـ گزینه «۳» برای یافتن بیشینه انرژی داریم: $E_{\max}=\text{(ولتاژ}\times\text{بار الکترون)}=20000eV \quad , \quad E_{\max}=\frac{hC}{\lambda_{\min}}=\frac{10400eV\mathring{A}}{\lambda_{\min}}$

$$\lambda_{\min}=\frac{10400eV\mathring{A}}{E_{\max}}=\frac{10400eV\mathring{A}}{20000eV}=0/52\mathring{A}$$

۸ـ گزینه «۲» همان‌طور که می‌دانیم چگالی توان تابشی یک جسم سیاه طبق معادله استفان ـ بولتزمان برابر است با: $P=\sigma T^4$

حال اگر توان تابشی را بخواهیم، باید رابطه فوق را در مساحت سطح ستاره (S) ضرب کنیم.

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰ ــ مجموعه فوتونیک

۱ــ فاصله‌ی مرکز کهکشان شیری تا لبهٔ آن $۳\times۱۰^{۴}\ ly$ است. اگر شخصی بخواهد با سرعت ثابت از مرکز کهکشان به لبهٔ آن در مدت زمان ۵۰۰۰ سال (ویژه زمان) سفر کند، اندازه سرعت این شخص نسبت به زمین چقدر باید باشد؟

۱) $\frac{۶}{\sqrt{۳۷}}c$　　۲) $\frac{۳۶}{۳۷}c$　　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}c$　　۴) $\frac{۱}{۷}c$

۲ــ در یک فرایند تولید جفت الکترون ــ پوزیترون ناظر ساکن در آزمایشگاه انرژی و تکانه‌ی پوزیترون را E_+ و $\vec{p}_+$ و انرژی و تکانه‌ی الکترون را E_- و $\vec{p}_-$ و زاویه‌ی بین بردارهای سرعت آن دو را θ اندازه‌گیری می‌کند. انرژی الکترون تولید شده، در دستگاه مختصات مرکز جرم، کدام است؟

۱) $\sqrt{(m_c^۲c^۴+E_+E_-+c^۲p_+p_-\cos\theta)/۲}$　　۲) $\sqrt{(m_c^۲c^۴+E_+E_--c^۲p_+p_-\cos\theta)/۲}$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۲}(m_c^۲c^۴+E_+E_-)-c^۲p_+p_-\cos\theta)}$　　۴) $\sqrt{\frac{۱}{۲}(m_c^۲c^۴+E_+E_-)+c^۲p_+p_-\cos\theta)}$

۳ــ از برخورد پرتوهای کیهانی پر انرژی با جو زمین در ارتفاع $۱۰۰\ m$ از سطح زمین ذرات پایون تولید می‌شوند. اگر پایون‌ها به‌طور عمودی و با تندی $۰/۹c$ به سمت زمین حرکت کنند و زمان فروپاشی آن‌ها در دستگاه مختصات سکون خود برابر $۲/۵\times۱۰^{-۸}$ ثانیه پس از به‌وجود آمدن ذرات باشد، ناظر زمینی تقریباً در چه ارتفاعی از سطح زمین، فروپاشی پایون‌ها را مشاهده می‌کند؟

۱) ۹۷/۰　　۲) ۶۴/۵　　۳) ۹۳/۲　　۴) ۸۴/۵

۴ــ ناظر S' با سرعت v نسبت به ناظر S در راستای محور x در حرکت است. تبدیلات لورنتس که مکان x' و زمان t' یک رویداد را که ناظر S' اندازه‌گیری کرده برحسب مختصه x و زمان t اندازه‌گیری شده توسط ناظر S بیان می‌کنند، برحسب پارامتر $\tanh\alpha=\frac{v}{c}$ کدامند؟ (c تندی نور در خلأ است.)

۱) $x'=x\cosh\alpha-ct\sinh\alpha\ ,\ t'=t\sinh\alpha-(xt\cosh\alpha)/c$

۲) $x'=x\sinh\alpha-ct\cosh\alpha\ ,\ t'=t\cosh\alpha-(xt\sinh\alpha)/c$

۳) $x'=x\cosh\alpha-ct\sinh\alpha\ ,\ t'=t\cosh\alpha-(xt\sinh\alpha)/c$

۴) $x'=x\sinh\alpha-ct\cosh\alpha\ ,\ t'=t\sinh\alpha-(xt\cosh\alpha)/c$

۵ــ یک ذره خنثی K° به جرم سکون $۵۰۰\frac{MeV}{c^۲}$ در حین حرکت به دو ذره پیون تلاشی می‌یابد $(K^{\circ}\to\pi^+\pi^-)$ که جرم دو پیون یکسان و برابر $۱۴۰\frac{MeV}{c^۲}$ است. ذره π^- پس از تولید نسبت به ناظر آزمایشگاه ساکن است. انرژی جنبشی π^- در دستگاه سکون K° چند MeV است؟

۱) ۱۰۹　　۲) ۲۴۹　　۳) ۱۸۰　　۴) صفر

۶ــ انرژی جنبشی یک الکترون دو برابر انرژی سکون آن است. انرژی فوتونی که تکانهٔ خطی آن مساوی تکانهٔ‌خطی این الکترون باشد چند برابر انرژی سکون الکترون است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) ۸　　۴) ۳

۷ــ فرض کنید یک ذره میون (μ) در حالت سکون فروپاشی می‌کند: $\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu$ اگر انرژی اولیه میون به طور مساوی بین سه لپتون تقسیم شود، زاویهٔ بین راستای انتشار هر دو لپتون چند درجه است؟ (از جرم ذرات حاصل از فروپاشی در برابر جرم میون صرف نظر کنید.)

۱) ۹۰　　۲) ۶۰　　۳) ۱۲۰　　۴) ۴۵

۸ــ ذره A با سرعت αc به سمت ذره ساکن B در حرکت است. با چه سرعتی یک ناظر باید حرکت کند تا در چارچوب مرجع او دو ذره سرعت‌هایی مساوی و در خلاف جهت یکدیگر داشته باشند؟

۱) $\frac{c}{\alpha}\left(۱-\sqrt{۱+\alpha^۲}\right)$　　۲) $\frac{c}{\alpha}\left(۱+\sqrt{۱-\alpha^۲}\right)$　　۳) $\frac{c}{\alpha}\left(۱+\sqrt{۱+\alpha^۲}\right)$　　۴) $\frac{c}{\alpha}\left(۱-\sqrt{۱-\alpha^۲}\right)$

۹ــ یک پرتو گاما به یک پروتون ساکن برخورد کرده و یک پیون خنثی تولید می‌کند: $\gamma+p\to p+\pi^{\circ}$. حداقل انرژی لازم پرتو گاما برای انجام این برهم‌کنش کدام است؟ (m_p جرم سکون پروتون و m_π جرم سکون پیون خنثی است.)

۱) $\frac{m_\pi+m_p}{۲m_p}(m_\pi c^۲)$　　۲) $\frac{m_\pi+۲m_p}{۲m_p}(m_\pi c^۲)$　　۳) $\frac{m_\pi+۲m_p}{m_p}(m_\pi c^۲)$　　۴) $\frac{m_\pi+m_p}{m_p}(m_\pi c^۲)$

۱۰ـ زوج الکترون ـ پوزیترون در دستگاه مختصات S ساکن هستند و دچار نابودی شده و دو فوتون تولید می‌شود. دستگاه مختصات S' هم‌جهت با فوتون شماره یک با سرعت $\vec{v}$ نسبت به دستگاه S در حرکت است. طول موج فوتون شماره یک در دستگاه S' چقدر است؟ ($m_\circ$ جرم سکون الکترون است.)

۱) $\frac{h}{m_\circ c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ ۲) $\frac{h}{m_\circ c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ ۳) $\frac{h}{m_\circ c}\frac{c-v}{c+v}$ ۴) $\frac{h}{m_\circ c}\frac{c+v}{c-v}$

۱۱ـ اگر تابع توزیع پلانک برای چگالی انرژی تابشی جسم سیاه برحسب فرکانس به شکل $\rho(v)=\frac{8\pi v^2}{c^3}\frac{hv}{e^{hv/kT}-1}$ باشد، شکل این تابع توزیع برحسب طول موج چگونه است؟

۱) $\rho(\lambda)=\frac{8\pi h}{\lambda^3}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$ ۲) $\rho(\lambda)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$ ۳) $\rho(\lambda)=\frac{8\pi h}{\lambda^3 c^3}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$ ۴) $\rho(\lambda)=\frac{8\pi h}{\lambda^5 c^2}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$

۱۲ـ کدام گزاره درباره‌ی اثر فوتوالکتریک برای یک الکترون آزاد درست است؟

۱) این پدیده با برقراری هم‌زمان پایستاری انرژی و تکانه خطی امکان رخ دادن دارد.

۲) اگر رخ دهد، پایستگی هم‌زمان انرژی نسبیتی و تکانه خطی نسبیتی برقرار نمی‌شود.

۳) این پدیده با برقراری هم‌زمان پایستاری انرژی و بار الکتریکی امکان رخ دادن دارد.

۴) اگر رخ دهد، فقط پایستگی تکانه خطی نسبیتی نقض می‌شود.

۱۳ـ کدام عبارت درمورد پراکندگی نور از یک ماده هدف نادرست است؟

۱) اگر طول موج تابشی در محدوده ایکس یا طول موج‌های کوچک‌تر از آن باشد، پراکندگی کامپتون غالب است.

۲) اگر طول موج تابشی در محدوده مرئی یا طول موج‌های بزرگ‌تر از آن باشد، پراکندگی تامسون غالب است.

۳) در پراکندگی کامپتون فقط الکترون‌های آزاد در هدف می‌توانند شرکت کنند.

۴) پراکندگی تامسون بر اساس فیزیک کلاسیک قابل توجیه است.

۱۴ـ پرتوهای ایکسی با طول موج ۰/۰۴nm از یک هدف کربن پراکنده می‌شود و پرتوهای پراکنده شده با راستای پرتو تابشی زاویه ۴۵° می‌سازند. تقریباً چند درصد از انرژی پرتوایکس اولیه به الکترون‌های اتم هدف منتقل شده است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۵/۴ ۴) ۱/۸

۱۵ـ در فرایند واپاشی β عنصر ^{14}C، بیشینه‌ی انرژی الکترون‌های آزاد شده برابر ۰/۱۶MeV است. اگر تابع توزیع تعداد الکترون‌ها برحسب انرژی به‌صورت $N(E)dE=A\sqrt{E}(E_{max}-E)dE$ باشد که A ضریب ثابتی است، نرخ انرژی آزاد شده توسط نمونه‌ای از ^{14}C که $3/5\times10^{7}$ الکترون در ثانیه تابش می‌کند، چند $\frac{MeV}{s}$ است؟

۱) $2/4\times10^{6}$ ۲) $1/2\times10^{5}$ ۳) $5/6\times10^{6}$ ۴) $2/8\times10^{5}$

۱۶ـ در یون لیتیوم Li^{++} بسامد نوری که از گذار الکترون از اولین حالت برانگیخته به حالت پایه گسیل می‌شود چند برابر بسامد نوری است که از گذار الکترون از اولین حالت برانگیخته به حالت پایه در اتم هیدروژن گسیل می‌شود؟ (عدد جرمی لیتیوم ۷ و عدد اتمی آن ۳ است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۷

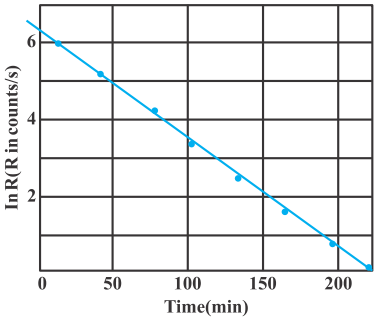
۱۷ـ برای یک پیکربندی دارای دو الکترون با اعداد کوانتومی $\ell_1=1$ و $\ell_2=2$ مقادیر ممکن j ممنتوم زاویه‌ای کل، کدامند؟ $(\vec{j}=\vec{\ell}+\vec{s})$

۱) $\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ ۲) $5,4,3,2,1$ ۳) $4,3,2,1,0$ ۴) $\frac{9}{2},\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}$

۱۸ـ فلزی در دمای ۸۰۰K قرار دارد. احتمال آن‌که الکترونی تراز انرژیی ۰/۷eV بالاتر از سطح فرمی این فلز را اشغال کند، تقریباً چقدر است؟ ($k_B=1/4\times10^{-23}\ J/K$ و $e\cong2/72$)

۱) ۰/۵۸ ۲) ۰/۳۷ ۳) ۰/۲۷ ۴) ۰/۷۳

۱۹ـ در شکل زیر نمودار نیم لگاریتمی آهنگ تلاشی یک ماده رادیواکتیو برحسب زمان رسم شده است. با توجه به این نمودار، نیمه عمر این ماده چند دقیقه است؟ (واحد محور افقی دقیقه و واحد محور عمودی شمارش در ثانیه است. $\ln ۲ = ۰/۷$)



۱) ۳۶
۲) ۲۵
۳) ۲۲۵
۴) ۱۵۰

۲۰ـ کدام عبارت نادرست است؟

۱) در راکتورهای هسته‌ای ماده کندکننده در قلب راکتور و در مجاورت میله‌های سوخت قرار دارد.
۲) نوترون‌هایی که بر اثر شکافت هسته‌ای تولید می‌شوند سریع بوده و انرژی جنبشی در حدود $۲MeV$ دارند.
۳) هسته ^{۲۳۵}U با جذب یک نوترینوی حرارتی تبدیل به هسته ^{۲۳۶}U می‌شود که این هسته بر اثر شکافت به دو هسته سبک‌تر تجزیه می‌شود.
۴) هسته ^{۲۳۸}U با جذب یک نوترینوی حرارتی تبدیل به هسته ^{۲۳۹}U می‌شود که این هسته بر اثر شکافت به دو هسته سبک‌تر تجزیه می‌شود.

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰ ــ مجموعه فوتونیک

۱ـ گزینه «۱» از روابط لورنتس داریم:

$$x = \frac{vt}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$$

فاصله $L = ۳\times ۱۰^{۴}\ Ly$ (سال نوری)

$$L = x = ۳\times ۱۰^{۴}\times c\times \text{سال} = \frac{۷\times ۵\times ۱۰^{۳}\ \text{سال}}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}} \Rightarrow ۶ = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳۶ = \frac{\frac{v^۲}{c^۲}}{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}$$

$$\frac{v^۲}{c^۲} = \beta \Rightarrow ۳۶ = \frac{\beta}{۱-\beta} \Rightarrow ۳۶ - ۳۶\beta = \beta \Rightarrow \beta = \frac{۳۶}{۳۷} \Rightarrow \frac{v^۲}{c^۲} = \frac{۳۶}{۳۷} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{۶}{\sqrt{۳۷}} \Rightarrow v = \frac{۶}{\sqrt{۳۷}}c$$

۲ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که چنانچه $E_۰$ انرژی دستگاه مرکز جرم در دستگاه سکون خودش باشد، آنگاه با توجه به این‌که جرم الکترون و پوزیترون با یکدیگر برابر است، از پایستگی تکانه و انرژی در دستگاه مرکز جرم داریم:

$$\frac{m_e c^۲}{\sqrt{۱-\frac{V_+^{۰۲}}{c^۲}}} + \frac{m_e c^۲}{\sqrt{۱-\frac{V_-^{۰۲}}{c^۲}}} = E_۰ \quad ، \quad \frac{m_e V_+^۰}{\sqrt{۱-\frac{V_+^{۰۲}}{c^۲}}} + \frac{m_e V_-^۰}{\sqrt{۱-\frac{V_-^{۰۲}}{c^۲}}} = ۰$$

که $V_+^۰$ و $V_-^۰$ به‌ترتیب سرعت پوزیترون و الکترون در دستگاه مرکز جرم می‌باشد. با توجه به اینکه جرم پوزیترون و الکترون با یکدیگر برابر است، از حل دستگاه معادلات بالا می‌توان دید که:

$$V_+^۰ = -V_-^۰ \Rightarrow \frac{m_e c^۲}{\sqrt{۱-\frac{V_+^{۰۲}}{c^۲}}} = \frac{m_e c^۲}{\sqrt{۱-\frac{V_-^{۰۲}}{c^۲}}} = \frac{E_۰}{۲} \qquad (۱)$$

بنابراین کافی است انرژی سکون دستگاه مرکز جرم را محاسبه کنیم. چنانچه E انرژی دستگاه مرکز جرم و $\vec{p}$ تکانه آن در دستگاه آزمایشگاه باشد داریم:

$$\vec{p}_+ + \vec{p}_- = \vec{p} \quad \text{و} \quad E_+ + E_- = E$$

و می‌دانیم که:

$$E^۲ - \vec{p}^۲c^۲ = E_۰^۲$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$E_۰^۲ = (E_+ + E_-)^۲ - (\vec{p}_+ + \vec{p}_-)^۲c^۲ = E_+^۲ + E_-^۲ + ۲E_+E_- - (\vec{p}_+^۲ + \vec{p}_-^۲ + ۲\vec{p}_+.\vec{p}_-)c^۲$$

$$= (E_+^۲ - \vec{p}_+^۲c^۲) + (E_-^۲ - \vec{p}_-^۲c^۲) + ۲E_+E_- - ۲p_+p_-\cos\theta c^۲$$

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۱ ــ مجموعه نانو فناوری ــ نانو مواد

۱ــ از پراش نوترون برای تعیین ساختارهای زیستی در حد یک نانومتر استفاده می‌شود. انرژی جنبشی این نوترون‌ها حداقل باید چه مقدار باشد؟ ($h = ۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\ J.s$ و جرم نوترون $۱/۷\times۱۰^{-۲۷}\ kg$ است.)

۱) $۰/۸\ meV$ ۲) $۸۰\ eV$ ۳) $۸\ keV$ ۴) $۸meV$

۲ــ فوتونی با طول موج $۱۰^{-۴}\ nm$ به ذره ساکنی با جرم سکون $m_۰$ برخورد کرده و کاملاً توسط آن جذب می‌شود و ذره جدیدی با جرم سکون $\frac{۲۰MeV}{c^۲}$ تولید می‌شود. مقدار تقریبی $m_۰c^۲$ برحسب MeV کدام است؟ $(ch \cong ۲\times۱۰^{-۲۵}\ J.m)$

۱) ۳۳ ۲) ۱۱ ۳) ۳/۳ ۴) ۱/۱

۳ــ در پدیده کامپتون، فوتونی با یک الکترون ساکن برخورد کشسان دارد. انرژی فوتون قبل از برخورد ۳ برابر انرژی جرم سکون الکترون است. پس از برخورد، ۰/۴ انرژی فوتون اولیه به الکترون منتقل می‌شود. بعد از برخورد زاویه انحراف فوتون کدام است؟

۱) $\cos^{-۱}\left(\frac{۷}{۹}\right)$ ۲) $\cos^{-۱}\left(\frac{۲}{۹}\right)$ ۳) $\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{۳}\right)$ ۴) ۶۰°

۴ــ اتم رادیواکتیوی با تندی $۰/۸c$ نسبت به ناظر ساکن در زمین در امتداد مثبت محور x در حرکت است. این اتم الکترونی را با تندی $۰/۴c$ نسبت به چارچوب خود و در راستای عمود بر حرکت خود (امتداد مثبت محور y) گسیل می‌کند. اندازه سرعت این الکترون نسبت به ناظر زمینی کدام است؟

۱) $۰/۸۴c$ ۲) $۰/۶۳c$ ۳) $۰/۵۴c$ ۴) $۰/۲۴c$

۵ــ در چارچوب مرجع ساکن S دو رویداد همزمان بر روی محور x یکی در نقطه $x = a$ و دیگری در نقطه $x = -a$ رخ می‌دهد. از دید ناظر S' که در جهت مثبت محور x با سرعت v در حرکت است، کدام عبارت درست است؟

۱) رویداد واقع در $x = -a$ زودتر از رویداد دیگر رخ می‌دهد.
۲) رویداد واقع در $x = a$ زودتر از رویداد دیگر رخ می‌دهد.
۳) دو رویداد همزمان اما فاصله آن دو بیشتر از $۲a$ است.
۴) دو رویداد همزمان اما فاصله آن دو کمتر از $۲a$ است.

۶ــ در یک آزمایش فوتوالکتریک، نوری با طول موج $۱۰۰nm$ به یک فلز می‌تابد. اگر با اعمال اختلاف پتانسیل $۸V$ جریان فوتوالکترون‌ها قطع شود، تندی بیشینه این الکترون‌ها تقریباً چند $\frac{m}{s}$ است؟ (جرم الکترون $۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\ kg$ است.)

۱) $۳/۱\times۱۰^۷$ ۲) $۲/۷\times۱۰^۶$ ۳) $۱/۷\times۱۰^۶$ ۴) $۱/۳\times۱۰^۸$

۷ــ دو لیزر، اولی با طول موج $۱۸۰nm$ و دومی با طول موج $۷۲۰nm$ دارای توان یکسان هستند. تعداد فوتون‌هایی که در یک ثانیه از لیزر اول تابش می‌شود، چند برابر لیزر دوم است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

۸ــ بیشینه نمودار شدت برحسب طول موج تابش از جسم سیاهی در دمایی معین در طول موج $۸۱۰nm$ رخ می‌دهد. اگر دما چنان افزایش یابد که انرژی کل تابشی از این جسم ۸۱ برابر شود، بیشینه شدت در دمای جدید در چه طول موجی برحسب نانومتر رخ خواهد داد؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۲۷۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰

۹ــ یک لامپ از ماده نیم‌رسانایی با گاف انرژی $۴eV$ ساخته شده است. طول موج نور گسیلی از این لامپ چند نانومتر است؟

۱) ۳۱ ۲) ۶۲ ۳) ۳۱۰ ۴) ۶۲۰

۱۰ــ در یک آزمایش الکترون‌ها با انرژی $۵۰eV$ به طور عمودی به یک بلور تابیده شده و در بازتاب یک بیشینه در مرتبه اول در زاویه ۲۰° مشاهده می‌شود. نوترون‌ها با چه انرژی به این بلور به طور عمودی تابانده شوند تا در بازتاب، یک بیشینه در مرتبه اول و در همان زاویه ۲۰° مشاهده شود؟ (جرم نوترون $\frac{۹۴۰MeV}{c^۲}$ است.)

۱) $۱۴eV$ ۲) $۲۷\ keV$ ۳) $۱۴\mu eV$ ۴) $۲۷meV$

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۱ ــ مجموعه نانو فناوری ــ نانو مواد

۱ــ گزینه «۱» از رابطه عدم قطعیت داریم (برای تعیین حداقل‌ها):

$$xp = h$$

$$x = ۱nm\ ,\ h = ۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\ js \Rightarrow P = \frac{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}}{۱\times۱۰^{-۹}} = ۶/۶\times۱۰^{-۲۵}$$

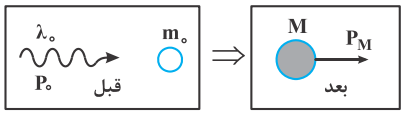
از طرفی برای انرژی جنبشی یک ذره غیرنسبیتی داریم:

$$K = \frac{P^۲}{۲m} = \frac{(۶/۶\times۱۰^{-۲۵})^۲}{۲\times۱/۷\times۱۰^{-۲۷}} = ۱۲/۸۱\times۱۰^{-۲۳}\ j$$

که این انرژی نوترون برحسب ژول است و باید آن را به eV تبدیل کنیم:

$$\Rightarrow K = \frac{۱۲/۸۱\times۱۰^{-۲۳}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۸\times۱۰^{-۴}\ eV = ۰/۸MeV$$

۲ــ گزینه «۲» با توجه به نسبیتی بودن این برخورد؛ قانون بقای انرژی و تکانه را می‌نویسیم. در نظر بگیرید چون انرژی فوتون بالاست معادلات حتماً باید نسبیتی لحاظ شوند پس:



$$E_{قبل} = E_{بعد}$$

$$\frac{hc}{\lambda_۰} + m_۰c^۲ = E_M$$

برای E_m یعنی انرژی جنبشی ذره به جرم M پس از برخورد داریم:

$$E_M = \sqrt{P_m^۲c^۲ + m_۰^۲c^۴}$$

که در آن P_m تکانه ذره تشکیل شده پس از برخورد است و طبق قانون بقای تکانه برابر با تکانه فوتون قبل از برخورد است لذا داریم:

$$P_{قبل} = P_{بعد} \Rightarrow P_۰c = \frac{hc}{\lambda_۰} = \frac{۱۲۴۰eVnm}{۱۰^{-۴}\ nm} = ۱۲/۴MeV = P_mc$$

بنابر رابطه اول داریم:

$$\frac{hc}{\lambda_۰} + m_۰c^۲ = \sqrt{P_m^۲c^۲ + M_۰^۲c^۶} \Rightarrow ۱۲/۴MeV + m_۰c^۲ = \sqrt{(۱۲/۴)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۳/۵۳$$

از صورت سؤال می‌دانیم: $M_۰c^۲ = ۲۰MeV$ پس:

$$m_۰c^۲ = ۲۳/۵۳ - ۱۲/۴ = ۱۱/۱۳MeV$$

۳ــ گزینه «۱» طبق رابطه کامپتون داریم:

$$\lambda' - \lambda_۰ = \frac{h}{m_ec}(۱-\cos\theta)$$

که اگر آن را برحسب انرژی $E = \frac{hc}{\lambda}$ بازآرایی کنیم داریم:

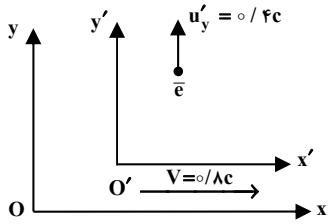
$$hc\left(\frac{۱}{E'} - \frac{۱}{E_۰}\right) = \frac{hc}{m_ec^۲}(۱-\cos\theta)$$

طبق صورت سؤال E' باید برابر $۰/۶E_۰$ باشد چرا که ۰/۴ از انرژی فوتون اولیه به الکترون داده شده است و اگر $E_۰ = ۳E_e$ باشد داریم:

$$\frac{۱}{۰/۶E_۰} - \frac{۱}{E_۰} = \frac{۱}{E_e}(۱-\cos\theta) \quad , \quad E_e = m_ec^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{۶\times۳E_e} - \frac{۱}{۳E_e} = \frac{۱}{E_e}(۱-\cos\theta) \Rightarrow \frac{۱۰-۶}{۱۸} = (۱-\cos\theta) \Rightarrow \frac{۲}{۹} = ۱-\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۷}{۹}$$

۴ــ گزینه «۱» برای حل این سؤال دقت کنید که اندازه سرعت را خواسته است، نه اینکه سرعت در جهت خاصی را مدنظر گرفته باشند. نکته مهم در حل سؤال هم همین است که در انتها باید سرعت در جهت x و y را با هم جمع‌برداری کنیم تا اندازه سرعت از دید ناظر زمینی پیدا شود.



در ابتدا سرعت الکترون در راستای x را می‌یابیم؛ از آنجا که الکترون نسبت به مرجع خود در راستای x' حرکتی ندارد، لذا سرعت آن از نظر ناظر زمینی در راستای محور x برابر با سرعت اتم رادیواکتیوی است که از خود الکترون را ساطع کرده پس $u_x = V = ۰/۸c$ ولی برای یافتن مؤلفه سرعت در راستای y باید از روابط نسبیتی آن استفاده کنیم که در این صورت داریم:

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(۱-\frac{u_xV}{c^۲})}$$

۱۲ـ یک چشمه نور در آزمایشگاه، نوری با طول موج ۶۰۰ نانومتر تولید می‌کند. متحرکی با سرعت $v = 0/6c$ به سمت چشمه نور حرکت می‌کند. از دید این ناظر، طول موج نور، چند نانومتر است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

۱۳ـ ذره‌ای به جرم M و انرژی E به سه ذره مشابه با جرم‌های یکسان m و انرژی مساوی واپاشی می‌کند. تکانه هریک از ذرات محصول، چقدر است؟

۱) $\frac{E}{3c}$ ۲) $\frac{(M-3m)c}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{E^2+3m^2c^4}}{3c}$ ۴) $\frac{\sqrt{E^2-9m^2c^4}}{3c}$

۱۴ـ در آزمایشگاه، میله‌ای با محور x، زاویه ۶۰ درجه می‌سازد. یک ناظر متحرک، با چه سرعتی (نسبت به سرعت نور) و در چه راستایی حرکت کند تا میله را نسبت به محور x، تحت زاویه ۴۵ درجه مشاهده کند؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ در جهت محور x ۲) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ در جهت محور y

۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ موازی با میله ۴) هیچ ناظری نمی‌تواند میله را تحت زاویه ۴۵ درجه مشاهده کند.

۱۵ـ جسمی با جرم سکون m که با سرعت $0/8c$ حرکت می‌کند با جسم ساکنی که جرم سکون آن نیز m است، برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهد. اگر جرم سکون جسم مرکب برابر با M باشد، نسبت $\frac{M}{m}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخنامه آزمون دکتری ۱۴۰۳ ـ مجموعه فیزیک

۱ـ گزینه «۴» از مدل بوهر می‌دانیم که تکانه زاویه‌ای الکترون در مدار n ام برابر با $n\hbar$ است پس چنانچه V_n و r_n به ترتیب سرعت و شعاع الکترون در مدار n ام باشد داریم:

$$m_e V_n r_n = n\hbar$$

با نوشتن $V_n = r_n\omega_n$ و $\omega_n = 2\pi f_n$ که f_n بسامد چرخش الکترون است داریم:

$$m_e r_n^2 2\pi f_n = n\hbar$$

از طرفی در مدار n ام $r_n = n^2 a_0$ که a_0 شعاع بوهر است. پس از رابطه بالا دیده می‌شود که:

$$f_n \propto \frac{1}{n^3}$$

پس:

$$\frac{f_1}{f_2} = 8$$

۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم که در اتم هیدروژن گونه انرژی الکترون در تراز n ام به صورت مقابل داده می‌شود:

$$E_n = \frac{-\mu c^2 z^2 \alpha^2}{2n^2}$$

که z عدد اتمی، α ثابت ساختار ریز، μ جرم کاهیده و c سرعت نور است. با تعریف $\frac{\mu c^2 z^2 \alpha^2}{2} = A > 0$ داریم:

$$E_n = -\frac{A}{n^2}$$

با گذار الکترون از $n=2$ به $n=1$ داریم: (۱)

$$E_2 - E_1 = hf = 2/7\times10^{15}\, h = \frac{3A}{4}$$

از طرفی: (۲)

$$E_3 - E_1 = hf' = -\frac{A}{9} + A = \frac{8}{9}A$$

از تقسیم (۲) بر (۱) داریم:

$$\frac{f'}{2/7\times10^{15}} = \frac{32}{27} \Rightarrow f' = 3/2\times10^{15}\ (\text{Hz})$$

۳ـ گزینه «۱» چنانچه تکانه ذره‌ای p باشد، طول موج دوبروی آن به صورت مقابل داده می‌شود:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

و چون $\lambda_p = \lambda_e$ (اندیس نشان‌دهنده ذره است) داریم: (۱)

$$p_e = p_p \Rightarrow m_e u_e = m_p u_p$$

که u سرعت ذره می‌باشد.

از طرفی چنانچه ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت E به اندازه d جابه‌جا شود میدان الکتریکی روی ذره به اندازه $w = qEd = \Delta V$ کار انجام داده است و از قضیه کار و انرژی در حالت غیرنسبیتی داریم: $w = k_۲ - k_۱ = q\Delta V$

و چون $k_۱ = ۰$ پس:

$$q\Delta V = \frac{۱}{۲}mu^۲ \Rightarrow \begin{cases} eV_e = \frac{۱}{۲}m_e u_e^۲ \\ eV_p = \frac{۱}{۲}m_p u_p^۲ \end{cases}$$

و از (۱) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m_e}{m_p}\frac{u_e^۲}{u_p^۲} = \frac{V_e}{V_p} \\ \frac{m_e}{m_p} = \frac{u_p}{u_e} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_p}{V_e} = \frac{u_p}{u_e} = \frac{m_e}{m_p}$$

توجه کنید که در رابطه بالا از اینکه بار الکتریکی الکترون و پروتون یکسان استفاده شده است.

۴ـ گزینه «۴» گشتاور مغناطیسی الکترون همان مگنتون بوهر است. برای به دست آوردن آن توجه کنید که رابطه گشتاور مغناطیسی حلقه‌ای جریانی به مساحت A و جریان I به صورت مقابل داده می‌شود: $m = IA$

حال چنانچه در حلقه‌ای به شعاع r بار الکتریکی e با دوره تناوب T در حال چرخش باشد آنگاه داریم: $(I = \frac{e}{T}) \quad , \quad m = \frac{e}{T}\pi r^۲$

حال کافی است شعاع و دوره تناوب الکترون در مدار اول را در رابطه بالا جایگذاری کنیم. شعاع چرخش الکترون در مدار اول همان شعاع بوهر است و داریم: $r = a_۰$

از طرفی از مدل بوهر می‌دانیم که در مدار اول تکانه زاویه‌ای به صورت مقابل داده می‌شود: $m_e V_۱ r_۱ = \hbar \Rightarrow m_e a_۰^۲ ۲\pi f = \hbar \Rightarrow \frac{۱}{T_۱} = \frac{\hbar}{m_e a_۰^۲ ۲\pi}$

که در رابطه بالا از $r_۱ = a_۰$ و $V_۱ = r_۱ ۲\pi f_۱$ و $f_۱ = \frac{۱}{T_۱}$ استفاده کردیم و اندیس ۱ نماینده اول بودن مدار است.

پس:

$$m = \frac{\hbar e}{m_e a_۰^۲ ۲\pi}\pi a_۰^۲ = \frac{\hbar e}{۲m_e} = \frac{eh}{۴\pi m_e}$$

۵ـ گزینه «۳» الکترون و پوزیترون را ساکن فرض می‌کنیم. در این صورت از پایستگی انرژی با توجه به اینکه انرژی فوتون با طول موج λ با $E = \frac{hc}{\lambda}$ داده می‌شود داریم: $۲E_۰ = ۲\frac{hc}{\lambda}$

توجه کنید که به دلیل پایستگی تکانه باید دو فوتون داشته باشیم تا مجموع برداری تکانه آن‌ها صفر شود. پس از $c = ۳\times۱۰^۸ \frac{m}{s}$ داریم:

$$۰/۵\text{Mev} = \frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\ \text{ev.s}\times۳\times۱۰^۸\ (\frac{m}{s})}{\lambda}$$

بنابراین:

$$\lambda = \frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^۸}{۰/۵\times۱۰^۸} = ۲۴\times۱۰^{-۱۳}\ m = ۲/۴\times۱۰^{-۲}\ A^\circ$$

که در رابطه بالا از $۱\text{Mev} = ۱۰^۶\ \text{ev}$ و $۱A^\circ = ۱۰^{-۱۰}\ m$ استفاده کردیم.

۶ـ گزینه «۴» چنانچه w تابع کار فلز باشد داریم: $\frac{hc}{\lambda_۱} = k_۱ + w \quad , \quad \frac{hc}{\lambda_۲} = k_۲ + w$

از کسر دو معادله فوق از یکدیگر خواهیم داشت:

$$h(\frac{c(\lambda_۱ - \lambda_۲)}{\lambda_۱\lambda_۲}) = k_۲ - k_۱ \Rightarrow h = \frac{\lambda_۱\lambda_۲}{\lambda_۲ - \lambda_۱}\ \frac{k_۱ - k_۲}{c}$$

۷ـ گزینه «۱» انرژی یک ذره غیرنسبتی با انرژی جنبشی آن داده می‌شود و داریم: $E = \frac{p^۲}{۲m}$

که p تکانه ذره می‌باشد. برای سرعت فاز داریم: $V_p = \frac{E}{p} = \frac{p}{۲m}$

و برای سرعت گروه داریم: $V_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m}$ ، پس: $\frac{V_p}{V_g} = \frac{۱}{۲}$

توجه کنید که در اینجا صرفاً انرژی جنبشی ذره درنظر گرفته شده است و جرم سکون آن لحاظ نشده است.

۸ـ گزینه «۲» چنانچه پتانسیل قطع V باشد انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها با $k = eV$ داده می‌شود. پس $k_۱ = ۳/۲ev$ و $k_۲ = ۰/۸ev$ از طرفی چنانچه نوری با طول موج λ به فلزی با تابع کار W بتابد داریم: $\frac{hc}{\lambda} = k + W$

که k همان انرژی جنبشی فوتوالکترون‌هاست پس:

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_۱} = k_۱ + W = ۳/۲ev + W \\ \frac{hc}{۲\lambda_۱} = k_۲ + W = ۰/۸ev + W \end{cases}$$

از تقسیم دو معادله بر هم داریم: $\frac{۳/۲ + W}{۰/۸ + W} = ۲ \Rightarrow W = ۱/۶ev$

۹ـ گزینه «۳» می‌دانیم که از یک جسم سیاه با دمای T انرژی گسیل‌یافته در واحد زمان، در واحد سطح برابر با $\sigma T^۴$ است که σ ثابت استفان ـ بولتزمن می‌باشد. پس انرژی گسیل‌یافته کل از جسم در واحد زمان برابر مقدار مقابل است: $W = \sigma T^۴ A$

که A مساحت سطح جسم می‌باشد. در اینجا $W_۱ = W_۲$ و داریم: $\sigma T_۱^۴ A_۱ = \sigma T_۲^۴ A_۲ \ , \ A_۱ = ۴\pi R_۱^۲ \ , \ A_۲ = ۴\pi R_۲^۲$

پس خواهیم داشت: $(\frac{R_۱}{R_۲})^۲ = \frac{T_۲^۴}{T_۱^۴} \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{T_۲^۲}{T_۱^۲} = ۴$

۱۰ـ گزینه «۱» مطابق قانون جابجایی وین داریم: $\lambda_{peak} = \frac{b}{T}$

که b یک ثابت است. پس داریم: $\frac{\lambda_{peak,۱}}{\lambda_{peak,۲}} = \frac{T_۲}{T_۱}$

با قراردادن $T_۲ = ۴۰۰k$ و $T_۱ = ۳۰۰k$ داریم: $\frac{\lambda_{peak,۱}}{\lambda_{peak,۲}} = \frac{۴}{۳} \ , \ \lambda_{peak,۱} = ۴۰۰۰A^\circ \Rightarrow \lambda_{peak,۲} = ۳۰۰۰A^\circ$

۱۱ـ گزینه «۱» از انرژی نسبیتی یک ذره با تکانه p و جرم سکون $m_\circ$ می‌دانیم که: $E = \sqrt{m_\circ^۲c^۴ + p^۲c^۲}$

و چون $pc = \frac{۳}{۵}E$ داریم: $E^۲ = \sqrt{m_\circ^۲c^۴ + \frac{۹}{۲۵}E^۲} \Rightarrow m_\circ^۲c^۴ = \frac{۱۶}{۲۵}E^۲ \Rightarrow m_\circ = \frac{۴E}{۵c^۲}$

۱۲ـ گزینه «۳» با استفاده از اثر دوپلر نسبتی می‌دانیم که چنانچه منبعی با سرعت V نسبت به چشمه‌ای که نور با طول‌موج λ گسیل می‌کند حرکت کند طول موج دریافتی منبع به صورت مقابل خواهد بود: $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{۱ \pm \frac{V}{C}}{۱ \pm \frac{V}{C}}}$

که علامت − صورت (+ صورت) و − مخرج (+ مخرج) برای زمانی است که متحرک به چشمه نزدیک (دور) می‌شود.

در اینجا، کار $= \frac{V}{C}$ و با انتخاب علامت منفی صورت و مثبت مخرج داریم: $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{۱ - ۰/۶}{۱ + ۰/۶}} = \frac{\lambda}{۲} = ۳۰۰nm$

۱۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم که چنانچه ذره‌ای با جرم سکون m با سرعت V در حال حرکت باشد انرژی کل آن به صورت $E = \gamma mc^۲$ است که $\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱ - (\frac{v}{c})^۲}}$.

چون سه ذره، انرژی یکسان و جرم سکون یکسان دارند پس سرعت آن‌ها یکسان است و داریم: $E = \frac{۳mc^۲}{\sqrt{۱ - (\frac{v}{c})^۲}} \Rightarrow v = c\frac{\sqrt{E^۲ - ۹m^۲c^۴}}{E}$

۳۳ـ برای ذره‌ای نسبیتی به جرم m که تکانه آن برابر با mc است، نسبت انرژی جنبشی به انرژی سکون ذره، کدام است؟ (c سرعت نور است.)

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۲-\sqrt{۲}$

۳۴ـ از سفینه‌ای که با سرعت $۰/۲$ سرعت نور از زمین دور می‌شود، سیگنالی با طول‌موج λ ارسال می‌شود. طول‌موجی که ناظر زمینی دریافت می‌کند، چند برابر λ است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

۳۵ـ انرژی کل ذره‌ای که با سرعت $۰/۸$ سرعت نور حرکت می‌کند و تکانه آن $۲۰\frac{MeV}{c}$ است، چند مگاالکترون ولت است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۳۶ـ ذره‌ای که با سرعت $۰/۸$ سرعت نور حرکت می‌کند، در آزمایشگاه پس از طی مسافت ۱۰ متر واپاشی می‌کند. از دید ناظری که همراه با ذره حرکت می‌کند، طول عمر این ذره چند ثانیه است؟

۱) $۷/۵\times۱۰^{-۸}$ ۲) $۲/۵\times۱۰^{-۸}$ ۳) $۱/۷۵\times۱۰^{-۸}$ ۴) $۱/۲۵\times۱۰^{-۸}$

۳۷ـ جرم یک ذره نسبیتی با تکانه p و انرژی جنبشی K، کدام است؟

۱) $\frac{p^۲c^۲-K^۲}{۲Kc^۲}$ ۲) $\frac{p^۲c^۲+K^۲}{Kc^۲}$ ۳) $\frac{p^۲c-K^۲}{۲Kc}$ ۴) $\frac{p^۲c+K^۲}{Kc}$

۳۸ـ ناظری S' نسبت به ناظر S با سرعت $۰/۶$ سرعت نور در جهت محور x حرکت می‌کند. ذره‌ای نسبت به ناظر S' با سرعت $۰/۴$ سرعت نور در همان جهت حرکت می‌کند. سرعت این ذره نسبت به ناظر S، چه کسری از سرعت نور است؟

۱) $۰/۹۸$ ۲) $۰/۹۲$ ۳) $۰/۸۱$ ۴) $۰/۷۴$

۳۹ـ فاصله دو نقطه در آزمایشگاه، برابر با یک متر است. ناظری که با سرعت $۰/۶$ سرعت نور حرکت می‌کند، فاصله دو نقطه را چند متر کوتاه‌تر می‌بیند؟

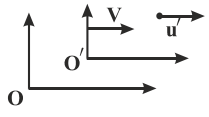
۱) $۰/۲۵$ ۲) $۰/۲۰$ ۳) $۰/۱۵$ ۴) $۰/۱۰$

۴۰ـ یک جسم سیاه در دمای $۱۲۷^\circ C$، انرژی گرمایی با شدت $۱۰^۴\frac{J}{m^۲.s}$ گسیل می‌کند. دمای این جسم سیاه چند درجه افزایش یابد تا انرژی گسیل‌یافته از آن ۱۶ برابر شود؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۴ ــ مجموعه فوتونیک و نانو فناوری ــ نانو مواد

۱ـ گزینه «۴» از رابطه نسبیتی جمع سرعت‌ها برای دو دستگاه ناظر ساکن و در حال حرکت داریم:



$$u=\frac{u'+V}{۱+\frac{u'V}{c^۲}}$$

در این رابطه u' سرعت جسم نسبت به ناظر متحرک در داخل دستگاه O' یا همان سفینه است. V سرعت ناظر متحرک یا همان سفینه نسبت به ناظر ساکن O است و u سرعت جسم متحرک نسبت به ناظر ساکن O است. پس داریم:

$$u=\frac{۰/۶c+۰/۸c}{۱+\frac{۰/۶c\times۰/۸c}{c^۲}}=\frac{۱/۴}{۱/۴۸}c=\frac{۹۴۵}{۱۰۰۰}c=\frac{۹۵}{۱۰۰}c$$

۲ـ گزینه «۲» از نظر وحید که روی زمین مانده و ناظر ساکن در نظر گرفته می‌شود، زمان رسیدن سعید (ناظر متحرک) به سیاره موردنظر برابر است با:

$$t=\frac{x}{V}$$

که در آن x فاصله زمین تا سیاره و V سرعت سعید است. پس:

$$t=\frac{۱۲\text{ سال نوری}}{۰/۶C}=\frac{۱۲\times C\times\text{سال}}{۰/۶C}=\frac{۱۲}{۰/۶}(\text{سال})=۲۰\text{ سال}$$

یعنی ۲۰ سال تا رسیدن سعید به سیاره از نظر وحید به عمرش افزوده شده است و علاوه بر این به همین ترتیب ۲۰ سال دیگر هم طول می‌کشد تا سعید از سیاره به زمین برگردد پس در مجموع مسافت فضایی سعید ۴۰ سال از نظر وحید طول کشیده است. یعنی وحید در هنگام دیدار برادرش ۶۰ ساله خواهد بود:

$$۲۰+۲۰+۲۰=۶۰$$

اما این زمان از نظر سعید با توجه به رابطه اتساع زمان باید کمتر سپری شود (یادتان باشد همواره ساعت‌های در حال حرکت کندتر حرکت می‌کنند و زمان آن‌ها به اصطلاح کش می‌آید) پس از نظر سعید این زمان ۴۰ سال به اندازه زیر سپری شده است:

$$t' = \frac{1}{5}t = \sqrt{1-(\frac{V}{C})^2}\,t = \sqrt{1-(\frac{36}{100})}\,t = 0/8\times 40 = 32 \text{ سال}$$

و چون در ابتدا هر دو ۲۰ ساله بوده‌اند پس باید در لحظه دیدار سعید ۵۲ ساله باشد (۳۲+۲۰).

نکته: گزینه (۴) قطعاً نادرست است، چون حتماً سعید باید جوان‌تر از وحید باشد، گزینه‌های (۱) و (۳) هم ایراد تایپی دارند.

۳ـ گزینه «۱» کافی است زمان سپری‌شده از نظر ناظر ساکن در آزمایشگاه را حساب کنیم، پس از رابطه اتساع زمان نسبیتی طول عمر ذره از نظر خودش را می‌یابیم (دقیقاً مثل سؤال قبل).

از نظر ناظر ساکن:
$$t = \frac{x}{V} = \frac{3m}{0/8\times 3\times 10^8 \frac{m}{s}} = \frac{10}{8}\times 10^{-8} = 1/25\times 10^{-8}\,s$$

حال از نظر ناظر متحرک داریم:
$$t' = \gamma^{-1}t = \sqrt{1-(\frac{0/8c}{c})^2}\,t = 0/6\times 1/25\times 10^{-8} = 0/75\times 10^{-8}\,s$$

۴ـ گزینه «۲» از رابطه انرژی نسبیتی داریم:
$$E = \sqrt{P^2C^2 + m_0^2C^4}$$

با توجه به رابطه تکانه نسبیتی داریم:
$$P = \gamma m_0 V \Rightarrow m_0 = \frac{P}{\gamma V}$$

بنابراین داریم:
$$E = \sqrt{P^2C^2 + \frac{P^2C^4}{\gamma^2V^2}}$$

اگر $P = 10\frac{MeV}{C^2}$ و $V = 0/8C$ باشد:
$$\gamma^2 = \frac{1}{1-0/64} = \frac{1}{0/36} = \frac{100}{36}$$
$$\Rightarrow E = \sqrt{10^2 + \frac{10^2\times 36\times 100}{100\times 64}} = 10\sqrt{1+\frac{36}{64}} = 10\sqrt{\frac{100}{64}} = 10\times\frac{10}{8} = 12/5\,MeV$$

۵ـ گزینه «۳» از رابطه انرژی و تکانه و انرژی سکون داریم:
$$E = K + E_0 = \frac{P^2}{2m_0} + m_0C^2 \Rightarrow 2m_0E = P^2 + 2m_0^2C^2$$

بنابراین اگر $\vec{P} = 10^8(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ بنابراین:
$$2\times 4/5\times 10^{17}\,m_0 = 10^{16}(1+4+4) + 2\times(3\times 10^8)^2 m_0^2$$
$$\Rightarrow 9\times 10^{17}\,m_0 = 9\times 10^{16} + 2\times(9\times 10^{16})m_0^2 \Rightarrow 10\,m_0 = 1 + 2m_0^2 \Rightarrow m_0 = 4/9 \simeq \sqrt{24}\,kg$$

۶ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه اثر دوپلر نسبیتی برای یک کهکشان دورشونده داریم:
$$\lambda_D = \lambda_0(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}) \Rightarrow 1300 = 650\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{1+\beta}{1-\beta} = 4 \Rightarrow \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow V = \frac{3}{5}C$$

۷ـ گزینه «۲» از رابطه انقباض طول نسبیتی داریم:
$$L' = \gamma^{-1}L_0 \Rightarrow 0/8 = \gamma^{-1} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = 0/8 \Rightarrow \beta^2 = 0/36 \Rightarrow \beta = \frac{V}{C} = 0/6$$

۸ـ گزینه «۱» از مبحث فوتوالکتریک می‌دانیم:
$$e\varphi_0 = \frac{hC}{\lambda} - w_0 \Rightarrow e\varphi_0 = \frac{1240\,eVnm}{400\,nm} - 2ev = 3/1 - 2 = 1/1eV \Rightarrow \varphi_0 = 1/17$$

۹ـ گزینه «۳» اگر در رابطه فوتوالکتریک پتانسیل قطع را برابر صفر قرار دهیم، طول‌موج آستانه یا بلندترین طول‌موج جهت آزاد کردن فوتوالکترون‌ها از فلز تعیین می‌شود. در اصل اثر فوتوالکتریک از این طول‌موج کوتاه‌تر رخ می‌دهد چون انرژی فوتون تابیده‌شده باید بیشتر از تابع کار آن فلز باشد.

$$e\varphi_0 = \frac{hC}{\lambda} - w_0 = 0 \Rightarrow \frac{hC}{\lambda_0} = w_0 \Rightarrow \frac{1240\,eVnm}{620\,nm} = 2eV$$

۱۰ـ گزینه «۲» بنابر قانون استفان بولتزمن توان تابشی جسم سیاه برابر است با:
$$I = \sigma T^4$$

که توان تابشی برابر است با انرژی در واحد سطح آن جسم که اگر جسم را کره‌ای کامل در نظر بگیریم داریم:
$$I = \frac{P}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{P}{4\pi R^2} = \sigma T^4$$

به عبارتی داریم: $(\frac{T_1}{T_2})^4 = (\frac{R_2}{R_1})^2(\frac{P_1}{P_2})$

طبق صورت سؤال اگر دمای سطح ستاره نصف دمای بیشینه خورشید باشد:

$$\left.\begin{matrix} T_1 = \frac{1}{2}T_2 \\ P_1 = 100P_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\frac{1}{2})^4 = (\frac{R_2}{R_1})^2(100) \Rightarrow (\frac{R_1}{R_2})^2 = 1600 \Rightarrow R_1 = 40R_2$$

۱۱ـ گزینه «۴» بنابر تعریف سرعت گروه و سرعت فاز داریم: $V_g = \frac{d\omega}{dk}$, $V_{ph} = \frac{\omega}{k}$

اگر در محیطی سرعت فاز برای همه طول‌موج‌ها و فرکانس‌ها یکسان باشد داریم: $V_{ph} = \frac{\omega}{k} = C \Rightarrow \omega = Ck$

با این فرض برای سرعت گروه خواهیم داشت: $V_g = \frac{d\omega}{dk} = C\frac{dk}{dk} = C$ و این یعنی $V_g = V_{ph} = C$.

۱۲ـ گزینه «۱» در واپاشی بتا، انرژی، تکانه زاویه‌ای و اعداد بار یونی و لپتونی حفظ می‌شوند و پایسته می‌مانند، در حالی‌که پاریته پایستگی خود را از دست می‌دهد.

$n^\circ \rightarrow P^+ + e^- + \bar{V}_e$

یک نوترون در اثر نیروی هسته‌ای ضعیف به پروتون P^+، الکترون e^- و پادنوترینو $\bar{V}_e$ تبدیل می‌شود.

۱۳ـ گزینه «۴» اگر تعداد هسته‌های یک ماده پرتوزا را در ابتدا $N_\circ$ در نظر بگیریم پس از گذشت زمان τ اگر تعداد آن‌ها نصف شود، نیمه‌عمر آن ماده برابر τ خواهد بود به این ترتیب نیمه‌عمر نیمه دیگر ذرات باقی‌مانده هم τ خواهد بود و به‌طور کلی می‌توان نوشت: $N = N_\circ(\frac{1}{2})^{\frac{t}{\tau}}$

در این سؤال $\tau = 30$ دقیقه یا (ساعت) $\tau = \frac{1}{2}$ پس با گذشت $t = 2$ داریم: $N = N_\circ(\frac{1}{2})^{\frac{2}{\frac{1}{2}}} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

۱۴ـ گزینه «۴» از رابطه طول‌موج برای پدیده کامپتون داریم: $\lambda' - \lambda_\circ = \lambda_c(1-\cos\theta)$, $\lambda_c = 2/43\,pm$

اگر $\theta = 60$ درجه باشد: $\lambda' - 2/40 = 2/43(1-\frac{1}{2}) \Rightarrow \lambda' = 2/40 + 1/22 = 3/6\,pm$

البته باید در نظر بگیرید که مقداری از انرژی پرتو ضروری منجر به تغییر تکانه الکترونی می‌شود که فرض می‌کنیم در ابتدا ساکن است، لذا اگر انرژی سکون الکترون را حدوداً $m_\circ c^2 = 0/5\,meV$ در نظر بگیریم مقدار محاسبه‌شده برای طول‌موج پراکنده‌شده در اثر کامپتون کمی متفاوت خواهد بود.

۱۵ـ گزینه «۱» طبق مدل بوهر برای انرژی اتم هیدروژن داریم:

$$E_n = -\frac{13/6eV}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow E_1 = -13/6eV \\ n=3 \Rightarrow E_3 = \frac{-13/6}{9} = -1/5eV \end{cases} \Rightarrow n_3 - n_1 = -1/5 + 13/6 = 12/1eV$$

۱۶ـ گزینه «۴» از رابطه طول‌موج دوبروی داریم: $\lambda = \frac{h}{P} = \frac{hc}{Pc}$

چون انرژی الکترون در مقایسه با انرژی سکون خیلی کمتر است پس این الکترون غیرنسبیتی است و داریم: $K = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mK}$

برای این الکترون می‌دانیم که: $K = 10eV$ و $E_\circ = mc^2 = 0/5MeV$ پس داریم:

$$\lambda = \frac{hc}{c\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} = \frac{1240eVnm}{\sqrt{2\times 0/5MeV\times 10eV}} = \frac{1240eVnm}{\sqrt{10\times 10^6\,eV^2}} \Rightarrow \lambda = \frac{1/24}{\sqrt{10}}nm \simeq 0/39nm$$

۱۷ـ گزینه «۳» از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در اندازه‌گیری همزمان انرژی و زمان داریم: $\Delta E\Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{h}{2\pi\Delta t}$

اگر فرض کنیم $\Delta t \sim t = 10^{-8}\,s$ پس: $\Delta E \simeq \frac{4/14\times 10^{-15}\,eV.s}{2\times 3/14\times 10^{-8}\,s} = 6/6\times 10^{-8}\,eV$

۱۳ـ دو موشک که طول ویژه هریک از آن‌ها ۱۰۰ متر است به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت هریک از آن‌ها نسبت به ناظر زمینی ۰/۸ سرعت نور است. طول هر موشک از دید موشک دیگر چند متر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۴۴ ۳) ۶۶ ۴) ۸۸

۱۴ـ نسبت کوتاه‌ترین طول موج رشته بالمر ($n_{low}=2$) به بلندترین طول مو رشته لیمان ($n_{low}=1$) چقدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۴

۱۵ـ پنج ذره به جرم m و اسپین $\frac{1}{2}$ در یک چاه نامتناهی به پهنای L محبوس‌اند. انرژی حالت پایه این سیستم چند برابر $\frac{h^2}{8mL^2}$ است؟ (h ثابت پلانک است.)

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۵

پاسخنامه آزمون دکتری ۱۴۰۵ ـ مجموعه فیزیک

۱ـ گزینه «۴» شدت باریکه وقتی نصف می‌شود که نیمی از نوترون‌ها واپاشی کنند، لذا پس از گذشت یک نیمه‌عمر، مقدار آنها نصف می‌شود که این زمان ۱۳ دقیقه است. برای یافتن مسافت طی‌شده ابتدا سرعت باریکه را به‌دست می‌آوریم، چون انرژی باریکه $2eV$ است، محاسبات غیرنسبیتی به‌کار می‌بریم:

$$K=\frac{1}{2}mv_n^2=2eV=2\times1/6\times10^{-19}\ J \Rightarrow \frac{1}{2}1/6\times10^{-27}\ v^2=2\times1/6\times10^{-19}\ j$$

$$\Rightarrow v^2=4\times10^8 \Rightarrow v=2\times10^4\ \frac{m}{s} \Rightarrow x=vt=2\times10^4\times13\times60=1560\times10^4 \text{ متر} \Rightarrow x=1/56\times10^4\ km$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا از طریق رابطهٔ کامپتون انرژی پرتو بازگشتی را تعیین می‌کنیم:

$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_ec}(1-\cos\theta)$$

در اینجا $\theta=180^\circ$ و $m_ec^2=0/5MeV$ است، پس با توجه به رابطهٔ انرژی و طول موج داریم:

$$E=\frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=\frac{1}{m_ec^2}(1-\cos\theta)$$

انرژی پرتو فرودی E برابر با $0/25MeV$ است، پس داریم:

$$E'=\frac{1}{2}(0/25)MeV$$

انرژی پرتو بازگشتی در زاویه ۱۸۰ درجه از هدف الکترون است.

طبق بقای انرژی داریم: انرژی پس از برخورد = انرژی قبل از برخورد

$$\Rightarrow E+E_0=E'+E'_e$$

که در آن E'_e انرژی الکترون پس زده شده بعد از برخورد است. از آنجایی که این انرژی در محدودهٔ نسبیتی قرار دارد، برای تعیین آن از روابط نسبیتی بهره می‌بریم:

$$E'_e=\gamma E_0\ ,\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow E-E'=-E_0+\gamma E_0=(\gamma-1)E_0$$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$0/25-\frac{0/25}{2}=(\gamma-1)0/5 \Rightarrow \frac{0/25}{2}=(\gamma-1)0/5$$

$$\Rightarrow \gamma-1=0/25 \Rightarrow \gamma=1/25 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=1/25 \Rightarrow \boxed{v=0/6c}$$

۳ـ گزینه «۱» با توجه به رابطهٔ براگ برای بلورها داریم:

$$n\lambda=2d\sin\theta \xrightarrow[\theta=30^\circ]{n=1} \lambda=d \Rightarrow d=0/25nm$$

۴ـ گزینه «۱» برای یافتن محتمل‌ترین حالت، کافی است مشتق توزیع چگالی احتمال را در مختصات کروی برابر صفر قرار دهیم، بنابراین داریم:

$$\text{چگالی احتمالی شعاعی در مختصات کروی} = P(r) = r^{۲}[R_{nL}]^{۲}$$

که در آن R_{nL} توابع وابسته شعاعی اتم هیدروژن پس از حل معادلهٔ شرودینگر است.

طبق صورت سؤال R_{nL} برابر است با:

$$R_{nL} = \frac{r}{a}e^{-\frac{r}{۲a}} \Rightarrow P(r) = r^{۲}\left[\frac{r^{۲}}{a^{۲}}\ e^{-\frac{۲r}{۲a}}\right] = \frac{r^{۴}}{a^{۲}}e^{-\frac{r}{a}}$$

حال مشتق عبارت فوق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا محتمل‌ترین شعاع به‌دست آید.

$$\frac{dP(r)}{dr} = ۰ \Rightarrow \frac{۴r^{۳}}{a^{۲}}e^{-\frac{r}{a}} - \frac{۱}{a}e^{-\frac{r}{a}}\frac{r^{۴}}{a^{۲}} = ۰ \Rightarrow (\frac{۴r^{۳}}{a^{۲}} - \frac{r^{۴}}{a^{۳}})e^{-\frac{r}{a}} = ۰$$

که در $r \to \infty$ و $r = ۴a$ برابر صفر خواهد شد. بنابراین محتمل‌ترین حالت در $r = ۴a$ رخ می‌دهد.

۵ـ گزینه «۴» ابتدا نماد اسپکتروسکوپی را برای اتم کربن در حالت پایه می‌نویسیم.

$$_{۶}C = ۱S^{۲}\ \ ۲S^{۲}\ \ ۲P^{۴}$$

$$\boxed{۱\downarrow}\ \ \boxed{۱\downarrow}\ \ \boxed{۱\downarrow}\boxed{۱}\boxed{۱}$$

جمع اسپین دو الکترون آخر در اوربیتال P برابر است با:

$$S = s_{۱} + s_{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

در اوربیتال P می‌دانیم که عدد کوانتومی معادل با آن برای تکانهٔ زاویه‌ای L برابر با ۱ است، پس اگر $J = |L + S|$ بیانگر تکانهٔ زاویه‌ای کل باشد می‌توان بازهٔ تغییرات J را طبق تعاریف کوانتومی به‌طور زیر نوشت:

$$J = \{L + S, L + S - ۱, \dots, L - S\}$$

و این یعنی J می‌تواند مقادیر مقابل را اختیار کند:

$$J = \{۲, ۱, ۰\}$$

و نماد اسپکتروسکوپی اتم کربن در حالت پایه برابر است با:

$$^{۲s+۱}L_J\ :\ ^{۳}P_{۲}$$

۶ـ گزینه «۲» طول موج فوتون برابر است با:

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{E} = \frac{۱۲۴۰\,eVnm}{۱eV} = ۱۲۴۰\,nm$$

برای الکترونی با انرژی $۱eV$ به همین روش اقدام می‌کنیم و از آنجایی که این الکترون غیرنسبیتی است، داریم:

$$K = \frac{P_e^{۲}}{۲m} \Rightarrow P_e = \sqrt{۲mk} \Rightarrow P_e c = \sqrt{۲mc^{۲}k} = \sqrt{۲\times ۰/۵ meV^{۲}}$$

$$P_e c = ۱۰^{۳}\ eV \Rightarrow \lambda_e = \frac{hc}{P_e c} = \frac{۱۲۴۰\,eVnm}{۱۰^{۳}} = ۱۲۴۰\times ۱۰^{-۳}\ nm$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = ۱۰^{-۳}$$

۷ـ گزینه «۲» با رابطهٔ انرژی پلانک داریم:

$$E = nh\nu \Rightarrow ۲۶۵۲۰ = ۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}\times ۴\times ۱۰^{۶}\times n \Rightarrow n = ۱۰^{۳۱}$$

۸ـ گزینه «۳» اگر به‌ازای ۱۰ سال مقدار مواد رادیواکتیو نصف شود، پس بعد از گذشت ۴۰ سال مقدار آن باید $\frac{۱}{۲^{۴}}$ یعنی $\frac{۱}{۱۶}$ شود.

۹ـ گزینه «۲» انرژی کل هر ذرهٔ نسبیتی برابر است با:

$$E^{۲} = P^{۲}c^{۲} + E_{۰}^{۲}$$

از طرفی تکانهٔ نسبیتی برابر است با:

$$P = \gamma m_{۰} v$$

طرفین رابطه دوم را در $c^{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$Pc^{۲} = \gamma m_{۰} c^{۲} v$$

اگر $E_{۰} = m_{۰}c^{۲}$ باشد، داریم:

$$Pc^{۲} = \gamma E_{۰} v \Rightarrow E_{۰} = \frac{Pc^{۲}}{\gamma v}$$

حال از رابطهٔ اول داریم: $E^۲ = P^۲c^۲ + (\frac{Pc^۲}{\gamma v})^۲ = P^۲c^۲(۱ + \frac{c^۲}{\gamma^۲ v^۲})$

و داریم: $P = ۱۰ \frac{MeV}{c}$ و $v = \frac{۲}{۵}c$ پس خواهیم داشت: $E^۲ = ۱۰۰(۱ + \frac{c^۲}{\frac{۴}{۲۵}c^۲} \frac{۱}{\gamma^۲}) = ۱۰۰(۱ + \frac{۲۵}{۴} \frac{۱}{\gamma^۲})$

در نتیجه می‌دانیم $\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱ - (\frac{v}{c})^۲}}$ پس: $\gamma^۲ = \frac{۱}{۱ - \frac{۴}{۲۵}} = \frac{۱}{\frac{۲۱}{۲۵}} = \frac{۲۵}{۲۱}$

و در نهایت داریم: $E^۲ = ۱۰۰(۱ + \frac{۲۵}{۴} \times \frac{۲۱}{۲۵}) = ۱۰۰(۱ + \frac{۲۱}{۴}) = ۱۰۰(۱ + ۵/۲۵) = ۶۲۵ \Rightarrow E = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵MeV$

۱۰ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطهٔ انقباض طول نسبیتی برای یک وجه از مکعب به ضلع $L_۰$ داریم:

$L' = \gamma^{-۱} L_۰ = \sqrt{۱ - ۰/۸^۲}\, L_۰ = ۰/۶ L_۰ \Rightarrow V' = ۰/۶ V_۰$

اگر چگالی را به‌صورت $\rho = \frac{M}{V}$ تعریف کنیم، خواهیم داشت: $\frac{\rho'}{\rho_۰} = \frac{V_۰}{V'} \Rightarrow \rho' = \frac{\rho_۰}{۰/۶} = ۱۵۰۰ \times \frac{۱۰}{۶} = ۲۵۰۰ \frac{kg}{m^۳}$

۱۱ـ گزینه «۱» از رابطهٔ سرعت نسبیتی از دید دو ناظر S و S' در راستای x داریم: $u'_x = \frac{u_x - v}{۱ - \frac{u_x v}{c^۲}} = ۰$

از آنجایی که در صورت سؤال بیان شده سرعت فقط در راستای y است، یعنی u'_x باید صفر باشد. پس داریم: $v = u_x = \frac{c}{۲}$

حال سرعت در راستای y از دید ناظر S' برابر است با: $u'_y = \frac{u_y}{\gamma(۱ - \frac{u_x v}{c^۲})} \Rightarrow u'_y = \frac{\frac{c}{۲}}{\gamma(۱ - \frac{۱}{۴})} = \frac{۴c}{۶\gamma}$

می‌دانیم: $\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

پس خواهیم داشت: $u'_y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}c$

۱۲ـ گزینه «۳» طبق رابطهٔ مکانی از دید ناظر S' با توجه به تبدیلات لورنتس داریم: $\Delta X' = \gamma(\Delta X - v\Delta t)$

نکتهٔ سؤال در اینجاست که در صورت سؤال گفته شده است: اختلاف زمانی دو رویداد در یک نقطه در چارچوب S برابر ۶ میکروثانیه است، منظور از یک نقطه یعنی در یک مکان و این یعنی $\Delta X = ۰$ باید باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta X = ۰ \\ \Delta t = ۶\mu s \\ \Delta X' = ۲۴۰۰m \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۴۰۰ = |\gamma(۰ - (۶\mu s)v|$$

بنابراین داریم: $\frac{۲۴۰۰}{۶} \times ۱۰^{+۶} = \frac{v}{\sqrt{۱ - (\frac{v}{c})^۲}} = ۴ \times ۱۰^۸ (\frac{m}{s})$

طرفین رابطه را بر $c = ۳ \times ۱۰^۸ \frac{m}{s}$ تقسیم می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\frac{۴}{۳} = \frac{(\frac{v}{c})}{\sqrt{۱ - (\frac{v}{c})^۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{\beta}{\sqrt{۱ - \beta^۲}} \Rightarrow ۴\sqrt{۱ - \beta^۲} = ۳\beta \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}\beta^۲ = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{۴}{۵} \quad و \quad v = \frac{۴}{۵}c = ۰/۸$$
