فصل اول

« معادلات تعادل »

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: سه بردار $\vec{V}_1 = \vec{3i} - \vec{k}$ ، $\vec{V}_2 = -\vec{2j} + \vec{k}$ و $\vec{V}_3 = -\vec{3i} + \vec{2j}$ را در نظر بگیرید. حاصل $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3)$ کدام است؟

۱) 0
۲) $\vec{k}$
۳) $\vec{6i} - \vec{4j}$
۴) $\vec{6i} - \vec{4j} + \vec{2k}$

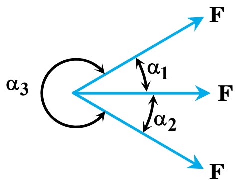
پاسخ: گزینه «۳» جمع و تفریق بردارهای V_1 ، V_2 و V_3 به صورت زیر و با جمع و تفریق مؤلفه‌های نظیر انجام می‌گردد:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (\vec{3i} - \vec{k}) + (-\vec{2j} + \vec{k}) - (-\vec{3i} + \vec{2j}) = \vec{6i} - \vec{4j}$$

در صورتی که اندازه بردار نتیجه خواسته شود، به صورت روبرو عمل می‌شود:

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$$

مثال ۲: شرط آنکه برآیند سه نیروی نشان داده شده در شکل صفر باشد، آن است که؟

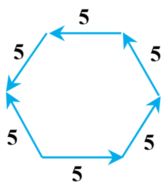


۱) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
۲) $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$
۳) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$
۴) $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» سه نیرو هم‌اندازه‌اند، بنابراین در صورتی برآیند آنها صفر خواهد شد که شکل برداری آن‌ها تقارن کامل داشته باشد، یعنی:

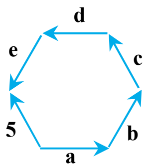
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$$

مثال ۳: در کثیرالاضلاع نیروهای شکل، اندازه بردار برآیند کدام است؟

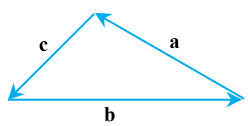


۱) ۳۰
۲) ۵
۳) صفر
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۲» مطابق شکل، برآیند ۵ بردار متوالی d, c, b, a و e به روش مثلث بردار ۵ خواهد بود. دقت شود که جهت بردار ۵ با جهت دیگر بردارها متفاوت است.



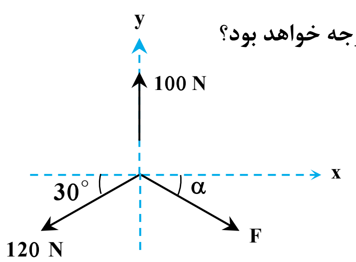
مثال ۴: کدام یک از روابط زیر در شکل روبرو صادق است؟



۱) $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$
۲) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$
۳) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
۴) $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به جهت دنبال هم بردارها داریم: $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

مثال۵: اگر برآیند نیروهای نشان داده شده در شکل $140\,N$ و در جهت محور x^+ باشد، زاویه α چند درجه خواهد بود؟



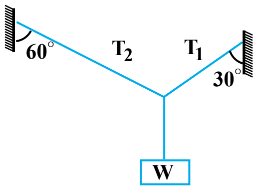
۱) 7°
۲) $9/3^\circ$
۳) $12/1^\circ$
۴) $8/2^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق فرض مسأله، برآیند فقط در جهت محور x ها قرار می‌گیرد، بنابراین باید برآیند مؤلفه‌ها در جهت محور y ها صفر باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۱۲۰\sin ۳۰^\circ - F\sin\alpha = ۰ \\ \sum F_x = ۱۴۰ \Rightarrow F\cos\alpha - ۱۲۰\cos ۳۰^\circ = ۱۴۰ \end{cases}$$

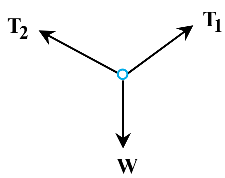
از حل همزمان دو رابطه فوق و حذف نیروی F نتیجه می‌شود: $\tan\alpha = ۰/۱۶۳ \Rightarrow \alpha = ۹/۳^\circ$

مثال ۶: کدام‌یک از سه ضلعی‌های زیر نمایش‌دهنده نیروهای سیستم زیر می‌باشند؟



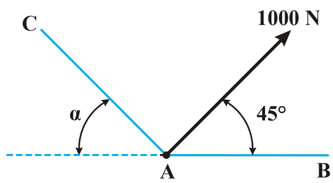
(۴) (۳) (۲) (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد نقطه اتصال کابل‌ها به وزنه داریم:



بدیهی است که چون سیستم در حال تعادل است باید برآیند دو نیرو، هم امتداد و مساوی نیروی سوم باشد. اگر به زاویه اثر کشش‌های کابل دقت شود، ملاحظه می‌شود که فقط گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۷: نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد AB و AC تجزیه می‌کنیم. اگر مؤلفه در امتداد AB برابر ۷۰۰ نیوتن باشد مؤلفه امتداد AC کدام است؟



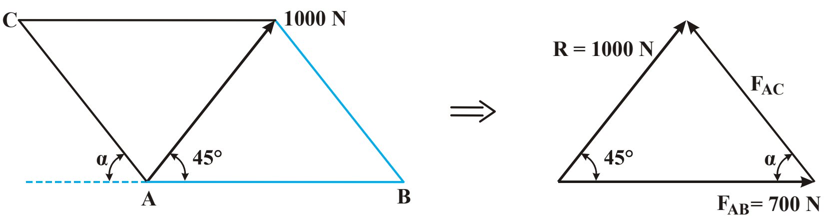
۱) $F_{AC} = ۷۰۷/۱۴$

۲) $F_{AC} = ۸۲۱/۲$

۳) $F_{AC} = ۸۳۳$

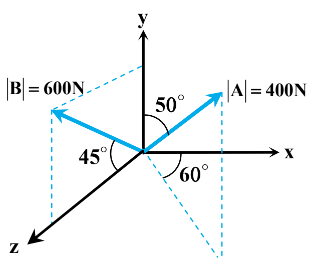
۴) $F_{AC} = ۵۰۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تجزیه نیروی $۱۰۰۰\,N$ به دو مؤلفه AB و AC می‌توان نتیجه گرفت که نیروی $۱۰۰۰\,N$ برآیند دو نیروی AB و AC می‌باشد.



با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم: $F_{AC}^۲ = ۱۰۰۰^۲ + ۷۰۰^۲ - ۲(۷۰۰)(۱۰۰۰)\cos ۴۵^\circ \Rightarrow F_{AC} = ۷۰۷/۱۴N$

مثال ۸: مقدار و زاویه با محور y بردار برآیند دو نیروی ۴۰۰ و ۶۰۰ نیوتنی کدام است؟



۱) $\theta_y = ۴۶^\circ$, ۹۸۱/۵

۲) $\theta_y = ۵۱^\circ$, ۹۱۲/۳

۳) $\theta_y = ۳۶^\circ$, ۹۷۳/۱

۴) $\theta_y = ۳۸^\circ$, ۹۱۵/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروها در یک شکل سه بعدی رسم شده‌اند، بهتر است آنها را به‌صورت برداری نمایش دهیم، با توضیح این نکته که بردار ۴۰۰ نیوتنی (A) در فضا و بردار ۶۰۰ نیوتنی (B) فقط در صفحه yz مؤلفه دارند.

$$\vec{A}=(۴۰۰\sin ۵۰^\circ \cos ۶۰^\circ)\vec{i}+(۴۰۰\cos ۵۰^\circ)\vec{j}+(۴۰۰\sin ۵۰^\circ \sin ۶۰^\circ)\vec{k}=۱۵۳/۲\vec{i}+۲۵۷/۲\vec{j}+۲۶۵/۳۶\vec{k}$$

$$\vec{B}=(۶۰۰\sin ۴۵^\circ)\vec{j}+(۶۰۰\cos ۴۵^\circ)k=۴۲۴/۲۶\vec{j}+۴۲۴/۲۶\vec{k}$$

برای محاسبه برآیند، مؤلفه‌های نظیر با یکدیگر جمع جبری می‌شوند، بنابراین:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}=۱۵۳/۲\vec{i}+۶۸۱/۳۸\vec{j}+۶۸۹/۶۲\vec{k} \quad |\vec{R}|=\sqrt{(۱۵۳/۲)^۲+(۶۸۱/۳۸)^۲+(۶۸۹/۶۲)^۲}=۹۸۱/۵$$

طبق تعریف کسینوس‌های هادی داریم: $\cos\theta_y=\frac{R_y}{|\vec{R}|}=\frac{۶۸۱/۳۸}{۹۸۱/۵}=۰/۶۹۴ \Rightarrow \theta_y=۴۶^\circ$ (کسینوس هادی نسبت به محور y ها)

مثال۹: بردار $\vec{L}=۲\vec{i}-۳\vec{j}+۶\vec{k}$ داده شده است، بردار یکه آن در جهت $\vec{L}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}(۲\vec{i}-۳\vec{j}+۶\vec{k})$

۲) $\frac{۲}{۷}\vec{i}+\frac{۳}{۵}\vec{j}+\frac{۶}{۷}\vec{k}$

۳) $\frac{۱}{۷}(\vec{i}+۳\vec{j}+۶\vec{k})$

۴) $\frac{۲}{۵}\vec{i}-\frac{۳}{۵}\vec{j}+\frac{۶}{۷}\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم بردار یکه در جهت $\vec{L}$، $\vec{\ell}=\frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$ است، بنابراین:

$$|\vec{L}|^۲=(L_x)^۲+(L_y)^۲+(L_z)^۲=(۲)^۲+(-۳)^۲+(۶)^۲=۴۹ \Rightarrow |\vec{L}|=۷$$

در نتیجه بردار یکه $\vec{L}$ برابر است با:

$$\vec{\ell}=\frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}=\frac{۲\vec{i}-۳\vec{j}+۶\vec{k}}{۷}=\frac{۲}{۷}\vec{i}-\frac{۳}{۷}\vec{j}+\frac{۶}{۷}\vec{k}$$

مثال۱۰: کدام رابطه زیر صحیح است؟

۱) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{0}$

۲) $(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{k}=۰$

۳) $(\vec{i}\times\vec{j}).(\vec{j}\times\vec{i})=۰$

۴) $\vec{j}.(\vec{i}\times\vec{j})=۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یکی از ویژگی‌های ضرب مختلط بردارها، جابه‌جایی موقعیت محل بردارها در ضرب به جلو، بدون تغییر در موقعیت و محل ضرب داخلی و خارجی می‌باشد، با توجه به این توضیح داریم: $\vec{j}.(\vec{i}\times\vec{j})=-\vec{j}.(\vec{j}\times\vec{i})=-i.(\underbrace{\vec{j}\times\vec{j}}_{۰})=۰$

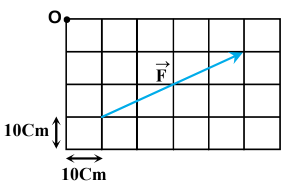
توجه کنید که ضرب خارجی دو بردار یکسان همواره صفر است.

به روش دیگری نیز می‌توان درستی گزینه چهارم را نشان داد:

$$\begin{cases}\vec{j}.(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}) \\ \vec{j}.\vec{k}=۰\end{cases}$$

زیرا همانطور که قبلاً گفته شد ضرب داخلی دو بردار عمود (j و k) همواره صفر است.

مثال۱۱: گشتاور نیروی $\vec{F}=۱۰۰\sqrt{۵}\,N$ نسبت به نقطه O در شکل زیر چند نیوتن متر است؟



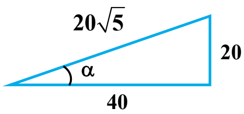
۱) $۱۰۰\sqrt{۲}$

۲) ۷۰

۳) $۷۰\sqrt{۳}$

۴) ۱۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به نحوه استقرار نیرو در صفحه مشبک، آن را به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم. لذا:

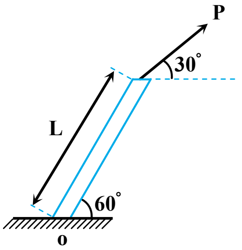


$$\begin{cases}\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j} \\ F_x=F.\cos\alpha=۱۰۰\sqrt{۵}\times\frac{۴۰}{۲۰\sqrt{۵}}=۲۰۰ \\ F_y=F.\sin\alpha=۱۰۰\sqrt{۵}\times\frac{۲۰}{۲۰\sqrt{۵}}=۱۰۰\end{cases}$$

بنابراین گشتاور نیروی مذکور برابر است با:

$$\begin{cases}M_{۱o}=F_x\times ۰/۳ \\ M_{۲o}=F_y\times ۰/۱\end{cases} \Rightarrow M_o=M_{۱o}+M_{۲o}=(۲۰۰\times ۰/۳)+(۱۰۰\times ۰/۱)=۷۰\ N.m$$

مثال ۱۲: گشتاور نیروی P نسبت به پای میله (O) کدام است؟



۱) PL

۲) ۰/۵ PL

۳) ۰/۷۵ PL

۴) ۰/۸۶۶PL

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مطابق با قضیه وارینیون نیروی P به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌شود و گشتاور هر دو مؤلفه، نسبت به O محاسبه شده و با یکدیگر جمع جبری می‌شوند. آنچه مهم است فاصله عمودی هر یک از مؤلفه‌های نیرو می‌باشد که از تجزیه طول L به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$M_O = (P.\cos ۳۰^\circ \times L.\sin ۶۰^\circ) - (P.\sin ۳۰^\circ \times L.\cos ۶۰^\circ) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲}P.\frac{\sqrt{۳}}{۲}L) - (\frac{P}{۲}.\frac{L}{۲}) = ۰/۵PL$$

مثال ۱۳: نیروی $\vec{F} = ۱۰\vec{i} - ۱۵\vec{j}$ به نقطه $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$ وارد می‌شود. گشتاور آن حول نقطه $B\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix}$ چقدر است؟

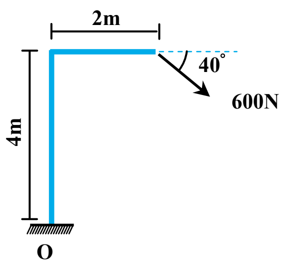
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق تعریف گشتاور در فضا داریم:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B} = (۱-۲)\vec{i} + (۱-۱)\vec{j} = -\vec{i} \quad ; \quad \vec{M} = (-۱\vec{i}) \times (۱۰\vec{i} - ۱۵\vec{j}) = ۱۵\vec{k}$$

مثال ۱۴: گشتاور نیروی ۶۰۰ نیوتنی نسبت به نقطه O کدام‌است؟

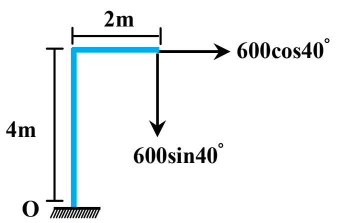


۱) ۲۴۰۰N.m

۲) ۱۲۰۰۰ N.m

۳) ۲۶۱۰ N.m

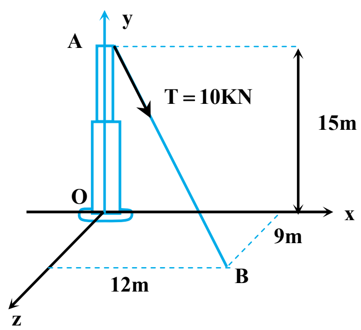
۴) ۱۸۴۰ N.m



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آن‌جایی که نیروی وارد شده به جسم مایل است، برای حل مسأله از قضیه وارینیون استفاده می‌شود. بنابراین باید نیرو را به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه کرده، سپس گشتاور هر دو مؤلفه به صورت جداگانه نسبت به نقطه مورد نظر محاسبه شده و جمع جبری آن دو به دست آید:

$$M_O = (۶۰۰\sin ۴۰^\circ \times ۲) + (۶۰۰\cos ۴۰^\circ \times ۴)$$
$$= ۷۷۱/۳۵ + ۱۸۳۸/۵ = ۲۶۰۹/۸ \simeq ۲۶۱۰ N.m$$

مثال ۱۵: نیروی کششی T با اندازه ۱۰KN به کابلی که متصل به سر A از یک میله پرچم صلب است، وارد می‌شود. اندازه گشتاور نیروی T حول محور Z ها چند kN.m است؟



۱) ۴۲/۴

۲) ۵۶/۶

۳) ۷۰/۷

۴) ۸۴/۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مشاهده می‌شود که شکل مسأله و بردارهای فاصله و نیرو به صورت سه بعدی طرح شده است، پس از رابطه سه بعدی محاسبه گشتاور (ضرب خارجی فاصله در نیرو) استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۹^۲+۱۵^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۴۵۰}=۲۱/۲\text{m}$$

بردار فاصله عبارت است از:

$$\vec{R}=۱۵\vec{j}$$

اندازه بردار کشش برابر است با:

$$T=|\vec{T}|\times\vec{t}\ \Rightarrow \vec{T}=۱۰\left(\frac{۱۲}{۲۱/۲}\vec{i}-\frac{۱۵}{۲۱/۲}\vec{j}+\frac{۹}{۲۱/۲}\vec{k}\right)=۱۰(۰/۵۶۶\vec{i}-۰/۷۰۷\vec{j}+۰/۴۲۴\vec{k})$$

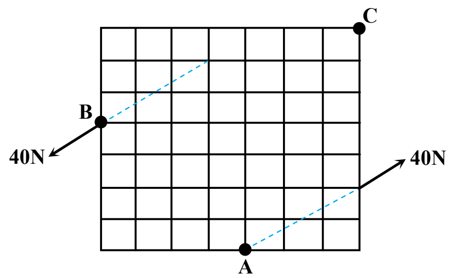
گشتاور نیروی T (حول محور z) نسبت به نقطه O برابر است با:

$$\overrightarrow{M_O}=\vec{R}\times\vec{T}=۱۵\vec{j}\times۱۰(۰/۵۶۶\vec{i}-۰/۷۰۷\vec{j}+۰/۴۲۴\vec{k})=۱۵۰\vec{j}\times(-۰/۵۶۶\vec{i}+۰/۴۲۴\vec{k})$$

در نتیجه مؤلفه گشتاور در امتداد محور zها برابر است با:

$$M_Z=۱۵۰\times-۰/۵۶۶=-۸۴/۹\text{KN.m}$$

مثال ۱۶: وضعیت گشتاور در نقاط A، B و C چگونه است؟



۱) در نقطه C بیشتر

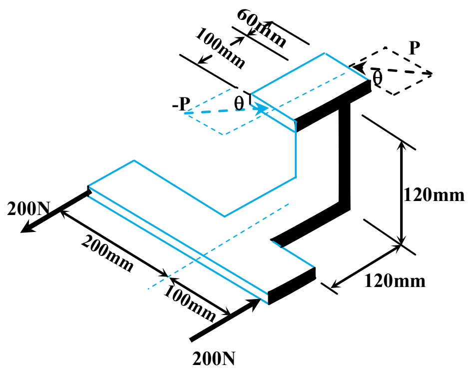
۲) در نقطه B بیشتر

۳) در نقطه A بیشتر

۴) برابر و ثابت

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که ملاحظه می‌شود دو نیروی ۴۰ N به شکل اعمال می‌شوند که تشکیل یک جفت نیرو را می‌دهند (این دو نیرو برابر، خلاف جهت هم و موازی هستند)، لذا اندازه گشتاور حاصل از آن دو، نسبت به تمام نقاط صفحه از جمله نقاط A، B و C برابر و یکسان می‌باشد.

مثال ۱۷: جفت نیروی ۲۰۰ نیوتنی را با جفت نیروی P و −P (P = ۵۰۰N) جایگزین می‌کنیم، در این صورت زاویه θ کدام است؟

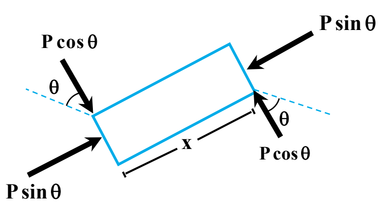


۱) $۴۸/۶^\circ$

۲) $۴۱/۴^\circ$

۳) $۲۴/۳^\circ$

۴) $۲۰/۷^\circ$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نیروی P به مؤلفه‌های افقی $(P\sin\theta)$ و عمودی $(P\cos\theta)$ تجزیه می‌شود.

مؤلفه‌های افقی در راستای یکدیگرند بنابراین گشتاوری ایجاد نمی‌کنند.

از طرفی مؤلفه‌های عمودی، یک جفت نیرو (با فاصله عمودی برابر x) می‌سازند که مقدار گشتاور آنها برابر است با:

$$M=(P\cos\theta).x$$

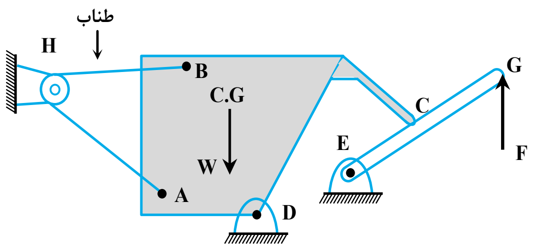
هم‌چنین گشتاور کوپل حاصل از نیروهای ۲۰۰ نیوتنی به این صورت به دست می‌آیند:

$$M=F.d=۲۰۰(۰/۳)=۶۰\text{ N.m}$$

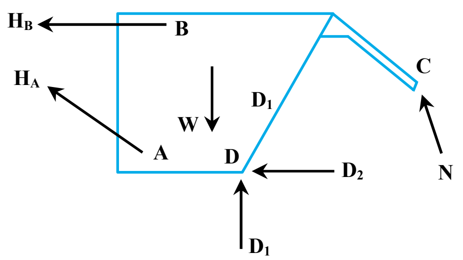
از طرف دیگر، این گشتاور برابر گشتاور حاصل از کوپل نیروهای ۵۰۰ نیوتنی است لذا:

$$۶۰=۵۰۰\cos\theta\times(۰/۱۶)\ \Rightarrow \theta=۴۱/۴^\circ$$

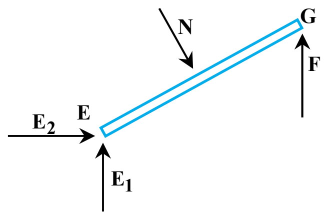
مثال ۱۸: دیاگرام آزاد ورقه ABCD و میله EG و قرقره H را رسم کنید. (اصطکاک در سطح اتصال C صفر است)



پاسخ: برای این که بتوانیم دیاگرام جسم آزاد ورقه ABCD را رسم کنیم، باید نیروهای وارد بر آن را در نظر بگیریم. این نیروها عبارتند از: نیروی وزن W، نیروی کابل‌های HB و HA و نیروی تکیه‌گاه‌های C و D. همان‌طور که در شکل می‌بینید نیرویی که از طرف کابل HB به ورقه وارد می‌شود نیروی کشش HB و نیرویی که از طرف کابل HA به ورقه وارد می‌شود و در جهت A می‌باشد، نیروی کشش HA می‌نامیم. توجه داشته باشید که چون نیروی اصطکاک در سطح اتصال C صفر است، نیرویی که بر تکیه‌گاه C وارد می‌شود در جهت عمود بر سطح خواهد بود.

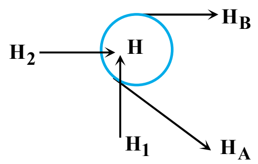


تکیه‌گاه D مانع از حرکت ورقه در همه جهات می‌شود. با توجه به فرض دو بعدی بودن مسأله، می‌توان از مؤلفه نیروی تکیه‌گاهی در جهت عمود بر صفحه صرف‌نظر کرد و درنتیجه نیروهای عکس‌العملی تکیه‌گاه D را به صورت D_1 و D_2 نمایش داد. لازم به ذکر است که در رسم دیاگرام جسم آزاد گاهی اوقات نمی‌توان جهت نیروهای تکیه‌گاهی را پیش‌بینی کرد، لذا یک جهت دلخواه برای آن‌ها در نظر گرفته می‌شود (معمولاً در جهت مثبت محورها). جهت واقعی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی پس از حل معادلات تعادل تعیین خواهد شد.

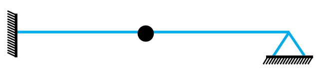


حال دیاگرام جسم آزاد میله EG را رسم می‌کنیم. از طرف ورقه عکس‌العمل نیروی N به میله EG وارد می‌شود. چون تکیه‌گاه E مانع حرکت میله در تمام جهات می‌شود، نیروی عکس العمل آن به صورت E_1 و E_2 در نظر گرفته می‌شود.

به طریق مشابه دیاگرام جسم آزاد قرقرهٔ H نیز به صورت زیر خواهد بود:



مثال ۱۹: درجه نامعینی تیر مقابل، کدام است؟



۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف برای مشخص شدن معینی یا نامعینی مسأله داریم:

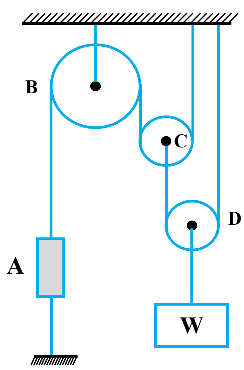
(تعداد روابط تعادل) ـ (تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی)

لذا:

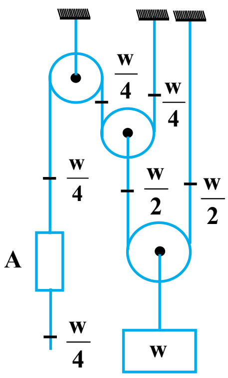
$$\underbrace{(۳+۲+۲)}_{\text{تعداد مجهولات تکیه‌گاهی}}-\underbrace{(۳\times۲)}_{\text{تعداد روابط تعادل}}=۱\Rightarrow$$ سیستم ۱ درجه نامعین است

نکته مهم این که، لولا (مفصل) با شکل نمایش داده شده در مسأله فوق باعث می‌شود سیستم دو قطعه به حساب بیاید.

مثال ۲۰: شعاع قرقره B دو برابر شعاع قرقره‌های C و D می‌باشد، با صرف نظر کردن از نیروی اصطکاک بین کابل‌ها و قرقره‌ها، نیروسنج A برحسب W چه عددی را نشان می‌دهد؟



۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۱
۴) ۱/۲۵



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که اصطکاکی بین قرقره‌ها و کابل‌ها وجود ندارد، شعاع قرقره‌ها در محاسبات وارد نمی‌شود. با استفاده از این نکته که کشش در یک کابل یکپارچه همواره مقدار واحدی است، برای محاسبه کشش کابل در محل نیروسنج A به‌صورت شکل روبرو عمل می‌کنیم:

نیروسنج مقدار $\frac{1}{4}W$ را نشان می‌دهد.

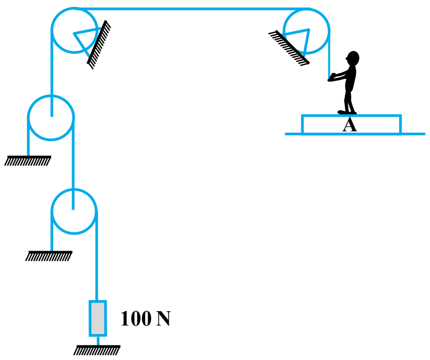
مثال۲۱: وزن واقعی شخصی $1000N$ بوده و نیروسنج $100N$ را نشان می‌دهد. عدد قرائت شده روی ترازوی A کدام است؟ (از اصطکاک صرفنظر شود)

۱) ۶۰۰

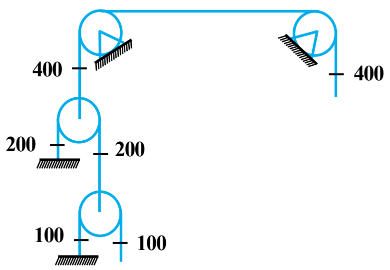
۲) ۱۴۰۰

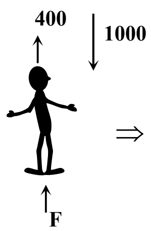
۳) ۸۰۰

۴) ۹۰۰



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دقت داشته باشید که عدد قرائت شده روی ترازوی A وزن واقعی شخص منهای کشش کابل در دست او می‌باشد. چون شخص از کابل آویزان می‌شود، وزن واقعی او کم می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه بین کابل‌ها داریم:





$$\Rightarrow F = 1000 - 400 = 600\,N$$

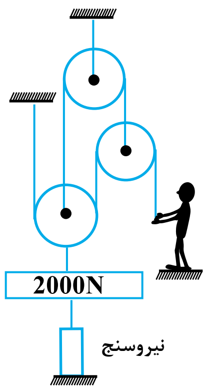
مثال۲۲: در شکل زیر وزن شخص $500N$ و نیروی عکس‌العمل کف در محل تماس شخص با زمین $100N$ است. در حالت تعادل نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟

۱) ۳۰۰

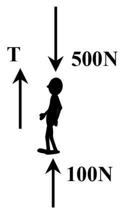
۲) ۵۰۰

۳) ۴۰۰

۴) ۶۰۰

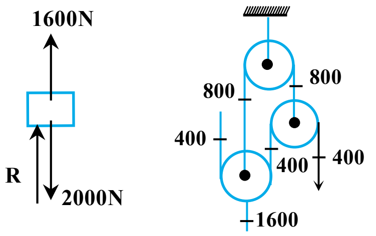


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از دیاگرام جسم آزاد شخص و برقراری رابطه تعادل نیروها داریم:



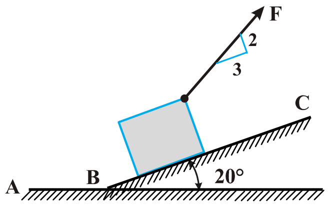
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T = 400\,N$$

با توجه به دیاگرام جسم آزاد سیستم قرقره‌ها مقادیر کشش کابل‌ها به صورت زیر است:



$R =$ عدد نیروسنج $= ۲۰۰۰ - ۱۶۰۰ = ۴۰۰\text{N}$

مثال۲۳: مؤلفه‌های F به موازات BC و عمود بر AB کدامند؟



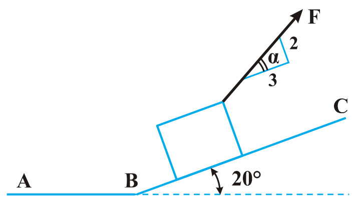
$\alpha = \tan^{-1}(\frac{۲}{۳}) = ۳۳/۷^\circ$

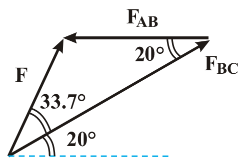
۱) $\begin{cases} F_{BC} = ۰/۷F \\ F_{AB} = ۱/۱F \end{cases}$
۲) $\begin{cases} F_{BC} = ۲/۵۷F \\ F_{AB} = ۱/۵۲F \end{cases}$

۳) $\begin{cases} F_{BC} = ۲/۵۷F \\ F_{AB} = ۰/۸۲F \end{cases}$
۴) $\begin{cases} F_{BC} = ۲/۳۶F \\ F_{AB} = ۱/۶۲F \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

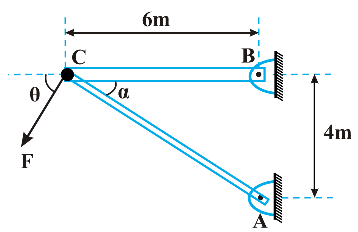
تجزیه کردن نیرو در امتداد BC و AB به این معناست که نیروی F برآیند آن دو خواهد بود، لذا:





$$\begin{cases} \dfrac{F}{\sin ۲۰^\circ} = \dfrac{F_{BC}}{\sin(۱۲۶/۳^\circ)} \Rightarrow F_{BC} = ۲/۳۶F \\ \dfrac{F}{\sin ۲۰^\circ} = \dfrac{F_{AB}}{\sin(۳۳/۷^\circ)} \Rightarrow F_{AB} = ۱/۶۲F \end{cases}$$

مثال۲۴: در سازه زیر، θ حداکثر چقدر باشد تا نیروی میله CA از ۶۰% نیروی میله BC بیشتر نشود؟



۱) $\theta = ۴۳/۶^\circ$

۲) $\theta = ۳۳/۶^\circ$

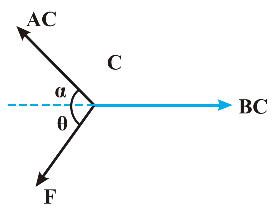
۳) $\theta = ۵۳/۶^\circ$

۴) $\theta = ۶۳/۶^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به دیاگرام جسم آزاد نقطه C، به دلیل همگرایی نیروها با استفاده از رابطه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{|AC|}{\sin\theta} = \frac{|BC|}{\sin(\alpha+\theta)} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} \le ۰/۶$$

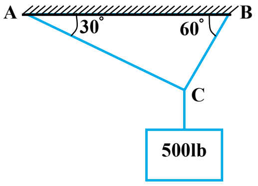
در حالت عادی: $\frac{۱۰}{۶}\sin\theta = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta$



$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{۴}{\sqrt{۵۲}} \\ \cos\alpha = \dfrac{۶}{\sqrt{۵۲}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۰}{۶}\tan\theta = \frac{۴}{\sqrt{۱۶+۳۶}} + \frac{۶}{\sqrt{۱۶+۳۶}}\tan\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۵۲}}}{(\frac{۱۰}{۶} - \frac{۶}{\sqrt{۵۲}})} = ۰/۶۶۵ \Rightarrow \theta = ۳۳/۶^\circ$$

مثال۲۵: در شکل زیر، وزنه ۵۰۰ پوندی با کابل‌های غیرقابل انعطاف آویزان است، کشش کابل CB بر حسب پوند کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



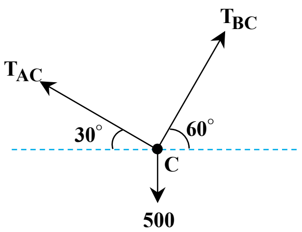
۱) ۲۵۰

۲) ۴۳۳

۳) ۳۴۳

۴) ۳۳۴

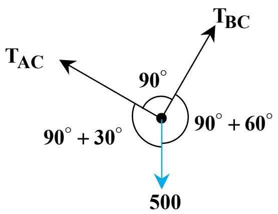
پاسخ: گزینه «۲»



روش اول: با ترسیم دیاگرام جسم آزاد نقطه متعادل C و با توجه به تقارب نیروها خواهیم داشت :

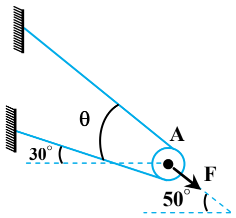
$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{BC}\cos 60^\circ = T_{AC}\cos 30^\circ \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{BC}\sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ = 500\end{cases} \Rightarrow T_{BC} = 433$$

روش دوم: با توجه به همگرایی نیروها از روش مثلثاتی (قانون سینوس‌ها) نیز می‌توان به صورت زیر استفاده نمود:



$$\frac{500}{\sin 90^\circ} = \frac{T_{BC}}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{T_{AC}}{\sin(90^\circ + 60^\circ)} \Rightarrow \begin{cases} T_{BC} = 500\sin 120^\circ = 433 \\ T_{AC} = 500\sin 150^\circ = 250\end{cases}$$

مثال۲۶: سیستم شکل زیر در حال تعادل است. با فرض عدم وجود نیروی اصطکاک، نسبت کشش کابل (T) به نیروی F کدام است؟



۱) ۰/۶۴

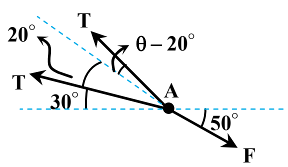
۲) ۰/۶۲

۳) ۰/۶۹

۴) ۰/۵۳

پاسخ: گزینه «۴» کافی است دیاگرام جسم آزاد قرقره A به عنوان یک نقطه مادی به صورت زیر ترسیم شود.

با فرض کوچک بودن قرقره (قرقره یک نقطه مادی فرض شده است) و با توجه به همگرا بودن نیروها، با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

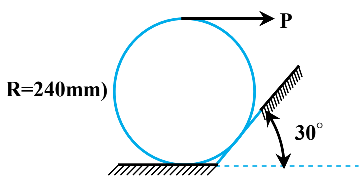


الف) $$\frac{T}{\sin 20^\circ} = \frac{F}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow T = \frac{\sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - \theta)}F$$

ب) $$\frac{T}{\sin(\theta - 20^\circ)} = \frac{F}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow T = \frac{\sin(\theta - 20)}{\sin(180^\circ - \theta)}F$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 20)}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow \sin 20^\circ = \sin(\theta - 20^\circ) \Rightarrow \theta = 40^\circ \Rightarrow \text{الف)}\ \frac{T}{F} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = 0/53$$

مثال ۲۷: اگر نیروی P به استوانه ۴۰kg وارد شود، مقدار این نیرو چه باشد تا استوانه بر روی سطح شیبدار شروع به غلتیدن کند؟

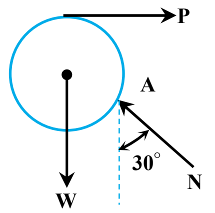


۱) ۲۱۰/۵N

۲) ۱۰۵/۱N

۳) ۴۰۶/۲N

۴) ۳۹۲/۴N

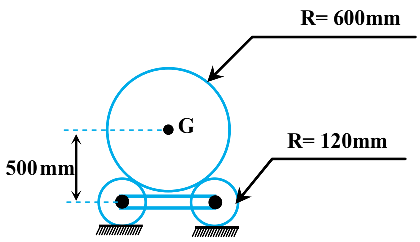


☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با رسم دیاگرام جسم آزاد گلوله و استفاده از رابطه تعادل گشتاورها نسبت به نقطه A خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sum M_A=0 \Rightarrow [P\times(240+240\cos 30^\circ)]-[W\times 240\sin 30^\circ]=0\\ W=40\times 9/81=392/4 \Rightarrow P=105/1N\end{cases}$$

نکته کلیدی در حل مسأله: علت این که از رابطه $\sum M_A=0$ استفاده شده، این است که نسبت به نقطه A گشتاور نیروی مجهول N صفر می‌شود.

مثال ۲۸: در شکل زیر دو غلتک، وزن استوانه بزرگ (به جرم ۱۶۰۰kg و مرکز ثقل G) را تحمل می‌کنند. اگر این دو غلتک توسط دو میله به هم وصل شده باشند، به نحوی که این میله وضعیت آنها را ثابت نگه دارد، مقدار نیروی کشش میله کدام است؟



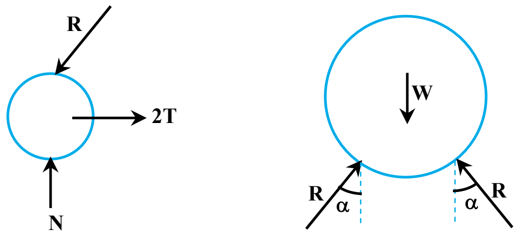
۱) ۱۵۶۶N

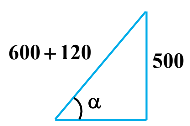
۲) ۱۰۹۱N

۳) ۳۸۷۰N

۴) ۳۷۹۰N

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد گلوله بزرگ و یکی از دو گلوله کوچک و با توجه به هندسه شکل داریم:

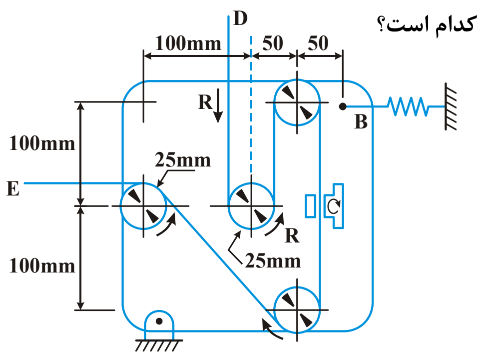




$$\sin\alpha=\frac{500}{600+120}=0/694 \Rightarrow \alpha=44^\circ \quad W=1600\times 9/81=15696N$$

$$\begin{cases}\sum F_y=0 \Rightarrow 2R\cos\alpha=W \Rightarrow R=10910N & \text{(در دیاگرام جسم آزاد گلوله بزرگ)}\\ \sum F_x=0 \Rightarrow 2T-R\sin\alpha=0 \Rightarrow T=3790N & \text{(در دیاگرام جسم آزاد گلوله کوچک)}\end{cases}$$

مثال ۲۹: یک نوار مغناطیسی که در D تحت تأثیر نیروی کشش ۱۰N می‌باشد، پس از عبور از چند قرقره هدایت‌کننده از زیر هد پاک‌کننده C با سرعت ثابت عبور می‌کند. نیروی کشش نوار در E معادل ۱۱N می‌باشد. نیروی کشش فنر در نقطه B کدام است؟

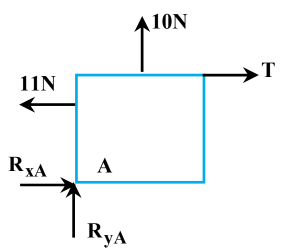


۱) ۱۱/۲N

۲) ۱۰/۶N

۳) ۷/۸N

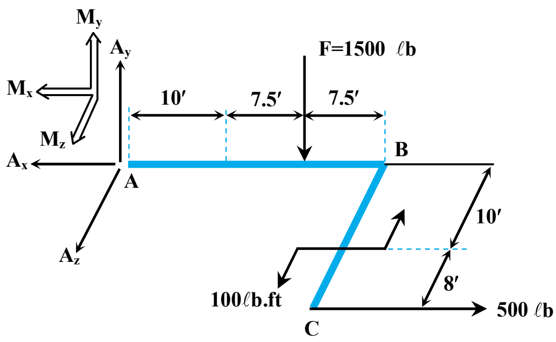
۴) ۱۱/۴N



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دیاگرام جسم آزاد مجموعه به صورت بسیار ساده ترسیم می‌شود. برای پیداکردن (فقط) مقدار کشش T بهتر است از رابطه تعادل گشتاورها نسبت به نقطه A استفاده شود که بدون محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه A، مقدار کشش T به دست آید:

$$\sum M_A=0 \Rightarrow (11\times 112/5)+(10\times 87/5)-(T\times 200)=0 \Rightarrow T=10/6N$$

مثال۳۰: مولفه‌های عکس‌العمل در محل تکیه‌گاه یک سرگیردار (طره‌ای) شکل کدام است؟



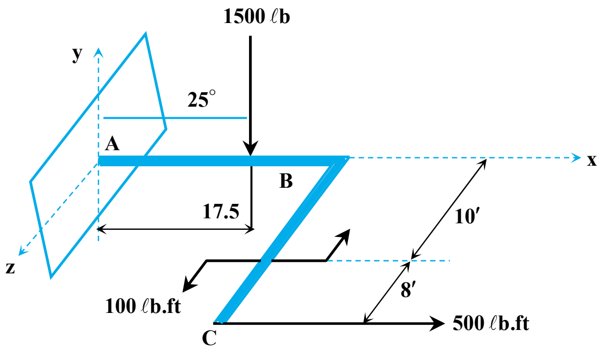
۱) $\begin{cases} A_x = ۵۰۰ & M_x = ۹۱۰۰ \\ A_y = ۰ & M_y = ۲۵۰۱ \\ A_z = ۱۵۰۰ & M_z = ۲۶۲۵۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A_x = ۰ & M_x = ۹۱۰۰ \\ A_y = ۱۵۰۰ & M_y = ۲۶۲۵۰ \\ A_z = ۵۰۰ & M_z = ۰ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A_x = ۱۵۰۰ & M_x = ۰ \\ A_y = ۵۰۰ & M_y = ۰ \\ A_z = ۰ & M_z = ۲۶۲۵۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A_x = ۵۰۰ & M_x = ۰ \\ A_y = ۱۵۰۰ & M_y = ۹۱۰۰ \\ A_z = ۰ & M_z = ۲۶۲۵۰ \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۴» ملاحظه می‌شود که تکیه‌گاه A علاوه بر مقاومت در مقابل نیرو در سه جهت، در مقابل جفت نیرو نیز در سه جهت مقاومت خواهد کرد. پس دستگاه نیروی عکس‌العمل شامل نیروی $\vec{A} = -A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ و گشتاور جفت $\vec{M} = -M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ خواهد بود. قابل ذکر است که علامت مؤلفه‌های نیرو و جفت نیرو مطابق جهاتی است که به طور فرضی در دیاگرام جسم آزاد رسم کردیم.



حال با استفاده از روابط برداری تعادل داریم:

$$\sum \vec{F} = ۰ \Rightarrow -A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} - ۱۵۰۰\vec{j} + ۵۰۰\vec{i} = ۰$$

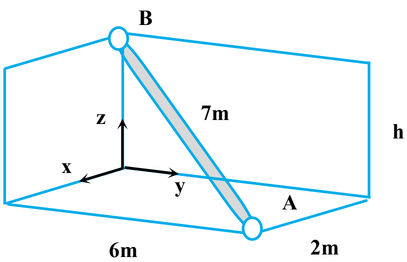
$$(-A_x + ۵۰۰)\vec{i} + (A_y - ۱۵۰۰)\vec{j} + A_z\vec{k} = ۰ \Rightarrow A_x = ۵۰۰\,\ell b \;,\; A_y = ۱۵۰۰\,\ell b \;,\; A_z = ۰\,\ell b$$

$$\sum \vec{M}_A = ۰ \Rightarrow -M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} + ۱۰۰\vec{j} + ۱۷/۵\vec{i} \times (-۱۵۰۰\vec{j}) + (۲۵\vec{i} + ۱۸\vec{k}) \times ۵۰۰\vec{i} = ۰$$

$$-M_x\vec{i} + (M_y + ۱۰۰ + ۹۰۰۰)\vec{j} + (M_z - ۲۶۲۵۰)\vec{k} = ۰ \Rightarrow M_x = ۰ \;,\; M_y = -۹۱۰۰\,\ell b.ft \;,\; M_z = ۲۶۲۵۰\,\ell b.ft$$

علامت منفی برای M_y نشانه آن است که جهت این جفت باید عوض شود ولی مقدار گشتاور آن همان $۹۱۰۰\,\ell b.ft$ باقی می‌ماند.

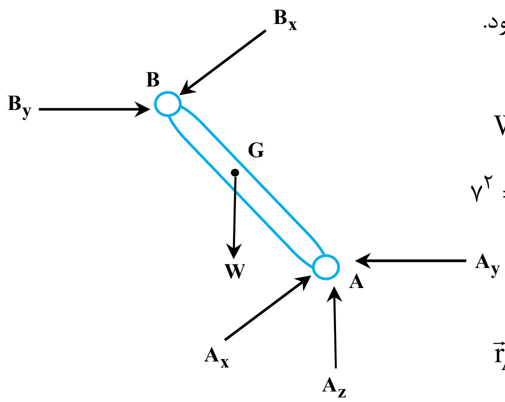
مثال۳۱: میله ۷ متری شکل زیر به جرم ۲۰۰kg در نقطه A درون یک یاتاقان کاسه‌ای و در نقطه B توسط انتهای کُره‌ای شکلش بر روی دیواره‌های صیقلی قرار گرفته است. نیروهای وارد بر تکیه‌گاه B کدام است؟



۱) $\begin{cases} B_x = ۱۹۶۲ \\ B_y = ۶۵۴ \end{cases}$　　۲) $\begin{cases} B_x = ۶۵۴ \\ B_y = ۱۹۶۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} B_x = ۴۵۶ \\ B_y = ۱۹۷۲ \end{cases}$　　۴) $\begin{cases} B_x = ۱۹۷۲ \\ B_y = ۴۵۶ \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تحلیل این مسأله به دلیل سه بعدی بودن به صورت برداری توصیه می‌شود.



با رسم دیاگرام جسم آزاد میله AB داریم:

$$W = mg = ۲۰۰ \times ۹/۸۱ = ۱۹۶۲N$$

با توجه به هندسه مکعب داریم:

$$۷^۲ = \sqrt{۲^۲ + ۶^۲ + h^۲} \Rightarrow h = ۳m$$

بردارهای AB و AG طبق مختصات نقاط برابرند با (نقطه G وسط AB می‌باشد):

$$\vec{r}_{AG} = -۱\vec{i} - ۳\vec{j} + ۱/۵\vec{k} \qquad , \qquad \vec{r}_{AB} = -۲\vec{i} - ۶\vec{j} + ۳\vec{k}$$

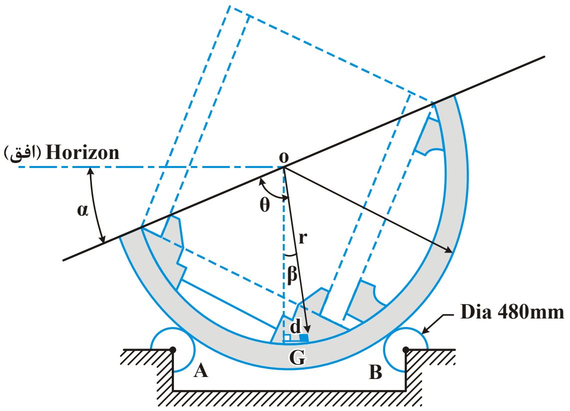
به دلیل خواسته مسأله (نیروهای تکیه‌گاه B) بهتر است از رابطه تعادل گشتاورها نسبت به نقطه A استفاده شود که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه A را در محاسبات وارد نکند.

$$\sum \vec{M}_A = ۰ \Rightarrow \vec{r}_{AB} \times (\overrightarrow{B_x} + \overrightarrow{B_y}) + \vec{r}_{AG} \times \vec{W} = ۰$$

$$[(-۲\vec{i} - ۶\vec{j} + ۳\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})] + [(-\vec{i} - ۳\vec{j} + ۱/۵\vec{k}) \times (-۱۹۶۲\vec{k})] = ۰$$

$$(-۳B_y + ۵۸۸۶)\vec{i} + (۳B_x - ۱۹۶۲)\vec{j} + (-۲B_y + ۶B_x)\vec{k} = ۰ \Rightarrow B_x = ۶۵۴N\,,\ B_y = ۱۹۶۲N$$

مثال۳۲: یک گیره مخصوص برای چرخاندن لوله‌های بزرگ در شکل نمایش داده شده است و جرم آن ۸۰ تن است. این گیره بر روی یک ردیف غلتک در A و یک ردیف غلتک در B قرار گرفته است. یکی از غلتک‌های ردیف B به صورت چرخ دنده‌ای می‌باشد و باعث چرخاندن گیره حول مرکز هندسی آن (O) می‌شود. زمانی که $\alpha = ۰$ است، گشتاور خلاف جهت عقربه‌های ساعت معادل ۲۴۶۰N.m و وقتی $\alpha = ۳۰^\circ$ است، گشتاور موافق جهت عقربه‌های ساعت معادل ۴۶۸۰N.m باید توسط چرخدنده B تحمل شود تا جلوی چرخش گیره گرفته شود. محل مرکز جرم گیره کدام است؟



۱) $\begin{cases} \theta = ۷۳/۲^\circ \\ r = ۱۸/۱۲mm \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \theta = ۷۹/۷۶^\circ \\ r = ۱۸/۱۲mm \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \theta = ۷۹/۷۶^\circ \\ r = ۱۷/۶mm \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \theta = ۷۳/۲^\circ \\ r = ۱۷/۶mm \end{cases}$

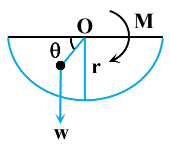
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» امتداد نیروهای عکس‌العمل A و B از نقطه O می‌گذرند و گشتاوری ایجاد نمی‌کنند. تنها گشتاورهای موجود، حاصل از نیروهای وزن و نیروی عکس‌العمل چرخدنده B می‌باشند:

$$d = \overline{r}.\sin\beta = \overline{r}.\cos\theta \qquad W = ۸۰ \times ۱۰۰۰ \times ۹/۸۱ = ۷۸۴۸۰۰\ N$$

$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow W \cdot d = M \ (\text{گشتاور حاصل از چرخدنده B})$$

مطابق شرایط قرارگیری لوله روی گیره داریم:

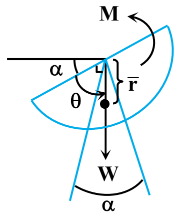
۱) $\alpha = ۰^\circ$



$$M = W.d = ۲۴۶۰N.m$$

$$۲۴۶۰ = W.\overline{r}.\cos\theta \Rightarrow \overline{r}.\cos\theta = \frac{۲۴۶۰}{۷۸۴۸۰۰} = ۳/۱۳۵\ mm \quad (۱)$$

۲) $\alpha = ۳۰^\circ$



$$M = -W.d = -۴۶۸۰$$

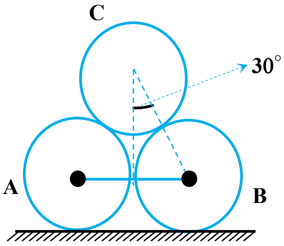
$$d = \overline{r}.\sin(۹۰ - \alpha - \theta) = \overline{r}.\cos(\theta + ۳۰)$$

$$\Rightarrow \overline{r}.\cos(\theta + ۳۰) = -\frac{۴۶۸۰}{۷۸۴۸۰۰} = -۵/۹۶۳ \quad (۲)$$

از حل همزمان دو معادله‌ی (۱) و (۲) می‌توان $\overline{r}$ و θ را حساب کرد.

$$\frac{\overline{r}.\cos(\theta + ۳۰)}{\overline{r}.(\cos\theta)} = -\frac{۵/۹۶۳}{۳/۱۳۵} \Rightarrow \theta = ۷۹/۷۶^{\circ} \Rightarrow \overline{r} = \frac{۳/۱۳۵}{\cos ۷۹/۷۶} = ۱۷/۶۴\ \text{mm}$$

مثال۳۳: دو کره B و A توسط یک کابل با کشش ۱۵۰N که از مرکز آن‌ها عبور می‌کند به یکدیگر متصل شده‌اند. وزن کره C اعمالی بر دو کره زیرین ۳۵۰N می‌باشد. در این حالت نیروی عمل و عکس‌العمل در محل تماس دو کره A و B چه مقدار می‌باشد؟



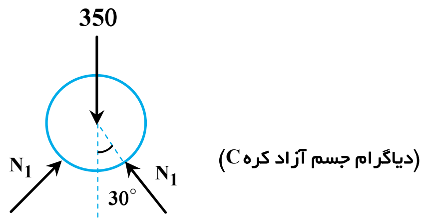
۱) ۴۹

۲) ۲۰۰

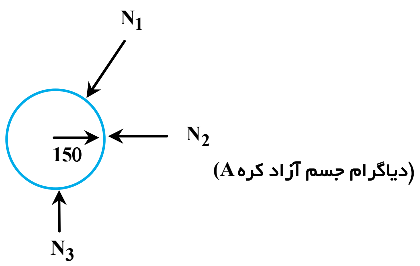
۳) ۸۳

۴) ۷۲

پاسخ: گزینه «۱» با رسم دیاگرام جسم آزاد کره C و یکی از کره‌های A یا B (به دلیل تقارن) و برقراری رابطه‌های تعادل داریم:

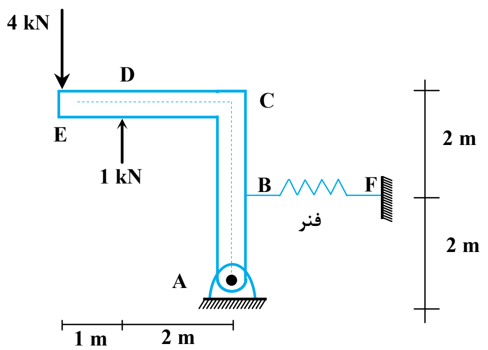


$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲N_۱ \cos ۳۰^{\circ} - ۳۵۰ = ۰ \Rightarrow N_۱ = ۲۰۲/۱N$$



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow N_۱ \sin ۳۰^{\circ} + N_۲ - ۱۵۰ = ۰ \Rightarrow N_۲ = ۴۹ \\ N_۱ = ۲۰۲/۱N \end{cases}$$

مثال۳۴: در شکل زیر نیروی فنر BF چند کیلو نیوتن است؟



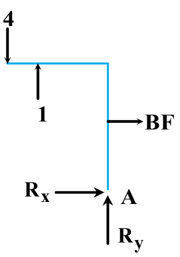
۱) صفر

۲) ۳

۳) ۵

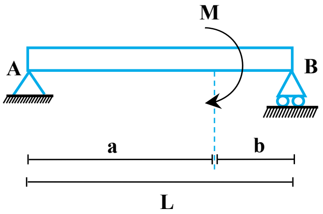
۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد میله L شکل و برقراری رابطه تعادل گشتاورها حول نقطه A و با توجه به دو نکته مهم که اولاً نیروی فنر در بحث استاتیک همانند کابل در نظر گرفته می‌شود و ثانیاً این که علت استفاده از رابطه تعادل گشتاورها حول نقطه A این است که عکس‌العمل‌های لـولای A در محاسبات وارد نشود، داریم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (۲ \times BF) + (۲ \times ۱) - (۴ \times ۳) = ۰ \Rightarrow BF = ۵KN$$

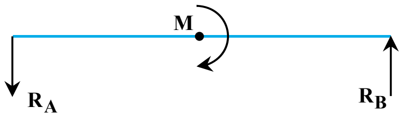
مثال ۳۵: مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه A، کدام است؟



۱) صفر ۲) $\frac{M}{L}$

۳) $\frac{Mb}{L}$ ۴) $۲\frac{abM}{L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم دیاگرام جسم آزاد تیر AB و برقراری رابطه تعادل گشتاورها حول نقطه B (برای به دست آوردن عکس‌العمل نقطه A)، خواهیم داشت:

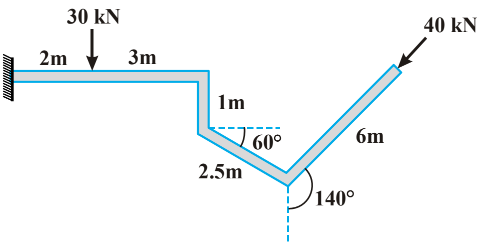


$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow M - (R_A \times L) = ۰ \Rightarrow R_A = \frac{M}{L}$$

در چنین مسائلی دیده شده است که بعضی از دانشجویان براساس این استدلال اشتباه که چون بر تیر نیرو وارد نشده پس عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها صفر خواهد شد، گزینه نادرست «۱» را انتخاب می‌کنند.

ضمن آنکه محل وارد شدن گشتاور M هیچ تأثیری روی حل مسأله ندارد، چرا که گشتاور را می‌توان بر روی جسم، در هر نقطه‌ای اعمال نمود.

مثال ۳۶: عکس‌العمل گشتاوری تکیه‌گاه در شکل زیر کدام است؟



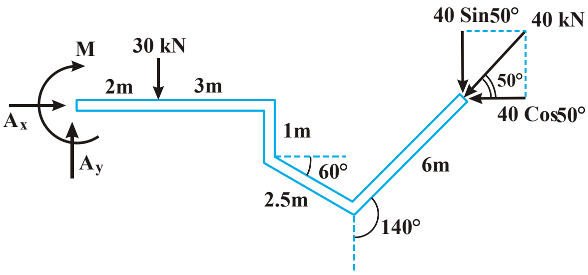
۱) ۶۰ kN.m

۲) ۲۳/۷ kN.m

۳) ۳۳۲/۹ kN.m

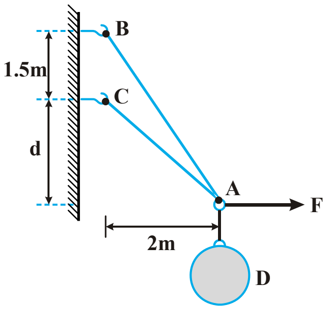
۴) ۴۱۲/۵ kN.m

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» لازم است دیاگرام جسم آزاد میله به صورت زیر ترسیم گردد:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M + (۳۰ \times ۲) + [(۴۰ \sin ۵۰^\circ) \times$$
$$(۲ + ۳ + ۲/۵ \cos ۶۰^\circ + ۶ \cos ۵۰^\circ)] + [(۴۰ \cos ۵۰^\circ) \times$$
$$(۱ + ۲/۵ \sin ۶۰^\circ - ۶ \sin ۵۰^\circ)] = ۰ \Rightarrow M = -۳۳۲/۹ \text{kN.m}$$

مثال ۳۷: اگر وزن کُره ۲۰۰kN و مقدار نیروی افقی ۱۰۰kN باشد، فاصله d را چنان محاسبه کنید که هیچ نیرویی به طناب AC وارد نشود.



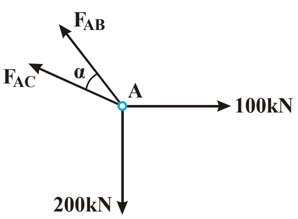
۱) $d = ۲/۵m$

۲) $d = ۱/۵m$

۳) $d = ۳m$

۴) $d = ۱m$

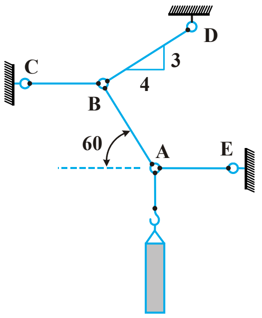
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با رسم دیاگرام جسم آزاد نقطه A متعادل داریم:



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_{AB}\cos\alpha + ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB}\cos\alpha = ۱۰۰ & (۱) \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AB}\sin\alpha - ۲۰۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB}\sin\alpha = ۲۰۰ & (۲) \end{cases}$$

$$\frac{(۲)}{(۱)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۲۰۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱/۵ + d}{۲} = ۲ \Rightarrow d = ۲/۵m$$

مثال ۳۸: اگر جسم حمل شده توسط کابل‌ها $۵۰kN$ وزن داشته باشد، نیروی ایجاد شده در کابل BC کدام است؟



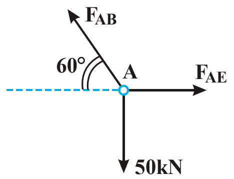
۱) $F_{BC} = ۴۱/۷$

۲) $F_{BC} = ۲۸/۹$

۳) $F_{BC} = ۵۷/۷$

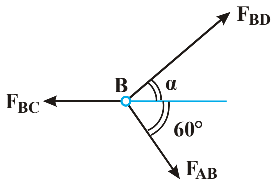
۴) $F_{BC} = ۹۵/۵$

پاسخ: گزینه «۴» از دیاگرام جسم آزاد نقطه A و برقراری روابط تعادل نیروها در آن داریم:



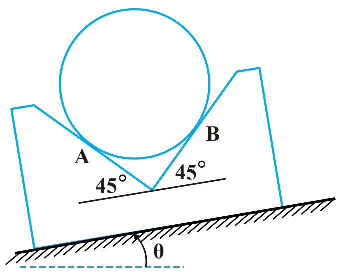
$$\begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AB}\sin ۶۰^\circ - ۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۵۷/۷kN \\ \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AE} - ۵۷/۷\cos ۶۰^\circ = ۰ \Rightarrow F_{AE} = ۲۸/۹kN \end{cases}$$

از دیاگرام جسم آزاد نقطه B و روابط تعادل آن داریم:



$$\begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow -۵۷/۷\sin ۶۰^\circ + F_{BD}\sin\alpha = ۰ \Rightarrow F_{BD} = ۸۳/۳kN \\ \sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_{BC} + ۵۷/۷\cos ۶۰^\circ + ۸۳/۳\cos\alpha = ۰ \Rightarrow F_{BC} = ۹۵/۵kN \end{cases}$$

مثال ۳۹: برای محاسبه زاویه θ با این شرط که مقدار عکس‌العمل سطح در نقطه‌ی B نصف عکس‌العمل سطح در نقطه A باشد، از کدام روابط زیر استفاده خواهد شد؟ (سطوح صیقلی فرض شود)



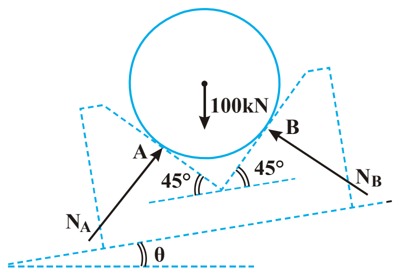
۱) $\begin{cases} -۰/۵\cos(۴۵-\theta) + \cos(۴۵+\theta) = ۰ \\ ۰/۵N_A\sin(۴۵-\theta) + N_A\sin(۴۵+\theta) = ۱۰۰ \end{cases}$

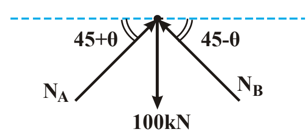
۲) $\begin{cases} ۰/۵\sin(۴۵-\theta) + \sin(۴۵+\theta) = ۰ \\ ۰/۵N_A\cos(۴۵-\theta) + N_A\cos(۴۵+\theta) = ۱۰۰ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۰/۵\cos(۴۵-\theta) + \sin(۴۵+\theta) = ۰ \\ ۰/۵N_A\sin(۴۵-\theta) + N_A\cos(۴۵+\theta) = ۱۰۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} ۰/۵\sin(۴۵-\theta) + \cos(۴۵+\theta) = ۰ \\ ۰/۵N_A\cos(۴۵-\theta) + N_A\sin(۴۵+\theta) = ۱۰۰ \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» وزن کره برابر $۱۰۰kN$ می‌باشد، ضمناً عکس‌العمل سطوح از مرکز کره عبور خواهند کرد:





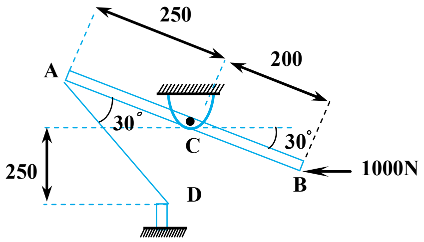
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow -N_B\cos(۴۵-\theta) + N_A\cos(۴۵+\theta) = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow -۱۰۰ + N_B\sin(۴۵-\theta) + N_A\sin(۴۵+\theta) = ۰ \end{cases}$$

طبق فرض: $N_B = \dfrac{N_A}{۲}$

با قرار دادن شرط مسأله در روابط تعادل داریم $\Rightarrow \begin{cases} -۰/۵\cos(۴۵-۰) + \cos(۴۵+\theta) = ۰ \\ ۰/۵N_A\sin(۴۵-\theta) + N_A\sin(۴۵+\theta) = ۱۰۰ \end{cases}$

از حل دو معادله، θ به دست می‌آید.

مثال۴۰: در مکانیزم شکل زیر کشش در کابل AD، چند نیوتن است؟



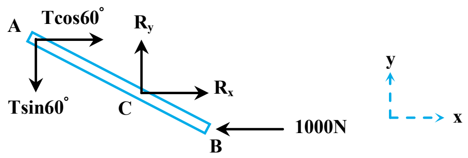
۱) ۴۰۰

۲) ۵۰۰

۳) ۱۰۰

۴) ۸۰۰

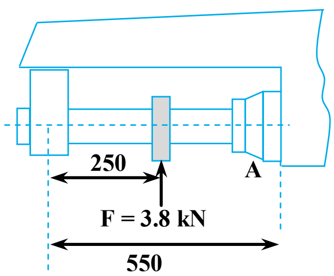
پاسخ: گزینه «۴» دیاگرام آزاد تیر AB به صورت زیر ترسیم می‌شود :



نیروی کشش کابل AD (T) ، به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌شود. با استفاده از رابطه تعادل گشتاورها حول نقطه C برای پیدا کردن کشش کابل داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow (1000 \times \frac{200}{2}) + (\frac{T}{2} \times \frac{250}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} T \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 250) \Rightarrow T = 800N$$

مثال۴۱: مقدار نیروی وارد بر یاتاقان A در شکل زیر چند نیوتن است؟



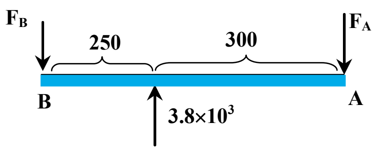
۱) ۱۸۲۴

۲) ۲۰۷۲

۳) ۲۲۱۸

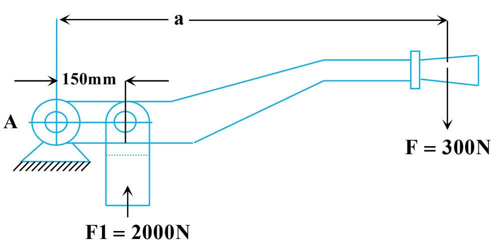
۴) ۱۷۲۷

پاسخ: گزینه «۴» با ترسیم دیاگرام جسم آزاد محور و برقراری رابطه تعادل گشتاورها حول نقطه B برای محاسبه نیروی یاتاقان A خواهیم داشت:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (3/8 \times 10^3 \times 250) = (F_A \times 550) \Rightarrow F_A = 1727N$$

مثال۴۲: در حالت تعادل، طول اهرم شکل زیر چند متر است؟



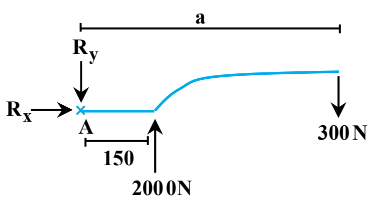
۱) ۲

۲) ۱/۲۵

۳) ۱

۴) ۰/۷۵

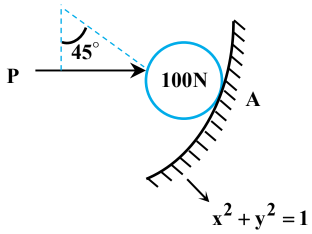
پاسخ: گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد کل اهرم به عنوان یک جسم صُلب و برقراری رابطه تعادل مناسب داریم:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (2000 \times 150) - (300 \times a) = 0$$

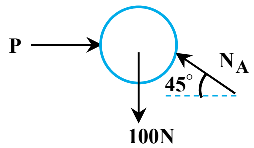
$$\Rightarrow a = 1000mm = 1m$$

مثال ۴۳: جهت برقراری تعادل کره روی سطح در وضعیت نشان داده شده نیروی P چه مقدار می‌باشد؟ (سطح را بدون اصطکاک در نظر بگیرید)



۱) ۱۴۱/۴ N
۲) ۷۳/۷ N
۳) ۱۰۰ N
۴) ۹۴/۱ N

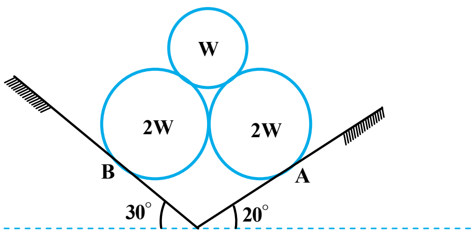
پاسخ: گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد کره به صورت زیر و استفاده از روابط تعادل نیروها خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 - N_A \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_A = 141/4\,N \\ \sum F_x = 0 \Rightarrow P - N_A \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow P = 141/4 \cos 45^\circ = 100\,N\end{cases}$$

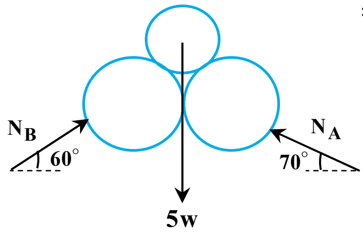
این نکته را مدنظر داشته باشید که نیروی عکس‌العمل همواره عمود بر سطح تماس است.

مثال ۴۴: عکس‌العمل سطح در محل نقطه A کدام است؟ (از اصطکاک صرف‌نظر شده است)



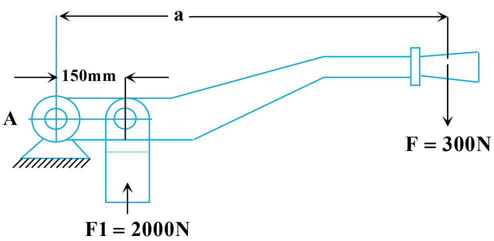
۱) ۳/۸W
۲) ۳/۳W
۳) ۲/۴W
۴) ۴/۷W

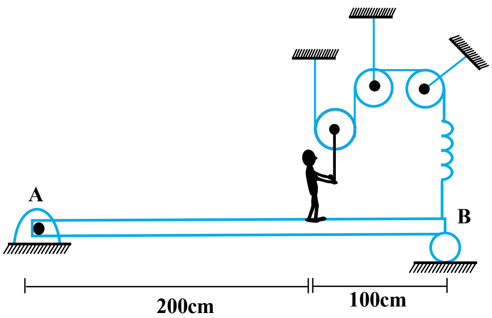
پاسخ: گزینه «۲» با رسم دیاگرام جسم آزاد سه گلوله به صورت یکپارچه و برقراری روابط تعادل نیروها داریم:



$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow N_A \cos 70^\circ - N_B \cos 60^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N_A \sin 70^\circ + N_B \sin 60^\circ = 5W\end{cases} \Rightarrow N_A = 3/3W$$

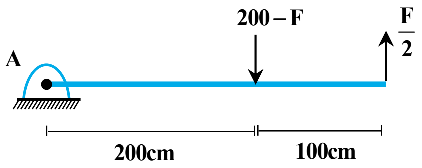
مثال ۴۵: در آخرین لحظه برقراری تعادل، مقدار نیروی وارد بر فنر چه مقدار است؟ (وزن شخص ۲۰۰N در نظر گرفته شود)





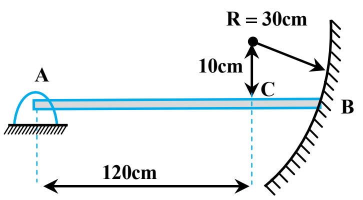
۱) ۱۱۴/۳
۲) ۵۷/۱
۳) ۲۰۰
۴) ۲۰۲/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نکته مهمی که برای حل این مسأله باید به آن توجه کنید این است که در آخرین لحظه تعادل (آستانه حرکت) تکیه‌گاه غلتکی (B) دارای عکس‌العمل صفر می‌باشد. اگر کشش کابل در دست شخص، F فرض شود، کشش در فنر به دلیل ارتباط کابل‌ها و قرقره‌ها $\frac{F}{۲}$ خواهد بود. با رسم دیاگرام جسم آزاد تیر AB در آستانه حرکت و برقراری رابطه تعادل گشتاورها داریم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow [(۲۰۰-F)\times ۲۰۰]-[\frac{F}{۲}\times ۳۰۰]=۰ \Rightarrow \frac{F}{۲} = \text{نیروی وارد بر فنر} = ۵۷/۱$$

✍ **مثال ۴۶: مقدار نیروی عکس‌العمل در محل B با فرض این که وزن میله AB، ۴۰۰N باشد، کدام است؟**



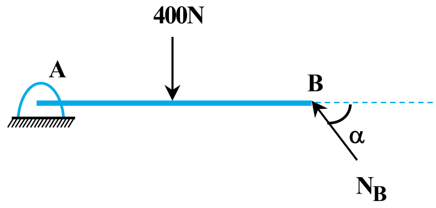
۱) ۶۰۶/۱N

۲) ۵۱/۹

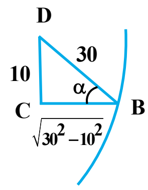
۳) ۲۳۷/۴

۴) ۳۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی عکس‌العمل همواره عمود بر سطح تماس می‌باشد، لذا در دیاگرام جسم آزاد تیر AB در محل تماس (B) داریم:



از هندسه شکل در محل تماس (B) داریم:

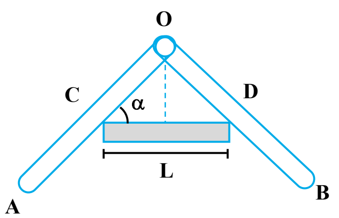


$$\sin\alpha = \frac{۱۰}{۳۰} = ۰/۳۳$$

طول کلی میله AB با توجه به هندسه شکل برابر است با: $۱۲۰+BC$ $(۱۴۸/۳ = ۱۲۰+۲۸/۳)$، محل اعمال نیروی وزن میله در وسط طول فوق می‌باشد. برای محاسبه مقدار عکس‌العمل سطح در نقطه B، لازم است نیروی N_B به دو مؤلفه عمودی و افقی تجزیه شود، سپس با استفاده از رابطه تعادل $(\sum M_A)$ مقدار N_B به صورت روبرو محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} \sum M_A = ۰ \Rightarrow (۴۰۰\times\frac{۱۴۸/۳}{۲})-(N_B \sin\alpha\times ۱۴۸/۳)=۰ \Rightarrow N_B = ۶۰۶/۰۶N \\ \sin\alpha = ۰/۳۳ \end{cases}$$

✍ **مثال ۴۷: دو میله مشابه هر کدام به وزن W و طول ۲L در نقطه O لولا شده و روی سکوی بدون اصطکاک قرار گرفته‌اند. در حالت تعادل زاویه α چه مقدار است؟**



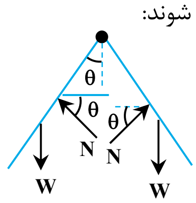
۱) $\text{Arc}\sin\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$

۲) $\text{Arc}\sin\sqrt[۳]{۲}$

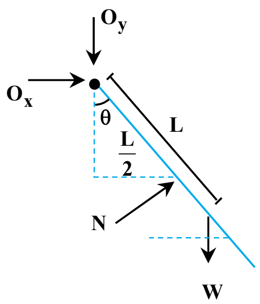
۳) $۹۰-\text{Arc}\sin\sqrt[۳]{۲}$

۴) $۹۰-\text{Arc}\sin\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» لازم است دیاگرام جسم آزاد یکی از قطعات و دیاگرام جسم آزاد مجموعه دو قطعه به صورت مجزا ترسیم شوند:



$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲N\sin\theta - ۲W = ۰ \Rightarrow N = \frac{W}{\sin\theta}$$

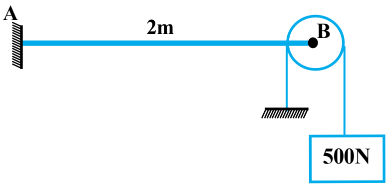


$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow (N\times\frac{L}{۲\sin\theta})-(W\times L\sin\theta)=۰$$

$$\Rightarrow \frac{W}{\sin\theta}\times\frac{L}{۲\sin\theta} = W\times L\sin\theta \Rightarrow ۲\sin^۳\theta = ۱ \Rightarrow \sin\theta = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow \theta = \text{Arc}\sin\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}\ ,\alpha = ۹۰-\text{Arc}\sin\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} = \text{Arc}\cos\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$$

مثال۴۸: وزن میله AB، ۲۰۰N است. مقدار گشتاور عکس‌العملی تکیه‌گاه A کدام است؟ (قطر قرقره ۰/۲m و از اصطکاک آن صرف‌نظر می‌شود)



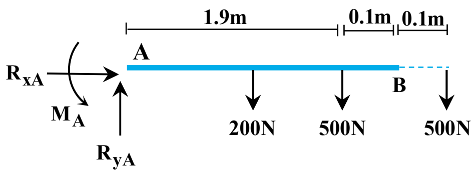
۱) ۱۲۵۰ N.m

۲) ۲۰۰۰ N.m

۳) ۲۲۰۰N.m

۴) ۱۸۴۰ N.m

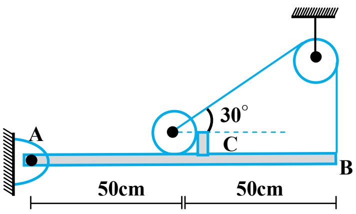
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد تیر AB و با توجه به اینکه در سراسر کابل متصل به وزنه ۵۰۰ نیوتنی مقدار کشش ۵۰۰نیوتن می‌باشد، داریم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M_A - (۲۰۰\times ۱) - (۵۰۰\times ۱/۹) - (۵۰۰\times ۲/۱) = ۰$$

$$\Rightarrow M_A = ۲۲۰۰ N.m$$

مثال۴۹: وزن تیر AB، ۳۰۰N، وزن چرخ ۱۰N و قطر آن ۵cm است. کشش در کابل متصل به نقطه B چه مقدار است؟



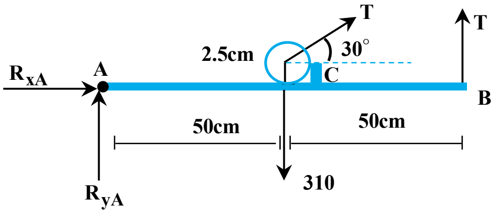
۱) ۱۲۰N

۲) ۱۲۶N

۳) ۱۳۴N

۴) ۱۴۰N

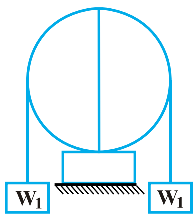
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با رسم دیاگرام جسم آزاد همزمان تیر AB و چرخ و همچنین با توجه به این که مقدار کشش در کابل یکپارچه واحد (T) می‌باشد، داریم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (۳۱۰\times ۵۰) - (T\times ۱۰۰) - (T\sin ۳۰^\circ \times ۵۰) + (T\cos ۳۰^\circ \times ۲/۵) = ۰$$

$$\Rightarrow T \simeq ۱۲۶N$$

مثال۵۰: استوانه یکنواختی با سطح صاف و وزن W را به دو نیمه مساوی تقسیم نموده و سپس آن دو نیمه را مطابق شکل کنار یکدیگر روی یک سطح صاف قرار می‌دهیم و برای ثابت ماندن موقعیت آن، نخ بی‌وزنی را توسط وزنه‌های $W_۱$ در کشش قرار می‌دهیم. حداقل مقدار $W_۱$ برای آنکه دو نیمه از هم جدا نشوند کدام است؟



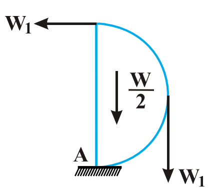
۱) $\frac{W}{۲\pi}$

۲) $\frac{W}{\pi}$

۳) $\frac{۲W}{۳\pi}$

۴) $\frac{۴W}{۳\pi}$

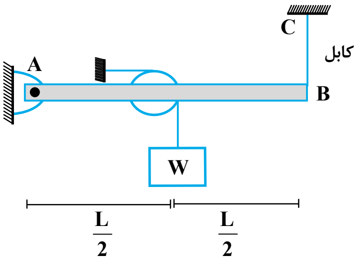
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که عامل جداکننده دو سطح نیم استوانه از یکدیگر، گشتاور حاصل از وزن آن‌ها می‌باشد. نیروی وزن هر قسمت در مرکز سطح آن (مرکز سطح نیم‌دایره) اثر می‌کند. لذا:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (W_۱ \times R) + (\frac{W}{۲} \times \frac{۴R}{۳\pi}) - (W_۱ \times ۲R) = ۰ \Rightarrow W_۱ = \frac{۲W}{۳\pi}$$

لازم به توضیح است که چون نیم‌دایره‌ها در آستانه جدا شدن از هم قرار دارند بنابراین نیروی عکس‌العملی به یکدیگر وارد نمی‌کنند.

مثال۵۱: کشش در کابل BC چه مقدار است؟ (از اصطکاک در قرقره صرف‌نظر شده است و شعاع قرقره $\frac{L}{۱۰}$ است)



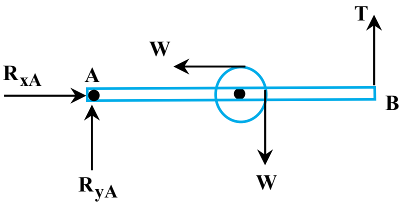
۱) $۰/۳W$

۲) $۰/۴W$

۳) $۰/۶W$

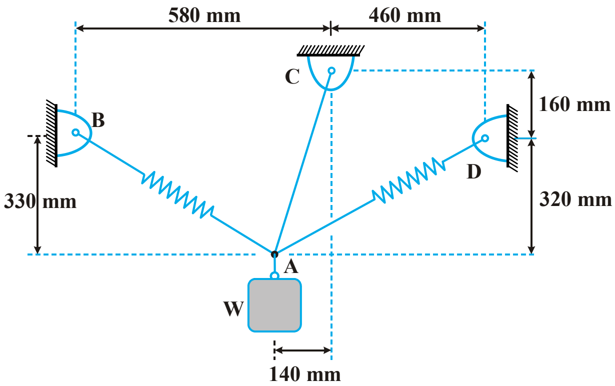
۴) $۰/۵W$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد تیر AB و برقراری رابطه تعادل گشتاورها نسبت به نقطه A خواهیم داشت:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (T\times L) + (W\times \frac{L}{۱۰}) - (W\times(\frac{L}{۲}+\frac{L}{۱۰})) = ۰ \Rightarrow T = ۰/۵W$$

مثال۵۲: وزنه W توسط کابل AC و دو فنر مطابق شکل در حالت تعادل قرار گرفته است. اگر طول کابل ۵۰۰mm و طول اولیه هر یک از فنرها قبل از کشیده شدن ۴۵۰mm باشد، مطلوب است محاسبهٔ وزن W. (ضریب سختی فنرها $K_{AD} = ۵۰۰\frac{N}{m}$ و $K_{AB} = ۱۵۰۰\frac{N}{m}$ می‌باشد)



۱) $W = ۷۰/۵۹N$

۲) $W = ۱۶۳N$

۳) $W = ۲۱۰N$

۴) $W = ۱۶۸N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به هندسه شکل داریم:

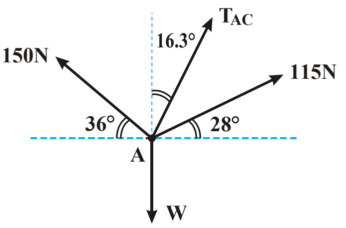
طول فنرها قبل از کشیده شدن $= ۴۵۰mm$

طول فنر AD بعد از کشیده شدن $= L = \sqrt{۳۲۰^۲ + (۶۰۰)^۲} = ۶۸۰mm$

طول فنر AB بعد از کشیده شدن $= L = \sqrt{۳۳۰^۲ + ۴۴۰^۲} = ۵۵۰mm$

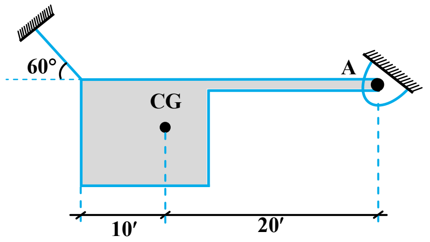
$$\Rightarrow F_{AD} = k_{AD}.\Delta = ۵۰۰\times(۶۸۰-۴۵۰)\times۱۰^{-۳} = ۱۱۵N \Rightarrow F_{AB} = k_{AB}.\Delta = ۱۵۰۰\times(۵۵۰-۴۵۰)\times۱۰^{-۳} = ۱۵۰N$$

با رسم دیاگرام جسم آزاد نقطه A داریم:



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow (۱۱۵\cos ۲۸^\circ) + (T_{AC}\sin ۱۶/۳^\circ) - ۱۵۰\cos ۳۶^\circ = ۰ \Rightarrow T_{AC} = ۷۰/۵۹ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow -W + (۷۰/۵۹\cos ۱۶/۳^\circ) + (۱۱۵\sin ۲۸^\circ) + (۱۵۰\sin ۳۶^\circ) = ۰ \Rightarrow W = ۲۱۰N \end{cases}$$

مثال ۵۳: در صفحه داده شده در شکل، نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه A را حساب کنید؟ (CG مرکز ثقل بوده و وزن صفحه W = ۲۰۰# است)



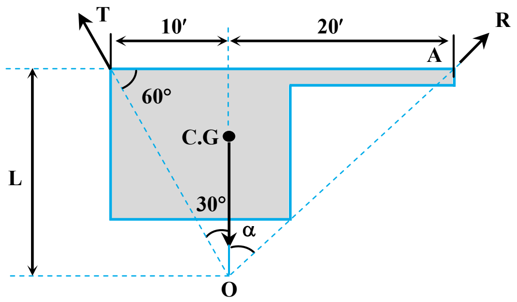
۱) ۱۵۳/۹ lb

۲) ۲۳۱/۴ lb

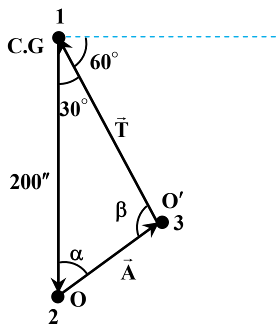
۳) ۱۰۲ lb

۴) ۱۱۳ lb

پاسخ: گزینه «۳» چون سه نیروی در حال تعادل داریم پس باید این سه نیرو یا در یک نقطه متقاطع باشند و یا هر سه موازی باشند. از طرفی نیروی کشش T با نیروی وزن (۲۰۰ lb) در نقطه O متقاطعند، بنابراین نیروی عکس‌العمل A نیـز باید از این نقطه بگذرد و خط OA راستای نیروی A خواهد بود. اکنون که راستای نیروها و همچنین مقدار یکی از آنها را می‌دانیم، با تشکیل مثلث نیروها بـه طریـق هندسی می‌توان نیروها را حساب نمود. نیروی ۲۰۰ lb را در جهت قائم رسـم مـی کنیم. از دو انتهای آن دو خط به موازات راستای نیروهای T و A رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه (۳) قطع کنند.



مثلث ۱۲۳ مثلث نیروها است. حال برای محاسبه نیروهای A و T به زوایای مثلـث نیـاز داریـم. زاویـه (۱) برابر °۳۰ درجه است، لذا کافی است زاویه α (یا زاویه β) را حساب کنیم. از شکل مشاهده می‌شود که:



$$\tan\alpha = \frac{۲۰}{L}$$

که L به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{L}{۱۰} \Rightarrow L = ۱۰\tan ۶۰^\circ$$

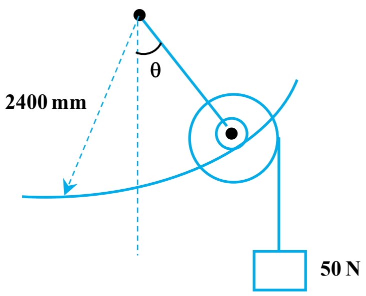
در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha = \frac{۲۰}{۱۰\tan ۶۰^\circ} \Rightarrow \tan\alpha = ۱/۱۵۵ \Rightarrow \alpha = ۴۹/۱^\circ$$

و با معلوم بودن زاویه α (و در نتیجه زاویه β) می‌توان مقدار نیروهای A و T را با استفاده از قانون سینوس‌ها محاسبه نمود:

$$\sin\alpha = ۰/۷۵۶ \Rightarrow \beta = ۱۸۰^\circ - (۴۹/۱^\circ + ۳۰^\circ) = ۱۰۰/۹^\circ \Rightarrow \frac{A}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۲۰۰}{\sin\beta} = \frac{T}{\sin\alpha} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{۲۰۰\sin ۳۰^\circ}{\sin ۱۰۰/۹^\circ} = ۱۰۲\ \text{lb} \\ T = \dfrac{۲۰۰}{\sin ۱۰۰/۹^\circ}\sin\alpha = ۱۵۳/۹\ \text{lb} \end{cases}$$

مثال ۵۴: در شکل زیر وزن استوانه ۱۰۰^{kg}، شعاع آن ۲۰۰^{mm} و شعاع بزرگتر آن ۵۰۰^{mm} است. برای آنکه لغزش بـین اسـتوانه و سـطح حرکـت به‌وجود نیاید، حداقل ضریب اصطکاک لازم کدام است؟

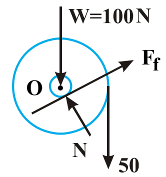


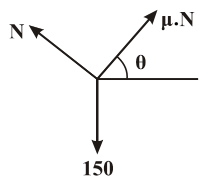
۱) ۱/۵

۲) ۱/۲

۳) ۱/۴

۴) ۱/۷





☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دیاگرام جسم آزاد استوانه به صورت روبرو ترسیم می‌گردد:

باتوجه به رابطه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{۱۵۰}{\sin ۹۰^\circ}=\frac{\mu.N}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{N}{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)} \Rightarrow \begin{cases} ۱۵۰=\frac{\mu.N}{\sin\theta} \\ \mu=\tan\theta \end{cases}$$

$$\sum M_O=۰ \Rightarrow (۵۰\times ۵۰۰)-(\mu.N\times ۲۰۰)=۰ \Rightarrow \mu.N=۱۲۵ \qquad \sin\theta=\frac{\mu.N}{۱۵۰}=\frac{۱۲۵}{۱۵۰} \Rightarrow \theta=۵۶/۴^\circ \Rightarrow \mu=\tan ۵۶/۴^\circ=۱/۵$$

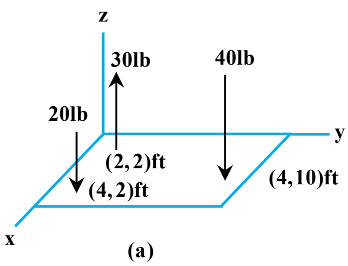
مثال ۵۵: نیروی $\vec{F}=۶\vec{i}+۳\vec{j}+۶\vec{k}$ lb از نقطه‌ای به مختصات (۲,۱,۱۰) می‌گذرد، دستگاه معادل این نیرو را در نقطه (۶,۱۰,۱۲) معین کنید؟

☑ **پاسخ:** دستگاه معادل این نیرو، نیروی $\vec{F}$ است که از نقطه (۶,۱۰,۱۲) بگذرد به علاوه جفت نیروئی که لنگر آن برابر با لنگر این نیرو (M_O) نسبت به نقطه اخیر باشد یعنی:

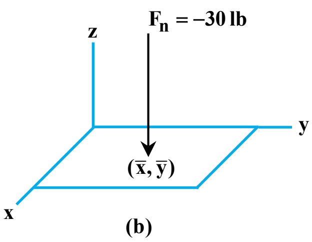
$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}=[(۲-۶)\vec{i}+(۱-۱۰)\vec{j}+(۱۰-۱۲)\vec{k}]\times[۶\vec{i}+۳\vec{j}+۶\vec{k}]=(-۴\vec{i}-۹\vec{j}-۲\vec{k})\times(۶\vec{i}+۳\vec{j}+۶\vec{k})$$

$$=-۱۲\vec{k}+۲۴\vec{j}+۵۴\vec{k}-۵۴\vec{i}-۱۲\vec{j}+۶\vec{i}=-۴۸\vec{i}+۱۲\vec{j}+۴۲\vec{k}\ \text{lb}-\text{ft}$$

مثال ۵۶: ساده‌ترین برآیند سیستم شکل زیر را بیابید؟



(a)



(b)

☑ **پاسخ:** توجه کنید که مقدار برآیند نیروهای وارد بر صفحه، ۳۰ lb و در راستای z- است. بنابراین نقطه‌ای وجود دارد که بتوان در آن یک نیروی منفرد معادل با سیستم نیروی اولیه جایگزین نمود. فرض کنید که این نیروی منفرد از نقطه $(\bar{x}$ و $\bar{y})$ بگذرد. حال می‌توان گشتاور این نیروی برآیند را حول محورهای x و y با گشتاور سیستم نیروهای اصلی حول همان محورها برابر قرار داده و معادلات عددی که مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را مشخص می‌کنند به دست آورد.

با برابر قرار دادن گشتاورها حول محور x، داریم:

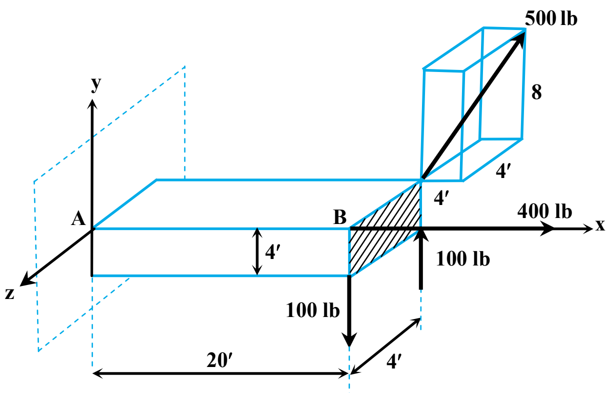
$$(۳۰)(۲)-(۲۰)(۲)-(۴۰)(۱۰)=-۳۰\bar{y} \Rightarrow \bar{y}=۱۲/۷\ \text{ft}$$

و با برابر قرار دادن گشتاورها حول محور y، نیز داریم:

$$-(۳۰)(۲)+(۲۰)(۴)+(۴۰)(۴)=۳۰\bar{x} \Rightarrow \bar{x}=۶$$

بنابراین همان‌طور که می‌بینید ساده‌ترین برآیند سیستم نیروهای موردنظر، نیرویی است به بزرگی ۳۰ lb در راستای z− که در نقطه (۶,۱۲,۷) بر صفحه وارد می‌شود.

مثال ۵۷: معادل بار وارد شده را در نقاط A و B حساب کنید؟



☑ **پاسخ:** چون شکل سه بعدی است، توصیه می‌شود مسأله را به روش برداری حل کنید.

محورهای مختصات در نقطه A مطابق شکل در نظر گرفته می‌شود. بردار آزاد گشتاور جفت (۱۰۰lb,−۱۰۰lb) برابر $۱۰۰\times۴\vec{i}$ lb−ft می‌باشد. نیروهای وارده $۴۰۰\vec{i}$ lb و $\frac{۵۰۰}{\sqrt{۹۶}}(۴\vec{i}+۸\vec{j}-۴\vec{k})$ lb هستند. بنابراین برآیند یا منتجه نیروها در نقطه A نیروی زیر می‌باشد:

$$\vec{F}=۴۰۰\vec{i}+\frac{۵۰۰}{۴\sqrt{۶}}(۴\vec{i}+۸\vec{j}-۴\vec{k})=(۴۰۰+\frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}})\vec{i}+\frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j}-\frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{k}$$

و گشتاور جفت آن برابر است با:

$$\vec{C}_A = ۴۰۰\vec{i} + (۲۰\vec{i} - ۴\vec{k}) \times \frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}}(\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}) = ۴۰۰\vec{i} + \frac{۲۰۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{k} + \frac{۱۰۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} - \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} + \frac{۴۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{i}$$

$$= (۴۰۰ + \frac{۴۰۰۰}{\sqrt{۶}})\vec{i} + \frac{۸۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} + \frac{۲۰۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{k} \text{ (lb-ft)}$$

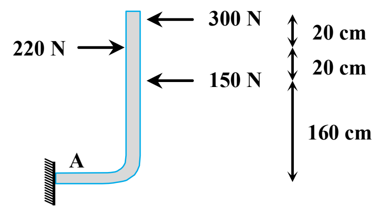
برای تعیین منتجه در نقطه B نیروی وارده دارای همان مقدار است:

$$\vec{F} = (۴۰۰ + \frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}})\vec{i} + \frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} - \frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{k}$$

و گشتاور جفت آن برابر است با:

$$\vec{C}_B = ۴۰۰\vec{i} + (-۴\vec{k}) \times \frac{۵۰۰}{\sqrt{۶}}(\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}) = ۴۰۰\vec{i} + \frac{-۲۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} + \frac{۴۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{i} = ۴۰۰(۱+\frac{۱۰}{\sqrt{۶}})\vec{i} - \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۶}}\vec{j} \text{ (lb} - \text{ft)}$$

مثال ۵۸: فاصله خط اثر برآیند سه نیروی وارد بر لولهٔ خمیده شکل داده شده تا نقطه A کدام است؟

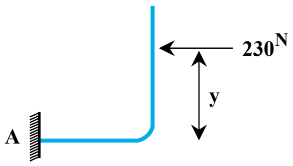


۱) ۱۹۳cm

۲) ۱۸۵cm

۳) ۱۹۱cm

۴) ۱۸۷cm



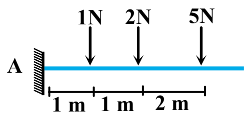
پاسخ: گزینه «۱» اگر بتوان به جای نیروهای وارد بر این قطعه، یک نیروی منفرد جایگزین نمود، مقدار آن نیرو برابر است با:

$$R = ۳۰۰ + ۱۵۰ - ۲۲۰ = ۲۳۰ \text{ N}$$

ضمناً توجه کنید که محل اثر این نیروی ۲۳۰N در نقطه‌ای از قطعه است که گشتاور حاصل از آن با گشتاور حاصل از نیروهای اولیه وارد بر قطعه نسبت به همان نقطه یکی باشد، لذا:

$$M_A = [(۳۰۰\times۲۰۰) + (۱۵۰\times۱۶۰) - (۲۲۰\times۱۸۰)] = [۲۳۰\times y] \Rightarrow y = ۱۹۳ \text{ cm}$$

مثال ۵۹: اگر بتوان به جای سه نیروی شکل زیر، یک نیرو جایگزین نمود، محل صحیح اثر آن نیروی منفرد کدام است؟

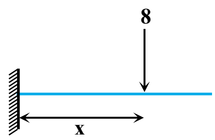


۱) ۲/۷

۲) ۳/۱۲۵

۳) ۲

۴) ۴

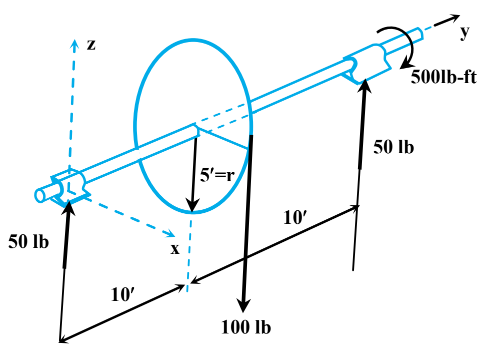


پاسخ: گزینه «۲» به شرطی می‌توان سه نیروی فوق را با یک نیرو جایگزین نمود که دو شرط برابری نیروها و برابری گشتاورها به شرح روبرو برقرار باشد.

اندازه نیروی معادل: $۱+۲+۵ = ۸\text{N}$

محل این نیروی معادل: $(۸.x) = (۱\times۱) + (۲\times۲) + (۵\times۴) \Rightarrow x = ۳/۱۲۵\text{m}$

مثال ۶۰: برآیند سه نیرو و جفت نیروی وارد بر محور شکل چند lb-ft است؟



۱) $۵۵۰\vec{j}$

۲) $۲۷۳\vec{j}$

۳) $۱۰۰۰\vec{j}$

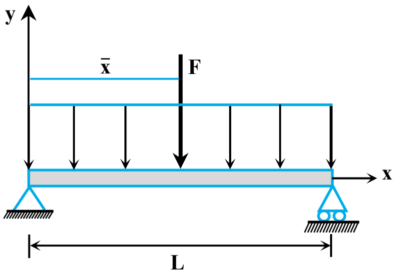
۴) $۹۷۵\vec{j}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» محورهای مختصات را مطابق شکل مسأله در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که مجموع نیروهـای وارده بـر محـور و صـفحه صـفر است، بنابراین ساده‌ترین دستگاه معادل این دستگاه (یعنی برآیند) یک جفت نیرو است. گشتاور این جفت برابر است با:

$$\vec{C}=500\vec{j}+[20\vec{j}\times 50\vec{k}]+[(10\vec{j}+5\vec{i})\times(-100)\vec{k}]=500\vec{j}+500\vec{j}=1000\vec{j}$$

بنابراین دستگاه نیروهای وارد بر این محور معادل یک جفت با گشتاوری به مقدار مساوی $\vec{C}=1000\vec{j}$ است.

مثال۶۱: سرتاسر تیری به طول L تحت شدت بار یکنواخت $\omega\frac{N}{m}$ قرار گرفته است. برآیند نیروهای وارد(F) را حساب کرده و نیز نقطه تقاطع محل آن $(\bar{x})$ را با تیر معین کنید؟

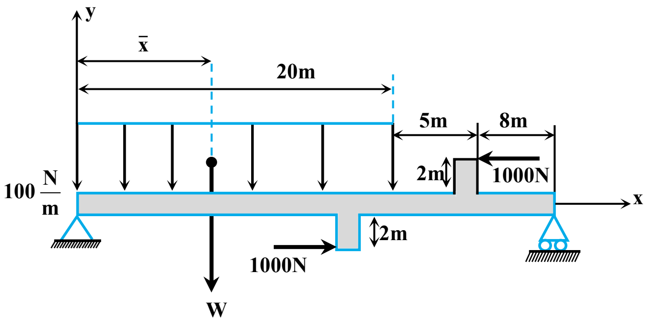


☑ **پاسخ:** مقدار برآیند $F=\int_0^L \omega dx=\omega\int_0^L dx=\omega L$ است. اگر محل تقاطع خط اثر با تیر را با فاصله $\bar{x}$ از یک سر تیر فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$F.\bar{x}=\int_0^L x\omega dx=\omega\int_0^L xdx=\omega\frac{L^2}{2}\qquad,\qquad \bar{x}=\frac{\omega\cdot\frac{L^2}{2}}{F}=\frac{L}{2}$$

بنابراین منتجه بار گسترده مستطیلی (یکنواخت) نیرویی است به اندازه مساحت آن بار گسترده که راستای آن از وسط بخشی از تیر می‌گذرد.

مثال۶۲: محل اعمال منتجه نیروهای وارد بر تیر شکل زیر را پیدا کنید؟



☑ **پاسخ:** به شکل زیر دقت کنید، قطعاً متوجه می‌شوید که بر قطعه یک بار گسترده مستطیلی و یک کوپل نیرو وارد شده است. پس اندازه نیروی معادل این سیستم نیرو برابر با معادل بار گسترده مستطیلی است. برآیند بار گسترده مستطیلی وارد بر قطعه برابر است با: $w=\omega.L=100(20)=2000N$

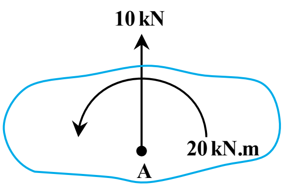
بنابراین اگر محل این برآیند (w)، تیر را در نقطه‌ای به طول $\bar{x}$ از طرف چپ تیر قطع کند خواهیم داشت (لنگر نسبت به طرف چپ تیر):

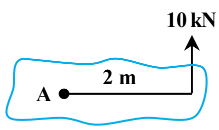
$$2000\bar{x}=2000(10)-1000(4)=16000\ N.m$$

و در نتیجه داریم:

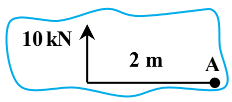
$$\bar{x}=8m$$

مثال۶۳: سیستم نیروی معادل شکل زیر کدام است؟

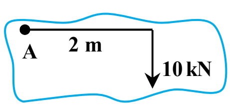




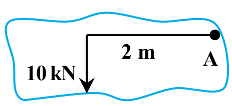
(۱)



(۲)



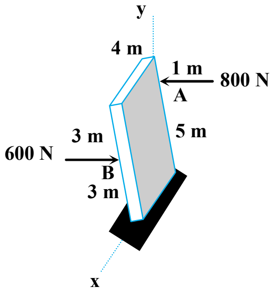
(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانید که سیستم‌های نیروی معادل دارای اندازه، جهت و راستای نیرو و گشتاور یکسان و برابـر مـی‌باشـند. فقـط در گزینـه «۱» ایـن شرایط برقرار است. در شکل این گزینه می‌بینید اندازه نیرو 10^N و به سمت بالا است و گشتاور آن نسبت به نقطه A همانند گشتاور شکل صورت سؤال نسبت به نقطه A، $20\,kN.m$ و پادساعتگرد می‌باشد.

مثال۶۴: دو نیرو عمود بر صفحه ورق مطابق شکل اعمال شده‌اند، مختصات نقطه‌ای که برآیند این دو نیرو از آن می‌گذرد، به ترتیب چند متر است؟



۱) $\bar{x}=20\,m$, $\bar{y}=15\,m$

۲) $\bar{x}=15\,m$, $\bar{y}=13\,m$

۳) $\bar{x}=12\,m$, $\bar{y}=11\,m$

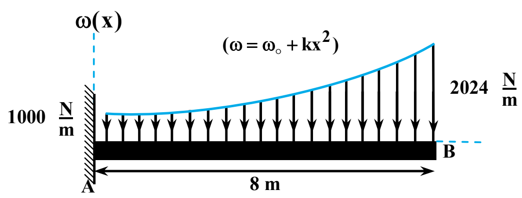
۴) $\bar{x}=10\,m$, $\bar{y}=9\,m$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هدف از طرح این مسأله، یافتن نیروی معادل و محل اثر آن است. با این توضیح، نیروی برآیند (که مقدار آن برآیند نیروهای وارده بر شکل و $200\,N$ است) در محلی اعمال می‌شود که گشتاور هر دو سیستم نیرو یکسان باشد:

$\text{گشتاور حول محور } x = (800\times5)-(600\times3)=2200$　　$\text{گشتاور حول محور } y = (600\times4)=2400$

$\text{برآیند دو نیرو} = 800-600=200$　　$\begin{cases}2400=200\times\bar{x}\Rightarrow\bar{x}=12\\2200=200\times\bar{y}\Rightarrow\bar{y}=11\end{cases}$

مثال۶۵: عکس‌العمل نیرویی تکیه‌گاه A در شکل زیر، چند نیوتن (N) می‌باشد؟



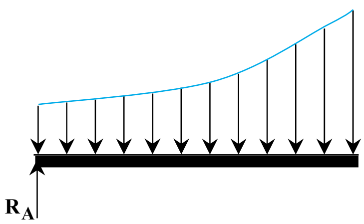
۱) ۱۳۵۲۱

۲) ۱۰۷۳۰

۳) ۱۱۵۳۱

۴) ۱۲۳۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» منظور از عکس‌العمل نیرویی تکیه‌گاه A یعنی مقدار R_A .



با استفاده از رابطه تعادل نیروها داریم:　$R_A =$ برآیند بار گسترده

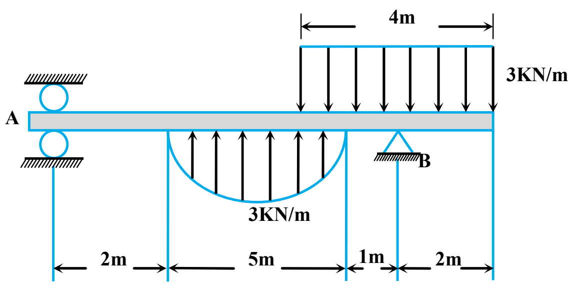
پس ابتدا باید معادله منحنی بار گسترده مشخص شود و سپس نیروی متمرکز معادل آن را که برابر با سطح زیر منحنی شکل است به دست می‌آوریم.　$\omega=\omega_0+Kx^2$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases}x=0\\\omega=1000\end{cases}\Rightarrow\omega_0=1000\qquad\begin{cases}x=8\\\omega=2024\end{cases}\Rightarrow K=16\Rightarrow\omega=1000+16x^2$$

$$\text{نیروی متمرکز معادل} = \text{برآیند بار گسترده} = \int_0^8\omega dx=\int_0^8(1000+16x^2)dx=1000\,x+\frac{16x^3}{3}\Big]_0^8=10730\,N=R_A$$

مثال۶۶: عکس‌العمل تکیه‌گاه A در تیر شکل زیر، که در معرض بارهای بیضوی و مستطیلی قرار دارد، چند کیلونیوتن است؟

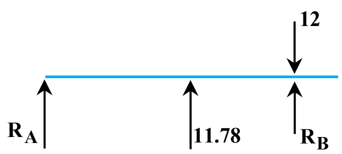


۱) ۱۷

۲) ۱۸/۹۰

۳) ۵/۱۵

۴) ۱۹/۷۱



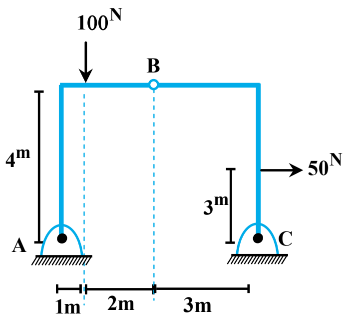
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا باید به‌جای بارهای گسترده مستطیلی و بیضوی نیروهای متمرکز معادل را در محل مناسب جایگزین کنیم. محل اثر نیروی متمرکز معادل بار گسترده مستطیلی روی تکیه‌گاه B است و فقط بار گسترده بیضوی نسبت به تکیه‌گاه B گشتاور دارد. در ایـن صـورت مقـدار نیـروی عکس‌العملی تکیه‌گاه A طبق محاسبات زیر برابر ۵/۱۵ می‌شود.

$$\sum M_B = \circ \Rightarrow (R_A \times ۸) = (۱۱/۷۸ \times ۳/۵) \Rightarrow R_A = ۵/۱۵kN$$

توضیح: مقدار نیروی معادل بار گسترده بیضوی برابر است با مساحت نیم‌بیضی و محل اثر آن در وسط بار گسترده بیضوی می‌باشد:

$$\frac{\pi \times ۳ \times ۲/۵}{۲} = ۱۱/۷۸$$

مثال ۶۷: نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه A کدام است؟



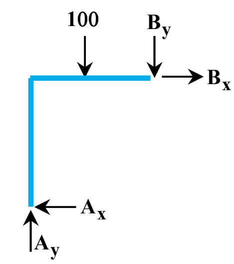
۱) $۵۸/۶^N$

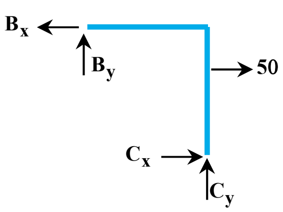
۲) $۶۳/۲^N$

۳) $۵۶/۳^N$

۴) $۶۴/۵۵^N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که می‌بینید سازه مورد نظر یـک قـاب اسـت، پـس ابتـدا دیاگرام جسم آزاد قطعات اصلی سازنده آن (میله‌های AB و BC) به‌صورت مجـزا ترسـیم می‌شوند، سپس با برقراری شش رابطه تعادل (هر جسم دارای سه رابطه در صفحه می‌باشـد) به صورت زیر عمل می‌کنیم:



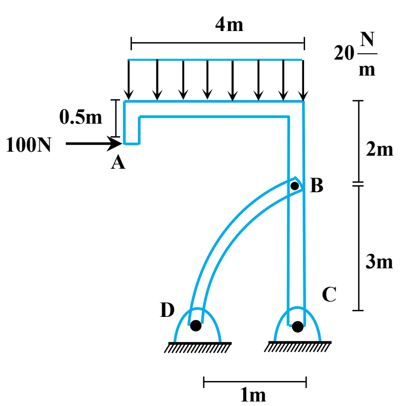


$$\Rightarrow \begin{cases} B_x - A_x = \circ & (\sum F_x = \circ) \\ ۱\circ\circ + B_y - A_y = \circ & (\sum F_y = \circ) \\ (۱\circ\circ \times ۲) - (A_y \times ۳) - (A_x \times ۴) = \circ & (\sum M_B = \circ) \\ \hline ۵\circ + C_x - B_x = \circ & (\sum F_x = \circ) \\ B_y + C_y = \circ & (\sum F_y = \circ) \\ (۵\circ \times ۳) + (B_y \times ۳) - (B_x \times ۴) = \circ & (\sum M_C = \circ) \end{cases}$$

برای این که عکس‌العمل‌های افقی و عمودی تکیه‌گاه A به دست آید، لازم است روابط فوق همزمان حل شوند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A_x = ۶/۲۵ \\ A_y = ۵۸/۳ \end{cases} \Rightarrow (\text{نیروی تکیه‌گاه } A)\ A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = \sqrt{۶/۲۵^۲ + ۵۸/۳^۲} = ۵۸/۶^N$$

مثال ۶۸: مقدار نیرو در تکیه‌گاه لولایی B کدام است؟ (از وزن قطعات صرف‌نظر می‌شود)

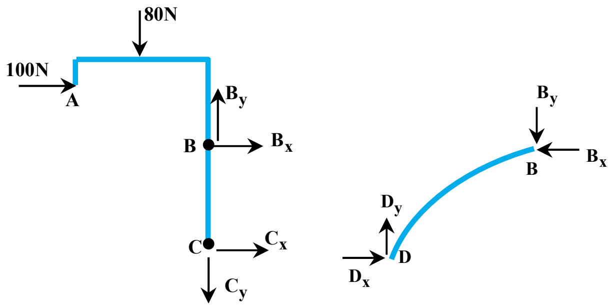


۱) $۳۰۵/۷N$

۲) $۹۶/۷N$

۳) $۲۹۰N$

۴) $۳۳۲/۴N$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مشاهده می‌شود که این مسأله یک مسأله‌ی قاب است، برای حل این قاب باید دیاگرام جسم آزاد دو قطعه آن به صورت مجزا رسم شده و روابط تعادل حاصل همزمان حل شوند. لذا:

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow (B_x \times ۳) + (۱۰۰ \times ۴/۵) - (۸۰ \times ۲) = ۰ \Rightarrow B_x = ۹۶/۷\text{N}$$

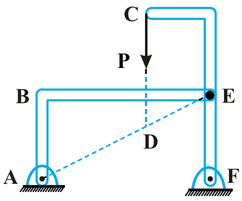
$$\sum M_D = ۰ \Rightarrow (B_x \times ۳) - (B_y \times ۱) = ۰ \Rightarrow B_y = ۲۹۰\text{N}$$

حال که مؤلفه‌های عکس‌العملی تکیه‌گاه B مشخص شده‌اند، می‌توان مقدار نیروی عکس‌العملی در B را به صورت زیر به دست آورد:

$$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = \sqrt{۲۹۰^۲ + ۹۶/۷^۲} = ۳۰۵/۷$$

مثال ۶۹: قاب شکل زیر به وسیله پین در نقاط A، E و F اتصال داده شده است. راستای عکس‌العمل تکیه‌گاه F از کدام نقطه عبور می‌کند؟

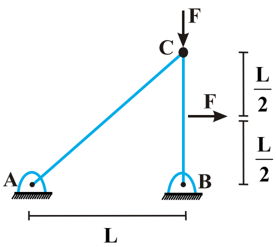
۱) A
۲) B
۳) C
۴) E



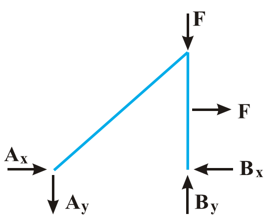
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر به شکل دقت کنید قطعه ABE را یک جسم دو نیرویی می‌بینید. بنابراین نیروهای عکس‌العمل نقاط E و A در راستای قطر AE هستند. در کل سازه، تنها سه نیرو اثر می‌کنند که باید این سه نیرو همگرا باشند، یعنی عکس‌العمل تکیه‌گاه F از محل برخورد AE و راستای نیروی P می‌گذرد، بنابراین نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه F مجبور است از مرکز مستطیل ABEF بگذرد که این راستا تنها نقطه B را شامل می‌شود.

مثال ۷۰: در مکانیزم شکل زیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه B کدام است؟

۱) F
۲) $\frac{۳F}{۲}$
۳) $\frac{F}{۲}$
۴) ۰

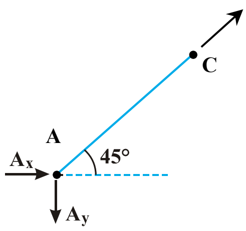


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با رسم دیاگرام جسم آزاد کل شکل داریم:



$$\begin{cases} \sum M_B = ۰ \Rightarrow (F \times \frac{L}{۲}) - (A_y \times L) = ۰ \Rightarrow A_y = \frac{F}{۲} \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + F = B_y \Rightarrow B_y = \frac{F}{۲} + F = \frac{۳F}{۲} \end{cases}$$

ضمناً قطعه AC یک جسم دو نیرویی است پس می‌توان نوشت:

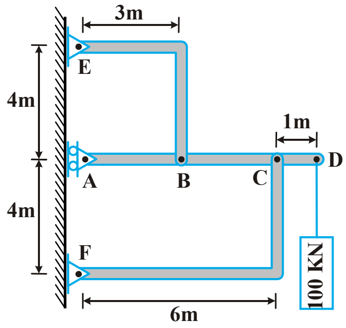


$$\Rightarrow Ax = -Ay \Rightarrow A_x = -\frac{F}{۲}$$

حال از رابطه $\sum F_x = ۰$ در دیاگرام جسم آزاد شکل کل سازه داریم:

$$A_x + F = B_x \Rightarrow B_x = \frac{F}{۲} + F = \frac{F}{۲}$$

مثال۷۱: در شکل مقابل سه عضو ABCD و EB و FC توسط تکیه‌گاه‌های مفصلی E و F و تکیه گاه غلطکی A و مفصل‌های B و C برای تحمل یک بار ۱۰۰ کیلونیوتنی تشکیل یک سازه پایدار را می‌دهند. عکس‌العمل تکیه‌گاه A کدام است؟



۱) ۲۲۵kN

۲) ۴۱/۷kN

۳) ۲۴۰kN

۴) ۲۵۲kN

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل مسأله لازم است سه عضو ABCD، EB و FC را جدا نموده و برای هر یک معادلات تعادل مربوطه را نوشت. با توجه به اینکه دو عضو EB و FC دو نیرویی‌اند ساده‌تر آن است که بنویسیم:

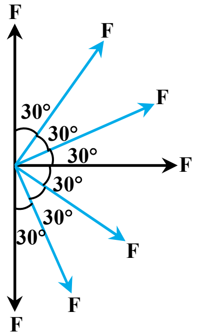
$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow F_{FC} \times \frac{۲}{۳/۶} \times ۳ + ۱۰۰ \times ۴ = ۰ \Rightarrow F_{FC} = ۲۴۰\,kN$$

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow F_{EB} \times \frac{۴}{۵} \times ۳ - ۱۰۰ \times ۱ = ۰ \Rightarrow F_{EB} = +۴۱/۷kN$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x + F_{FC} \times \frac{۳}{۳/۶} + F_{EB} \times \frac{۳}{۵} = ۰ \Rightarrow A_x = -۲۲۵kN$$

آزمون فصل اول

۱ـ برآیند بردارهای شکل زیر کدام است؟



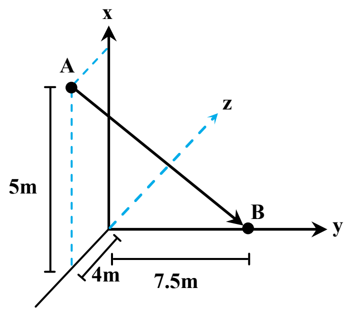
۱) $۲F$

۲) F

۳) $(۲+\sqrt{۲})F$

۴) $(۲+\sqrt{۳})F$

۲ـ بردار $\overline{AB}$ کدام است؟



۱) $-۵\vec{i}+۷/۵\vec{j}+۴\vec{k}$

۲) $۵\vec{i}+۷/۵\vec{j}-۴\vec{k}$

۳) $۵\vec{i}-۷/۵\vec{j}+۴\vec{k}$

۴) $-۵\vec{i}-۷/۵\vec{j}+۴\vec{k}$

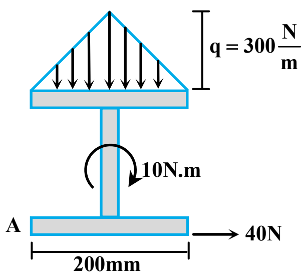
۳ـ تصویر بردار $\vec{A}=۱۰\vec{i}+۲۰\vec{j}+۳\vec{k}$ بر بردار $\vec{B}=۱۰\vec{i}+۱۲\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۰۰}{\sqrt{۵۰۰}}$　۲) $\frac{۵۰۰}{\sqrt{۲۴۴}}$　۳) $\frac{۱۳۶}{\sqrt{۲۴۴}}$　۴) $\frac{۱۳۶}{\sqrt{۵۰۰}}$

۴ـ اگر $\vec{V}_۱=۳\vec{i}$، $\vec{V}_۱\cdot\vec{V}_۲=۰$ و $\vec{V}_۱\times\vec{V}_۲=۱۲\vec{k}$ باشند، آنگاه بردار $\vec{V}_۲$ کدام است؟

۱) $۳\vec{i}+۴\vec{j}$　۲) $-۳\vec{i}+۴\vec{j}$　۳) $۴\vec{j}$　۴) $-۴\vec{j}$

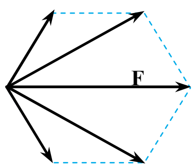
۵ـ سیستم نیروـ گشتاور شکل زیر را به یک سیستم نیرو ـ گشتاور فقط در معادل A خلاصه کنید؟



۱) $\begin{cases} M=۱۰^{N.m} \\ R=۴۰^{N} \end{cases}$　۲) $\begin{cases} M=۳۰^{N.m} \\ R=۳۰^{N} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} M=۱۲^{N.m} \\ R=۵۰^{N} \end{cases}$　۴) $\begin{cases} M=۲۰^{N.m} \\ R=۴۰^{N} \end{cases}$

۶ـ برآیند نیروهای شکل مقابل برحسب F کدام است؟



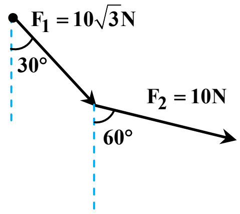
۱) $۲F$

۲) $۳F$

۳) $۴F$

۴) $۵F$

۷ـ برآیند دو نیروی F_1 و F_2 چند نیوتن است؟



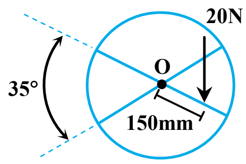
۱) ۷۰۰

۲) $10\sqrt{7}$

۳) $10\sqrt{4+\sqrt{3}}$

۴) $100(4+\sqrt{3})$

۸ـ نیروی ۲۰N روی میله دسته فرمان و در صفحه آن اعمال می‌گردد (عمود و به سمت پائین)، گشتاور این نیرو حول مرکز دسته فرمان چند نیوتن متر است؟



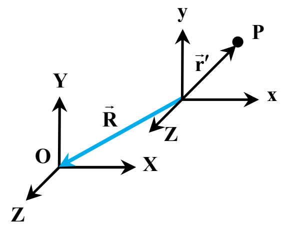
۱) ۳/۷۵

۲) ۳/۵

۳) ۲/۸۶

۴) ۲/۲

۹ـ دو دستگاه مختصات XYZ و xyz در شکل زیر نشان داده شده‌اند. بردار وضع نقطه "O" مبدأ مختصات دستگاه XYZ نسبت به دستگاه xyz به صورت $\vec{R} = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$ است. در صورتی که بردار وضع نقطه P نسبت به دستگاه xyz، $\vec{r}' = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ باشد، بردار وضع نقطه P نسبت به دستگاه XYZ کدام است؟



۱) $7\vec{i} + 4\vec{j} - 11\vec{k}$

۲) $-7\vec{i} - 4\vec{j} - 11\vec{k}$

۳) $13\vec{i} + 8\vec{j} - 11\vec{k}$

۴) $-13\vec{i} - 8\vec{j} + 11\vec{k}$

۱۰ـ معادلات تعادل یک سیستم نیروی متقاطع با محور x ها کدام است؟

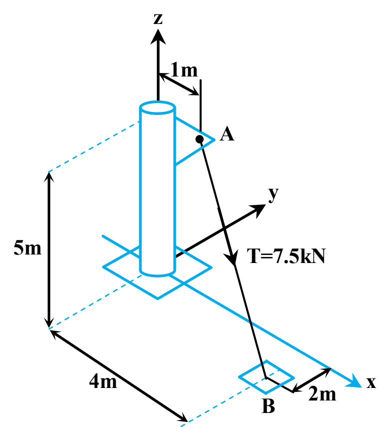
۱) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$

۱۱ـ کابل AB نیروی کششی معادل ۷/۵ کیلو نیوتن به لچکی A در شکل زیر وارد می‌کند. این نیرو معادل کدام است؟



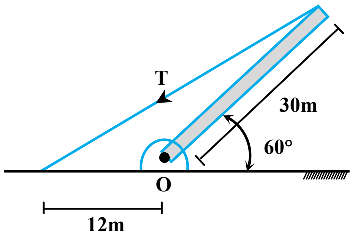
۱) $\frac{7/5}{\sqrt{38}}(5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$

۲) $\frac{7/5}{\sqrt{38}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k})$

۳) $\frac{7/5}{\sqrt{38}}(3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k})$

۴) $\frac{7/5}{\sqrt{38}}(5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k})$

۱۲ـ برای بلند کردن تیر ۳۰ متری مطابق شکل زیر، نیروی کشش T در کابل باید گشتاوری به اندازه ۷۲ کیلونیوتن متر حول نقطه O ایجاد کند. مقدار T چند kN است؟



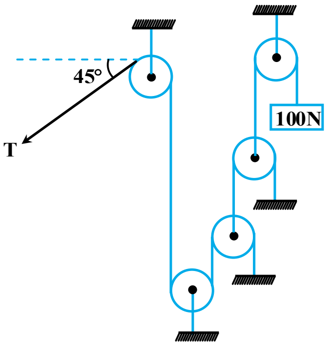
۱) ۷/۵

۲) ۶/۰۴

۳) ۹/۵۲

۴) ۷/۵۹

۱۳ـ کشش کابل T چند نیوتن است؟



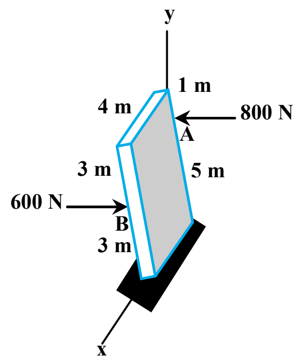
۱) $25\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) ۲۵

۳) $50\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) ۵۰

۱۴ـ دو نیرو عمود بر صفحه ورق مطابق شکل زیر اعمال شده‌اند، مختصات نقطه‌ای که برآیند این دو نیرو از آن می‌گذرد، به ترتیب چند متر است؟



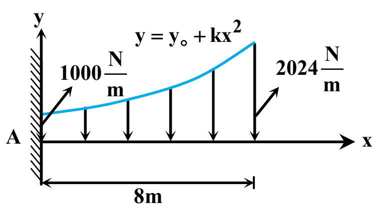
۱) $\begin{cases}\bar{x}=20^{m}\\ \bar{y}=13^{m}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\bar{x}=15^{m}\\ \bar{y}=13^{m}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\bar{x}=12^{m}\\ \bar{y}=11^{m}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\bar{x}=10^{m}\\ \bar{y}=10^{m}\end{cases}$

۱۵ـ نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه A چند نیوتن است؟



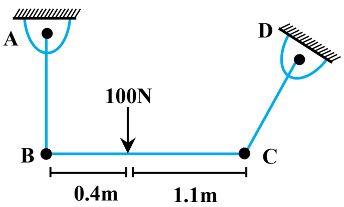
۱) ۱۳۵۲۱

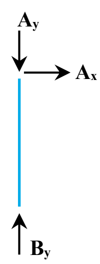
۲) ۱۰۷۳۰

۳) ۱۱۵۳۱

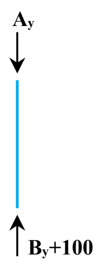
۴) ۱۲۳۱۲

۱۶ـ دیاگرام جسم آزاد میله AB در مکانیزم چهارمیله‌ای شکل زیر کدام است؟ (از وزن قطعات صرف‌نظر می‌شود)

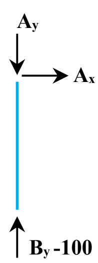




(۱)



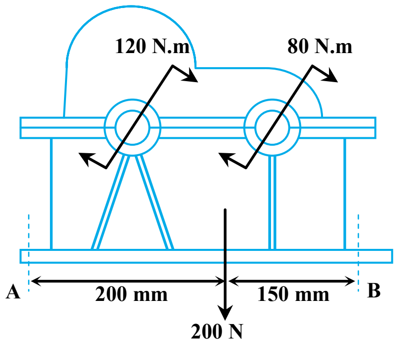
(۲)



(۳)

(۴)

۱۷ـ در گیربکس کاهنده شکل زیر، نیروی 200^{N} و دو گشتاور ۸۰ و ۱۲۰ نیوتن متر وارد می‌گردند. نیروی عمودی که تکیه‌گاه A تحمل می‌کند کدام است؟



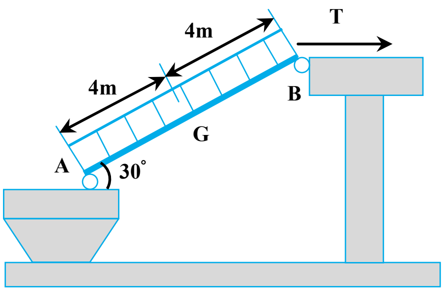
۱) ۵۶۸

۲) ۴۸۶

۳) ۵۸۸

۴) ۶۲۸

۱۸ـ گذرگاهی از موج‌شکن تا پل شناور که توسط دو غلتک مطابق شکل نگهداری می‌شود را برای تحمل بالا و پایین رفتن موج ساخته‌اند. اگر مرکز جرم گذرگاه ۳۰۰ کیلوگرمی در نقطه G باشد، نیروی زیر غلتک A کدام است؟ $(g = 9/8 \frac{m}{s^2})$



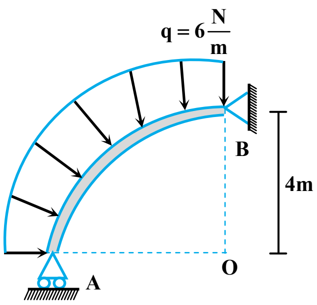
۱) ۱۳۵۷

۲) ۱۳۵۸

۳) ۱۴۷۲

۴) ۱۴۰۲

۱۹ـ عکس‌العمل تکیه‌گاه A چند نیوتن است؟



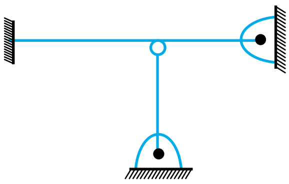
۱) ۲۴

۲) ۲۶/۶۴

۳) ۴/۲۴

۴) ۸/۴۹

۲۰ـ درجه نامعینی سازه شکل زیر کدام است؟ (تمام گره‌ها صُلب می‌باشند)



۱) ۳

۲) ۶

۳) ۱۰

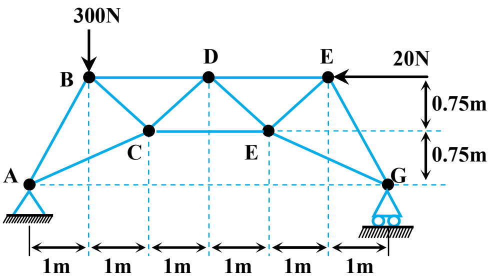
۴) ۰

فصل دوم

«خرپاها (Trusses)»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال ۱: در خرپای شکل زیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر کدام گزینه است؟



۱) ۲۰ N

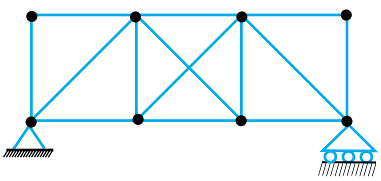
۲) ۱۶N

۳) ۸۰ N

۴) ۳۲۰ N

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که خرپا معین استاتیکی می‌باشد، پس نیروی عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه لولایی A با استفاده از دیاگرام جسم آزاد کل خرپا برابر ۲۰ N یعنی همان بار افقی وارد بر خرپا می‌باشد.

مثال ۲: وضعیت خرپای روبرو کدام است؟



۱) ناپایدار

۲) پایدار و معین

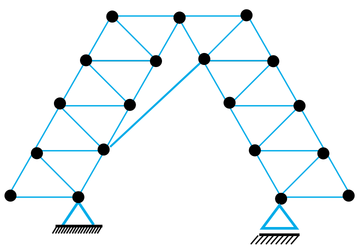
۳) پایدار و دو درجه نامعین

۴) پایدار و یک درجه نامعین

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وضعیت تکیه‌گاه‌ها، خرپای مذکور معین استاتیکی می‌باشد، ضمناً:

$$\begin{cases} (\text{تعداد اعضا})\ m = ۱۴ \Rightarrow m + ۳ = ۱۷ \\ (\text{تعداد لولاها})\ \ j = ۸ \Rightarrow j \times ۲ = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow \text{خرپا ناپایدار است}$$

مثال ۳: خرپای مقابل کدام وضعیت را داراست؟



۱) ناپایدار

۲) پایدار و معین

۳) پایدار و یک درجه نامعین

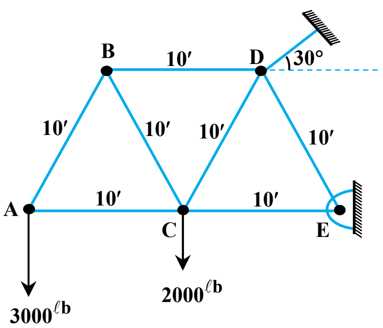
۴) پایدار و دو درجه نامعین

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خرپا از نظر استاتیکی معین است چون یک تکیه‌گاه غلتکی و یک تکیه‌گاه لولایی دارد، ضمناً :

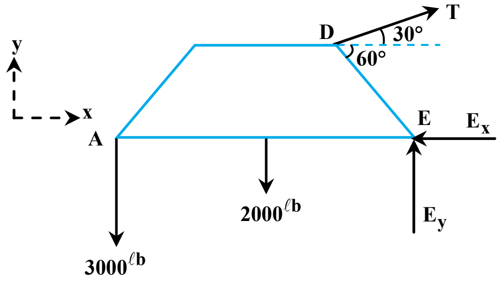
$$\begin{cases} m = \text{تعداد اعضا} = ۳۵ \\ j = \text{تعداد لولاها} = ۱۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳۵ + ۳ = ۳۸ \\ ۱۹ \times ۲ = ۳۸ \end{cases} \Rightarrow \text{خرپا پایدار می‌باشد}$$

مثال ۴: عکس‌العمل‌ها و نیروهای وارد بر تمام اعضاء خرپای نشان داده شـده در شـکل روبرو که توسط کابل DF در نقطه D و مفصل در نقطه E ثابت شده را محاسبه نمایید؟



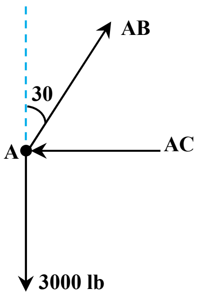
☑ **پاسخ:** همان‌طور که در صورت سؤال دیده می‌شود نیروهای وارده به تمام اعضاء مـورد نظـر است، پس بهتر است که محاسبات بـا روش مفصـل انجـام گـردد. بـرای محاسـبه عکـس‌العمـل تکیه‌گاه‌ها لازم است ابتدا دیاگرام جسم آزاد کل خرپا بعنوان یک جسم صُلب رسم گردد. مطابق این دیاگرام جسم آزاد و معادلات تعادل مرتبط با آن خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow -E_x + T\cos 30^\circ = 0\\ \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + T\sin 30^\circ - 5000 = 0\\ \sum M_E = 0 \Rightarrow (T\times 10) = (2000\times 10) + (3000\times 20)\end{cases}$$

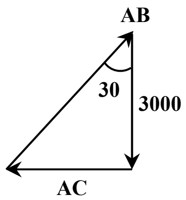
از حل همزمان سه معادله فوق نتایج زیر به دست می‌آیند:

$T = 8000^{\ell b}$ ، $E_x = 6930^{\ell b}$ ، $E_y = 1000^{\ell b}$



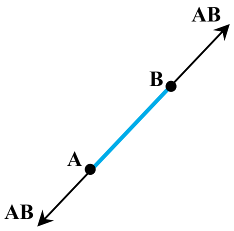
همان‌طور که می‌بینید در هر یک از مفصل‌های A و E دو مجهول وجود دارد. بنابراین، می‌توان محاسبات را از هر یک از این دو مفصل شروع نمود. با رسم دیاگرام جسم آزاد مفصل A و برقراری روابط تعادل در آن داریم:

$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow -AC + AB\sin 30^\circ = 0\\ \sum F_y = 0 \Rightarrow AB\cos 30^\circ - 3000 = 0\end{cases}$$



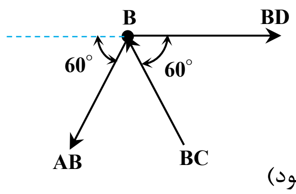
در نتیجه می‌توان نوشت: $AC = 1732^{\ell b}$, $AB = 3464^{\ell b}$

چون بین نیروها در لولای A همگرایی وجود دارد، پس می‌توان به جای برقراری روابط تعادل، از قضیه سینوس‌ها نیز استفاده نمود و مقدار نیروی اعضا را به دست آورد: $\dfrac{AB}{\sin(90^\circ)} = \dfrac{AC}{\sin(150^\circ)} = \dfrac{3000}{\sin(120^\circ)}$



در شکل می‌بینید که نیروی AB مفصل A را به سمت عضو AB می‌کشد، بنابراین عضو AB کششی است. به عکس، نیرویی که عضو AC به مفصل وارد می‌کند فشاری است و مفصل A را از عضو AC دور می‌کند لذا عضو AC فشاری است.

اکنون می‌دانیم نیرویی که مفصل B به عضو AB وارد می‌کند عکس جهت نیروی AB است که عضو، به مفصل B وارد می‌کند، بعلاوه دو سر عضو با یک نیرو در دو جهت کشیده می‌شود. با مشخص شدن مقدار نیرو در عضو AB گره‌ای از خرپا که دارای دو نیروی مجهول باشد گره B است. در این گره خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow BD - BC\cos 60^\circ - AB\cos 60^\circ = 0\\ \sum F_y = 0 \Rightarrow BC\sin 60^\circ - AB\sin 60^\circ = 0\end{cases}$$

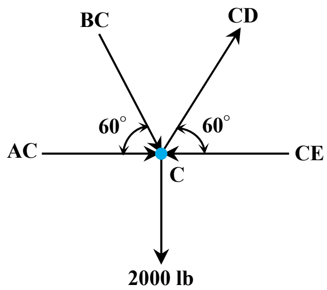
(همان‌طور که قبلاً نیز توضیح داده شد از قضیه سینوس‌ها نیز می‌توان جهت محاسبه نیروی اعضاء BC و BD استفاده نمود)

با معلوم بودن AB مقادیر نیروهای BC و BD نیز به دست می‌آیند، پس داریم:

$BC = 3464^{\ell b}$ فشاری و $BD = 3464^{\ell b}$ کششی

مفصل بعدی (که حداکثر دو نیروی مجهول دارد) می‌تواند هر یک از سه مفصل C، D یا E باشد.

دیاگرام جسم آزاد مفصل C و روابط تعادل در آن عبارتند از:

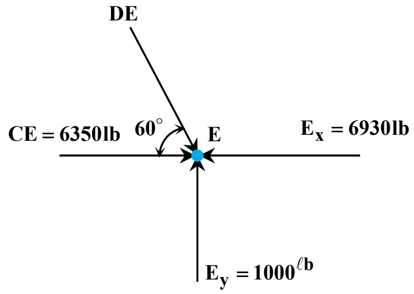


$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow AC - CE + BC\cos 60^\circ + CD\cos 60^\circ = 0\\ \sum F_y = 0 \Rightarrow CD\sin 60^\circ - BC\sin 60^\circ - 2000 = 0\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$CE = 6350^{\ell b}$ فشاری و $CD = 5774^{\ell b}$ کششی

توجه داشته باشید که در مجموع مفصل‌های E و D فقط یک مجهول وجود دارد و معادلات در این مفصل‌های انتهایی معمولاً برای کنترل و صحت محاسبات می‌باشد.

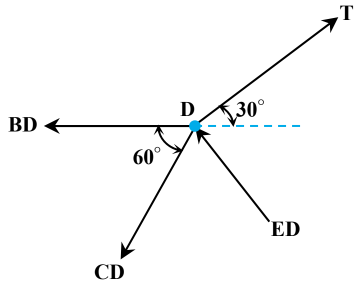


مفصل E:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow CE - E_x + DE\cos 60^\circ = 0 \Rightarrow DE = 1154^{\ell b} \quad \text{فشاری}$$

جهت کنترل و بررسی درستی مقادیر حساب شده می‌توان معادله تعادل در جهت y را در نظر گرفت:

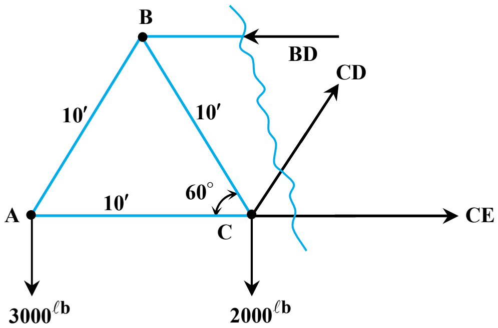
$$\sum F_y = 0 \ (\text{کنترل}) \Rightarrow 1000 - DE\sin 60^\circ = 0$$



مفصل D: معادلات تعادل این مفصل صرفاً با هدف کنترل نتایج نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \quad (\text{کنترل}) \Rightarrow T\cos 30^\circ - ED\cos 60^\circ - CD\cos 60^\circ - BD = 0 \\ \Rightarrow [8000(0/866)] - [1154(\frac{1}{2})] - [5774(\frac{1}{2})] - [3464] = 0 \\ \sum F_y = 0 (\text{کنترل}) \Rightarrow \ T\sin 30^\circ + ED\sin 60^\circ - CD\sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

مثال ۵: در مثال ۴ مطلوب است محاسبه مقدار نیروی فقط اعضای BD و DE؟



☑ **پاسخ:** الف) برای محاسبه مقدار نیرو در عضو BD ، بهترین راه‌حلی که پیشنهاد می‌شود، روش برش است. در این روش عضوی که هدف، پیدا کردن نیروی وارد به آن است (BD) همراه با یک قسمت از خرپا را برش زده و قطع می‌کنیم.

می‌توان خرپا را مطابق شکل فوق برش زده و دیاگرام جسم آزاد خرپای باقیمانده سمت چپ را بررسی نمود و یا اینکه می‌توان با همین برش طرف راست را بررسی کرد. برای استفاده از دیاگرام جسم آزاد سمت راست لازم است نیروهای عکس‌العمل را نیز محاسبه و جایگزین نمود.

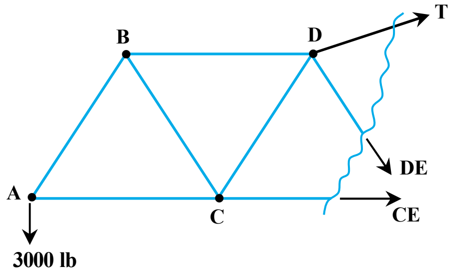
توصیه می‌شود که از دیاگرام جسم آزاد طرف چپ استفاده کنید، زیرا بدلیل نداشتن تکیه‌گاه، نیاز به هیچ نوع محاسبه قبلی نیست. اعضای BD، CD و CE دو نیرویی هستند. پس توجه کنید که نیروهای وارد بر آنها در امتداد خود اعضاء خواهند بود. این که اعضا را کششی یا فشاری فرض کنید مهم نیست، نتایج محاسبه، آن را تعیین می‌کند.

ملاحظه می‌شود که برای محاسبه نیروی عضو BD، کافی است از معادله تعادلی استفاده شود که در آن فقط BD وجود داشته باشد. چنین حالتی را می‌توان در رابطه $\sum M_C = 0$ یافت. چون نقطه C محل تلاقی دو مجهول دیگر مسأله (نیروهای CE و CD) بوده و با محاسبه گشتاور نسبت به نقطه C این دو نیرو از معادله تعادل حذف می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow [3000(10)] + [BD(10\sin 60^\circ)] = 0 \ \Rightarrow \ BD = -3464^{\ell b}$$

علامت منفی نشانه این است که جهت نیروی فرضی که فشاری در نظر گرفته شده صحیح نبوده و نیروی $3464^{\ell b}$ کششی خواهد بود. برای یکنواختی حل، بهتر است نیروی تمامی اعضاء برش خورده خرپا کششی فرض شوند. اگر حل معادلات تعادل نیروی مجهول با مقدار مثبتی را نشان دهد فرض کششی بودن صحیح بوده و اگر مقدار نیروی مجهول منفی به دست آید، عضو مذکور فشاری است.

ب) برای محاسبه مقدار نیروی وارد به عضو DE به هر طریق که خرپا برش زده شود، یکی از تکیه‌گاه‌ها در دیاگرام جسم (هر طرف آن) وجود دارد، بنابراین لازم است که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در چنین حالتی به دست آیند.



عکس‌العمل‌ها را با رسم دیاگرام جسم آزاد کل خرپا (بعنوان یک جسم صُلب) و استفاده از روابط تعادل به دست می‌آوریم (در مثال ۴ به تشریح آمده است):

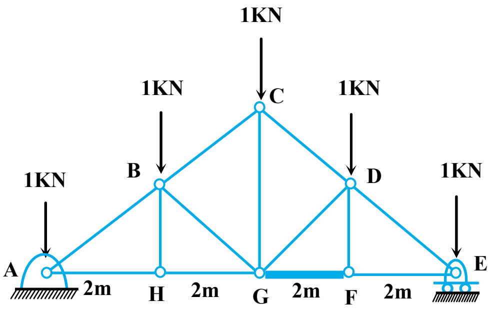
$$\begin{cases} E_y = 1000lb \\ E_x = 6930lb \\ T = 8000lb \end{cases}$$

می‌دانید که می‌خواهیم ED را به دست آوریم، با استفاده از خرپای برش خورده و رابطه تعادل گشتاورها نسبت به نقطه C، بقیه مجهولات حذف خواهند شد. بنابراین:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow [3000\times(10)] - [T\times(10\cos 60^\circ)] - [ED\times(10\sin 60^\circ)] = 0 \quad \Rightarrow \quad ED = -1154\,lb$$

در نتیجه نیروی ED که یک نیروی فشاری است معادل ۱۱۵۴ خواهد بود.

مثال۶: در خرپای مقابل نیروی عضو GF چند کیلونیوتن است؟



۱) ۲/۲۴

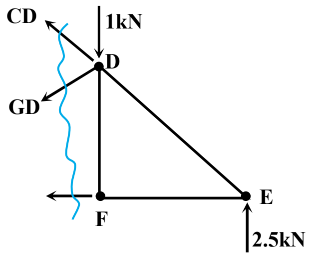
۲) ۳

۳) ۳/۳۵

۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه نیرو در عضو GF ، پس از محاسبه عکس‌العمل عمودی تکیه‌گاه E، از روش برش استفاده می‌کنیم:

(بعد از اعمال خط برش، دیاگرام جسم آزاد را برای خرپای سمت راست به صورت زیر ترسیم می‌کنیم)

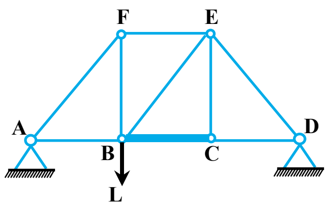


$$\sum M_D = ۰ \Rightarrow (۲/۵ \times ۲) - (GF \times ۱) = ۰ \Rightarrow GF = ۵\ kN$$

(با توجه به هندسه خرپا طول عضو DF، ۱ متر است)

ضمناً بارگذاری روی خرپا متقارن است و عکس‌العمل دو تکیه‌گاه A و E برابر و هر کدام $۲/۵kN$ می‌باشند.

مثال۷: در تیر مشبک مطابق شکل، در صورتی که بار $L = ۱۲kN$ و طول اعضاء افقی و عمودی هرکدام ۲ متر باشد، نیروی محوری عضو BC چند کیلو نیوتن است؟



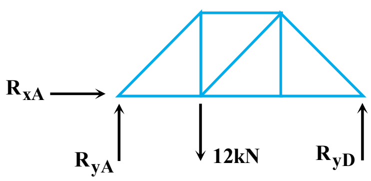
۱) ۰

۲) ۴

۳) ۸

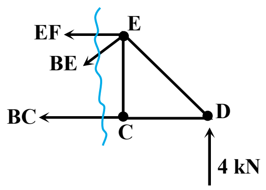
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۲» عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و D ، با رسم دیاگرام جسم آزاد کل خرپا به صورت زیر محاسبه می‌شوند:



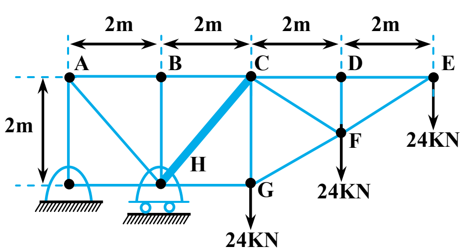
$$\begin{cases} R_{xA} = ۰ \quad (\sum F_x = ۰) \\ R_{yA} = (\frac{۴}{۶} \times ۱۲) = ۸\ kN \\ R_{yD} = (\frac{۲}{۶} \times ۱۲) = ۴\ kN \end{cases}$$

سپس با اعمال یک خط برش و رسم دیاگرام جسم آزاد سمت راست آن داریم:



$$\sum M_E = ۰ \Rightarrow (BC \times ۲) - (۴ \times ۲) = ۰ \Rightarrow BC = ۴\ kN$$

مثال۸: در شکل زیر نیرو در عضو CH، چند کیلونیوتن است؟

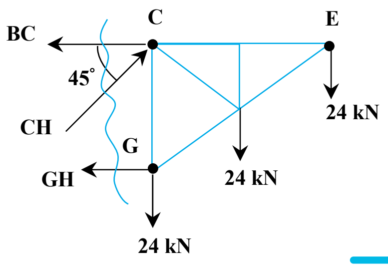


۱) ۱۰۱/۸

۲) ۱۵۱/۸

۳) ۱۳۲/۹

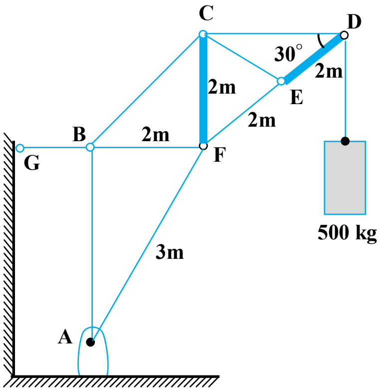
۴) ۱۲۱/۶



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به روش مقطع و بدون نیاز به محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروی عضو CH قابل دست‌یابی است:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow CH\cos 45^\circ = 72 \Rightarrow CH = 101/8\ kN$$

مثال ۹: در شکل زیر نیروی اعضای DE و CF، چند کیلونیوتن است؟

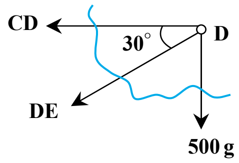


۱) $\begin{cases} DE = 8/52 \\ CF = 9/95 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} DE = 12/32 \\ CF = 10/71 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} DE = 11/52 \\ CF = 10/45 \end{cases}$

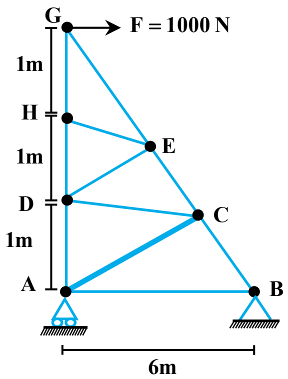
۴) $\begin{cases} DE = 9/81 \\ CF = 8/5 \end{cases}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» دیاگرام جسم آزاد برای مفصل D رسم می‌شود:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow CD + DE\cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow DE\sin 30^\circ + 500g = 0 \end{cases} \Rightarrow DE = 1000\,g\ N = g\ kN = 9/81\ kN$$

تنها گزینه چهارم است که مقدار صحیح DF را بیان می‌کند، لذا نیاز به محاسبه نیروی عضو CF برای تشخیص گزینه صحیح نمی‌باشد.



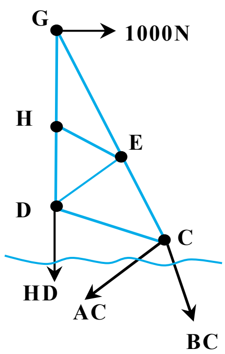
مثال ۱۰: نیرو در عضو AC از سازه شکل روبرو چند نیوتن است؟

۱) 500

۲) 0

۳) $500\sqrt{3}$

۴) $\frac{500\sqrt{3}}{3}$

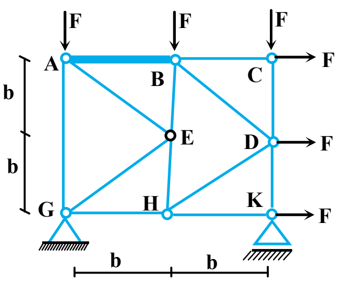


☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با اعمال یک خط برش بر خرپا و رسم دیاگرام جسم آزاد قسمت بالای آن (به این دلیل قسمت بالا انتخاب شده است که دیگر نیاز به محاسبه‌ی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نباشد) داریم:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow (AC \times \text{فاصله عمودی}) = 0$$

با توجه به اینکه فاصله عمودی، عددی غیر از صفر می‌باشد نتیجه می‌گیریم که قطعاً $AC = 0$ است.

مثال۱۱: در خرپای زیر، نیروی داخلی عضو AB کدام است؟



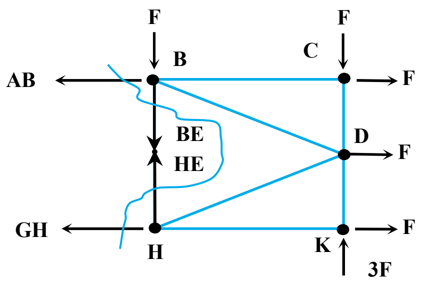
۱) F

۲) ۲F

۳) $\frac{F}{۲}$

۴) $\frac{F}{۳}$

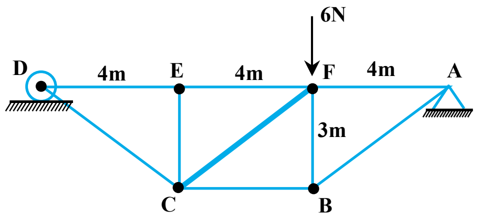
پاسخ: گزینه «۳» در خرپای «K شکل» مسأله داریم:



$$\sum M_H = ۰ \Rightarrow (AB \times ۲b) + (۳F \times b) - (F \times b) - (F \times ۲b) - (F \times b) = ۰$$

$$\Rightarrow AB = \frac{F}{۲}$$

مثال۱۲: نوع و مقدار نیروی عضو CF در خرپای شکل زیر کدام است؟



۱) فشاری، ۳/۳۳

۲) کششی، ۳/۳۳

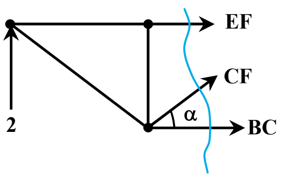
۳) فشاری، ۵/۳۳

۴) کششی، ۵/۳۳

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی D را با استفاده از دیاگرام جسم آزاد کل خرپا به عنوان یک جسم صُلب به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (R_{yD} \times ۱۲) - (۶ \times ۴) = ۰ \Rightarrow R_{yD} = ۲N$$

حال با استفاده از برش زیر و رسم دیاگرام جسم آزاد سمت چپ خرپا، پس از برش داریم:



$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲ + CF.\sin\alpha = ۰ \Rightarrow CF = \frac{-۲}{\sin\alpha}$$

با توجه به هندسهٔ خرپا، بدون محاسبه مقدار زاویه α، سینوس آن زاویه به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

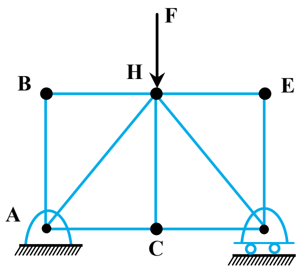
$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$CF = -\frac{۱۰}{۳} = -۳/۳۳\ N$$

که علامت منفی نشان دهنده فشاری بودن عضو CF می‌باشد.

مثال۱۲: خرپای زیر چند عضو صفر نیرویی دارد؟



۱) ۰

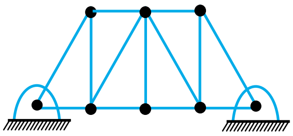
۲) ۳

۳) ۵

۴) ۷

پاسخ: گزینه «۳» با ملاحظه مفصل C، عضو CH (حالت ۱ از روش‌های تشخیص اعضای صفر نیرویی) و با در نظر گرفتن مفصل‌های B و E اعضاء BH، AB، DE و HE (حالت ۳ از روش‌های تشخیص اعضای صفر نیرویی) صفر خواهند شد.

مثال ۱۳: خرپای زیر چند عضو صفر نیرویی دارد؟ (از وزن اعضا صرف‌نظر شود)



۱) ۱۰

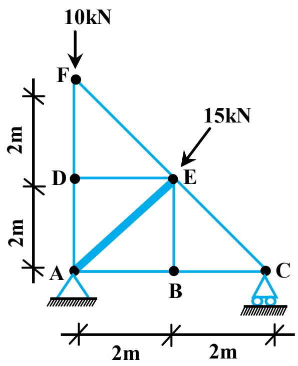
۲) ۱۲

۳) ۱۳

۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» به راحتی ملاحظه می‌گردد که هیچ بار خارجی بر خرپا وارد نشده و نیروی وزنی هم وجود ندارد، پس نتیجه می‌گیریم که تمامی اعضای خرپا صفر نیرویی خواهند بود.

مثال ۱۴: در سازه زیر نیروی میله AE چند کیلونیوتن می‌باشد؟



۱) ۲۵

۲) ۱۰

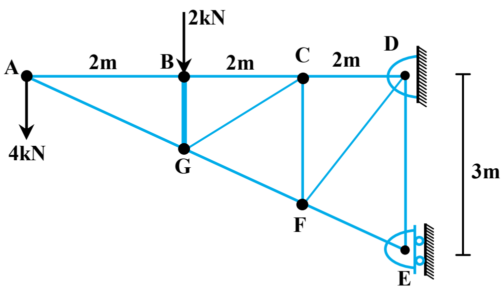
۳) ۱۵

۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳» اعضای DE و BE صفر نیرویی هستند. بعد از حذف آن دو عضو، نیروی ۱۵^{kN} تماماً در راستای عضو AE قرار می‌گیرد، لذا:

$F_{AE} = ۱۵^{kN}$

مثال ۱۵: نیروی عضو BG چند kN است؟



۱) ۵/۶

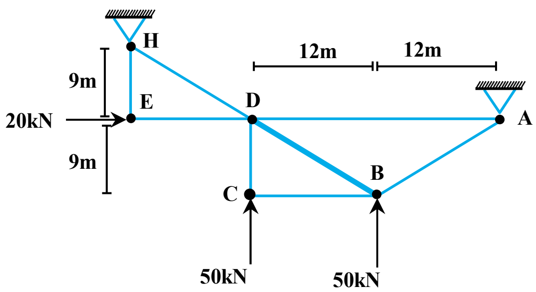
۲) ۳/۴

۳) ۱/۷

۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد نقطه B و با توجه به حالت ۱ از روش‌های تشخیص اعضای صفر نیرویی مشاهده می‌شود که نیرو در عضو BG، ۲ کیلونیوتن می‌باشد.

مثال ۱۶: در خرپای شکل زیر مقدار نیرو در عضو BD چند kN است؟



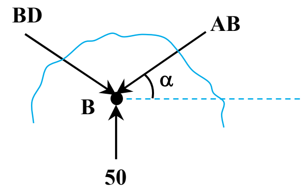
۱) ۰

۲) ۴۱/۷kN

۳) ۸۳/۳kN

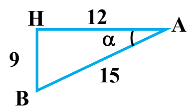
۴) ۲۵kN

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که عضو BC (طبق حالت ۱ از روش‌های تشخیص اعضاء صفر نیرویی) صفر نیرویی است، لذا از برش در مفصل B به صورت زیر جهت محاسبه نیروی عضو BD استفاده می‌شود:



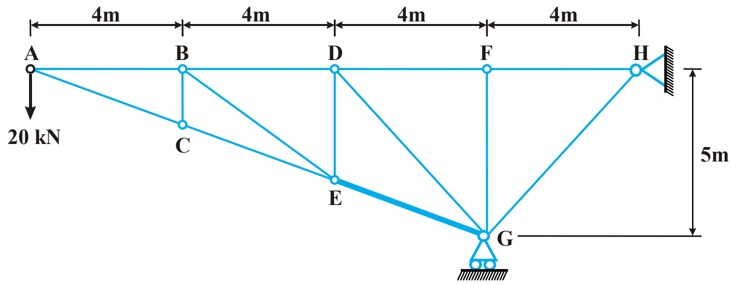
$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow AB = BD \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow BD.\sin\alpha + AB.\sin\alpha = 50 \Rightarrow 2BD.\sin\alpha = 50\end{cases}$$

با توجه به هندسه خرپا در مثلث ABH داریم:



$$\sin\alpha = \frac{9}{15} \Rightarrow BD = \frac{50}{2\times\frac{9}{15}} = 41/7\ \text{kN}$$

مثال ۱۷: در سازه شکل زیر، نیروی ایجاد شده در عضو EG کدام است؟



۱) ۰

۲) ۵۲

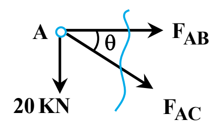
۳) ۲۲

۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل و توجه به اعضای صفر نیرویی داریم:

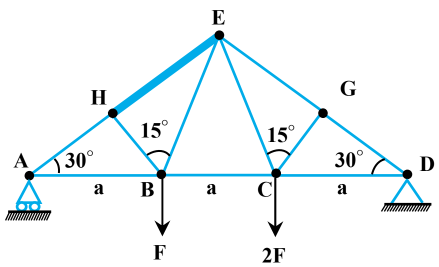
$$F_{BC} = F_{BE} = F_{ED} = F_{DG} = F_{GF} = 0 \qquad F_{AB} = F_{BD} = F_{DF} = F_{FH} \qquad F_{AC} = F_{CE} = F_{EG}$$

بنابراین برای به دست آوردن نیرو در عضو EG کافی است با اعمال یک خط برش مناسب، گره A را تحلیل کنیم، لذا:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 + F_{AC}\sin\theta = 0 \Rightarrow F_{AC} = 52\text{kN} = F_{CE} = F_{EG}$$

مثال ۱۸: نیرو در عضو HE برابر است با؟



۱) ۳F

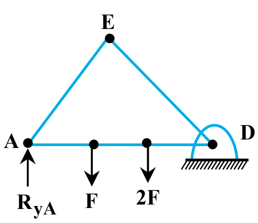
۲) ۲F

۳) $\frac{5}{3}F$

۴) $\frac{8}{3}F$

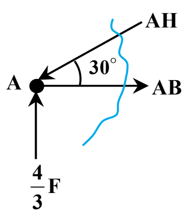
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل خرپا، عضو BH از سمت گره H (حالت ۲ از روش‌های تشخیص اعضا صفر نیرویی) صفر نیرویی است، لذا منظور از نیرو در عضو HE همان مقدار نیرو در عضو AH است زیرا این دو عضو در یک راستا قرار دارند.

برای محاسبه مقدار نیرو در عضو AH، ابتدا عکس‌العمل تکیه‌گاه A به صورت زیر محاسبه می‌گردد:



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow (R_{yA}\times 3a) - (F\times 2a) - (2F\times a) = 0 \Rightarrow R_{yA} = \frac{4}{3}F$$

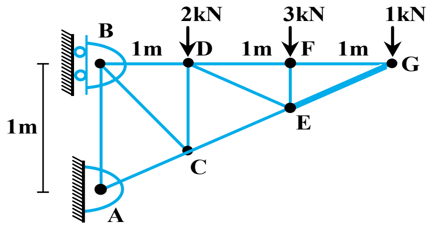
حال با ترسیم دیاگرام جسم آزاد گره A داریم:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}F - AH.\sin 30^\circ = 0 \Rightarrow AH = \frac{8}{3}F$$

آزمون فصل دوم

۱ـ در خرپای شکل زیر مقدار نیروی عضو EG برحسب kN کدام است؟



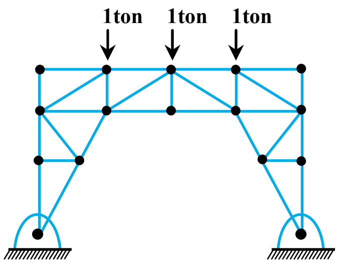
۱) ۳/۲

۲) ۳/۷

۳) ۴/۵

۴) ۴/۲

۲ـ خرپای شکل زیر چند عضو صفر نیرویی دارد؟



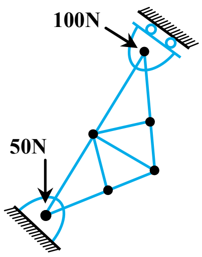
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۳ـ خرپای زیر چند عضو خنثی دارد؟



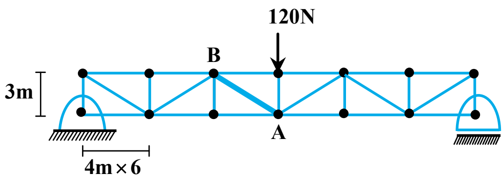
۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۷

۴ـ نیروی عضو AB چه مقدار و از چه نوعی است؟



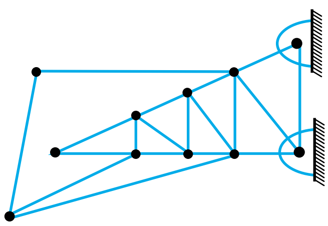
۱) ۷۵ نیوتن ـ فشاری

۲) ۱۰۰ نیوتن ـ فشاری

۳) ۷۵ نیوتن ـ کششی

۴) ۱۰۰ نیوتن ـ کششی

۵ـ وضعیت خرپای شکل زیر کدام است؟



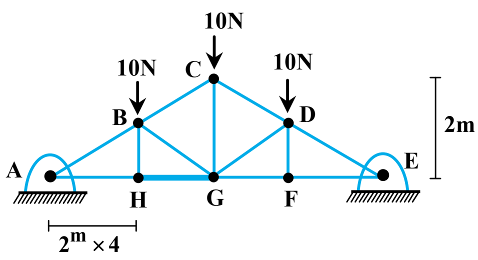
۱) معین ـ پایدار

۲) معین ـ ناپایدار

۳) نامعین ـ پایدار

۴) نامعین ـ ناپایدار

۶ـ برای پیدا کردن نیروی عضو GH بهترین راه‌حل کدام است؟



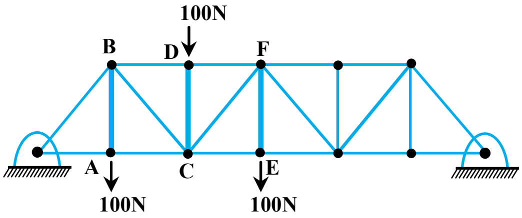
۱) با روش گره ـ دیاگرام آزاد گره H

۲) با روش گره ـ دیاگرام آزاد گره G

۳) با روش برش، برشی که اعضاء GH، BG و BC را برش بزنند.

۴) با روش برش، برشی که اعضاء GH، BG و CG و CD را برش بزنند.

۷ــ نیروی اعضاء AB، CD و EF به ترتیب برحسب N کدامند؟



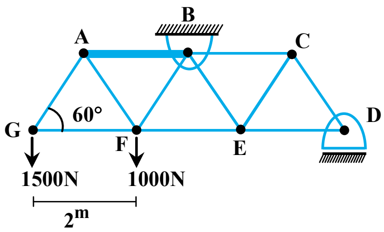
۱) ۰ , ۱۰۰ , ۱۰۰

۲) ۱۰۰ , ۱۰۰ , ۰

۳) ۱۰۰ , ۰ , ۰

۴) ۱۰۰ , ۱۰۰ , ۱۰۰

۸ــ در خرپای متساوی‌الاضلاع شکل زیر نیروی عضو AB چند نیوتن است؟



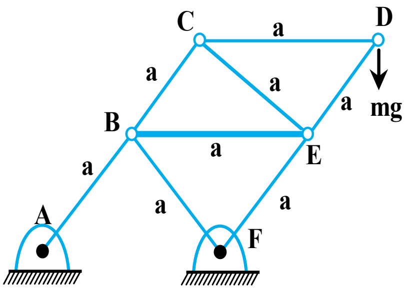
۱) ۱۵۰۰

۲) $۱۵۰۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰۰۰\sqrt{۳}$

۴) $۳۰۰۰\sqrt{۳}$

۹ــ در شکل زیر نیروی عضو BE کدام است؟



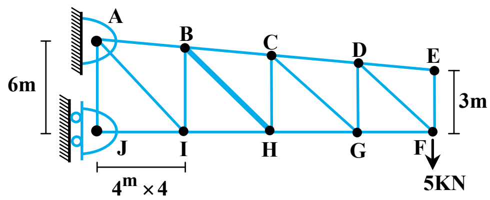
۱) $\frac{۲mg}{\sqrt{۵}}$

۲) $\frac{mg}{\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{mg}{\sqrt{۵}}$

۴) $\frac{۲mg}{\sqrt{۳}}$

۱۰ــ در خرپای داده شده زیر، نیروی داخلی عضو BH کدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟



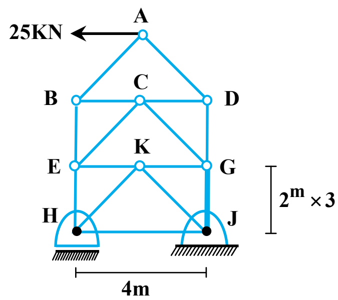
۱) $۳/۷۵^{KN}$

۲) $۴/۱۹^{KN}$

۳) $۴/۷۵^{KN}$

۴) $۵/۲^{KN}$

۱۱ــ در خرپای زیر نیروی داخلی عضو GJ کدام است؟



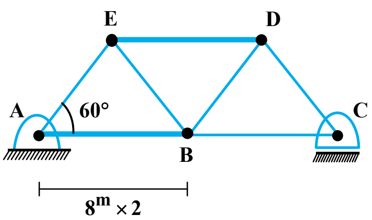
۱) ۲۷^{KN}

۲) ۵۰^{KN}

۳) ۲۵^{KN}

۴) ۷۵^{KN}

۱۲ــ در صورتی که هر عضو سازنده خرپای زیر ۴۰۰ کیلوگرم باشد، نیروی اعضای AB و DE برحسب kN کدام است؟ $(g = ۹/۸\frac{m}{s^۲})$



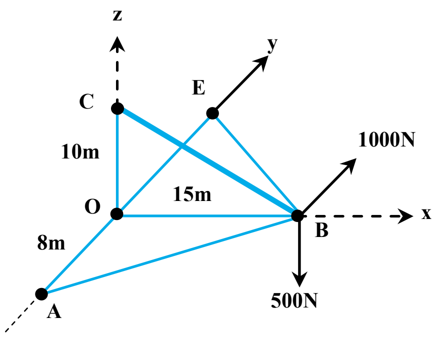
۱) $\begin{cases} AB = ۹/۷۵ \\ DE = ۸/۷۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} AB = ۱۰/۲۵ \\ DE = ۹/۹ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} AB = ۶/۵ \\ DE = ۹/۷۳ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} AB = ۵/۶۶ \\ DE = ۷/۹۳ \end{cases}$

۱۳ـ نیروی عضو BC در خرپای فضایی شکل زیر چند نیوتن است؟



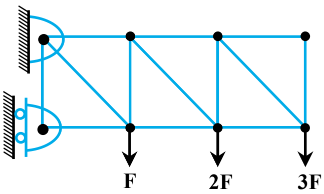
۱) ۳۰۰

۲) $۶۵\sqrt{۲۸۹}$

۳) $\sqrt{۲۸۹}$

۴) $۵۰\sqrt{۳۲۵}$

۱۴ـ خرپای زیر چند عضو صفر نیرویی دارد؟



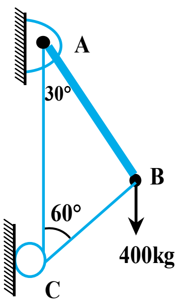
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۵ـ نیرو در عضو AB بر حسب نیوتن کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ $(g = ۹/۸\frac{m}{s^۲})$



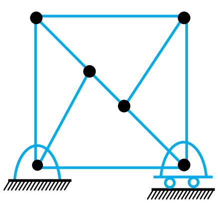
۱) ۳۳۹۵

۲) ۳۲۰۰

۳) ۲۹۵۰

۴) ۳۱۰۰

۱۶ـ خرپای شکل زیر از نظر استاتیکی چه وضعیتی دارد؟



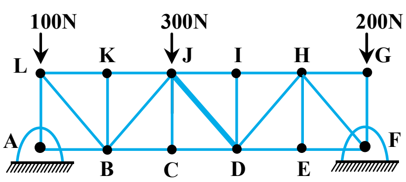
۱) پایدار ـ معین

۲) ناپایدار ـ معین

۳) پایدار ـ یک درجه نامعین

۴) ناپایدار ـ نامعین

۱۷ـ اگر تمام اعضای مورب خرپای نشان داده شده دارای زاویه ۴۵° باشند، نیروی وارد شده به عضو JD برحسب N چقدر است؟



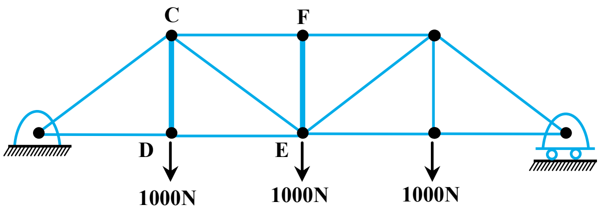
۱) $۱۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ـ فشاری

۲) $۶۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ـ فشاری

۳) $۱۲۰\sqrt{۲}$ ـ فشاری

۴) $۲۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ـ فشاری

۱۸ـ نیروهای داخلی اعضاء EF , CD در شکل زیر به ترتیب از چپ به راست چند نیوتن است؟



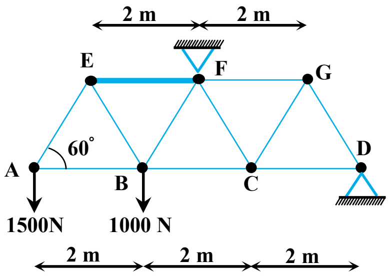
۱) ۰ , ۱۰۰۰

۲) ۱۰۰۰ , ۰

۳) ۵۰۰ , ۵۰۰

۴) ۲۰۰ , ۱۲۰۰

۱۹ـ در خرپای متساوی‌الاضلاع شکل زیر، نیروی داخلی عضو EF ، چند نیوتن است؟



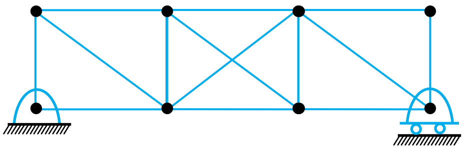
۱) ۱۵۰۰

۲) $۱۵۰۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰۰۰\sqrt{۳}$

۴) ۳۰۰۰

۲۰ـ وضعیت خرپای زیر کدام است؟



۱) ناپایدار

۲) پایدار و معین

۳) پایدار و دو درجه نامعین

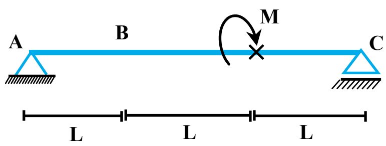
۴) پایدار و یک درجه نامعین

فصل سوم

«تیرها (Beams)»

تست‌های تألیفی فصل سوم

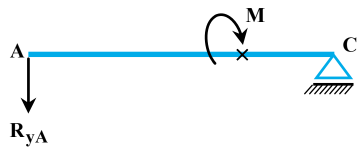
مثال۱: مقدار گشتاور در محل نقطه B برحسب پارامترهای مسأله کدام است؟



۱) $\frac{M}{3}$ ۲) $\frac{M}{3L}$

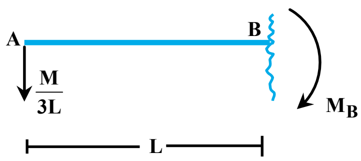
۳) $\frac{M}{6}$ ۴) $\frac{2M}{3L}$

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه مقدار گشتاور خمشی در محل نقطه B، ابتدا لازم است مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه A با رسم دیاگرام جسم آزاد تیر AC به صورت زیر محاسبه شود:



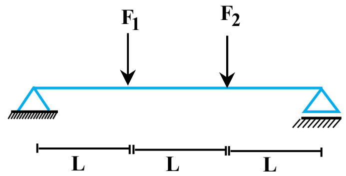
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow (R_{yA} \times 3L) - M = 0 \Rightarrow R_{yA} = \frac{M}{3L}$$

حال از محل موردنظر (B) تیر را برش زده دیاگرام جسم آزاد سمت چپ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



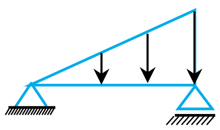
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{M}{3L} \times L = \frac{M}{3}$$

اگر مقادیر V و M در سراسر طول تیر موردنظر باشد (حل تیر)، لازم است برای یافتن معادله تغییرات V و M، قبل و بعد از اعمال هر نیروی (یا گشتاور) متمرکز یک خط برش اعمال گردد. لذا می‌بینید که تعداد برش‌های لازم یک تیر برای حل کلی آن، یک واحد بیشتر از تعداد نیروها و گشتاورهای متمرکز وارد بر آن می‌باشد. به عنوان نمونه در تیر شکل روبه‌رو (الف):

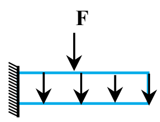


(الف)

برای حل، نیاز به سه برش (در محورهای $0 < x < L$ و $L < x < 2L$ و $2L < x < 3L$) دارد و برای حل تیر شکل زیر هم سه برش لازم است. در محدوده اعمال بار گسترده، یک برش برای حل تیر در آن گستره کافی است، به عنوان مثال در تیر شکل روبرو (ب)، برای حل (مشخص شدن V و M در تمام نقاط سراسر طول) فقط نیاز به یک برش و تیری با بارگذاری زیر (ج) نیاز به دو برش (به دلیل اعمال یک بار متمرکز) دارد.

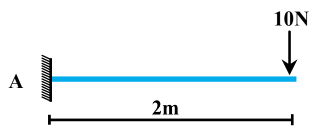


(ب)

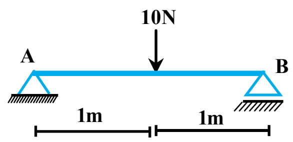


(ج)

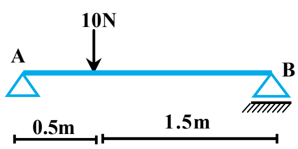
مثال۲: در کدام بارگذاری زیر، نیروی برشی دقیقاً برابر بار خارجی اعمالی بر تیر می‌باشد؟



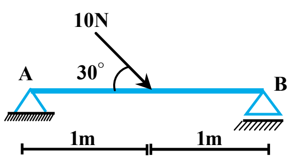
(۱)



(۲)



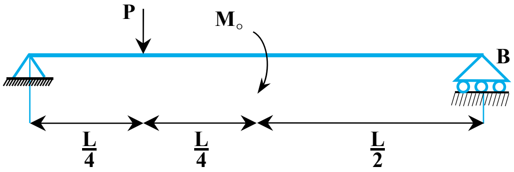
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۱» در بارگذاری تیر گزینه (۱)، مقدار نیروی برشی در سراسر طول تیر برابر ۱۰ N می‌باشد. در صورتی که در دیگر گزینه‌ها، مقدار نیروی برشی در طرفین نقطه اثر نیروی ۱۰ N برابر عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها و عددی غیر از بار خارجی ۱۰ N می‌باشد.

مثال۳: تیر ساده AB تحت تأثیر بار متمرکز P و کوپل $M_\circ$ مطابق شکل زیر قرار گرفته است. نیروی برشی در سطحی به فاصله خیلی کم در طرف چپ نقطه وسط تیر، کدام یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟



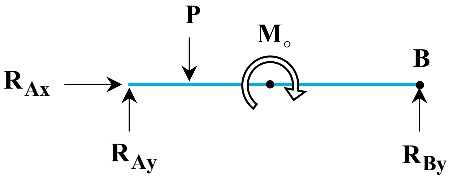
۱) $\left(-\frac{P}{۲}-\frac{M_\circ}{L}\right)$

۲) $\left(-\frac{P}{۶}-\frac{M_\circ}{L}\right)$

۳) $\left(-\frac{P}{۸}-\frac{M_\circ}{L}\right)$

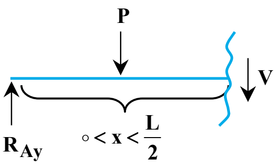
۴) $\left(-\frac{P}{۴}-\frac{M_\circ}{L}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از دیاگرام جسم آزاد تیر، مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی A به صورت زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{cases}\sum F_x=\circ \Rightarrow R_{Ax}=\circ \\ \sum M_B=\circ \Rightarrow (R_{Ay}\times L)+M_\circ=P\times\frac{۳L}{۴}\Rightarrow R_{Ay}=\frac{۳P}{۴}-\frac{M_\circ}{L}\end{cases}$$

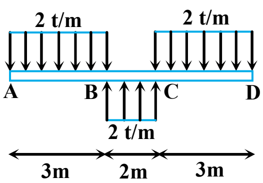
حال با اعمال یک خط برش در محل موردنظر داریم:



$$\left(\frac{L}{۴}<x<\frac{L}{۲}\right)$$

$$\sum F_y=\circ\Rightarrow V=R_{Ay}-P=\frac{۳P}{۴}-\frac{M_\circ}{L}-P=\frac{-P}{۴}-\frac{M_\circ}{L}$$

مثال۴: در بخشی از یک تیر مطابق شکل، اگر برش در محل A، ۱۲ تن باشد، آنگاه برش محل C، چند تن است؟



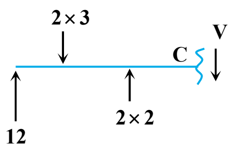
۱) ۶

۲) ۱۰

۳) ۱۲

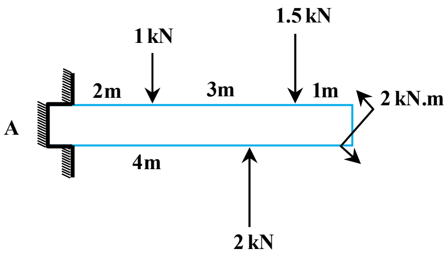
۴) ۲۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه مقدار نیروی برشی در محل نقطه C باید از محل موردنظر، تیر برش زده شود و دیاگرام جسم آزاد سمت راست تیر ترسیم گردد، لذا:



$$\sum F_y=\circ \Rightarrow ۱۲-۶+۴-V=\circ \Rightarrow V=۱\circ\ \text{ton}$$

مثال۵: مطابق شکل زیر، تیر یک سر گیردار با جرم واحد طول $۵\circ\frac{kg}{m}$ را در نظر می‌گیریم، نیروی برشی (V) در تکیه‌گاه A چند KN است؟



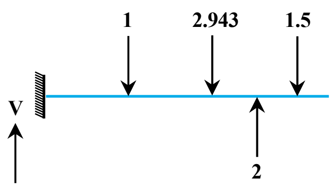
۱) ۴/۴۳

۲) ۴/۲۱

۳) ۳/۴۴

۴) ۴/۸۵

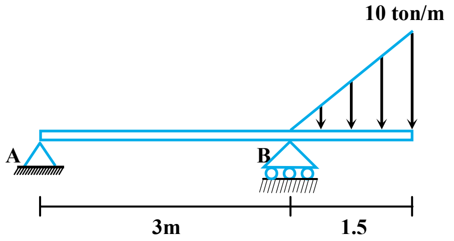
☑ **پاسخ:** گزینه«۳» توجه کنید که نیروی وزن که به صورت یک بار گسترده با شدت $۵\circ\times ۹/۸۱$ در طول ۶m اعمال می‌شود، به صورت یک نیروی منفرد با اندازه ۲/۹۴۳ kN در وسط تیر مدل می‌شود، لذا:



$$\sum F_y=\circ\Rightarrow V=۱+۱/۵+۲/۹۴۳-۲=۳/۴۴\ \text{kN}$$

ضمناً در محاسبه نیروی برشی، گشتاور متمرکز اعمالی بر تیر اثری در محاسبات ندارد.

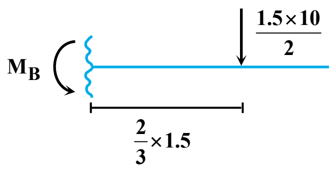
مثال۶: ممان وارده بر تیر در تکیه‌گاه B، چند تن متر است؟



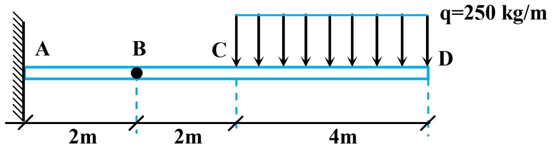
۱) ۵/۶۲
۲) ۷/۵
۳) ۱۱/۲۵
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه ممان (گشتاور) نسبت به هر نقطه دلخواه از تیر، کافی است از محل مورد نظر، تیر را به دو قسمت برش بزنیم و گشتاور نیروهای یک طرف را نسبت به آن نقطه محاسبه نماییم، لذا خواهیم داشت:

$$M_B = \frac{۱۰\times ۱/۵}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times ۱/۵ = ۷/۵ \ \text{ton.m}$$



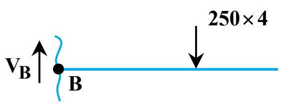
مثال۷: مقدار نیروی برشی تیر شکل زیر در نقطه B برابر با کدام گزینه است؟



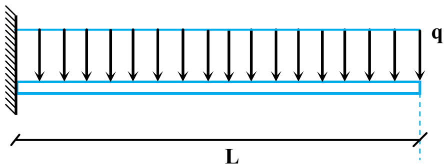
۱) ۵۰۰kg
۲) ۲۵۰kg
۳) ۱۵۰۰kg
۴) ۱۰۰۰kg

پاسخ: گزینه «۴» مقدار نیروی برشی در محل B، با اعمال خط برش بر تیر در آن نقطه و استفاده از دیاگرام جسم آزاد سمت راست به صورت روبرو محاسبه می‌گردد:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_B = ۱۰۰۰\text{kg}$$



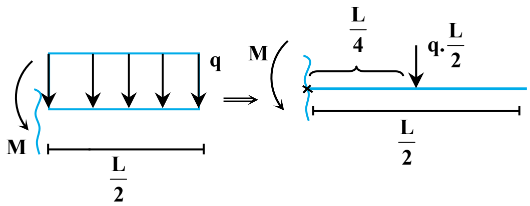
مثال۸: مقدار لنگر خمشی در وسط تیر شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



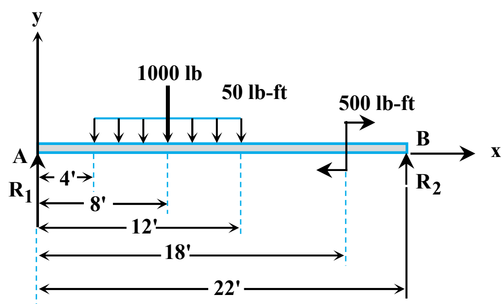
۱) $\frac{qL^۲}{۴}$
۲) $\frac{qL^۲}{۸}$
۳) $\frac{qL^۲}{۲}$
۴) $\frac{qL}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» با وجود بار گسترده، از محل وسط تیر برش می‌زنیم، سپس به جای بار گسترده، نیروی متمرکز معادل آن را قرار می‌دهیم:

$$M = q\frac{L}{۲}\times\frac{L}{۴} = \frac{q.L^۲}{۸}$$



مثال۹: معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده ($R_۱$ و $R_۲$ عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های دو سر تیر می‌باشند) را که در شکل روبرو نشان داده شده است در محدوده‌های $۰ < x < ۴$، $۴ < x < ۸$ و $۸ < x < ۱۲$ تعیین کنید؟ (از وزن تیر صرف‌نظر شود)

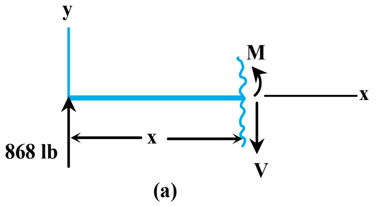


پاسخ: ابتدا نیروهای تکیه‌گاهی تیر را با استفاده از روابط تعادل محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sum M_B = ۰ \Rightarrow -R_۱(۲۲)+(۵۰)(۸)(۱۴)+(۱۰۰۰)(۱۴)-۵۰۰=۰ \Rightarrow R_۱ = ۸۶۸\,\text{lb}\\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_۱ + R_۲ - ۱۰۰۰ - (۵۰\times۸) = ۰ \Rightarrow R_۲ = ۵۳۲\,\text{lb}\end{cases}$$

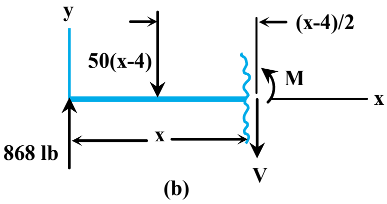
توجه کنید که در این نوع مسائل که تعیین معادله نیروی برشی یا لنگر خمشی در یک محدوده (و نه در یک نقطه) موردنظر است، تیر در یک نقطه فرضی از محدوده موردنظر (با مختصات x) برش داده می‌شود. سپس با استفاده از معادلات تعادل، نیروی برشی و لنگر خمشی برحسب x محاسبه می‌شوند.

در اشکال زیر دیاگرام جسم آزاد مربوط به مقاطع مختلف بین تکیه‌گاه سمت چپ (تکیه‌گاه A) و نقطه انتهایی بار گسترده نشان داده شده است. با استفاده از معادلات تعادل خواهیم داشت: $۰ < x < ۴$



$$\begin{cases}۸۶۸ - V = ۰ \Rightarrow V = ۸۶۸\,\text{lb}\\ -۸۶۸x + M = ۰ \Rightarrow M = ۸۶۸x \quad (\text{lb}-\text{ft})\end{cases}$$

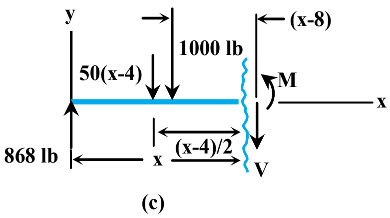
ناحیه بعدی بین نقطه شروع بار گسترده و محل اعمال بار متمرکز قرار دارد. بنابراین با توجه به شکل داریم:



$۴ < x < ۸$:

$$\begin{cases}۸۶۸ - ۵۰(x-۴) - V = ۰ \Rightarrow V = ۱۰۶۸ - ۵۰x\ \text{lb}\\ -۸۶۸x + \dfrac{۵۰(x-۴)^۲}{۲} + M = ۰ \Rightarrow M = -۲۵x^۲ + ۱۰۶۸x - ۴۰۰\ (\text{lb}-\text{ft})\end{cases}$$

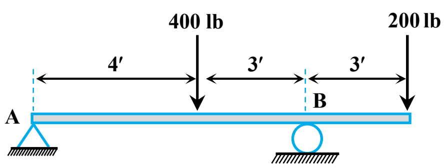
حال ناحیه بین محل اعمال بار متمرکز و نقطه انتهایی بار گسترده را در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل داریم:



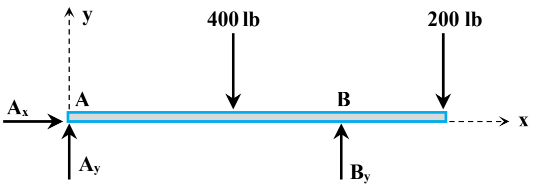
$۸ < x < ۱۲$:

$$\begin{cases}۸۶۸ - ۵۰(x-۴) - ۱۰۰۰ - V = ۰ \Rightarrow V = -۵۰x + ۶۸\ \text{lb}\\ -۸۶۸x + \dfrac{۵۰(x-۴)^۲}{۲} + ۱۰۰۰(x-۸) + M = ۰ \Rightarrow M = -۲۵x^۲ + ۶۸x + ۷۶۰۰\ (\text{lb}-\text{ft})\end{cases}$$

مثال ۱۰: دیاگرام تغییرات نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر داده شده را به صورت تابعی از x (طول نقطه از طرف چپ تیر) رسم نمایید؟



پاسخ: ابتدا باید نیروهای عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها را محاسبه نمود. با رسم دیاگرام جسم آزاد کل تیر و استفاده از معادلات تعادل در صفحه خواهیم داشت:

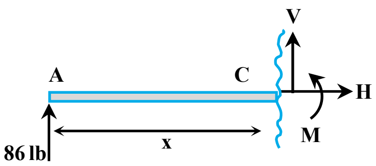


$$\begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰\\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y = ۶۰۰\,\text{lb}\\ \sum M_A = ۰ \Rightarrow (۷\times B_y) - (۴\times۴۰۰) - (۱۰\times۲۰۰) = ۰\end{cases}$$

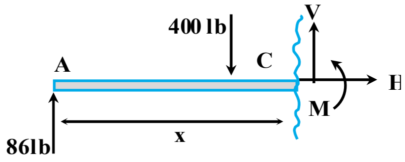
$$B_y = \frac{۳۶۰۰}{۷} = ۵۱۴\,\text{lb} \quad و \quad A_y = ۶۰۰ - ۵۱۴ = ۸۶\,\text{lb}$$

چنانچه قبلاً نیز ذکر شد منحنی‌های نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر در نقاط اعمال بارها و گشتاورها ناپیوسته هستند. لذا برای تعیین مقادیر نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر داده شده سه برش (در حد فاصل محل اثر بارهای متمرکز) لازم داریم که در زیر آنها را شرح می‌دهیم:

۱) نقطه C بین A و محل اثر نیروی $۴۰۰\,\text{lb}$ است $(x < ۴)$:



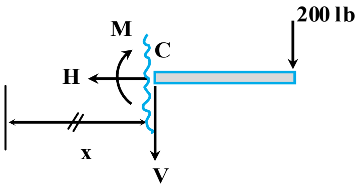
$$\begin{cases}\sum F_y = ۰ \Rightarrow V + ۸۶ = ۰ \Rightarrow V = -۸۶\,\text{lb}\\ \sum M_A = ۰ \Rightarrow V.x + M = ۰ \Rightarrow M = -V.x = ۸۶.x\ \ \text{lb.ft}\end{cases}$$



۲) نقطه C بین محل اثر نیروی ۴۰۰ lb و تکیه‌گاه B است $(۴ < x < ۷)$:

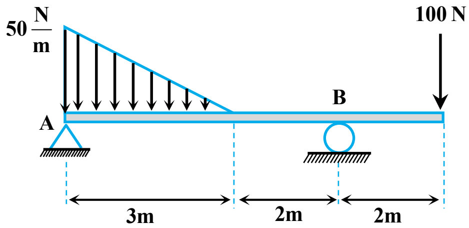
$$\begin{cases}\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۸۶ - ۴۰۰ + V = ۰ \Rightarrow V = ۳۱۴\ \text{lb} \\ \sum M_A = ۰ \Rightarrow -۴۰۰(۴) + V.x + M = ۰ \Rightarrow M = ۱۶۰۰ - V.x = ۱۶۰۰ - ۳۱۴.x\ \ \text{lb.ft}\end{cases}$$

۳) نقطه C طرف راست تکیه‌گاه B است $(۷ < x < ۱۰)$:



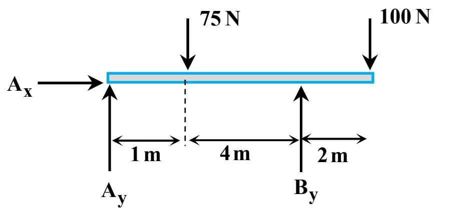
در این حالت می‌توان مانند حالات قبل دیاگرام طرف چپ را کشید، ولی به نظر می‌رسد دیاگرام آزاد طرف راست ساده‌تر باشد:

$$\begin{cases}\sum F_y = ۰ \Rightarrow V + ۲۰۰ = ۰ \Rightarrow V = -۲۰۰\text{lb} \\ \sum M_C = ۰ \Rightarrow ۲۰۰(۱۰ - x) + M = ۰ \Rightarrow M = ۲۰۰x - ۲۰۰۰\ \ \text{lb.ft}\end{cases}$$

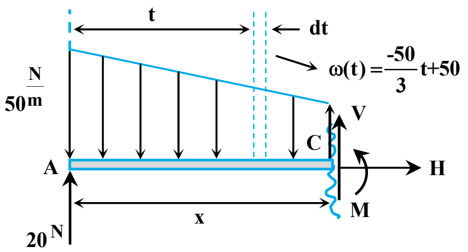


مثال۱۱: دیاگرام تغییرات گشتاور خمشی (M) و نیروی برشی (V) تیر داده شده را به صورت تابعی از x، (فاصله نقطه از سمت چپ تیر) رسم نمایید؟

☑ **پاسخ:** ابتدا باید عکس‌العمل تکیه‌گاههای تیر محاسبه گردد. لذا دیاگرام جسم آزاد کل تیر را رسم نموده و با استفاده از معادلات تعادل داریم:



$$\begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow B_y + A_y = ۱۰۰ + ۷۵ \\ \sum M_A = ۰ \Rightarrow (-۷۵ \times ۱) + (B_y \times ۵) - (۱۰۰ \times ۷) = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۵۵^N, A_y = ۲۰^N\end{cases}$$



برای محاسبه گشتاور خمشی و نیروی برشی باید نقطه C را بین A و نقطه‌ای که بار گسترده قطع می‌شود، یعنی $۰ < x < ۳$، هم چنین فاصله‌های $۳ < x < ۵$ و $۵ < x < ۷$ جداگانه فرض کرد و محاسبات را به صورت زیر انجام داد.

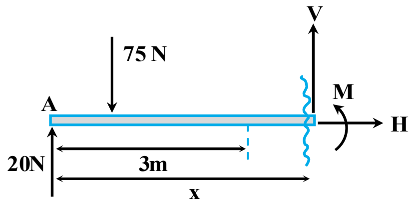
۱) در صورتی که $۰ < x < ۳$:

مقطع c با فاصله x از طرف چپ تیر را فرض می‌کنیم. بار گسترده در فاصله $۰ < t < x$ به صورت $\omega(t) = -\frac{۵۰}{۳}t + ۵۰^N$ خواهد بود.

$$\begin{cases}\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲۰ + V - \int_۰^x \omega(t)dt = ۰ \Rightarrow \int_۰^x \omega(t)dt = ۲۰ + V \\ \int_۰^x \omega(t)dt = \int_۰^x \left(\frac{-۵۰}{۳}t + ۵۰\right)dt = -\frac{۵۰}{۶}t^۲ + ۵۰t\Big]_۰^x = -\frac{۲۵}{۳}x^۲ + ۵۰x \Rightarrow V = \frac{-۲۵}{۳}x^۲ + ۵۰x - ۲۰\,(\text{N}) \\ \sum M_A = ۰ \Rightarrow xV + M - \int_۰^x t\,\omega(t)dt = ۰ \Rightarrow \int_۰^x t\,\omega(t)\,dt = \int_۰^x \left(\frac{-۵۰}{۳}t^۲ + ۵۰t\right)dt = -\frac{۵۰}{۹}t^۳ + ۲۵t^۲\Big]_۰^x = -\frac{۵۰}{۹}x^۳ + ۲۵x^۲ \\ M = -\frac{۵۰}{۹}x^۳ + ۲۵x^۲ - \left(-\frac{۲۵}{۳}x^۳ + ۵۰x^۲ - ۲۰x\right) \Rightarrow M = \frac{۲۵}{۹}x^۳ - ۲۵x^۲ + ۲۰x\ \ (\text{N.m})\end{cases}$$

۲) اگر $3 < x < 5$ باشد:

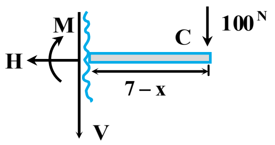
چون در این بازه، تمام بار گسترده در دیاگرام جسم آزاد قسمت برش خورده وجود دارد لذا می‌توان نیروی متمرکز معادل آن را در دیاگرام جسم آزاد منعکس نمود:



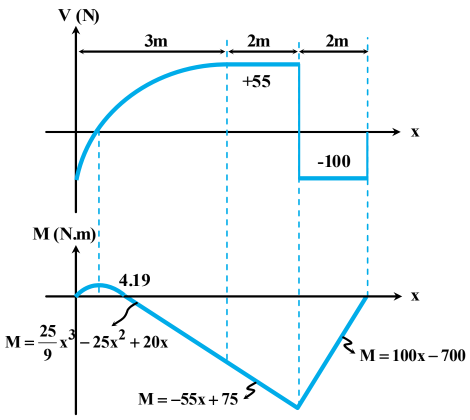
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow 20 + V - 75 = 0 \Rightarrow V = 55\ (N) \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow -75(1) + V.x + M = 0 \Rightarrow M = -55x + 75\ \ (N.m) \end{cases}$$

۳) در صورتی که $5 < x < 7$ باشد:

در این محدوده می‌توان دیاگرام جسم آزاد سمت راست یا چپ تیر را بکار برد. با استفاده از دیاگرام جسم آزاد طرف راست خواهیم داشت:



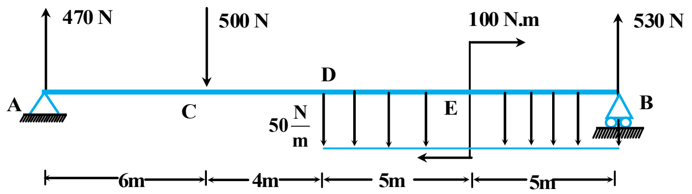
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow 100 + V = 0 \Rightarrow V = -100\ (N) \\ \sum M_C = 0 \Rightarrow 100(7 - x) + M = 0 \Rightarrow M = 100x - 700\ (N.m) \end{cases}$$



بنابراین منحنی‌های $V(x)$ و $M(x)$ مطابق شکل خواهند بود. حداکثر و حداقل نیروی برشی به ترتیب $55\ N$ و $-100\ N$ و حداکثر و حداقل گشتاور خمشی به ترتیب $4/19\ N.m$ و $-200\ N.m$ خواهند بود.

توجه کنید که آنچه در محاسبات مقاومت مصالح مهم (در بخش‌های بعدی به این موضوع اشاره خواهد شد) است، حداکثر مقدار عددی $|V|$ و $|M|$ می‌باشد نه حداکثر V و M. در اینجا حداکثر $|V|$ برابر $100(lb)$ و حداکثر $|M|$ مساوی $200\ N.m$ است.

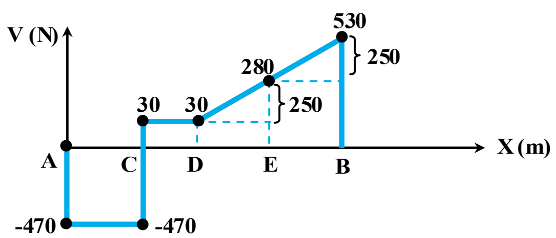
مثال ۱۲: نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده‌ای که در شکل نشان داده شده است مشخص کنید؟

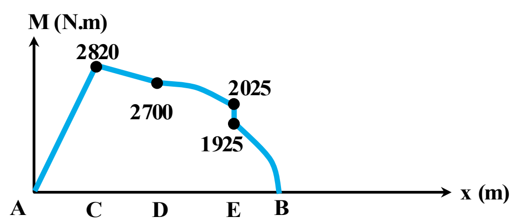


☑ **پاسخ:** همان‌طور که می‌دانید نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_A و R_B با استفاده از روابط تعادل به دست می‌آیند. بنابراین می‌توان نوشت:

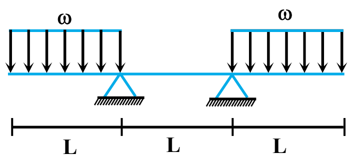
$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \Rightarrow (-R_A)(20) + (500)(14) + (50)(10)(\frac{10}{2}) - 100 = 0 \Rightarrow R_A = 470\,N \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow (R_B)(20) - (500)(6) - (50)(10)(15) - 100 = 0 \Rightarrow R_B = 530\,N \end{cases}$$

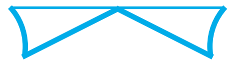
با توجه به نوع و محل اثر بارها و گشتاور بر تیر و تعداد برش‌های لازم بر آن داریم:





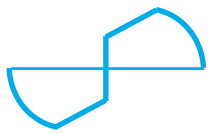
مثال ۱۳: نمودار لنگر تیر زیر به کدام صورت است؟



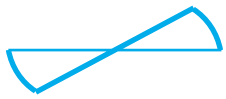


(۱)

(۲)



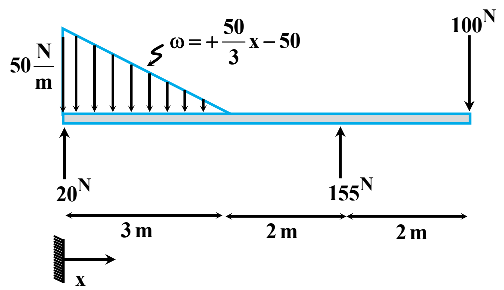
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۲» توجه داشته باشید که در محل‌های اعمال بار گسترده مستطیلی، تغییرات گشتاور خمشی به صورت سهمی ماکزیمم‌دار می‌باشد و در بین دو تکیه‌گاه گشتاور خمشی دارای مقدار ثابت است.

مثال ۱۴: مثال ۲۴ را با استفاده از روابط ریاضی حل نمایید؟



با توجه به بارهای اعمال شده بر تیر سه بازه تعریف می‌شود، پس انتگرال‌گیری روی هر بازه به صورت زیر انجام می‌شود:

۱) برای $۰ < x < ۳$ داریم:

$$\omega(x) = +\frac{۵۰}{۳}x - ۵۰$$

$$\Rightarrow V(x) = -\int_۰^x \omega(t)dt = -\frac{۲۵}{۳}x^۲ + ۵۰x + C$$

ثابت انتگرال‌گیری (C) با استفاده از مقدار نیروی برشی در نقطه $x = ۰$ محاسبه می‌شود:

$$x = ۰ : \quad V = -۲۰ \Rightarrow C = -۲۰$$

در نتیجه داریم:

$$V(x) = -\frac{۲۵}{۳}x^۲ + ۵۰x + (-۲۰)$$

با استفاده از $V(x)$، معادله $M(x)$ نیز به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

$$M(x) = -\int_۰^x V(t)dt = -\int_۰^x \left(-\frac{۲۵}{۳}t^۲ + ۵۰t - ۲۰\right)dt + D$$

ثابت D با استفاده از صفر بودن لنگر خمشی در نقطه $x = ۰$ به دست می‌آید:

$$x = ۰ : \quad M = ۰ \Rightarrow D = ۰$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$M(x) = \frac{۲۵}{۹}x^۳ - ۲۵x^۲ + ۲۰x$$

۲) برای $۳ < x < ۵$ داریم:

$$\omega(x) = ۰$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$V(x) = -\int \omega(x)dx \Rightarrow V(x) = E$$

جهت تعیین ثابت E کافی است توجه کنیم که در نقطه $x = ۳$ به دلیل عدم وجود بار متمرکز، منحنی $V(x)$ باید پیوسته باشد یعنی: $V(۳^+) = V(۳^-)$.

$V(۳^-)$ را با استفاده از معادله $V(x)$ در بازه $۰ < x < ۳$ و $V(۳^+)$ را با استفاده از معادله $V(x)$ در بازه $۳ < x < ۵$ می‌توان محاسبه نمود:

$$V(۳^-) = -\frac{۲۵}{۳}(۳^۲) + ۵۰(۳) - ۲۰ = ۵۵ \quad ; \quad V(۳^+) = E \Rightarrow E = ۵۵$$

در نتیجه $E = ۵۵lb$ و $V(x) = ۵۵\ lb$. لذا:

$$M(x) = -\int V(x)dx \Rightarrow -۵۵x + F$$

به روش مشابه مقدار F از شرط $M(۳^+) = M(۳^-)$ محاسبه می‌شود:

$$\frac{۲۵}{۹}(۳^۳) - ۲۵(۳^۲) + ۲۰(۳) = -۵۵(۳) + F \Rightarrow F = +۷۵$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$M(x) = -۵۵x + ۷۵$$

۳) برای $۵ < x < ۷$ داریم:

$$\omega(x) = ۰$$

$$V(x) = -\int \omega(x)dx \Rightarrow V(x) = G$$

برای تعیین G باید توجه کنیم که در نقطه $x=۵$ منحنی $V(x)$ یک ناپیوستگی ناشی از اعمال بار متمرکز دارد. $V(۵^-)$ با استفاده از نتایج قسمت (۲) به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

$$V(۵^-) = ۵۵\,lb$$

$$V(۵^+) = ۵۵ - ۱۵۵ = -۱۰۰$$

در نتیجه $G=-۱۰۰$ و $V(x) = -۱۰۰N$. لذا:

$$M(x) = -\int V(x)dx = ۱۰۰x + H$$

که H با استفاده از شرط $M(۵^-) = M(۵^+)$ به صورت روبرو تعیین می‌شود:

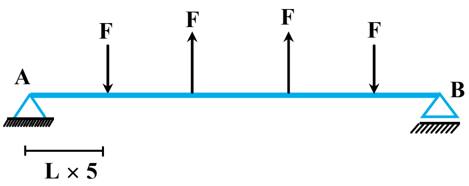
$$M(۵^-) = (-۵۵\times۵) + ۷۵ = -۲۰۰$$

$$M(۵^+) = (۱۰۰\times۵) + H = ۵۰۰ + H$$

در نتیجه $H=-۷۰۰$ و از این رو خواهیم داشت:

$$M(x) = ۱۰۰x - ۷۰۰$$

مثال۱۵: نیروی برشی در بارگذاری شکل زیر در کدام محدوده یا نقطه، حداکثر مقدار ممکن را دارد؟



۱) $۰<x<L$ و $۴L<x<۵L$

۲) $x=۲L$

۳) $۲L<x<۳L$

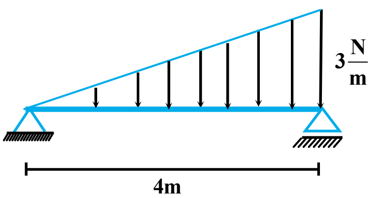
۴) $L<x<۲L$ و $۳L<x<۴L$

پاسخ: گزینه «۴» طول تیر $۵L$ است لذا با توجه به وضعیت بارگذاری بر تیر، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و B صفر است.

برای محاسبه مقدار و محل نیروی برشی حداکثر، باید تیر را در محدوده‌های مختلف (مابین موقعیت‌های اثر بار متمرکز) برش زد و بیشترین مقدار عددی نیروی برشی را به عنوان V_{max} معرفی نمود:

$$\left.\begin{array}{ll} ۰<x<L & \Rightarrow V_۱ = ۰ \\ L<x<۲L & \Rightarrow V_۲ = F \\ ۲L<x<۳L & \Rightarrow V_۳ = ۰ \\ ۳L<x<۴L & \Rightarrow V_۴ = F \\ ۴L<x<۵L & \Rightarrow V_۵ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow V_{max} = V_۲ = V_۴$$

مثال۱۶: گشتاور خمشی حداکثر درتیر شکل زیر چند نیوتن متر است؟



۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}}$

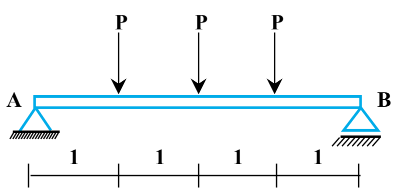
۳) $\frac{۸}{۹\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه تیر، توسط یک بار گسترده مثلثی سراسری پوشیده شده است، لذا مقدارگشتاور خمشی حداکثر برابر است با:

$$M_{max} = \frac{q.L^۲}{۹\sqrt{۳}} \Rightarrow M_{max} = \frac{۳\times۴^۲}{۹\sqrt{۳}} = \frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}}N.m$$

مثال۱۷: ممان ماکزیمم تیر مقابل، کدام است؟



۱) P

۲) ۱/۵ P

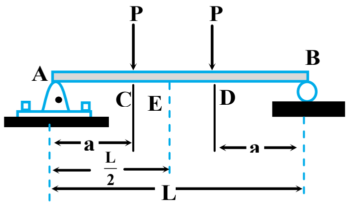
۳) ۳ P

۴) ۲ P

پاسخ: گزینه «۴» در این حالت برای یافتن گشتاور خمشی حداکثر لازم است گشتاور نیروهای یک طرف تیر را نسبت به نقطه میانی تیر محاسبه کنیم، لذا:

$$R_A = R_B = \frac{۳P}{۲} \Rightarrow M_{Max} = (\frac{۳P}{۲}\times۲) - (P\times۱) = ۲P$$

مثال ۱۸: در خصوص بارگذاری زیر کدام گزینه صحیح است؟



۱) $M_E > M_C$

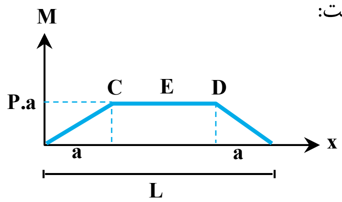
۲) $M_C = M_E$

۳) $M_C > M_E$

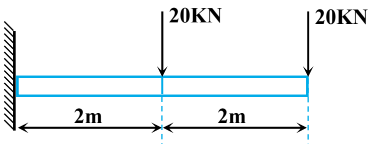
۴) $M_C , M_E = ۰$ دارای مقدار است.

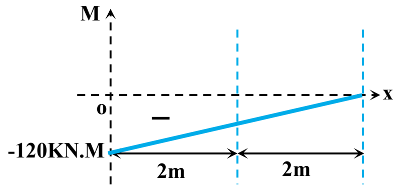
پاسخ: گزینه «۲» به دلیل تقارن هندسی و بارگذاری، ممان خمشی در نقاط C، E و D هر سه یک مقدار خواهند داشت، لذا: $M_C = M_E$

در واقع دیاگرام ممان خمشی تیر مذکور به صورت زیر است:

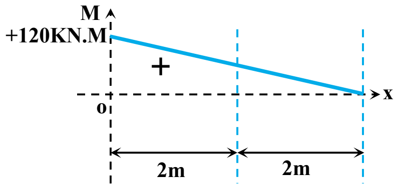


مثال ۱۹: دیاگرام لنگر خمشی تیر شکل زیر کدام گزینه است؟

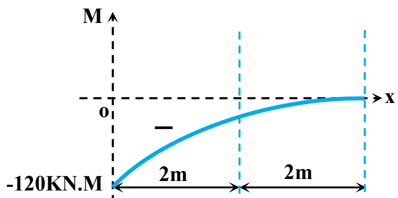




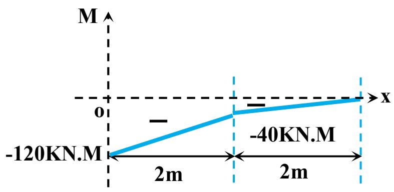
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

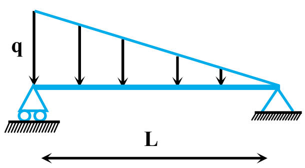
پاسخ: گزینه «۴» تغییرات گشتاور خمشی در تیری که تحت اثر بار متمرکز است به صورت خطی می‌باشد، ضمناً در محل تکیه‌گاه یک سرگیردار مقدار آن برابر است با:

$$M = (۲۰ \times ۲) + (۲۰ \times ۴) = ۴۰ + ۸۰ = ۱۲۰ \quad kN.m$$

با توجه به وجود ۲ بار متمرکز، شیب دیاگرام گشتاور در $x = ۲$ دچار شکستگی می‌باشد.

آزمون فصل سوم

۱ـ دیاگرام شماتیک نیروی برشی بارگذاری زیر کدام است؟



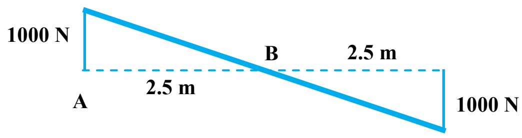
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲ـ دیاگرام نیروی برشی یک تیر مطابق شکل زیر است. مقدار لنگر خمشی حداکثر در کدام موقعیت و چه مقدار است؟



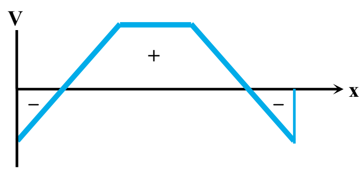
۱) A، ۲۵۰۰ N.m

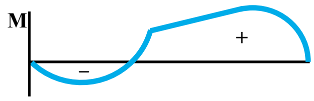
۲) A، ۱۲۵۰ N.m

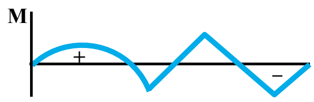
۳) B، ۲۵۰۰ N.m

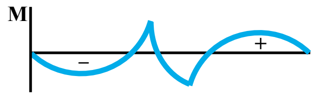
۴) B، ۱۲۵۰ N.m

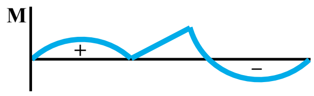
۳ـ اگر منحنی زیر نمایش دیاگرام نیروی برشی در یک تیر باشد، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند نشان‌دهنده دیاگرام لنگر خمشی آن باشد؟



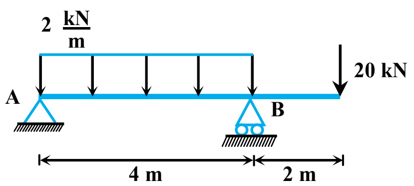
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴ـ حداکثر نیروی برشی در تیر شکل زیر چند کیلونیوتن است؟



۱) ۱۴

۲) ۶

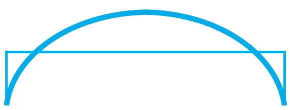
۳) ۲۰

۴) ۳۴

۵ـ معادله لنگر خمشی تیری به صورت $M = -60x^2 + 600x + 5$ می‌باشد. در صورت وجود تکیه‌گاه در محل نقطه شروع تیر، احتمالاً نوع آن تکیه‌گاه کدام است؟

۱) یک سر گیردار ۲) لولایی ۳) غلتکی ۴) آزاد

۶ـ دیاگرام لنگر خمشی زیر مربوط است به تیر ....



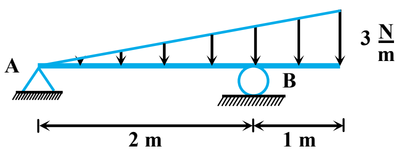
۱) دو سرگیردار با بار گسترده غیر یکنواخت

۲) دوسر گیردار با بار گسترده یکنواخت

۳) دو سر مفصل با بار گسترده یکنواخت

۴) یک سر گیردار و یک مفصل با بار گسترده غیر یکنواخت

۷ـ در تیر شکل زیر نیروی برش در تکیه‌گاه A چند نیوتن است؟



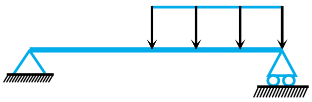
۱) ۰

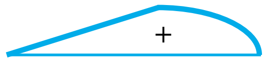
۲) ۳

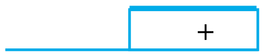
۳) ۱/۵

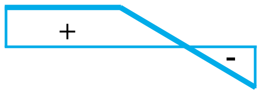
۴) ۴/۵

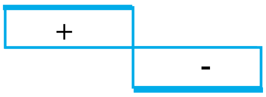
۸ـ در تیر مطابق شکل زیر دیاگرام تقریبی نیروی برش کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹ـ معادله لنگر خمشی تیری به صورت $M=۲۰x^{۲}-۱۰x-۳۰$ می‌باشد، مقادیر نیروی برشی و شدت بار گسترده در محل $x=۱$ به ترتیب کدامند؟

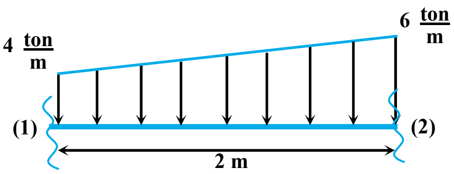
۱) $\begin{cases} V=-۳۰ \\ \omega=۴۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} V=۴۰ \\ \omega=-۴۰ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} V=-۳۰ \\ \omega=-۴۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} V=۴۰ \\ \omega=۴۰ \end{cases}$

۱۰ـ اگر برش محل (۱)، ۱۰ تن باشد، برش در محل (۲) چند تن است؟



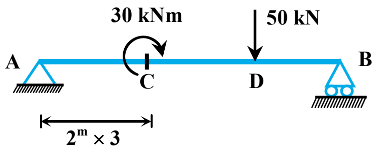
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۴۰

۴) ۰

۱۱ـ معادله لنگر خمشی در ناحیه CD کدام است؟



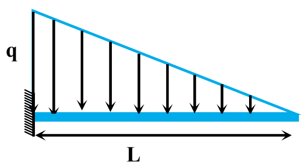
۱) $۴۰x+۳۰$

۲) $۱۱/۶۷x+۳۰$

۳) $۱۱/۶۷x-۳۰$

۴) $۳۸x-۳۰$

۱۲ـ مقدار برش در وسط دهانه تیر شکل زیر کدام است؟



۱) qL

۲) $\frac{qL}{۴}$

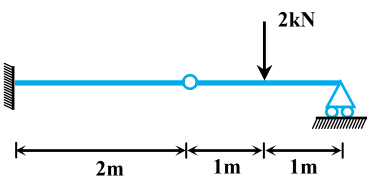
۳) $\frac{qL}{۲}$

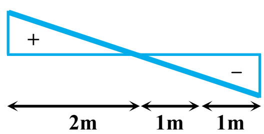
۴) $\frac{qL}{۸}$

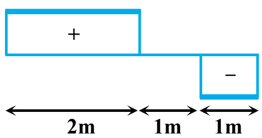
۱۳ـ اگر شدت بار گسترده یکنواخت تیری دو برابر و طول تیر نصف شود، لنگر خمشی چند برابر می‌شود؟

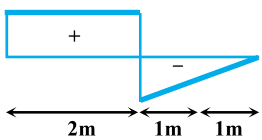
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

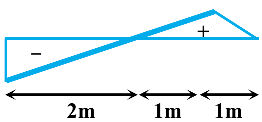
۱۴ـ دیاگرام لنگر خمشی تیر شکل زیر کدام است؟



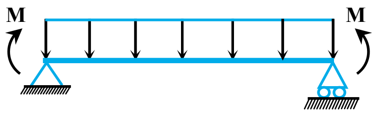
۱) 

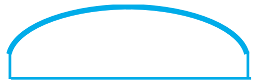
۲) 

۳) 

۴) 

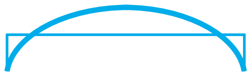
۱۵ـ دیاگرام گشتاور خمشی بارگذاری شکل زیر کدام است؟



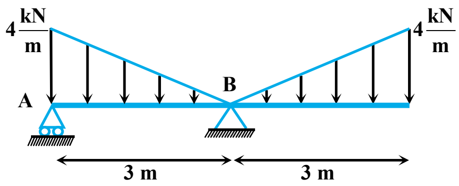
۱) 

۲) 

۳) 

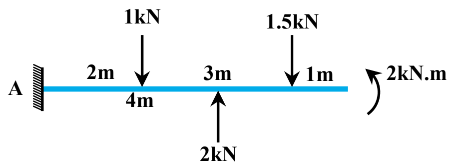
۴) 

۱۶ـ برش ماکزیمم تیر مقابل چند کیلونیوتن است؟



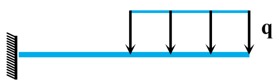
۱) ۰
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۲۴

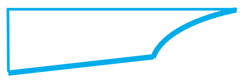
۱۷ـ مطابق شکل زیر، جرم واحد طول تیر ۵۰ $\frac{kg}{m}$ است. مقدار نیروی برشی در محل تکیه‌گاه A چند کیلونیوتن است؟ $(g=۹/۸\frac{m}{sec^{۲}})$



۱) ۴/۴۳
۲) ۴/۲۱
۳) ۳/۴۴
۴) ۴/۸۵

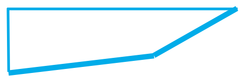
۱۸ـ دیاگرام لنگر خمشی تیر یک سرگیردار شکل زیر کدام است؟



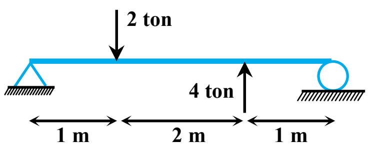
۱) 

۲) 

۳) 

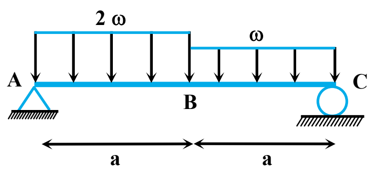
۴) 

۱۹ـ در تیر زیر، مقدار لنگر ماکزیمم .... تن متر و در محل اثر بار .... می‌باشد.



۱) ۲/۵- ، کوچکتر
۲) ۲/۵- ، بزرگتر
۳) ۰/۵ ، کوچکتر
۴) ۰/۵ ، بزرگتر

۲۰ـ معادله لنگر خمشی تیر زیر در فاصله BC کدام است؟



۱) $M(x)=\omega(x-a)^{۲}-\frac{۵}{۴}\omega.a.x-\omega.a(x-\frac{a}{۲})$

۲) $M(x)=\frac{۷}{۲}\omega.a.x-\omega(x-a)^{۲}-۲\omega.a(x-\frac{a}{۲})$

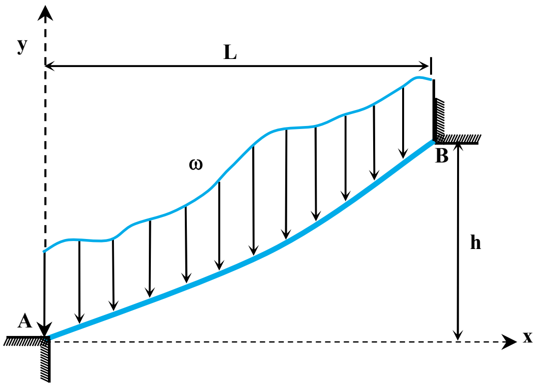
۳) $M(x)=\frac{۵}{۴}\omega.a.x+\omega\frac{(x-a)^{۲}}{۲}-۲\omega.a(x-\frac{a}{۲})$

۴) $M(x)=\frac{۷}{۴}\omega.a.x-\frac{\omega(x-a)^{۲}}{۲}-۲\omega.a(x-\frac{a}{۲})$

فصل چهارم

« کابل‌ها (Cables) »

تست‌های تألیفی فصل چهارم



مثال ۱: یک کابل به طول S و دهانه L مطابق شکل از نقاط A و B آویزان است و بار یکنواخت ω به آن وارد می‌شود. منحنی کابل را تعیین کنید؟

☑ **پاسخ:** با استفاده از معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\omega}{H}$ و با توجه به ثابت بودن ω داریم:

$$y=\frac{\omega}{2H}x^2+c_1x+c_2$$

در صورتی که مبدأ مختصات را نقطه A انتخاب کنیم ($x=0$ و $y=0$) $c_2=0$ است و اگر شرط $(x=L\,,\,y=h)$ را بکار ببریم خواهیم داشت:

$$h=\frac{\omega L^2}{2H}+c_1L\Rightarrow c_1=\frac{h}{L}-\frac{\omega L}{2H}$$

بنابراین داریم:

$$y=\frac{\omega}{2H}x^2+(\frac{h}{L}-\frac{\omega L}{2H})x \qquad (1)$$

توجه شود که شیب کابل در نقطه‌ی A صفر نیست و C_1 صفر نخواهد بود.

H مقدار ثابتی است که با استفاده از طول کابل (S) بدست می‌آید:

$$S=\int_0^L\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

از طرفی با مشتق گرفتن از معادله (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega}{H}x+(\frac{h}{L}-\frac{\omega L}{2H})$$

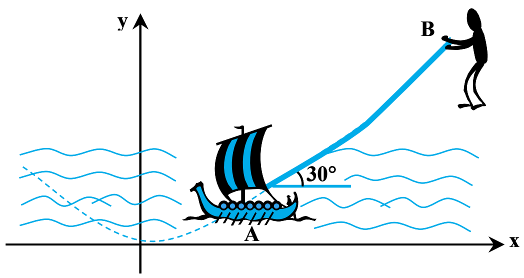
با استفاده از روش تغییر متغیر $P=(\frac{h}{L}-\frac{\omega}{2H})+\frac{\omega x}{H}$ داریم:

$$S=\frac{H}{\omega}\int_{P_0}^{P}\sqrt{1+P^2}\,dP$$

در نتیجه S به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{H}{\omega}(\frac{1}{2}P\sqrt{1+P^2}+Ln(P+\sqrt{1+P^2}))]_{P_0}^{P}=\frac{H}{2\omega}[(\frac{H}{L}-\frac{\omega L}{2H})+\frac{\omega x}{H}]\times\sqrt{1+[\frac{h}{L}-\frac{\omega L}{2H}+\frac{\omega x}{H}]^2}$$

توجه کنید که با استفاده از این رابطه می‌توان H را بر حسب معلومات مسأله بیان نمود و با قرار دادن آن در رابطه معادله کابل نیمرخ، معادله کابل بطور کامل به دست آید.



مثال۲: در شکل نشان داده شده یک چترباز توسط قایقی کشیده می‌شود، سرعت قایق 30mph و طناب به طول 50 فوت و وزن 0/5lb/ft است. قایق 200lb نیرو به طرف جلو وارد می‌کند، ضمناً مقاومت آب 100lb تخمین زده می‌شود و زاویه اتصال طناب به قایق 30° است. در صورتیکه وزن مرد 150lb باشد، حداکثر نیروی کششی طناب چند پوند است؟ (وزن چتر حامل شخص 25lb است)

۱) ۱۰۹/۶ ۲) ۲۵۴/۸ ۳) ۱۳۲/۲ ۴) ۱۲۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این حالت طناب را به طور فرضی ادامه داده و تصور می‌شود که طناب از دو نقطه همسطح آویزان بوده و شرایط مرزی در نقطه A برای آن به کار برده می‌شود.

مبدأ مختصات در نقطه مینیمم منحنی فرض می‌شود. در این حالت معادله دیفرانسیل منحنی طناب به صورت:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{H}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

در می‌آید و با قراردادن $P=\frac{dy}{dx}$ نتیجه می‌گیریم:

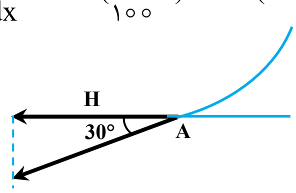
$$\ln(P+\sqrt{1+P^2})=\frac{\mu}{H}x+c_1$$

چون در مبدأ مختصات $P=\frac{dy}{dx}=0$ است، بنابراین: $c_1=0$ و خواهیم داشت:

$$P=\frac{dy}{dx}=\sinh(\frac{\mu}{H}x)$$

از طرفی (H) مولفه افقی نیروی کشش طناب در نقطه A برابر نیروی کشش قایق منهای مقاومت آب یعنی $H=200-100=100\,lb$ است، لذا:

$$\frac{dy}{dx}=\sinh(\frac{0.5}{100}x)=\sinh(0.005x)$$



همانطور که قبلاً محاسبه شد $P=\frac{dy}{dx}=\tan\theta=\frac{\mu s}{H}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$0.005s=\sinh(0.005x)\Rightarrow s=200\sinh(0.005x)$$

از طرفی در نقطه A داریم:

$$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{dy}{dx}=\sinh(0.005x_A)\Rightarrow 0.577=\sinh(0.005x_A)\Rightarrow x_A=109.8\,ft$$

$$S_A=200\sinh(0.005x_A)=200(0.57)=115.4\,ft$$

در نتیجه در نقطه B، (محل استقرار شخص):

$$S_B=50+109.6=159.6\,ft \qquad 159.8=200\sinh(0.005x_B)\Rightarrow x_B=146.4\,ft$$

برای پیدا کردن منحنی کابل از $\frac{dy}{dx}$ انتگرال گرفته می‌شود:

$$y=200\cosh(0.005x)+c_2$$

چون در $x=0$، $y=0$ است بنابراین داریم:

$$0=200+c_2\Rightarrow c_2=-200 \qquad y=200[\cosh(0.005x)-1]$$

در نتیجه ارتفاع مرد مساوی است با:

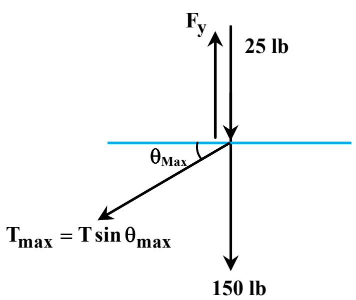
$$h=y_B-y_A=200[\cosh(0.005x_B)-1]-200[\cosh(0.005x_A)-1]$$

$$=200[\cosh(0.731)-\cosh(0.548)]=200(0.126)=25.1\,ft$$

همانطور که ملاحظه می‌شود نیروی کشش طناب (T) با H رابطه‌ای به صورت $H=T\cos\theta$ دارد و حداکثر T در حداقل $\cos\theta$، یعنی در حداکثر θ و $\tan\theta$ اتفاق می‌افتد. با توجه به رابطه $\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\sinh(0.005x)$ حداکثر کشش به ازای حداکثر x (یعنی x_B) خواهد بود:

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(0.005x)}}=\frac{1}{\cosh(0.005x)}$$

$$\cos\theta_{max}=\frac{1}{\cosh(0.005x_B)}=\frac{1}{1.280}\Rightarrow\theta_{max}=38.6^\circ \quad , \quad T_{max}=\frac{H}{\cos\theta_{max}}=100(1.280)=128\,lb$$



اکنون برای محاسبه نیرویی که باعث نگهداری شخص در آن نقطه می‌شود، دیاگرام آزاد شخص و چتر رسم می‌شود:

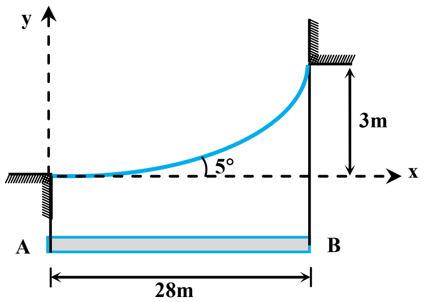
چون در جهت عمودی حرکتی وجود ندارد، لذا نیروی F_y که شخص را نگه می‌دارد در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$F_y-25-150-T\sin\theta_{max}=0\Rightarrow F_y=254.8\,lb$$

که این نیرو باید توسط چتر اسکی تأمین شود.

آزمون فصل چهارم

۱ـ کابلی یک میله یکنواخت (AB) به وزن $۸۰۰۰N$ را نگه داشته است. کشش حداکثر این کابل کدام است؟



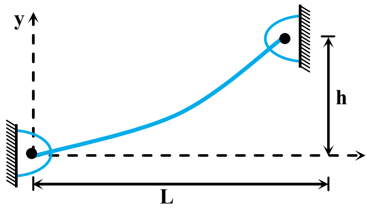
۱) $۳\times ۱۰^{۶}N$

۲) $۲/۰۱\times ۱۰^{۵}N$

۳) $۱/۵۷\times ۱۰^{۵}N$

۴) $۲/۱۲\times ۱۰^{۶}N$

۲ـ کابل یکنواختی در شکل نشان داده شده است. اگر شدت بار وارد بر کابل $۵\frac{N}{m}$ باشد، با صرفنظر کردن از وزن کابل حداکثر کشش آن بر حسب پارامترهای مسأله کدام است؟



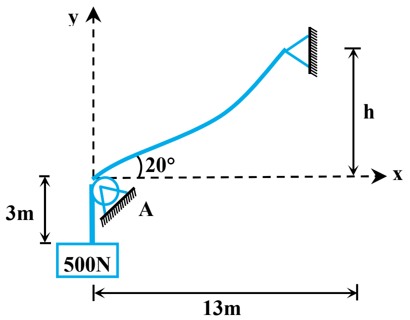
۱) $\frac{۵L^{۲}\sqrt{L^{۲}+(۳h)^{۲}}}{h}$

۲) $\frac{۵L\sqrt{L+۳h}}{۶h}$

۳) $\frac{۵L\sqrt{L^{۲}+۳h}}{h}$

۴) $\frac{۵L\sqrt{L^{۲}+(۲h)^{۲}}}{(۲h)}$

۳ـ حداکثر کشش کابل کدام است؟ (وزن واحد طول کابل $۳۰\frac{N}{m}$ است)



۱) ۸۴۰^{N}

۲) ۸۷۵^{N}

۳) ۷۹۰^{N}

۴) ۷۸۵^{N}

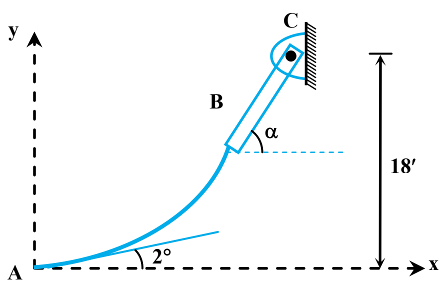
۴ـ کابلی به وزن $۳\frac{lb}{ft}$ بین دو تکیه‌گاه هم‌ارتفاع نصب شده است. اگر طول کابل $۴۵۰\,ft$ و کشش آن در نقاط تکیه‌گاهی $۱۵۰۰\,lb$ باشد افت آن کدام است؟

۱) $۵۷\,ft$ ۲) $۶۷\,ft$ ۳) $۵۳\,ft$ ۴) $۶۴\,ft$

۵ـ معادله کابلی را بیابید که بین دو نقطه هم ارتفاع و به فاصله L از یکدیگر با افت h کشیده شده است. بار قائم وارد بر کابل دارای تابع تغییرات $\omega(x)=۵\cos\frac{\pi x}{L}\,(\frac{N}{m})$ می‌باشد؟

۱) $y=h(۱-\cos\frac{\pi x}{L})$ ۲) $y=۵h(۱-\cos\frac{\pi x}{L})$ ۳) $y=h^{۲}(۱-\cos\frac{\pi x}{L})$ ۴) $y=h(۵-\cos\frac{\pi x}{L})$

۶ـ کابل یکنواختی با وزن $۱\frac{lb}{ft}$ در نقطه B به میله متجانسی متصل شده است. این میله از نظر دوران حول مفصل C آزاد است. اگر مولفه نیروی F_x، $-۲۰۰\,lb$ در نقطه A اعمال شود، زاویه α چقدر است؟ (طول کابل $۵۰\,ft$ و طول میله $۲۰\,ft$ است)



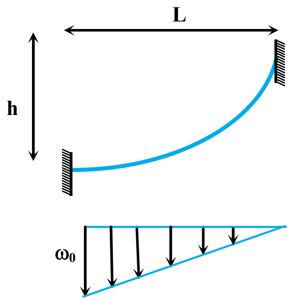
۱) $۲۷/۶^{\circ}$

۲) $۱۲/۷^{\circ}$

۳) $۲۱/۲^{\circ}$

۴) $۳۰/۷^{\circ}$

۷ــ کابلی با جرم ناچیز از دو نقطه ثابت آویزان و شیب آن در نقطه پائینی صفر است. اگر کابل بار واحد ω را که به صورت یکنواخت از $\omega_۰$ تا صفر تغییر می‌کند، تحمل نماید معادله شکل آن کدام است؟



۱) $y=\frac{۳hx^۲}{۲L^۲}(۱-\frac{x}{۳L})$

۲) $y=\frac{hx^۲}{۲L^۲}(۱-\frac{x^۲}{۳L})$

۳) $y=\frac{hx^۲}{L^۲}(۱-\frac{x}{۳L})$

۴) $y=\frac{۳hx}{۲L^۲}(۱-\frac{x}{۳L^۲})$

۸ــ کدام گزینه در مورد کابل‌ها صحیح نمی‌باشد؟

۱) کابل‌ها توانایی تحمل خمش را ندارند.

۲) نیروی درونی کابل همواره در امتداد کابل است.

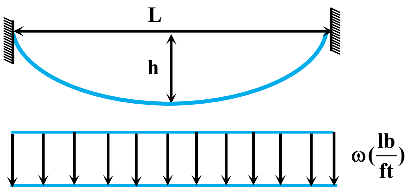
۳) کابل‌ها فقط بارهای گسترده را تحمل می‌کنند.

۴) کابلها فقط کشش را تحمل می‌کنند.

۹ــ بالنی به زنجیری به طول ۵۰۰^{ft} و وزن $۱۰\frac{lb}{ft}$ متصل است. وقتی که بالن تحت تأثیر نیروی افقی به میزان $۳۰۰lb$ حرکت می‌کند، نیروی مقاومت هوا که بر آن وارد می‌شود $۲۰۰lb$ است. در این حالت ارتفاع بالن چه مقدار است؟ (نیروی قائم وارد از بالن بر کابل ۱۰۰۰^{lb} است)

۱) $۸۱/۴۶ft$　　۲) $۸۹/۷ft$　　۳) $۸۸/۱ft$　　۴) $۸۲ft$

۱۰ــ کابل شکل زیر، دارای تکیه‌گاههایی است که در یک ارتفاع قرار دارند. بار وارده بر کابل، بارگسترده مستطیلی می‌باشد. طول دهانه L و افت آن h در نظر گرفته شود. حداکثر کشش کابل کدام است؟



۱) $\frac{\omega L}{۲}\sqrt{۱+(\frac{L}{۴h})^۲}$

۲) $\frac{\omega L}{۲}(۱-\frac{L}{h})^۲$

۳) $\frac{\omega L^۲}{۲}(۱+\frac{L^۲}{۴h})$

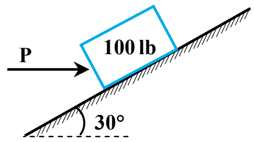
۴) $\frac{\omega L^۲}{۲}(۱+\frac{L}{۴h})$

فصل پنجم

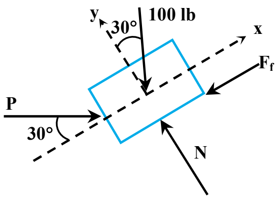
«نیروی اصطکاک (Friction Force)»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: مقدار و جهت نیروی اصطکاک بین وزنه و سطح شیبدار را برای حالت‌های الف و ب تعیین نمایید؟ (ضرایب اصـطکاک $\mu_s = ۰/۲$ و $\mu_d = ۰/۱۷$ می‌باشند. الف) زمانی که $P = ۵۰\,lb$ فرض شود ب) زمانی که $P = ۱۰\,lb$ فرض شود)



پاسخ: مشخص نیست که وزنه در آستانه حرکت به سمت بالا یا به طرف پایین است. لذا ابتدا بایـد جهت حرکت احتمالی مشخص گردد، زیرا تعیین جهت نیـروی اصـطکاک از مهـم‌تـرین مـوارد در رسـم دیاگرام جسم آزاد می‌باشد. فرض کنیم این وزنه در آستانه حرکت به سمت بالا باشد. نیـروی اصـطکاک لازم برای این تعادل، به سمت پایین بوده و آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow P\cos ۳۰^\circ - ۱۰۰\sin ۳۰^\circ - F_f = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - ۱۰۰\cos ۳۰^\circ - P\sin ۳۰^\circ = ۰ \end{cases}$$

$$N = ۸۶/۶ + \frac{P}{۲} \quad \text{و} \quad F_f = -۵۰ + ۰/۸۶P$$

۱) با جایگزینی نیروی $P = ۵۰\,lb$ در روابط محاسبه N و F_f فوق داریم:

$$N = ۸۶/۶ + ۲۵ = ۱۱۱/۶\,lb \quad \text{و} \quad F_f = -۵۰ + (۰/۸۶۶ \times ۵۰) = -۶/۷\,lb$$

علامت منفی F_f نشان می‌دهد که اگر جسم در حالت تعادل باشد نیروی اصطکاک در خلاف جهت فرض شده (یعنی رو بـه بـالا) وارد خواهـد شـد. بـرای مشخص کردن اینکه آیا جسم واقعاً در حالت تعادل است (چنانچه فرض شده) یا خیر، با استفاده از مقدار N، F_{f_s} یعنـی مـاکزیمم نیـروی اصـطکاکی کـه سطح می‌تواند داشته باشد را محاسبه می‌کنیم: $F_{f_{max}} = \mu_s N \Rightarrow F_{f_{max}} = ۲۲/۳۲\,lb$

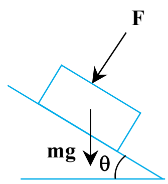
این مقدار بیشتر از $F_f = ۶/۷\,lb$ می‌باشد پس فرض تعادل صحیح است و مقدار نیروی اصطکاک نیز همان $۶/۷\,lb$ و رو به بالا می‌باشد.

۲) با جایگزینی نیروی $P = ۱۰\,lb$ در روابط محاسبه N و F_f فوق داریم: $F_f = -۵۰ + (۰/۸۶۶ \times ۱۰) = -۴۱/۴\,lb$ و $N = ۸۶/۶ + ۵ = ۹۱/۶\,lb$

با توجه به مقدار N داریم: $F_{f_{max}} = \mu_s.N = ۱۸/۳۲$، لذا امکان ایجاد نیروی اصطکاک $۴۱/۴\,lb$ وجود ندارد و فرض تعادل صحیح نیست. در این حالت نیروی اصطکاک با استفاده از ضریب اصطکاک دینامیکی محاسبه می‌شود: $F_f = \mu_d.N = ۰/۱۷(۹۱/۶) = ۱۵/۵۷\,lb$

توجه کنید که علی‌رغم حرکت جسم در حالت دوم، تعادل در جهت محور y کماکان برقرار است پس می‌توان از معادله تعادل برای تعیین N استفاده نمـود. (μ ضریب اصطکاک استاتیکی است)

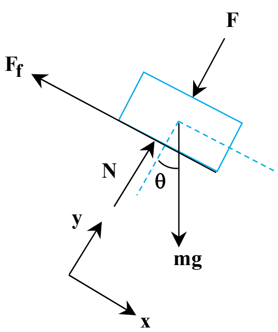
مثال ۲: حداقل مقدار نیروی F برای جلوگیری از لغزش جسم روی سطح شیبدار با ضریب اصطکاک μ، کدام است؟



۱) $mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)$ ۲) $mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

۳) $mg(\frac{\cos\theta}{\mu} - \mu\sin\theta)$ ۴) $mg(\frac{\sin\theta}{\mu} - \cos\theta)$

پاسخ: گزینه «۴» با ترسیم دیاگرام جسم آزاد وزنه و با فرض حرکت احتمالی به سمت پایین شیب داریم:



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow mg.\sin\theta = F_f \qquad (۱)$$

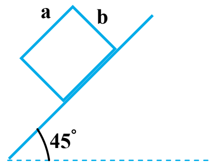
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F + mg\cos\theta - N = ۰ \Rightarrow N = F + mg.\cos\theta$$

$$F_f = \mu(F + mg\cos\theta) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} mg.\sin\theta - \mu(F + mg.\cos\theta) = ۰$$

$$\Rightarrow F = mg(\frac{\sin\theta}{\mu} - \cos\theta) \qquad (۳)$$

مثال ۳: برای آنکه جعبه شکل زیر در اثر نیروی وزن خود بر روی سطح شیبدار سرنگون نشود، حداقل نسبت $\frac{a}{b}$ کدام خواهد بود؟



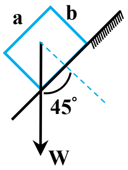
۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۱

۴) ۱/۲۲

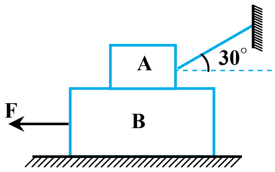
پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که حالت آستانه واژگونی (کله کردن)، زمانی رخ می‌دهد که امتداد نیروی وزن از لبه جعبه بگذرد، بنابراین:



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{b}{۲}} = \frac{a}{b} = ۱$$

(توجه شود که نیروی اصطکاک در حل مسأله بی‌تأثیر است، چرا که هدف مسأله، محاسبه‌ی شرایط سرنگونی است. اما ایـن امکـان وجـود دارد کـه قبـل از سرنگونی جسم شروع به حرکت کند، بنابراین برای این که سرنگونی رخ دهد، نیروی اصطکاک باید به اندازه کافی زیاد باشد).

مثال ۴: ضریب اصطکاک بین دو قطعه شکل زیر ۰/۲ می‌باشد. اگر مقدار نیروی لازم (F) جهت قرارگیری وزنه B در حالت آسـتانه حرکـت ۲۰۰N باشد، مقدار ضریب اصطکاک میان وزنه B و زمین کدام است؟



$$\begin{pmatrix} W_A = 50N \\ W_B = 150N \end{pmatrix}$$

۱) ۰/۹۸

۲) ۰/۸۸

۳) ۰/۷۸

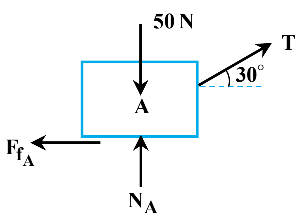
۴) ۰/۶۸

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه مقدار ضریب اصطکاک مورد نظر، لازم است از رسم دیاگرام جسم آزاد قطعات A و B به صورت جداگانـه و برقـراری روابط تعادل به صورت زیر استفاده نمایید:

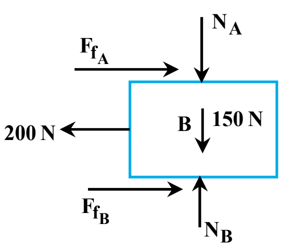
تعداد معادلات تعادل (۴ عدد) + تعداد معادلات اصطکاک (۲ عدد) = تعداد مجهولات (۶ عدد)

$$\begin{pmatrix} N_A , N_B \\ F_{f_A} , F_{f_B} \\ T \quad , \mu_B \end{pmatrix} = \left(F_{f_B} = \mu.N_B \ ، \ F_{f_A} = \mu.N_A \right) + \left(\text{۲) معادله تعادل برای هر شکل} \times ۲ \right)$$

پس باید در هر دو شکل از معادلات اصطکاک استفاده کنیم.

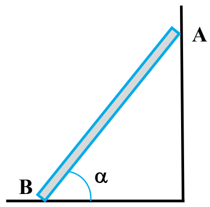


$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow T\cos ۳۰^\circ = F_{f_A} \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۵۰ = N_A + T\sin ۳۰^\circ \\ F_{f_A} = \mu_A.N_A = ۰/۲N_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{f_A} = ۸/۹۶\,N \\ N_A = ۴۴/۸N \\ T = ۱۰/۳N \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow ۲۰۰ = F_{f_A} + F_{f_B} \Rightarrow F_{f_B} = ۱۹۱/۰۴\,N \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۴۴/۸ + ۱۵۰ = N_B \Rightarrow N_B = ۱۹۴/۸N \\ F_{f_B} = \mu_B.N_B \Rightarrow ۱۹۱/۰۴ = \mu_B \times ۱۹۴/۸ \Rightarrow \mu_B = ۰/۹۸ \end{cases}$$

مثال۵: ضریب اصطکاک در تمامی محل‌های تماس بین نردبان و تکیه‌گاه یکسان و برابر $۰/۳$ می‌باشد. وزن نردبان W و طول آن L می‌باشد. زاویه α که نردبان را در آستانه لغزیدن قرار می‌دهد کدام است؟



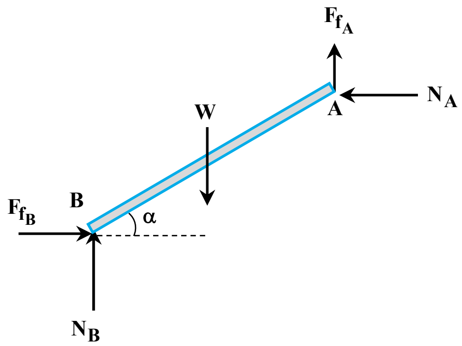
۱) $\alpha = ۲۰^\circ$

۲) $\alpha = ۳۱^\circ$

۳) $\alpha = ۵۶/۷^\circ$

۴) $\alpha = ۷۲/۱^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این موضوع که اگر نردبان دچار حرکت شود، جهت حرکت احتمالی آن به سمت پایین می‌باشد، از رسم دیاگرام جسم آزاد آن و برقراری روابط تعادل مربوطه داریم:



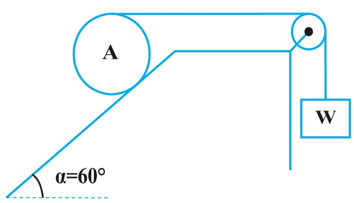
$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = ۰ \Rightarrow N_A = F_{fB} \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow N_B + F_{f_A} = W \\ F_{f_A} = \mu.N_A = ۰/۳N_A \\ F_{f_B} = \mu.N_B = ۰/۳N_B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N_B = W - F_{f_A} = W - ۰/۳N_A = W - ۰/۳F_{f_B} \\ \qquad = W - (۰/۳ \times ۰/۳N_B) \\ \qquad \Rightarrow N_B = ۰/۹۲W \end{array}$$

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow (W \times \frac{L}{۲}\cos\alpha) - (N_B \times L\cos\alpha) + (F_{f_B} \times L\sin\alpha) =$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}W\cos\alpha - N_B\cos\alpha + ۰/۳N_B\sin\alpha = ۰$$

$$\tan\alpha = ۱/۵۲ \Rightarrow \alpha \simeq ۵۶/۷^\circ$$

مثال۶: استوانه A در روی سطح شیب‌دار در اثر اتصال به قطعه w با وزن $۱۰۰N$ در حالت تعادل است، در این حالت مقدار نیروی اصطکاک کدام است؟



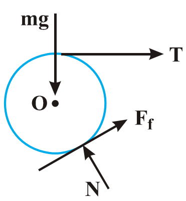
۱) $۵۰N$

۲) $۱۰۰N$

۳) $۱۵۰N$

۴) به ضریب اصطکاک بستگی دارد.

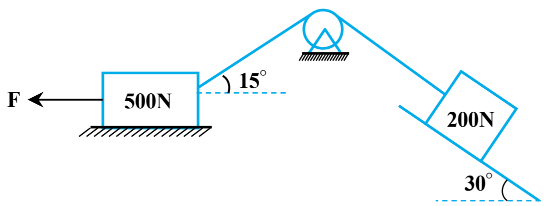
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جهت چرخش احتمالی استوانه A ، دیاگرام جسم آزاد آن به صورت زیر قابل ترسیم می‌باشد:



$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow (T \times r) = (F_f \times r) \Rightarrow F_f = T$$

دقت کنید که کشش کابل برابر وزن w یعنی ۱۰۰ می‌باشد بنابراین: $F_f = ۱۰۰N$

مثال۷: ضریب اصطکاک در تمامی سطوح $۰/۳$ می‌باشد. با فرض اینکه قرقره رابط بدون اصطکاک فرض شود، مقدار نیروی F برای قرارگیری وزنه ۵۰۰ نیوتنی در آستانه حرکت در جهت نیرو چه مقدار است؟



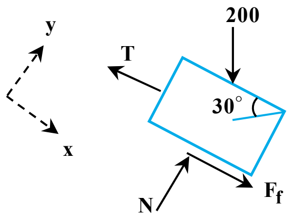
۱) $F = ۲۵۰N$

۲) $F = ۲۸۵N$

۳) $F = ۳۱۲N$

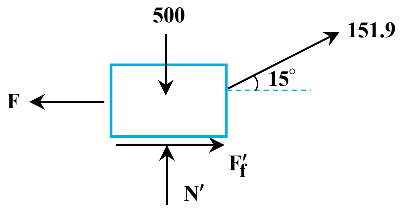
۴) $F = ۲۱۸N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توجه داشته باشید در حالتی که وزنه ۵۰۰ نیوتنی در آستانه حرکت به سمت چپ قرار گیرد، (طبق فرض مسأله) در کابل‌کشش ایجاد خواهد شد. لذا از دیاگرام جسم آزاد وزنه ۲۰۰ نیوتنی در این وضعیت، داریم:



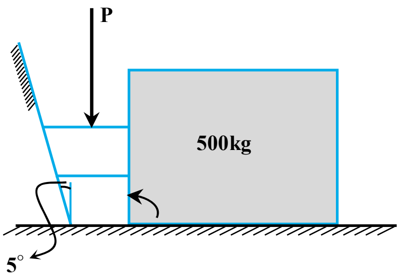
$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=۰\Rightarrow T=F_f+۲۰۰\sin ۳۰^\circ\\ &\sum F_y=۰\Rightarrow N=۲۰۰\cos ۳۰^\circ=۱۷۳/۲^N\\ &F_f=۰/۳N=۵۱/۹^N\end{aligned}\right\}\Rightarrow T=۱۵۱/۹^N$$

حال با ترسیم دیاگرام جسم آزاد وزنه ۵۰۰ نیوتنی و استفاده از روابط تعادل در آن داریم:



$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=۰\Rightarrow F=F'_f+۱۵۱/۹\cos ۱۵^\circ\\ &\sum F_y=۰\Rightarrow N'+۱۵۱/۹\sin ۱۵^\circ=۵۰۰\Rightarrow N'=۴۶۰/۷^N\\ &F'_f=\mu N'=۰/۳N'=۱۳۸/۲^N\end{aligned}\right\}\Rightarrow F=۲۸۵N$$

مثال ۸: در شکل زیر اگر ضریب اصطکاک هر دو سمت گوه با سطوح درگیر ۰/۳ و ضریب اصطکاک بلوک سیمانی با سطح افق ۰/۶ باشد، حداقل نیروی P برای جابه‌جایی بلوک سیمانی چند نیوتن است؟ $(g=۹/۸۱\frac{m}{s^۲})$



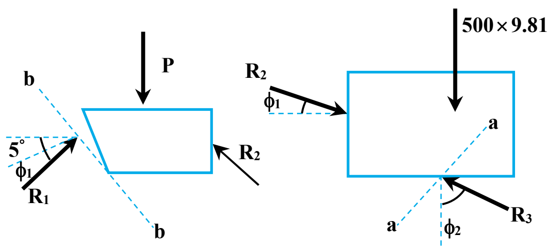
۱) ۲۵۱۰

۲) ۲۰۰۱

۳) ۱۷۵۰

۴) ۲۶۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا باید دیاگرام جسم آزاد بلوک سیمانی و گوه رسم شوند، لذا داریم:



$$\phi_۱=\tan^{-۱}۰/۳=۱۶/۷^\circ$$

$$\phi_۲=\tan^{-۱}۰/۶=۳۱^\circ$$

جهت محورهای مختصات را بر روی گوه "bb" و بر روی بلوک سیمانی "aa" انتخاب می‌کنیم. زاویه $R_۲$ با امتداد "aa" $۱۶/۷^\circ+۳۱^\circ=۴۷/۷^\circ$ است، در نتیجه:

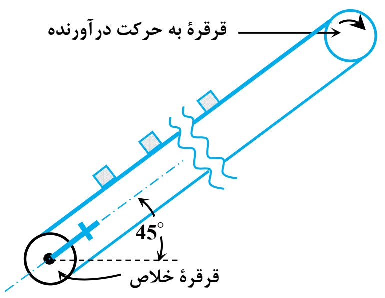
$$\sum F_a=۰\Rightarrow(۵۰۰\times۹/۸۱\times\sin ۳۱^\circ)-(R_۲\cos ۴۷/۷^\circ)=۰\Rightarrow R_۲=۳۷۵۴N$$

در گوه، زاویه $R_۲$ با امتداد "bb" برابر است با: $۹۰^\circ+(۲\phi_۱+۵)=۵۱/۶^\circ$

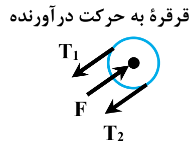
و زاویه P با این امتداد $\phi_۱+۵^\circ=۲۱/۷^\circ$ است، پس داریم:

$$\sum F_b=۰\Rightarrow(۳۷۵۴\cos ۵۱/۶^\circ)-(P\cos ۲۱/۷^\circ)=۰\Rightarrow P=۲۵۱۰N$$

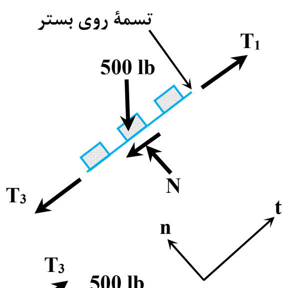
مثال ۹: تسمه نقاله‌ای با زاویه °۴۵، ده عدد جعبه ۵۰ پوندی را به حرکت درمی‌آورد. ضریب اصطکاک بین تسمه و بستر تسمه ۰/۰۵ و بین قرقره به حرکت درآورنده و تسمه ۰/۴ می‌باشد. قرقره خلاص توسط یک مکانیسم در امتداد تسمه جابجا می‌شود، به نحوی که نیروی F به میزان ۵۰۰lb بر این قرقره وارد می‌شود. کشش حداکثر در تسمه را محاسبه نمایید و مشخص کنید که آیا تسمه روی قرقره به حرکت درآورنده، لغزش می‌کند یا خیر؟ (از وزن تسمه صرفنظر کنید)



پاسخ: در شکل زیر، دیاگرام‌های جسم آزاد قسمتهای مختلف تسمه نقاله نشان داده شده است:



برای تسمه روی بستر، با جمع جبری نیروها در راستای عمود بر تسمه و راستای مماس بر آن داریم:

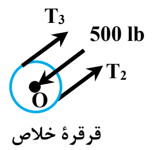


$$\begin{cases}\sum F_n = ۰ \Rightarrow N-(۱۰\times ۵۰\times \cos ۴۵^\circ)=۰ \Rightarrow N = ۳۵۴\,lb & (a)\\ \sum F_t = ۰ \Rightarrow T_۱ - T_۳ - (۱۰\times ۵۰\times \sin ۴۵^\circ) - (۰/۰۵\times ۳۵۴) = ۰\end{cases}$$

بنابراین:

$$T_۱ - T_۳ = ۳۷۱\,lb \qquad (b)$$

برای قرقره خلاص، داریم:



$$\begin{cases}\sum M_o = ۰ \Rightarrow T_۳ = T_۲ & (c)\\ \sum F_t = ۰ \Rightarrow T_۳ + T_۲ = ۵۰۰ & (d)\end{cases}$$

از معادلات (c) و (d) نتیجه می‌گیریم که:

$$T_۲ = T_۳ = ۲۵۰\,lb \qquad (e)$$

حال از معادله (b)، کشش حداکثر $T_۱$ به دست می‌آید:

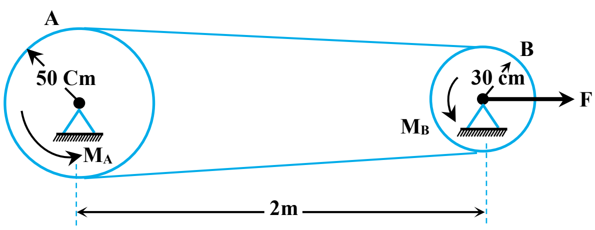
$$T_۱ = T_۳ + ۳۷۱ = ۶۲۱\,lb \qquad (f)$$

پس باید قرقره به حرکت درآورنده را کنترل کنیم تا مطمئن شویم که لغزش رخ نمی‌دهد. در حالت لغزش، با استفاده از مقدار ۲۵۰lb برای $T_۲$، $T_۱$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_۱ = T_۲ e^{۰/۴.\pi} = (۲۵۰)(۳/۵۱) = ۸۷۸\,lb$$

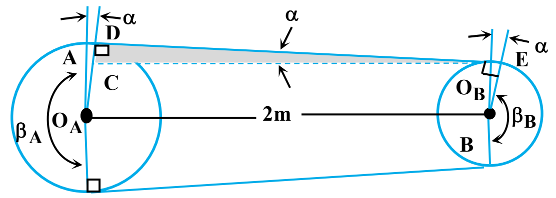
واضح است که چون مقدار لازم برای $T_۱$ فقط ۶۲۱ lb می‌باشد، تسمه روی قرقره به حرکت درآورنده لغزش نمی‌کند و نتیجه می‌شود که کشش حداکثر برابر با ۶۲۱lb می‌باشد.

مثال ۱۰: در شکل زیر یک موتور الکتریکی (در شکل نشان داده نشده) قرقره B را با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخاند و این قرقره توسط تسمه‌ای به قرقره A متصل است. قرقره A به یک کمپرسور (در شکل نشان داده نشده) متصل می‌باشد و کمپرسور برای چرخیدن با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_A، گشتاور پیچشی ۷۰۰N.M را لازم دارد. اگر ضریب اصطکاک تسمه با هر دو قرقره ۰/۴ باشد، حداقل مقدار لازم برای نیروی F، که در شکل مشخص شده است، باید چقدر باشد تا در هیچ قسمت از سیستم لغزش به وجود نیاید؟



☑ **پاسخ:** در مرحله اول: زاویه پوشش β را برای هر یک از قرقره‌ها تعیین کنید. بدین منظور ابتدا α را محاسبه نمایید. با توجه به این که شعاع‌های O_AD و O_BE بر خط DE عمود هستند، لذا با یکدیگر موازی می‌باشند. با رسم EC به موازات O_AO_B، زاویه α در مثلث هاشور خورده تشکیل می‌شود.

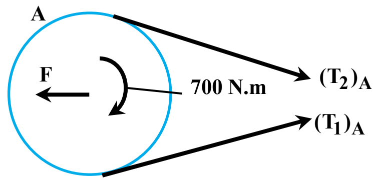
لذا می‌توان گفت:



$$\alpha=\sin^{-1}\frac{CD}{CE}=\sin^{-1}\frac{r_A-r_B}{O_AO_B}=\sin^{-1}\frac{۰/۵۰-۰/۳۰}{۲}=۵/۷۴^\circ$$

بنابراین:

$$\beta_A=۱۸۰^\circ+۲(۵/۷۴)=۱۹۱/۵^\circ$$
$$\beta_B=۱۸۰^\circ-۲(۵/۷۴)=۱۶۸/۵^\circ$$



حال دیاگرام جسم آزاد قرقره A را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. حداقل نیروی F، مربوط به حالت لغزش می‌باشد. برای این وضعیت در قرقره A، داریم:

$$\frac{(T_۱)_A}{(T_۲)_A}=e^{\mu_s.\beta_A}=e^{(۰/۴)[(۱۹۱/۵)\times\pi/۱۸۰]}=۳/۸۱ \qquad (a)$$

همچنین با جمع جبری گشتاورها حول مرکز قرقره، داریم:

$$[(T_۱)_A-(T_۲)_A](۰/۵)-۷۰۰=۰$$

بنابراین می‌توان نوشت:

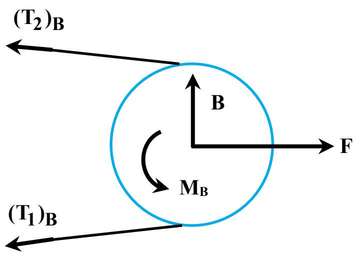
$$(T_۱)_A-(T_۲)_A=۱۴۰۰ \qquad (b)$$

با حل معادلات (a) و (b) خواهیم داشت:

$$(T_۱)_A=۱۸۹۸N \text{ و } (T_۲)_A=۴۹۸N$$

با استفاده از رابطه $\sum F_x=۰$، می‌توان نیروی F را به صورت روبرو محاسبه نمود:

$$(۱۸۹۸+۴۹۸)\cos ۵/۷۴^\circ-F=۰\Rightarrow F=۲۳۸۴N$$



حال می‌بایستی در قرقره B، مقدار حداقل نیروی F به جهت عدم لغزش تسمه روی قرقره محاسبه گردد، برای این منظور دیاگرام جسم آزاد قرقره B را طبق شکل مقابل رسم می‌کنیم. برای وضعیت لغزش در قرقره B، داریم:

$$\frac{(T_۱)_B}{(T_۲)_B}=e^{\mu_s.\beta_B}=e^{(۰/۴)[(۱۶۸/۵)\times\pi/۱۸۰]}=۳/۲۴ \qquad (c)$$

گشتاور پیچشی لازم در قرقره B برای ایجاد گشتاور پیچشی ۷۰۰N.m در قرقره A، به صورت زیر قابل محاسبه است، لذا:

$$M_B=\frac{r_B}{r_A}M_A=\frac{۰/۳۰}{۰/۵۰}(۷۰۰)\Rightarrow M_B=۴۲۰N.m$$

بنابراین با استفاده از نتیجه فوق و جمع جبری گشتاورها حول نقطه B داریم:

$$-[(T_۱)_B-(T_۲)_B](۰/۳۰)+۴۲۰=۰\Rightarrow(T_۱)_B-(T_۲)_B=۱۴۰۰ \qquad (d)$$

در نتیجه با حل معادلات (c) و (d) خواهیم داشت:

$$(T_۱)_B=۲۰۲۴N \text{ و } (T_۲)_B=۶۲۴N$$

لذا حداقل مقدار نیروی لازم (F) در قرقره B، برابر است با:

$$F=(۲۰۲۴+۶۲۴)\cos ۵/۷۴^\circ=۲۶۳۵N$$

برای اینکه تسمه روی هیچ یک از قرقره‌ها نلغزد، حداقل مقدار نیروی مورد نیاز، F =۲۶۳۷ نیوتن می‌باشد.

مثال ۱۱: یک استوانه چوبی که با محتویات خود ۱/۲ تن (۱۲۰۰kg) وزن دارد روی سطح افقی چوبی با سرعت ثابت می‌غلتد. اگر قطر استوانه $D=۱/۵m$ باشد، چه نیرویی برای ادامه حرکت لازم است؟ (ضریب اصطکاک غلتش ۰/۰۸ cm فرض می‌شود)

۱) ۱۲۸۰kg
۲) ۶۰۰kg
۳) ۶۸۰kg
۴) ۱۳۹۰kg

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مقدار نیرو برابر است با:

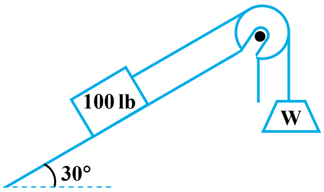
$$P=\frac{۰/۰۸}{۱۰۰}\times\frac{۱۲۰۰}{۰/۷۵}=۱/۲۸kg$$

اگر همین بار را روی جعبه چوبی قرار داده و با ضریب اصطکاک $\mu_d=۰/۵$ (اصطکاک چوب روی چوب) روی سطح بکشیم نیروی لازم برابر است با:

$$P=۱۲۰۰\times۰/۵=۶۰۰kg$$

آزمون فصل پنجم

۱ـ در شکل زیر مقدار حداقل وزن W برای برقراری تعادل کدام است؟ (قرقره بدون اصطکاک است، ضریب اصطکاک استاتیکی سطح شیبدار ۰/۳ فرض شود)



۱) $W = 0\ \text{lb}$

۲) $W = 24/02\ \text{lb}$

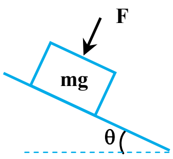
۳) $W = 18/1\ \text{lb}$

۴) $W = 75/8\ \text{lb}$

۲ـ چنانچه F_2 و F_1 به ترتیب نیروها در قسمت سفت و شل تسمه و D قطر چرخ تسمه باشد، با فرض وجود اصطکاک بین تسمه و چرخ تسمه گشتاور پیچشی موثر بر چرخ کدام است؟

۱) $T = (F_1 + F_2)\dfrac{D}{2}$ ۲) $T = (F_1 - F_2)\dfrac{D}{2}$ ۳) $T = (F_1 + F_2)D$ ۴) $T = (F_1 - F_2)D$

۳ـ حداقل مقدار نیروی F برای جلوگیری از لغزش جسم روی سطح شیبدار با ضریب اصطکاک μ کدام است؟



۱) $mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)$

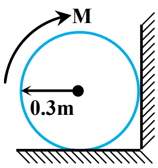
۲) $mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

۳) $mg(\dfrac{\cos\theta}{\mu} - \mu\sin\theta)$

۴) $mg(\dfrac{\sin\theta}{\mu} - \cos\theta)$

۴ـ گشتاور لازم جهت به گردش در آوردن چرخ ۶ کیلوگرمی روی دیوار قائم با فرض ضرایب اصطکاک ۰/۳ برای تمام سطوح، کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟

$(g = 9/81\dfrac{m}{s^2})$



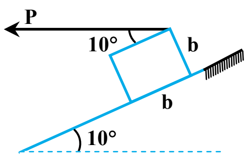
۱) $21/06\ \text{N.m}$

۲) $27/24\ \text{N.m}$

۳) $18/43\ \text{N.m}$

۴) $17/51\ \text{N.m}$

۵ـ مطابق شکل، جعبه‌ای به جرم ۲۰۰ کیلوگرم با نیروی P به پایین کشیده می‌شود در صورتی که ضریب اصطکاک بین صندوق و سطح شیبدار برابر ۰/۴ باشد، مقدار P در آستانه حرکت کدام است؟ $(g = 9/81\dfrac{m}{s^2})$



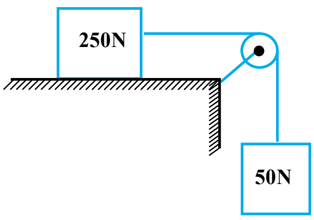
۱) 372N

۲) 361N

۳) 409N

۴) 359N

۶ـ ضریب اصطکاک بین جسم و میز با فرض تعادل سیستم در شکل زیر کدام است؟ (قرقره بدون اصطکاک فرض شود)



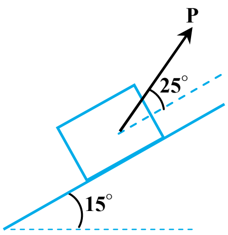
۱) ۰/۲

۲) ۰/۳

۳) ۰/۳۲

۴) ۰/۳۴

۷ـ نیروی **P** مطابق شکل زیر به یک صندوق ساکن ۵۰ کیلوگرمی وارد می‌شود. جهت و مقدار نیروی اصطکاک در صورتی که $P = ۰$ باشد کدام است؟ $(g = ۹/۸۱ \frac{m}{s^۲})$ $(\mu_d = ۰/۲ \text{ و } \mu_s = ۰/۲۵)$



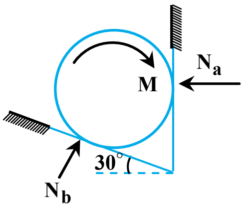
۱) به طرف پایین سطح شیبدار، $F_f = ۶۱N$

۲) به طرف بالای سطح شیبدار، $F_f = ۹۴/۷N$

۳) به طرف پایین سطح شیبدار، $F_f = ۷۷/۷N$

۲) به طرف بالای سطح شیبدار، $F_f = ۲۳/۹N$

۸ـ استوانه همگنی به وزن **W** و قطر ۴۰۰ میلیمتر مطابق شکل به سطوح عمودی و شیبدار تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین استوانه و تمامی سطوح ۰/۳ باشد، مقدار گشتاور ساعتگرد **M** کدام‌یک از گزینه‌ها می‌باشد؟



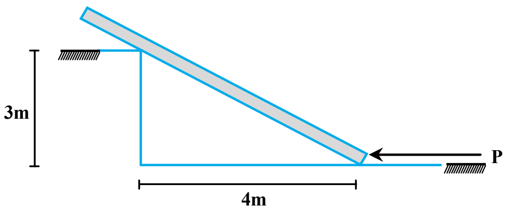
۱) $۰/۰۶(N_a + N_b)$

۲) $۰/۳(N_a + N_b)$

۳) $۰/۲(N_a + N_b)$

۴) $۰/۱۲(N_a + N_b)$

۹ـ تیری به طول ۷ متر و جرم ۱۰۰ کیلوگرم مطابق شکل به زمین و دیوار تکیه دارد. درصورتی که $\mu_s = ۰/۴$ باشد، نیروی **P** جهت قرارگیری تیر در آستانه حرکت چند نیوتن است؟



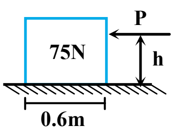
۱) ۶۹۷

۲) ۷۱۵

۳) ۷۳۵

۴) ۷۷۵

۱۰ـ در شکل زیر، ضریب اصطکاک استاتیکی سطوح ۰/۲ است. بیشترین ارتفاع **h** برای بار افقی **P** چه مقدار باشد تا جعبه بدون واژگون شدن بلغزد؟



۱) $h = ۰m$

۲) $h = ۱m$

۳) $h = ۱/۵m$

۴) $h = ۷/۵m$

۱۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر از روش‌های عمومی جهت کم کردن مقدار نیروی اصطکاک نمی‌باشد؟

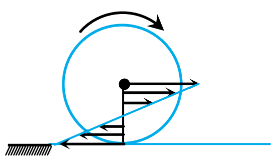
۱) استفاده از واسطه‌هایی مانند غلتک

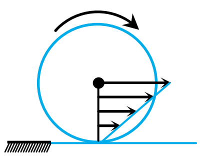
۲) استفاده از یک واسطه روغنی

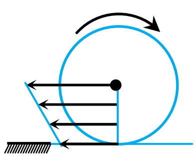
۳) صیقلی کردن نسبی سطوح

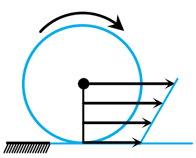
۴) صیقلی کردن بیش از حد سطوح

۱۲ـ در حرکت یک چرخ حول محور مرکزی آن، با فرض چرخش همراه با غلتش، پروفیل سرعت در قسمتهای مختلف چرخ کدام است؟

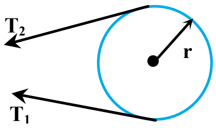

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۱۳ـ در یک سیستم تسمه و پولی با فرض وجود اصطکاک (مطابق شکل) ، کدام‌یک از گزینه‌های زیر از روشهای افزایش مقدار توان انتقالی می‌باشد؟



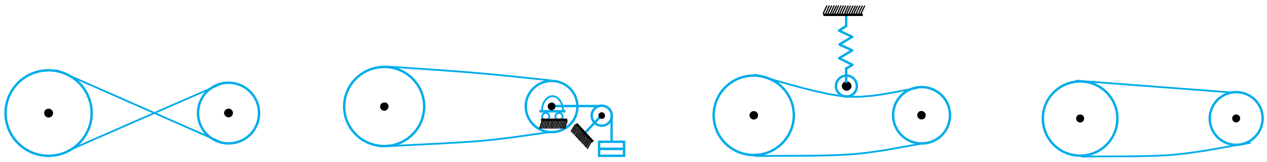
۱) کاهش زاویه پوشش پولی

۲) کم کردن شعاع پولی

۳) اضافه کردن کشش در کابل ۲

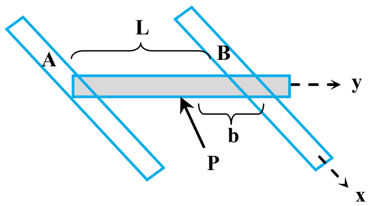
۴) کم کردن کشش در کابل ۲

۱۴ـ کدام‌یک از مکانیزم‌های زیر از روش‌های افزایش انتقال توان در مکانیزم تسمه و پولی نمی‌باشند؟



(۴) (۳) (۲) (۱)

۱۵ـ طبق شکل زیر، تیر I شکل یکنواختی به جرم m از دو سرش روی دو ریل افقی قرار دارد، حداکثر مقدار نیروی افقی P وارد بر تیر که موجب لغزیدن تیر نشود کدام است؟ (μ_s ضریب اصطکاک استاتیکی بین تیر و ریل‌ها و $b < \frac{L}{۲}$)



۱) $\dfrac{۲\mu_s.m.g}{۳(۱-\frac{b}{L})}$

۲) $\dfrac{\mu_s.m.g}{۲(۱-\frac{b}{L})}$

۳) $\dfrac{\mu_s.m.g}{۳(۱-\frac{b}{L})}$

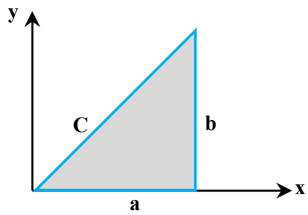
۴) $\dfrac{۳\mu_s.m.g}{۲(۱-\frac{b}{L})}$

فصل ششم

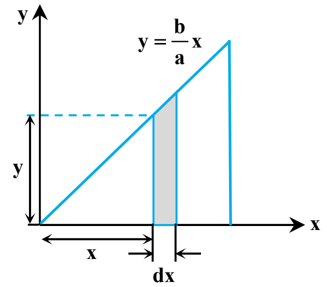
«خواص سطوح (Properties of Surfaces)»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال ۱: مختصات مرکز سطح مثلث قائم‌الزاویه شکل را محاسبه نمایید؟



پاسخ: برای حل، دستگاه مختصات y و x و یک المان سطح (dA) را به صورت زیر در نظر بگیرید:



$$A=\frac{a.b}{۲} \quad و \quad dA=y.dx=\frac{b}{a}.xdx$$

$$dM_y=xdA=\frac{b}{a}x^۲dx$$

$$M_y=\int_{۰}^{a}\frac{b}{a}x^۲dx=\frac{ba^۲}{۳}$$

همچنین داریم:

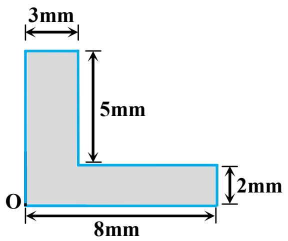
$$dM_x=\frac{y}{۲}.dA=\frac{b}{۲a}x(\frac{b}{a}.xdx) \quad , \quad M_x=\int_{۰}^{a}\frac{b^۲}{۲a^۲}x^۲.dx=\frac{a.b^۲}{۶}$$

توجه داشته باشید که در تعریف گشتاور اول سطح $(M_x=y.dA)$ y مختصه عمودی مرکز سطح المان dA می‌باشد.

در نتیجه مختصات مرکز سطح مثلث برابر است با:

$$y_c=\frac{M_x}{A}=\frac{a.b^۲}{۶}\times\frac{۲}{a.b}=\frac{b}{۳} \quad , \quad x_c=\frac{M_y}{A}=\frac{b.a^۲}{۳}\times\frac{۲}{a.b}=\frac{۲a}{۳}$$

مثال ۲: موقعیت مرکز سطح شکل هاشورخورده مقابل با توجه به دستگاه xoy انتخاب شده کدام است؟



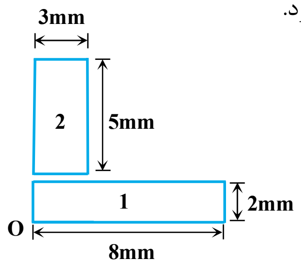
۱) $\begin{cases}x_c=۲/۳۱mm\\y_c=۳/۱mm\end{cases}$

۲) $\begin{cases}x_c=۰/۹۶mm\\y_c=۲/۱۲mm\end{cases}$

۳) $\begin{cases}x_c=۲/۷۹mm\\y_c=۲/۶۹mm\end{cases}$

۴) $\begin{cases}x_c=۱/۱۸mm\\y_c=۱/۱۲mm\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۳» شکل مسأله یک سطح منظم مرکب است که به دو مستطیل (۲×۸) و (۵×۳) تقسیم می‌شود.



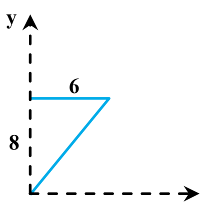
حال با استفاده از روابط میانگین وزنی، موقعیت مرکز سطح شکل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_c=\frac{A_۱\bar{x}_۱+A_۲\bar{x}_۲}{A_۱+A_۲}=\frac{(۸\times۲\times۴)+(۳\times۵\times۱/۵)}{(۸\times۲)+(۳\times۵)}=۲/۷۹mm$$

و

$$y_c=\frac{A_۱\bar{y}_۱+A_۲\bar{y}_۲}{A_۱+A_۲}=\frac{(۸\times۲\times۱)+(۳\times۵\times۴/۵)}{(۸\times۲)+(۳\times۵)}=۲/۶۹mm$$

مثال ۳: کدام گزینه مقدار $\bar{y}$ میله خمیده را نشان می‌دهد؟



۱) ۳

۲) ۴

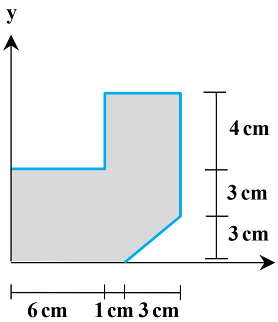
۳) ۵/۵

۴) ۴/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه عرض مرکز خط، باید خط مرکب را به خطوط ساده تقسیم نموده و سپس از رابطه زیر، $\bar{y}$ خط مرکب به دست آید:

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲}L_i\bar{y}_i}{\sum_{i=۱}^{۲}L_i} \qquad \bar{y}(۶+۱۰)=(۸\times۶)+(۴\times۱۰) \Rightarrow \bar{y}=\frac{۸۸}{۱۶}=۵/۵$$

مثال ۴: مرکز سطح شکل سایه زده، برحسب سانتی‌متر برابر است با؟



۱) $\bar{x}=۵/۴۲\ ,\ \bar{y}=۴/۰۴$

۲) $\bar{x}=۵/۴۲\ ,\ \bar{y}=۴/۲۴$

۳) $\bar{x}=۴/۰۴\ ,\ \bar{y}=۵/۴۲$

۴) $\bar{x}=۴/۲۴\ ,\ \bar{y}=۵/۴۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شکل مرکب را به یک مربع بزرگ، یک مستطیل و مثلث کوچک تقسیم می‌کنیم. در این حالت خواهیم داشت:

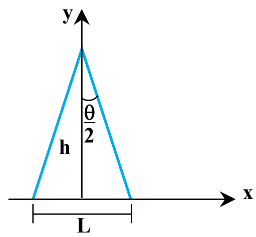
$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{۳}A_i.\bar{x}_i}{A}=\frac{(۱۰\times۱۰\times۵)+(-۶\times۴\times۳)+(-\frac{۳\times۳}{۲}\times۹)}{۱۰۰-۲۴-۴/۵}=۵/۴۲$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=۱}^{۳}A_i.\bar{y}_i}{A}=\frac{(۱۰\times۱۰\times۵)+(-۶\times۴\times۸)+(-\frac{۳\times۳}{۲}\times۱)}{۱۰۰-۲۴-۴/۵}=۴/۲۴$$

مثال ۵: میله‌ای به صورت مثلث متساوی‌الساقین به قاعده L و ارتفاع h و زوایای مجاور به ساق $\frac{\theta}{۲}$ فرم داده شده است. زاویه θ چند درجه باشد تا $(\bar{x},\bar{y})$ آن بر مرکز سطح بسته حاصل از خم کردن مفتول بر هم منطبق باشند؟

۱) ۶۰° ۲) ۳۰° ۳) ۴۵° ۴) ۴۰°

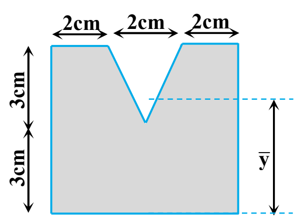
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مرکز خط سه گوشه باید با مرکز سطح مثلث برابر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\bar{y}_{\text{مثلث}}=\bar{y}_{\text{مفتول سه گوش}} \Rightarrow \frac{h}{۳}=\frac{L(۰)+(\frac{h}{۲}\times\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}})+(\frac{h}{۲}\times\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}})}{L+\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}}+\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}}}=\frac{\frac{h^۲}{۲\cos\frac{\theta}{۲}}}{L+\frac{۲h}{\cos\frac{\theta}{۲}}}$$

$$\frac{L}{۳}+\frac{۲h}{۳\cos\frac{\theta}{۲}}=\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}} \Rightarrow L=\frac{h}{\cos\frac{\theta}{۲}} \quad ، \quad ۲\cos\frac{\theta}{۲}=\frac{h}{\frac{L}{۲}}=\cot an\frac{\theta}{۲} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}=۶۰^\circ$$

مثال ۶: در شکل نشان داده شده، موقعیت عرض مرکز سطح $(\bar{y})$ چند سانتی‌متر است؟



۱) ۳/۱

۲) ۲/۸

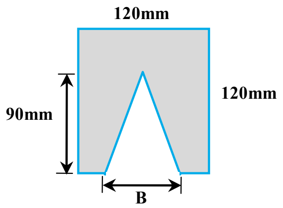
۳) ۲/۹

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن مرکز سطح شکل هاشور خورده، لازم است شکل را به اَشکال منظم و ساده، شامل یک مربع منهای یک مثلث، تقسیم کنیم:

$$\bar{y}=\frac{\sum A_i.\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{(۶\times۶\times۳)-(\frac{۲\times۳}{۲}\times۵)}{(۶\times۶)-(\frac{۲\times۳}{۲})}=۲/۸۲\ \text{cm}$$

مثال ۷: مقدار بُعد B را طوری محاسبه نمایید که عرض مرکز سطح بخش هاشورخورده، ۷۰ میلیمتر بالای قاعده قرار گیرد؟



۱) $B=۷۵$

۲) $B=۸۵$

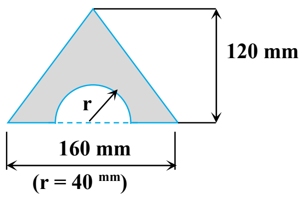
۳) $B=۸۰$

۴) $B=۴۰$

پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه عرض مرکز سطح شکل در موقعیت $۷۰\,\text{mm}$ قرار گیرد باید شکل هاشورخورده به اَشکال منظم و ساده تجزیه شده و سپس عرض مرکز سطح آن به صورت مقابل محاسبه شود:

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲}A_i.\bar{y}_i}{A}\Rightarrow ۷۰=\frac{(۱۲۰\times۱۲۰\times۶۰)-(۴۵.B\times۳۰)}{۱۴۴۰۰-۴۵.B}\Rightarrow B=۸۰\,\text{mm}$$

مثال ۸: صفحه مثلثی شکل مقابل دارای یک بریدگی به شکل نیم‌دایره در قاعده‌اش می‌باشد، فاصله‌ی $\bar{y}$، از قاعده تا مرکز جرم صفحه چند میلی‌متر است؟



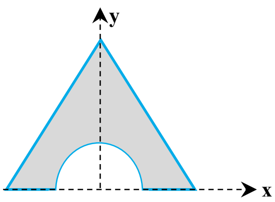
۱) ۴۸/۱۷

۲) ۵۰/۱۷

۳) ۵۲/۲۷

۴) ۵۴/۷۲

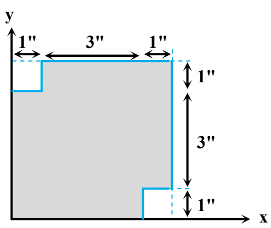
پاسخ: گزینه «۱» شکل مرکب را به اَشکال منظم و ساده تجزیه می‌کنیم، لذا:



$$\begin{cases}\text{مساحت نیم دایره}=\frac{\pi\times۴۰^۲}{۲}=۲۵۱۲\,\text{mm}^۲\\ \bar{y}\ \text{نیم دایره}=\frac{۴R}{۳\pi}=\frac{۴\times۴۰}{۳\pi}=۱۷\,\text{mm}\end{cases}\ ,\ \begin{cases}\text{مساحت مثلث}=\frac{۱۲۰\times۱۶۰}{۲}=۹۶۰۰\,\text{mm}^۲\\ \bar{y}\ \text{مثلث}=\frac{۱۲۰}{۳}=۴۰\,\text{mm}\end{cases}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲}A_i\bar{y}_i}{\sum_{i=۱}^{۲}A_i}=\frac{(۹۶۰۰)(۴۰)-(۲۵۱۲)(۱۷)}{۹۶۰۰-۲۵۱۲}=۴۸/۱۷\,\text{mm}$$

مثال ۹: مختصات مرکز شکل زیر کدام است؟



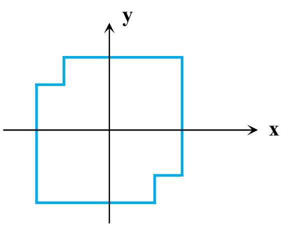
۱) $\begin{cases}\bar{x}=۲/۵''\\ \bar{y}=۲/۵''\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\bar{x}=۳''\\ \bar{y}=۳''\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\bar{x}=۲''\\ \bar{y}=۳''\end{cases}$

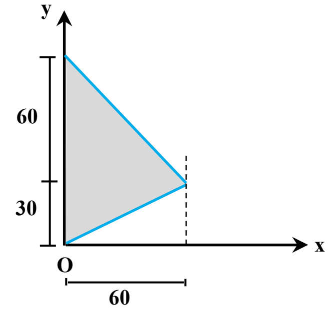
۴) $\begin{cases}\bar{x}=۲/۷۵''\\ \bar{y}=۲/۵''\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» از آنجایی که شکل نسبت به محورهای گذرنده از مرکز آن تقارن دارد لذا خواهیم داشت:



$$\bar{x}=\frac{۵}{۲}=۲/۵''=\bar{y}$$

مثال ۱۰: عرض مرکز سطح شکل زیر کدام است؟



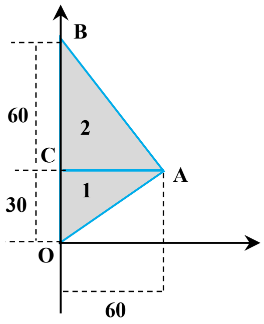
۱) ۴۰

۲) ۳۰

۳) ۳۵

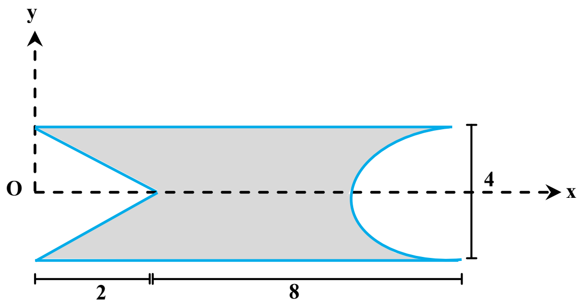
۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۱» شکل داده شده یک سطح منظم مرکب است که از مجموع دو مثلث OAC و ABC به دست می‌آید، لذا می‌توان نوشت:



$$\bar{y}=\frac{A_1.\bar{y}_1+A_2.\bar{y}_2}{A_1+A_2}=\frac{[(\frac{2}{3}\times 30)\times(\frac{1}{2}\times 30\times 60)]+[(30+\frac{1}{3}\times 60)(\frac{1}{2}\times 60\times 60)]}{(\frac{1}{2}\times 30\times 60)+(\frac{1}{2}\times 60\times 60)}=40$$

مثال ۱۱: طول و عرض مرکز سطح شکل هاشور خورده کدام است؟ $(\pi=3)$



۱) $\begin{cases}\bar{x}=0\\ \bar{y}=5/21\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\bar{x}=0\\ \bar{y}=4/71\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\bar{x}=4/71\\ \bar{y}=0\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\bar{x}=5/21\\ \bar{y}=0\end{cases}$

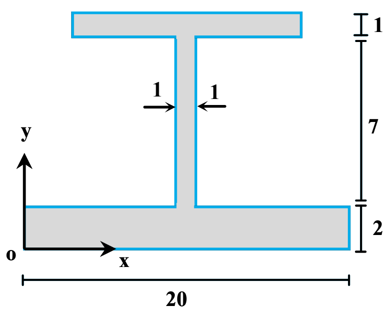
پاسخ: گزینه «۳» شکل منظم مرکب مسأله از یک مستطیل بزرگ با ابعاد ۴×۱۰درست شده است که از آن یک مثلث و یک نیم‌دایره کسر شده‌اند.

با توجه به تقارن شکل نسبت به محور xها می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{y}=0$.

برای محاسبه $\bar{x}$ به صورت زیر اقدام می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{A_1\bar{x}_1-A_2\bar{x}_2-A_3\bar{x}_3}{A_1-A_2-A_3}=\frac{(10\times 4\times 5)-(\frac{2\times 4}{2}\times\frac{2}{3})-[\frac{\pi\times 2^2}{2}\times(10-\frac{4\times 2}{3\pi})]}{(10\times 4)-(\frac{2\times 4}{2})-(\frac{\pi\times 2^2}{2})}=4/71$$

مثال ۱۲: مرکز سطح شکل زیر در کدام محدوده قرار دارد؟



۱) $\begin{cases}\bar{x}=10\\ \bar{y}<5\end{cases}$

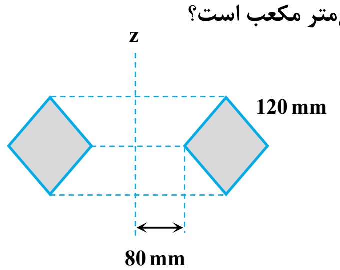
۲) $\begin{cases}\bar{x}=0\\ \bar{y}<5\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\bar{x}<10\\ \bar{y}=5\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\bar{x}<10\\ \bar{y}=0\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» شکل داده شده نسبت به محور عمودی گذرنده از وسط شکل متقارن است، پس $\bar{x}=\frac{20}{2}=10$ می‌باشد. از آنجائیکه قسمت پایین شکل نسبت به محور افقی گذرنده از وسط شکل، دارای سطح بیشتری است، بنابراین عرض مرکز سطح از وسط شکل $(\frac{10}{2}=5)$ پایین‌تر است یعنی: $\bar{y}<\frac{10}{2}$

مثال ۱۳: حجم حادث از دوران کامل مقطع مربع، مطابق شکل حول محور Z با فرض $\pi = ۳$ حدوداً چند سانتی‌متر مکعب است؟



۱) ۴۸۰۰

۲) ۶۹۰۰

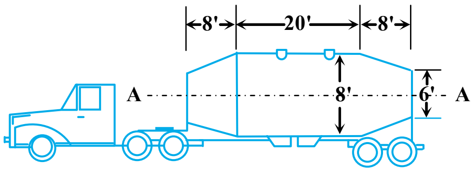
۳) ۱۰۰۰۰

۴) ۱۴۲۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قضیه دوم پاپوس و گولدین داریم:

$$V = (۲\pi)(\bar{y})(A) = (۲\times ۳)(۸+۶\sqrt{۲})(۱۲\times ۱۲) = ۱۴۲۴۳ \simeq ۱۴۲۰۰ cm^۳$$

مثال ۱۴: سطح و حجم تریلر حمل مصالح فله که در شکل زیر نشان داده شده است، به ترتیب کدام است؟



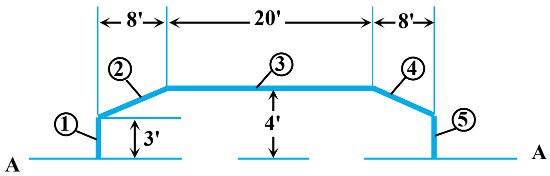
۱) $\begin{cases} A = ۱۴۵/۳\ ft^۲ \\ V = ۹/۲\ ft^۳ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A = ۳۳۱/۴\ ft^۲ \\ V = ۱۰۲۶/۲\ ft^۳ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A = ۲۵۸/۷\ ft^۲ \\ V = ۸۱۵/۴\ ft^۳ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A = ۹۱۳/۸۰\ ft^۲ \\ V = ۱۶۲۵/۲ ft^۳ \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا مساحت شکل با در نظر گرفتن قضیه اول پاپوس و گولدین به صورت زیر تعیین می‌شود:



همان‌طور که می‌بینید این منحنی، متشکل از پنج خط مستقیم است. برای وضوح بیشتر، جدولی به صورت زیر تشکیل شده است:

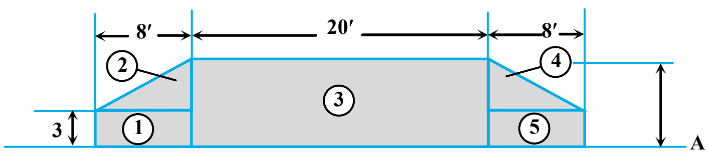
	$L_i(ft)$	$\bar{y}_i(ft)$	$L_i\bar{y}_i(ft^۲)$
۱	۳	۱/۵	۴/۵
۲	$\sqrt{۸^۲+۱^۲} = ۸/۰۶$	۳/۵	۲۸/۲۲
۳	۲۰	۴	۸۰
۴	۸/۰۶	۳/۵	۲۸/۲۲
۵	۳	۱/۵	۴/۵

$$\sum_i L_i.\bar{y}_i = ۱۴۵/۴۳\ ft^۲$$

بنابراین داریم:

$$A = ۲\pi\sum L_i.\bar{y}_i = ۲\pi(۱۴۵/۴۳) = ۹۱۳/۸۰\ ft^۲$$

برای تعیین حجم از قضیه دوم پاپوس و گولدین به صورت زیر استفاده می‌شود:



	$A_i(ft^۲)$	$\bar{y}_i(ft)$	$A_i\bar{y}_i(ft^۳)$
۱	۲۴	۱/۵	۳۶
۲	$(\frac{۱}{۲})(۸)(۱) = ۴$	$۳+\frac{۱}{۳} = ۳/۳۳$	۱۳/۳۳
۳	۸۰	۲	۱۶۰
۴	۴	۳/۳۳۳	۱۳/۳۳
۵	۲۴	۱/۵	۳۶

$$\sum_i A_i\bar{y}_i = ۲۵۸/۷$$

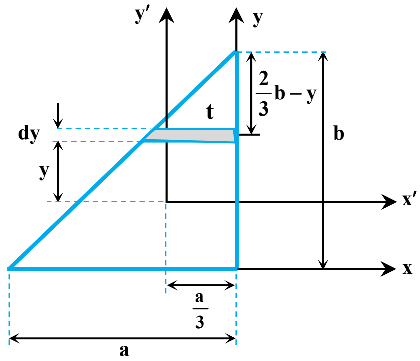
در نتیجه خواهیم داشت:

$$V = ۲\pi\sum_i A_i.\bar{y}_i = (۲\pi)(۲۵۸/۷) = ۱۶۲۵/۲\ ft^۳$$

مثال۱۵: لنگرهای جبر و حاصلضرب اینرسی یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح و قاعده آن چه مقدار می‌باشند؟

☑ **پاسخ:** مرکز سطح یک مثلث قائم‌الزاویه به فاصله $\frac{a}{۳}$ و $\frac{b}{۳}$ از زاویه قائمه قرار دارد. بنابراین محورهای x' و y' را به صورت شکل در نظر بگیرید.

سطح بی‌نهایت کوچک انتخاب شده $t.dy$ است. بنابراین از تشابه مثلث‌ها می‌توان نوشت:



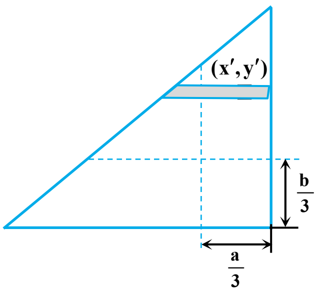
$$\frac{t}{a}=\frac{\frac{۲}{۳}b-y}{b}\Rightarrow t=a(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{b})\Rightarrow dA=(\frac{۲}{۳}a-\frac{a}{b}y)dy$$

$$I_{x'x'}=\int y^۲.dA=\int_{\frac{-b}{۳}}^{\frac{۲}{۳}b}y^۲(\frac{۲}{۳}a-\frac{a}{b}y)dy=\frac{ab^۳}{۳۶}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$I_{y'y'}=\frac{a^۳b}{۳۶}$$

حال مقادیر ممان‌های اینرسی نسبت به محورهای x و y به صورت زیر محاسبه می‌شوند:



$$I_{xx}=I_{x'x'}+A.y_c^۲=\frac{ab^۳}{۳۶}+[\frac{ab}{۲}\times(\frac{b}{۳})^۲]=\frac{ab^۳}{۱۲}$$

و به طریق مشابه داریم:

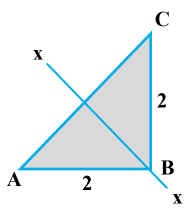
$$I_{yy}=\frac{a^۳b}{۱۲}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$I_{x'y'}=\int\int x'.y'.dx'dy'=\int_{\frac{-b}{۳}}^{\frac{۲}{۳}b}y'[\int_{\frac{a}{۳}-t}^{\frac{a}{۳}}x'dx']dy'=\int_{\frac{-b}{۲}}^{\frac{۲b}{۳}}y'[\frac{a^۲}{۳b}y'-\frac{a^۲}{۲b^۲}y^۲]dy'$$

$$I_{x'y'}=\frac{a^۲b^۲}{۷۲}\qquad I_{xy}=I_{x'y'}+A.x_c.y_c=\frac{a^۲b^۲}{۷۲}+\frac{ab}{۲}(\frac{-a}{۳})(\frac{b}{۳})=\frac{-a^۲b^۲}{۲۴}$$

مثال۱۶: ممان اینرسی مثلث ABC حول محور x کدام است؟



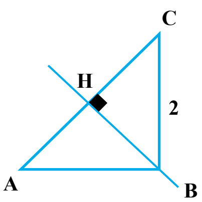
۱) $۰/۶۶$

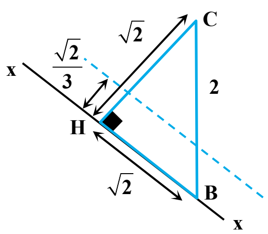
۲) $۰/۷۲$

۳) $۰/۷۶$

۴) $۰/۷۹$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از آنجائیکه مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس می‌توان آن را به دو مثلث تجزیه نمود، سپس ممان اینرسی یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه BCH یا ABH را محاسبه کرده و برای محاسبه ممان اینرسی کل، کافی است مقدار حاصله را در دو ضرب کنیم.



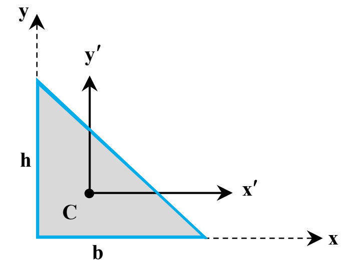


برای مثلث BCH، محور موردنظر (x) محوری است که به موازات محور تقارن آن انتقال یافته است، لذا داریم:

$$I_{xx}=[\frac{۱}{۳۶}\times\sqrt{۲}\times(\sqrt{۲})^۳]+[\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۲]=\frac{۱}{۳}$$

$$(\text{مثلث ABC})\ I_{xx}=۲\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}=۰/۶۶$$

مثال ۱۷: اگر حاصلضرب اینرسی مثلث شکل زیر نسبت به محورهای xy برابر $\frac{b^2.h^2}{24}$ باشد، حاصلضرب اینرسی آن نسبت به محورهای $x'y'$ (گذرنده از مرکز سطح شکل) کدام است؟



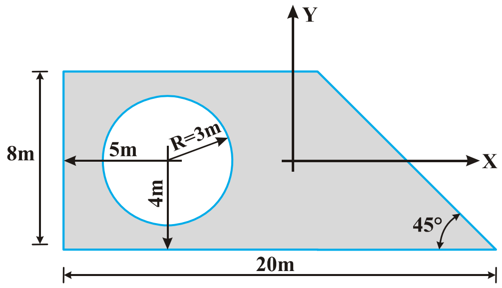
۱) $+\frac{b^2h^2}{72}$ ۲) $-\frac{b^2h^2}{72}$

۳) $+\frac{b^2h^2}{48}$ ۴) $-\frac{b^2h^2}{48}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق قضیه انتقال محورهای مختصات و با توجه به موقعیت مرکز سطح در مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}.\bar{y}.A \qquad \frac{b^2h^2}{24} = I_{x'y'} + \left(-\frac{b}{3} \times -\frac{h}{3} \times \frac{bh}{2}\right) \Rightarrow I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b^2h^2}{18} = \frac{-b^2h^2}{72}$$

مثال ۱۸: برای سطح زیر، مجموع ممان اینرسی‌های افقی و عمودی نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح کدامند؟



۱) ۲۸۱۲

۲) ۳۲۴۱/۸

۳) ۲۹۵۹

۴) ۳۰۵۱/۲

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا لازم است موقعیت مرکز سطح شکل به دست آید:

$$\bar{x} = \frac{(12\times8\times6)+(8\times\frac{8}{2}\times(12+\frac{8}{3}))-(\pi\times3^2\times5)}{(12\times8)+(8\times\frac{8}{2})-(\pi\times3^2)} = 9/06\,m \quad و \quad \bar{y} = \frac{(12\times8\times4)+(8\times\frac{8}{2}\times\frac{8}{3})-(\pi\times3^2\times4)}{(12\times8)+(8\times\frac{8}{2})-(\pi\times3^2)} = 3/57\,m$$

حال ممان‌های اینرسی را نسبت به این محورها محاسبه می‌کنیم.

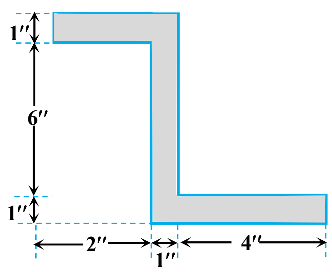
$$I_{xx} = [\frac{12\times8^3}{12}+12\times8\times(4-3/57)^2]+[\frac{8\times8^3}{36}+8\times\frac{8}{2}\times(\frac{8}{3}-3/57)^2]-[\frac{\pi}{4}\times3^4+\pi\times3^2\times(4-3/57)^2] = 600/8\,m^4$$

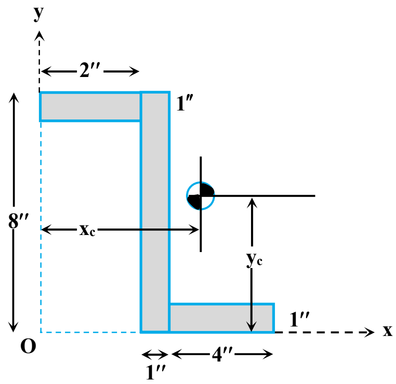
$$I_{yy} = [\frac{12^3\times8}{12}+12\times8\times(6-9/06)^2]+[\frac{8\times8^3}{36}+8\times\frac{8}{2}\times(12+\frac{8}{3}-9/06)^2]-[\frac{\pi}{4}\times3^4+\pi\times3^2\times(5-9/06)^2] = 2641\,m^4$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I_{xx}+I_{yy} = 600/8+2641 = 3241/8$$

مثال ۱۹: مرکز سطح مقطع Z (با بالهای نابرابر) را که در شکل زیر نشان داده شده است، بیابید. ضمناً لنگرهای دوم سطح حول محورهای مرکزی موازی با لبه‌های مقطع را تعیین نمایید؟





☑ **پاسخ:** مقطع Z به سه مستطیل (نشان داده شده در شکل) تجزیه می‌شود. دستگاه مختصات مناسبی مطابق شکل در نظر گرفته می‌شود. برای یافتن مرکز سطح به روش زیر عمل می‌گردد:

	$A_i(in^۲)$	$\bar{x}_i(in)$	$\bar{y}_i(in)$	$A_i.\bar{x}_i(in^۳)$	$A_i.\bar{y}_i(in^۳)$
۱	$(۲)(۱)=۲$	۱	۷/۵۰	۲	۱۵
۲	$(۸)(۱)=۸$	۲/۵۰	۴	۲۰	۳۲
۳	$(۴)(۱)=۴$	۵	۰/۵۰	۲۰	۲
	$\sum_i A_i=۱۴$			$\sum_i A_i.\bar{x}_i=۴۲$	$\sum_i A_i.\bar{y}_i=۴۹$

بنابراین داریم:

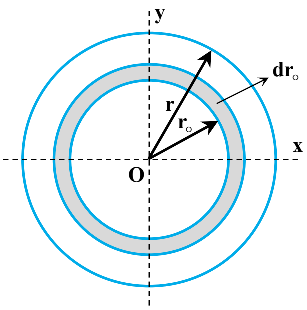
$$y_c=\frac{\sum_i A_i.\bar{y}_i}{\sum_i A_i}=\frac{۴۹}{۱۴}=۳/۵\,in \quad و \quad x_c=\frac{\sum_i A_i.\bar{x}_i}{\sum_i A_i}=\frac{۴۲}{۱۴}=۳\,in$$

حال با استفاده از قضیه انتقال محورها و رابطه $\frac{۱}{۱۲}bh^۳$ برای گشتاور دوم سطح یک مستطیل حول محور تقارن مرکزی آن، $I_{x_cx_c}$ و $I_{y_cy_c}$ تعیین می‌شوند:

$$I_{x_cx_c}=\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۲)(۱)^۳+(۲)(۴^۲)]}_{(۱)}+\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۱)(۸^۳)+(۸)(\frac{۱}{۲})^۲]}_{(۲)}+\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۴)(۱^۳)+(۴)(۳^۲)]}_{(۳)}=۱۱۳/۱۷in^۴$$

$$I_{y_cy_c}=\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۱)(۲^۳)+(۲)(۲^۲)]}_{(۱)}+\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۸)(۱^۳)+(۸)(\frac{۱}{۲})^۲]}_{(۲)}+\underbrace{[(\frac{۱}{۱۲})(۱)(۴^۳)+(۴)(۲^۲)]}_{(۳)}=۳۲/۶۷in^۴$$

مثال ۲۰: مطلوب است محاسبهٔ لنگر ماند یک دایره حول قطر آن و لنگر ماند آن حول محور قطبی گذرنده از مرکز دایره؟



☑ **پاسخ:** یک حلقه، به صورت شکل مقابل در نظر گرفته می‌شود.

می‌دانیم که:

$$dA=۲\pi r_◦ dr_◦$$

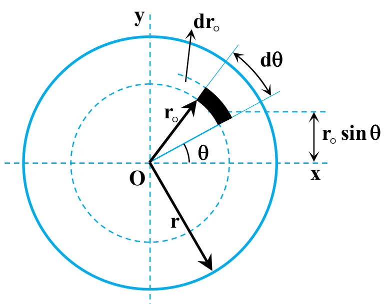
با توجه به بی‌نهایت باریک بودن حلقه می‌توان فاصله تمامی نقاط حلقه از نقطه O را برابر با $r_◦$ در نظر گرفت. بنابراین داریم:

$$I_P=\int r^۲dA \Rightarrow I_P=\int_◦^r r_◦^۲(۲\pi r_◦ dr_◦)=\frac{\pi r^۴}{۲}=\frac{۱}{۲}Ar^۲$$

ضمناً توجه کنید که به علت تقارن شکل، $I_{xx}=I_{yy}$ می‌باشد.

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$I_P=I_{xx}+I_{yy}=۲I_{xx} \Rightarrow I_{xx}=I_{yy}=\frac{I_P}{۲}=\frac{۱}{۴}Ar^۲$$



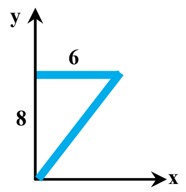
روش تشریح شده در فوق، ساده‌ترین راه برای محاسبه I_{xx} در این مسأله می‌باشد. نتیجه محاسبه را می‌توان از طریق انتگرال‌گیری مستقیم نیز به دست آورد. بدین ترتیب که:

$$I_{xx}=\int y^۲.dA \Rightarrow I_{xx}=\int_◦^{۲\pi}\int_◦^r (r_◦ \sin\theta)^۲ r_◦ dr_◦ d\theta$$

$$=\int_◦^{۲\pi}\frac{r^۴.\sin^۲\theta}{۴}d\theta=\frac{r^۴}{۴}\times\frac{۱}{۲}(\theta-\frac{\sin ۲\theta}{۲})\Big|_◦^{۲\pi}=\frac{\pi r^۴}{۴}=\frac{۱}{۴}Ar^۲$$

آزمون فصل ششم

۱ـ کدام گزینه، $\bar{y}$ میله خمیده شکل را نشان می‌دهد؟



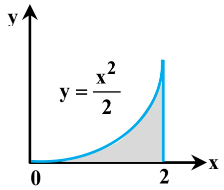
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵/۵

۴) ۴/۵

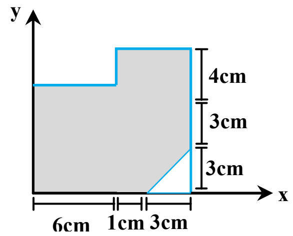
۲ـ مساحت شکل هاشورخورده کدام است؟



۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{1}{18}$ ۴) ۱

۳ـ طول مرکز سطح شکل زیر چند سانتی‌متر است؟



۱) ۴/۰۴

۲) ۴/۲۴

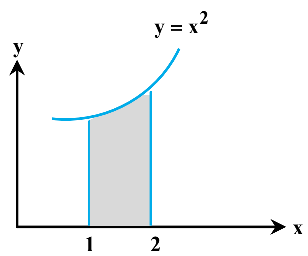
۳) ۵/۴۲

۴) ۴/۷۱

۴ـ میله‌ای به صورت مثلث متساوی‌الساقین به قاعده L و ارتفاع h و زوایای مجاور به دو ساق $\frac{\theta}{2}$ فرم داده شده است. زاویه θ چند درجه باشد تا $\bar{y}$ و $\bar{x}$ آن بر مرکز سطح مثلث با همان ابعاد منطبق باشند؟

۱) 60° ۲) 30° ۳) 45° ۴) 40°

۵ـ ممان اینرسی شکل هاشورخورده زیر نسبت به محور x کدام است؟



۱) ۶/۱

۲) ۶

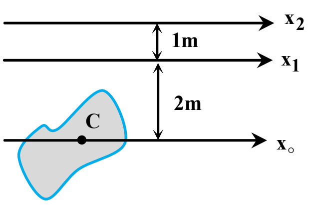
۳) ۱۸/۳

۴) ۸/۵

۶ـ شعاع ژیراسیون مربع به ضلع a نسبت به محور x که از مرکز سطح شکل می‌گذرد کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{12}$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{12}}$ ۳) $\frac{a}{3}$ ۴) $\frac{a^2}{3}$

۷ـ تفاضل ممان‌های اینرسی شکل زیر نسبت به دو محور x_2 و x_1، $0/5\,m^4$ می‌باشد، مساحت شکل چند مترمربع می‌باشد؟



۱) ۰/۵

۲) ۰/۴

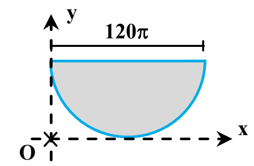
۳) ۰/۱

۴) ۰/۲

۸ـ کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

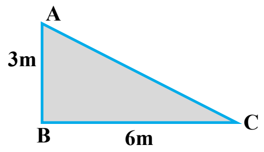
۱) $J = \int r^{۲}.dA$ ۲) $Q_y = \int y.dA$ ۳) $r_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}$ ۴) $I_{yy} = \int x^{۲}.dA$

۹ـ مختصات مرکز سطح نیم‌دایره زیر کدام است؟



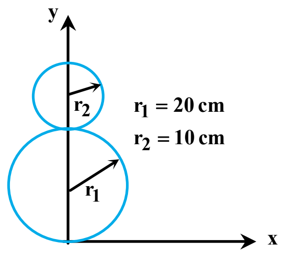
۱) (۱۸۸/۵,۳۶/۵)
۲) (۱۸۸/۵,۱۰۸/۵)
۳) (۰,۳۶/۵)
۴) (۰,۳۴/۵)

۱۰ـ در اثر دوران °۴۵ای مثلث ABC حول ضلع AB، حجم شکل حادث چه مقدار است؟



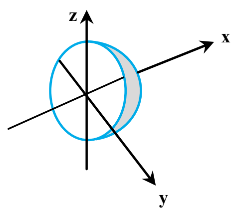
۱) $\frac{۹}{۵}\pi$
۲) $\frac{۹}{۴}\pi$
۳) ۴π
۴) $۴/۵\pi$

۱۱ـ عرض مرکز سطح شکل زیر چند سانتی‌متر است؟



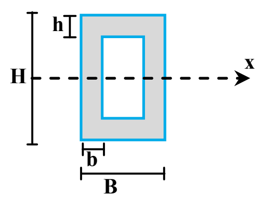
۱) ۲۶
۲) ۲۸
۳) ۳۱
۴) ۳۲

۱۲ـ مرکز جرم پوسته نیمکره‌ای همگن به شعاع r (ضخامت پوسته ناچیز است) کدام است؟



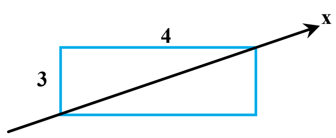
۱) $\frac{۲r}{۳}$ ۲) $\frac{r}{۳}$
۳) $\frac{r}{۲}$ ۴) $\frac{r}{۴}$

۱۳ـ ممان اینرسی شکل هاشورخورده نسبت به محور x کدام است؟ ($B = ۶/۵^{cm}, b = ۰/۳۵^{cm}, H = ۱۶^{cm}, h = ۳^{cm}$)



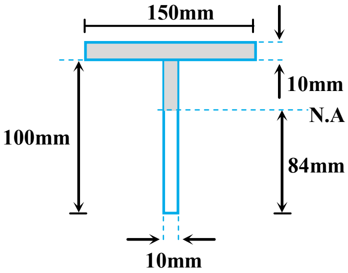
۱) ۱۵۳۵/۳
۲) ۱۶۳۵/۳
۳) ۱۷۳۵/۳
۴) ۱۸۳۵/۳

۱۴ـ ممان اینرسی مستطیل زیر نسبت به محور x کدام است؟



۱) ۱۱/۵۲
۲) ۱۲/۵۰
۳) ۲۳/۰۴
۴) ۲۵

۱۵ـ در شکل زیر ممان مرتبه اول سطح هاشور خورده نسبت به محور مشخص شده (N.A.) چند $mm^{۳}$ است؟



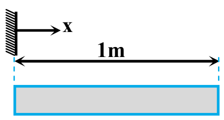
۱) ۴۲۸۰۰

۲) ۳۲۷۸۰

۳) ۱۵۰۰۰

۴) ۶۸۰۰۰

۱۶ـ دانسیته واحد طول میله باریک شکل زیر مطابق رابطه $\rho = \rho_{\circ}(۱-\frac{x}{۲})$ با مکان تغییر می‌کند، (x برحسب متر است) مرکز جرم میله کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



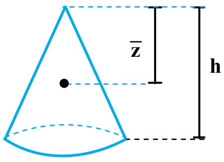
۱) $\bar{x} = \frac{۲}{۵}m$

۲) $\bar{x} = \frac{۳}{۵}m$

۳) $\bar{x} = \frac{۴}{۹}m$

۴) $\bar{x} = \frac{۵}{۷}m$

۱۷ـ فاصله $\bar{z}$ از رأس مخروط قائم دوار تا مرکز هندسی حجم آن کدام‌یک از مقادیر زیر می‌باشد؟



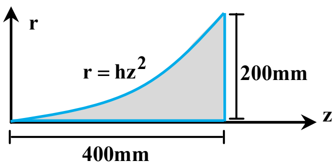
۱) $\frac{۴h}{۵}$

۲) $\frac{۳h}{۴}$

۳) $\frac{۵h}{۶}$

۴) $\frac{۴h}{۷}$

۱۸ـ در شکل زیر مرکز جرم جسم صلب همگنی را بیابید که حجم آن از دوران سطح هاشور خورده حول محور z به اندازه ۳۶۰° حاصل شود؟



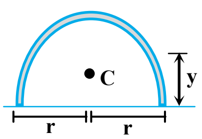
۱) $\bar{z} = ۳۲۲mm$

۲) $\bar{z} = ۳۶۳mm$

۳) $\bar{z} = ۳۳۳/۳mm$

۴) $\bar{z} = ۳۱۰ mm$

۱۹ـ $\bar{y}$ سیم نازکی مطابق شکل که به صورت نیمدایره درآمده است برحسب r کدام است؟



۱) $\frac{r}{\pi}$

۲) $\frac{۲r}{\pi}$

۳) $\frac{r\sqrt{۲}}{\pi}$

۴) $\frac{۴r}{۳\pi}$

۲۰ـ با فرض مساحت یکسان، در مورد ممان اینرسی اصلی مربع به ضلع a و ممان اینرسی اصلی دایره به شعاع r کدام صحیح است؟

۱) ممان اینرسی مربع بزرگتر است.

۲) ممان اینرسی دایره بزرگتر است.

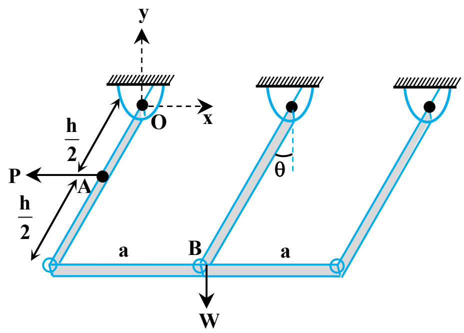
۳) هر دو دارای ممان اینرسی یکسان هستند.

۴) نمی‌توان مقایسه نمود.

فصل هفتم

«کار مجازی (Virtual Work)»

تست‌های تألیفی فصل هفتم



مثال ۱: در شکل زیر اگر $W = 1000\,N$ و $P = 200\,N$ باشند، مقدار θ را در وضعیت تعادل بیابید؟

پاسخ: چون نیروهای P و W به سیستم وارد می‌شوند، به ترتیب طول نقطه A و عرض نقطه B دچار تغییرمکان جزئی می‌گردند. پس ابتدا لازم است طول نقطه A و عرض نقطه B با توجه به موقعیت O و براساس هندسه مسأله مشخص گردد و سپس تغییر مکان‌های جزئی این نقاط (به صورت زیر) به دست آیند:

$$x_A = -\frac{h}{2}.\cos(90^\circ - \theta) = -\frac{h}{2}.\sin\theta \Rightarrow \delta x_A = -\frac{h}{2}.\cos\theta\delta\theta$$

$$y_B = -h.\sin(90^\circ - \theta) = -h.\cos\theta \Rightarrow \delta y_B = h.\sin\theta\delta\theta$$

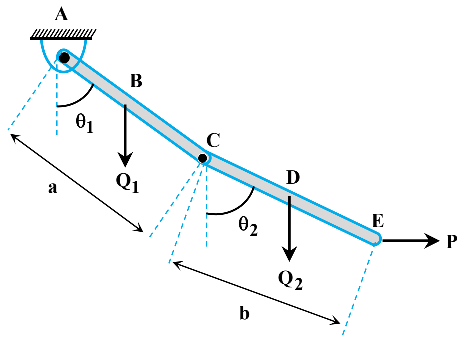
حال کار مجازی حاصل از اثر نیروهای خارجی (فعال) بر این نقاط عبارت است از:

$$\delta W = (P\cdot\delta x_A) + (W\cdot\delta y_B) = 0 \Rightarrow -P\frac{h}{2}\cos\theta\delta\theta + Wh\sin\theta\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{P}{2}\cos\theta - W\sin\theta)h\delta\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \frac{P}{2W} = \frac{200}{2\times1000} = 0/1 \Rightarrow \theta = 5/71^\circ \\ (\text{چون } h\delta\theta \neq 0) \end{cases}$$

آنچه در این مسأله و دیگر مسائل عددی حائز اهمیت می‌باشد، این است که اینگونه مسائل تا انتها به صورت پارامتری تحلیل شده و در آخرین مرحله مقادیر عددی در آن جایگزین می‌گردد.

مثال ۲: برای برقراری تعادل در پاندول دوگانه شکل زیر، زوایای θ_1 و θ_2، را تعیین کنید؟ (وزن میله‌های پاندول به ترتیب Q_1 و Q_2 فرض شوند)



پاسخ: سیستم مسأله دارای دو درجه آزادی است و نیروهای فعال آن عبارتند از: P، Q_1 و Q_2.

فرض کنید تغییر مکان مجازی $\delta\theta_2$ به سیستم داده شود. فاصله افقی نقطه اثر نیروی P (نقطه E) نسبت به نقطه C برابر است با:

$$x_E = b.\sin\theta_2 \Rightarrow \delta x_E = b.\cos\theta_2\,\delta\theta_2$$

و فاصله عمودی نقطه اثر نیروی Q_2 نسبت به نقطه C (y_D) برابر است با:

$$y_D = \frac{b}{2}.\cos\theta_2 \Rightarrow \delta y_D = -\frac{b}{2}.\sin\theta_2\,\delta\theta_2$$

لذا کار مجازی انجام شده توسط دو نیروی P و Q_2 که به ترتیب طول نقطه E و عرض نقطه D را تغییرمکان جزئی می‌دهند برابر است با:

$$\delta W = (Q_2.\delta y_D) + (P\delta x_E) = 0 \Rightarrow -Q_2\frac{b}{2}\sin\theta_2\,\delta\theta_2 + Pb\cos\theta_2\,\delta\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow Pb\cos\theta_2 = Q_2\frac{b}{2}\sin\theta_2 \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{2P}{Q_2}$$

به دلیل اینکه سیستم مسأله دو درجه آزادی دارد، لذا اگر تغییر مکان مجازی $\delta\theta_۱$ به سیستم داده شود، خواهیم داشت:

فاصله قائم نقطه B (که تحت تأثیر نیروی $Q_۱$ قرار دارد) (نسبت به A):

$$y_B = \frac{a}{۲}\cos\theta_۱ \Rightarrow \delta y_B = -\frac{a}{۲}\delta\theta_۱ \sin\theta_۱$$

فاصله قائم نقطه D (که تحت تأثیر نیروی $Q_۲$ قرار دارد) (نسبت به A):

$$y_D = a\cos\theta_۱ + \frac{b}{۲}\cos\theta_۲ \Rightarrow \delta y_D = -a\,\delta\theta_۱\sin\theta_۱$$

فاصله افقی نقطه C (یا E که تحت تأثیر نیروی P قرار دارد) (نسبت به A):

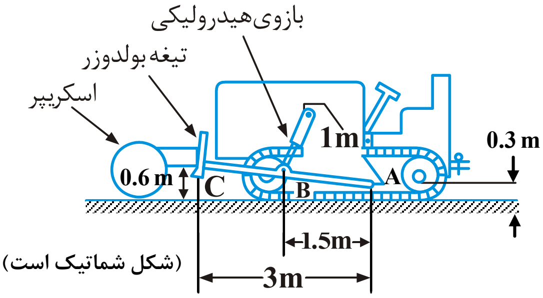
$$x_E = a\sin\theta_۱ + b\sin\theta_۲ \Rightarrow \delta x_C = \delta x_E = a\delta\theta_۱\cos\theta_۱$$

لذا کل کار مجازی این نیروهای فعال عبارت است از:

$$\delta W = (Q_۱.\delta y_B) + (Q_۲.\delta y_D) + (P.\delta x_E) = ۰ \Rightarrow -Q_۱\frac{a}{۲}\delta\theta_۱\sin\theta_۱ - Q_۲\,a\,\delta\theta_۱\sin\theta_۱ + Pa\,\delta\theta_۱\cos\theta_۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$\sin\theta_۱\left(\frac{aQ_۱}{۲} + aQ_۲\right) = Pa\cos\theta_۱ \qquad \tan\theta_۱ = \frac{۲Pa}{aQ_۱ + ۲aQ_۲} = \frac{۲P}{Q_۱ + ۲Q_۲}$$

مثال ۳: بولدوزری برای هل دادن یک اسکریپر با سرعت ثابت مورد استفاده قرار گرفته است. اگر بولدوزر نیروی ۱۵۰KN را به اسکریپر وارد کند، مقدار نیروی F که در مفصل B بر بازوی هیدرولیکی وارد می‌شود، چقدر است؟



۱) ۲۷/۹KN

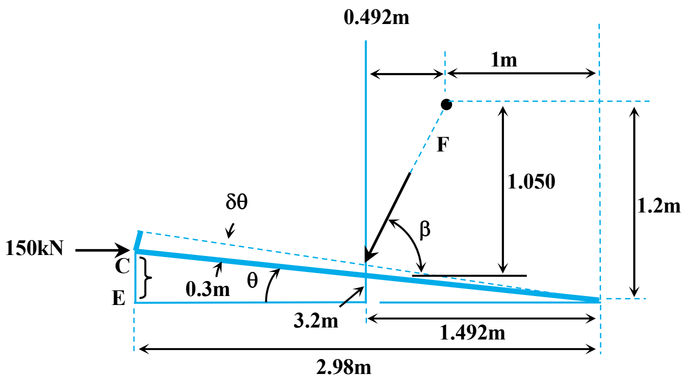
۲) ۳۱/۸KN

۳) ۴۵/۷KN

۴) ۹۰KN

پاسخ: گزینه «۲» عضو ABC نسبت به بدنه بولدوزر دارای یک درجه آزادی است. شکل روبرو این عضو را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. مختصات θ و نیروهای فعال F و ۱۵۰KN نیز در شکل نشان داده شده‌اند.

فاصله ۱/۴۹۲m در شکل با استفاده از قضیه فیثاغورث تعیین شده است. با توجه به شکل ($AB = ۱/۵m$)، داریم:

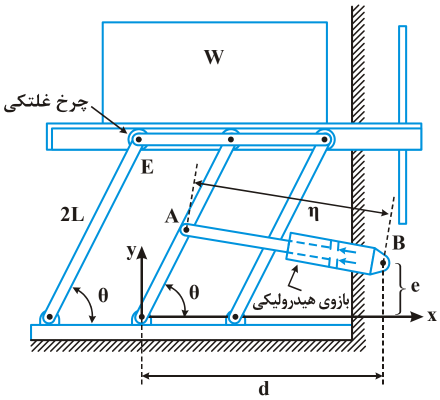


$$\left[AB^۲ - \left(\frac{۰/۶ - ۰/۳}{۲}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} = (۱/۵^۲ - ۰/۱۵^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱/۴۹۲m$$

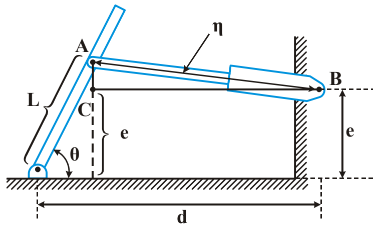
فاصله ۰/۴۹۲m در قسمت بالای شکل نیز مستقیماً تعیین و بعلاوه $AE = ۲(۱/۴۹۲) = ۲/۹۸m$ می‌گردد، سپس می‌توان زوایای θ و β را نیز تعیین نمود:

$$\beta = \tan^{-۱}\frac{۱/۰۵۰}{۰/۴۹۲} = ۶۴/۹^\circ \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-۱}\frac{۰/۳}{۲/۹۸} = ۵/۷۵^\circ$$

مثال۴: یک پلاتفرم بالابر هیدرولیکی مخصوص بار زدن به کامیون‌ها، در شکل نشان داده شده است. دو طرف سیستم شبیه هم است، بنابراین فقط یک طرف سیستم نشان داده شده است. اگر قطر پیستون داخل سیلندر ۴in باشد، زمانی که $\theta = 60^\circ$ است، چه مقدار فشار (P) لازم است تا بـار W بـه وزن ۵۰۰۰lb را در حالت تعادل نگه دارد؟ (سایر داده‌های عددی عبارتند از: $e = 10\,in$، $d = 60\,in$، $L = 24in$ و مفصل A در وسط میله قرار دارد)



(شکل الف)



(شکل ب)

۱) ۲۲۰ Psi ۲) ۲۱۲Psi ۳) ۴۱۵ Psi ۴) ۴۴۰ Psi

پاسخ: گزینه «۳» در اینجا سیستمی با یک درجه آزادی وجود دارد که این درجه آزادی، با زاویه θ مشخص شده است. نیروهای فعالی کـه در حـین تغییر مکان مجازی $\delta\theta$ کار انجام می‌دهند، عبارتند از: وزن W و نیروهای وارد از بازوی هیدرولیکی. بنابراین باید تغییر مکـان مجـازی پلاتفـرم و همچنـین نقطه A از پمپ تعیین شوند. با استفاده از موقعیت دستگاه مختصات xy، داریم:

$$y_E = 2L\sin\theta \Rightarrow \delta y_E = 2L\cos\theta\delta\theta$$

برای محاسبه نیروی بازوی هیدرولیکی، تغییر مکان مفصل A در امتداد محور پمپ، یعنی $\delta\eta$ لازم است. η در شکل نشان داده شده است. با ملاحظه شکل (ب) برای η می‌توان نوشت:

$$\eta^2 = AC^2 + CB^2 = [(L\sin\theta) - e]^2 + (d - L\cos\theta)^2 \qquad (a)$$

از آنجا، داریم:

$$2\eta\delta\eta = 2(L\sin\theta - e)(L\cos\theta)\delta\theta + 2(d - L\cos\theta)(L\sin\theta)\delta\theta$$

با حل معادله فوق برای $\delta\eta$، داریم:

$$\delta\eta = \frac{L}{\eta}[(L\sin\theta - e)\cos\theta + (d - L\cos\theta)\sin\theta]\delta\theta = \frac{L}{\eta}(L\sin\theta\cos\theta - e\cos\theta + d\sin\theta - L\sin\theta\cos\theta)\delta\theta = \frac{L}{\eta}(d\sin\theta - e\cos\theta)\delta\theta$$

می‌توان برای برقراری تعادل از اصل کار مجازی استفاده نمود:

$$\delta W = (-\frac{W}{2}.\delta y_E) + (P.\frac{\pi(4^2)}{4}\delta\eta) = 0$$

و از آنجا داریم:

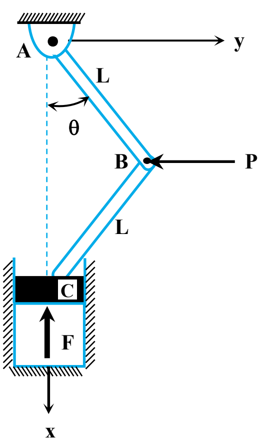
$$-(5000)(2L\cos\theta\delta\theta) + P(4\pi)[\frac{L}{\eta}(d\sin\theta - e\cos\theta)]\delta\theta = 0 \qquad (b)$$

مقدار η را می‌توان از معادله (a) به صورت روبه‌رو تعیین نمود:

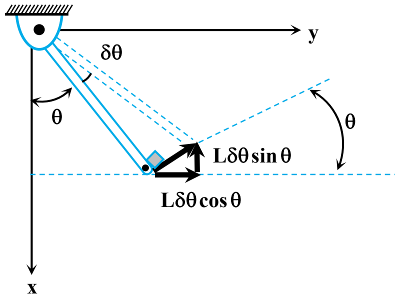
$$\eta^2 = [(24)(0/866) - 10]^2 + [60 - (24)(0/5)]^2 \Rightarrow \eta = 49\ in$$

حال با حذف $\delta\theta$ و جایگزینی مقادیر عددی معلوم در معادله (b)، مقدار لازم P برای برقراری تعادل تعیین می‌شود:

$$-(5000)(2)(24)(0/5) + P(4\pi)\{\frac{24}{49}[(60)(0/866) - (10)(0/5)]\} = 0 \Rightarrow \quad P = 415\ Psi$$



مثال۵: در شکل روبرو، وسیله‌ای به نام کمپکتور، که برای پرس کردن تکه‌های فلز به کار مـی‌رود، نشان داده شده است. یک نیروی افقی P در مفصل B اعمال می‌شود. سپس پیستون در نقطه C، مصالح را پرس می‌کند. به ازاء یک مقدار معلوم نیروی P و زاویه θ، مقدار نیروی F که توسـط پیسـتون C بـر مصالح وارد می‌شود، چقدر است؟ (از اصطکاک بین پیستون و دیواره سیلندر صرف‌نظر کنید و مفصل‌هـا را ایده‌آل (بدون اصطکاک) در نظر بگیرید



☑ **پاسخ:** با مشاهده شکل مشخص می‌گردد که مختصه θ، شکل سیستم را مشخص می‌کند. بنابراین، مکانیزم یک درجه آزادی دارد. در صورتی که از وزن اعضا صرف‌نظر شود، فقط دو نیروی فعال P و F وجود خواهند داشت. با در نظر گرفتن تغییر مکان مجازی $\delta\theta$، در رابطه با اصل کار مجازی، تنها کمیت‌هایی که حائز اهمیت خواهند بود عبارتند از: F, P و θ.

حال کار مجازی نیروهای فعال محاسبه می‌شوند. با توجه به روابط ساده مثلثاتی شکل فوق، تغییر مکان مجازی $\delta\theta$ به نحوی است که نیروی P دارای تغییر مکان افقی $(L\delta\theta\cos\theta)$ است. برای محاسبه این تغییر مکان افقی به صورت زیر عمل می‌شود. با استفاده از سیستم مختصات xy در نقطه A، برای مفصل B، داریم:

$$y_B = L\sin\theta \Rightarrow \delta y_B = L\cos\theta\delta\theta$$

توجه کنید که برای تغییر مکان افقی B به ازاء تغییر مکان مجازی $\delta\theta$، همان مقدار قبلی، که در ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی محاسبه شده بود، به دست آمده است.

برای تغییرات در نظر گرفته شده $\delta\theta$، نیروی P در خلاف جهت δy_B بوده و کار مجازی آن منفی می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\delta W_P = -PL\cos\theta\delta\theta$$

برای به دست آوردن تغییر مکان مجازی پیستون C می‌توان نوشت:

$$x_C = L\cos\theta + L\cos\theta = ۲L\cos\theta \Rightarrow \delta x_C = -۲L\sin\theta\delta\theta$$

چون F و δx_C هم جهت هستند، پس کار این نیرو باید مثبت باشد. بنابراین:

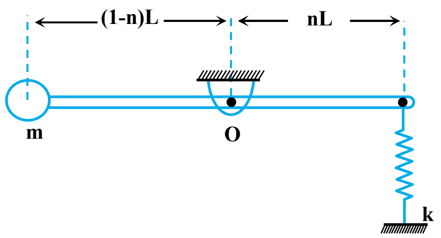
$$\delta W_C = F(۲L\sin\theta)\delta\theta$$

حال اصل کار مجازی را برای اطمینان از برقراری تعادل به کار می‌بریم، در نتیجه خواهیم داشت:

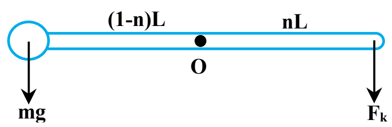
$$\delta W = (-PL\cos\theta\delta\theta) + (۲FL\sin\theta\delta\theta) = ۰$$

با حذف $L\delta\theta$ و محاسبه F، داریم:

$$F = \frac{P}{۲\tan\theta}$$



مثال ۶: شکل مقابل متشکل از میله سبکی است که در نقطه O لولا شده است، جرم m در انتهای میله قرار داشته و فنری با سختی k دارد. نقاط تعادل را به دست آورده و شرط پایداری را بررسی نمایید ($۰ < n < ۱$)؟ (در حالت افقی میله، فنر در حالت آزاد است)

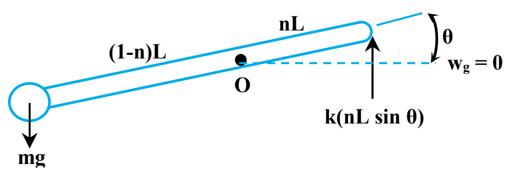


☑ **پاسخ:** به ازای دوران θ میله، انرژی پتانسیل سیستم برابر است با:

$$E = W_g + W_e - mg(۱-n)L\sin\theta + \frac{۱}{۲}k(nL\sin\theta)^۲$$

حال نقاط تعادل را به دست می‌آوریم:

$$\text{نقطه‌ی تعادل}\ \frac{dE}{d\theta} = ۰ \Rightarrow -mg(۱-n)L\cos\theta + kn^۲L^۲\sin\theta\cos\theta = ۰$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۹۰^\circ\ (\text{غیرقابل قبول}) \\ \sin\theta = \dfrac{mg(۱-n)}{kn^۲L} \end{cases}$$

برای اینکه سیستم نقطه تعادل داشته باشد باید:

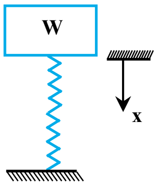
$$\sin\theta < ۱ \Rightarrow \frac{mg(۱-n)}{kn^۲L} < ۱ \qquad (۱)$$

حال شرط پایداری را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{d^۲E}{d\theta^۲} = mg(۱-n)L\sin\theta + kn^۲L^۲\times(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) \xrightarrow{(۱)} \frac{d^۲E}{d\theta^۲} = mg(۱-n)L\times\frac{mg(۱-n)}{kn^۲L} + kn^۲L^۲\times(۱-۲\times(\frac{mg(۱-n)}{kn^۲L})) > ۰$$

بنابراین نقطه‌ی تعادل دوم همواره پایدار است.

مثال۷: بلوکی به وزن W ، بطور آهسته بر روی فنری که دارای ثابت K می‌باشد، قرار داده می‌شود. میزان فشردگی فنر در حالت تعادل کدام است؟



۱) $\frac{W}{K}$　　۲) $\frac{W^۲}{K}$

۳) $\frac{W}{۲K}$　　۴) $\frac{W}{۳K}$

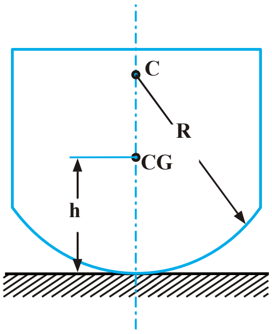
پاسخ: گزینه «۱» نیروهای فعال سیستم عبارتند از : نیروی ثقل (W) و نیروی فنر. با استفاده از حالت اولیه فنر (تغییر شکل نیافته)، بـرای محاسـبه انرژی پتانسیل نیروی وزن و با اندازه‌گیری x از این حالت، مقدار انرژی پتانسیل سیستم برابر است با:

$$E = -Wx + \frac{۱}{۲}Kx^۲$$

از آنجایی که سیستم یک درجه آزادی دارد، لذا:

$$\frac{dE}{dx} = -W + Kx = ۰ \Rightarrow x = \frac{W}{K}$$

مثال۸: صفحه ضخیمی که لبه پایینی آن قوس دایره‌ای به شعاع R دارد، در شکل زیر نشان داده شده است. وقتی‌که صفحه مطابق شکل به حالـت قائم قرار دارد، مرکز ثقل آن به فاصله h از سطح زمین خواهد بود. در حالت تعادل پایدار، چه رابطه‌ای بین h و R برقرار خواهد بود؟

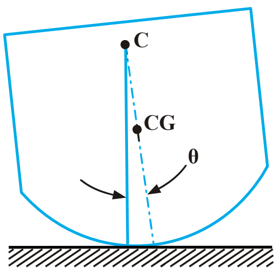


۱) $R < h$

۲) $۰ < R < ۲h$

۳) $۰ < R < \frac{h}{۲}$

۴) $R > h$

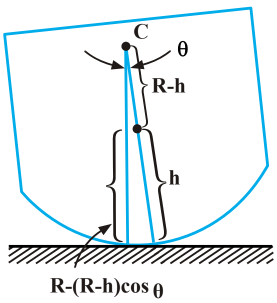


پاسخ: گزینه «۴» صفحه تحت تأثیر نیروی وزن، یک درجه آزادی دارد، پس می‌توان از زاویـه θ، بـه عنوان مختصه مستقل استفاده نمود. انرژی پتانسیل (E) این سیستم به صورت تابعی از θ بیان می‌شود. لذا:

$$E = W[R - (R - h)\cos\theta]$$

که در آن W، وزن صفحه می‌باشد. واضح است که در $\theta = ۰$، حالت تعادل است، زیرا:

$$\left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{\theta=۰} = [W(R-h)\sin\theta]_{\theta=۰} = ۰$$



حال $\frac{d^۲E}{d\theta^۲}$ را در $\theta = ۰$ در نظر بگیرید، بنابراین خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d^۲E}{d\theta^۲}\right)_{\theta=۰} = W(R-h)$$

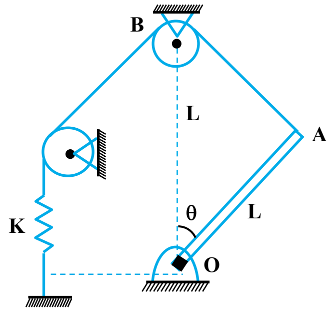
واضح است وقتی‌که $R > h$ باشد، $\left(\frac{d^۲E}{d\theta^۲}\right)_{\theta=۰}$ مثبت است، لذا جهت برقراری تعادل پایدار، باید $R > h$ باشد.

مثال۹: تعادل پایدار در کدام گزینه مشاهده می‌شود؟

(۱)　　(۲)　　(۳)　　(۴)

پاسخ: گزینه «۲» تعادل پایدار، نوعی از تعادل است که اگر در آن، جسم را به وسیله یک عامل خارجی به اندازه کـوچکی از وضـعیت تعـادل خـارج نمایید، پس از حذف عامل خارجی جسم دوباره به حالت اولیه برگردد.

مثال۱۰: در شکل زیر، وزن میله OA ، mg فرض می‌شود. سختی فنر را به گونه‌ای تعیین نمایید که OA در زاویه θ به حالت تعادل برسد. (طول آزاد فنر در $\theta = ۰$ رخ می‌دهد)



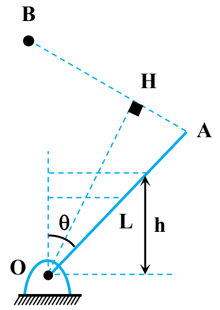
۱) $\frac{۲mg}{L}$

۲) $\frac{mg}{۴L\cos\theta}$

۳) $\frac{mg}{۴L\sin\theta}$

۴) $\frac{mg}{۲L}$

پاسخ: گزینه «۲» انرژی‌های پتانسیل ناشی از وزن میله OA و سختی فنر عبارتند از:



$$E = \frac{۱}{۲}K(AB)^۲ + (+mgh)$$

$$\begin{cases} AB = ۲AH = ۲L\sin\frac{\theta}{۲} \\ h = \frac{L}{۲}\cos\theta \end{cases}$$

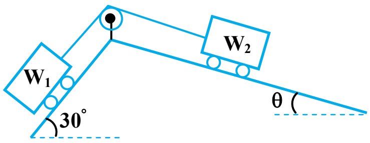
$$E = \frac{۱}{۲}K(۲L\sin\frac{\theta}{۲})^۲ + mg\frac{L}{۲}\cos\theta$$

برای نقطه‌ی تعادل داریم:

$$\frac{dE}{d\theta} = ۰ \Rightarrow ۲KL^۲\sin\theta\cos\theta - mg\frac{L}{۲}\sin\theta = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \theta = ۰ \\ \cos\theta = \frac{mg}{۴KL} \Rightarrow K = \frac{mg}{۴L\cos\theta} \end{cases}$$

آزمون فصل هفتم

۱ــ اگر $W_1 = 100N$ و $W_2 = 150N$ باشند، مقدار زاویه θ برای برقراری تعادل کدام است؟ (از اصطکاک صرفنظر شده است)



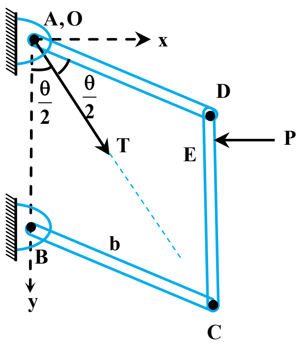
۱) $16/15^\circ$

۲) $18/72^\circ$

۳) $19/47^\circ$

۴) $17/12^\circ$

۲ــ اگر $W = 1000N$ و $P = 300N$ باشند، زاویه θ در زمان تعادل کدام است؟



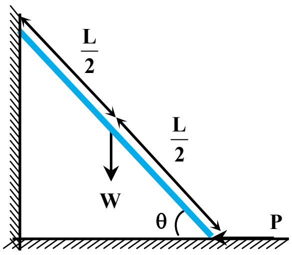
۱) $8/53^\circ$

۲) $12/1^\circ$

۳) $9/12^\circ$

۴) $7/2^\circ$

۳ــ با فرض اینکه نقاط تماس بدون اصطکاک باشند، مقدار نیروی P برای تعادل میله در زاویه‌ی θ کدام است؟



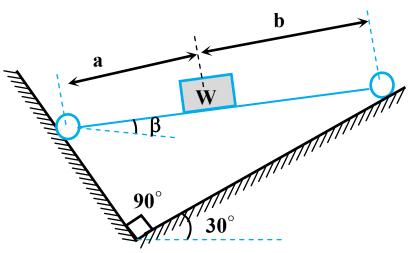
۱) $\frac{W}{2}\tan\theta$

۲) $\frac{W}{2}\cot\theta$

۳) $W\tan\theta$

۴) $W\cos\theta$

۴ــ زاویه β برای برقراری تعادل کدام است؟ (از اصطکاک و وزن تیر صرفنظر شده است)



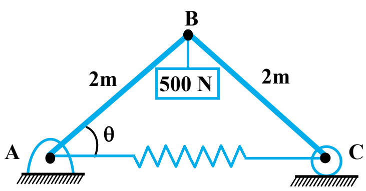
۱) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{a-b}{a+b}])$

۲) $\tan^{-1}(\frac{a-3b}{a+b})$

۳) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{a-3b}{a+b}])$

۴) $\tan^{-1}(\frac{a-b}{a+b})$

۵ــ میله‌های سبک AB و BC بار $500N$ را نگه داشته‌اند. در حالت $\theta = 45^\circ$ فنر تغییر طول ندارد. اگر ثابت فنر $1000\frac{N}{m}$ باشد، نیروی فنر در این حالت کدام است؟



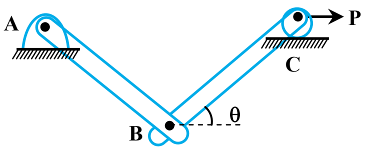
۱) $1042N$

۲) $1000N$

۳) $1066N$

۴) $1051N$

۶ـ میله‌های AB و BC هر کدام دارای جرم m، طول L، بارگذاری و تکیه‌گاههایی مطابق شکل زیر می‌باشند. مطلوب است زاویه تعادل θ؟



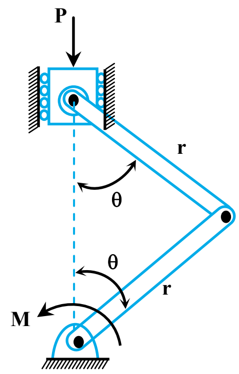
۱) $2\tan^{-1}\dfrac{m.g}{2P}$

۲) $2\tan^{-1}\dfrac{m.g}{P}$

۳) $\tan^{-1}\dfrac{m.g}{P}$

۴) $\tan^{-1}\dfrac{m.g}{2P}$

۷ـ گشتاور M وارده بر شافت اهرم تحتانی مجموعه را برحسب زاویه θ طوری تعیین نمایید که بار وارده (P) را تحمل کند؟



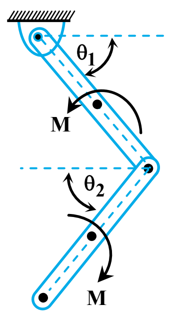
۱) $M = Pr\sin\theta$

۲) $M = Pr\cos\theta$

۳) $M = 2Pr\sin\theta$

۴) $M = Pr\sin 2\theta$

۸ـ زوایای تعادل θ_1 و θ_2 را با فرض اینکه هر دو میله به جرم m و طول L باشند، بیابید؟



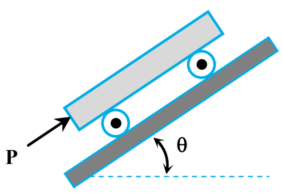
۱) $\theta_1 = \cos^{-1}[\dfrac{2M}{3mgL}]$ و $\theta_2 = \cos^{-1}[\dfrac{2M}{mgL}]$

۲) $\theta_1 = \cos^{-1}[\dfrac{2M}{3mgL}]$ و $\theta_2 = \cos^{-1}[\dfrac{M}{2mgL}]$

۳) $\theta_1 = \cos^{-1}[\dfrac{3M}{2mgL}]$ و $\theta_2 = \cos^{-1}[\dfrac{M}{2mgL}]$

۴) $\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = \cos^{-1}[\dfrac{2M}{mgL}]$

۹ـ الواری به جرم m روی دو چرخ، هریک به جرم m_0 قرار دارد. مطلوبست تعیین مقدار نیروی P، به منظور شروع حرکت الوار به طرف بالا؟



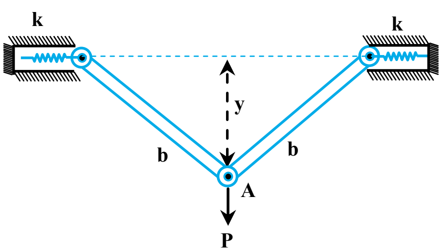
۱) $P = 2m_0 g\sin\theta$

۲) $P = 2(m+m_0)m\sin\theta$

۳) $P = (m+2m_0)g\sin\theta$

۴) $P = (m+m_0)g\sin\theta$

۱۰ـ نیروی لازم P را به منظور جابه‌جایی y در نقطه A محاسبه کنید؟ (هر دو فنر دارای سختی k می‌باشند و در $y=0$، فنرها خلاصند)



۱) $P = ky(\dfrac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}-1)$

۲) $P = 2ky(\dfrac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}-1)$

۳) $P = 2ky(\dfrac{b}{\sqrt{b^2-y^2}}-1)$

۴) $P = ky(\dfrac{2b}{\sqrt{b^2-y^2}}-1)$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: روابط تعادل (Equations of Equilibrium)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل دوم: خرپاها (Trusses)

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۴»

فصل سوم: تیرها (Beams)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۴»

فصل چهارم: کابل‌ها (Cables)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»

فصل پنجم: نیروی اصطکاک (Friction Force)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۲»

فصل ششم: خواص سطوح (Properties of Surfaces)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل هفتم: کار مجازی (Virtual Work)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»