مدرسان شریف

فصل اول

« فولادشناسی و مبانی طراحی سازه »

مقدمه

فولاد یکی از پرکاربردترین مصالح ساختمانی است که از سالها پیش برای مصرف در صنعت ساختمان مورد توجه و استفاده قرار می‌گرفته است. خصوصیات بارز فولاد شامل: مقاومت بالا، رفتار یکسان در برابر فشار و کشش و از همه مهمتر شکل‌پذیری زیاد آن است که باعث جذب بالای انرژی در سازه می‌گردد. در این فصل به مرور خصوصیات فیزیکی و شیمیایی فولادهای ساختمانی و معرفی مقاطع معمول مورد استفاده می‌پردازیم. آیین‌نامه ساختمان‌های فولادی ایران در سالهای اخیر دچار تغییراتی شده که در این فصل مبانی طراحی حالات حدی تشریح می‌شود.

فولاد شناسی

فولادهای ساختمانی، آلیاژهایی با بیش از ۹۸٪ آهن هستند. با وجود این، عناصر دیگری که به مقدار کم در آلیاژ فولاد وارد می‌شوند، تأثیرات زیادی در خصوصیات فولاد دارند. به آلیاژهای آهن که بیش از ۲٪ کربن داشته باشند چدن گویند که مقاومت بالایی نسبت به فولاد دارد ولی رفتارش ترد و شکننده است و جوش‌پذیری مناسبی ندارد. لذا کاربرد آن محدود است. در فولادهای ساختمانی مقدار کربن بین ۰/۱۷٪ تا ۰/۲۲٪ است، البته در پیچ‌های پر مقاومت این مقدار تا ۰/۵۵٪ نیز می‌تواند باشد. منگنز فلز دیگری است که میزان آن در فولاد می‌تواند مقاومت در برابر ضربه و سایش را افزوده و همچنین شکل‌پذیری را زیاد کند.

به طور خلاصه می‌توان تأثیر میزان فلزات مهم در آلیاژ فولاد را به صورت جدول زیر بیان کرد:

کربن ↑ :	مقاومت کششی ↑	شکل پذیری ↓	جوش پذیری ↓	چکش خواری ↓
منگنز ↑ :	مقاومت در برابر ضربه ↑	مقاومت در برابر سایش ↑	شکل پذیری ↑	
مولیبدن ↑:	سختی ↑	مقاومت گرمایی ↑	شکل پذیری ↓	
سیلیسیم ↑ :	مقاومت در برابر خوردگی ↑			
نیکل ↑:	شکل‌پذیری ↑			

مثال ۱: در فولادهای نرمه ساختمانی با افزایش درصد کربن موجود در آلیاژ، ..... افزایش می‌یابد.

۱) جوش‌پذیری ۲) شکل‌پذیری ۳) مقاومت کششی ۴)چکش‌خواری

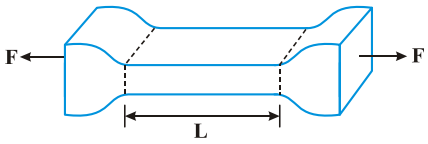
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» افزایش درصد کربن تنها باعث افزایش مقاومت کششی مقطع می‌شود و سایر گزینه‌ها را می‌کاهد.

نکته۱: فولادهای ساختمانی معمول ST۳۷ و ST۵۲ می‌باشند که عدد مقابل ST معرف مقاومت نهایی (F_u) برحسب کیلوگرم بر میلیمتر مربع است.

$$ST۳۷: F_y = ۲۴۰۰ kg/cm^۲ \quad , \quad F_u = ۳۷۰۰ kg/cm^۲ = ۳۷ \frac{kg}{mm^۲}$$

$$ST۵۲: F_y = ۳۶۰۰ kg/cm^۲ \quad , \quad F_u = ۵۲۰۰ kg/cm^۲ = ۵۲ \frac{kg}{mm^۲}$$

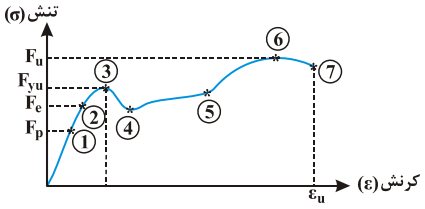
منحنی تنش ـ کرنش فولاد



معمول‌ترین آزمایش برای بررسی خواص مکانیکی فولاد، تست کشش قطعه فولادی است. به همین منظور نمونه‌ای از فولاد به شکل دمبل را در فک‌های دستگاه کشش قرار می‌دهند.

شکل نمونه کمک می‌کند که اثرات تمرکز تنش در محل فک‌ها در نتایج، تأثیر کمتری داشته باشد و مقطع در طول مورد مطالعه (L) دارای تنش‌های کششی یکنواختی باشد (طبق اصل سن ونان در فاصله مناسب از محل اثر نیرو، تنش‌های موجود در مقطع، یکنواخت خواهد بود).

با افزودن فاصله دو فک، نیروهای متناظر اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از این نتایج می‌توان منحنی تنش کرنش فولاد را رسم کرد.



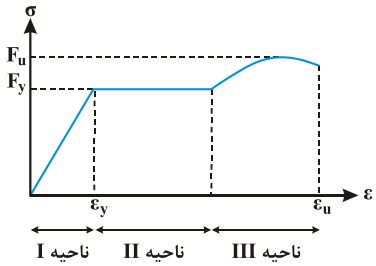
در نمودار بالا جزئیاتی که ارائه شده عبارت‌اند از:

نقطه ۱: حد ناحیه خطی — نقطه ۲: حد ناحیه الاستیک — نقطه ۳: نقطه تسلیم بالای فولاد F_{yu}

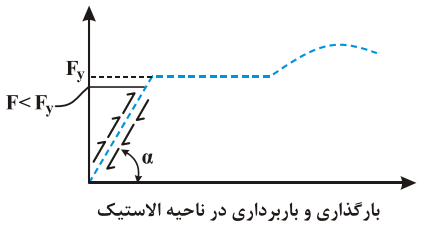
نقطه ۴: نقطه تسلیم پایینی فولاد F_y — نقطه ۵: حد ابتدای ناحیه سخت‌شدگی — نقطه ۶: محل ماکزیمم تنش فولاد F_u

نقطه ۷: حد نهایی فولاد

معمولاً این نمودار را به صورت ساده شده بررسی می‌نماییم، نمودار ایده‌آل تنش ـ کرنش در فولاد ساختمانی به صورت زیر است:



ناحیه I: در این حالت تنش وارد شده به مقطع کمتر از تنش تسلیم می‌باشد ($0 < F < F_y$).



بارگذاری و باربرداری در ناحیه الاستیک

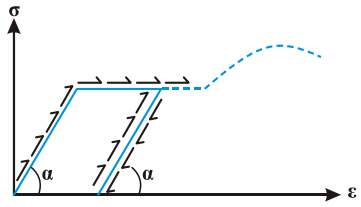
به این ناحیه، منطقه الاستیک گویند که رفتار فولاد مشابه فنر است و چنانچه بار را از روی نمونه برداریم، نمونه به حالت اولیه بر می‌گردد بدون اینکه تغییر طولی نسبت به قبل از بارگذاری در آن ایجاد شده باشد. رابطه تنش و کرنش به صورت خطی است و شیب منحنی تنش کرنش برابر با ضریب الاستیسیته یا همان مدول یانگ (E) می‌باشد.

در این ناحیه، قانون هوک به صورت مقابل برقرار است: $\sigma = E\varepsilon \rightarrow E = \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \tan\alpha$

مقدار E برای فولادهای نرمه ساختمانی، در سیستم انگلیسی حدود ۲۹۰۰۰ ksi معادل $2/03\times10^6 \dfrac{kg}{cm^2}$ و یا $2\times10^5 \dfrac{N}{mm^2}$ است. مبحث دهم ویرایش ۹۲ نیز همین مقادیر را برای E عنوان کرده است.

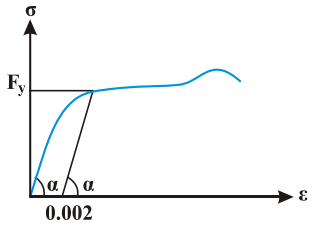
ناحیه II: پس از رسیدن به تنش F_y مقطع وارد محیط پلاستیک می‌شود، به عبارت دیگر با افزایش فاصله دو فک نیرو افزوده نمی‌شود. این تغییر طول برخلاف تغییر طول ناحیه I بازگشت‌پذیر نیست و در صورت باربرداری، روی منحنی تنش کرنش از محل تنش اعمالی به صورت موازی با شیب اولیه منحنی تنش ـ کرنش (E) بازگشت اتفاق می‌افتد، در نتیجه تغییر طول دائمی در میله پدید می‌آید. در صورت بارگذاری مجدد در حالتی که مدت زمان کمی از باربرداری گذشته باشد، روی همان مسیر قبلی بارگذاری انجام می‌شود.

هرچه طول ناحیه پلاستیک بیشتر باشد، انرژی جذب شده و شکل‌پذیری افزوده می‌شود.



بارگذاری، باربرداری و بارگذاری مجدد در ناحیه پلاستیک

ناحیه III: این ناحیه را ناحیه سخت‌شوندگی کرنش (Strain hardening) گویند. با نزدیک شدن به لحظه گسیختگی، فولاد سخت‌شدگی مجددی را تجربه می‌کند و برای تغییر طول بیشتر، نیازمند نیروی بیشتری است. در این ناحیه مقطع بیشترین تنش قابل تحمل را تجربه می‌کند و سپس به علت پدیده گردنی شدن (کاهش سطح مقطع نمونه) کاهشی در نمودار می‌بینیم.



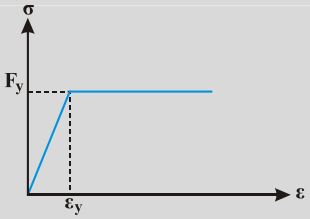
در فولادهای با مقاومت بالا، شکل منحنی تنش ـ کرنش به صورت روبرو است:

همانطور که دیده می‌شود در منحنی، نقطه مشخصی برای σ_y نمی‌توان یافت. در اینگونه موارد از کرنش ۰/۲٪ خطی موازی شیب اولیه رسم می‌کنیم و محل قطع منحنی، تنش جاری شدن را نشان خواهد داد.

فولادهای مصرفی در سازه‌های مقاوم در برابر زلزله باید دارای مقاومت کششی نهایی (F_u) حداقل ۱/۲ برابر مقاومت حد تسلیم داشته باشد، تا بتواند شکل‌پذیری مناسبی ایجاد کند.

$$F_u \geq 1/2 F_y$$

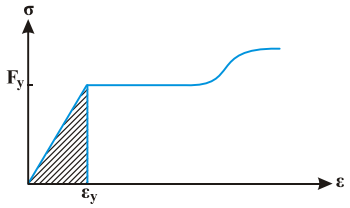
نکته۲: پس از مرحله پلاستیک وارد ناحیه سخت‌شدگی مجدد یا کار سختی می‌شویم، در این مرحله شیب منحنی تنش کرنش در حدود $\frac{1}{33}$ شیب منحنی در ناحیه الاستیک است. به علت اندک بودن این شیب، در محاسبات مربوط به حالات حدی آن را در نظر نگرفته و از منحنی تنش کرنش ساده شده روبرو استفاده خواهیم کرد.



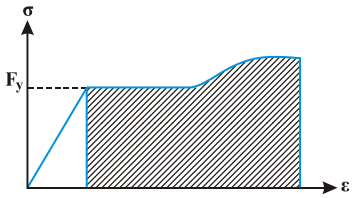
در نتیجه زمانی که کرنشی کمتر از F_y (کرنش تسلیم) داشته باشیم، $\sigma = E\varepsilon$ و در حالتی که وارد ناحیه پلاستیک شده باشیم ($\varepsilon > \varepsilon_y$)، مقدار تنش برابر $\sigma = F_y$ می‌باشد.

تعریف چند پارامتر با استفاده از منحنی تنش ــ کرنش

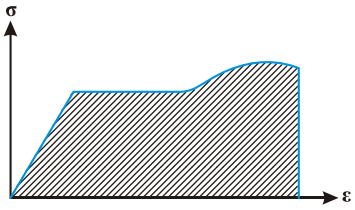
فنریت: سطح زیر نمودار تنش کرنش قبل از تسلیم در واقع نشان دهنده انرژی جذب شده در واحد حجم، قبل از رسیدن به تسلیم است.



شکل‌پذیری: سطح زیر نمودار پس از ناحیه الاستیک را گویند و معادل انرژی جذب شده در واحد حجم در محدوده غیر الاستیک می‌باشد.



طاقت (چقرمگی): مساحت کل زیر نمودار تنش ـ کرنش یا انرژی کل جذب شده در واحد حجم که برابر مجموع فنریت و شکل‌پذیری است.



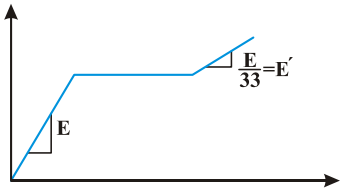
نکته۳: **مدول برشی** (G) به صورت مقابل برحسب مدول الاستیسیته (E) و ضریب پواسن (ν) قابل محاسبه است:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

مثال۲: در فولاد نرمه ساختمانی شیب منحنی تنش ــ کرنش در مرحله کار سختی به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۲۰۰ GPa ۲) ۶۰ GPa ۳) ۱۲ GPa ۴) ۶ GPa

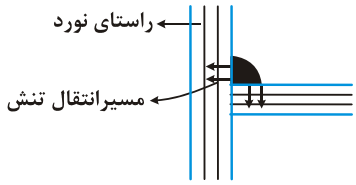
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همانطور که گفته شد در مرحله کار سختی، شیب منحنی تنش کرنش تقریباً $\frac{۱}{۳۳}$ شیب در ناحیه الاستیک می‌باشد، همچنین در فولادهای نرمه ساختمانی، شیب در ناحیه الاستیک برابر با $۲\times۱۰^{۵}\ Mpa$ است. بنابراین داریم:



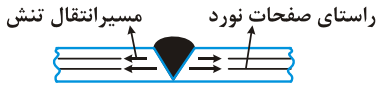
$$E' = \frac{۱}{۳۳}E$$

$$E' = \frac{۱}{۳۳}\times ۲\times ۱۰^{۵}\ Mpa \simeq ۶\times ۱۰^{۳}\ Mpa = ۶\,Gpa$$

اثر تورق: در فولادهای ساختمانی نورد شده، به علت عملیات نورد در راستای ورق، صفحاتی تشکیل می‌شود که مستعد شکست ترد است. مانند رفتار دوگانه چوب در راستا و عمود بر راستای الیاف آن، این ورقهای نورد شده صفحات سست‌تری را در راستای خود دارند. برای جلوگیری از ایجاد تورق در این صفحات باید جوش‌ها به صورتی روی ورق طراحی شوند که نیرو در راستای عمود بر صفحات سست ایجاد نشود. در شکل زیر نمونه‌های درست و یا نادرست اجرای جوش روی صفحات نورد شده دیده می‌شود.



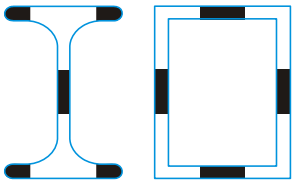
جوش نامناسب (راستای نورد عمود بر نیروی جوش)



راستای مناسب جوش

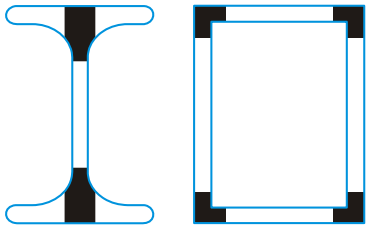
تنش‌های پسماند

در روند تولید پروفیل‌های فولادی نورد شده، فولاد گرم شده و حرارت دیده را از درون غلتک‌هایی عبور می‌دهند تا به شکل دلخواه برسد. پس از فرم دادن به پروفیل، روند سرد شدن اتفاق می‌افتد. اما سرد شدن به صورت یکنواخت انجام نمی‌شود؛ قسمت‌هایی که ضخامت کمتری دارند، زودتر سرد می‌شوند. (شکل مقابل)



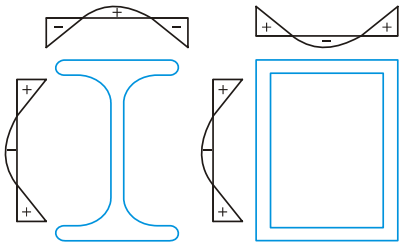
ناحیه I

در واقع محل‌هایی که ضخامت بیشتری دارند و یا محل تقاطع هستند روند سرد شدن دیرتر اتفاق می‌افتد. (شکل زیر)



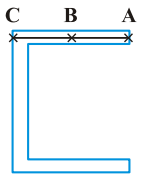
ناحیه II

می‌دانیم با سرد شدن فولاد، کاهش حجم اتفاق می‌افتد. در ابتدای سرد شدن، کل مقطع گرم و شکل‌پذیر است و طی سرد شدن نقاط ناحیه I، تنشی به وجود نخواهد آمد. اما پس از سرد شدن نقاط ناحیه I، تغییر طول به سختی ایجاد می‌شود به طوری که نقاط ناحیه II برای سرد شدن و در نتیجه کوتاه شدن طول خود تلاش می‌کنند که به علت پیوستگی به نقاط از قبل سرد شده، متحمل تنش کششی خواهند شد و همچنین در نقاط ناحیه I تنش فشاری اعمال می‌کنند. در نتیجه این اتفاقات تنش‌هایی در پروفیل باقی خواهد ماند که برآیند آن‌ها برابر صفر است.



چنانچه در مقطعی تنش پسماند وجود داشته باشد و تحت بارگذاری خارجی قرار گیرد، این تنش‌ها با تنش‌های ناشی از بار خارجی جمع می‌شود و در نقاطی زودتر از حد انتظار وارد مرحله پلاستیک خواهیم شد.

مثال ۳: **چنانچه مقطع زیر، گرم نورد شده باشد و به طور غیریکنواخت پس از نورد، سرد شده باشد، تحت کشش خالص کدام نقطه از مقطع زودتر به تسلیم خواهد رسید؟**



۱) A

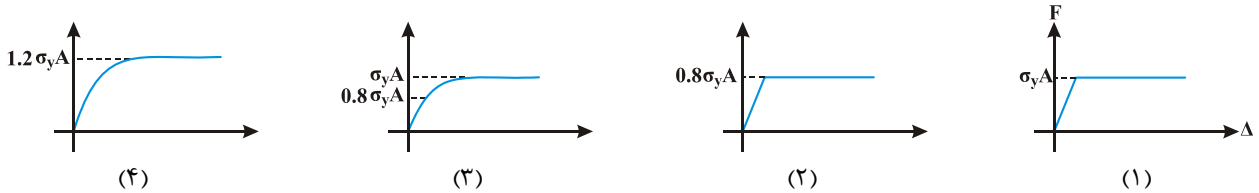
۲) B

۳) C

۴) همه نقاط با هم به تسلیم می‌رسند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق آنچه گفته شد، نقاطی که دیرتر سرد می‌شوند دارای تنش پسماند کششی خواهند بود، لذا با ایجاد تنش یکنواخت کششی زودتر به تسلیم خواهند رسید. بنابراین نقطه C به علت آنکه در محل تقاطع قرار دارد و گوشت بیشتری دارد دیرتر سرد می‌شود.

مثال ۴: **منحنی نیرو تغییر مکان مقطع دارای حداکثر تنش پسماند کششی $0/2\sigma_y$ تحت کشش خالص چگونه خواهد بود؟ (A : مساحت مقطع، σ_y : تنش تسلیم فولاد)**

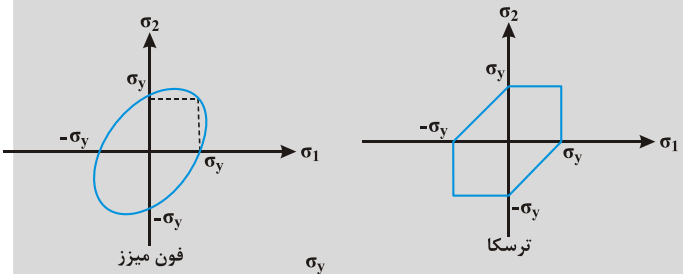


(۱) (۲) (۳) (۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به علت وجود تنش پسماند $0/2\sigma_y$ در نقاطی از مقطع تا نیروی $0/8\sigma_y A$ تمام نقاط الاستیک است و شیب نیرو تغییر مکان ثابت است. از $0/8\sigma_y A$ تا $F=\sigma_y A$، شیب متغیر خواهیم داشت؛ زیرا رفته رفته نقاط و نواحی دارای تنش پسماند کششی وارد مرحله پلاستیک می‌شوند و پس از $F=\sigma_y A$ تمام نقاط به حد تسلیم می‌رسند.

معیارهای گسیختگی

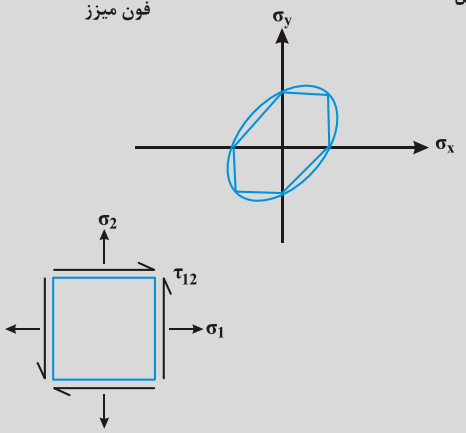
برای گسیختگی مصالح تحت ترکیب چند نوع تنش، معیارهای مختلفی از جمله؛ معیار تنش برشی ماکزیمم (ترسکا) و معیار انرژی اعوجاج ماکزیمم «فون میزز» مطرح شده است. برای بررسی مواد شکل‌پذیر مانند فولاد، روش فون میزز مقبول است. شکل این دو معیار در صفحه تنش‌های اصلی به صورت مقابل است.



σ_y : تنش تسلیم در آزمایش کشش تک محوره است.

با توجه به شکل مشخص است که معیار ترسکا نسبت به فون میزز محافظه‌کارانه‌تر است.

به علت استفاده از معیار فون میزز در فولاد توضیحاتی در مورد این معیار می‌دهیم. در صورتی که در نقطه‌ای از فولاد تنش‌های محوری و برشی به صورت همزمان وارد شوند (شکل مقابل)



طبق معیار فون میزز مرز حالت تسلیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_h=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2+3\tau_{12}^2}<\sigma_y$$

σ_h : تنش مقایسه‌ای ترکیبی نام دارد.

حالات خاص:

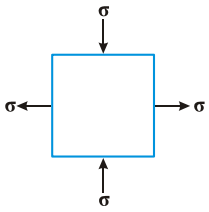
۱ـ المان تحت کشش خالص تک محوره: $(\sigma_2=\tau_{12}=0)$

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2+3\tau_{12}^2}=\sigma_1<\sigma_y$$

۲ـ المان تحت برش خالص: $\sigma_1=\sigma_2=0$

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2+3\tau_{12}^2}=\sqrt{3}\tau_{12}<\sigma_y\Rightarrow\tau<\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

مثال۵: در صورتی که عضوی فولادی تحت کشش و فشار دو محوره با تنش‌های یکسان قرار گیرد (شکل زیر)، حداکثر تنش اعمالی برای آنکه به تسلیم نرسیم چقدر است؟ (تنش تسلیم تک محوره σ_y است)



۱) σ_y ۲) $\frac{\sigma_y}{\sqrt{۳}}$

۳) $۲\sigma_y$ ۴) $\sqrt{۳}\sigma_y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از رابطه مطرح شده برای معیار فون میزز داریم:

$$\sqrt{\sigma_۱^۲+\sigma_۲^۲-\sigma_۱\sigma_۲+۳\tau_{۱۲}^۲}=\sqrt{\sigma^۲+\sigma^۲+\sigma^۲}=\sqrt{۳}\sigma<\sigma_y\Rightarrow\sigma<\frac{\sigma_y}{\sqrt{۳}}$$

مزایا و معایب فولاد ساختمانی

مزایا:

مقاومت زیاد: فولاد نسبت به سایر مصالح ساختمانی دارای مقاومت بالایی است که در نتیجه آن می‌توان اجزای کوچک، لاغر و سبک‌تری را در طراحی سازه به کار برد و به واسطه آن می‌توانیم دهانه‌های بزرگتر، همچنین سازه‌های بلند مرتبه‌تری داشته باشیم.

شکل‌پذیری: شاید مهمترین مزیت فولاد نسبت به سایر مصالح، شکل‌پذیری و شکست نرم آن است. این خصوصیت باعث می‌شود علاوه بر جذب بالای انرژی در سازه، خرابی ناگهانی کمتری داشته باشیم و قبل از خرابی نیز اخطارهایی با تغییر شکل زیاد اعضا دریافت کنیم.

یکنواختی مصالح: این یکنواختی سبب می‌شود شناخت و پیش‌بینی دقیق‌تری نسبت به رفتار مصالح تحت بارگذاری داشته باشیم.

معایب:

ضعف در دمای زیاد: این ضعف در آتش‌سوزی بسیار اهمیت می‌یابد. به طوری که مقاومت اعضای فولادی در دمای نزدیک به $۵۰۰^\circ C$ به شدت کاهش می‌یابد. لذا با تدابیری نظیر استفاده از رنگ‌های ضد حریق و یا پوشش روی قطعه با استفاده از گچ‌های مخصوص و یا ملات و بتن می‌توان زمان رسیدن حرارت به فولاد را کاهش داد.

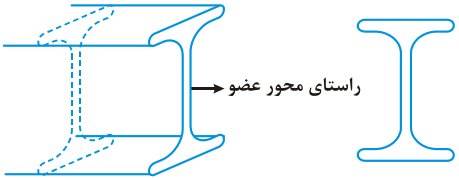
خوردگی: به خصوص در فولادهای پرمقاومت این مشکل دو چندان می‌شود و برای جلوگیری از آن می‌توان در محل‌های در معرض خوردگی از حفاظت کاتدی و یا از مس و سیلیسیوم در ترکیب آلیاژ فولاد استفاده کرد که البته این تدابیر بسیار پرهزینه هستند.

کمانش اعضای فولادی: همانطور که در مزایای فولاد مطرح شد، به علت مقاومت بالای فولاد، اعضای فولادی عمدتاً کوچک و لاغر هستند، لذا مستعد ایجاد کمانش می‌باشند.

تردشکنی: هرچند فولاد دارای شکل‌پذیری زیاد است اما برخی موارد مانند: درجه حرارت پایین، سرعت بارگذاری بالا، اثرات جوشکاری، ضخامت بالای ورق‌ها و .... می‌تواند باعث تردشکنی فولاد شود.

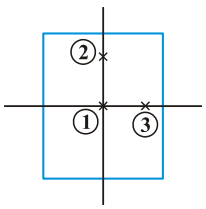
مشخصات هندسی و مروری بر مقاومت مصالح

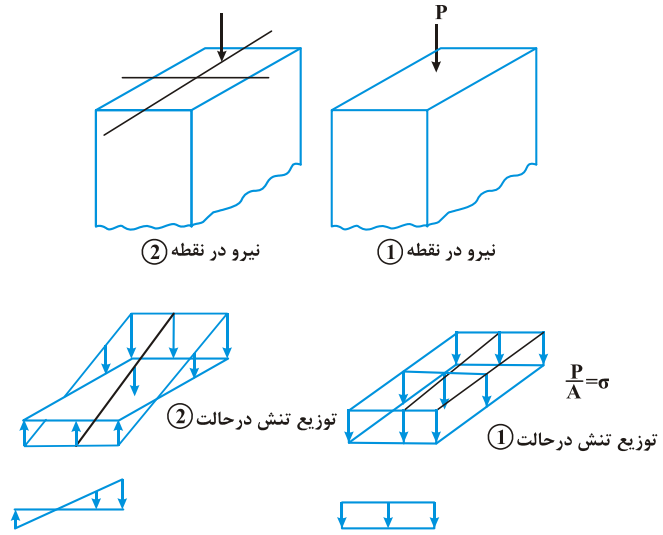
مساحت سطح مقطع: برابر با مساحت مقطعی از عضو در راستای عمود بر محور عضو است.



مرکز سطح: نقطه‌ای از سطح یک عضو که برآیند تنش‌های ثابت روی کل مقطع از آن نقطه می‌گذرد. یا به عبارت دیگر می‌توان گفت، محلی است که با اعمال بار نقطه‌ای در آن تنش یکنواخت (بدون ایجاد خمش) در کل مقطع ایجاد خواهد شد.

در صورتی که محل اثر نیرو کمی از مرکز سطح منحرف شود نیروی محوری خالص به وجود نخواهد آمد.



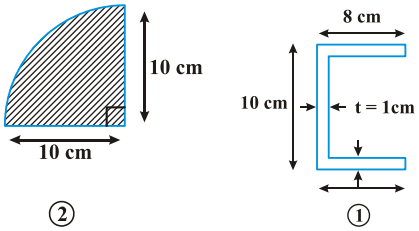


مختصات مرکز سطح با استفاده از فرمول روبرو قابل محاسبه است:

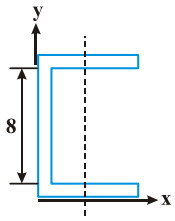
$$\bar{x}=\frac{\int xdA}{\int dA}=\frac{\sum x_iA_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y}=\frac{\int ydA}{\int dA}=\frac{\sum y_iA_i}{\sum A_i}$$

در روابط بالا A_i, y_i, x_i به ترتیب مختصات افقی، مختصات عمودی و مساحت هریک از سطوح می‌باشد که درحالت کلی (غیرقابل تفکیک) به صورت فرمول انتگرالی بیان می‌شود.

مثال ۶: مرکز سطح در دو مقطع زیر را بیابید.



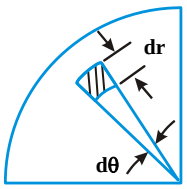
پاسخ: برای مقطع (۱) می‌توان از فرمول گسسته زیر استفاده کرد:



$$\bar{x}=\frac{\sum x_iA_i}{\sum A_i}=\frac{۴\times(۸\times۱)+۰/۵\times(۸\times۱)+۴\times(۸\times۱)}{۸+۸+۸}=۲/۸۳\text{cm}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_iA_i}{\sum A_i}\xrightarrow{\text{بعلت تقارن}}\bar{y}=۵\text{cm}$$

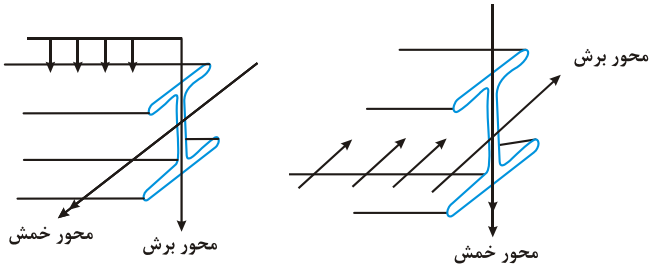
و برای مقطع (۲) از فرمول انتگرالی باید بهره برد.



$$\bar{y}=\frac{yd_A}{\int dA}=\frac{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{r} r\sin\theta.rdrd\theta}{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{r} rdrd\theta}=\bar{y}=\frac{\int ydA}{\int dA}$$

$$=\frac{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۲}{۳}r\sin\theta\times\frac{۱}{۲}rd\theta}{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}r\times d\theta}=\frac{\frac{۱}{۳}r^۳\left[-\cos\theta\right]_۰^{\frac{\pi}{۲}}}{\frac{\pi}{۴}r^۲}=\frac{۴r}{۳\pi}$$

محور خمش و محور برش: این دو محور تنها از خصوصیات مقطع نیستند و به بار وارد بر مقطع نیز بستگی دارند. محور گذرنده از مرکز سطح (که در قسمت قبل تعیین شد) و موازی با بار وارده محور برش و محور گذرنده از مرکز سطح و عمود بر مسیر بار، محور خمش نامیده می‌شود. در روی محور خمش (بدون حضور نیروهای محوری) تنش برابر صفر است.



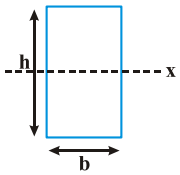
ممان اینرسی (گشتاور دوم سطح) و اساس مقطع الاستیک S

در مسائل خمش لازم است با مفهوم ممان اینرسی و اساس مقطع الاستیک آشنایی داشته باشیم. در واقع ممان اینرسی لنگر دوم سطح بیانگر لنگر نیروهای ناشی از خمش در ناحیه الاستیک است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

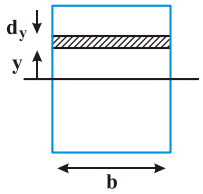
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

این مقدار برای هر محور دلخواه قابل محاسبه است.

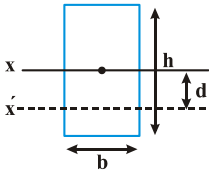
مقدار ممان اینرسی محور گذرنده از محور خنثی برای مقطع مستطیل شکل به صورت زیر است:



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

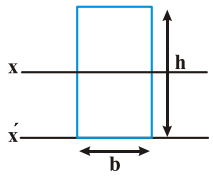


$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \times (bdy) = \frac{b}{3} y^3 \Big]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{bh^3}{12}$$



فرمول‌های آورده شده، ممان اینرسی حول محوری گذرنده از مرکز سطح را بیان می‌کند. برای انتقال محور ممان اینرسی ترم Ad^2 به آن اضافه می‌شود که در آن A مساحت مقطع و d فاصله محور مورد نظر تا محور اصلی موازی آن است.

$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$



مثال ۷: ممان اینرسی یک مقطع مستطیلی حول ضلع پایینی را محاسبه کنید.

$$I_{x'} = I_x + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + (bh) \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = bh^3\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{bh^3}{3}$$

اساس مقطع نیز حاصل تقسیم ممان اینرسی حول محور خنثی (I) بر دورترین تار مقطع از تار خنثی (C) می‌باشد. مقاومت خمشی در بررسی الاستیک مقطع متناسب با S است:

$$S = \frac{I}{C}$$

شعاع ژیراسیون: در بررسی کمانش اعضا از معیاری که نمایانگر پراکندگی مصالح از تار خنثی و یا به عبارت دیگر چاقی یا لاغری عضو است استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر شعاع ژیراسیون معیار مقایسه‌ای برای پتانسیل کمانش است. مقدار آن بستگی به هندسه سازه دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

مثال ۸: مقطعی دارای شعاع ژیراسیون r می‌باشد. مقطع مشابه که تمامی ابعاد آن دو برابر شده‌اند چه شعاع ژیراسیونی دارد؟

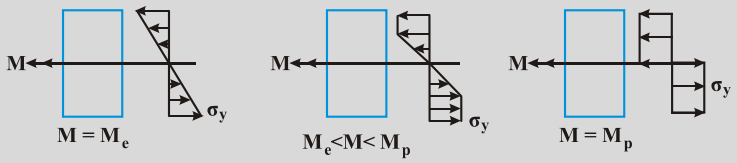
۱) r ۲) ۴r ۳) ۸r ۴) ۲r

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شعاع ژیراسیون از رابطه $\sqrt{\frac{I}{A}}$ محاسبه می‌شود و $I = \int y^2 dA$، با دو برابر شدن تمام ابعاد مساحت ۴ برابر می‌شود. y دو برابر شده و dA نیز ۴ برابر خواهد شد.

$$r' = \sqrt{\frac{I'}{A'}} = \sqrt{\frac{\int y'^2 dA'}{A'}} = \sqrt{\frac{\int (2y)^2 (4dA)}{4A}} = 2\sqrt{\frac{\int ydA}{A}} = 2r$$

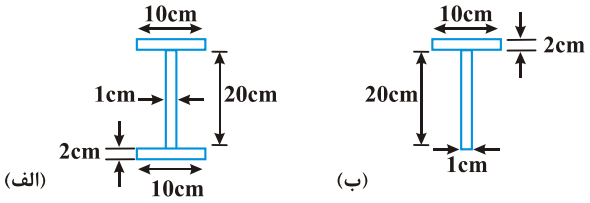
اساس مقطع پلاستیک (z)

چنانچه لنگر خمشی در مقطع فراتر از لنگر خمشی ماکزیمم الاستیک برود، مقطع از دورترین نقطه نسبت به تار خنثی وارد مرحله پلاستیک می‌شود و با ادامه افزایش لنگر کل مقطع به تنش σ_y خواهد رسید. روند این اتفاق در شکل دیده می‌شود.



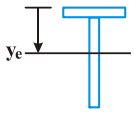
در لحظه‌ای که کل مقطع پلاستیک شود، تار خنثی پلاستیک به صورتی محاسبه می‌شود که مقدار نیروی کششی و فشاری در مقطع برابر باشند. در نتیجه تار خنثی پلاستیک محوری به گونه‌ای عمود بر مسیر نیرو است که مساحت بالا و پایین آن برابر باشند. در مقاطع با شکل متقارن محل تار خنثی الاستیک و پلاستیک یکی است.

مثال۹: فاصله محور خنثی پلاستیک و الاستیک را برای مقاطع زیر محاسبه کنید.



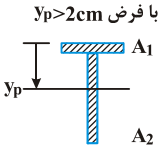
☑ **پاسخ:** الف) در این شکل به علت تقارن دو محور خنثی الاستیک و پلاستیک روی هم قرار دارند. $(y_e = y_p)$

(ب)



$$y_e = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{۱\times(۱۰\times۲)+۱۲\times(۲۰\times۱)}{(۱۰\times۲)+(۲۰\times۱)}$$

$$= \frac{۲۰+۲۴۰}{۴۰} = \frac{۲۶۰}{۴۰} = ۶/۵\text{cm}$$

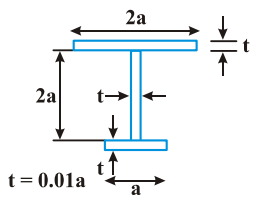


$$A_۱ = A_۲ \Rightarrow ۱۰\times۲+(y_p-۲)\times۱=(۲۲-y_p)\times۱$$

$$\Rightarrow ۲۰-۲+y_p = ۲۲-y_p \Rightarrow ۲y_p = ۴ \Rightarrow y_p = ۲\text{cm}$$

در نتیجه فاصله بین محور خنثی الاستیک و پلاستیک برابر $۶/۵-۲=۴/۵\text{cm}$ می‌باشد.

مثال۱۰: در شکل زیر، با ورود به ناحیه پلاستیک، تار خنثی ..... .



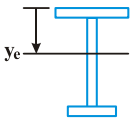
۱) به سمت بالا می‌آید.

۲) به سمت پایین می‌آید.

۳) تغییری نمی‌کند.

۴) با این اطلاعات مسئله قابل حل نیست.

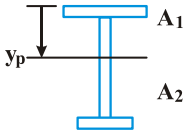
☑ **پاسخ:** گزینه «۱»



$$y_e = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{۲at\times\frac{t}{۲}+۲at\times(a+t)+at\times(۲a+t+\frac{t}{۲})}{۲at+۲at+at}$$

با صرف نظر کردن از مقادیر $t^۲$ داریم:

$$y_e = \frac{۲at \times a + at \times ۲a}{۵at} = \frac{۴a^۲t}{۵at} = \frac{۴}{۵}a$$



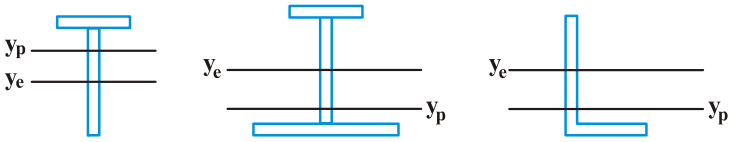
$$A_۱ = A_۲ \Rightarrow ۲at + y_p t = at + (۲a - y_p)t$$

در نتیجه داریم:

$$۲y_p t = at \Rightarrow y_p = \frac{a}{۲}$$

در نتیجه $y_e > y_p$ و با ورود به ناحیه پلاستیک رفته رفته تار خنثی بالا خواهد آمد.

نکته۴: همواره محور خنثی پلاستیک از محور خنثی الاستیک به سمت دارای مساحت بیشتر انحراف می‌یابد.



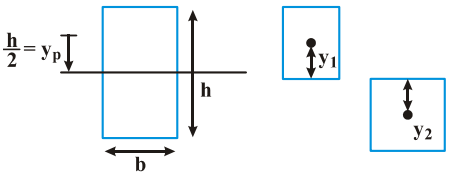
اساس مقطع (Z) برای مقطعی با تنش تسلیم F_y برابر است با نسبت لنگر خمشی پلاستیک به تنش تسلیم و برای محاسبه آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ محاسبه محور خنثی پلاستیک (مطابق آنچه گفته شد)

۲ـ محاسبه فاصله مرکز سطح قسمت فشاری تا تار خنثی ($y_۱$) ـ (در واقع محل اثر نیروی فشاری)

۳ـ محاسبه فاصله مرکز سطح قسمت کششی تا تار خنثی ($y_۲$) ـ (در واقع محل اثر نیروی کششی)

۴ـ $Z = \frac{A}{۲} \times (y_۱ + y_۲)$ که در آن A مساحت کل مقطع است.



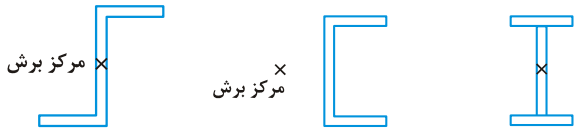
ضریب شکل مقطع زیر نسبت لنگر پلاستیک به لنگر حداکثر الاستیک تعریف می‌شود که برابر است با:

$$S.F. = \frac{M_p}{M_y} = \frac{ZF_y}{SF_y} = \frac{Z}{S}$$

توضیحات بیشتر در مورد اساس مقطع پلاستیک و ضریب شکل در فصل خمش بیان خواهد شد.

مرکز برش: مفهوم مرکز برش که در درس مقاومت مصالح به تفصیل به آن پرداخته شده، در واقع نقطه‌ای است که در صورتی که برآیند نیروهای عمود بر محور عضو از آن بگذرد، در مقطع پیچشی به وجود نمی‌آید. در مقاطع با دو محور تقارن این مرکز روی محل تقاطع دو محور تقارن قرار دارد و در صورتی که یک محور تقارن وجود داشته باشد، مرکز برش نقطه‌ای روی این محور خواهد بود.

معروف‌ترین مقاطعی که در این مورد از آن‌ها سؤال می‌شود، I شکل‌ها، ناودانی‌ها و مقاطع Z شکل‌اند.



در مقاطع تشکیل شده از چند ورق که تنها در یک نقطه متقاطع‌اند، مرکز برش در همین محل تقاطع قرار دارد.