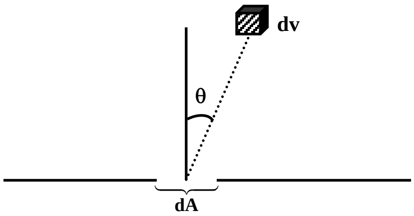
فصل اول

« مبانی تجربی پیدایش نظریه کوانتومی »

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: کدام گزینه رابطه میان چگالی انرژی تابش الکترومغناطیسی داخل کاواک و توان گسیل تابش کاواک را بیان می‌کند؟ (چگالی انرژی را با u و توان گسیل یا به عبارتی انرژی گسیل شده در واحد سطح و در واحد زمان از کاواک را با E نمایش می‌دهیم) (در اینجا c سرعت نور در خلأ است)



۱) $u = \frac{E}{c}$ ۲) $u = \frac{2E}{c}$

۳) $u = \frac{4E}{c}$ ۴) $u = \frac{E}{2c}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این تست می‌توان از شکل بالا استفاده کرد: بزرگی المان حجم dV برابر است با $r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ که در آن r فاصله از مبدا (واقع در روزنه‌ای به مساحت dA)، θ زاویه با محور قائم و φ زاویه سمتی حول محور عمود بر روزنه است. انرژی موجود در این المان حجم برابر با dV ضرب در چگالی انرژی (u) تابش همسانگرد است؛ بنابراین مقدار انرژی که از روزنه خارج می‌شود حاصلضرب زاویه فضایی در انرژی است. از این رابطه باید روی زاویه‌های φ و θ و اگر شارش انرژی در زمان Δt موردنظر باشد، روی r از صفر تا $c\Delta t$ (فاصله‌ای که تابش در این بازه زمانی می‌پیماید) انتگرال گرفت:

$$\frac{\text{انرژی کل}}{\text{سطح}} = (\text{توان گسیل } E)\,(\text{زمان } \Delta t) \qquad ; \qquad \frac{\text{انرژی کل } U}{\text{حجم}} = \text{چگالی انرژی } u$$

مقدار انرژی موجود در المان حجم dV عبارت است از: $dU = u(\lambda,T)\,dV = u(\lambda,T) r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$. از سطح کره‌ای به شعاع r (با مساحت $4\pi r^2$) انرژی کل U خارج می‌شود، از جزء حجم $dA\cos\theta$ (عمود بر راستای شعاعی) چقدر انرژی خارج می‌شود؟ بدیهی است $\frac{dA\cos\theta}{4\pi r^2}$؛ این مطلب را می‌توان اینگونه توضیح داد که تابش همسانگرد (مستقل از راستا) است به این ترتیب انرژی کلی که سطح dA را در مدت زمان Δt ترک می‌کند قابل محاسبه است:

$$(dA)(E)(\Delta t) = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{dA\cos\theta}{4\pi r^2} u(\lambda,T)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

انتگرال‌گیری روی زاویه قطبی از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است زیرا ما به دنبال تابش درون (و یا به طور معادل بیرون) از کاواک هستیم نه کل تابش.

$$\Rightarrow E(\lambda,T)(dA)(\Delta t) = \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (dA)\left(\frac{1}{4\pi}\right) u(\lambda,T) \Rightarrow E(\lambda,T)\Delta t = R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta\, d\theta\right)(2\pi)\left(\frac{1}{4\pi}\right) u(\lambda,T)$$

$$= \frac{R}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) u(\lambda,T) = -\frac{R}{8}(\cos\pi - \cos 0) u(\lambda,T) = \frac{R}{4} u(\lambda,T) \Rightarrow E(\lambda,T)\Delta t = \frac{R}{4} u(\lambda,T)$$

اما در فاصله شعاعی R، انرژی الکترومغناطیسی با سرعت نور (c) منتقل می‌شود، بنابراین $R = c\Delta t$ به این ترتیب رابطه بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$E(\lambda,T)\Delta t = \frac{c\Delta t}{4} u(\lambda,T) \Rightarrow E(\lambda,T) = \frac{c}{4} u(\lambda,T) \Rightarrow u(\lambda,T) = \frac{4}{c} E(\lambda,T)$$

مثال۲: فاجعه فرابنفش در مورد کدامیک از مدلهای توزیع چگالی انرژی جسم سیاه رخ می‌دهد؟

۱) فرمول وین ۲) فرمول پلانک ۳) فرمول ریلی ـ جینز ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در طیف انرژی الکترومغناطیسی امواج فرابنفش دارای طول موجهای کوتاه (و بنابراین بسامدهای بزرگ) هستند. از این‌رو برای یافتن پاسخ این تست باید به دنبال گزینه‌ای باشیم که در طول موج‌های کوتاه معتبر نیست. فرمول وین چگالی انرژی را به صورت $u(\nu,T) \propto \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}}$ در نظر می‌گیرد که در آن β یک مقدار ثابت و T دمای جسم سیاه است. این فرمول برای طول موجهای کوتاه (یعنی بسامدهای بزرگ) با نتایج تجربی سازگار است. بنابر فرمول پلانک، چگالی انرژی جسم سیاهی در دمای T به صورت $u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ است. این فرمول در حد بسامدهای بزرگ $(\nu >> 1)$ به فرمول وین میل می‌کند. (در واقع به ازای $\nu >> 1$، می‌توان از جمله ۱ در مخرج کسر نسبت به جمله $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ صرفنظر کرد و بنابراین $u(\nu,T) \to \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ که همان فرمول وین است به گونه‌ای که در آن $\beta = \frac{h}{k}$).

اما فرمول ریلی ـ جینز برای توزیع انرژی درون کاواکی با دمای T به صورت $u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$ است (در اینجا k ثابت بولتزمن است). به وضوح مشخص است که به ازای فرکانس‌های بزرگ (از جمله ناحیه فرابنفش) چگالی انرژی به شدت افزایش می‌یابد به طوری که انرژی کل در واحد حجم کاواک که برابر با انتگرال $u(\nu,T)$ روی تمام بسامدها است، واگرا می‌شود و این موضوع (یعنی بی‌نهایت شدن انرژی کل) به لحاظ فیزیکی قابل قبول نیست. بنابراین فرمول ریلی ـ جینز به فاجعه فرابنفش منتهی می‌شود.

مثال۳: اگر دمای جسم سیاهی را سه بار افزایش دهیم، طول موجی که در آن حداکثر تابش را گسیل می‌کند، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) نصف می‌شود. ۲) به یک سوم کاهش می‌یابد. ۳) سه برابر می‌شود. ۴) تغییری نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بنابر قانون جابجایی وین، حاصلضرب دمای جسم سیاه (T) در طول موجی که بیشینه تابش را گسیل می‌کند (λ_{max}) همواره مقدار ثابتی است به عبارت دیگر $\lambda_{max}T = cte$ بنابراین دمای جسم سیاه با طول موج بیشینه تابش نسبت عکس دارد، از این رو اگر دمای جسم سیاه سه برابر شود، طول موج بیشینه تابش به یک سوم کاهش می‌یابد.

مثال۴: تعداد فوتونهایی که از یک لامپ با توان ۱ وات و در طول موج ۶۰۰۰ آنگستروم در هر ثانیه گسیل می‌شود از چه مرتبه‌ای است؟ (فرض کنید $hc \simeq 1200 eV.nm$)

۱) 10^{22} ۲) 10^{20} ۳) 10^{18} ۴) 10^{16}

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توان (P) برابر انرژی گسیل شده (E) در واحد زمان (t) است: $P = \frac{E}{t}$.

اما بنابر فرضیه پلانک، انرژی هر فوتون (ε) با طول موج آن رابطه عکس دارد: $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ بنابراین N فوتون دارای انرژی $E = N\varepsilon$ و به عبارت دیگر $E = N\frac{hc}{\lambda}$ خواهند بود.

از این رو توان برابر با $\frac{hc}{\lambda}\frac{N}{t}$ می‌شود؛ در این مثال باید $\frac{N}{t}$ را به ازای $t = 1s$ بیابیم. بنابر فرض مثال $P = 1W$، $\lambda = 6000 \overset{\circ}{A}$ و حاصلضرب hc تقریباً $1200 nm.eV$ است. از این رو داریم:

$$P = \frac{1200 eV.nm}{600 nm} \times \frac{N}{1s} \Rightarrow P = 2N\frac{eV}{s}$$

(هر نانومتر (nm) معادل ۱۰ آنگستروم $(\overset{\circ}{A})$ است: $1nm = 10\overset{\circ}{A}$).

اما هر الکترون ولت (eV) برابر $1/6 \times 10^{-19}$ ژول (J) است، پس:

$$P = 2 \times 1/6 \times 10^{-19} N\frac{J}{s} \Rightarrow P = 3/2 \times 10^{-19} N\frac{J}{s}$$

از طرفی $P = 1W = 1\frac{J}{s}$ است بنابراین داریم:

$$1\frac{J}{s} = 3/2 \times 10^{-19} N\frac{J}{s} \Rightarrow N = \frac{1}{3/2 \times 10^{-19}} = \frac{10^{19}}{3/2} = \frac{10}{3/2} \times 10^{18} \simeq 3/1 \times 10^{18} \Rightarrow \boxed{N \sim 10^{18}}$$

مثال۵: کدامیک از توابع زیر برای چگالی طیف انرژی جسم سیاه با قانون وین سازگار نیست؟

۱) $u(\nu,T)=A\nu^3(\text{Ln}\nu-\text{Ln}T)\sin^2(\frac{\nu}{T})$ ۲) $u(\nu,T)=\nu^3T\cos(\frac{\nu}{T})$

۳) $u(\nu,T)=\nu^2(\nu^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{1}{T}})^{\nu}$ ۴) $u(\nu,T)=\frac{\nu^4}{T}+\nu^3$

پاسخ: گزینه «۲» مطابق قانون وین، چگالی طیف انرژی جسم سیاه در دمای T به صورت $u(\nu,T)\propto\nu^3f(\frac{\nu}{T})$ است که در آن f تابعی از $\frac{\nu}{T}$ است. بنابراین گزینه‌ها را تک به تک بررسی می‌کنیم، هر یک صورت بالا را نداشت پاسخ این مثال است.

بررسی گزینه ۱: $u(\nu,T)=A\nu^3(\text{Ln}\nu-\text{Ln}T)\sin^2(\frac{\nu}{T})=A\nu^3\text{Ln}(\frac{\nu}{T})\sin^2(\frac{\nu}{T})$ اگر تابع f را به صورت $f(x)=(\text{Ln}x)\sin^2x$ در نظر بگیریم در این صورت $f(\frac{\nu}{T})=\text{Ln}(\frac{\nu}{T})\sin^2(\frac{\nu}{T})$ و از این رو $u(\nu,T)=A\nu^3f(\frac{\nu}{T})$ که با قانون وین سازگار است.

بررسی گزینه ۲: $u(\nu,T)=\nu^3T\cos(\frac{\nu}{T})$

وجود عامل Tسبب شده است که نتوانیم $u(\nu,T)$ را به صورت حاصلضرب ν^3 در تابعی از $\frac{\nu}{T}$ بنویسیم؛ در واقع $u(\nu,T)=\nu^3(\frac{T}{\nu})\nu\cos(\frac{\nu}{T})=\nu^4\frac{\cos(\frac{\nu}{T})}{(\frac{\nu}{T})}$

اگر فرض کنیم $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ در این صورت $u(\nu,T)=\nu^4f(\frac{\nu}{T})$ که آشکارا با فرمول وین در تضاد است.

بررسی گزینه ۳: $u(\nu,T)=\nu^2(\nu^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{1}{T}})^{\nu}=\nu^2\nu e^{\frac{\nu}{T}}=\nu^3e^{\frac{\nu}{T}}$ اگر فرض کنیم $f(x)=e^x$ در این صورت $f(\frac{\nu}{T})=e^{\frac{\nu}{T}}$و از این رو $u(\nu,T)=\nu^3f(\frac{\nu}{T})$ که با قانون وین سازگار است.

بررسی گزینه ۴: $u(\nu,T)=\frac{\nu^4}{T}+\nu^3=\nu^3(1+\frac{\nu}{T})$ اگر f(x) را به صورت $f(x)=1+x$ در نظر بگیریم، در این صورت $f(\frac{\nu}{T})=1+\frac{\nu}{T}$ و از این رو $u(\nu,T)=\nu^3f(\frac{\nu}{T})$ که مطابق قانون وین است.

مثال۶: کدام مورد در رابطه با اثر فوتوالکتریک درست نیست؟

۱) انرژی الکترون‌های خروجی به طور مستقیم به بسامد نور فرودی بستگی دارد.

۲) بزرگی جریان فوتوالکترون‌ها اگر تولید شود با شدت چشمه نور تابشی متناسب است.

۳) در این اثر تأخیر زمانی میان ورود تابش و خروج فوتوالکترون‌ها قابل اغماض است.

۴) با افزایش شدت نور فرودی همواره می‌توان از هر فلزی جریان فوتوالکتریک بدست آورد.

پاسخ: گزینه «۴» سه گزینه اول بنابر نظریه فوتونی اینشتین قابل توجیه است. اما در گزینه چهارم به نور به مثابه یک موج الکترومغناطیس کلاسیک نگاه شده است، زیرا در نظریه کلاسیک انرژی موج متناسب با شدت آن است و اگر شدت زیاد شود انرژی نور بیشتر می‌شود و سرانجام می‌تواند به تابع کار هر فلزی هر چقدر هم که بزرگ باشد غلبه کند و الکترون آزاد کند، در صورتی که در واقعیت چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد، تنها اگر بسامد نور فرودی از بسامد آستانه فلز بزرگ‌تر باشد، شدت نور هر قدر هم که ضعیف باشد، الکترون آزاد می‌شود و به عکس، اگر شدت چشمه بسیار بالا باشد اما بسامد نور چشمه از بسامد آستانه فلز کمتر باشد، هیچ فوتوالکترونی ایجاد نمی‌شود.

مثال۷: نور فرابنفش با طول موج $3500\,\mathring{A}$ به سطح پتاسیم می‌تابد. بیشینه انرژی فوتوالکترون‌ها $1/6\,eV$ است. کدام گزینه مقدار تابع کار پتاسیم را بدست می‌دهد؟ (فرض کنید: $hc \simeq 1200\,eV.nm$)

۱) $1eV$　　۲) $1/8eV$　　۳) $1/2eV$　　۴) $3eV$

پاسخ: گزینه «۲» بنابر نظریه کوانتومی اثر فوتوالکتریک، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (K) با انرژی فوتونها (E) و تابع کار فلز (W) رابطه $E=W+K$ دارد.

در اینجا مطابق رابطه پلانک ـ اینشتین $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ است و بنابراین: $W = \frac{hc}{\lambda} - K$. بنابر فرض مسأله $K = 1/6eV$ و $\lambda = 3500\mathring{A} = 350\,nm$ و به این ترتیب داریم:

$$W = \frac{1200\,eV.nm}{350\,nm} - 1/6eV \Rightarrow W = 1/8eV$$

مثال۸: کدام گزینه درست است؟

۱) در فرایند فوتوالکتریک الکترون باید مقید باشد، ولی در اثر کامپتون ممکن است آزاد باشد.

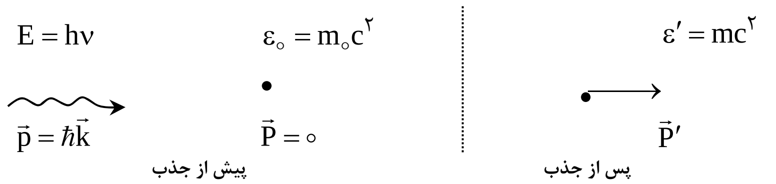
۲) هم در فرایند فوتوالکتریک و هم در اثر کامپتون باید الکترون مقید باشد.

۳) مقید یا آزاد بودن الکترون تأثیری بر اثر فوتوالکتریک یا اثر کامپتون نمی‌گذارد.

۴) در فرایند فوتوالکتریک الکترون باید آزاد باشد، اما این قید در اثر کامپتون دیده نمی‌شود.

پاسخ: گزینه «۱»

توضیح: نشان می‌دهیم که الکترون آزاد نمی‌تواند فوتونی را جذب کرده و در عین حال هر دو کمیت انرژی و تکانه خطی را پایسته نگه دارد. از این رو در فرایند فوتوالکتریک الکترون باید مقید باشد، ولی در اثر کامپتون الکترون ممکن است آزاد باشد. در اینجا فرض می‌کنیم الکترون آزاد فوتون را کاملاً جذب می‌کند. در این صورت باید به تناقض برسیم، سینماتیک مسأله به صورت زیر است:



در شکل‌های بالا، E انرژی فوتون فرودی، ν بسامد آن و $\vec{p}$ تکانه خطی آن است $m_\circ$ جرم سکون الکترون و ε انرژی الکترون است. $\vec{P}'$ تکانه خطی الکترون پس از پراکندگی است. در اینجا اصول پایستگی انرژی و تکانه خطی را می‌آوریم:

اصل پایستگی انرژی: $E + \varepsilon_\circ = \varepsilon'$

اصل پایستگی تکانه خطی: $\vec{p} = \vec{P}'$

اما $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ و $\vec{P}' = m\vec{v}$، در اینجا $\vec{v}$ سرعت الکترون پس از جذب فوتون است.

مطابق رابطه نسبیتی برای جرم m، داریم: $m = \frac{m_\circ}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ بنابراین رابطه بقای تکانه خطی به صورت مقابل درمی‌آید:

$$\hbar k = \frac{m_\circ v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

از طرفی انرژی فوتون با رابطه $E = pc$ به تکانه آن مربوط می‌شود. پس:

$$\frac{E}{c} = \frac{m_\circ v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (I)$$

اصل پایستگی انرژی را نیز می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E + m_\circ c^2 = mc^2 \Rightarrow E + m_\circ c^2 = \frac{m_\circ}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 \Rightarrow E = m_\circ c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \quad (II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) داریم:

$$\frac{m_\circ cv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m_\circ c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{c-c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=c-v$$

$$\Rightarrow c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=c^2+v^2-2cv\Rightarrow c^2-v^2=c^2+v^2-2cv\Rightarrow 2cv=2v^2\Rightarrow v=c$$

و این یک تناقض آشکار است، زیرا با فرض برقراری هر دو اصل پایستگی، سرعت نهایی الکترون معادل سرعت نور درآمد! بنا به نظریه نسبیت خاص هیچ ذره مادی (از جمله الکترون) نمی‌تواند با سرعت نور حرکت کند بنابراین در این مسأله امکان ندارد هر دو اصل پایستگی انرژی و تکانه خطی همزمان برقرار بمانند.

مثال۹: طول موج دوبروی وابسته به الکترونی که در اختلاف پتانسیل $100\,V$ شتاب گرفته باشد، کدام است؟

(انرژی سکون الکترون $0/5MeV$ و $hc \simeq 1200eV.nm$)

۱) $5\mathring{A}$ ۲) $10\mathring{A}$ ۳) $2/4\mathring{A}$ ۴) $1/2\mathring{A}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» انرژی جنبشی الکترون در پتانسیل $100V$ برابر با $100eV$ است که در مقایسه با انرژی سکون آن ($0/5MeV=0/5\times10^6\,eV$) بسیار کوچک است؛ از این رو می‌توانیم از رابطه کلاسیک میان انرژی جنبشی و تکانه خطی استفاده کنیم: $E=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow p=\sqrt{2mE}$.

اما بنابر رابطه روبروی $\lambda=\frac{h}{p}$ از این رو با ضرب کردن c در صورت و مخرج داریم: $\lambda=\frac{h}{\sqrt{2mE}}=\frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}}$

در رابطه بالا $E=100eV$ و $mc^2=0/5MeV$ و $hc\simeq1200eV.nm$ بنابراین:

$$\lambda=\frac{1200eV.nm}{\sqrt{2\times0/5\times10^6\,eV\times100eV}}=\frac{1200}{10000}nm\Rightarrow\lambda=0/12nm=1/2\mathring{A}$$

مثال۱۰: طول موج وابسته به پروتونی که در اختلاف پتانسیل $100V$ شتاب گرفته است نسبت به طول موج وابسته به الکترونی که در همان اختلاف پتانسیل شتابدار شده باشد چیست؟ (همان‌گونه که می‌دانیم $m_p\simeq2000m_e$)

۱) $\lambda_p=5\times10^{-4}\lambda_e$ ۲) $\lambda_p=\sqrt{5}\times10^{-2}\lambda_e$ ۳) $\lambda_p=\lambda_e$ ۴) $\lambda_p=5\times10^{-2}\lambda_e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که بار الکتریکی الکترون و پروتون با یکدیگر برابر است، هر دو تحت پتانسیل V، انرژی یکسان E=eV کسب می‌کنند. در اینجا $V=100V$ پس انرژی الکترون و پروتون به $100eV$ می‌رسد که در مقایسه با انرژی‌های سکون‌شان که به ترتیب برابر $0/5MeV$ و $1000MeV$ است قابل چشم‌پوشی است. پس می‌توان از رابطه انرژی نا نسبیتی $E=\frac{p^2}{2m}$ بهره گرفت.

بنابر رابطه دوبروی $\lambda=\frac{h}{p}$ و از این رو داریم: $\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_\circ E}}=\frac{hc}{\sqrt{2m_\circ c^2E}}$ در اینجا c سرعت نور است. به این ترتیب $\lambda_p=\frac{hc}{\sqrt{2m_{\circ p}c^2E_p}}$ و $\lambda_e=\frac{hc}{\sqrt{2m_{\circ e}c^2E_e}}$ اما $E_p=E_e=100eV$ و $m_{\circ p}c^2=2000m_{\circ e}c^2$ پس نسبت دو طول موج به دست می‌آید:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_e}=\frac{\left(\frac{hc}{\sqrt{2m_{\circ p}c^2E_p}}\right)}{\left(\frac{hc}{\sqrt{2m_{\circ e}c^2E_e}}\right)}=\sqrt{\frac{m_{\circ e}c^2}{m_{\circ p}c^2}}=\frac{1}{\sqrt{2000}}\Rightarrow\frac{\lambda_p}{\lambda_e}=\sqrt{5\times10^{-4}}\Rightarrow\frac{\lambda_p}{\lambda_e}=\sqrt{5}\times10^{-2}\Rightarrow\lambda_p=\sqrt{5}\times10^{-2}\lambda_e$$

مثال۱۱: الگوی پیشنهادی بور برای اتم‌های هیدروژن گونه از عهده تبیین کدام یک از موارد زیر برآمد؟

۱) مسأله پایداری اتم‌ها
۲) مسأله گسستگی طیف‌های اتمی
۳) زمان انجام جهش‌های کوانتومی الکترون‌ها
۴) گزینه‌های ۱و۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به الگوی اتمی رادرفورد (که به الگوی سیاره‌ای مشهور شد) دو ایراد عمده وارد بود؛ بنابراین الگو، بار مثبت اتم در ناحیه بسیار کوچکی در مرکز اتم به نام هسته متمرکز است و الکترون‌ها (بار منفی اتم) مانند سیارات منظومه شمسی حول آن در گردشند. از آنجا که این الگو مستلزم حرکت دوره‌ای برای الکترون‌ها بود نمی‌توانست طیف‌های تابش ناشی از اتم‌ها را توضیح دهد، که ساختار هماهنگ منتظره‌ای ندارند و ساختار آن‌ها به صورت $\frac{1}{\lambda} \propto (\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2})$ است که در آن λ طول موج گسیلی (یا جذبی) اتم بوده و n_1 و n_2 اعداد درست هستند. این الگو همچنین ساز و کاری برای پایداری اتم‌ها در بر نداشت: یک الکترون در مدار دایره‌ای یا بیضوی دائماً شتاب دارد و بنابر نظریه الکترومغناطیس کلاسیک باید تابش کند. اتلاف مداوم انرژی با سقوط الکترون‌ها به درون هسته در مدت زمان بسیار بسیار کوتاهی به رمبش اتم منجر می‌شود.

اما نیلز بور اصولی را وضع کرد که با بریدن از نظریه کلاسیک، ساختار طیفی را توضیح می‌داد و از مسأله ناپایداری اتم اجتناب می‌کرد.

اصول موضوعه بور عبارتند از:

۱ـ الکترون‌ها در مدارهایی حرکت می‌کنند که مقید به این شرط هستند که تکانه زاویه‌ای آن‌ها مضرب درستی از $\frac{h}{2\pi}$ باشد، یعنی برای مدارهای دایره‌ای به شعاع r، سرعت v الکترون‌ها محدود به رابطه روبرو است:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

و علاوه بر این، الکترون‌ها در این مدارها با این که شتاب دارند، تابش نمی‌کنند. می‌گوییم این الکترون‌ها در حالت‌های پایا هستند.

۲ـ الکترون‌ها می‌توانند گذارهای ناپیوسته‌ای از یک مدار مجاز به مدارهای مجاز پایین‌تر انجام دهند، و تغییر انرژی $(E - E')$ به صورت تابش با بسامد $\nu = \frac{E - E'}{h}$ ظاهر می‌شود. اتم می‌تواند با جذب تابش، الکترون‌های خود را وادار به گذار به مداری با انرژی بیشتر کند.

اما علت نادرستی گزینه ۳ در این واقعیت نهفته است که نظریه بور مطابق اصول موضوعه‌ای که در بالا تشریح شد، چیزی در این‌باره که الکترون‌ها کی باید جهش‌های خود را انجام دهند نمی‌گوید؛ برای تبیین این پدیده به معادله شرودینگر و آنچه معروف به مکانیک کوانتومی جدید است، نیاز است.

مثال۱۲: طول موج نور گسیل شده وابسته به گذار $n = 2$ به $n = 1$ در اتم هیدروژن، در کدام ناحیه از طیف الکترومغناطیسی جای دارد؟ (فرض کنید $hc \simeq 1200 eV.nm$ و $E_n = -\frac{13/6}{n^2} eV$)

۱) ناحیه مرئی
۲) ناحیه فرابنفش
۳) ناحیه فروسرخ
۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به یکی از دو فرض اساسی که نیلز بور در توضیح طیف‌های (گسیلی و جذبی) اتمی برای اتم‌های هیدروژن گونه در نظر گرفت، در اثر گذار اتم از مدار n_1 به مدار n_2، کوانتوم نوری با بسامد ν_{12} گسیل یا جذب می‌شود (بسته به این که کدام یک از اعداد n_1 یا n_2 بزرگ‌ترند) که از رابطه $\nu_{12} = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h}$ بدست می‌آید. در اینجا مطابق صورت تست گذار اتمی از حالت $n = 2$ (بزرگ‌تر) به حالت $n = 1$ است. بنابراین کوانتوم نوری به بسامد $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$ گسیل می‌شود.

اما از طرفی رابطه میان بسامد (ν) و طول موج (λ) به صورت $\nu = \frac{c}{\lambda}$ است که در آن c سرعت نور (در خلاء) می‌باشد. به این ترتیب داریم:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{h} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} \qquad (I)$$

از راهنمایی مسأله برای محاسبه E_2 و E_1 بهره می‌جوییم:

$$E_2 = -\frac{13/6}{(2)^2} eV \Rightarrow E_2 = -3/4 eV \;,\; E_1 = -\frac{13/6}{(1)^2} eV \Rightarrow E_1 = -13/6 eV$$

از این رو اختلاف انرژی بدست می‌آید:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -3/4 eV - (-13/6 eV) = 10/2 eV$$

با در دست داشتن ΔE، از رابطه (I) طول موج گسیلی را بدست می‌آوریم:

$$\lambda \simeq \frac{1200 eV - nm}{10/2 eV} \Rightarrow \lambda \simeq 120 nm$$

با توجه به این که ناحیه مرئی طیف الکترومغناطیسی از نور بنفش با طول موج $350 nm$ تا نور قرمز با طول موج $700 nm$ گسترده است، طول موج بدست آمده در ناحیه مرئی جای ندارد و از آنجا که مقدار آن پایین‌تر از طول موج نور بنفش است، به ناحیه فرابنفش طیف الکترومغناطیسی تعلق دارد.

روش کوتاهتر (تستی)

در طیف گسیلی اتم هیدروژن گذار از هر حالت برانگیخته‌ای به حالت پایه $(n=1)$ به سری خطی لیمان موسوم است که در ناحیه فرابنفش واقع می‌شود.

به طور کلی از مشخصه‌های طیف اتم هیدروژن تقسیم‌بندی آن به سری‌های خطی گوناگون است: لیمان، بالمر، پاشن و غیره:

گذارها به حالت پایه $(n_f=1)$ در ناحیه فرابنفش رخ می‌دهند: $h\nu = E_n - E_1$ (سری لیمان)

گذارها به اولین حالت برانگیخته $(n_f=2)$ در ناحیه مرئی واقع می‌شوند : $h\nu = E_n - E_2$ (سری بالمر)

گذارها به دومین حالت برانگیخته $(n_f=3)$ در ناحیه فروسرخ قرار دارند: $h\nu = E_n - E_3$ (سری پاشن)

و به همین ترتیب گذارهایی به حالت‌های برانگیخته بعدی با طول موجهای بزرگ‌تر رخ می‌دهد.

◆ ◆ ◆ ◆

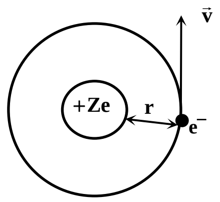
مثال۱۳: استدلال بور در توجیه طیف‌های (گسیلی و جذبی) اتمی به چه روشی متکی است؟

۱) روش کلاسیکی ۲) روش کوانتومی ۳) روش نیمه کلاسیک ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» برای اتم‌های هیدروژن گونه (با بار هسته $+Ze$) و مدارهای الکترونی دایره‌ای (به شعاع r)، بور از قانون دوم نیوتن (کلاسیک) برای یافتن ارتباط میان سرعت (v) و شعاع مداری الکترون استفاده کرد: $\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

سپس رابطه بالا را با فرض کوانتش تکانه زاویه‌ای مداری (کوانتومی) ترکیب کرد: $L = n\hbar$

به این ترتیب شعاع مداری و سرعت مداری الکترون به طور گسسته (مقداری که بستگی به n دارد) تغییر می‌کرد و از این رو انرژی مقادیری کوانتیده به خود می‌گرفت، بنابراین بور با تلفیق کوانتش تکانه زاویه‌ای مداری با مکانیک کلاسیک، به روشی نیمه کلاسیک، نیمه کوانتومی توانست طیف انرژی اتم‌های هیدروژن گونه را بدست آورد.



حرکت دایره‌ای یکنواخت الکترون در مدارهای اتم‌های هیدروژن گونه

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۴: اگر در آزمایش فرانک ـ هرتز به جای بخار جیوه از گاز هیدروژن اتمی در حالت پایه استفاده می‌شد اولین افت جریان در چه انرژی مشاهده می‌شد؟ (فرض کنید برخوردها کاملاً کشسان باشد و انرژی تراز nام اتم هیدروژن از رابطه $E_n = \frac{-13/6}{n^2}eV$ بدست آید)

۱) $13/6eV$ ۲) $10/2eV$ ۳) $8/9eV$ ۴) $3/4eV$

پاسخ: گزینه «۲» به علت وجود مدارهای مجاز (کوانتش انرژی) در اتمها (و در اینجا اتم هیدروژن) الکترون‌های پر انرژی در برخورد با الکترون‌های اتم هیدروژن نمی‌توانند باعث برانگیختگی آن‌ها شوند مگر آنکه انرژی آن‌ها برابر با اختلاف انرژی دو مدار الکترونی باشد؛ از آنجا که طبق فرض مسأله برخوردها کشسان در نظر گرفته شده‌اند جز در حالتی که اختلاف انرژی دو تراز برابر با انرژی الکترون فرودی نباشد، الکترون‌ها انرژی از دست نمی‌دهند و افتی در جریان ناشی از آن‌ها دیده نمی‌شود. در این تست گاز هیدروژن در حالت پایه خود قرار دارد یعنی حالتی با عدد کوانتومی n=1 و بنابراین انرژی $E_1 = -13/6eV$. از این رو اولین افت جریان هنگامی رخ می‌دهد که اتم هیدروژن از حالت n=1 (حالت پایه) به حالت n=2 (اولین حالت برانگیخته) که دارای انرژی $E_2 = -\frac{13/6}{(2)^2}eV = -3/4eV$ است، گذار کند. بنابراین انرژی الکترون‌های فرودی باید با اختلاف E_1 و E_2 برابر باشد:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -3/4eV - (-13/6eV) = 10/2eV$$ = (اولین افت جریان) انرژی الکترون‌های فرودی

آزمون فصل اول

۱ـ کدام عبارت در مورد تابش الکترومغناطیس درون کاواک (که می‌تواند نمایان‌گر جسم سیاه ایده‌آل باشد) درست است؟

۱) تابش درون کاواک (برای هر طول موج معین) همسانگرد، همگن و به جنس دیواره‌های کاواک بستگی دارد.
۲) تابش درون کاواک (برای هر طول موج معین) همسانگرد، همگن و برای تمام کاواکهای با دمای مساوی، یکسان است.
۳) تابش درون کاواک به دمای داخل آن بستگی ندارد.
۴) توزیع تابش درون کاواک بستگی به شکل هندسی کاواک و جنس دیواره‌های آن دارد.

۲ـ کدام رابطه طیف انرژی گسیل شده در فرکانس‌های بالا از یک جسم سیاه را توصیف می‌کند؟ ($u(\nu,T)$ چگالی انرژی الکترومغناطیسی در بسامد ν و دمای T است.)

۱) $u(\nu,T)=A\nu^{3}e^{-\frac{\beta\nu}{T}}$
۲) $u(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^{2}}{c^{3}}kT$
۳) $u(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^{3}}\frac{\nu^{3}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$
۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۳ـ رد و بدل شدن انرژی الکترومغناطیسی میان دیواره‌های کاواک و تابش درون کاواک به چه صورتی است؟

۱) انرژی الکترومغناطیسی در فرکانس‌های بالا به صورت گسسته و در فرکانس‌های پایین به صورت پیوسته انتقال می‌یابد.
۲) انرژی الکترومغناطیسی در فرکانس‌های بالا به صورت پیوسته و در فرکانس‌های پایین به صورت گسسته رد و بدل می‌شود.
۳) انرژی الکترومغناطیسی همواره به طور پیوسته تبادل می‌شود.
۴) انرژی الکترومغناطیسی همواره به صورت گسسته از دیواره‌های کاواک گسیل و یا جذب آن‌ها می‌شود.

۴ـ ایراد و یا ایرادهای عمده قانون ریلی ـ جینز در توصیف توزیع انرژی الکترومغناطیسی درون کاواک چه بود؟

۱) قانون ریلی ـ جینز در حد فرکانس‌های پایین با نتایج تجربی ناسازگار است.
۲) قانون ریلی ـ جینز چگالی انرژی کل الکترومغناطیسی (انتگرال چگالی انرژی روی تمام فرکانس‌ها) را بی‌نهایت پیش‌بینی می‌کند.
۳) قانون ریلی ـ جینز کاملاً مغایر با اصول فیزیک کلاسیک است.
۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۵ـ کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد میانگین انرژی مدهای الکترومغناطیسی درون کاواک درست است؟

۱) مدها انرژی میانگینی دارند که تابع فرکانس آن‌ها است، به طوری که میانگین انرژی مدهای فرکانس بالا بسیار کوچک است.
۲) مدها انرژی میانگینی دارند که تابع فرکانس آن‌ها است به طوری که میانگین انرژی مدهای فرکانس بالا بسیار بزرگ است.
۳) انرژی میانگین مدهای امواج الکترومغناطیسی مستقل از فرکانس آن‌ها است.
۴) بسته به جنس دیواره‌های کاواک، میانگین انرژی مدهای الکترومغناطیسی درون کاواک می‌تواند متغیر باشد.

۶ـ کدام گزینه (تا حد یک ضریب ثابت c) ارتباط میان انرژی الکترومغناطیسی تابش کل در واحد حجم کاواکی که دیواره‌های آن در دمای T قرار دارند، بیان می‌کند؟ (U انرژی کل الکترومغناطیسی در واحد حجم است)

۱) $U(T)=cT$
۲) $U(T)=cT^{2}$
۳) $U(T)=cT^{3}$
۴) $U(T)=cT^{4}$

۷ـ دمای جسم سیاهی را دو برابر کرده‌ایم، توان گسیل کل جسم سیاه چگونه تغییر می‌کند؟

۱) دو برابر می‌شود.
۲) چهار برابر می‌شود.
۳) شانزده برابر می‌شود.
۴) تغییر نمی‌کند.

۸ـ دمای جسم سیاهی را از ۲۷ درجه سانتی‌گراد به ۳۲۷ درجه سانتی‌گراد می‌رسانیم، طول موجی که در آن بیشینه تابش صورت می‌گیرد چگونه تغییر می‌کند؟

۱) دو برابر می‌شود.
۲) به نصف مقدار اولیه خود کاهش می‌یابد.
۳) ۱۲ برابر می‌شود.
۴) به $\frac{1}{12}$ مقدار اولیه خود می‌رسد.

۹ـ بنابر قانون ریلی ـ جینز میانگین مدهای انرژی تابشی تابع چه کمیت و یا کمیت‌هایی است؟

۱) دما
۲) بسامد
۳) دما و بسامد
۴) هیچ‌کدام

۱۰ـ علت مشاهده نشدن آثار کوانتومی تابش در مقیاسهای ماکروسکوپیک چیست؟

۱) کوچکی بسیار زیاد ثابت پلانک، h
۲) پیوسته بودن انرژی تابشی در مقیاسهای ماکروسکوپیک
۳) گزینه‌های ۱ و۲
۴) این موضوع همچنان ناشناخته است.

۱۱ـ تابش انرژی الکترومغناطیسی از یک جسم سیاه و طول موجی که در آن بیشینه تابش گسیل می‌شود به ترتیب با دما (T) چگونه تغییر می‌کند؟

۱) هر دو نسبت مستقیم با دما (T) دارند.

۲) هر دو نسبت عکس با دما (T) دارند.

۳) انرژی با توان چهارم دما و طول موج با عکس دمای جسم سیاه متناسب است.

۴)انرژی متناسب با توان چهارم دمای جسم سیاه بوده در صورتی که طول موج بیشینه تابش متناسب با توان یکم دما است.

۱۲ـ کدام یک از پدیده‌های فیزیکی زیر الزاماً بر ماهیت کوانتومی تابش دلالت دارد؟

۱) فرمول پلانک در تابش جسم سیاه　　　۲) اثر فوتوالکتریک

۳) اثر کامپتون　　　۴) هر سه مورد

۱۳ـ در پدیده فوتوالکتریک، کدام مورد در چارچوب نظریه الکترومغناطیس کلاسیک قابل درک نیست؟

۱) ایجاد جریان فوتوالکتریک با تابش الکترومغناطیسی به سطح فلزات　　　۲) وابستگی اثر فوتوالکتریک به بسامد نور تابشی

۳) متناسب بودن جریان فوتوالکتریک با شدت چشمه نور　　　۴) موارد ۲ و ۳

۱۴ـ کدام گزینه در رابطه با تابع کار فلز (W) درست نیست؟

۱) به طور کلی تابع کار (W) از یک فلز به فلز دیگر فرق می‌کند.

۲) تابع کار (W) معادل مقدار انرژیی است که باید صرف جدا شدن الکترون از فلز شود.

۳)تابع کار (W) به انرژی الکترون بستگی دارد.

۴) تابع کار (W) برابر اختلاف انرژی الکترون آزاد و الکترون مقید در داخل فلز است.

۱۵ـ در اثر فوتوالکتریک رابطه میان انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها و فرکانس نور تابشی به چه صورتی است؟

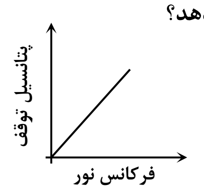
۱) رابطه مشخصی میان بسامد (فرکانس) و انرژی فوتوالکترون‌ها نمی‌توان تعریف کرد، به عبارت دیگر الکترون‌های هر فلزی در اثر فوتوالکتریک به گونه‌ای متفاوت با الکترون‌های فلزی دیگر رفتار می‌کنند.

۲) انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها مستقل از بسامد (فرکانس) نور تابشی است.

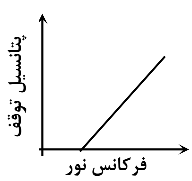
۳) انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها رابطه‌ای معکوس با فرکانس نور تابشی دارد.

۴) رابطه‌ای خطی میان انرژی جنبشی الکترون و بسامد نور تابشی وجود دارد.

۱۶ـ کدام یک از نمودارهای زیر، پتانسیل توقف شمارش الکترون‌ها از یک فلز بر حسب بسامد نور فرودی در اثر فوتوالکتریک را به طور کیفی نمایش می‌دهد؟

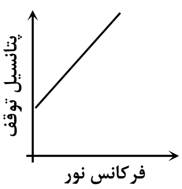


(۱)



(۲)

(۳)

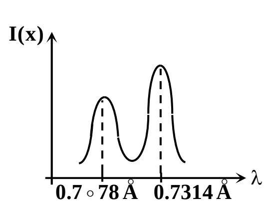


(۴)

۱۷ـ اگر انرژی فوتون را با E و فرکانس آن را با ν نمایش دهیم، در این صورت کدام گزینه ارتباط میان آن‌ها را به درستی نمایش می‌دهد؟

۱) $E \propto \nu$　　　۲) $E \propto \nu^{2}$　　　۳) $E \propto \nu^{-1}$　　　۴) $E \propto \nu^{-2}$

۱۸ـ طیف تابش پراکنده از انتهای کربن را در نظر بگیرید، با توجه به نمودار روبه‌رو کدام گزینه درست است؟



۱) خط $۰/۷۳۱۴\,\mathring{A}$ مربوط به پراکندگی از اتم و خط $۰/۷۰۷۸\,\mathring{A}$ مربوط به پراکندگی از الکترون است.

۲) خط $۰/۷۳۱۴\,\mathring{A}$ مربوط به پراکندگی از الکترون و خط $۰/۷۰۷۸\,\mathring{A}$ مربوط به پراکندگی از کل اتم است

۳) دو خط طیفی مربوط به دو تابش مستقل از هم و با فرکانس‌های متفاوت است.

۴) این دو خط مربوط به تابش پراکنده در دو زاویه متفاوت است.

۱۹ـ کدام یک از گزینه‌های زیر با توجه به نظریات فیزیک کلاسیک قابل توجیه است؟

۱) اثر فوتوالکتریک　　　۲) اثر کامپتون

۳) پراکندگی الکترون از بلورهای جامد　　　۴) پراش نور

۲۰ـ بیشینه تغییرات طول موج نور فرودی در اثر کامپتون در چه زاویه‌ای رخ می‌دهد؟

۱) $\theta = 0^\circ$ ۲) $\theta = 45^\circ$ ۳) $\theta = 90^\circ$ ۴) $\theta = 180^\circ$

۲۱ـ کدام یک از گزینه‌های زیر تغییر طول موج نور تابشی در پراکندگی کامپتون را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1+\cos\theta)$ ۲) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

۳) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}(1+\cos\theta)$ ۴) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}(1-\cos\theta)$

۲۲ـ در شرایط یکسان، به طور کلی طول موج دوبروی کدام ذره بیشتر است؟

۱) الکترون‌ها ۲) نوترون‌های حرارتی ۳) مولکول هیدروژن ۴) اتم هیدروژن

۲۳ـ در پراش الکترون‌ها از بلورهای نیکل با ثابت شبکه $a = 2/15\,\mathring{A}$، انرژی الکترون‌ها حدوداً چقدر است؟

۱) $1/6\,eV$ ۲) $0/80\,eV$ ۳) $160\,eV$ ۴) $0/08\,eV$

۲۴ـ آثار کوانتومی مانند جنبه‌های دوگانه ذره‌ای ــ موجی تحت چه شرایطی ظاهر می‌شوند؟

۱) جنبه‌های دوگانه تنها وقتی ظاهر می‌شوند که حاصل‌ضرب تکانه و اندازه از مرتبهٔ h باشد.

۲) جنبه‌های دو گانه تنها در مقیاسهای بسیار ریز ظاهر می‌شوند.

۳) جنبه‌های دو گانه تنها در ذراتی با تکانه‌های بسیار کوچک دیده می‌شود.

۴)جنبه‌های دو گانه موجی ـ ذره‌ای تنها در مورد انرژی و تابش مشاهده می‌شود.

۲۵ـ مدل اتمی رادرفورد کدام یک از موارد زیر را در خصوص اتم‌ها توضیح می‌دهد؟

۱) طیف‌های تابشی ناشی از اتم‌ها ۲) پایداری اتم‌ها

۳) حرکت الکترون‌ها در مدارهای دایره‌ای یا بیضوی پیرامون هسته اتم ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۲۶ـ مدل اتمی بور کدام یک از موارد زیر را توضیح نمی‌دهد؟

۱) زمان انجام جهشهای کوانتومی الکترون‌ها در اتم‌ها ۲) ساختار طیفی ناشی از اتم‌ها

۳) پایداری اتم‌ها ۴) هیچ کدام

۲۷ـ کدام یک از گزینه‌ها در مورد مدارهای مانا در مدل اتمی بور درست است؟

۱) الکترون‌های واقع در مدارهای مانا بدون تغییر انرژی قادر به گسیل یا جذب نور هستند.

۲) الکترون‌ها می‌توانند گذارهای ناپیوسته‌ای از یک مدار مجاز به مدار مجاز دیگری انجام دهند و تغییر انرژی به صورت گسیل یا جذب فوتون ظاهر می‌شود.

۳) الکترون‌ها در مدارهای مانا با این که شتاب دارند، تابش نمی‌کنند.

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۲۸ـ در مدل اتمی بور ....

۱) تکانه زاویه‌ای مداری الکترون، شعاع مداری الکترون و انرژی الکترون کوانتیده است اما سرعت الکترون‌ها غیر کوانتیده است.

۲) تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای، شعاع مداری و انرژی الکترون مقادیر گسسته را اختیار می‌کنند.

۳) انرژی و شعاع مداری الکترون‌ها کوانتیده است اما تکانه خطی و تکانه زاویه‌ای آن‌ها مقادیر پیوسته‌ای به خود می‌گیرند.

۴) تکانه زاویه‌ای الکترون‌ها به دور هسته مقادیر گسسته اختیار می‌کند در صورتی که انرژی و شعاع مداری الکترون‌ها پیوسته تغییر می‌کند.

۲۹ـ در گذار از مدار $n_1 = 2$ به مدار $n_2 = 4$ در اتم هیدروژن، انرژی الکترون چگونه تغییر می‌کند؟

۱) دو برابر می‌شود. ۲) نصف می‌شود. ۳) چهار برابر می‌شود. ۴) به یک‌چهارم تقلیل می‌یابد.

۳۰ـ در کدام یک از گذارهای اتم هیدروژن، بسامد فوتون گسیل شده کمتر است؟ $(E_n = \frac{E_0}{n^2})$

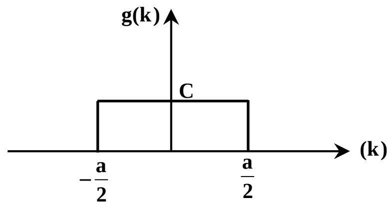
۱) گذار از مدار $n = 4$ به مدار $n = 3$ ۲) گذار از مدار $n = 4$ به مدار $n = 2$

۳) گذار از مدار $n = 3$ به مدار $n = 2$ ۴) گذار از مدار $n = 2$ به مدار $n = 1$

فصل دوم

« بسته‌های موج، روابط عدم قطعیت و معادله شرودینگر »

تست‌های تألیفی فصل دوم



مثال۱: در مثال قبل پهنای تابع $|f(x)|^2$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4\pi}{a}$ ۲) $4\pi a$

۳) 4π ۴) $\frac{4\pi}{a^2}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: در مسأله قبلی تابع $g(k)$، حالت مستطیلی داشت:

بنابراین پهنای آن به صورت $\Delta k = (\frac{a}{2}) - (-\frac{a}{2}) = a$ در می‌آید. اما بنابر خاصیت توابعی که تبدیل فوریه یکدیگرند حاصلضرب دو پهنا یعنی $\Delta k \Delta x$ باید مستقل از پارامتر متغیر خاصی (در اینجا a) باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام یک واجد این شرایط است.

بررسی گزینه ۱:
$$\Delta x \Delta k = (\frac{4\pi}{a})(a) = 4\pi$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید حاصل کمیتی است مستقل از a (مقدار ثابتی است) از این رو جواب درست همین گزینه است.

بررسی گزینه ۲:
$$\Delta x \Delta k = (4\pi a)(a) = 4\pi a^2$$

حاصل تابعی از a است بنابراین این گزینه صحیح نیست.

بررسی گزینه ۳:
$$\Delta x \Delta k = (4\pi)(a) = 4\pi a$$

حاصل تابعی است از a و از این رو این گزینه هم درست نیست.

بررسی گزینه ۴:
$$\Delta x \Delta k = (\frac{4\pi}{a^2})(a) = \frac{4\pi}{a}$$

حاصل این عبارت نیز تابعی از a است پس این گزینه را هم باید رد کرد.

روش دوم: می‌توان مستقیماً پهنای $f(x)$ را از روی شکل تابعی آن بدست آورد. از آنجا که $f(x) \propto \frac{\sin(\frac{ax}{2})}{x}$، اولین جایی که تابع صفر می‌شود در $\frac{ax}{2} = \pm\pi$ یا به عبارتی در $x = \pm\frac{2\pi}{a}$ است. از آنجا Δx بدست می‌آید: $\Delta x = (\frac{2\pi}{a}) - (-\frac{2\pi}{a}) = \frac{4\pi}{a}$.

(توجه داشته باشید به علت وجود x در مخرج تابع $f(x)$، هر چه از نقطه $x = 0$ در هر دو جهت دورتر می‌شویم، ارتفاع تابع کاهش می‌یابد بنابراین لزوم در نظر گرفتن اولین جایی که $f(x)$ صفر می‌شود اینجا مشخص می‌شود).

مثال۲: رابطه سرعت فاز v_{ph} و سرعت گروه v_g یک ذره آزاد به جرم m چیست؟ (ذره را غیر نسبیتی فرض کنید)

۱) $v_g = 2v_{ph}$ ۲) $v_g = \frac{v_{ph}}{2}$ ۳) $v_g = v_{ph}$ ۴) $v_g = \frac{2c^2}{v_{ph}}$

پاسخ: گزینه «۱» از آنجا که ذره آزاد است، انرژی آن صرفاً جنبشی است به عبارت دیگر $E = \frac{p^2}{2m}$ که در آن p تکانه خطی ذره است. بنابر روابط پلانک ـ انیشتین رابطه تکانه p و انرژی E با عدد موج k و بسامد زاویه‌ای ω به صورت $p = \hbar k$ و $E = \hbar\omega$ است؛ بنابراین داریم:

$$\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

با توجه به تعریف سرعت فاز($v_{ph} = \frac{\omega}{k}$) و سرعت گروه ($v_g = \frac{d\omega}{dk}$) از رابطه بالا بدست می‌آید: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$

از این رو $v_g = 2v_{ph}$

مثال۳: اگر رابطه میان طول موج و بسامد در یک موج‌بر به صورت $\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}}$ باشد، سرعت گروه v_g چگونه به سرعت فاز v_{ph} مربوط می‌شود؟

۱) $v_g = \frac{v_{ph}}{2}$ ۲) $v_g = 2v_{ph}$ ۳) $v_g = \frac{c^2}{v_{ph}}$ ۴) $v_g = v_{ph}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اول رابطه را بر حسب ω و k بیان می‌کنیم، از آنجا که $\omega = 2\pi\nu$ و $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ داریم:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{c}{\sqrt{(\frac{\omega}{2\pi})^2 - \nu_0^2}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{c^2}{\frac{\omega^2}{4\pi^2} - \nu_0^2} = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega^2 - 4\pi^2\nu_0^2} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - 4\pi^2\nu_0^2}{c^2}$$

از طرفین رابطه بالا دیفرانسیل می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow kdk = \frac{1}{c^2}\omega d\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\frac{\omega}{k}}$$

اما از آنجا که سرعت فاز (v_{ph}) و سرعت گروه (v_g) به ترتیب به صورت $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ و $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ تعریف می‌شوند، رابطه بالا به صـورت $v_g = \frac{c^2}{v_{ph}}$ در خواهد آمد.

مثال۴: رابطه میان بسامد (ν) و طول موج (λ) برای امواج گرانی (آب عمیق) به صورت $\nu = (\frac{g}{2\pi\lambda})^{\frac{1}{2}}$ است. سرعت گروه و سرعت فاز به ترتیب عبارتند از:

۱) $v_{ph} = 2\pi\frac{g}{\nu}$, $v_g = 4\pi\frac{g}{\nu}$ ۲) $v_{ph} = \frac{g}{4\pi\nu}$, $v_g = \frac{g}{2\pi\nu}$

۳) $v_{ph} = \frac{g}{2\pi\nu}$, $v_g = \frac{g}{4\pi\nu}$ ۴) $v_{ph} = 4\pi\frac{g}{\nu}$, $v_g = 2\pi\frac{g}{\nu}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا ν و λ را برحسب بسامد زاویه‌ای ω و عدد موج k بیان می‌کنیم؛ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$، $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ بنابراین داریم:

$$\frac{\omega}{2\pi} = (\frac{g}{2\pi(\frac{2\pi}{k})})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \omega = (gk)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \omega^2 = gk \quad (I)$$

پس از دیفرانسیل‌گیری از طرفین رابطه (I) و با استفاده از تعریف سرعت گروه $(v_g = \frac{d\omega}{dk})$ و سرعت فاز $(v_{ph} = \frac{\omega}{k})$ بدست می‌آید:

$$\Rightarrow 2\omega d\omega = gdk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \Rightarrow v_g = \frac{g}{2\omega} \Rightarrow v_g = \frac{g}{4\pi\nu}$$

$$k = \frac{\omega}{v_{ph}} \xrightarrow[(I)]{\text{از رابطه}} \omega^2 = g(\frac{\omega}{v_{ph}}) \Rightarrow \omega = \frac{g}{v_{ph}} \Rightarrow v_{ph} = \frac{g}{\omega} \Rightarrow v_{ph} = \frac{g}{2\pi\nu}$$

مثال۵: مرتبه انرژی‌های ذرات درون هسته اتم چیست؟

۱) eV (الکترون ولت) ۲) MeV (مگا الکترون ولت) ۳) GeV (گیگا الکترون ولت) ۲) هیچ کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که ابعاد هسته از مرتبه فرمی (fm) یعنی 10^{-15} متر است، هر نوع اطلاعاتی که بخواهد قطر هسته را بپیماید بایـد در زمان Δt که در رابطه $\Delta t \gtrsim \frac{r}{c}$ صدق می‌کند تحقق یابد. در اینجا c سرعت نور $(3\times10^8 \frac{m}{s})$ و r شعاع هسته است. بنابراین $\Delta t \gtrsim \frac{10^{-15}}{3\times10^8}$ یعنی $\Delta t \gtrsim 3\times10^{-24}$ s اما مطابق رابطه عدم قطعیت انرژی ـ زمان $\Delta E\Delta t \gtrsim \hbar$ و با توجه این که $\hbar \sim 10^{-34}$ J.s خواهیم داشت:

$$\Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta t} \Rightarrow \Delta E \gtrsim \frac{10^{-34}}{3\times10^{-24}} \Rightarrow \Delta E \gtrsim 3\times10^{-11}\ J$$

اما هر الکترون ولت معادل $1/6\times 10^{-19}\ J$ است. پس $1J\sim 10^{19}\ eV$ و از این رو $\Delta E \gtrsim 10^{8}\ eV$ یا به عبارتی $\Delta E \gtrsim 10^{2}\ MeV$. به عبارت دیگر انرژی ذرات درون هسته از مرتبه چند صد مگا الکترون ولت است.

(لازم به ذکر است که انرژی الکترون‌های یک اتم از مرتبه چند الکترون ولت است).

مثال۶: کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱) رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ محدودیتی است که طبیعت تحمیل می‌کند و با بهبود تکنیک‌های آزمایشی و اندازه‌گیری نمی‌توان آن را از میان برداشت.

۲) امکان اندازه‌گیری مولفه‌های یکسان از مکان و تکانه خطی یک ذره تا هر درجه از دقت وجود ندارد.

۳) محدودیتی در بزرگی میزان عدم قطعیت مولفه‌های یکسان مکان و تکانه خطی جسم وجود ندارد.

۴) هر سه مورد درست است.

پاسخ: گزینه «۴» در مکانیک کوانتومی مولفه‌های یکسان مکان (x) و تکانه خطی (p) به درجات آزادی مختلفی مربوط نمی‌شوند و همبسته‌اند. در واقع ساختار (ریاضی) مکانیک کوانتومی ایجاب می‌کند که بین این دو مشاهده پذیر رابطه عدم قطعیت برقرار باشد. به طوری که طبیعت اجازه اندازه‌گیری همزمان این دو کمیت با هر درجه از دقتی را نمی‌دهد. این اثرات در زندگی روزمره که با ابعاد ماکروسکوپیک سروکار داریم و به علت کوچکی ثابت پلانک (h) مشاهده نمی‌شود $(\Delta p\Delta x \geq \hbar)$. بنابراین نمی‌توان Δx و Δp را همزمان به طور دلخواه کوچک کرد، اما می‌توان هر دو را تا حد امکان بزرگ در نظر گرفت (علت درستی گزینه ۳)

مثال۷: رابطه عدم قطعیت بین مختصات x و انرژی جنبشی $T=\frac{p^2}{2m}$ عبارت است از: ....　　$\Delta x\Delta T \gtrsim ....$

۱) $\frac{\hbar}{2}\frac{p}{m}$　　۲) $\frac{\hbar}{2m}$　　۳) $\frac{\hbar}{2}\frac{p^2}{2m}$　　۴) $\frac{\hbar}{2}p$

پاسخ: گزینه «۱» بنابر رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ، $\Delta x\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}$. از طرفی تغییرات انرژی جنبشی T به صورت $\Delta T=\Delta(\frac{p^2}{2m})=\frac{2p\Delta p}{2m}=p\frac{\Delta p}{m}$ بدست می‌آید از این رو:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x\Delta T=\Delta x(\frac{p\Delta p}{m})=\frac{p}{m}\Delta x\Delta p\\ \Delta x\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{p}{m}\Delta x\Delta p \gtrsim \frac{p}{m}\frac{\hbar}{2}$$

بنابراین رابطه عدم قطعیت میان انرژی جنبشی و مکان به صورت $\Delta x\Delta T \gtrsim \frac{\hbar p}{2m}$ بدست می‌آید.

مثال۸: کدام یک از موارد زیر دارای اهمیت فیزیکی است؟

۱) تابع موج $\psi(x,t)$　　۲) چگالی احتمال $|\psi(x,t)|^2$　　۳) فاز نسبی میان دو تابع موج　　۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

پاسخ: گزینه «۴» از آنجا که $|\psi(x,t)|^2$ به عنوان چگالی احتمال یافتن ذره در لحظه t، حول نقطه x تعبیر می‌شود، دارای اهمیت فیزیکی است.

از طرفی فاز نسبی میان دو تابع موج نیز بسیار مهم است، فرض کنید $\psi_1=|\psi_1|e^{i\theta_1}$ و $\psi_2=|\psi_2|e^{i\theta_2}$؛ از آنجا که معادله شرودینگر یک معادله خطی است چنانچه ψ_1 و ψ_2 جوابهای این معادله باشند $\psi_1+\psi_2$ نیز جوابی برای این معادله است پس $\psi=\psi_1+\psi_2$؛ حال اگر چگالی احتمال ψ را بدست آوریم داریم:

$$|\psi|^2=\psi^*\psi=(\psi_1+\psi_2)^*(\psi_1+\psi_2)=(\psi_1^*+\psi_2^*)(\psi_1+\psi_2)$$
$$=\psi_1^*\psi_1+\psi_1^*\psi_2+\psi_2^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+\psi_1^*\psi_2+\psi_2^*\psi_1$$

اما $\psi_2^*=|\psi_2|e^{-i\theta_2}$ و $\psi_1^*=|\psi_1|e^{-i\theta_1}$ بنابراین:

$$|\psi|^2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_1||\psi_2|e^{-i(\theta_1-\theta_2)}+|\psi_1||\psi_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)}=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_1||\psi_2|(e^{i(\theta_1-\theta_2)}+e^{-i(\theta_1-\theta_2)})$$

با استفاده از رابطه $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ بدست می‌آید:

$$|\psi|^2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+2|\psi_1||\psi_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود فاز نسبی $(\theta_1-\theta_2)$، در چگالی احتمال $|\psi|^2$ ظاهر شده است؛ در واقع به علت وجود همین جمله تداخلی است که شاهد آثار موجی ذرات مادی هستیم.

مثال۹: کدام یک از توابع زیر می‌تواند معرف تابع موج فیزیکی یک ذره در یک بعد باشد؟ $(\varepsilon > 0)$

۱) $\psi \propto x$ ۲) $\psi = cte$ ۳) $\psi \propto x^{\frac{-1}{2}}$ ۴) $\psi \propto x^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که تابع موج حاصل از معادله شرودینگر باید جزء توابع انتگرال‌پذیر مجذوری باشد که آن هم در نتیجه تعبیر احتمالاتی از تابع موج است، این شرط ایجاب می‌کند که ψ سریعتر از $x^{-\frac{1}{2}}$ به صفر میل کند. تنها گزینه ۴ واجد این شرط است.

◆◆◆◆

مثال۱۰: اگر $\psi(\vec{r},t)$ تابع حالت یک سیستم فیزیکی باشد، توسعه زمانی آن از کدام رابطه بدست می‌آید؟

۱) $\psi(\vec{r},t)$ ۲) معادله حرکت هایزنبرگ ۳) معادله شرودینگر ۴) $\psi^*(\vec{r},t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادله موج شرودینگر، معادله حاکم بر تحول زمانی تابع موج $\psi(\vec{r},t)$ است؛ $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$ (چنانچه در آینده خواهیم دید، معادله حرکت هایزنبرگ، معادله حاکم بر تحول زمانی عملگرها است و نه توابع موج)

◆◆◆◆

مثال۱۱: ذره آزادی به جرم m با تابع موج یک بعدی $\psi = \sqrt{c}e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ توصیف می‌شود، شار احتمال برای این ذره کدام است؟

۱) $\frac{p}{m}$ ۲) $c\frac{p}{m}$ ۳) $2\sqrt{c}\frac{p}{m}$ ۴) $\sqrt{c}\frac{p}{m}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت $\psi = \sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ را در فرمول $j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi)$ جایگزین می‌کنیم.

$$\psi(x) = \sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}} \Rightarrow \psi^*(x) = \sqrt{c}\,e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}},\ \frac{\partial\psi^*}{\partial x} = -\frac{ip}{\hbar}\sqrt{c}\,e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\{\sqrt{c}\,e^{-\frac{ipx}{\hbar}}(\frac{ip}{\hbar})\sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}} - (\frac{-ip}{\hbar})\sqrt{c}\,e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}\} = \frac{\hbar}{2im}\{\frac{ip}{\hbar}c + \frac{ip}{\hbar}c\} = \frac{\hbar}{2im}\frac{2ipc}{\hbar} = \frac{p}{m}c \Rightarrow j(x,t) = c\frac{p}{m}$$

راه‌حل کوتاه‌تر: برای این که سریعتر به جواب دست پیدا کنیم کافی است از رابطه $j(x,t) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x})$ استفاده کنیم؛ با توجه به مقادیر ψ^* و $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ داریم:

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} = (\sqrt{c}\,e^{-\frac{ipx}{\hbar}})(\frac{ip}{\hbar}\sqrt{c}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}) = \frac{ipc}{\hbar} \Rightarrow \mathrm{Im}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}) = \frac{pc}{\hbar} \Rightarrow j(x,t) = \frac{\hbar}{m}(\frac{pc}{\hbar}) \Rightarrow j(x,t) = c\frac{p}{m}$$

◆◆◆◆

مثال۱۲: تغییرات زمانی احتمال یافتن ذره‌ای که با تابع موج $\psi(x,t)$ بیان می‌شود، در فاصله $a \le x \le b$ کدام است؟ ($j(x,t)$ شار احتمال است).

۱) $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi|^2 dx = 0$ ۲) $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi|^2 dx = cte$

۳) $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi|^2 dx = j(a,t) - j(b,t)$ ۴) $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi|^2 dx = j(b,t) - j(a,t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق قانون پیوستگی $\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$، در اینجا $P(x,t)$ چگالی احتمال است که برحسب تابع موج $\psi(x,t)$ عبارت است از: $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ بنابراین رابطه پیوستگی برحسب $\psi(x,t)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 = -\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)$$

اگر از طرفین رابطه بالا بر روی متغیر x در بازه $a \le x \le b$ انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 dx = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}j(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx = -\int_a^b \partial j(x,t) = -j(x,t)\Big|_a^b = -j(b,t) - (-j(a,t)) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx = j(a,t) - j(b,t)$$

مثال۱۳: برای ذره‌ای به جرم m واقع در پتانسیل V(x) (که به طور کلی می‌تواند تابعی مختلط باشد) کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}=0$

۲) $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}=\frac{2P(x,t)}{\hbar}\mathrm{Im}(V(x))$

۳) $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=C$ (C ثابت است)

۴) $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$

پاسخ: گزینه «۲» تابع موج حاکم بر ذره‌ای به جرم m واقع در پتانسیل V از رابطه $i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)$ بدست می‌آید. برای یافتن تغییرات $P(x,t)$ یعنی چگالی احتمال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2=\frac{\partial}{\partial t}[\psi^*(x,t)\psi(x,t)]=\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}\psi(x,t)+\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\ (I)$$

از طرفی از معادله شرودینگر و همیوغ مختلط آن عبارت‌های $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ و $\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}$ بدست می‌آیند:

$$;i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)\Rightarrow\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\frac{V(x)}{i\hbar}\psi(x,t)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*(x,t)}{\partial x^2}+V^*(x)\psi^*(x,t)\Rightarrow\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}=+\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi^*(x,t)}{\partial x^2}-\frac{V^*(x)}{i\hbar}\psi^*(x,t)$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه (I) بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=[\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi^*(x,t)}{\partial x^2}-\frac{V^*(x)}{i\hbar}\psi^*(x,t)]\psi(x,t)+\psi^*(x,t)[-\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\frac{V(x)}{i\hbar}\psi(x,t)]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{-\hbar}{2im}[\psi^*(x,t)\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^*(x,t)}{\partial x^2}\psi(x,t)]+\frac{\psi^*(x,t)\psi(x,t)}{i\hbar}(V(x)-V^*(x))$$

عبارت داخل کروشه را می‌توان به صورت $\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t))$ نوشت از این رو:

$$\Rightarrow\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\hbar}{2im}(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t))\}+\frac{1}{i\hbar}|\psi(x,t)|^2(V(x)-V^*(x))$$

اما $V(x)-V^*(x)=2i\,\mathrm{Im}(V(x))$ و عبارت داخل آکولاد شار احتمال $(j(x,t))$ است، بنابراین:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)+\frac{P(x,t)}{i\hbar}(2i\,\mathrm{Im}(V(x)))\Rightarrow\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)=\frac{2}{\hbar}P(x,t)\mathrm{Im}(V(x))$$

همانگونه که پیش‌تر توضیح داده شد، معادله پیوستگی زمانی برقرار است که پتانسیل تابعی حقیقی از شناسه خود باشد.

مثال۱۴: تابع موج ذره‌ای آزاد در فضای سه بعدی با رابطه $\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$ داده می‌شود، شار جریان مربوطه کدام است؟

۱) $\frac{\hbar\vec{k}}{m}$

۲) $\frac{\hbar\vec{k}}{m}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}e^{i\omega t}$

۳) $\frac{\hbar\vec{k}}{m}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}e^{-i\omega t}$

۴) $\frac{\hbar\vec{k}}{m}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$

پاسخ: گزینه «۴» بنابر رابطه $\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)$، ابتدا باید $\vec{\nabla}\psi$ را بدست آوریم؛ به طور کلی گرادیان هر تابعی از مختصه $\vec{r}$ مانند $f(\vec{r})$ به صورت $\vec{\nabla}f(\vec{r})=\hat{r}\frac{df}{dr}$ است که در آن $\hat{r}$ برداریکه در راستای بردار شعاعی $\vec{r}$ است. بنابراین:

$$\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)=\vec{\nabla}[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}]=i\vec{k}(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)})\Rightarrow\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)=i\vec{k}\psi(\vec{r},t)\Rightarrow\psi^*\vec{\nabla}\psi=i\vec{k}|\psi(\vec{r},t)|^2$$

اما $|\psi(\vec{r},t)|^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$ بنابراین $\psi^*\vec{\nabla}\psi=\frac{i\vec{k}}{(2\pi\hbar)^3}$ و از این رو داریم:

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\frac{i\vec{k}}{(2\pi\hbar)^3})\Rightarrow\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{\hbar}{m}\frac{\vec{k}}{8\pi^3\hbar^3}\Rightarrow\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{\vec{k}}{8m\pi^3\hbar^2}$$

مثال۱۵: تابع موج ذره‌ای به صورت $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ است. شار مربوط به آن کدام است؟ (A و B حقیقی هستند).

۱) $\frac{\hbar k}{m}(|A|^2 + |B|^2)$　　۲) $\frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2)$　　۳) $\frac{\hbar k}{m}(|A| + |B|)$　　۴) $\frac{\hbar k}{m}(|A| - |B|)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که شار احتمال از رابطه $j = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \frac{d\psi}{dx})$ بدست می‌آید، ابتدا ψ^* و $\frac{d\psi}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \Rightarrow \begin{cases} \psi^*(x) = A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx} \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})\} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{ik(|A|^2 - A^*Be^{-2ikx} + B^*Ae^{2ikx} - |B|^2)\}$$

چنانچه A و B را حقیقی فرض کنیم، $A^*B = B^*A = AB$ و بنابراین:

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{ik(|A|^2 - |B|^2 + AB(e^{2ikx} - e^{-2ikx}))\} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{ik(|A|^2 - |B|^2 + AB(2i\sin(2kx))\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{ik(|A|^2 - |B|^2) - 2ABk\sin 2kx\} \Rightarrow j(x) = \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۶: شار وابسته به ذره‌ای که تابع موج آن $\psi(x) = u(x)e^{ikx}$ است و در آن $u(x)$ یک تابع حقیقی است، کدام است؟

۱) $+\frac{\hbar k}{m}|\psi(x)|^2$　　۲) $-\frac{\hbar k}{m}u(x)^2$　　۳) $-\frac{\hbar k}{m}|\psi(x)|^2$　　۴) $+\frac{\hbar k}{m}u(x)^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شار احتمال از رابطه $j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \frac{d\psi}{dx})$ حاصل می‌شود.

$$\psi(x) = u(x)e^{ikx} \Rightarrow \begin{cases} \psi^*(x) = u^*(x)e^{-ikx} \\ \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x)e^{ikx}) = \frac{du(x)}{dx}e^{ikx} + u(x)(ik)e^{ikx} \end{cases}$$

از این رو با جایگذاری رابطه ψ^* و $\frac{d\psi}{dx}$ در عبارت چگالی جریان احتمال داریم:

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{(u^*(x)e^{-ikx})[\frac{du(x)}{dx}e^{ikx} + iku(x)e^{ikx}]\} \Rightarrow j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} + ik|u(x)|^2\}$$

اما مطابق فرض مساله $u(x)$ حقیقی است، پس $u^*(x) = u(x)$ و از این رو داریم:

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{(u(x)\frac{du(x)}{dx} + ik|u(x)|^2\}$$

جمله اول داخل آکولاد حقیقی است و بنابراین بخش موهومی آن صفر است، جمله دوم هم موهومی محض است بنابراین:

و چون $u(x)$ حقیقی است بنابراین $|u(x)|^2 = u(x)^2$ پس خواهیم داشت:

$$j(x) = \frac{\hbar k}{m}|u(x)|^2 \Rightarrow j(x) = \frac{\hbar k}{m}u(x)^2$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۷: دیمانسیون تابع موج در فضای ۲ بعدی کدام است؟

۱) L^{-1}　　۲) L^{-2}　　۳) $L^{-\frac{1}{2}}$　　۴) L

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بنابر پایستگی احتمال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y,t)dxdy = 1$$

$P(x,y,t) = |\psi(x,y,t)|^2$ از این رو: $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,y,t)|^2 dxdy = 1$ اما از آنجا که ۱ عدد (و بدون بعد) است حاصلضرب دیمانسیون $dxdy$ در دیمانسیون $|\psi(x,y,t)|^2$ باید برابر ۱ شود؛ dx و dy هر دو از جنس طول هستند پس $[dxdy] = L^2$ بنابراین داریم:

$$[|\psi(x,y,t)|^2]L^2 = 1 \Rightarrow [|\psi(x,y,t)|^2] = L^{-2} \Rightarrow [\psi(x,y,t)] = \sqrt{L^{-2}} \Rightarrow \psi(x,y,t) \text{ دیمانسیون } = L^{-1}$$

در اینجا به مورد ذره آزاد باز می‌گردیم.

اگر مطابق روابط پلانک ـ انیشتین به ذرات مادی، خاصیت موج‌گونه و به امواج، خاصیت ذره گونه نسبت دهیم، می‌توانیم معادله شرودینگر را برای ذره آزاد به نحوی غیر دقیق بدست آوریم: روابط پلانک انیشتین: $\begin{cases} E=\hbar\omega \\ \vec{p}=\hbar\vec{k} \end{cases}$

ساده‌ترین موج، موج تختی است با فرکانس معین (ω) و عدد موج مشخص (k). انرژی یک ذره آزاد تنها شامل بخش جنبشی است $(E=\frac{p^2}{2m})$ بنابراین برای ذره آزاد:

$$Ee^{i(kx-\omega t)}=\frac{p^2}{2m}e^{i(kx-\omega t)}$$

در این رابطه $e^{i(kx-\omega t)}$ معرف موج تخت ساده است.

اما از روابط پلانک ـ انیشتین می‌توان رابطه بالا را به صورت $\hbar\omega e^{i(kx-\omega t)}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}e^{i(kx-\omega t)}$ نوشت.

با توجه به این که $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i(kx-\omega t)}=\hbar\omega e^{i(kx-\omega t)}$ و همچنین $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i(kx-\omega t)}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}e^{i(kx-\omega t)}$ بدست می‌آید:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i(kx-\omega t)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i(kx-\omega t)}$$

بنابراین موج تخت جواب معادله شرودینگر برای ذره آزاد است.

مثال ۱۸: متغیرهای کلاسیکی x^2 و p را در نظر می‌گیریم، معادل اپراتوری x^2p کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(\hat{x}^2\hat{p}+\hat{p}\hat{x}^2)$ ۲) $\frac{1}{2}(\hat{x}^2\hat{p}-\hat{p}\hat{x}^2)$ ۳) $\frac{1}{4}(\hat{x}^2\hat{p}-2\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2)$ ۴) $\frac{1}{4}(\hat{x}^2\hat{p}+2\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجا که متغیرهای x و p در مکانیک کوانتومی با هم جابجا نمی‌شوند پس $\hat{x}^2\hat{p}\neq\hat{p}\hat{x}^2$، از این رو برای نمایش عملگری x^2p باید نمایشی به کار ببریم که به ازای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ متقارن باشد، در میان گزینه‌های موجود تنها گزینه ۴ است که به لحاظ کلاسیک برابر x^2p بوده و متقارن است:

$$x^2p\rightarrow\frac{1}{4}(\hat{x}^2\hat{p}+2\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2)$$

گزینه‌های ۲و۳ نمی‌توانند درست باشند زیرا به لحاظ کلاسیکی حاصلشان صفر می‌شود و نه x^2p. گزینه ۱ هم صحیح نیست چرا که به لحاظ کلاسیکی $x^2p=xxp=xpx=pxx=px^2$، در گزینه ۱، x^2p و px^2 آمده است اما xpx ظاهر نشده است.

مثال ۱۹: جابجایی $[\hat{T},\hat{x}]$ کدام است؟ (در اینجا $\hat{T}$ عملگر انرژی جنبشی است).

۱) $-i\hbar\frac{p}{m}$ ۲) $-2i\hbar\frac{p}{m}$ ۳) $-3i\hbar\frac{p}{m}$ ۴) $i\hbar\frac{p}{m}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عملگر انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را می‌توان برحسب عملگرد تکانه خطی $(\hat{p})$ بیان کرد: $\hat{T}=\frac{\hat{p}^2}{2m}$ از این رو باید جابجایی $[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{x}]$ را محاسبه کنیم:

$$[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{x}]=\frac{1}{2m}[\hat{p}^2,x]=-\frac{1}{2m}[\hat{x},\hat{p}^2]=-\frac{1}{2m}(i\hbar)\frac{d}{dp}(p^2)=-i\hbar\frac{p}{m}$$

مثال ۲۰: حاصل جابجایی $[\hat{H},\hat{p}]$ کدام است؟ (در اینجا $\hat{H}$ عملگر هامیلتونی و برابر $\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x})$ است.)

۱) $-i\hbar\frac{dV}{dx}$ ۲) $i\hbar\frac{dV}{dx}$ ۳) $i\hbar\frac{p}{m}$ ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از خواص جابجایی‌ها و رابطه جابجایی بنیادی $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ بدست می‌آوریم:

$$[\hat{H},\hat{p}]=[\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x}),\hat{p}]=[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{p}]+[V(\hat{x}),\hat{p}]=\frac{1}{2m}[\hat{p}^2,\hat{p}]+[V(\hat{x}),\hat{p}]$$

از آنجا که هر عملگری با تابعی از خودش جابجا می‌شود، $[\hat{p}^2,\hat{p}]=0$ و همچنین از آنجا که $[f(\hat{x}),\hat{p}]=i\hbar\frac{df}{dx}$ داریم:

$$[\hat{H},\hat{P}]=i\hbar\frac{dV(x)}{dx}$$

مثال۲۱: حاصل $e^{\frac{ipa}{\hbar}}\, x\, e^{\frac{-ipa}{\hbar}}$ **کدام است؟**

۱) x ۲) $x+a$ ۳) $x-a$ ۴) $x-۲a$

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن حاصل یک رابطه عملگری، همواره می‌توان از یک تابع کمکی با توجه به شرایط مسأله استفاده کرد و پس از انجام محاسبات، آن را حذف کرد.

در اینجا ابتدا از نمایش عملگر مکان $\hat{x}$ در فضای تکانه خطی $\hat{p}$ استفاده می‌کنیم: $\hat{x}\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ بنابراین باید حاصل $e^{\frac{ipa}{\hbar}}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\, e^{\frac{-ipa}{\hbar}}$ را محاسبه کنیم؛ تابعی از pرا به عنوان تابع کمکی به کار می‌بریم $(f(p))$؛ بنابراین:

$$[e^{\frac{ipa}{\hbar}}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\, e^{\frac{-ipa}{\hbar}}]f(p)=i\hbar[e^{\frac{ipa}{\hbar}}\frac{d}{dp}](e^{\frac{-ipa}{\hbar}}f(p))=i\hbar e^{\frac{ipa}{\hbar}}\{(\frac{-ia}{\hbar})e^{\frac{-ipa}{\hbar}}f(p)+e^{\frac{-ipa}{\hbar}}(\frac{df(p)}{dp})\}$$

$$=e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,a\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}f(p)+i\hbar e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}\frac{df(p)}{dp}$$

(از آنجا که a عدد است و نه عملگر، $e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,a\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}=a\,e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}$) از این رو داریم:

$$[e^{\frac{ipa}{\hbar}}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})e^{\frac{-ipa}{\hbar}}]f(p)=af(p)+i\hbar\frac{df(p)}{dp}=(i\hbar\frac{d}{dp}+a)f(p)$$

اما $i\hbar\frac{d}{dp}=x$، بنابراین:

$$[e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,x\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}]f(p)=(x+a)f(p)$$

در اینجا تابع کمکی $f(p)$ را از دو طرف رابطه بالا حذف می‌کنیم تا بدست آید:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}\,x\,e^{\frac{-ipa}{\hbar}}=x+a$$

مثال۲۲: حاصل جابجایی $[\hat{x},\hat{L}_y]$ چیست؟ ($\hat{\vec{L}}$ عملگر تکانه زاویه‌ای مداری است).

۱) $-i\hbar z$ ۲) $i\hbar z$ ۳) p_y ۴) $i\hbar p_x$

پاسخ: گزینه «۲» مطابق تعریف، تکانه زاویه‌ای مداری یک ذره با رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ داده می‌شود؛ از این رو $L_x=yp_z-zp_y$، $L_y=zp_x-xp_z$ و $L_z=xp_y-yp_x$ بنابراین داریم:

$$[x,L_y]=[x,zp_x-xp_z]=[x,zp_x]-[x,xp_z]=[x,p_x]z-[x,x]p_z=i\hbar z-۰\Rightarrow[x,L_y]=i\hbar z$$

در خط آخر از این واقعیت سود جستیم که عملگرهای z و x با هم و عملگرهای x و p_z با هم جابجا می‌شوند زیرا به مولفه‌های متفاوتی منسوبند.

مثال۲۳: حاصل جابجایی $[x,\frac{d^۲}{dx^۲}]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۲ip}{\hbar}$ ۳) $-\frac{۲ip}{\hbar}$ ۴) $۲x$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: عملگر دیفرانسیلی $\frac{d^۲}{dx^۲}$ ما را به یاد نمایش عملگر $\hat{p}^۲$ در فضای مکان می‌اندازد:

$$p\to -i\hbar\frac{d}{dx}\Rightarrow\hat{p}^۲\to-\hbar^۲\frac{d^۲}{dx^۲}\Rightarrow\frac{d^۲}{dx^۲}\to-\frac{\hat{p}^۲}{\hbar^۲}$$

از این رو داریم:

$$[x,\frac{d^۲}{dx^۲}]=[x,-\frac{p^۲}{\hbar^۲}]=-\frac{۱}{\hbar^۲}[x,p^۲]$$

اما حاصل جابجایی $\left[x, f(p)\right]$ همواره به صورت $i\hbar\frac{df}{dp}$ است بنابراین $[x, p^2] = 2i\hbar p$ و در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow [x, \frac{d^2}{dx^2}] = -\frac{1}{\hbar^2}(2i\hbar p) \Rightarrow [x, \frac{d^2}{dx^2}] = -2\frac{ip}{\hbar}$$

روش دوم: می‌توان مطابق روش معمول محاسبه جابجایی‌ها، از یک تابع کمکی مانند $f(x)$ استفاده کرد:

$$[x, \frac{d^2}{dx^2}]f(x) = (x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2}x)f(x) = x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2}(xf)$$

$$= x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d}{dx}[\frac{d}{dx}(xf)] = x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d}{dx}(f + x\frac{df}{dx}) = x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}(x\frac{df}{dx}) = x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} - \frac{df}{dx} - x\frac{d^2 f}{dx^2} = -2\frac{df}{dx}$$

اما نمایش عملگر تکانه خطی p در فضای مکان به صورت $-i\hbar\frac{d}{dx}$ است، پس $\frac{d}{dx} \to \frac{p}{-i\hbar}$ بنابراین $-2\frac{df}{dx} = -2(\frac{p}{-i\hbar})f$ و از این رو داریم:

$$[x, \frac{d^2}{dx^2}]f(x) = \frac{2p}{i\hbar}f(x)$$

با حذف تابع کمکی f و با توجه به این که $\frac{1}{i} = -i$ بدست می‌آید:

$$[x, \frac{d^2}{dx^2}] = -2\frac{ip}{\hbar}$$

مثال۲۴: $\psi(\theta)$ را که تابعی از متغیر زاویه‌ای θ و به بازه $-\pi \le \theta \le \pi$ محدود می‌شود، در نظر بگیرید. اگر شرط $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$ برقرار باشد، آنگاه عملگر $L = -i\hbar\frac{d}{d\theta}$ همواره دارای مقدار چشمداشتی .... است.

۱) حقیقی   ۲) موهومی   ۳) مختلط   ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مقدار چشمداشتی عملگر L نسبت به حالت $\psi(\theta)$ با توجه به بازه $-\pi \le \theta \le \pi$ چنین است:

$$\langle L\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\psi^*(\theta)(-i\hbar\frac{d}{d\theta})\psi(\theta)d\theta = -i\hbar\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*(\theta)\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}d\theta$$

انتگرالده را می‌توان با استفاده از رابطه جزء به جزء محاسبه کرد:

$$\frac{d}{d\theta}(\psi^*(\theta)\psi(\theta)) = \frac{d\psi^*(\theta)}{d\theta}\psi(\theta) + \psi^*(\theta)\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \psi^*(\theta)\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\psi^*(\theta)\psi(\theta)) - \frac{d\psi^*(\theta)}{d\theta}\psi(\theta)$$

بنابراین داریم:

$$\langle L\rangle = -i\hbar\int_{-\pi}^{\pi}\{\frac{d}{d\theta}(\psi^*(\theta)\psi(\theta)) - \frac{d\psi^*(\theta)}{d\theta}\psi(\theta)\}d\theta = -i\hbar\int_{-\pi}^{\pi}d(\psi^*(\theta)\psi(\theta)) + i\hbar\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi^*(\theta)}{d\theta}\psi(\theta)d\theta$$

اما $\psi^*(\theta)\psi(\theta) = |\psi(\theta)|^2$، در نتیجه:

$$\langle L\rangle = -i\hbar|\psi(\theta)|^2\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}(i\hbar\frac{d\psi^*}{d\theta})\psi(\theta)d\theta$$

بنابر فرض تست $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ پس $|\psi(\theta)|^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ و از این رو:

$$\langle L\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(i\hbar\frac{d\psi^*}{d\theta})\psi(\theta)d\theta \quad (I)$$

اما از طرفی می‌توان همیوغ مختلط $\langle L\rangle$ را نیز بدست آورد:

$$\langle L\rangle^* = [\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\psi^*(\theta)(-i\hbar\frac{d\psi(\theta)}{d\theta})]^* \Rightarrow \langle L\rangle^* = \int_{-\pi}^{\pi}d\theta[\psi^*(\theta)(-i\hbar\frac{d}{d\theta}\psi(\theta))]^*$$

$$\Rightarrow \langle L\rangle^* = \int_{-\pi}^{\pi}d\theta(-i\hbar\frac{d\psi(\theta)}{d\theta})^*(\psi^*(\theta))^* \quad \Rightarrow \langle L\rangle^* = \int_{-\pi}^{\pi}d\theta(+i\hbar\frac{d\psi^*(\theta)}{d\theta})\psi(\theta) \quad (II)$$

از مقایسه روابط (I) و (II) بلافاصله معلوم می‌شود که $\langle L\rangle = \langle L\rangle^*$ از این رو $< L >$ حقیقی است.

مثال۲۵: اگر عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به ترتیب به صورت x^3 و $x\dfrac{d}{dx}$ تعریف شوند حاصل $[\hat{A},\hat{B}]$ چیست؟

۱) $3\hat{A}$ ۲) $-2\hat{B}$ ۳) $3\hat{B}$ ۴) $-3\hat{A}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجا که عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ برحسب پارامتر مکان بیان شده‌اند، کافی است از تابعی برحسب x به عنوان تابع کمکی استفاده کنیم:

$$[\hat{A},\hat{B}]f(x)=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})f(x)=(x^3(x\frac{d}{dx})-(x\frac{d}{dx})x^3)f(x)$$

$$=x^3(x\frac{d}{dx})f(x)-(x\frac{d}{dx})(x^3f(x))=x^4\frac{df(x)}{dx}-x\{(\frac{d}{dx}x^3)f(x)+x^3\frac{df(x)}{dx}\}$$

$$=x^4\frac{df(x)}{dx}-x(3x^2)f(x)-x^4\frac{df(x)}{dx}=-3x^3f(x)$$

بنابراین با حذف تابع کمکی $f(x)$ می‌رسیم به $[\hat{A},\hat{B}]=-3x^3$ اما از آنجا که $x^3=\hat{A}$ از این رو $[\hat{A},\hat{B}]=-3\hat{A}$

مثال۲۶: اگر تابع موج $\psi(x)$ به صورت تابعی دوره‌ای باشد، به عبارتی $\psi(x)=\psi(x+L)$ و x در بازه $0\le x\le L$ محدود باشد، در این صورت مقدار چشمداشتی تکانه خطی همواره .... است.

۱) صفر ۲) حقیقی ۳) مختلط ۴) موهومی

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای تابع موج $\psi(x)$، مقدار چشمداشتی عملگر تکانه خطی $\hat{p}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle p\rangle=\int_0^L dx\psi^*(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x)=-i\hbar\int_0^L dx\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}$$

انتگرال‌ده را می‌توان با روش جزء به جزء به صورت زیر در آورد:

$$\frac{d}{dx}(\psi^*(x)\psi(x))=\frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)+\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\ ;\ \psi^*(x)\psi(x)=|\psi(x)|^2\Rightarrow\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}=\frac{d}{dx}|\psi(x)|^2-\frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)$$

در نتیجه بدست می‌آید:

$$\langle p\rangle=-i\hbar\int_0^L d|\psi(x)|^2+i\hbar\int_0^L dx(\frac{d\psi^*(x)}{dx})\psi(x)=-i\hbar|\psi(x)|^2\Big|_0^L+\int_0^L dx[i\hbar\frac{d\psi^*(x)}{dx}]\psi(x)$$

جمله اول رابطه بالا بنابر فرض مسأله صفر می‌شود: $\psi(x)=\psi(x+L)\Rightarrow\psi(0)=\psi(L)\Rightarrow|\psi(x)|^2\Big|_0^L=0$

بنابراین داریم:

$$\langle p\rangle=\int_0^L dx[i\hbar\frac{d\psi^*(x)}{dx}]\psi(x)\quad (I)$$

از طرفی می‌توان همیوغ مختلط $\langle p\rangle$ را از روی تعریف آن بدست آورد:

$$\langle p\rangle=\int_0^L\psi^*(x)(-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx})dx\Rightarrow\langle p\rangle^*=\int_0^L\{\psi^*(x)(-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx})\}^*dx$$

$$\Rightarrow\langle p\rangle^*=\int_0^L\{(-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx})^*[\psi^*(x)]^*dx\Rightarrow\langle p\rangle^*=\int_0^L dx(i\hbar\frac{d\psi^*(x)}{dx})\psi(x)\quad (II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) بلافاصله دیده می‌شود که $\langle p\rangle=\langle p\rangle^*$؛ به عبارت دیگر مقدار چشمداشتی تکانه خطی حقیقی است.

مثال۲۷: فرض کنید ثابت V_0 را به انرژی پتانسیل یک سیستم اضافه کنیم. کدام عبارت درست است؟

۱) این کار نه در مکانیک کلاسیک و نه در مکانیک کوانتومی چیزی را تغییر نمی‌دهد.

۲) این کار در مکانیک کلاسیک چیزی را تغییر نمی‌دهد اما در مکانیک کوانتومی تابع موج یک عامل فازی وابسته به زمان به خود می‌گیرد.

۳) این کار در مکانیک کوانتومی چیزی را تغییر نمی‌دهد اما در مکانیک کلاسیک باعث افزایش نیروی وارد بر جسم می‌شود.

۴) این کار در مکانیک کلاسیک باعث تغییر نیروی وارد بر ذره می‌شود و در مکانیک کوانتومی مجذور قدر مطلق تابع موج را تغییر می‌دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر به سیستمی کلاسیکی انرژی پتانسیل ثابت V_0 را به انرژی پتانسیل (V) اضافه کنیم نیروی وارد بر ذره تغییری نمی‌کند، زیرا نیرو در مکانیک کلاسیک به صورت گرادیان انرژی پتانسیل تعریف می‌شود: $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$، بنابراین اگر V به $V+V_0$ تغییر کند، در این صورت داریم:

$$F\rightarrow-\vec{\nabla}(V+V_0)=-\vec{\nabla}V-\vec{\nabla}V_0=-\vec{\nabla}V$$

(گرادیان هر ثابتی صفر است) از این رو نیروی وارد بر ذره تغییر نمی‌کند، پس افزودن یک ثابت به انرژی پتانسیل چیزی را در مکانیک کلاسیک عوض نمی‌کند. از این‌رو گزینه‌های ۳و۴ نادرست هستند.

اما در مکانیک کوانتومی معادله شرودینگر حاکم بر رفتار سامانه‌های کوانتومی است: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$

اگر به انرژی سامانه مقدار ثابت $V_\circ$ را بیفزائیم، $H \to H + V_\circ$ در این صورت رابطه بالا به صورت $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (H+V_\circ)\psi$ در می‌آید. این معادله را برحسب ψ حل می‌کنیم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (H+V_\circ)\psi \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\psi} = \frac{(H+V_\circ)}{i\hbar}\partial t \Rightarrow \mathrm{Ln}\psi = (\frac{H+V_\circ}{i\hbar})t + \mathrm{LnC} \Rightarrow \mathrm{Ln}(\frac{\psi}{C}) = \frac{H+V_\circ}{i\hbar}t$$

$$\Rightarrow \psi = Ce^{\frac{H+V_\circ}{i\hbar}t} \Rightarrow \psi = Ce^{-\frac{iHt}{\hbar}}e^{-\frac{iV_\circ t}{\hbar}}$$

همانطور که می‌بینیم، تابع موج در اثر وجود $V_\circ$ یک عامل فاز وابسته به زمان به خود می‌گیرد: $e^{-\frac{iV_\circ t}{\hbar}}$

مثال۲۸: عدم قطعیت در مؤلفه مکان تابع موج با چگالی احتمال گاؤسی $P(x) = |\psi(x)|^۲$ که در آن $P(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^۲}$ است، چیست؟

۱) $\frac{۱}{\lambda}$ ۲) $\frac{۱}{۲\lambda}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{\lambda}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲\lambda}}$

پاسخ: گزینه «۴» پیش از هرکاری باید ابتدا توزیع را بهنجار کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^۲\,dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\lambda(x-a)^۲}dx = ۱ \Rightarrow A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(x-a)^۲}dx = ۱$$

همانگونه که می‌دانیم حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^۲}dx$ برابر با $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ است. بنابراین بدست می‌آید:

$$A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = ۱ \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \Rightarrow P(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x-a)^۲}$$

برای محاسبه عدم قطعیت در مکان (Δx) باید مقادیر چشمداشتی x و $x^۲$ را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \sqrt{<x^۲> - <x>^۲} \qquad (I)$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}x|\psi(x)|^۲\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x-a)^۲}dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\lambda(x-a)^۲}dx$$

با تغییر متغیر $x \to t+a$ انتگرال بالا به صورت روبه‌رو در می‌آید: $\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+t)e^{-\lambda t^۲}dt = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\{a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda t^۲}dt + \int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\lambda t^۲}dt\}$

حاصل انتگرال اول $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ و حاصل انتگرال دوم صفر است. علت صفر شدن انتگرال دوم این است که انتگرالده تابع فردی از متغیر انتگرال‌گیری است و بازهٔ انتگرال‌گیری متقارن است. بنابراین مقدار چشمداشتی x بدست می‌آید: $\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\{a\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \circ\} \Rightarrow \boxed{<x>=a} \qquad (II)$

حال به سراغ محاسبه مقدار چشمداشتی $x^۲$ می‌رویم:

$$\langle x^۲\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}x^۲|\psi(x)|^۲\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x^۲\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x-a)^۲}dx$$

$$\Rightarrow \langle x^۲\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^۲e^{-\lambda(x-a)^۲}dx \xrightarrow[x-a=t]{\text{تغییر متغیر}} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+t)^۲e^{-\lambda t^۲}dt$$

$$\Rightarrow \langle x^۲\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a^۲+t^۲+۲at)e^{-\lambda t^۲}dt = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\{a^۲\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda t^۲}dt + \int_{-\infty}^{+\infty}t^۲e^{-\lambda t^۲}dt + ۲a\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\lambda t^۲}dt\}$$

حاصل انتگرال اول $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ و انتگرال سوم مشابه استدلال قبل صفر است. بنابراین آنچه می‌ماند، محاسبه انتگرال دوم است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t^2}dt = -\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2}dt = -\frac{d}{d\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\{a^2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + 2a(0)\} \Rightarrow \boxed{\langle x^2\rangle = a^2 + \frac{1}{2\lambda}} \qquad (III)$$

با جایگذاری (II) و (III) در (I) بدست می‌آید:

$$\Delta x = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2\lambda} - a^2} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}}$$

مثال۲۹: کدام یک از گزینه‌های زیر قضیه اهرنفست را به درستی بیان می‌کند؟

۱) $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\langle V\rangle$ ۲) $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle$ ۳) $\langle\frac{dp}{dt}\rangle = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle$ ۴) $\langle\frac{dp}{dt}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x}\langle V\rangle$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در آینده، مشابه این تست را با استفاده از معادله حاکم بر تغییرات زمانی مقدار چشمداشتی متغیرها حل می‌کنیم، اما اکنون می‌خواهیم مسأله را از خود معادله شرودینگر و تعریف مقادیر چشمداشتی حل کنیم:

بنابر معادله شرودینگر داریم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

از طرفین معادله شرودینگر نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi) \Rightarrow i\hbar\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}(V\psi)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial V}{\partial x}\psi + V\frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x}\psi = -i\hbar\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + V\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

طرفین عبارت بالا را در ψ^* ضرب می‌کنیم و بر روی x از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(-\frac{\partial V}{\partial x})\psi dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}dx - \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

اما طرف چپ رابطه بالا همان مقدار چشمداشتی $-\frac{\partial V}{\partial x}$ است، پس:

$$\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2})dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial t})dx$$

$$\Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}) - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial\psi}{\partial t})dx$$

$$\Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2})dx + \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx$$

در سطر آخر از نمایش عملگر p در فضای مکان $(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})$ بهره جستیم.

$$\Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx$$

اما تابع موج در $\pm\infty$ صفر می‌شود. پس جمله اول رابطه بالا از بین می‌رود و داریم:

$$\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = +\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx$$

جمله اول این رابطه نیز صفر می‌شود (مشتق ψ در $\pm\infty$ صفر است) ؛

$$\Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

اما از طرفی داریم:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - V\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - V^*\psi^*$$

$$\Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - V^*\psi^*\}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi dx - \int_{-\infty}^{+\infty}V^*\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\Delta t}dx;$$

اما در صورتی که پتانسیل حقیقی باشد ($V = V^*$) جملات دوم و سوم رابطه بالا یکدیگر را حذف می‌کنند و آنچه می‌ماند عبارت است از:

$$\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\hat{p}\psi dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\hat{p}\psi) - \psi^*\frac{\partial\hat{p}}{\partial t}\psi\}dx$$

اما جمله دوم داخل انتگرال صفر می‌شود، زیرا $\hat{p}$ (تکانه خطی) وابستگی صریح به زمان ندارد، بنابراین:

$$\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\hat{p}\psi)dx \Rightarrow \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{p}\psi dx \Rightarrow \boxed{\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle}$$

آزمون فصل دوم

۱ـ احتمال حضور ذره در بازه $\frac{-a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ با استفاده از بسته موج تعریف شده در زیر کدام است؟ ($\varphi(k)$ تابع موج ذره در فضای k است.)

$$\phi(k) = [\frac{a^2}{2\pi}]^{\frac{1}{4}} \exp[-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2]$$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۲ـ یک باریکه الکترونی را با انرژی جنبشی $100Mev$ و اندازه بسته موج اولیه $1mm$ شلیک می‌کنیم، اندازه آن بعد از پیمودن 10^4 km چقدر است؟

۱) $\Delta x = 0/0153m$ ۲) $\Delta x = 0/153m$ ۳) $\Delta x = 1/53m$ ۴) $\Delta x = 15/3m$

۳ـ بسته موج به صورت زیر تعریف شده است. پهنای $f(x)$ معادل با کدام گزینه است؟

$$g(k)=\begin{cases} 0 & |k| > \frac{R}{2} \\ N & |k| \le \frac{R}{2} \end{cases}$$

۱) 2π ۲) $\frac{2\pi}{R}$ ۳) 4π ۴) $\frac{4\pi}{R}$

۴ـ سرعت فاز و سرعت گروه برای بسته موج متناظر با ذره نسبیتی به ترتیب برابر است با:

۱) v, c ۲) $c, \frac{c^2}{v}$ ۳) $\frac{v^2}{c}, v$ ۴) $v, \frac{c^2}{v}$

۵ـ تابع موج به صورت $\psi(x) = (\frac{\pi}{\alpha})^{\frac{-1}{4}} e^{-\frac{ax^2}{2}}$ است. عدم قطعیت در مکان برای تابع مذکور کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$ ۲) $\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ۴) $\frac{1}{2\alpha}$

۶ـ نور تکفامی به طول موج 6000Å از یک بستاور سریع که به مدت 10^{-9} s باز است، عبور می‌کند، پهن شدگی طول موج نور عبور کرده چقدر است؟

۱) $2\times10^{-4}\text{Å}$ ۲) $2\times10^{-3}\text{Å}$ ۳) $2\times10^{-2}\text{Å}$ ۴) $2\times10^{-1}\text{Å}$

۷ـ فرکانس زاویه‌ای یک موج سطحی در مایع به صورت $\omega = \sqrt{gk + \frac{Tk^3}{p}}$ است که در آن k عدد موج، g شتاب گرانشی و p چگالی مایع و همچنین T تنش سطحی است. سرعت فاز و سرعت گروه برای طول موج‌های خیلی کوتاه به ترتیب برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{Tk}{p}}, \sqrt{\frac{g}{k}}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \sqrt{\frac{Tk}{p}}$ ۳) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \sqrt{\frac{g}{k}}$ ۴) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{Tk}{p}}, \sqrt{\frac{Tk}{p}}$

۸ـ در صورتی که $g(k) = \frac{N}{k^2 + \alpha^2}$ باشد، Δk کدام است؟

۱) صفر ۲) $2\alpha\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ۳) $\frac{1}{\alpha}$ ۴) $\frac{1}{2\alpha}$

۹ـ در رابطه عدم قطعیت هانیزنبرگ $\Delta x \Delta p_x^2 \gtrsim \ldots$ است کدام گزینه برای جای خالی مناسب است؟

۱) $\frac{\hbar}{2}$ ۲) $\frac{\hbar}{2}|\langle p^2\rangle|$ ۳) $\frac{\hbar}{2}|\langle p\rangle|$ ۴) $\frac{\hbar}{4}|\langle p\rangle|^2$

۱۰ـ ذره‌ای با تابع موج $\psi(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ داده شده است. چگالی احتمال آن به ازای چه مقداری از x، بیشینه است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ ۳) $\frac{1}{2\alpha}$ ۴) 2α

۱۱ـ جریان احتمال در مورد ذره‌ای که با تابع موج $\psi(x)=Ae^{\frac{ix^2}{2}}$ توصیف می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{\hbar}{m}|A|^2$ ۲) $\frac{\hbar}{m}x|A|^2$ ۳) $\frac{\hbar}{m}x^2|A|^2$ ۴) $\frac{\hbar}{2m}x|A|^2$

۱۲ـ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) سرعت فاز امواج مادی در خلاء، همواره بزرگتر از سرعت نور است

۲) سرعت گروه در محیط‌های مختلف می‌تواند بزرگتر، کوچکتر یا حتی مساوی با سرعت فاز باشد

۳) اگر محیط پاشنده نباشد، سرعت فاز برابر سرعت گروه است

۴) اگر محیط پاشنده باشد، سرعت فاز همواره از سرعت گروه بزرگتر است.

۱۳ـ تبدیل فوریه تابع $\phi(k)=\begin{cases}A(a-|k|) & |k|\le a\\ 0 & |k|>a\end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{x^2}{4}\sin^2(\frac{ax}{2})$ ۲) $\frac{4}{x^2}\cos^2(\frac{ax}{2})$ ۳) $\frac{x^2}{4}\cos^2(\frac{ax}{2})$ ۴) $\frac{4}{x^2}\sin^2(\frac{ax}{2})$

۱۴ـ اگر بسته موج، نمایشگر جسمی به جرم $1gr$ و به اندازه $1cm$ باشد، تغییر نسبی موج در اندازه بسته موج در ۱ ثانیه چقدر است؟ (ذره آزادی را در نظر بگیرید که در آن $\omega=\frac{\hbar k^2}{2m}$ باشد)

۱) 10^{-53} ۲) 10^{-52} ۳) 10^{-51} ۴) 10^{-50}

۱۵ـ ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $v(x)=gx^4$ قرار دارد، انرژی حالت پایه تقریباً برابر است با:

۱) $g(\frac{\hbar^4 g}{2m^2})^{\frac{1}{3}}$ ۲) $(\frac{\hbar^4 g}{2m^2})^{\frac{1}{3}}$ ۳) $(\frac{\hbar^2}{4mg})^{\frac{1}{6}}$ ۴) $\frac{3}{2}(\frac{\hbar^4 g}{2m^2})^{\frac{1}{3}}$

۱۶ـ عدم قطعیت در مکان برای نوترونی که با سرعت $5\times10^6\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند، برابر است با:

۱) $6/4\times10^{-15}m$ ۲) $6/4\times10^{-12}m$ ۳) $12/8\times10^{-15}m$ ۴) $12/8\times10^{-12}m$

۱۷ـ سرعت گروه و سرعت فاز برای ذره آزاد به ترتیب برابر است با:

۱) $\frac{p}{m},\frac{p}{m}$ ۲) $\frac{p}{2m},\frac{p}{m}$ ۳) $\frac{p}{m},\frac{p}{2m}$ ۴) $\frac{p}{2m},\frac{p}{2m}$

۱۸ـ با در نظر گرفتن تابع $\phi(k)=\begin{cases}A(a-|k|) & |k|<a\\ 0 & |k|>a\end{cases}$ ، Δx برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2a}$ ۲) $\frac{\pi}{a}$ ۳) $\frac{\hbar}{2a}$ ۴) $\frac{\hbar}{a}$

۱۹ـ شعاع اتم هیدروژن در حالت پایه برابر است با:

۱) $5/3nm$ ۲) $5/3\mathring{A}$ ۳) $4/6nm$ ۴) $4/6\mathring{A}$

۲۰ـ اندازه بسته موج نهایی برای الکترون آزاد با انرژی $25ev$ با اندازه بسته موج اولیه $10^{-6}m$ بعد از طی مسافت $100m$ برابر است با:

۱) $2\times10^{-5}m$ ۲) $2\times10^{3}m$ ۳) $2\times10^{-3}m$ ۴) $2\times10^{-6}m$

اطلاعات مورد نیاز	$\hbar=6/626\times10^{-34}\ Js=4/14\times10^{-15}\ ev.s$ $m_e=9/1\times10^{-31}\ kg$

فصل سوم

« معادله شرودینگر مستقل از زمان »

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: ویژه مقادیر عملگر $\hat{L}$ که برای آن $\hat{L}f(x) = -i\hbar\frac{df(x)}{dx} - \beta x f(x)$ کدام است؟ (فرض کنید $-a \le x \le a$ و شرط مرزی $f(a) = f(-a)$ برقرار است)

۱) $\lambda = \pm\frac{n\pi\hbar}{a}$ ۲) $\lambda = \pm\frac{n\pi}{a}$ ۳) $\lambda = \pm\frac{n\pi\hbar}{2a}$ ۴) $\lambda = \pm\frac{n\pi}{2a}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید معادله عملگری $\hat{L}f(x) = \lambda f(x)$ را حل کنیم:

$$\hat{L}f(x) = \lambda f(x) \Rightarrow -i\hbar\frac{df(x)}{dx} - \beta x f(x) = \lambda f(x) \Rightarrow -i\hbar\frac{df(x)}{dx} = (\lambda + \beta x)f(x) \Rightarrow \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{(\lambda+\beta x)}{-i\hbar}dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}f(x) = \frac{i}{\hbar}(\lambda x + \frac{\beta x^2}{2}) + \mathrm{Ln}C \Rightarrow \mathrm{Ln}(\frac{f(x)}{C}) = \frac{i}{\hbar}(\lambda x + \frac{\beta}{2}x^2)$$

بنابراین ویژه تابع $f(x)$ بدست می‌آید:

$$f(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\lambda x + \frac{\beta}{2}x^2)}$$

حال از شرط مرزی $f(a) = f(-a)$ برای یافتن ویژه مقادیر بهره می‌بریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\lambda a + \frac{\beta}{2}a^2)} \\ f(-a) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(-\lambda a + \frac{\beta}{2}a^2)} \end{array}\right\} \xrightarrow{f(a)=f(-a)} e^{\frac{i\lambda a}{\hbar}} = e^{\frac{-i\lambda a}{\hbar}} \Rightarrow e^{\frac{2i\lambda a}{\hbar}} = 1$$

اما مطابق فرمول اویلر $(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$ داریم $e^{2i\pi n} = 1$ که در آن n عددی صحیح است. بنابراین داریم:

$$2in\pi = \frac{2i\lambda a}{\hbar} \Rightarrow n\pi\hbar = \lambda a \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

مثال۲: اگر $\hat{L}\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x')$ و داشته باشیم $\hat{L}\psi(x) = \lambda\psi(x)$، کدام گزینه در مورد ویژه توابع $\psi(x)$ درست است؟

۱) $\psi(x) \propto e^{\frac{x^2}{\lambda}}$ ۲) $\psi(x) \propto e^{-\frac{x^2}{\lambda}}$ ۳) $\psi(x) \propto e^{\frac{x^2}{2\lambda}}$ ۴) $\psi(x) \propto e^{\frac{2x^2}{\lambda}}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l} \hat{L}\psi(x) = \lambda\psi(x) \\ \hat{L}\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x') \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x') = \lambda\psi(x)$$

از طرفین رابطه ویژه مقداری بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x') = \frac{d}{dx}(\lambda\psi(x)) \Rightarrow \psi(x)x = \lambda\frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{\lambda}xdx \Rightarrow \mathrm{Ln}\psi(x) = \frac{x^2}{2\lambda} + \mathrm{Ln}C \Rightarrow \mathrm{Ln}(\frac{\psi(x)}{C}) = \frac{x^2}{2\lambda} \Rightarrow \psi(x) = Ce^{\frac{x^2}{2\lambda}} \Rightarrow \psi(x) \propto e^{\frac{x^2}{2\lambda}}$$

مثال۳: کدامیک از عملگرهای زیر خطی است؟

۱) $\hat{O}f(x) = f(x) + x^2$ ۲) $\hat{O}f(x) = [f(x)]^2$ ۳) $\hat{O}f(x) = e^x$ ۴) $\hat{O}f(x) = \frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$

پاسخ: گزینه «۴» شرط خطی بودن عملگر $(\hat{O}(af(x) + bg(x)) = a\hat{O}f(x) + b\hat{O}g(x))$ را روی تک تک گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه ۱:

$$\hat{O}(af(x)+bg(x)) = (af(x)+bg(x)) + x^2$$
$$a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x) = a(f(x)+x^2)+b(g(x)+x^2) = af(x)+bg(x)+(a+b)x^2$$
$$\Rightarrow \hat{O}(af(x)+bg(x)) \neq a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x)$$

پس گزینه ۱ درست نیست.

بررسی گزینه۲:

$$\hat{O}(af(x)+bg(x)) = (af(x)+bg(x))^2 = a^2f^2(x)+b^2g^2(x)+2abf(x)g(x)$$
$$a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x) = a(f(x))^2+b(g(x))^2 = af^2(x)+bg^2(x) \Rightarrow \hat{O}(af(x)+bg(x)) \neq a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x)$$

پس گزینه ۲ هم درست نیست.

بررسی گزینه۳:

$$\hat{O}(af(x)+bg(x)) = e^{(af(x)+bg(x))} = e^{af(x)}e^{bg(x)}$$
$$a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x) = ae^{f(x)}+be^{g(x)} \Rightarrow \hat{O}(af(x)+bg(x)) \neq a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x)$$

پس گزینه ۳ هم جواب درست نیست.

بررسی گزینه ۴:

$$\hat{O}(af(x)+bg(x)) = \frac{d}{dx}(af(x)+bg(x)) - 2(af(x)+bg(x))$$
$$= a\frac{df(x)}{dx}+b\frac{dg(x)}{dx}-2af(x)-2bg(x) = a(\frac{df(x)}{dx}-2f(x))+b(\frac{dg(x)}{dx}-2g(x)) = a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x)$$

مثال۴: کدام گزینه در مورد کمینه انرژی (جنبشی) درست است؟

۱) در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی کمینه انرژی یک سیستم فیزیکی صفر است.

۲) امکان ندارد در مکانیک کلاسیک و در مکانیک کوانتومی انرژی یک سامانه فیزیکی صفر شود.

۳) برخلاف مکانیک کلاسیک، در مکانیک کوانتومی کمینه انرژی غیر صفر برای سامانه‌های فیزیکی می‌توان متصور بود.

۴) هیچکدام از موارد بالا درست نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مکانیک کوانتومی حالتی با کمترین انرژی (انرژی غیر صفر) وجود دارد که به حالت پایه موسوم است.

مثال۵: در مسأله ذره در چاه پتانسیل نامتناهی، اگر عرض چاه دو برابر شود، انرژی حالت پایه ذره چگونه تغییر می‌کند؟

۱) دو برابر می‌شود.　　۲) تغییر نمی‌کند.

۳) نصف می‌شود.　　۴) به یک چهارم مقدار خود کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» انرژی حالت پایه ذره‌ای در چاه پتانسیل نامتناهی به پهنای a از رابطه $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ بدست می‌آید اگر عرض چاه دو برابر شود، $a' = 2a$ در آن صورت داریم:

$$E_1' = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma'^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{1}{4}E_1$$

بنابراین انرژی حالت پایه، یک چهارم می‌شود.

مثال۶: کدام گزینه در مورد مقدار چشمداشتی تکانه خطی p برای ذره در جعبه نامتناهی درست است؟

۱) صفر است.　　۲) موهومی است.　　۳) حقیقی و غیر صفر است.　　۴) مختلط است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مقدار چشمداشتی عملگر تکانه خطی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle\hat{p}\rangle = \int dx\psi^*(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x) = -i\hbar\int dx\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}$$

برای ذره در جعبه نامتناهی ویژه توابع از رابطه $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ بدست می‌آیند. از رابطه بالا مشخص است $\langle\hat{p}\rangle$ مقداری موهومی خواهد داشت؛ اما از آنجا که مقادیر چشمداشتی عملگرهای هرمیتی (از جمله تکانه خطی) باید حقیقی باشند در این صورت $\langle p\rangle$ نمی‌تواند برابر $\langle p\rangle^*$ باشد مگر آن که $\langle p\rangle = 0$.

مثال ۷: عدم قطعیت در تکانه خطی ذره در جعبه نامتناهی به عرض a (در یک بعد) در حالت پایه کدام است؟

۱) $\frac{2\pi\hbar}{a}$　　۲) $\frac{\pi\hbar}{a}$　　۳) $\frac{\pi\hbar}{2a}$　　۴) $\frac{\pi\hbar}{4a}$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجا که ویژه مقادیر انرژی (جنبشی) ذره در جعبه نامتناهی از رابطه $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ بدست می‌آیند، برای حالت پایه $n=1$ و از این رو $E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$، از طرفی می‌توان این انرژی را برحسب تکانه خطی p بیان کرد:

$$E=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow\langle p^2\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\quad(I)$$

از طرف دیگر مقدار چشمداشتی تکانه خطی، $\langle p\rangle$ برای ذره در جعبه صفر است:

$$\langle p\rangle=0\quad(II)$$

با توجه به تعریف عدم قطعیت تکانه خطی، Δp و استفاده از روابط (I) و (II) بدست می‌آید:

$$\Delta p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}\Rightarrow\Delta p=\sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}-0}\Rightarrow\Delta p=\frac{\pi\hbar}{a}$$

مثال ۸: کدام عبارت در مورد انرژی حالت‌های مانا درست است؟

۱) حالت‌های مانا، حالت‌هایی با انرژی کاملاً معین هستند.

۲) حالت‌های مانا، حالت‌هایی با انرژی غیر دقیق هستند، یعنی عدم قطعیت در انرژی حالت‌های مانا وجود دارد.

۳) بسته به شرایط مسأله انرژی حالت مانا می‌تواند معین یا غیر دقیق باشد.

۴) هیچ کدام از عبارت‌های بالا درست نیست.

پاسخ: گزینه «۱» به طور کلی وجود حالت‌های مانا از عدم وابستگی (انرژی) پتانسیل بـه زمـان حاصـل مـی‌آیـد. در ایـن صـورت اسـت کـه معادلـه شرودینگر قابل جداسازی است و انرژی E ثابت حرکت و کاملاً معین بدست می‌آید.

مثال ۹: بـرای ذره‌ای محبـوس در پتانسـیلی بـه صـورت $V(x)=\begin{cases}0\ ;0<x<a\\ \infty\ ;x>a,x<0\end{cases}$، تـابع مـوج اولیـه بـه صـورت $\psi(x,0)=\frac{2}{\sqrt{5a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{2}{\sqrt{5a}}\sin\frac{2\pi x}{a}+\sqrt{\frac{2}{5a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$ است، احتمال یافتن ذره در ویژه حالتی با انرژی $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{4}{5}$　　۳) $\frac{2}{5}$　　۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» ویژه حالت‌های ذره در جعبه‌ای نامتناهی به طول a عبارتند از $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$؛ از آنجا که این ویژه توابع تشـکیل یـک مجموعه کامل می‌دهند هر تابعی (از جمله $\psi(x,0)$) برحسب آن‌ها قابل بسط است: $f(x)=\sum A_n\psi_n(x)$؛ ویژه مقادیر انرژی ذره در جعبه از رابطـه $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ بدست می‌آید و احتمال یافتن سیستم در ویژه حالت nام عبارتست از $|A_n|^2$.

بنابراین ابتدا باید تابع $\psi(x,0)$ را برحسب ویژه توابع $\psi_n(x)$ بسط دهیم:

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{(1)\pi x}{a}+\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}\Rightarrow\psi(x,0)=\sqrt{\frac{2}{5}}\psi_1(x)+\sqrt{\frac{2}{5}}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}\psi_3(x)$$

البته با توجه به اینکه تابع موج کل $\psi(x,0)$ نرمال به یک است می‌توانیم محاسبات را به صورت زیر ادامه دهیم. اگر نرمال نبود باید ابتدا تابع موج را نرمال می‌کردیم.

می‌خواهیم احتمال یافتن حالتی با انرژی $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ را بدست آوریم، پس باید بدانیم این حالت مربوط به کدام تراز انرژی است:

$$E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}\Rightarrow\frac{n^2}{2}=2\Rightarrow n^2=4\Rightarrow n=2$$

پس احتمال مورد نظر معادل مجذور قدر مطلق ضریب ویژه حالت منتسب به $n=2$ یعنی ضریب $\psi_2(x)$ است. در نتیجه:

$$P_2=|A_2|^2=|\sqrt{\frac{2}{5}}|^2\Rightarrow P_2=\frac{2}{5}$$

مثال۱۰: مقدار چشمداشتی انرژی برای ذره‌ای که با تابع موج بهنجار $\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{3a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{2}{\sqrt{3a}}\sin\frac{4\pi x}{a}$ توصیف می‌شود، کدام است؟ (E_1 انرژی حالت پایه ذره در جعبه نامتناهی به عرض a و در یک بعد است).

۱) $9E_1$ ۲) $10E_1$ ۳) $11E_1$ ۴) $12E_1$

پاسخ: گزینه «۳» ویژه مقادیر انرژی مربوط به حالت nام ذره محبوس در جعبه نامتناهی به عرض a از رابطه $E_n=n^2E_1$ بدست می‌آید که در آن $E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ است. ویژه توابع هم از رابطه $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ بدست می‌آیند، به این ترتیب $\psi(x)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{(1)\pi x}{a}+\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{4\pi x}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1(x)+\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_4(x)$$

از طرفی مقدار چشمداشتی هامیلتونی (انرژی) از رابطه $\langle H\rangle=\sum_n E_n|A_n|^2$ بدست می‌آید که در آن A_n ها ضرایب ویژه حالت‌ها در بسط $\psi(x)$ هستند. از روی شکل $\psi(x)$ فوراً در می‌یابیم که $A_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $A_4=\sqrt{\frac{2}{3}}$ و سایر A_n ها صفر است؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l}\langle H\rangle=E_1|A_1|^2+E_4|A_4|^2\\ E_4=(4)^2E_1=16E_1\end{array}\right\}\Rightarrow\langle H\rangle=E_1|A_1|^2+16E_1|A_4|^2=E_1(|A_1|^2+16|A_4|^2)$$

با جایگذاری مقادیر A_4 و A_1 در رابطه بالا داریم:

$$\langle H\rangle=E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+16\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right)=E_1\left(\frac{1}{3}+16\left(\frac{2}{3}\right)\right)=E_1\left(\frac{33}{3}\right)\Rightarrow\langle H\rangle=11E_1$$

مثال۱۱: سیستمی در اولین حالت برانگیخته مربوط به ذره در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی است؛ احتمال اینکه از اندازه‌گیری انرژی، مقدار $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ بدست آید چقدر است؟(a عرض چاه است)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» از آنجا که سیستم در یکی از ویژه حالات انرژی مربوط به ذره در چاه پتانسیل نامتناهی است، عمل اندازه‌گیری انرژی حالت سیستم را تغییر نمی‌دهد به عبارت دیگر انرژی سیستم پس از اندازه‌گیری ثابت است. اما انرژی مربوط به اولین حالت برانگیخته **($n=2$)** ذره در جعبه برابر با $E_2=(2)^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ و به عبارتی $E_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ است از این رو احتمال اینکه این مقدار بدست آید ۱۰۰ درصد است.

مثال۱۲: کدام یک از عبارات زیر در مورد عدم قطعیت میان عملگرهای مکان و تکانه خطی برای ذره در جعبه نامتناهی درست است؟

۱) رابطه عدم قطعیت برای همه ترازها یکسان است.
۲) رابطه عدم قطعیت برای تراز پایه به صورت $\Delta x\Delta p=\frac{\hbar}{2}$ است.
۳) تراز پایه، کمترین عدم قطعیت را داراست.
۴) گزینه‌های ۲و۳ درست است.

پاسخ: گزینه «۳» عدم قطعیت به تراز انرژی بستگی دارد و هر چه عدد کوانتومی n بزرگتر باشد، عدم قطعیت میان مولفه‌های مکان و تکانه خطی بزرگتر می‌شود، بنابراین گزینه ۱ درست نیست.

برای حالت پایه رابطه عدم قطعیت به صورت $\Delta x\Delta p=\hbar\sqrt{\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}}>\frac{\hbar}{2}$ است، پس گزینه‌های ۲و۴ هم نادرست است.

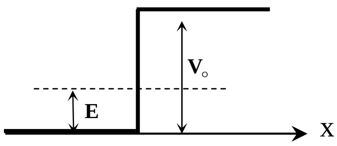
مثال۱۳: ذره‌ای با انرژی E بر یک پله پتانسیل به بلندی V_0 می‌تابد هرگاه $E<V_0$ باشد، با تعریف $k^2 = 2mE/\hbar^2$ و $k'^2 = \dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ شار عبوری برابر است با:

۱) ۱ ۲) 0 ۳) $\dfrac{4k^2}{k^2 + k'^2}$ ۴) $\dfrac{k}{k'}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شار احتمال از رابطه $j = \dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \dfrac{d\psi}{dx})$ به دست می‌آید، از آنجا که در ناحیه $x>0$، $\psi = Te^{-\alpha x}$ از این رو $\psi^* = T^* e^{-\alpha x}$ و $\dfrac{d\psi}{dx} = -\alpha Te^{-\alpha x}$ بنابراین $\psi^* \dfrac{d\psi}{dx} = -\alpha |T|^2 e^{-2\alpha x}$ که به وضوح حقیقی است و از این رو $\mathrm{Im}(\psi^* \dfrac{d\psi}{dx}) = 0$ و بنابراین $j=0$ است.

◆◆◆◆

مثال۱۴: ذره‌ای با انرژی مثبت $E<V_0$ با پله پتانسیل زیر روبرو می‌شود، می‌توانیم بگوییم.........



۱) شار عبوری برابر صفر است

۲) تابع موج ذره در سمت راست سینوسی است.

۳) احتمال وجود ذره در هر $x>0$ صفر است.

۴) انرژی ذره در سمت راست بیشتر از مقدار آن در سمت چپ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه در ناحیه $x>0$، تابع موج به صورت $Te^{-\alpha x}$ است و $T = \dfrac{2k}{k + i\alpha}$ که در آن α و k حقیقی هستند، از تعریف شار احتمال $j = \dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \dfrac{d\psi}{dx})$ نتیجه می‌شود شار مربوطه صفر است، چون:

$$\left.\begin{aligned} &\psi^* = T^* e^{-\alpha x} \\ &\frac{d\psi}{dx} = -\alpha T e^{-\alpha x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi^* \frac{d\psi}{dx} = -\alpha |T|^2 e^{-2\alpha x}$$

به وضوح مشخص است که $\psi^* \dfrac{d\psi}{dx}$ حقیقی است و بنابراین بخش موهومی ندارد. به عبارتی $\mathrm{Im}(\psi^* \dfrac{d\psi}{dx}) = 0$ و بنابراین $j=0$.

علت نادرستی سایر گزینه‌ها:

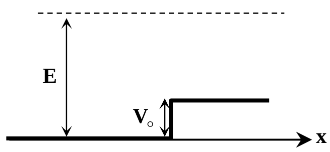
علت نادرستی گزینه ۲: در ناحیه $x>0$ تابع موج مانند یک تابع نمایی افت می‌کند $\psi \propto e^{-\alpha x}$

علت نادرستی گزینه ۳: با اینکه شار در ناحیه $x>0$ صفر است اما ضریب عبور $T = \dfrac{2k}{k+i\alpha}$ غیرصفر است و این به معنی این است که ذرات می‌توانند وارد ناحیه $x>0$ شوند.

علت نادرستی گزینه ۴: در هر دو ناحیه ویژه مقدار انرژی E است.

◆◆◆◆

مثال۱۵: ذره‌ای به جرم m در یک بعد به یک پتانسیل به ارتفاع V_0 برخورد می‌کند، اگر انرژی ذره $4V_0$ باشد، احتمال انعکاس ذره از این پله چقدر است؟



۱) 7×10^{-2} ۲) 5×10^{-3}

۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{16}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» احتمال بازتاب معادل $|R|^2$ است که در آن $R = \dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}$ است. از آنجا که $E = 4V_0$، بنابراین $R = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ و از این رو $|R|^2$ به دست می‌آید:

$$|R|^2 = \frac{4+3-4\sqrt{3}}{4+3+4\sqrt{3}} \Rightarrow |R|^2 = \frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = \frac{0/07}{13/9} \Rightarrow \boxed{|R|^2 = 5\times10^{-3}}$$

◆◆◆◆

مثال۱۶: کدام گزینه در مورد پله پتانسیل درست است؟

۱) در مکانیک کوانتومی به ازای $E > V_\circ$ احتمال بازتاب داریم اما به ازای $E < V_\circ$ بازتاب نداریم.

۲) در مکانیک کوانتومی هم به ازای $E > V_\circ$ و هم به ازای $E < V_\circ$ احتمال بازتاب وجود دارد.

۳) در مکانیک کوانتومی به ازای $E < V_\circ$ احتمال بازتاب داریم اما به ازای $E > V_\circ$ احتمال بازتاب وجود ندارد.

۴) در مکانیک کلاسیک صرفنظر از انرژی ذره نسبت به $V_\circ$، احتمال بازتاب وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در متن درس توضیح آمده است.

مثال۱۷: کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) طول موج تابع موج در عبور ذره از پتانسیلی با ارتفاع کمتر از انرژی ذره، کاهش می‌یابد.

۲) طول موج تابع موج در عبور ذره از پتانسیلی با ارتفاع کمتر از انرژی ذره، افزایش می‌یابد.

۳) اگر ارتفاع پله پتانسیل، بیشتر از انرژی ذره باشد، طول موج ذره کاهش می‌یابد.

۴) اگر ارتفاع پله پتانسیل، بیشتر از انرژی ذره باشد، طول موج ذره افزایش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طول موج ذره در این جا با رابطه $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ بدست می‌آید بنابراین طول موج با عدد موج (k) رابطه عکس‌دارد و k با انرژی رابطه مستقیم دارد بنابراین با مقایسه k که عدد موج پشت سد و q که عدد موج داخل سد پتانسیل است چون $q \propto (E - V_\circ)$ است مقدار q کوچکتر از k است بنابراین طول موج ذره در عبور از سد افزایش می‌یابد.

علت نادرستی گزینه‌های ۳ و ۴ این است که در حالتی که انرژی کمتر از ارتفاع پله باشد، تابع موج به صورت نمایی فرو افت می‌کند. (و بنابراین سخن گفتن از طول موج بی‌معنی است.)

مثال۱۸: کدام مورد در رابطه با چاه پتانسیل متناهی یک بعدی و متقارن $V(x) = \begin{cases} \circ & ; \ x > a, x < -a \\ -V_\circ & ; \ -a < x < a \end{cases}$ برای حالت‌های مقید درست است؟

۱) حالت پایه فرد است　　۲) حالت پایه زوج است

۳) همواره حالت مقید وجود دارد　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به طور کلی برای پتانسیل‌های یک بعدی متقارن حالت پایه زوج است.

مثال۱۹: اگر پهنای یک چاه مربعی متقارن را نصف و عمق آن را دو برابر کنیم تعداد حالت‌های مقید چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد　　۲) کاهش می‌یابد　　۳) ثابت می‌ماند　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه برای پتانسیل به صورت $V(x) = \begin{cases} -V_\circ ; -a < x < a \\ \circ ; x > a, x < -a \end{cases}$ تعداد حالت‌های مقید با پارامتر λ افزایش می‌یابد که از رابطه $\lambda = \frac{2m}{\hbar^2} V_\circ a^2$ به دست می‌آید. پس، اگر پهنای چاه نصف شود به عبارتی $a \to \frac{a}{2}$ و عمق چاه دو برابر شود یعنی $V_\circ \to 2V_\circ$ در این صورت $\lambda \to \frac{2m}{\hbar^2}(2V_\circ)(\frac{a}{2})^2$ یعنی $\lambda \to \frac{\lambda}{2}$ بنابراین تعداد حالات مقید کاهش می‌یابد.

مثال۲۰: کدام عبارت در مورد چاه مربعی متناهی متقارن یک بعدی صادق است؟

۱) برای حالت‌های زوج همواره یک حالت مقید داریم

۲) برای حالت‌های فرد همواره یک حالت مقید وجود دارد.

۳) به طور کلی چه جواب‌ها زوج و چه فرد باشند همواره حالت مقید وجود دارد.

۴) برای جواب‌های زوج وجود حالت مقید بستگی به عمق و پهنای چاه پتانسیل دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پهنا و عمق چاه پتانسیل هر چه باشد، همواره حداقل یک حالت مقید برای جواب‌های زوج وجود دارد اما در مورد جواب‌های فرد وضع به این صورت نیست و بایستی چاه یک حداقل عمق و یا پهنایی داشته باشد تا حالت مقید داشته باشیم.

آزمون فصل سوم

۱ـ احتمال عبور ذره ای با انرژی E از سد پتانسیل زیر چقدر است؟ فرض کنید که $E < A$ است.

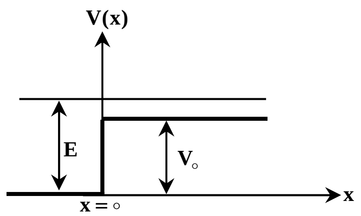
$$V(x)=\begin{cases}0 & |x|>\sqrt{A/B}\\ A-Bx^2 & |x|<\sqrt{A/B}\end{cases}$$

۱) $\pi\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(A-E)$ ۲) $\pi\sqrt{\frac{2m}{B\hbar^2}}(A-E)$ ۳) $\exp(-\pi\sqrt{\frac{2m}{B\hbar^2}}(A-E))$ ۴) $\exp(-\pi\sqrt{\frac{2m}{B\hbar^2}}(A+E))$

۲ـ ذره ای به جرم m تحت تأثیر پتانسیل یک بعدی $V(x)=\begin{cases}0 & x>0\\ \infty & x<0\end{cases}$ قرار دارد، با فرض $\alpha^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$، کدام گزینه در مورد تابع موج و ویژه مقادیر انرژی این ذره درست است؟

۱) $\cos\alpha x$ و E گسسته است ۲) $\sin\alpha x$ و E گسسته است ۳) $\sinh\alpha x$ و E پیوسته است ۴) $\sin\alpha x$ و E پیوسته است

۳ـ شاری از ذرات آزاد با انرژی $E=V_0$ از سمت چپ به راست حرکت کرده و با پله پتانسیلی به ارتفاع V_0 برخورد می کند. تابع موج در ناحیه $x>0$ چه شکلی دارد؟ فرض کنید که $\kappa^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ است.



۱) $\cos\kappa x$

۲) $e^{-\kappa x}$

۳) $\cosh\kappa x$

۴) $A\kappa x+B$

۴ـ ذره ای به جرم $m=0/5kg$ در یک چاه پتانسیل نامتناهی به عرض 3π قرار دارد. اگر انرژی جنبشی این ذره برابر $\hbar^2$ باشد، ذره در کدام حالت مقید خود قرار دارد؟

۱) حالت پایه ۲) برانگیخته اول ۳) برانگیخته دوم ۴) برانگیخته سوم

۵ـ تابع موج ذره ای به جرم m در یک چاه پتانسیل به پهنای $2a$ به صورت $\psi(x)=\sqrt{2/3a}\sin\pi x/a+1\sqrt{3a}\sin 2\pi x/a$ است. تابع چگالی احتمال این ذره با چه فرکانسی برحسب $\omega_0=\pi^2\hbar/ma^2$ نوسان می کند؟

۱) $\frac{5}{2}\omega_0$ ۲) $\frac{5}{8}\omega_0$ ۳) $\frac{1}{8}\omega_0$ ۴) $\frac{1}{2}\omega_0$

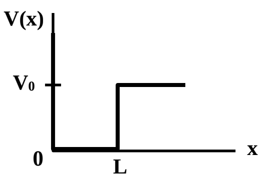
۶ـ اگر تابع موج ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی به پهنای a به صورت $\psi(x)=\sqrt{\frac{30}{a^5}}(x^2-ax)$ باشد، انرژی ذره برابر است با:

۱) $\frac{5\hbar^2}{ma^2}$ ۲) $\frac{10\hbar^2}{ma^2}$ ۳) $\frac{25\hbar^2}{ma^2}$ ۴) $\frac{5\hbar^2}{2ma^2}$

۷ـ فرض کنید که شاری از الکترون‌هایی با انرژی $3ev$ به یک سد پتانسیل به ارتفاع $5ev$ و پهنای ۷ آنگستروم برخورد می‌کند. به طور تقریبی چه کسری از الکترون‌ها از این سد عبور خواهند کرد؟

۱) 4×10^{-5} ۲) 4×10^{-4} ۳) ۹،۸ ۴) 2×10^{-5}

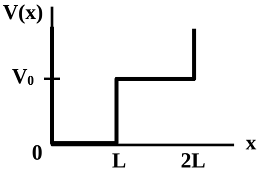
۸ـ ذره ای با انرژی $E<V_0$ در یک چاه پتانسیل به صورت زیر زندانی شده است. اگر $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ و $q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ را تعریف کنیم، ویژه مقادیر انرژی باید در کدام معادله صدق کنند؟



۱) $\tan kL=\frac{q}{k}$ ۲) $\cot qL=k$

۳) $\tan kL=-\frac{q}{k}$ ۴) $\cot kL=-\frac{q}{k}$

۹ـ ذره ای به جرم m در پتانسیل زیر به دام افتاده است. اگر بنا به تعریف $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ و $q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ باشند، آنگاه ویژه مقادیر انرژی از حل کدام معادله بدست می آیند؟



۱) $\tanh kL=\frac{q}{k}$ ۲) $\tanh kL=\frac{q}{k}\cot qL$

۳) $\tan kL=\frac{k}{q}\tanh qL$ ۴) $\cot kL=\frac{q}{k}\tanh qL$

۱۰ـ در زمان $t=0$ تابع موج ذره ای به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی به پهنای L به شکل زیر است.

$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}1/\sqrt{L} & 0<x<L\\ 0 & x>L,\ x<0\end{cases}$$

احتمال این که از اندازه گیری انرژی در زمان $t>0$ مقدار $9\pi^2\hbar^2/2mL^2$ بدست آید چه مقدار است؟

۱) $\frac{8}{9\pi^2}$ ۲) $\frac{4}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{8}{\pi^2}$ ۴) $\frac{4}{3\pi^2}$

۱۱ـ ذره ای به جرم m و انرژی جنبشی $E>0$ به یک پله پتانسیل به ارتفاع V_0 برخورد می کند. در صورتی که $E=V_0/3$ باشد، احتمال اینکه این ذره بازتاب پیدا کند چقدر می باشد؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲ـ ارزش انتظاری عملگر x^2p+px^2 برای دومین حالت برانگیخته ذره در جعبه ای که دیوارهای آن در $x=\pm a$ قرار دارند برابر است با :

۱) ۰ ۲) $\hbar$ ۳) $2\hbar$ ۴) $3\hbar$

۱۳ـ کدام گزینه در مورد ویژه توابع $\sin kx$ و $\cos kx$ ذره آزاد درست نیست؟

۱) واگن نیستند ۲) ویژه توابع عملگر پاریته هستند ۳) ویژه توابع عملگر تکانه نیستند ۴) ویژه توابع هامیلتونی هستند

۱۴ـ اگر در لحظه $t=0$ تابع موج ذره ای در چاه پتانسیل مربعی نامتناهی

$$V(x)=\begin{cases}0 & |x|<a\\ \infty & x<-a,\ x>a\end{cases}$$

به صورت $\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos 3\pi x/2a$ باشد، احتمال آنکه در لحظه $t>0$ تابع موج $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sin 2\pi x/a$ شود کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۰

۱۵ـ ذره ای به جرم m در داخل یک چاه پتانسیل به شکل

$$V(x)=\begin{cases}\alpha\delta(x) & |x|<a\\ \infty & x<-a,\ x>a\end{cases}$$

قرار دارد. کدام گزینه ویژه تابع درست این ذره را برحسب عدد درست n می دهد؟

۱) $\sin(\frac{n\pi x}{a})$ ۲) $\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{2a})$ ۳) $\cos(\frac{(2n+1)\pi x}{2a})$ ۴) $\cos(\frac{n\pi x}{a})$

فصل چهارم

« نوسانگر کوانتومی »

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: برای نوسانگر هماهنگ عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ برحسب کدام‌یک از کمیت‌های زیر تعریف می‌شوند؟

۱) H و x　　۲) H و V(x)　　۳) p و x　　۴) p و V(x)

پاسخ: گزینه «۳» تعریف عملگرهای نردبانی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ برحسب عملگرهای مکان $(\hat{x})$ و تکانه خطی ذره $(\hat{p})$ به صورت زیر است:

$$\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}-i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\quad,\quad \hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}+i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: اختلاف ترازهای انرژی در کدام مورد مقداری ثابت است؟

۱) ترازهای انرژی اتم هیدروژن　　۲) ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ ساده

۳) ترازهای انرژی ذره در جعبه نامتناهی یک بعدی　　۴) موارد ۱ و ۲ درست است.

پاسخ: گزینه «۲» ترازهای انرژی اتم هیدروژن متناسب با $\frac{1}{n^2}$ است با افزایش n، فاصله میان ترازهای متوالی کاهش می‌یابد و بنابراین ثابت نیست.

ترازهای انرژی ذره در جعبه با n^2 متناسب است با افزایش n، فاصله میان ترازهای متوالی انرژی، افزایش می‌یابد. تنها در نوسانگر هماهنگ است که فاصله هر تراز انرژی با تراز بعدی و قبلی آن مقدار $\hbar\omega$ (ثابت) است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای پائین آورنده و بالا برنده و $|n\rangle$ ویژه حالت یک نوسانگر هماهنگ هستند کدام‌یک از کمیات زیر مخالف صفر است؟

۱) $m<n\ ,\ \langle m|(\hat{a}^\dagger)^n(\hat{a})^n|n\rangle$　　۲) $m\neq n\ ,\ \langle m|(\hat{a})^m(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle$

۳) $m>n\ ,\ \langle m|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle$　　۴) $\langle 0|(\hat{a})^n|n\rangle$

پاسخ: گزینه «۴» از رابطه راست هنجاری ویژه حالات نوسانگر هماهنگ، $\langle n|m\rangle=\delta_{nm}$ و روابط عملگری $\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$ و $\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$ برای حل این تست استفاده می‌کنیم.

بررسی گزینه «۱»: عملگر $(\hat{a})^n$ در تأثیر بر حالات $|n\rangle$ آن را به حالت $|n-n\rangle$ یعنی حالت پایه می‌رساند: $(\hat{a})^n|n\rangle\propto|0\rangle$، عملگر $(\hat{a}^\dagger)^n$ در تأثیر بر حالت $|0\rangle$ آن را n بار افزایش می‌دهد و به حالت $|n\rangle$ می‌رساند، بنابراین:

$$\langle m|(a^\dagger)^n(\hat{a})^n|n\rangle\propto\langle m|(a^\dagger)^n|0\rangle\propto\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$$

اما چون $m<n$ است پس $\delta_{mn}=0$ و از این رو:

$$\langle m|(\hat{a}^\dagger)^n(a)^n|n\rangle=0$$

بررسی گزینه «۲»: عملگر $(\hat{a}^\dagger)^n$ در تأثیر بر حالت $|n\rangle$ آن را n بار افزایش می‌دهد و به حالت $|n+n\rangle$ می‌رساند با تأثیر عملگر $(\hat{a})^m$ بر حالت $|2n\rangle$ کاهش آن به میزان m است و بنابراین حاصل متناسب با $|2n-m\rangle$ خواهد شد: از این رو:

$$\langle m|(\hat{a})^m(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle\propto\langle m|(\hat{a})^m|2n\rangle\propto\langle m|2n-m\rangle=\delta_{m,2n-m}$$

از آنجا که $n\neq m$ پس $2n\neq 2m$ و از این رو $2n-m\neq m$ است بنابراین:

$$\delta_{m,2n-m}=0$$

$$\Rightarrow\langle m|(\hat{a})^m(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle=0$$

بررسی گزینه «۳»: $(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle$ متناسب با $|2n\rangle$ است و تأثیر $(\hat{a})^n$ بر این حالت، حالتی متناسب با $|2n-n\rangle$ یعنی $|n\rangle$ را به دست می‌دهد. بنابراین:

$$\langle m|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle\propto\langle m|(\hat{a})^n|2n\rangle\propto\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$$

از آنجا که $m>n$، پس $\delta_{mn}=0$ و از این رو داریم:

$$\langle m|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|n\rangle=0$$

بررسی گزینه «۴»: $(\hat{a})^n$ حالت $|n\rangle$ را n بار پائین می‌آورد و به $|n-n\rangle$ یعنی $|0\rangle$ می‌رساند در نتیجه:

$$\boxed{\langle 0|(\hat{a})^n|n\rangle\propto\langle 0|0\rangle=1}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: اگر بر یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی پتانسیل $m\omega^2 x$ افزوده شود، ویژه مقادیر انرژی نوسانگر چه خواهد شد؟ (فرض کنید $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ هامیلتونی نوسانگر بدون حضور پتانسیل خارجی است)

۱) $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega+\frac{1}{2}m\omega^2$ ۲) $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega-\frac{1}{2}m\omega^2$ ۳) $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega+m\omega^2$ ۴) $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega-m\omega^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» هامیلتونی سامانه به صورت $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2+m\omega^2\hat{x}$ است می‌توان آن را به صورت $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2+2\hat{x})$ نوشت. با مربع کامل کردن عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2[\hat{x}^2+2\hat{x}+1-1]=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2[(\hat{x}+1)^2-1]\Rightarrow \hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}+1)^2-\frac{1}{2}m\omega^2$$

این عبارت هامیلتونی نوسانگر هماهنگی است که ترازهای انرژی آن به اندازه $\frac{1}{2}m\omega^2$ کاهش یافته است. از آنجا که ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ ساده از رابطه $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ به دست می‌آیند، ویژه مقادیر انرژی نوسانگر در حضور پتانسیل $m\omega^2x$ به صورت زیر در می‌آید:

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega-\frac{1}{2}m\omega^2 \quad ; \quad n=0,1,2,...$$

مثال۵: ذره‌ای در پتانسیل نوسان‌گر هماهنگ از حالت روبه‌رو آغاز به کار می‌کند: $\psi(x,0)=A[3\psi_0(x)+4\psi_1(x)]$ احتمال این که از اندازه‌گیری انرژی مقدار $\frac{3}{2}\hbar\omega$ به دست آید چه قدر است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۳۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» وابستگی زمانی حالت‌های مانا $(\psi_n(x))$ به صورت $e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}$ است. برای نوسانگر هماهنگ $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ است که در آن n شماره تراز انرژی ذره است. می‌خواهیم احتمال این که از اندازه‌گیری انرژی مقدار $\frac{3}{2}\hbar\omega$ به دست آید را حساب کنیم، بنابراین باید بدانیم که ذره در چه حالتی قرار دارد، برای این کار قرار می‌دهیم:

$$E_n=\frac{3}{2}\hbar\omega\Rightarrow(n+\frac{1}{2})\hbar\omega=\frac{3}{2}\hbar\omega\Rightarrow\boxed{n=1}$$

پس باید احتمال قرار گرفتن ذره در حالت $n=1$ و به عبارتی $\psi_1(x)$ را به دست آوریم:

بنابر اصل بسط احتمال قرار گرفتن سیستم در ویژه حالت $\psi_k(x)$ برابر با مجذور قدر مطلق ضریب $\psi_k(x)$ در بسط $\psi(x)$ است. در اینجا ضریب بسط $4A$ است، پس احتمال مربوطه برابر است با $P_1=|4A|^2$ برای رسیدن به جواب باید A را به دست آوریم. این کار را با بهنجارش $\psi(x)$ انجام می‌دهیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,|\psi(x,0)|^2=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x,0)\psi(x,0)=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,A^*[3\psi_0^*(x)+4\psi_1^*(x)]A[3\psi_0(x)+4\psi_1(x)]=1$$

$$\Rightarrow|A|^2\{9\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0(x)|^2dx+16\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1(x)|^2dx+12\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*(x)\psi_1(x)dx+12\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^*(x)\psi_0(x)dx\}=1$$

$$\Rightarrow|A|^2(9+16)=1\Rightarrow|A|^2=\frac{1}{25}\Rightarrow\boxed{A=\frac{1}{5}}$$

در خط آخر از رابطه راست هنجاری ویژه توابع نوسانگر هماهنگ $(\int\psi_n^*(x)\psi_m(x)dx=\delta_{nm})$ استفاده کردیم با بدست آمدن A، احتمال به دست آوردن انرژی $\frac{3}{2}\hbar\omega$ به دست می‌آید:

$$P_1=|\frac{4}{5}|^2\Rightarrow P_1=\frac{16}{25}\Rightarrow\boxed{P_1=0/64}$$

مثال۶: ذره‌ای در پتانسیل $\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$ قرار گرفته است، چند ویژه حالت دارای مقدار انرژی $3\hbar\omega$ هستند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» پتانسیل مسأله مربوط به نوسانگر هماهنگ ۲ بعدی با بسامد زاویه‌ای نوسان یکسان در هر دو بعد است. از این رو ویژه مقادیر انرژی از رابطه $E_{n_1n_2}=(n_1+n_2+1)\hbar\omega$ به دست می‌آیند، می‌خواهیم تعداد حالت‌هایی که به $E_{n_1,n_2}=3\hbar\omega$ منجر می‌شوند را به دست آوریم:

$$E_{n_1,n_2}=(n_1+n_2+1)\hbar\omega=3\hbar\omega \Rightarrow \boxed{n_1+n_2=2}$$

از آنجا که n_1 و n_2 اعداد صحیح نامنفی هستند سه ترکیب مختلف n_1 و n_2 به ویژه مقدار $3\hbar\omega$ برای انرژی منجر می‌شود و از این رو تبهگنی از درجه ۳ است.

n_1	n_2
۲	۰
۰	۲
۱	۱

مثال۷: کدام عبارت نادرست است؟

۱) همه ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ سه بعدی با بسامدهای زاویه‌ای یکسان در هر سه راستا تبهگن هستند.
۲) به طور کلی درجه تبهگنی ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ سه بعدی بیش از همتای دو بعدی آن است.
۳) همواره می‌توان یک نوسانگر ۳ بعدی را به صورت مجموع سه نوسانگر یک بعدی بیان کرد.
۴) همه موارد درست است.

پاسخ: گزینه «۱» تراز پایه نوسانگر هماهنگ ۳ بعدی تبهگن نیست.

$$\underbrace{|000\rangle}_{\text{تراز پایه}} \to \underbrace{\frac{3}{2}\hbar\omega}_{\text{انرژی خلاء}}$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ کدام یک از گزینه‌های زیر ترازهای انرژی ذره‌ای به جرم m را که در پتانسیل یک بعدی $V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x>0\\ +\infty & x<0\end{cases}$ قرار گرفته، نشان می‌دهد:

۱) $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$	۲) $(n+\frac{3}{2})\hbar\omega$	۳) $(2n+\frac{1}{2})\hbar\omega$	۴) $(2n+\frac{3}{2})\hbar\omega$

۲ـ فرم ماتریسی n بعدی نوسانگر هماهنگ $\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$	۲) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 3 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 5 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$

۳) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots\\ 0 & 3 & 0 & \cdots\\ \sqrt{2} & 0 & 5 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$	۴) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots\\ 0 & -3 & 0 & \cdots\\ \sqrt{2} & 0 & -5 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$

۳ـ حاصل عبارت $\langle n|\hat{x}^4|n\rangle$ چیست؟

۱) $\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(6n^2+6n+3)$	۲) $\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(2n+1)^2$	۳) $\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(5n^2+3n+1)$	۴) $\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(5n^2+7n+3)$

۴ـ ترازهای انرژی دو نوسانگر هماهنگ با جرم‌های m_1 و m_2 که با فرکانس ω نوسان می‌کنند و توسط پتانسیل بر هم کنشی $\frac{1}{2}k(\hat{x}_1-\hat{x}_2)^2$ جفت شده‌اند، در کدام گزینه آمده است؟ ($\Omega=\sqrt{\omega^2+\frac{k}{\mu}}$, μ جرم کاهش یافته)

۱) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_2+\frac{1}{2})$	۲) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1n_2+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_1n_2+\frac{1}{2})-2$

۳) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1+n_2+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_1n_2+\frac{1}{2})$	۴) $E_{n_1n_2}=\frac{\hbar\omega}{c}+\hbar\Omega(n_1n_2+n_1+n_2+\frac{1}{2})-4$

۵ـ حاصل عبارت $\langle n|\hat{x}^2+\hat{p}^2|n\rangle$ چیست؟

۱) صفر	۲) $(m\hbar\omega+\frac{\hbar}{m\omega})(2n+\frac{1}{2})$	۳) $(m\omega\hbar+\frac{\hbar}{m\omega})(n+\frac{1}{2})$	۴) $(m\omega\hbar+\frac{\hbar}{m\omega})(n+\frac{1}{2})^2$

۶ـ اگر $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ عملگرهای کاهنده و افزاینده نوسانگر هماهنگ باشند کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{A}f(\hat{A}^\dagger)u_0=\frac{df(\hat{A})}{d\hat{A}}u_0$	۲) $e^{\lambda\hat{A}}f(\hat{A})u_0=f(\hat{A}^\dagger+\lambda)u_0$

۳) $e^{a\hat{A}+b\hat{A}^\dagger}=e^{a\hat{A}}e^{b\hat{A}^\dagger}e^{\frac{-1}{2}ab}$	۴) $\hat{A}^nf(\hat{A}^\dagger)u_0=f^{(n)}(\hat{A})u_0$

۷ـ حاصل عبارت $\langle u_0|e^{ikx}|u_0\rangle$ چیست؟

۱) صفر	۲) $e^{-\hbar k^2/4m\omega}$	۳) $e^{+i\hbar k^2/4m\omega}$	۴) $e^{-i\hbar k^2/4m\omega}$

۸ـ تراز ۱۰ امین حالت برانگیختگی نوسانگر هماهنگ ۳ بعدی، تبهگنی چندگانه دارد؟

۱) ۱۰	۲) ۳۳	۳) ۶۶	۴) ۱۳۲

۹ـ کدام یک از ترازهای $(n_xn_yn_z)$ نوسانگر هماهنگ سه بعدی، سطح انرژی پایین‌تری دارند؟

۱) (۴۱۰)	۲) (۳۱۱)	۳) (۲۱۲)	۴) (۴۰۰)

۱۰ـ انرژی سوم امین حالت برانگیختگی یک نوسانگر ۶ بعدی برابر:

۱) $6\hbar\omega$ ۲) $\frac{13}{2}\hbar\omega$ ۳) $\frac{9}{2}\hbar\omega$ ۴) $5\hbar\omega$

۱۱ـ ویژه حالات مربوط به $E_{n_x,n_y}=10\hbar\omega$ در یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی، چندگانه تبهگن است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۶۶

۱۲ـ کدام مقدار برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی صفر است؟ ($\langle n|$ ویژه حالت هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی است)

۱) $\langle 3|x^6|7\rangle$ ۲) $\langle 8|x^3|3\rangle$ ۳) $\langle 4|x^8|6\rangle$ ۴) $\langle 2|x^3|6\rangle$

۱۳ـ مقدار چشمداشتی انرژی برای تابع موج دستگاهی به صورت داده شده کدام است؟ (u_n ها ویژه حالات نوسانگر هماهنگ ساده‌اند)

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}u_0+\frac{i}{3}u_1+\frac{i\sqrt{7}}{5}u_2$$

۱) $\frac{67}{60}$ ۲) $\frac{37}{60}$ ۳) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2\sqrt{2}}$ ۴) هیچکدام

۱۴ـ با توجه به اینکه $\langle n|$ ویژه حالت انرژی نوسانگر هماهنگ یک بعدی با انرژی $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ و ذره در حالت ψ است. احتمال اینکه در اندازه‌گیری انرژی مقدار $\frac{9}{2}\hbar\omega$ بدست آمده چقدر است؟ $\psi=\frac{1}{\sqrt{30}}\{\sqrt{2}|10\rangle+i\sqrt{2}|1\rangle-3|2\rangle-2\sqrt{2}|4\rangle+3|5\rangle\}$

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{4}{15}$ ۴) هیچکدام

۱۵ـ نوسانگر هماهنگ به جرم m و بار q در میدان الکتریکی خارجی قرار دارد به طوری که هامیلتونی سیستم به صورت زیر است. $\langle\hat{x}\rangle_{(t)}$ کدام است؟ $\hat{H}=\frac{p^2}{2m}+k\frac{\hat{x}^2}{2}+qE_0\hat{x}\cos\omega t\ ,\ \langle\hat{x}\rangle_{(0)}=x_0$

۱) $\langle\hat{x}\rangle(\tau)=x_0\sin(i\sqrt{\frac{k}{m}}t)+\frac{qE_0}{mw}\cos\omega t$

۲) $\langle\hat{x}\rangle(\tau)=x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)+\frac{qE_0}{m\omega}\cos\omega t$

۳) $\langle\hat{x}\rangle(\tau)=x_0\sin(i\sqrt{\frac{k}{m}}t)-\frac{qE_0}{mw}\cos\omega t$

۴) $\langle\hat{x}\rangle(\tau)=x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)-\frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t$

فصل پنجم

« سامانه‌های بس ذره‌ای و ذرات یکسان »

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال۱: کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) در مکانیک کلاسیک و در مکانیک کوانتومی همواره تکانه خطی کل یک سامانه بس ذره‌ای پایسته است.

۲) در غیاب عوامل (نیروهای) خارجی است که تکانه خطی یک سامانه بس ذره‌ای پایسته می‌ماند. این مطلب هم در مکانیک کوانتومی هم در مکانیک کلاسیک درست است.

۳) پیامد ناوردایی هامیلتونی یک سامانه N ذره‌ای تحت انتقال یکسان، پایستگی تکانه خطی کل آن سامانه است.

۴) عبارت‌های ۲و۳ صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توضیحات بخش قبل گزینه ۲و۳ پاسخ درست است. گزینه ۱ به طور کلی نادرست است چرا که با وجود نیروهای خارجی وارد بر یک سامانه، تکانه خطی آن (مطابق قانون دوم نیوتون) در مکانیک کلاسیک و انرژی آن (در مکانیک کوانتومی) تغییر می‌کند. تنها در صورت نبودن نیروهای خارجی است که تکانه خطی کل یک سامانه پایسته می‌ماند.

مثال۲: کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) عملگر تکانه خطی $(\hat{P})$ مولد انتقال (جابجایی) در فضا است.

۲) عملگر هامیلتونی $(\hat{H})$ مولد دوران در فضا است.

۳) عملگر تکانه خطی $(\hat{P})$ مولد تحول زمانی سامانه کوانتومی است.

۴) عملگر هامیلتونی $(\hat{H})$ مولد انتقال (جابجایی) در فضا است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مکانیک کوانتومی سه عملگر مهم تکانه خطی $\hat{P}$، تکانه زاویه‌ای مداری $\hat{L}$ و هامیلتونی $\hat{H}$ داریم که به ترتیب مولد انتقال (جابجایی)، دوران و تحول زمانی هستند. به عبارت دیگر، همگنی فضا (این که خواص فیزیکی تحت جابجایی تغییر نمی‌کنند) حاصل پایستگی تکانه خطی است، همسانگردی فضا (این که ویژگی‌های فیزیکی تحت دوران حول یک محور، بدون تغییر می‌مانند) در نتیجه پایستگی تکانه زاویه‌ای است و یکنواختی گذر زمان محصول بقای انرژی یا همان پایستگی عملگر هامیلتونی است.

مثال۳: دو ذرهٔ بدون برهم کنش غیریکسان ۱و۲ مفروض است، کدام گزینه در مورد چگالی احتمال کل یافتن ذره ۱ در مکان x_1 و ذره ۲ در مکان x_2 درست است؟

۱) $P(x_1,x_2)=P(x_1)+P(x_2)$

۲) $P(x_1,x_2)=P(x_1)-P(x_2)$

۳) $P(x_1,x_2)=\sqrt{P(x_1)P(x_2)}$

۴) $P(x_1,x_2)=P(x_1)P(x_2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توضیحات متن، پاسخ درست گزینه ۴ است.

مثال۴: کدام یک از گزینه‌ها درست است؟

۱) در مکانیک کلاسیک ذرات یکسان را می‌توان از هم متمایز کرد اما در مکانیک کوانتومی چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۲) در مکانیک کوانتومی ذرات یکسان تمیزپذیر هستند در حالی‌که در مکانیک کلاسیک این‌گونه نیست.

۳) ذرات یکسان نه در مکانیک کلاسیک و نه در مکانیک کوانتومی قابل تشخیص از یکدیگر نیستند.

۴) ذرات یکسان را می‌توان همواره از هم تمیز داد. این کار هم در مکانیک کلاسیک و هم در مکانیک کوانتومی عملی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یکی از بزرگترین تفاوت‌های فیزیک کوانتومی با فیزیک کلاسیک در همین تمیز ناپذیر بودن ذرات یکسان در مکانیک کوانتومی است. چنین موردی در فیزیک کلاسیک مشاهده نمی‌شود.

مثال۵: کدام گزینه در مورد عملگر تبادل $\hat{P}_{12}$ درست است؟

۱) عملگر تبادل عملگری هرمیتی است.
۲) عملگر تبادل عملگری پاد هرمیتی است.
۳) ویژه مقادیر عملگر تبادل ±1 است.
۴) گزینه‌های ۱و۳ درست است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تمامی مشاهده پذیرهای فیزیکی از جمله تعویض دو ذره، با عملگرهای هرمیتی داده می‌شوند. یکی از ویژگی‌های عملگرهای هرمیتی حقیقی بودن ویژه مقادیر منسوب به آن‌ها است. در متن درس دیدیم که ویژه مقادیر عملگر تبادل ۱+ (برای حالت‌های متقارن) و ۱- (برای حالت‌های پادمتقارن) است.

مثال۶: تابع موج حالت پایه دو الکترون بدون برهمکنش در یک چاه پتانسیل نامتناهی به طول L هنگامی که دو الکترون در حالت اسپینی یکسان باشند با کدام گزینه داده می‌شود؟

۱) $\psi(x_1,x_2)=\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_1}{L}\sin\frac{2\pi x_2}{L}$

۲) $\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_1}{L}\sin\frac{2\pi x_2}{L}+\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_2}{L}\sin\frac{2\pi x_1}{L}\}$

۳) $\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_1}{L}\sin\frac{2\pi x_2}{L}-\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_2}{L}\sin\frac{2\pi x_1}{L}\}$

۴) $\psi(x_1,x_2)=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» الکترون‌ها فرمیون هستند و بنابراین تابع حالت توصیف کننده آن‌ها باید پادمتقارن باشد، از این رو گزینه‌های ۱و۲ منتفی است. برای انتخاب میان گزینه‌های ۳و۴ به اصل طرد پاؤلی توجه می‌کنیم. مطابق اصل طرد هیچ دو الکترونی نمی‌توانند با اسپین‌هایی مشابه یک تراز انرژی را اشغال کنند. به این ترتیب چون مطابق فرض تست دو الکترون دارای شاخص‌های اسپینی یکسان هستند، آن‌ها نمی‌توانند تراز انرژی یکسانی را اشغال کنند. به عبارت دیگر حالت پایه، حالتی است که در آن یک الکترون در تراز $n=1$ و دیگری در تراز $n=2$ قرار بگیرد. اما ویژه توابع ذره در جعبه نامتناهی به طول L را می‌دانیم:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\quad;\quad n=1,2,3,\ldots$$

پس تابع حالت یک الکترون به صورت $\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}$ (مربوط به $n=1$) و دیگری به صورت $\psi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}$ (مربوط به $n=2$) خواهد بود. آنچه باقی می‌ماند تشکیل تابع موج پاد متقارن با استفاده از دترمینان اسلیتر است:

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\begin{vmatrix}\psi_1(x_1) & \psi_1(x_2)\\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2)\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2!}}\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)-\psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\}$$

$$\Rightarrow\ \psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x_1}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x_2}{L}-\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x_2}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x_1}{L}\}$$

$$\Rightarrow\ \psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\{\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_1}{L}\sin\frac{2\pi x_2}{L}-\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_2}{L}\sin\frac{2\pi x_1}{L}\}$$

مثال۷: بالاترین سطحی که الکترون در یک چاه بی‌نهایت یک بعدی می‌تواند پر کند (انرژی فرمی) برابر است با (N تعداد الکترون‌ها و b پهنای چاه است)

۱) $E_f=\frac{\hbar^2}{8mb^2}$
۲) $E_f=\frac{\pi^2\hbar^2N^2}{4mb^2}$
۳) $E_f=\frac{8mb^2}{\pi^2\hbar^2N^2}$
۴) $E_f=\frac{\pi^2\hbar^2N^2}{8mb^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به متن درس انرژی فرمی برای N الکترون واقع در یک چاه نامتناهی به طول b عبارت است از: $E_f=\frac{\hbar^2\pi^2}{8mb^2}N^2$

آزمون فصل پنجم

۱ـ چهار ذره یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ که اسپین کل آن‌ها در راستای Z برابر $\hbar$ است در پتانسیل نوسانگر ساده یک بعدی قرار دارند. انرژی پایه این سامانه چقدر است؟

۱) $2\hbar\omega$ ۲) $4\hbar\omega$ ۳) $5\hbar\omega$ ۴) $8\hbar\omega$

۲ـ سامانه فیزیکی متشکل از ۷ ذره مشابه غیر برهم‌کنشی به جرم m و اسپین $\frac{1}{2}$ می‌باشد. این ذرات تحت تأثیر پتانسیل هماهنگ ساده یک بعدی قرار دارند. این سامانه در حالت پایه خود می‌باشد. به جای این ۷ ذره چه تعدادی ذرات بوزونی مشابه با همان جرم m و تحت تأثیر همان پتانسیل حالت پایداری برابر با همان حالت پایه سامانه اول خواهند داشت؟

۱) ۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۲۵

۳ـ تعدادی الکترون با اسپین $\frac{1}{2}$ و در حالت اسپینی یکسان تحت پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی قرار دارند. اگر انرژی پایهٔ کل سامانه $18\hbar\omega$ باشد، تعداد الکترون‌ها چقدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۱۶

۴ـ N ذره یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ در معرض یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی قرار می‌گیرند. بالاترین انرژی این سامانه چقدر است؟

۱) $N\hbar\omega$ ۲) $N^2\hbar\omega$ ۳) $\frac{N^2}{4}\hbar\omega$ ۴) $(N+1)\hbar\omega$

۵ـ ترازهای انرژی دو نوسانگر هماهنگ با جرم‌های m_1 و m_2 که با فرکانس ω نوسان می‌کنند و توسط پتانسیل بر هم کنشی $\frac{1}{2}k(\hat{x}_1-\hat{x}_2)^2$ جفت شده‌اند، در کدام گزینه آمده است؟ (μ جرم کاهش یافته, $\Omega=\sqrt{\omega^2+\frac{k}{\mu}}$)

۱) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_2+\frac{1}{2})$

۲) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1n_2+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_1n_2+\frac{1}{2})-2$

۳) $E_{n_1n_2}=\hbar\omega(n_1+n_2+\frac{1}{2})+\hbar\Omega(n_1n_2+\frac{1}{2})$

۴) $E_{n_1n_2}=\frac{\hbar\omega}{c}+\hbar\Omega(n_1n_2+n_1+n_2+\frac{1}{2})-4$

فصل ششم

« مبانی ریاضی و اصول موضوعه مکانیک کوانتومی و نمادنگاری دیراک »

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال۱: فرض کنید $\hat{A}$ عملگری دلخواه است، کدام‌یک از عملگرهای زیر هرمیتی نیست؟

۱) $\hat{A}+\hat{A}^\dagger$ ۲) $\hat{A}\hat{A}^\dagger$ ۳) $i(\hat{A}+\hat{A}^\dagger)$ ۴) $i(\hat{A}-\hat{A}^\dagger)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به طور کلی عملگر $\hat{X}$ را هرمیتی می‌خوانند هرگاه $\hat{X}^\dagger=\hat{X}$. گزینه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام جواب است.

بررسی گزینه ۱: اگر فرض کنیم $\hat{X}=\hat{A}+\hat{A}^\dagger$ آن‌گاه:
$$\hat{X}^\dagger=(\hat{A}+\hat{A}^\dagger)^\dagger=\hat{A}^\dagger+(\hat{A}^\dagger)^\dagger=\hat{A}^\dagger+\hat{A}=\hat{A}+\hat{A}^\dagger=\hat{X}$$

بررسی گزینه ۲: اگر فرض کنیم $\hat{X}=\hat{A}\hat{A}^\dagger$ آن‌گاه:
$$\hat{X}^\dagger=(\hat{A}\hat{A}^\dagger)^\dagger=(\hat{A}^\dagger)^\dagger\hat{A}^\dagger=\hat{A}\hat{A}^\dagger=\hat{X}$$

بنابراین $\hat{A}\hat{A}^\dagger$ هم عملگری هرمیتی است.

مثال۲: اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو عملگر هرمیتی و ناسازگار باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $[\hat{A},\hat{B}]$ هرمیتی است. ۲) $\{\hat{A},\hat{B}\}$ هرمیتی است. ۳) $\hat{A}\hat{B}$ هرمیتی است. ۴) گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را ناسازگار می‌خوانند، هرگاه $[\hat{A},\hat{B}]\neq 0$، از طرفی عملگر $\hat{X}$ هرمیتی است اگر $\hat{X}^\dagger=\hat{X}$ بنابراین گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام یک پاسخ درست است.

بررسی گزینه ۱:
$$([\hat{A},\hat{B}])^\dagger=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^\dagger=(\hat{A}\hat{B})^\dagger-(\hat{B}\hat{A})^\dagger=\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger-\hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger=\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}=-(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})=-[\hat{A},\hat{B}]\Rightarrow[\hat{A},\hat{B}]^\dagger\neq[\hat{A},\hat{B}]$$

پس $[\hat{A},\hat{B}]$ غیر هرمیتی است.

بررسی گزینه ۲:
$$(\{\hat{A},\hat{B}\})^\dagger=(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A})^\dagger=(\hat{A}\hat{B})^\dagger+(\hat{B}\hat{A})^\dagger=\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger+\hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger=\hat{B}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}=\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=\{\hat{A},\hat{B}\}$$

از این رو $\{\hat{A},\hat{B}\}$ عملگری هرمیتی است.

بررسی گزینه ۳:
$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger=\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger=\hat{B}\hat{A}\Rightarrow(\hat{A}\hat{B})^\dagger\neq\hat{A}\hat{B}$$

بنابراین $\hat{A}\hat{B}$ غیر هرمیتی است.

نکته۱۹: توجه کنید که اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ عملگرهای سازگار باشند، در این صورت $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$ است و هر سه گزینه درست خواهد بود.

مثال۳: اگر $\hat{A}$ عملگری هرمیتی باشد، آنگاه $e^{i\hat{A}}$ .... است.

۱) هرمیتی ۲) یکانی ۳) نا مشخص ۴) پادهرمیتی

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عملگر $\hat{A}$ را هرمیتی می‌گویند هرگاه $\hat{A}^\dagger=\hat{A}$. عملگر $\hat{U}$ یکانی است هرگاه $\hat{U}^\dagger\hat{U}=\hat{1}$. با توضیحات فوق همیوغ هرمیتی $e^{i\hat{A}}$ را بررسی می‌کنیم:

$$(e^{i\hat{A}})^\dagger=e^{-i\hat{A}^\dagger}\xrightarrow{\hat{A}\text{ هرمیتی است}}e^{-i\hat{A}^\dagger}=e^{-i\hat{A}}\Rightarrow(e^{i\hat{A}})^\dagger=e^{-i\hat{A}}$$

طرفین عبارت بالا را از راست در $e^{i\hat{A}}$ ضرب می‌کنیم:
$$(e^{i\hat{A}})^\dagger e^{i\hat{A}}=e^{-i\hat{A}}e^{i\hat{A}}=e^{0}=\hat{1}\Rightarrow(e^{i\hat{A}})^\dagger(e^{i\hat{A}})=\hat{1}$$

از این رو عملگر $e^{i\hat{A}}$، عملگری یکانی است.

مثال۴: کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱) در مکانیک کوانتومی طیف همه مشاهده‌پذیرهای فیزیکی گسسته است.

۲) در مکانیک کوانتومی طیف همه مشاهده‌پذیرهای فیزیکی پیوسته است.

۳) بعضی مشاهده‌پذیرها در مکانیک کوانتومی دارای طیف‌های پیوسته هستند.

۴) طیف ویژه مقادیر انرژی برای همه پتانسیل‌های کوانتومی گسسته است.

پاسخ: گزینه «۳» در متن پیش از تست توضیح داده شد. برای نادرستی گزینه ۴ مثال ذره در چاه متناهی پتانسیل را یادآوری می‌کنیم:

$V(x)=\begin{cases}-V_۰ & ;\ \text{درون چاه}\\ ۰ & ;\ \text{بیرون چاه}\end{cases}$ ، برای انرژی‌های مثبت $(E>۰)$ طیف ویژه مقادیر پیوسته و برای انرژی‌های منفی $(E<۰)$ ویژه مقدارهای انرژی گسسته‌اند.

مثال۵: هامیلتونی یک سامانه یک بعدی با رابطه $\hat{H}=A\hat{p}^۲+B\hat{x}^۲$ داده می‌شود که در آن A و B اعداد ثابت‌اند. کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=-۲B\langle\hat{x}\rangle$ ۲) $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=۲B\langle\hat{x}\rangle$ ۳) $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=B\langle\hat{x}\rangle$ ۴) $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=-B\langle\hat{x}\rangle$

پاسخ: گزینه «۱» از آنجا که عملگر تکانه خطی $\hat{p}$ وابستگی صریح زمانی ندارد، تحول زمانی مقدار چشمداشتی آن از رابطهٔ $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle$ بدست می‌آید:

$[\hat{H},\hat{p}]=[A\hat{p}^۲+B\hat{x}^۲,\hat{p}]=A[\hat{p}^۲,\hat{p}]+B[\hat{x}^۲,\hat{p}]$

اما حاصل $[\hat{p}^۲,\hat{p}]$ صفر است زیرا هر عملگری با تابعی از خود جابه‌جا می‌شود. اما حاصل $[\hat{x}^۲,\hat{p}]$ عبارتست از: $[\hat{x}^۲,\hat{p}]=۲\hat{x}i\hbar$، بنابراین: $[\hat{H},\hat{p}]=۲i\hbar B\hat{x}$

از این رو داریم: $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=\frac{i}{\hbar}\langle ۲i\hbar B\hat{x}\rangle \Rightarrow \boxed{\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=-۲B\langle\hat{x}\rangle}$

مثال۶: کدام مورد بیان درست قضیه اهرنفست است؟

۱) $m\frac{d^۲\langle\vec{x}\rangle}{dt^۲}=-\vec{\nabla}\langle V(x)\rangle$ ۲) $m\frac{d^۲}{dt^۲}\langle\vec{x}\rangle=-\langle\vec{\nabla}V(x)\rangle$ ۳) $m\frac{d^۲\langle\vec{x}\rangle}{dt^۲}=\langle\vec{\nabla}V(x)\rangle$ ۴) $m\frac{d^۲\langle\vec{x}\rangle}{dt^۲}=\vec{\nabla}\langle V(x)\rangle$

پاسخ: گزینه «۲» توضیح کامل در متن درس آمده است. (البته توجه داشته باشید که $\vec{\nabla}V(x)=\frac{dV(x)}{dx}$.

مثال۷: تحت چه شرایطی تحول زمانی مقدار چشمداشتی $\hat{x}$ در مکانیک کوانتومی مانند تحول زمانی مکان (x) در مکانیک کلاسیک است؟

۱) همواره تحول زمانی مقدار چشمداشتی $\hat{x}$، مطابق تحول زمانی متغیر کلاسیک x است.

۲) در شرایطی که پتانسیل، تابع کندتغییری از شناسه خود باشد.

۳) در حالتی که ذره آزاد باشد.

۴) موارد ۲ و ۳ درست است.

پاسخ: گزینه «۴» معادله کلاسیک (قانون دوم نیوتن) حاکم بر متغیر x عبارت است از: $m\frac{d^۲x}{dt^۲}=-\frac{dV(x)}{dx}$

بنابر قضیه اهرنفست، مقدار چشمداشتی x در مکانیک کوانتومی از رابطه $m\frac{d^۲\langle x\rangle}{dt^۲}=-\langle\frac{dV(x)}{dx}\rangle$ پیروی می‌کند. اگر ذره آزاد باشد، در این صورت $\frac{dV}{dx}=۰$ و بنابراین تحول زمانی x در مکانیک کلاسیک به مانند تحول زمانی $<x>$ در مکانیک کوانتومی در می‌آید. پس گزینه ۳ تا اینجا درست است. اگر V تابع کندتغییری از x باشد، معادله کوانتومی، مشابه معادله کلاسیک می‌شود، بنابراین گزینه ۲ هم درست است. بنابراین پاسخ صحیح هر دو گزینه ۲ و ۳ است.

آزمون فصل ششم

۱ـ اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هرمیتی باشند، کدام یک از عملگرهای زیر هرمیتی نیست؟

۱) $\hat{A}\hat{B}$ ۲) $(\hat{A}+\hat{B})^n$ ۳) $i(\hat{A}-\hat{A}^\dagger)$ ۴) $(\hat{A}+\hat{B}^\dagger)$

۲ـ هامیلتونی الکترون در یک میدان الکتریکی نوسانی داده شده است. $H=\frac{\hat{p}^2}{2m}-eE_\circ\cos(\omega t)\hat{x}$، $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle$ ۲) $eE_\circ\omega\sin(\omega t)\langle\hat{x}\rangle$ ۳) $eE_\circ\langle\cos\omega t\rangle$ ۴) $eE_\circ\omega\sin(\omega t)\langle\hat{x}\rangle$

۳ـ دو حالت $\langle\psi|$ و $|x\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شوند که در آن $\langle\phi_1|$ و $\langle\phi_2|$ پایه‌های کامل و راست هنجار فضااند $tr(|\psi\rangle\langle x|)$ برابر است با:

$$|\psi\rangle=9i|\phi_1\rangle+2|\phi_2\rangle \quad \text{و} \quad |x\rangle=\frac{-i}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle$$

۱) $\frac{-7}{\sqrt{2}}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{11}{\sqrt{2}}$

۴ـ کدام یک از عملگرهای زیر قطعاً یکانی نیست؟

۱) $\frac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}}$ ۲) $\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}}$ ۳) $e^{i\varepsilon\hat{G}}$ ۴) $\hat{x}\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{x}$

۵ـ کدام یک از عملگرهای زیر پادهرمیتی‌اند؟ اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هرمیتی باشند.

۱) $\{\hat{A},\hat{B}\}$ ۲) $\hat{B}\hat{A}$ ۳) $[\hat{A},\hat{B}]$ ۴) $\hat{A}+\hat{A}^\dagger$

۶ـ کدام گزینه در مورد عملگر هرمیتی A به صورت صحیح بیان شده است؟

۱) ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی $\hat{A}$ لزوماً حقیقی است و ویژه کت‌های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت A متعامداند.

۲) ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی $\hat{A}$ لزوماً حقیقی نیست ولی ویژه کت‌های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت A متعامداند.

۳) ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی $\hat{A}$ لزوماً حقیقی است ولی ویژه کت‌های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت A لزوماً متعامد نیستند.

۴) ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی $\hat{A}$ لزوماً حقیقی نیست و ویژه کت‌های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت نیز لزوماً متعامد نیستند.

۷ـ کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

۱) $Tr(\hat{A}^\dagger)=(Tr(\hat{A}))^*$ ۲) $Tr(\alpha\hat{A}+\beta\hat{B})=\alpha Tr(\hat{A})+\beta Tr(\hat{B})$

۳) $tr(\hat{A}\hat{B})\neq Tr(\hat{B}\hat{A})$ ۴) $Tr(\hat{A})=\sum_n\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle$

۸ـ کدام یک از موارد زیر درست بیان نشده است؟

۱) $(\det(\hat{A}))^*=\det(\hat{A}^\dagger)$ ۲) $\det(\hat{A}+\hat{B})=\det(\hat{A})+\det(\hat{B})$

۳) $Tr(\hat{A})=\exp(Tr(Ln\,\hat{A}))$ ۴) $\det(\hat{A}\hat{B})=\det(\hat{A})\det(\hat{B})$

۹ـ برای عملگر هرمیتی $\hat{A}=i(\hat{x}^2+1)\frac{d}{dx}+i\hat{x}$ که در آن $\hat{A}\psi(x)=0$ است. کدام یک از گزینه‌ها معرف $\psi(x)$ می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{\pi(x^2+1)}}$ ۲) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{x^2+1}}$ ۴) $\frac{\pi}{1+x^2}$

۱۰ـ کدام یک از روابط زیر بدرستی بیان نشده است؟

۱) $[\hat{x}^m,\hat{p}]=im\hbar x^{m-1}$ ۲) $[F(\hat{x}),\hat{p}]=i\hbar\frac{dF(\hat{x})}{dx}$ ۳) $[\hat{H},\hat{x}]=\frac{2\hbar}{i}p$ ۴) $[L_x,xp_y]=i\hbar yp_z$

فصل هفتم

« مکانیک کوانتومی در سه بعد »

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال۱: در یک جعبه مکعبی نامتناهی شامل N الکترون (مانند یک حجم ماده رسانا) فاصله دو الکترون از یکدیگر حدوداً چه مقدار است؟

۱) یک نیم موج   ۲) یک موج   ۳) محدودیتی وجود ندارد   ۴) یک و نیم موج

پاسخ: گزینه «۱» بنابر اصل طرد پاؤلی و محاسبات متن، فاصله دو الکترون نمی‌تواند کم‌تر از یک نیم موج باشد: $d \geq \frac{\lambda_F}{۲}$ (در این‌جا d فاصله دو الکترون از هم است).

مثال۲: حاصل جابجائی $[\hat{L}_x , \hat{p}_y]$ کدام است؟

۱) $i\hbar\hat{p}_z$ ۲) $-i\hbar\hat{p}_y$ ۳) $-i\hbar\hat{p}_z$ ۴) $\circ$

پاسخ: گزینه «۱» بنا به تعریف، تکانه زاویه‌ای مداری از رابطهٔ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ بدست می‌آید. با توجه به این که در صورت تست L_x آمده است. باید مؤلفه x حاصل‌ضرب $\vec{r} \times \vec{p}$ را محاسبه کنیم: $L_x = (\vec{r} \times \vec{p})_x = yp_z - zp_y$

بنابراین داریم: $[\hat{L}_x , \hat{p}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y , \hat{p}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z , \hat{p}_y] - [\hat{z}\hat{p}_y , \hat{p}_y] = \hat{p}_z[\hat{y} , \hat{p}_y] - \hat{z}[\hat{p}_y , \hat{p}_y] = \hat{p}_z(i\hbar) = i\hbar\hat{p}_z$

در سطر دوم از این واقعیت استفاده کردیم که مؤلفه‌های تکانه خطی با هم جابجا می‌شوند.

مثال۳: کدام یک از عبارات زیر درست است؟

۱) مؤلفه‌های غیر یکسان تکانه زاویه‌ای مداری دارای ویژه توابع مشترک هستند.

۲) تحت هیچ شرایطی مؤلفه‌های غیر یکسان تکانه زاویه‌ای مداری نمی‌توانند ویژه توابع همزمان داشته باشند.

۳) مؤلفه‌های غیر یکسان تکانه زاویه‌ای مداری به جز در حالت $\vec{L} = \circ$ نمی‌توانند ویژه توابع همزمان داشته باشند.

۴) بسته به شرایط پتانسیل مسأله، مؤلفه‌های غیر یکسان تکانه زاویه‌ای مداری می‌توانند ویژه توابع همزمان داشته باشند.

پاسخ: گزینه «۳» به دلیل این که مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای مداری عموماً با یکدیگر جابجا نمی‌شوند، برای تشکیل مجموعهٔ مشاهده پذیرهای جابجا شونده، تنها یک مؤلفه $\vec{L}$ را می‌توان با H برگزید. معمولاً برای این منظور مؤلفه L_z را در نظر می‌گیرند.

مثال۴: در مکانیک کوانتومی برای یک ذره تحت پتانسیل مرکزی $V(\vec{r}) = V(r)$ می‌توان نوشت:

۱) H و L_z جابجا نمی‌شوند.   ۲) H و $L^۲$ و L_z با هم جابجا می‌شوند.

۳) H و L_x جابجا ناپذیرند.   ۴) L_x و L_z جابجا پذیرند.

پاسخ: گزینه «۲» $[\hat{H}, \hat{L}^۲] = \circ$ و $[\hat{H}, \hat{L}_z] = \circ$ و $[\hat{L}_z , \hat{L}^۲] = \circ$

$\hat{H}$، $\hat{L}^۲$ و $\hat{L}_z$ مجموعه کامل مشاهده پذیرهای جابجا شونده را تشکیل می‌دهند.

مثال۵: کدام یک از عبارات زیر درست نیست؟

۱) همواره $L^۲$، L_z و H با هم جابجا می‌شوند.

۲) همواره $L^۲$ و L_z با یکدیگر جابجا می‌شوند.

۳) تنها برای پتانسیل وابسته به فاصله، H، L_z و $L^۲$ با هم جابجا می‌شوند.

۴) نتیجه ناوردایی هامیلتونی تحت دوران، پایستگی مؤلفه تکانه زاویه‌ای حول محور دوران است.

پاسخ: گزینه «۳» تنها اگر پتانسیل به r (فاصله) بستگی داشته باشند، H، $L^۲$ و L_z مجموعهٔ کامل از مشاهده پذیرهای همزمان تشکیل خواهند داد.

مثال۶: تابع موج زاویه‌ای برای یک چرخنده صلب با اعداد کوانتومی $\ell = 1$ و $m = 1$ به صورت $Y_1^1(\theta,\varphi) = N\sin\theta e^{i\varphi}$ مشخص می‌شود ثابت بهنجارش N کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ ۲) $\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{8\pi}}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: قسمت زاویه‌ای تابع موج از رابطه $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}e^{im\varphi}P_\ell^m(\cos\theta)$ بدست می‌آید. مطابق فرض تست $m = 1$ و $\ell = 1$

بنابراین:

$$Y_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2(1)+1}{4\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}}e^{i\varphi}P_1^1(\cos\theta) \Rightarrow Y_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

روش دوم: می‌توان مستقیماً با استفاده از بهنجارش توابع زاویه‌ای مسأله را حل کرد:

$$\int |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2 d\Omega = 1 \Rightarrow \int_0^\pi\int_0^{2\pi} |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 1$$: شرط بهنجارش

در اینجا داریم:

$$|Y_1^1(\theta,\varphi)|^2 = Y_1^{1*}(\theta,\varphi)Y_1^1(\theta,\varphi) = N^*\sin\theta e^{-i\varphi}N\sin\theta e^{i\varphi} = |N|^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi\int_0^{2\pi}|N|^2\sin^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow |N|^2(\int_0^\pi\sin^2\theta\sin\theta d\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi = 1$$

از آن‌جا که $d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$ رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$|N|^2(2\pi)[-\int_1^{-1}\sin^2\theta d(\cos\theta)] = 1 \Rightarrow 2\pi|N|^2\int_{-1}^1\sin^2\theta d(\cos\theta) = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi|N|^2\int_{-1}^1(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = 1 \Rightarrow 2\pi|N|^2\int_{-1}^1(1-x^2)dx = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi|N|^2(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow 2\pi|N|^2\{1-\frac{1}{3}-(-1)+\frac{(-1)^3}{3}\} = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi|N|^2(\frac{4}{3}) = 1 \Rightarrow |N|^2(\frac{8\pi}{3}) = 1 \Rightarrow |N|^2 = (\frac{3}{8\pi}) \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}}$$

مثال۷: کدام یک از مجموعه‌ها که به ترتیب از راست به چپ بیان‌گر اعداد کوانتومی (m,ℓ) یک حالت فیزیکی هستند، غیر ممکن است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-2,2)$

پاسخ: گزینه «۳» قدر مطلق عدد کوانتومی مغناطیسی m هرگز نمی‌تواند بزرگ‌تر از عدد کوانتومی سمتی ℓ باشد، به عبارت دیگر همواره $|m| \le \ell$ در میان گزینه‌های موجود گزینه‌های ۱، ۲و ۴ واجد این شرط بوده و از این رو گزینه ۳ نادرست است.

مثال۸: $\hbar$ (یا به طور معادل h) چه دیمانسیونی دارد؟

۱) انرژی ۲) تکانه زاویه‌ای ۳) تکانه خطی ۴) بدون بعد است

پاسخ: گزینه «۲»

توضیح : ثابت پلانک، h دارای مقدار $h = 2\pi\hbar = 6/6\times10^{-34}$ j.s است که از جنس تکانه زاویه‌ای مداری است این موضوع را می‌توان از روابط گوناگون چون شرط کوانتش بور $(L = n\hbar)$ بلافاصله مشاهده کرد. روابط ویژه مقداری عملگر تکانه زاویه‌ای مداری هم نشان می‌دهد که $\hbar$ دارای ابعاد تکانه زاویه‌ای است:

$$\hat{L}^2Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\hbar^2Y_\ell^m \quad , \quad \hat{L}_zY_\ell^m = m\hbar Y_\ell^m$$

مثال۹: کدام گزینه در خصوص حاصل جابجایی $[\hat{L}_+ , \hat{L}_-]$ درست است؟

۱) $\hbar L_z$ ۲) $2\hbar L_z$ ۳) 0 ۴) $-2\hbar L_z$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: مستقیماً رابطه جابجایی را با جانشینی $\hat{L}_x + i\hat{L}_y$ به جای $\hat{L}_+$ و $\hat{L}_x - i\hat{L}_y$ به جای $\hat{L}_-$ و استفاده از خواص جابجاگرها بدست می‌آوریم:

$$[\hat{L}_+ , \hat{L}_-] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y , \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = [\hat{L}_x , \hat{L}_x] - i[\hat{L}_x , \hat{L}_y] + i[\hat{L}_y , \hat{L}_x] + [\hat{L}_y , \hat{L}_y]$$
$$= -i(i\hbar\hat{L}_z) + i(-i\hbar\hat{L}_z) = \hbar\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_z = 2\hbar\hat{L}_z$$

در سطر آخر از رابطه جابجایی بنیادی تکانه زاویه‌ای یعنی $[\hat{L}_x , \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ استفاده کردیم.

روش دوم: همین نتیجه را می‌توانستیم از روابط $\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$ بدست آوریم:

$$[\hat{L}_+ , \hat{L}_-] = \hat{L}_+\hat{L}_- - \hat{L}_-\hat{L}_+ \; ; \; \hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$\Rightarrow \hat{L}_+\hat{L}_- - \hat{L}_-\hat{L}_+ = \cancel{\hat{L}^2} - \cancel{\hat{L}_z^2} + \hbar\hat{L}_z - \cancel{\hat{L}^2} + \cancel{\hat{L}_z^2} + \hbar\hat{L}_z = 2\hbar\hat{L}_z \Rightarrow [\hat{L}_+ , \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۰: کدام یک از ترکیب‌های (n,ℓ,m) نمی‌تواند نمایانگر یک حالت کوانتومی باشد؟

۱) $(2,2,1)$ ۲) $(1,0,0)$ ۳) $(2,1,1)$ ۴) $(2,1,-1)$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مطالب بالا، در گزینه۱، $n = 2$ و $\ell = 2$ است که این مورد امکان ندارد زیرا حداکثر مقدار ممکن برای ℓ با n مفروض $n-1$ است که در این مسأله بیشینه ℓ باید برابر با $2-1=1$ باشد و ۲ نمی‌تواند باشد. اما این مطلب در مورد گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ برقرار است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۱: کدام یک از پتانسیل‌های شعاعی زیر نمی‌تواند معرف یک پتانسیل فیزیکی باشد؟

۱) $V(r) \propto r^2$ ۲) $V = cte$ ۳) $V(r) \propto \frac{1}{r}$ ۴) $V(r) \propto \frac{1}{r^2}$

پاسخ: گزینه «۴» به این تست به دو روش می‌توان پاسخ داد:

روش اول: (حذف گزینه‌های غلط)

گزینه اول همان پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی است. بنابراین یک پتانسیل مربوط به مسأله‌ای واقعی و فیزیکی است.

گزینه دوم (پتانسیل ثابت) مربوط به ذرهٔ آزاد است که این هم پتانسیلی فیزیکی و واقعی است.

گزینه سوم همان پتانسیل کولنی است که آن هم یک پتانسیل فیزیکی است.

بنابراین تنها گزینه صحیح گزینه ۴ است.

روش دوم:

پتانسیلهای شعاعی که معرف حالت‌های فیزیکی هستند باید در رابطه $\lim\limits_{r\to 0} r^2\, V(r) = 0$ صدق کنند.

گزینه‌های را تک تک امتحان می‌کنیم:

بررسی گزینه ۱: $\lim\limits_{r\to 0} r^2 V(r) \propto \lim\limits_{r\to 0} r^4 = 0$

پس گزینه ۱ می‌تواند پتانسیل معرف یک حالت فیزیکی باشد.

بررسی گزینه ۲: $\lim\limits_{r\to 0} r^2 V(r) \propto \lim\limits_{r\to 0} r^2 = 0$

پس گزینه ۲ هم می‌تواند معرف یک حالت فیزیکی باشد.

بررسی گزینه ۳: $\lim\limits_{r\to 0} r^2 V(r) \propto \lim\limits_{r\to 0} r = 0$

گزینه ۳ نیز معرف پتانسیلی فیزیکی است.

بررسی گزینه ۴: $\lim\limits_{r\to 0} r^2 V(r) \propto \lim\limits_{r\to 0} 1 \neq 0$

بنابراین گزینه ۴ نمی‌تواند معرف پتانسیلی فیزیکی باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۲: برای حالت‌های مقید واقع در یک پتانسیل شعاعی کدام گزینه می‌تواند نمایانگر بخش شعاعی معادله شرودینگر باشد؟ ($\frac{2mE}{\hbar^2}=-\alpha^2$)

۱) $Ae^{-\alpha r}+Be^{\alpha r}$　　۲) $e^{-\alpha r}$　　۳) $e^{\alpha r}$　　۴) گزینه‌های ۱ و ۲ درست است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حالت مقید، حالتی است که در آن $E<0$ باشد. از میان گزینه‌های موجود باید دنبال گزینه‌ای باشیم که در حد $r\to\infty$، متناهی باقی بماند. تنها گزینه ۲ واجد این شرایط است.

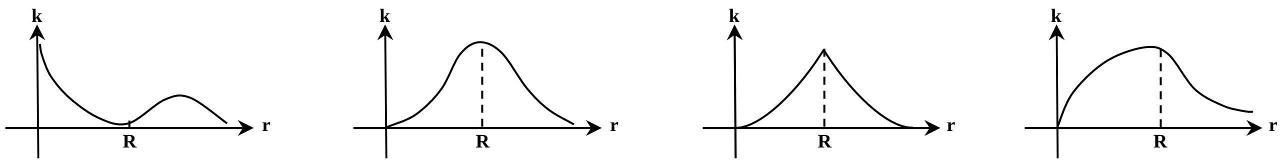
البته گزینه ۱ در صورتی می‌تواند صحیح باشد که جواب مجانبی را در نظر نداشته باشیم که این به معنای چشم‌پوشی از کلیت مسأله است. پس به طور کلی تنها پاسخ درست گزینه ۲ است.

مثال۱۳: از کدام یک از توابع زیر برای بررسی رفتار تابع موج بخش شعاعی معادله شرودینگر در حوالی مبدأ در مورد ذرهٔ آزاد می‌توان استفاده کرد؟

۱) توابع بسل کروی　　۲) توابع نویمان کروی　　۳) توابع هنکل کروی　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که در مسأله مبدأ تصریح شده است. جوابی که در مبدأ منظم باشد تنها توابع بسل کروی هستند.

مثال۱۴: تابع موج حالت پایه چاه پتانسیل کروی $V(r)=\begin{cases}-V_0 & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}$ به کدام شکل بیشتر شبیه است؟



(۴)　　(۳)　　(۲)　　(۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به مطالب گفته شده در متن.

مثال۱۵: کدام گزینه مقدار چشمداشتی عملگر انرژی جنبشی را برای یک ویژه حالت اختیاری اتم هیدروژن گونه (با Z اختیاری) به درستی نشان می‌دهد؟ ($\langle V\rangle$ مقدار چشمداشتی تابع (انرژی) پتانسیل است).

۱) $\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle$　　۲) $\langle T\rangle=-\langle V\rangle$　　۳) $\langle T\rangle=\langle V\rangle$　　۴) $\langle T\rangle=-2\langle V\rangle$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول: انرژی کل یک سامانه برابر با جمع انرژی‌های جنبشی (T) و پتانسیل (V) آن است.　$E=T+V\Rightarrow\langle E\rangle=\langle T\rangle+\langle V\rangle$

اما انرژی E از رابطهٔ $E=-\frac{1}{2}\mu c^2(\frac{Z\alpha}{n})^2$ بدست می‌آید.

از طرفی (انرژی) پتانسیل در دستگاه یکاهای گاوسی از رابطه $V=-\frac{Ze^2}{r}$ حاصل می‌شود، به این ترتیب داریم:

$$\langle-\frac{1}{2}\mu c^2(\frac{Z\alpha}{n})^2\rangle=\langle T\rangle+\langle-\frac{Ze^2}{r}\rangle=\langle T\rangle-Ze^2\langle\frac{1}{r}\rangle$$

از طرفی مقدار چشمداشتی $\frac{1}{r}$ را می‌دانیم:

$$\langle\frac{1}{r}\rangle=\frac{Z}{a_0n^2}$$

بنابراین داریم:

$$-\frac{1}{2}\mu c^2(\frac{Z\alpha}{n})^2=\langle T\rangle-Ze^2(\frac{Z}{a_0n^2})\Rightarrow\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\mu c^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}+\frac{Z^2e^2}{a_0n^2}$$

اما α، ثابت ساختار ریز در دستگاه گاوسی به صورت $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$ بیان می‌شود؛ به این ترتیب داریم:

$$\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\mu c^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}+\frac{Z^2\alpha\hbar c}{a_0 n^2};a_0=\frac{\hbar}{\mu c\alpha}\leftrightarrow\alpha=\frac{\hbar}{\mu c a_0}\Rightarrow\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\mu c^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}+\frac{Z^2\alpha\hbar c}{\frac{\hbar}{\mu c\alpha}n^2}=\frac{1}{2}\mu c^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow\langle T\rangle=\frac{1}{2}\cancel{\mu}\cancel{c^2}\frac{Z^2}{n^2}\frac{\hbar^2}{\mu^{\cancel{2}}\cancel{c^2}a_0^2}=\frac{1}{2}\hbar^2\frac{Z}{\mu a_0}\left(\frac{Z}{a_0n^2}\right)=\frac{\hbar^2 Z}{2\mu a_0}\langle\frac{1}{r}\rangle=\frac{\hbar^{\cancel{2}}Z}{2\cancel{\mu}\left(\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{\mu}c\alpha}\right)}\langle\frac{1}{r}\rangle=\frac{1}{2}Z\hbar\alpha c\langle\frac{1}{r}\rangle=\frac{Z\cancel{\hbar}}{2}\frac{e^2}{\cancel{\hbar}\cancel{c}}\cancel{c}\langle\frac{1}{r}\rangle$$

$$=\frac{Ze^2}{2}\langle\frac{1}{r}\rangle=-\frac{1}{2}\langle-\frac{Ze^2}{r}\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle\Rightarrow\boxed{\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle}$$

روش دوم: در اینجا از قضیه‌ای تحت عنوان قضیه ویریال (در خصوص پتانسیلهای شعاعی) بهره می‌جوئیم.

قضیه ویریال:

بنابر قضیه ویریال در خصوص نیروهای مرکزی اگر نیرو متناسب با r^n باشد ($F\propto r^n$) یا به طور معادل پتانسیل متناسب با r^{n+1} باشد ($V\propto r^{n+1}$) در آن صورت متوسط انرژی جنبشی $\langle T\rangle$ با متوسط انرژی پتانسیل $\langle V\rangle$ رابطه روبرو را داراست:

$$\langle T\rangle=\frac{n+1}{2}\langle V\rangle$$

در میدان‌های کولنی، $F\propto r^{-2}$ و از این رو $n=-2$ و بنابراین:

$$\langle T\rangle=\frac{-2+1}{2}\langle V\rangle\Rightarrow\boxed{\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle}$$

مثال۱۶: گردش الکترون در اتم هیدروژن را در نظر بگیرید. مقدار r برای هنگامی که احتمال یافتن آن برای حالت پایه بیشینه باشد، برابر است با: (a_0 شعاع بور است).

۱) a_0 ۲) $\frac{a_0}{r}$ ۳) $2a_0$ ۴) $\frac{a_0}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» حالت پایه اتم هیدروژن حالتی با کمینه انرژی است که در این حالت الکترون در مدار بور با شعاع بور a_0 واقع است.

آزمون فصل هفتم

۱ـ اگر سیستمی در حالتی قرار داشته باشد که ویژه حالت مشترک عملگرهای L_x و L_y باشد، آنگاه مقدار چشمداشتی عملگر L برابر است با :

۱) $\hbar$ ۲) $-2\hbar$ ۳) 0 ۴) $3\hbar$

۲ـ در صورتی که $|\ell,m\rangle$ ویژه حالت مشترک L^2 و L_z باشد، $\langle \ell,m|L_x|\ell,m\rangle$ چه مقدار خواهد بود؟

۱) $-2\hbar$ ۲) 0 ۳) $-\hbar$ ۴) $5\hbar$

۳ـ الکترونی در یک اتم هیدروژن در حالت برانگیخته $n=3$ قرار دارد تبهگنی این تراز چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۵

۴ـ برای یک الکترون که در حالت $\psi=\frac{1}{\sqrt{5}}(\psi_{2,1,1}+2\psi_{2,1,0}+2\psi_{3,1,2})$ قرار دارد $\langle L_z\rangle$ بر حسب $\hbar$ چه مقدار است؟

۱) $\frac{7}{5}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) 1 ۴) $\frac{4}{5}$

۵ـ یک الکترون در حالت $\psi=A(\psi_{1,0,0}+3\psi_{2,1,1}+2\psi_{3,2,-1})$ اتم هیدروژن قرار دارد، به طوری که A ضریب بهنجارش و مقداری ثابت است، اندازه گیری $\langle L^2\rangle$ چه نتیجه ای برحسب $\hbar^2$ می دهد؟

۱) 3 ۲) $\frac{9}{14}$ ۳) 4 ۴) $\frac{6}{15}$

۶ـ اگر تابع موج شعاعی الکترونی به صورت $\psi\propto\frac{r^2}{a_0^2}\exp\left(-r/3a_0\right)$ باشد، محتمل ترین فاصله این الکترون از هسته چقدر است؟

۱) $4a_0$ ۲) $5a_0$ ۳) $8a_0$ ۴) $9a_0$

۷ـ برای الکترونی که در حالت $\psi=\frac{1}{\sqrt{21}}(4\psi_{1,0,0}+\psi_{3,1,0}+2\psi_{3,1,1})$ اتم هیدروژن قرار دارد، احتمال اینکه از اندازه گیری انرژی مقدار $E_0/9$ بدست آید چقدر است؟ (منظور از E_0 همان انرژی حالت پایه اتم هیدروژن است)

۱) $\frac{6}{21}$ ۲) $\frac{5}{21}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۸ـ برای یک الکترون که در حالت $n=4,\ell=3,m=-2$ یک اتم هیدروژن گونه قرار دارد، $\langle L_x^2+L_y^2\rangle$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.

۹ـ اگر الکترونی در حالت ψ_{200} باشد، اندازه گیری زاویه بین بردار تکانه زاویه ای آن با محور z چه نتیجه ای را می دهد؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۸۰

۱۰ـ ذره ای تحت تأثیر پتانسیل $V(x,y,z)=\frac{1}{2}[\omega^2(x^2+y^2)+\omega'^2z^2]$ قرار دارد. تبهگنی حالتی با انرژی $E=4\hbar\omega+\frac{5}{2}\hbar\omega'$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ـ ذره‌ای تحت تأثیر پتانسیل $V(x,y,z)=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+3y^2+4z^2)$ قرار دارد. مقدار انرژی و واگنی حالت دوم برانگیخته این ذره به ترتیب برابر هستند با:

۱) $(2,\frac{7}{2}\hbar\omega)$ ۲) $(1,\frac{5}{2}\hbar\omega)$ ۳) $(2,\frac{9}{2}\hbar\omega)$ ۴) $(5,\frac{9}{2}\hbar\omega)$

۱۲ـ ذره ای تحت تأثیر پتانسیل $V(x,y,z)=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$ قرار گرفته است، بزرگ‌ترین مجموعه عملگرهای دو به دو جابجا شونده کدام گزینه است؟

۱) L^2,L_x ۲) H,L^2,L_x ۳) H,L_z ۴) H,L^2,L_z

۱۳ـ فرض کنید که تابع موج الکترونی به شکل $\psi(r,\theta,\phi)=-\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/a_0}\sin\theta e^{i\phi}$ است، کدام گزینه مقدار درست را برای $\langle p^2\rangle$ بدست می دهد؟

۱) $-\frac{me^2}{9a_0}$ ۲) $-\frac{me^2}{4a_0}$ ۳) $-\frac{2me^2}{9a_0}$ ۴) $-\frac{5me^2}{4a_0}$

۱۴ـ ذره ای به جرم m در چاه کروی $V(r)=\begin{cases}\infty & 0<r<a\\ 0 & a<r<b\\ \infty & r>b\end{cases}$ قرار دارد، ویژه مقادیر انرژی ذره با کدام گزینه داده می شوند؟ (در اینجا k به صورت $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ تعریف شده است)

۱) $j_\ell(kb)=0$
۲) $n_\ell(ka)=0$
۳) $\begin{cases}j_\ell(ka)+An_\ell(ka)=0\\ j_\ell(kb)+An_\ell(kb)=0\end{cases}$
۴) $j_\ell(ka)+An_\ell(kb)=0$

۱۵ـ ذره ای به جرم m در چاه کروی $V(r)=\begin{cases}-V_0 & 0<r<a\\ \infty & a>r>a\end{cases}$ قرار دارد، تابع موج این ذره به وسیله کدام گزینه داده می شود؟

۱) $\begin{cases}Aj_\ell(kr) & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases};\quad k=\frac{2mE}{\hbar^2}$
۲) $\begin{cases}An_\ell(kr) & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases};\quad k=\frac{2m(V_0+E)}{\lambda^2}$
۳) $\begin{cases}Ah^1_\ell(kr) & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases};\quad k=\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}$
۴) $\begin{cases}Aj_\ell(kr) & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases};\quad k=\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}$

۱۶ـ یک موج کروی درون رونده از بی نهایت به سمت یک کره سخت با پتانسیل $V(r)=\begin{cases}\infty & 0<r<a\\ 0 & a>r>a\end{cases}$ حرکت کرده و پس از پراکندگی از آن دوباره به سوی بی نهایت برمی گردد. مقدار اختلاف فاز بین موج فرودی و خروجی چه اندازه است؟

۱) $2n\pi$
۲) $2n\pi+ka$
۳) $n\pi+ka$
۴) $n\pi-ka$

۱۷ـ برای یک گاز الکترونی غیر نسبیتی که درون یک جعبه‌ی مکعبی به طول α قرار گرفته است تبهگنی حالاتی با انرژی $\frac{17\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ برابر است با :

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۸ـ برای یک گاز فوتونی فرین نسبیتی، یعنی $E=pc$ که در یک جعبه مکعبی به طول a قرار گرفته است، واگنی حالاتی با انرژی $\frac{2ch^2}{4a^2}$ برابر است با :

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۸

۱۹ـ فشار واگنی حاصل از یک گاز الکترونی محدود شده در یک ظرف مکعبی بر حسب چگالی عددی n (تعداد در واحد حجم) و جرم آن‌ها برابر است با:

۱) $\frac{n^{\frac{5}{3}}}{m}$
۲) $\frac{n^{\frac{4}{3}}}{m}$
۳) $\frac{n^{\frac{5}{3}}}{m^2}$
۴) $\frac{n^2}{m}$

۲۰ـ هامیلتونی یک چرخنده با تقارن استوانه ای به شکل $H=A(L_x^2+L_y^2)+BL_z(L_z^2-1)$ می باشد. ویژه مقادیر این چرخنده برای اندازه حرکت مداری $\ell=1$ چه مقادیری می توانند داشته باشند؟

۱) $2A, 2A-2B, 3A-B$
۲) $2A, 2A-2B, 3A-2B$
۳) $2A, 2B, A-2B$
۴) $A, -B, 3A-B$

فصل هشتم

« اسپین و جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای »

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال۱: کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) اسپین در مکانیک کوانتومی عیناً مشابه تکانه زاویه‌ای مداری در مکانیک کلاسیک است.

۲) تکانه زاویه‌ای ذاتی (اسپین) را نمی‌توان با توابع فضایی در مکانیک کوانتومی توصیف کرد.

۳) در مکانیک کوانتومی نه تکانه زاویه‌ای مداری و نه تکانه زاویه‌ای ذاتی هیچ‌یک قابل وصف برحسب توابع فضایی نیستند.

۴) موارد ۱ و ۲ درست است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برخلاف تکانه زاویه‌ای مداری در مکانیک کوانتومی که قابل وصف براساس توابع فضایی ($Y(\theta,\varphi)$ ها) است، اسپین قابل توصیف بر حسب توابع فضایی نیست و باید برای وصف آن فضایی مجرد و ریاضی به کار رود.

مثال۲: کدام یک از عبارات زیر درست است؟

۱) عملگرهای نردبانی اسپین $(\hat{S}_\pm)$ نمایانگر مشاهده‌پذیرهای فیزیکی هستند.

۲) عملگرهای نردبانی اسپین $(\hat{S}_\pm)$ عملگرهایی پادهرمیتی هستند.

۳) عملگرهای نردبانی اسپین $(\hat{S}_\pm)$ الحاقی هرمیتی یکدیگر هستند.

۴) گزینه‌های ۱ و ۳ درست است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عملگرهای نردبانی اسپین، عملگرهای غیرهرمیتی هستند بنابراین نمی‌توانند نمایانگر مشاهده‌پذیرهای فیزیکی باشند:

$$(\hat{S}_+)^\dagger=(\hat{S}_x+i\hat{S}_y)^\dagger=\hat{S}_x-i\hat{S}_y\neq\hat{S}_+ \quad ; \quad (\hat{S}_-)^\dagger=(\hat{S}_x-i\hat{S}_y)^\dagger=\hat{S}_x+i\hat{S}_y\neq\hat{S}_-$$

پس گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌تواند درست باشد. گزینه ۲ نیز نادرست است. زیرا عملگری مانند $\hat{X}$ را پادهرمیتی می‌خوانیم هرگاه $\hat{X}^\dagger=-\hat{X}$ و به وضوح $\hat{S}_+^\dagger\neq-\hat{S}_+$ و $\hat{S}_-^\dagger\neq-\hat{S}_-$.

اما گزینه ۳ گزینه درست است. زیرا $\hat{S}_-$ الحاقی هرمیتی $\hat{S}_+$ و $\hat{S}_+$ الحاقی هرمیتی $\hat{S}_-$ است:

$$(\hat{S}_+)^\dagger=(\hat{S}_x+i\hat{S}_y)^\dagger=\hat{S}_x-i\hat{S}_y=\hat{S}_- \quad ; \quad (\hat{S}_-)^\dagger=(\hat{S}_x-i\hat{S}_y)^\dagger=\hat{S}_x+i\hat{S}_y=\hat{S}_+$$

مثال۳: ماتریس $\hat{S}_x+\hat{S}_z$ در پایه‌های S_z برای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ ۲) $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ۳) $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ۴) $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\0&1\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نمایش ماتریس‌های $\hat{S}_x$ و $\hat{S}_z$ برای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$، در فضایی که توسط ویژه اسپینورهای $\langle+|$ و $\langle-|$ ایجاد می‌شود چنین است:

$$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x\doteq\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z\doteq\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

حاصل جمع $\hat{S}_x$ و $\hat{S}_z$ عبارت است از:

$$\Rightarrow \hat{S}_x+\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

مثال۴: کدام یک از مجموعه‌ها که به ترتیب از چپ به راست، بیان‌گر اعداد کوانتومی (n,ℓ,m_ℓ,m_s) یک حالت برای الکترون در اتم هیدروژن هستند، غیر ممکن است؟

۱) $(1,0,0,-\frac{1}{2})$ ۲) $(2,1,1,\frac{1}{2})$ ۳) $(2,0,0,\frac{1}{2})$ ۴) $(3,1,2,-\frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه «۴» عدد کوانتومی اصلی n تنها مقادیر درست نامنفی را به خود اختصاص می‌دهد، بنابراین در هر ۴ گزینه، n درست است. عدد کوانتومی ℓ، مقادیر درست از ۰ تا $n-1$ را به خود اختصاص می‌دهد. به عبارت دیگر، ℓ تنها مقادیر صحیحی را می‌گیرد که در رابطه $0\le\ell\le n-1$ صدق کند. گزینه‌ها را در این مورد بررسی می‌کنیم: در گزینه ۱، $n=1$ و $\ell=0$ و بنابراین مشکلی در این جا نداریم. در گزینه ۲، $n=2$ و $\ell=1$ این گزینه هم از لحاظ ℓ مشکلی ندارد. در خصوص گزینه ۳، $n=2$ و $\ell=0$ و باز هم ℓ مشکلی ندارد. در گزینه ۴ هم $n=3$ و $\ell=1$ و بنابراین این گزینه نیز از این لحاظ درست است.

عدد کوانتومی m_ℓ تنها می‌تواند مقادیر صحیح میان $+\ell$ و $-\ell$ را به خود بگیرد، بنابراین گزینه ۱ درست است (زیرا $\ell=m_\ell=0$). گزینه ۲ نیز درست است (زیرا $\ell=m_\ell=1$). گزینه ۳ هم درست است (زیرا $\ell=m_\ell=0$). اما گزینه ۴ نمی‌تواند درست باشد چون، $m_\ell=2>\ell=1$. پس پاسخ صحیح گزینه ۴ است. به لحاظ اسپینی همه گزینه‌ها درست هستند چون الکترون دارای اسپین $\frac{1}{2}$ بوده و ویژه مقدارهای m_s می‌تواند $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ باشد.

مثال۵: مقادیر ویژه ماتریس $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ عبارتند از:

۱) $-1,0,+1$ ۲) $-2,0,+2$ ۳) $2,0,1$ ۴) $2,0,0$

پاسخ: گزینه «۱» این یک مسأله ویژه مقداری است که با تشکیل معادله مشخصه، حل می‌شود؛ فرض کنید ویژه حالت را با یک ماتریس ستونی 3×1 نشان دهیم: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. در این صورت داریم:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

صورت ماتریس فوق، همان $\frac{\hat{S}_+}{\hbar\sqrt{2}}$ است.

در اینجا λ ویژه مقدار است؛ معادله مشخصه به صورت زیر داده می‌شود:

$$\det\left(\frac{\hat{S}_+}{\hbar\sqrt{2}}-\lambda\hat{1}\right)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-\lambda)(\lambda^2)+(1)(\lambda)=0\Rightarrow\lambda-\lambda^3=0\Rightarrow\lambda(1-\lambda^2)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\\lambda=1\\\lambda=-1\end{cases}$$

مثال۶: فرض کنید الکترون با اسپین S (و ممان مغناطیسی μ) در میدان مغناطیسی خارجی B_z قرار گرفته باشد. هامیلتونی مربوط به اندرکنش اسپین ـ میدان کدام است؟

۱) $\frac{e}{mc}B_zS_z$ ۲) $H=\vec{\mu}\times\vec{B}$ ۳) $\frac{e}{mc}B_zS_z^2$ ۴) $H=\frac{1}{2}\vec{\mu}.\vec{B}$

پاسخ: گزینه «۱». هرگاه ذره‌ای با گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ قرار بگیرد، دارای انرژی برهمکنش $H=-\vec{\mu}.\vec{B}$ خواهد بود. در اینجا رابطه $\vec{\mu}$ و اسپین $\vec{S}$ ذره به صورت $\vec{\mu}=\frac{-|e|}{mc}\vec{S}$ است. بنابراین:

$$H=-\frac{-|e|}{mc}\vec{S}.\vec{B}$$

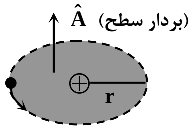
در اینجا $\vec{B}=B_z\hat{z}$. پس:

$$\boxed{H=\frac{|e|}{mc}S_zB_z}$$

مثال۷: گشتاور مغناطیسی الکترون با اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ (بدون در نظر گرفتن اسپین) در دستگاه SI کدامست؟

۱) $\vec{\mu}=0$ ۲) $\vec{\mu}=\frac{|e|}{2m}\vec{L}\times\vec{L}$ ۳) $\vec{\mu}=-\frac{|e|}{2m}\vec{L}$ ۴) $\vec{\mu}=\frac{|e|}{2m}\vec{L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» الکترون در گردش خود به دور هسته، ایجاد یک گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ می‌کند. فرض کنید مدار حرکت الکترون پیرامون هسته دایره‌ای به شعاع r باشد:



در این صورت اندازه گشتاور مغناطیسی الکترون برابر است با: $|\vec{\mu}|=IA$

در این رابطه I جریانی است که الکترون تولید می‌کند: $I=\frac{e}{T}$؛ T دوره تناوب حرکت مداری الکترون است. A مساحت مدار الکترون به دور هسته است: $A=\pi r^2$، اگر الکترون دارای سرعت v باشد، در این صورت داریم: $v=\frac{2\pi r}{T}$. بنابراین:

$$v=\frac{2}{T}\frac{A}{r}\Rightarrow A=\frac{vTr}{2}$$

به این ترتیب اندازه گشتاور مغناطیسی الکترون بدست می‌آید:

$$|\vec{\mu}|=\frac{e}{T}\frac{vTr}{2}=\frac{1}{2}erv$$

از طرفی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون پیرامون هسته، عبارت است از:

$$|\vec{L}|=rp=rmv$$

به این ترتیب $rv=\frac{|\vec{L}|}{m}$ و از این رو خواهیم داشت:

$$|\vec{\mu}|=\frac{1}{2}e\frac{|\vec{L}|}{m}$$

از آنجا که بار الکترون منفی است،جهت $\vec{\mu}$ مخالف جهت $\vec{A}$ است. $\vec{A}$، بردار سطح عمود بر سطح مدار الکترون و در جهت $\vec{L}$ است. به این ترتیب داریم:

$$\boxed{\vec{\mu}=-\frac{|e|}{2m}\vec{L}}$$

مثال۸: آزمایش اشترن ـ گرلاخ در فیزیک کوانتومی چه پدیده‌ای را توجیه می‌کند؟

۱) الکترون یک فرمیون است و اسپین آن کوانتیده است. ۲) الکترون فاقد اسپین است.
۳) الکترون فقط می‌تواند اسپین بالا داشته باشد. ۴) الکترون تنها می‌تواند اسپین پائین داشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» (با توجه به مطالب گفته‌شده در متن)

مثال۹: در آزمایشی مؤلفه z اسپین یک الکترون را اندازه می‌گیریم و مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ بدست می‌آید. سپس S^2 را اندازه می‌گیریم و بعد دو باره مؤلفه z اسپین را اندازه‌گیری می‌کنیم. احتمال این که مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ بدست آید چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجا که $[S^2,S_z]=0$، یعنی عملگرهای $\hat{S}^2$ و $\hat{S}_z$ مشاهده‌پذیرهای سازگار هستند، اندازه‌گیری یکی تأثیری بر اندازه‌گیری دیگری نمی‌گذارد. پس اگر S_z مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ را بدهد، بار دیگر نیز به طور یقین مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ را بدست خواهد داد. در این صورت احتمال بدست آمدن نتیجه $-\frac{\hbar}{2}$، صفر است.

مثال۱۰: الکترونی در ویژه پایه‌های S_z در حالت اسپینی $\chi=A\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}$ قرار دارد. اگر S_y را روی این الکترون اندازه‌گیری کنیم، چه مقداری برای $+\frac{\hbar}{2}$ بدست می‌آید؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{17}{18}$ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پیش از هر چیزی باید حالت χ را بهنجار کنیم:

$$\chi^\dagger\chi=1 \Rightarrow A^*(1+2i\,,\,2)A\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}=1 \Rightarrow |A|^2(1+4+4)=1 \Rightarrow 9|A|^2=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3} \Rightarrow \chi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}$$

حالت χ قابل بسط برحسب ویژه اسپینورهای $\langle +|$ و $\langle -|$ است:

$$\chi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}[\begin{pmatrix}1-2i\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}]=\frac{1}{3}[(1-2i)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]=\frac{1-2i}{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \chi=\frac{1-2i}{3}|+\rangle+\frac{2}{3}|-\rangle$$

می‌خواهیم احتمال یافتن سیستم در حالت $\langle +;s_y|$ را بیابیم. پس باید عبارت $|\langle s_y;+|\chi\rangle|^2$ را محاسبه کنیم. همانگونه که می‌دانیم $|s_y;+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$. بنابراین:

$$\langle s_y;+|\chi\rangle=(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +|-\frac{i}{\sqrt{2}}\langle -|)(\frac{1-2i}{3}|+\rangle+\frac{2}{3}|-\rangle)$$

$$=\frac{1-2i}{3\sqrt{2}}\langle +|+\rangle+\frac{2}{3\sqrt{2}}\langle +|-\rangle-\frac{i(1-2i)}{3\sqrt{2}}\langle -|+\rangle-\frac{2i}{3\sqrt{2}}\langle -|-\rangle=\frac{1-2i}{3\sqrt{2}}-\frac{2i}{3\sqrt{2}}=\frac{1-4i}{3\sqrt{2}}$$

در سطر آخر از تعامد ویژه کت‌های $\langle +|$ و $\langle -|$ استفاده کردیم ($0=\langle +|-\rangle=\langle -|+\rangle$ و $1=\langle -|-\rangle=\langle +|+\rangle$) به این ترتیب احتمال مطلوب بدست می‌آید:

$$P=|\langle s_y;+|\chi\rangle|^2=|\frac{1-4i}{3\sqrt{2}}|^2=\frac{1+4i}{3\sqrt{2}}\times\frac{1-4i}{3\sqrt{2}}=\frac{1+16}{18}=\frac{17}{18} \Rightarrow \boxed{P=\frac{17}{18}}$$

مثال۱۱: تابع حالت الکترونی در میدان مغناطیسی که با بردار $\vec{A}$ مشخص می‌شود، $\psi(\vec{r},t)$ است. اگر $\vec{A}$ به $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ تغییر یابد که در آن Λ تابع دلخواهی از $\vec{r}$ و t است، در این صورت تابع موج ذره کدام است؟

۱) $\psi(\vec{r},t)$　۲) $e^{\frac{-ie\Lambda}{\hbar}}\psi(\vec{r},t)$　۳) $e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar}}\psi(\vec{r},t)$　۴) $\Lambda\psi(\vec{r},t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تحت تبدیل پیمانه‌ای $\vec{A}'\to\vec{A}+\nabla\Lambda$ ، تابع موج ذره باردار q به $e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar}}\psi$ تبدیل می‌شود. در اینجا ذره باردار الکترون است، پس $q=-e$ در نتیجه: $\psi'=e^{\frac{-ie\Lambda}{\hbar}}\psi$.

مثال۱۲: حالت اسپینی دو الکترون را با $\chi_\pm^{(1)}$ و $\chi_\pm^{(2)}$ نشان می‌دهیم. کدام گزینه حالت $S_{tot}=0$ و $S_z=0$ را نمایش می‌دهد؟

۱) $\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$　۲) $\chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}-\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$　۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}+\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ ویژه کت‌های حالت اسپینی سه‌تایی $(S=1)$ هستند در حالیکه ویژه کت اسپین کل صفر، یعنی حالت یکتایی $(S=0)$ گزینه ۳ است.

مثال۱۳: دو ذره بدون اسپین با اندازه حرکت‌های زاویه‌ای $\ell_1=1$ و $\ell_2=3$ در نظر می‌گیریم. مجموع تعداد حالات ممکن برای اندازه حرکت زاویه‌ای کل برابر کدام است؟

۱) ۷　۲) ۹　۳) ۱۳　۴) ۲۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای کل ℓ تنها می‌تواند مقادیر صحیح میان دو حد $|\ell_1+\ell_2|$ و $|\ell_1-\ell_2|$ را اختیار کند:

$$|\ell_1-\ell_2|\le\ell\le|\ell_1+\ell_2| \Rightarrow |1-3|\le\ell\le|1+3| \Rightarrow 2\le\ell\le4 \Rightarrow \ell=2,3,4$$

اما به ازای هر مقدار ℓ، $2\ell+1$ حالت مختلف وجود دارد. پس به ازای $\ell=2$، $2(2)+1=5$ حالت، به ازای $\ell=3$، $2(3)+1=7$ حالت و به ازای $\ell=4$، $2(4)+1=9$ حالت وجود دارد. بدین ترتیب مجموع حالات ممکن برای اندازه حرکت زاویه‌ای کل عبارت است از: $5+7+9=21$

مثال۱۴: ذره‌ای با اسپین ۱ در پتانسیل مرکزی $V(r)=V_1(r)+\frac{\vec{S}.\vec{L}}{\hbar^2}V_2(r)+\frac{(\vec{S}.\vec{L})^2}{\hbar^4}V_3(r)$ حرکت می‌کند. کدام گزینه مقدار $V(r)$ را برای حالت $J=L$ بیان می‌کند؟

۱) $V_1(r)+V_2(r)-V_3(r)$ ۲) $V_1(r)-V_2(r)+V_3(r)$ ۳) $V_3(r)+-V_2(r)$ ۴) $V_1(r)+V_2(r)+V_3(r)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید تأثیر $V(r)$ را بر ویژه حالت $|j,\ell,s,m_j\rangle$ بدانیم؛ پیش از آن باید $\vec{S}.\vec{L}$ را برحسب مشاهده‌پذیرهای $\hat{\vec{J}}^2$، $\hat{\vec{L}}^2$، $\hat{\vec{S}}^2$ و $\hat{J}_z$ بیان کنیم:

$$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}} \Rightarrow \hat{\vec{J}}^2=(\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}})^2=\hat{\vec{L}}^2+\hat{\vec{S}}^2+2\hat{\vec{L}}.\hat{\vec{S}} \Rightarrow \hat{\vec{S}}.\hat{\vec{L}}=\frac{1}{2}(\hat{\vec{J}}^2-\hat{\vec{L}}^2-\hat{\vec{S}}^2)$$

به این ترتیب $V(r)$ به صورت مقابل در می‌آید:

$$\hat{V}(r)=V_1(r)+\frac{1}{2\hbar^2}(\hat{\vec{J}}^2-\hat{\vec{L}}^2-\hat{\vec{S}}^2)V_2(r)+\frac{1}{\hbar^4}[\frac{1}{2}(\hat{\vec{J}}^2-\hat{\vec{L}}^2-\hat{\vec{S}}^2)]^2V_3(r)$$

اما بنابر فرض تست، $\vec{J}=\vec{L}$، پس رابطه بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\hat{V}(r)=V_1(r)+\frac{1}{2\hbar^2}(-\hat{\vec{S}}^2)V_2(r)+\frac{1}{4\hbar^2}[(-\hat{\vec{S}}^2)]^2V_3(r)$$

$$\Rightarrow \hat{V}(r)|j,\ell,s,m_j\rangle=V_1(r)|j,\ell,s,m_j\rangle-\frac{V_2(r)}{2\hbar^2}\hat{\vec{S}}^2|j,\ell,s,m_j\rangle+\frac{V_3(r)}{4\hbar^4}\hat{\vec{S}}^4|j,\ell,s,m_j\rangle$$

$$=V_1(r)|j,\ell,s,m_j\rangle-\frac{V_2(r)}{2\hbar^2}s(s+1)\hbar^2|j,\ell,s,m_j\rangle+\frac{V_3(r)}{4\hbar^2}(s(s+1)\hbar^2)^2|j,\ell,s,m_j\rangle$$

$$=[V_1(r)-\frac{1}{2}V_2(r)s(s+1)+\frac{1}{4}V_3(r)s^2(s+1)^2]|j,\ell,s,m_j\rangle$$

پس مقدار $V(r)$ عبارت است از:

$$V_1(r)-\frac{1}{2}V_2(r)s(s+1)+\frac{1}{4}V_3(r)s^2(s+1)^2$$

اما بنابر فرض تست، $s=1$ از این رو داریم:

$$\boxed{V(r)=V_1(r)-V_2(r)+V_3(r)}$$

مثال۱۵: دو الکترون را در حالت یکتایی اسپین در نظر بگیرید. اگر اندازه‌گیری اسپین یکی از الکترون‌ها نشان دهد که این الکترون در حالتی با $S_z=\frac{1}{2}$ است، احتمال این که اندازه‌گیری مؤلفه z اسپین الکترون دیگر مقدار $S_z=\frac{1}{2}$ را بدست دهد، چیست؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) اطلاعات مسأله ناقص است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حالت یکتایی اسپین (یعنی حالت $S=0$) با اسپینور مقابل نمایش داده می‌شود:

$$\chi_{singlet}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$$

$|\uparrow\downarrow\rangle$ مربوط به حالتی است که مؤلفه z اسپین الکترون اول بالا و مؤلفه z اسپین الکترون دوم پائین باشد. $|\downarrow\uparrow\rangle$ مربوط به حالتی است که مؤلفه z اسپین الکترون اول پائین و مؤلفه z اسپین الکترون دوم بالا باشد. هر دو حالت با احتمال ۵۰% امکان‌پذیر است. اما نکته مهم این است که در هر دو حالت مؤلفه‌های اسپین پاد موازی هستند. یعنی اگر اندازه‌گیری S_z روی یک الکترون مقدار $\pm\frac{\hbar}{2}$ را نتیجه دهد، الکترون دوم دارای مقدار S_z مخالف یعنی $\mp\frac{\hbar}{2}$ خواهد بود. پس اگر از اندازه‌گیری اسپین الکترون اول مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ را بدست آوریم، الکترون دوم (با قطعیت) دارای مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ خواهد بود و بنابراین احتمال یافتن آن در حالتی با $S_z=+\frac{\hbar}{2}$ صفر است.

آزمون فصل هشتم

۱ـ با فرض رابطه مقابل، کدام گزینه درست است؟ $\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = 0$

۱) $\ell = 0$ ۲) $\ell = 1, 0$ ۳) $\ell = 1$ ۴) $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$

۲ـ ذره‌ای با تابع موج زیر بیان می‌شود. احتمال بدست آوردن $6\hbar^2$ برای مقدار چشمداشتی اندازه حرکت زاویه‌ای چقدر است؟

$$\psi(\vec{r}) = Nr^2e^{-\alpha r^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\right)\left\{\frac{1}{i}(y_2^2 - y_2^{-2}) - \frac{1}{i}(y_2^1 + y_2^{-1}) - (y_2^1 - y_2^{-1})\right\}$$

۱) $\frac{10\pi}{15}|N|^2$ ۲) $\frac{4\pi}{15}|N|^2$ ۳) $\frac{12\pi}{15}|N|^2$ ۴) $\frac{16}{15}\pi|N|^2$

۳ـ کدامیک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند بیانگر مجموعه اعداد کوانتومی (n, l, m, m_s) باشد؟

۱) $(3, 2, 1, \frac{1}{2})$ ۲) $(4, 1, -1, \frac{-1}{2})$ ۳) $(4, 3, -2, \frac{1}{2})$ ۴) $(6, 1, 2, \frac{1}{2})$

۴ـ تابع حالت یک ذره به صورت $\psi = A[\psi_{42-1} - 2\psi_{43-1} + \sqrt{3}\,\psi_{42-1}]$ است، این تابع ویژه حالت کدام دسته از عملگرها بطور همزمان می‌باشد؟

۱) L^2, H ۲) L_z, L^2, H ۳) L_z, L^2 ۴) L_z, H

۵ـ تابع موج ذره‌ای به صورت $\psi = N(xy + xz + zx)e^{-\alpha r^2}$ است. در اندازه‌گیری L^2 کدام دسته امکان‌پذیر است؟

۱) صفر، $6\hbar^2, 4\hbar^2$ ۲) $6\hbar^2, 2\hbar^2$ ۳) $6\hbar^2$ ۴) $12\hbar^2, 6\hbar^2, 2\hbar^2$

۶ـ کدامیک از موارد زیر مخالف صفر است؟

۱) $\langle jm|J_+^2|jm\rangle$ ۲) $\langle jm|J_-^2|jm\rangle$ ۳) $\langle jm|J_x^2|jm\rangle$ ۴) $\langle jm|J_x|jm\rangle$

۷ـ سطوح انرژی ذره‌ای با اسپین $S = \frac{3}{2}$ و هامیلتونی $\hat{H} = \frac{\alpha}{\hbar^2}(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 - 2\hat{S}_z^2) - \frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_z$ که در آن α و β ثابت‌اند در کدام گزینه بدرستی آمده است؟

۱) $\frac{15}{4}\alpha - \frac{m}{4}(3\alpha m + \beta)$ ۲) $\frac{15}{4}\alpha + \frac{m}{4}(3\alpha m + \beta)$ ۳) $\frac{15}{2}\alpha - \frac{m}{2}(3\alpha m - \beta)$ ۴) $\frac{15}{2}\alpha - \frac{m}{2}(3\alpha m + \beta)$

۸ـ کدامیک از موارد زیر برای جای خالی رابطه $\Delta J_x \Delta J_y \geq \cdots$ مناسب‌تر است؟

۱) $\frac{m^2\hbar^2}{2}$ ۲) $\frac{m\hbar}{2}$ ۳) $\frac{\hbar}{2}|\langle J_z\rangle|^2$ ۴) $\frac{\hbar}{2}|\langle J_z\rangle|$

۹ـ $\vec{S}$ عملگر اسپینی الکترونی است که در رابطه زیر داده شده، احتمال بدست آوردن $+\frac{\hbar}{2}$ از اندازه‌گیری $\hat{S}_z$ کدام است. ($\hat{n}$ برداری که در صفحه xz است) $\hat{n}\cdot\vec{s}|\lambda\rangle = \frac{\hbar}{2}\lambda|\lambda\rangle$

۱) $\cos^2\theta$ ۲) $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ۳) $\sin^2\theta$ ۴) $\sin^2\frac{\theta}{2}$

۱۰ـ هامیلتونی سیستمی به صورت $\hat{H} = \varepsilon\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ است که در آن ε ثابت و $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$ ماتریس‌های پاؤلی‌اند، $\hat{n}$ بردار واحد اختیاری است، ویژه مقادیر انرژی کدامند؟

۱) $\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta$ ۲) $-\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\cos\theta$ ۳) $-\varepsilon\sin\theta, \varepsilon\sin\theta$ ۴) $-\varepsilon, \varepsilon$

۱۱ـ سیستمی با $j = 1$ را در نظر بگیرید. اگر سیستم در حالت $j_x = -\hbar$ باشد، ΔJ_z کدام است؟

۱) $\frac{\hbar}{2}$ ۲) $2\hbar$ ۳) $\frac{\hbar}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2}\hbar$

۱۲ـ حاصل عبارت $e^{ia\sigma_x}\sigma_z e^{-ia\sigma_x}$ کدام است. $\sigma_y, \sigma_z, \sigma_x$ ماتریس‌های پاؤلی‌اند.

۱) $\sigma_z\cos(2\alpha) + \sigma_z\sin(2\alpha)$ ۲) $\sigma_y\cos(2\alpha) + \sigma_z\sin(2\alpha)$ ۳) $\sigma_z\cos(2\alpha) + \sigma_y\sin(2\alpha)$ ۴) $\sigma_z\cos(2\alpha) + \sigma_y\sin(2\alpha)$

۱۳ـ ذره‌ای با اسپین ۱ در پتانسیل مرکزی $V(r)$ حرکت می‌کند. مقدار $V(r)$ را برای حالت $J = L - 1$ محاسبه کنید؟

$$V(r)=V_1(r)+\frac{\hat{S}.\hat{L}}{\hbar^2}v_2(r)+\frac{(\hat{S}.\hat{L})^2}{\hbar^4}V_3(r)$$

۱) $V_1(r)-V_2(r)(L+1)+V_3(r)(L+1)$

۲) $V_1(r)-V_2(r)(L+1)+V_3(r)(L+1)^2$

۳) $V_1(r)+V_2(r)(L-1)-V_3(r)(L+1)^2$

۴) $V_1(r)-V_2(r)(L+1)+V_3(r)(L-1)^2$

۱۴ـ هامیلتونی سیستم دو ذره‌ای به صورت $H=A+B\frac{\hat{\vec{S}}_1.\hat{\vec{S}}_2}{\hbar^2}+C\frac{(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z})}{\hbar}$ است. یکی از ذرات اسپین ۱ و دیگری اسپین $\frac{1}{2}$ دارد. ویژه مقدار مربوط به ویژه تابع $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ برای سیستم، کدام است؟

۱) $A-B-\frac{C}{2}$

۲) $A-B+\frac{3}{2}C$

۳) $A-B+\frac{C}{2}$

۴) $A-B-\frac{3}{2}$

۱۵ـ در یک سیستم دو ذره‌ای که اندازه حرکت زاویه‌ای مداری صفر است، انرژی پتانسیل به صورت زیر است. این انرژی در حالت یکتایی اسپین برابر است با $V(r)=V_1(r)+V_2(r)\{3\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z}-\hat{\vec{\sigma}}_1,\hat{\vec{\sigma}}_2\}+V_3(r)\hat{\vec{\sigma}}_1.\hat{\vec{\sigma}}_2$

۱) $V_1(r)+3V_3(r)$

۲) $V_1(r)-3V_3(r)$

۳) $V_1(r)+2V_2(r)+V_3(r)$

۴) $V_1(r)-4V_2(r)+V_3(r)$

۱۶ـ دو الکترون در حالت یکتایی قرار دارند. اگر اندازه‌گیری یکی از آن‌ها نشان دهد که اسپین در حالت $S_y=\frac{\hbar}{2}$ است احتمال اینکه نتیجه اندازه‌گیری مولفه x اسپین الکترون دوم درحالت $S_x=-\frac{\hbar}{2}$ باشد، چقدر است؟

۱) صفر

۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

۱۷ـ کدامیک از روابط زیر درست بیان شده است؟

۱) $[\hat{J}^2,\hat{L}_z]=2i\hbar(\hat{L}\times\hat{S}).\hat{e}_z$

۲) $[\hat{J}^2,\hat{S}_z]=2i\hbar(\hat{L}\times\hat{S}).\hat{e}_z$

۳) $[\hat{J}^2,\hat{L}_+]=\hbar\hat{J}_-$

۴) $[\hat{J}_+,\hat{J}_-]=\hbar\hat{J}_z$

۱۸ـ برای سه ذره بدون اسپین با اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $L_3=3, L_2=2, L_1=1$ مجموع تعداد حالات ممکن برای اندازه حرکت مداری کل چقدر است؟

۱) ۳۵

۲) ۴۲

۳) ۷۰

۴) ۱۰۵

۱۹ـ در یک دستگاه دو ذره‌ای که در آن هر ذره می‌تواند در یکی از n حالت کوانتومی باشد. تعداد حالات متقارن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}n(n-1)$

۲) $\frac{1}{2}n(n+1)$

۳) $n(n-1)$

۴) $n(n+1)$

۲۰ـ کدامیک از روابط کلبش ـ گوردون در اندازه حرکت زاویه‌ای $j_2=1, J_1=1$ صحیح نیست؟

۱) $|2,2\rangle=|1,1;1,1\rangle$

۲) $|2,-2\rangle=|1,1;-1,-1\rangle$

۳) $|2,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1;1,0\rangle-|1,1;0,1\rangle)$

۴) $|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1;1,-1\rangle-|1,1;0,0\rangle+|1,1,-1,1\rangle)$

۲۱ـ نماد اسپکتروسکوپی برای نمایش حالت‌های ممکن جمع دو اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین و مداری متناظر با $S=\frac{1}{2}$ و $L=1$ کدام است؟

۱) ${}^2S_{\frac{1}{2}}$

۲) فقط ${}^2P_{\frac{1}{2}}$

۳) فقط ${}^2P_{\frac{3}{2}}$

۴) ${}^2P_{\frac{3}{2}}$ و ${}^2P_{\frac{1}{2}}$

۲۲ـ جواب رابطه $J_\pm \exp(\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar})=?$ در کدام یک از گزینه‌های زیر آمده است؟

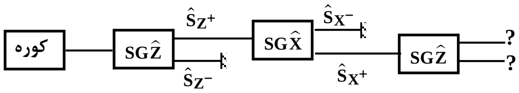
۱) $\exp(\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar})J_\mp$

۲) $\exp(\frac{-i\pi J_x}{\hbar})J_\pm$

۳) صفر

۴) $\exp(\frac{i\pi\hat{J}_x}{\hbar})J_\mp$

۲۳ـ در مورد شکل روبرو که آزمایش‌های متوالی اشترن گرلاخ را بیان می‌کند کدام گزینه درست است؟



۱) باریکه خروجی فقط می‌تواند $-\ S_z$ باشد.

۲) باریکه خروجی فقط می‌تواند $+\ S_z$ باشد.

۳) باریکه خروجی شامل $+\ S_z$ و $-\ S_z$ است.

۴) باریکه خروجی وجود ندارد.

۲۴ـ دو ذره با اسپین $\frac{۱}{۲}$ تحت پتانسیل چاه نامتناهی به طول L قرار دارند. تابع موج کل سامانه در حالت پایه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{L}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x_۲}{L}\ (\chi_+^{(۱)}\ \chi_-^{(۲)}\ \chi_-^{(۱)}\ \chi_+^{(۲)})$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{L}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x_۲}{L}\ (\chi_+^{(۱)}\ \chi_+^{(۲)})$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{L}\ [\text{Sin}\ \frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\ \frac{۲\pi x_۲}{L} - \text{Sin}\ \frac{\pi x_۲}{L}\ \text{Sin}\ \frac{۲\pi x_۱}{L}]\ (\chi_-^{(۲)}\ \chi_-^{(۱)})$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{L}\ [\text{Sin}\ \frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\ \frac{۲\pi x_۲}{L} - \text{Sin}\ \frac{\pi x_۲}{L}\ \text{Sin}\ \frac{۲\pi x_۱}{L}]\ (\chi_+^{(۱)}\ \chi_-^{(۲)}\ \chi_-^{(۱)}\ \chi_+^{(۲)})$

۲۵ـ دو ذره یکسان با اسپین $\frac{۱}{۲}$، در حالت سه‌گانه اسپینی در داخل چاه پتانسیل نامحدود $V(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ < x < \infty \\ \infty & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ قرار دارند. تابع موج فضایی این سامانه کدام است؟

۱) $\psi = \frac{۲}{L}\ \text{Sin}\frac{\pi x_۱}{L}\ \ \text{Sin}\frac{\pi x_۲}{L}$

۲) $\psi = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{Sin}\frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\frac{۲\pi x_۲}{L} - \text{Sin}\frac{\pi x_۲}{L}\ \text{Sin}\frac{۲\pi x_۱}{L})$

۳) $\psi = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{Sin}\frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\frac{۲\pi x_۲}{L} + \text{Sin}\frac{\pi x_۲}{L}\ \text{Sin}\frac{۲\pi x_۱}{L})$

۴) $\psi = \frac{۲}{L}\ \text{Sin}\frac{\pi x_۱}{L}\ \text{Sin}\frac{۲\pi x_۲}{L}$

فصل نهم

« نظریه اختلال »

تست‌های تألیفی فصل نهم

مثال۱: در نظریه اختلال مرتبه اول مستقل از زمان غیر تبهگن اگر $\hat{H}'$ هامیلتونی مختل کننده باشد، تابع موج جدید از کدام رابطه به دست می‌آید؟ (m حالت پایه و $k \neq m$)

۱) $\psi = u_m + \sum \frac{H'^{۲}_{km}}{E_m - E_k} u_k$

۲) $\psi = u_m + \sum \frac{H'_{km}}{E_m - E_k} u_k$

۳) $\psi = u_m - \sum \frac{H'_{km}}{E_m - E_k} u_k^{۲}$

۴) $\psi = u_m + \sum \frac{H'^{۲}_{km}}{E_m - E_k} u_k^{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به متن درس.

مثال۲: در نظریه اختلال مستقل از زمان غیر تبهگن، کدام گزینه درست است؟

۱) تصحیح مرتبه دوم انرژی برای حالت پایه همواره مقداری مثبت است.

۲) تصحیح مرتبه دوم انرژی برای حالت پایه همواره مقداری منفی است.

۳) تصحیح مرتبه دوم انرژی برای تمامی حالت‌ها مثبت است.

۴) تصحیح مرتبه دوم انرژی برای کلیه حالت‌ها مقداری منفی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حالت پایه هر سیستم کوانتومی حالتی با کمترین انرژی ممکن است. از طرفی تصحیح مرتبه دوم انرژی در نظریه اختلال برای حالت nام عبارت است از:

$$E_n^{(۲)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle n^{(\circ)} | \hat{H}' | m^{(\circ)}\rangle|^{۲}}{E_n^{(\circ)} - E_m^{(\circ)}}$$

برای حالت پایه $(n = g)$ داریم:

$$E_g^{(۲)} = \sum_{m\neq g} \frac{|\langle g^{(\circ)} | \hat{H}' | m^{(\circ)}\rangle|^{۲}}{E_g^{(\circ)} - E_m^{(\circ)}}$$

صورت کسر همواره مقداری مثبت است، از آنجا که جمع بر حالت‌هایی غیر از حالت پایه انجام می‌شود واضح است که همواره $E_m^{(\circ)} > E_g^{(\circ)}$ و از این رو مخرج کسر همواره منفی است و به این ترتیب کل کسر منفی است و تصحیح مرتبه دوم شامل جمع بر روی عبارت‌های منفی خواهد بود و بنابراین حاصل آن همواره منفی است.

مثال۳: فرض کنید $\hat{A}$ عملگری هرمیتی است که با هامیلتونی مختل نشده $\hat{H}^{(\circ)}$ و هامیلتونی اختلالی $\hat{H}'$ جابجا می‌شود. اگر $\psi_a^{(\circ)}$ و $\psi_b^{(\circ)}$ (ویژه توابع تبهگن $\hat{H}^{(\circ)}$)، ویژه توابع همزمان $\hat{A}$ با ویژه مقادیر متمایز زیر باشند، $\mu \neq \nu$ و $\hat{A}\psi_a^{(\circ)} = \mu\psi_a^{(\circ)}$ و $\hat{A}\psi_b^{(\circ)} = \nu\psi_b^{(\circ)}$، آنگاه کدام گزینه درست است؟ ($\hat{H}'_{ij} \equiv \langle\psi_i^{(\circ)} | H' | \psi_j^{(\circ)}\rangle$)

۱) همواره $H'_{ab} > \circ$

۲) همواره $H'_{ab} = \circ$

۳) همواره $H'_{ab} < \circ$

۴) قیدی روی علامت H'_{ab} وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بنا به فرض تست $\hat{A}$ و $\hat{H}'$ جابجا می‌شوند: $[\hat{A},\hat{H}'] = \circ$، بنابراین:

$$\langle\psi_a^{(\circ)} | [\hat{A},\hat{H}'] | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ$$

سمت چپ تساوی را باز می‌کنیم:

$$\langle\psi_a^{(\circ)} | \hat{A}\hat{H}' - \hat{H}'\hat{A} | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ$$

$$\Rightarrow \langle\psi_a^{(\circ)} | \hat{A}\hat{H}' | \psi_b^{(\circ)}\rangle - \langle\psi_a^{(\circ)} | \hat{H}'\hat{A} | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ$$

$$\Rightarrow \langle\psi_a^{(\circ)} | \mu\hat{H}' | \psi_b^{(\circ)}\rangle - \langle\psi_a^{(\circ)} | H'\nu | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ \Rightarrow (\mu-\nu)\langle\psi_a^{(\circ)} | \hat{H}' | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ$$

اما بنابر فرض مسأله $\mu \neq \nu$، پس باید داشته باشیم: $\langle\psi_a^{(\circ)} | \hat{H}' | \psi_b^{(\circ)}\rangle = \circ \Rightarrow \boxed{H'_{ab} = \circ}$

مثال۴: کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد اثر اشتارک خطی با فرض این که میدان الکتریکی خارجی در راستای محور zها باشد در رابطه با حالت‌های $n=2$ اتم هیدروژن درست است؟

۱) اثر اشتارک کلیه تبهگنی‌ها را از بین می‌برد.

۲) در اثر اشتارک، حالت‌ها ویژه حالت‌های $\hat{\vec{L}}^2$ و $\hat{L}_z$ هستند.

۳) در اثر اشتارک، حالت‌ها دیگر ویژه حالت‌های $\hat{\vec{L}}^2$ نیستند، گرچه هنوز ویژه حالت‌های $\hat{L}_z$ هستند.

۴) در اثر اشتارک ترازهای انرژی حالت $n=2$ اتم هیدروژن به دو تراز شکافته می‌شوند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در اثر اشتارک خطی، تراز تبهگن چهارگانه $n=2$، به سه تراز انرژی شکافته می‌شود. و تبهگنی حالت‌های $\psi_{21,1}$ و $\psi_{21,-1}$ همچنان پابرجا می‌ماند. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند. میان گزینه‌های ۲ و ۳ باید متذکر شویم که در حضور میدان الکتریکی حالت‌ها دیگر ویژه حالت‌های $\hat{\vec{L}}^2$ نیستند، اگرچه هنوز ویژه حالت‌های L_z هستند، علت آن است که اختلال هامیلتونی را تغییر می‌دهد و در نتیجه دیگر با $\hat{\vec{L}}^2$ جابجا نمی‌شود.
$([\vec{L}^2, z] \neq 0)$

اما در واقع آشکار است که میدان خارجی راستای متمایزی را مشخص می‌کند و از این رو، سیستم فیزیکی تحت چرخشهای اختیاری دیگر ناوردا نیست، اما هنوز هم تحت چرخش حول محور متمایز (در اینجا z) ناورداست، بنابراین $\hat{L}_z$ باز هم ثابت حرکت است.

مثال۵: ساختار فوق ریز اتم هیدروژن ناشی از چیست؟

۱) تصحیحات مربوط به در نظر گرفتن جرم متناهی هسته اتم هیدروژن

۲) تصحیحات نسبیتی حرکت الکترون به دور هسته اتم هیدروژن

۳) اثر جفت شدگی اسپین ـ مدار

۴) برهمکنش مغناطیسی میان گشتاورهای دو قطبی الکترون و هسته اتم هیدروژن

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به مطالب متن.

مثال۶: میان حالت‌های چهارگانه تراز $n=2$ اتم هیدروژن، کدامیک بیشترین انحراف را در تصحیح نسبیتی برای جابجایی مرتبه اول انرژی دارد؟ (حالت‌ها را با $\psi_{n\ell m}$ نمایش داده‌ایم).

۱) ψ_{211} ۲) ψ_{21-1} ۳) ψ_{210} ۴) ψ_{200}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تصحیح مرتبه اول نسبیتی، بنابر مثال قبلی، به جابجایی ترازهای انرژی اتم هیدروژن به اندازه $E^{(1)}$ می‌انجامد که برابر است با: $E^{(1)} = -\frac{E_n^2}{2\mu c^2}\left(\frac{4n}{\ell+\frac{1}{2}}-3\right)$ است. $E^{(1)}$ برای سه حالت ψ_{211}، ψ_{210} و $\psi_{21,-1}$ برابر است. زیرا در هر سه حالت $\ell=1$ و $E^{(1)}$ عبارت است از:

$$E^{(1)}_{\ell=1} = -\frac{E_2^2}{2\mu c^2}\left(\frac{8}{1+\frac{1}{2}}-4\right) = -\frac{2}{3}\frac{E_2^2}{\mu c^2}$$

اما برای حالت ψ_{200}، داریم $\ell=0$ و بنابراین:

$$E^{(1)}_{\ell=0} = -\frac{E_2^2}{2\mu c^2}\left(\frac{8}{\frac{1}{2}}-4\right) = -6\frac{E_2^2}{\mu c^2}$$

آشکار است که $|E^{(1)}_{\ell=0}| > |E^{(1)}_{\ell=1}|$ و بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

استثناً در این مسئله می‌توان از اختلال غیر تبهگن برای $n=2$ استفاده کرد و دلیل آن هم قطری بودن اختلال وارد شده در پایه‌های $|\ell m\rangle$ است.

مثال۷: کدام اختلال وارد بر اتم هیدروژن تراز $n=2$ را به چهار تراز انرژی می‌شکافد؟

۱) اثر اشتارک ۲) اثر ساختار ریز ۳) اثر زیمان ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اثر اشتارک تراز انرژی $n=2$ را به سه تراز تفکیک می‌کند. در اثر زیمان تراز $n=2$ به ۸ تراز انرژی شکافته می‌شود. تنها در اثر ساختار ریز است که تراز انرژی $n=2$ به چهار تراز تفکیک می‌شود.

مثال۸: حالت پایه اتم هیدروژن در اثر بر همکنش اسپین الکترون و اسپین هسته به چند تراز شکافته می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) تراز پایه ناتبهگن است و بنابراین تفکیک نمی‌شود.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به دو حالت اسپین کل $(\vec{S}=\vec{S}_e+\vec{S}_p)$ یعنی حالت‌های سه‌تایی $S=1$ و حالت تک‌تایی $S=0$، تراز انرژی حالت پایه اتم هیدروژن به دو تراز شکافته می‌شود (اثر فوق ریز).

مثال۹: در نظریه اختلال وابسته به زمان هماهنگ، اگر جمله اول $c_i^{(0)}=1$ (i حالت پایه) باشد، احتمال گذار $|c_n^{(1)}|^2$ به چه صورتی است؟

۱) با زمان به صورت $\frac{1}{t}$ تغییر می‌کند ۲) با زمان تغییر نمی‌کند.

۳) با زمان به صورت $\frac{\sin^2[\frac{1}{2}(\omega_{ni}-\omega)t]}{(\omega_{ni}-\omega)^2}$ تغییر می‌کند. ۴) با زمان به صورت $\frac{\sin^2[\frac{1}{2}(\omega_{ni}-\omega)t]}{(\omega_{ni}-\omega)}$ تغییر می‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» اختلال هماهنگ یا اختلال سینوسی به صورت $V'(\vec{r},t)=V(\vec{r})\cos(\omega t)$ است، به طوری که $V'_{in}(t)=V_{in}(0)\cos(\omega t)$ که در آن $V_{in}\equiv\langle i|V(0)|n\rangle$ تا مرتبه اول از رابطه (***) داریم:

$$c_n^{(1)}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{ni}t'}V_{ni}\cos(\omega t')dt'$$

$$=\frac{V_{ni}}{2\hbar}\int_0^t[e^{i(\omega_{ni}+\omega)t'}+e^{i(\omega_{ni}-\omega)t'}]dt'=-\frac{V_{ni}}{2\hbar}[\frac{e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}-1}{\omega_{ni}+\omega}+\frac{e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}-1}{\omega_{ni}-\omega}]$$

این جواب معادله است، ولی کار کردن با آن کمی دردسر ساز است. اگر توجه خود را به بسامدهای نزدیک به ω_{ni} جلب کنیم، در این صورت جمله دوم درون کروشه غالب است؛ به عبارت دیگر فرض می‌کنیم $|\omega_{ni}-\omega|<<\omega_{ni}+\omega$.

بنابراین با حذف جمله اول داریم:

$$c_n(t)\cong-\frac{V_{ni}}{2\hbar}\frac{e^{\frac{i(\omega_{ni}-\omega)t}{2}}}{\omega_{ni}-\omega}[e^{\frac{i(\omega_{ni}-\omega)t}{2}}-e^{-\frac{i(\omega_{ni}-\omega)t}{2}}]=-i\frac{V_{ni}}{\hbar}\frac{\sin[\frac{(\omega_{ni}-\omega)t}{2}]}{\omega_{ni}-\omega}e^{\frac{i(\omega_{ni}-\omega)t}{2}}$$

به این ترتیب احتمال گذار برابر است با:

$$P_{i\to n}(t)=|c_n(t)|^2\cong\frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2[\frac{(\omega_{ni}-\omega)t}{2}]}{(\omega_{ni}-\omega)^2}$$

آزمون فصل نهم

۱ـ چاه نامتناهی با پتانسیل روبه‌رو را در نظر بگیرید: $V(x)=\begin{cases} \circ & \circ\le x\le b \\ \infty & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ اگر پتانسیل اختلالی $V_1(x)$ را بـه کـف چـاه اعمـال کنـیم.

جابجایی انرژی مرتبه اول اختلال کدام است؟ $V_1(x)=\varepsilon \text{Sin}(\frac{\pi x}{b})\quad \circ\le x\le b$

۱) $\frac{2\varepsilon}{\pi}+\frac{\varepsilon}{2\pi}\{\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\}$

۲) $\frac{2\varepsilon}{\pi}+\frac{\varepsilon}{2\pi}\{\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}\}$

۳) $\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\{\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\}$

۴) $\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\{\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}\}$

۲ـ ذره‌ای به جرم m و بار q که در پتانسیل هماهنگ یک بعدی قرار گرفته است و میدان الکتریکی ε ضعیفی اعمال می‌شود. جابجـایی انـرژی مرتبه اول اختلال از حالت پایه کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{-q^2\varepsilon^2}{2mw^2}$
۳) $\frac{q^2\varepsilon^2}{2mw^2}$
۴) $-\frac{q^2\varepsilon}{2mw}$

۳ـ جابجایی انرژی مرتبه اول برای nامین حالت برانگیختگی را برای ذره‌ای با جرم m که در چاه پتانسیل بی نهایت بـا طـول $2L$ و دیـواره‌هـای $x=\circ$ و $x=2L$ قرار گرفته است، بیابید. پتانسیل اختلالی: $V(x)=\lambda v_\circ \text{Sin}(\pi\frac{x}{2L}),\ \lambda<<1$

۱) صفر
۲) $\frac{2\lambda v_\circ}{\pi}\frac{4n^2}{4n^2-1}$
۳) $\frac{2\lambda v_\circ}{\pi}\frac{2n^2}{2n^2-1}$
۴) $\frac{\lambda v_\circ}{\pi}\frac{4n^2-1}{n^2}$

۴ـ مسأله ۳ برای پتانسیل $V(x)=\lambda V_\circ\delta(x-L)$, $\lambda<<1$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{\lambda v_\circ}{L}$
۳) $\frac{\lambda v_\circ}{L}\text{Sin}(\frac{n\pi}{2})$
۴) $\frac{\lambda v_\circ}{L}\text{Sin}^2(\frac{n\pi}{2})$

۵ـ اولین حالت برانگیختگی سیستمی دارای تبهگنی ۳ گانه است. اگر مولفه‌های ماتریس هامیلتونی اختلال H_1 به صـورت $2V_\circ\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ باشد. اولین مرتبه اختلال در انرژی برای این ماتریس چه مقادیری بدست می‌دهد؟

۱) $2V_\circ, 3V_\circ, 6V_\circ$
۲) $\circ, 2V_\circ$
۳) $\circ, 6V_\circ$
۴) $2V_\circ, 3V_\circ$

۶ـ در مورد جابجایی انرژی مرتبه دوم اختلال کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) برای حالت پایه همواره منفی است
۲) تراز حالت پایه بیشترین تأثیر را در جابجایی از روی مرتبه دوم اختلال دارد.
۳) نزدیکترین ترازها همواره طوری جابجا می‌شوند که گویی همدیگر را دفع می‌کنند.
۴) ترازهای نزدیک بهم همواره بیشترین تأثیر را در جابجایی انرژی مرتبه دوم اختلال نسبت به ترازهای دورتر دارند.

۷ـ ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(x,y,z)=\begin{cases} \circ & \circ<x<L, \circ<y<L, \circ<z<L \\ \infty & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ قرار دارد با اعمال پتانسیل اختلال زیر، جابجایی انرژی مرتبه اول اختلال برای حالت پایه کدام است؟

$$V=V_\circ L^3\ \delta(x-\frac{L}{4})\delta(Y-\frac{3L}{4})\delta(Z-\frac{L}{4})$$

۱) صفر
۲) $2V_\circ$
۳) $8V_\circ \text{Sin}^2(\frac{\pi}{L})\text{Sin}(\frac{3\pi L}{4})$
۴) $8V_\circ \text{Sin}^4(\frac{\pi L}{4})\text{Sin}^2(\frac{3\pi L}{4})$

۸ـ کدام گزینه در مورد اثر اشتارک برای اتم هیدروژن در حالت $n=2$ صحیح است؟

۱) فقط حالت $m=\circ$ واگن باقی می‌ماند.
۲) واگنی کاملاً از بین می‌رود.
۳) فقط حالت $m=\pm1$ واگن باقی می‌ماند.
۴) هیچ جابجایی انرژی اتفاق نمی‌افتد.

۹ـ در تصحیح نسبیتی اتم هیدروژن، پتانسیل اختلالی مرتبه اول کدام است؟

۱) $\frac{P^2c^2}{2m}$ ۲) $\frac{P^2c^2}{4m}$ ۳) $\frac{P^2}{8mc^2}$ ۴) $\frac{P^4}{8mc^2}$

۱۰ـ کدام یک از روابط زیر صرفنظر از ضرایب مربوط به هامیلتونی اختلالی زیمان است وقتی میدان مغناطیسی قوی می‌باشد؟

۱) $S.L$ ۲) $L_z + 2S_z$ ۳) $J_z + S_z$ ۴) $2L_z + S_z$

۱۱ـ حالت پایه اتم هلیوم چند گانه واگن است؟ (از اثرات نسبیتی صرفنظر کنید)

۱) تبهگن ۲) ۲ گانه ۳) ۳ گانه ۴) ۱۲ گانه

۱۲ـ اتم هیدروژن در یک میدان مغناطیسی قوی قرار دارد. تراز $n=2$, $\ell=1$ به چند تراز تجزیه می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳ـ پتانسیل اختلالی ناشی از قرار گرفتن در میدان الکتریکی $\vec{E}=\varepsilon(\hat{i}+\hat{j})$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}=B\hat{k}$ به صورت زیر است کدامیک از ماتریس‌های زیر آنرا بیان می‌کند.

$$V=\frac{-eB}{2\mu c}L_z + e\varepsilon \mathrm{Sin}\theta(\cos\phi+\mathrm{Sin}\phi)$$

$|1\rangle = |2\,0\,0\rangle$; $|3\rangle = |2\,1\,0\rangle$

اطلاعات لازم : $\alpha=\frac{3e\varepsilon a_0}{\sqrt{2}}$ $\beta=\frac{e\hbar B}{2\mu e}$ $|2\rangle=|2\;1\;1\rangle$ $|4\rangle=|2\;1\;-1\rangle$

۱) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha+ix & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha+ix & 0 & -\alpha+i\alpha \\ \alpha+ix & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha-i\alpha & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha+ix & 0 & -\alpha+ix \\ \alpha-ix & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha-ix & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha+ix \\ 0 & -\alpha & 0 & -\beta \end{pmatrix}$

۱۴ـ دو پروتون با فاصله d از یکدیگر در میدان مغناطیسی قرار گرفته‌اند و هامیلتونی اختلالی به صورت $H_1=\frac{4\mu_0^2}{d^3\hbar^3}[S_1\cdot S_2 - 3S_{1z}S_{2z}]$ است. اولین مرتبه اختلال در انرژی برای ماتریس حاصله چه مقادیری دارد؟

۱) صفر و $\frac{2\mu_0^2}{3d}$ ۲) صفر و $\frac{-2\mu_0^2}{d^3}$ ۳) $\frac{2\mu_0^2}{d^3}$ و $\frac{4\mu_0^2}{d^3}$ ۴) صفر $\frac{-2\mu_0^2}{d^3}$ و $\frac{4\mu_0^2}{d^3}$

۱۵ـ دو ذره تشخیص پذیر با اسپین $\frac{1}{2}$ در پتانسیل جعبه یک بعدی با دیواره‌های $x=L, x=0$ قرار دارد با اضافه کردن پتانسیل اختلالی زیر انرژی حالت پایه برای مرتبه اول اختلال کدام است؟ $V(x_1,y_2)=-V_0L^2\delta(x_1-\frac{L}{2})\delta(x_2-\frac{L}{3})$

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{4}V_0$ ۳) $\frac{3}{4}V_0$ ۴) $\frac{V_0}{4}$

فصل دهم

« مباحث تکمیلی »

تست‌های تألیفی فصل دهم

مثال۱: کدام یک از عبارات زیر درباره اصل وردشی درست است؟

۱) روش وردشی همواره حد پایین برای انرژی حالت پایه سیستم می‌دهد.

۲) روش وردشی همواره حد بالائی برای انرژی حالت پایه سیستم می‌دهد.

۳) بسته به انتخاب تابع آزمایشی، روش وردشی می‌تواند حد بالا یا حد پائین برای انرژی حالت پایه سیستم بدهد.

۴) روش وردشی انرژی حالت پایه سیستم را به طور دقیق بدست می‌دهد.

پاسخ: گزینه «۲»

مثال۲: در کدام یک از گزینه های زیر، ماتریس معرف عملگرها می‌توانند همزمان قطری باشند؟

۱) $\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z$ ۲) $\hat{x}, \hat{p}_x$ ۳) $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ ۴) $\hat{S}_x, \hat{S}_y$

پاسخ: گزینه«۱» هر دو عملگری که با هم جابجا شوند، می‌توانند همزمان قطری شوند. در اینجا تک تک گزینه هارا امتحان می‌کنیم.

بررسی گزینه۱: $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$ پس $\hat{L}_z$ و $\hat{\vec{L}}^2$ همزمان قطری می‌شوند و پاسخ درست همین گزینه است.

بررسی گزینه۲: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \neq 0$ پس در پایه ای که $\hat{x}$ قطری است، $\hat{p}_x$ نمی‌تواند قطری شود و بالعکس.

بررسی گزینه۳: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \neq 0$ پس در پایه ای که $\hat{a}$ قطری است، $\hat{a}^\dagger$ غیر قطری است و بالعکس.

بررسی گزینه۴: $[\vec{S}_x, \vec{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \neq 0$ پس $\hat{S}_x$ و $\hat{S}_y$ نمی توانند همزمان قطری شوند.

مثال۳: ویژه مقادیر ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **عبارتند از:**

۱) $-1, 0, +1$ ۲) $-2, 0, 1$ ۳) $2, 0, 1$ ۴) $2, 0, 0$

پاسخ: گزینه«۱» باید معادله مشخصه را حل کنیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

بنابر توضیحات بالا، رابطه فوق تنها در صورتی جواب غیربدیهی دارد که دترمینان زیر برابر صفر شود:

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-X)(X^2 - 0) + (1)(X) = 0 \Rightarrow -X^3 + X = 0 \Rightarrow X(1 - X^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \\ X = -1 \end{cases}$$

مثال۴: کدام یک از پتانسیل‌های یک بعدی زیر به پایستگی ویژه حالات پاریته در زمان منتهی نمی‌شود؟

۱) نوسانگر هماهنگ

۲) نوسانگر هماهنگ در میدان الکتریکی خارجی

۳) ذره در جعبه پتانسیل متقارن

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه«۲» پتانسیل نوسانگر هماهنگ آشکارا متقارن است: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. بنابراین تحت تعویض $x \to -x$، هامیلتونی $\hat{H}$ تغییر نمی‌کند، از این رو ویژه حالات، توابع زوج و فرد خواهند بود. در مورد ذره در جعبه پتانسیل متقارن نیز پتانسیل (همانگونه که از نامش پیداست) متقارن است. پس گزینه های ۱و۳ نمی توانند صحیح باشند. اما در مورد گزینه ۲، پتانسیل تابعی نامتقارن است. بنابراین پاریته نمی تواند پایسته بماند:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx$$

مثال۵: حاصل کدام یک از جابجایی های زیر صفر است؟

۱) $[\hat{L}_z,\hat{z}]$ ۲) $[\hat{L}_z,\hat{y}]$ ۳) $[\hat{L}_z,\hat{x}]$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تکانه زاویه‌ای مداری از رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ بدست می‌آید، بنابراین مولفه z آن عبارت است از: $\hat{L}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$

حال به بررسی تک تک گزینه‌ها می پردازیم:

بررسی گزینه۱: $[\hat{L}_z,\hat{z}]=[\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x,\hat{z}]=[\hat{x}\hat{p}_y,\hat{z}]-[\hat{y}\hat{p}_x,\hat{z}]=\cancel{\hat{x}[\hat{p}_y,\hat{z}]}^{\circ}+\cancel{[\hat{x},\hat{z}]\hat{p}_y}^{\circ}-\cancel{\hat{y}[\hat{p}_x,\hat{z}]}^{\circ}-\cancel{[\hat{y},\hat{z}]\hat{p}_x}^{\circ}=\circ\Rightarrow[\hat{L}_z,\hat{z}]=\circ$

بررسی گزینه۲: $[\hat{L}_z,\hat{y}]=[\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x,\hat{y}]=[\hat{x}\hat{p}_y,\hat{y}]-[\hat{y}\hat{p}_x,\hat{y}]=\hat{x}\underbrace{[\hat{p}_y,\hat{y}]}_{-i\hbar}+\cancel{[\hat{x},\hat{y}]\hat{p}_y}^{\circ}-\cancel{\hat{y}[\hat{p}_x,\hat{y}]}^{\circ}-\cancel{[\hat{y},\hat{y}]\hat{p}_x}^{\circ}\Rightarrow[\hat{L}_z,\hat{y}]=-i\hbar\hat{x}$

بررسی گزینه۳: $[\hat{L}_z,\hat{x}]=[\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x,\hat{x}]=[\hat{x}\hat{p}_y,\hat{x}]-[\hat{y}.\hat{p}_x,\hat{x}]=\cancel{\hat{x}[\hat{p}_y,\hat{x}]}^{\circ}+\cancel{[\hat{x},\hat{x}]\hat{p}_y}^{\circ}-\hat{y}\underbrace{[\hat{p}_x,\hat{x}]}_{-i\hbar}-\cancel{[\hat{y},\hat{x}]\hat{p}_x}^{\circ}\Rightarrow[\hat{L}_z,\hat{x}]=i\hbar\hat{y}$

در محاسبه جابجایی‌های بالا از روابط بنیادین جابجایی در مکانیک کوانتومی استفاده کرده‌ایم:

$$[r_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}\ ,\ [r_i,r_j]=\circ\ ,\ [p_i,p_j]=\circ$$
$$i,j=x,y,z$$

علاوه بر آن از اتحاد مهم عملگری $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ استفاده شده است.

مثال۶: کدام گزینه قواعد گزینش را برای مولفه Z تکانه زاویه‌ای مداری و مجذور تکانه زاویه‌ای مداری را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) $\Delta\ell=\pm1,\Delta m=\pm1$ ۲) $\Delta\ell=\pm1,\Delta m=\pm1$ یا ۰

۳) $\Delta\ell=\pm1$ یا ۰ $,\Delta m=\pm1$ ۴) $\Delta\ell=\pm1$ یا ۰ $,\Delta m=\pm1$ یا ۰

☑ **پاسخ:** با توجه به مطالب متن گزینه «۲»

آزمون فصل دهم

۱ـ با در نظر گرفتن پتانسیل اختلالی $V(t)=\hat{x}^{2}e^{-\frac{t}{\tau}}$ ، $0<t\leq\infty$ احتمال یافتن ذره در اولین حالت برانگیختگی‌اش در $t>0$ را وقتی که در $t=0$ در حالت پایه یک جعبه یک بعدی با دیواره‌های $x=a, x=0$ قرار داشت، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(\frac{16a^{2}}{9\pi^{2}\hbar})^{2}[\frac{9\pi^{4}\hbar^{2}}{4m^{2}a^{2}}+\frac{1}{\tau^{2}}]^{-1}$　۲) $(\frac{16a^{2}}{9\pi^{2}\hbar})[\frac{9\pi^{4}\hbar^{2}}{4m^{2}a^{2}}+\frac{1}{\tau^{2}}]^{-1}$　۳) $(\frac{16a^{2}}{9\pi^{2}\hbar})^{2}[\frac{9\pi^{4}\hbar^{2}}{4m^{2}a^{2}}+\frac{1}{\tau^{2}}]$　۴) $(\frac{16a^{2}}{9\pi^{2}\hbar})[\frac{9\pi^{4}\hbar^{2}}{4m^{2}a^{2}}+\frac{1}{\tau^{2}}]$

۲ـ مثال فوق را با در نظر گرفتن پتانسیل اختلالی $V(t)=\hat{x}e^{-t^{2}}$ پاسخ دهید؟

۱) $(\frac{16a}{9\pi^{2}\hbar})^{2}\exp[\frac{-9\pi^{4}\hbar^{2}}{8m^{2}a^{4}}]$　۲) $(\frac{16a}{9\pi^{2}\hbar})\exp[\frac{-9\pi^{4}\hbar^{2}}{8m^{2}a^{4}}]$

۳) $\frac{\pi}{4}(\frac{16a}{9\pi^{2}\hbar})^{2}\exp[\frac{-9\pi^{4}\hbar^{2}}{8m^{2}a^{4}}+\frac{1}{t^{2}}]$　۴) $\frac{\pi}{4}(\frac{16a}{9\pi^{2}\hbar})^{2}\exp[\frac{-9\pi^{4}\hbar^{2}}{8m^{2}a^{4}}]$

۳ـ اگر عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به ترتیب زوج و فرد باشند و $\hat{\pi}$ عملگر پاریته باشد. کدامیک از گزینه‌ها نادرست است؟($\hat{r}$ و $\hat{p}$ عملگرهای مکان و تکانه هستند)

۱) $\pi\hat{A}^{n}\pi=\hat{A}^{n}$　۲) $\pi\hat{B}^{n}\pi=(-1)^{n}\hat{B}$　۳) $\pi\vec{r}\pi^{-1}=\vec{r}$　۴) $\pi\vec{p}\pi^{+}=\overrightarrow{-p}$

۴ـ کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) عمل پاریته در مختصات قطبی یعنی $r\to -r, \theta\to\pi-\theta, \phi\to\pi+\phi$

۲) حالت‌های سه تایی $(S=1)$ باید اندازه حرکت مداری L زوج داشته باشند.

۳) اگر سیستم متشکل از دو الکترون با L فرد باشد، تابع موج فضایی دارای پاریته فرد است

۴) $\hat{\pi}|30\rangle=|30\rangle$ ($\hat{\pi}$ پاریته است)

۵ـ اگر α و β ویژه حالت‌های پاریته با ویژه مقادیر به ترتیب $+1$ و -1 باشند. کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\langle\beta|\hat{x}|\alpha\rangle\neq 0$　۲) $\langle\alpha|\hat{S}.\hat{x}|\beta\rangle\neq 0$　۳) $\langle\alpha|L.S|\beta\rangle=0$　۴) $\langle\alpha|L+S|\beta\rangle\neq 0$

۶ـ در تقریب دو قطبی کدامیک از موارد زیر مجاز <u>نیست</u>؟

۱) $2p\to 1s$　۲) $3p\to 2p$　۳) $3d\to 2p$　۴) $3p\to 1s$

۷ـ با استفاده از روش وردش، انرژی حالت پایه اتم هیدروژن تقریباً برابر است با: (تابع کمکی $\psi(r,\theta,\phi)=e^{\frac{-r}{a}}$

۱) $E(a_{0})=\frac{-me^{4}}{2\hbar^{2}}$　۲) $E(a_{0})=\frac{\hbar^{2}}{2ma_{0}^{2}}\frac{e^{2}}{a_{0}}$　۳) $E(a_{0})=\pi a_{0}^{3}$　۴) $E(a_{0})=\pi^{2}e^{2}a_{0}^{2}$

۸ـ ویژه مقادیر ماتریس A در کدام گزینه آمده است؟

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}$$

۱) $\pm\sqrt{2}$　۲) $7, \sqrt{2}$

۳) $7, -\sqrt{2}$　۴) $7, \pm\sqrt{2}$

۹ـ اگر ماتریس A به صورت زیر تعریف شود، کدام گزینه معرف ماتریس e^{xA} می‌باشد؟

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۱) $\begin{pmatrix} \sinh x & 0 & -i\cosh x \\ 0 & \sinh x-\cosh x & 0 \\ i\cosh x & 0 & \sinh x \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} \sinh x & 0 & -i\cosh x \\ 0 & \sinh x-\cosh x & 0 \\ i\cosh x & 0 & \sinh x \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} \cosh x & 0 & -i\sinh x \\ 0 & \cosh x-\sinh x & 0 \\ i\sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} \cosh x & 0 & -i\sinh x \\ 0 & \cosh x+\sinh x & 0 \\ -i\sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$

۱۰ـ فرم ماتریسی n بعدی نوسانگر هماهنگ $\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

۲) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

۳) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

۴) $\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & -3 & 0 & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: مبانی تجربی پیدایش نظریه کوانتومی

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۲»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۱»

فصل دوم: بسته‌های موج، روابط عدم قطعیت و معادله شرودینگر

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»

فصل سوم: معادله شرودینگر مستقل از زمان

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل چهارم: نوسانگر کوآنتومی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»

فصل پنجم: سامانه‌های بس ذره‌ای و ذرات یکسان

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»

فصل ششم: مبانی ریاضی و اصول موضوعه مکانیک کوانتومی و نمادنگاری دیراک

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل هفتم: مکانیک کوانتومی در سه بعد

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل هشتم: اسپین و جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۲»

فصل نهم: نظریه اختلال

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»

فصل دهم: مباحث تکمیلی

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۱ـ گزینه «۲»