پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل اول

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» برای تغییر طول میله‌ی مرکب از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\delta=\sum_{i=۱}^{۳}\frac{F_iL_i}{A_iE_i}=\frac{P(\frac{L}{۳})}{AE}+\frac{P(\frac{L}{۳})}{۲AE}+\frac{۳P(\frac{L}{۳})}{۴AE}\Rightarrow\delta=\frac{PL}{AE}(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}\frac{PL}{AE}$$

۲ـ گزینه «۱» تنش تماسی بین دو سطح A و B طبق رابطه‌ی مقابل برابر است با:

$$\sigma_b=\frac{F}{A_e}=\frac{۲۰۰۰۰}{dt}=\frac{۲۰۰۰۰}{۲۰\times ۱۰}=۱۰۰\,MPa$$

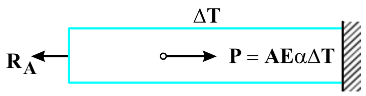
۳ـ گزینه «۲» با توجه به توضیحات متن درس نسبت مدول برشی به مدول حجمی مساوی است با:

$$\frac{G}{k}=\frac{\frac{E}{۲(۱+\nu)}}{\frac{E}{۳(۱-۲\nu)}}=\frac{۳}{۲}\,\frac{۱-۲\nu}{۱+\nu}$$

۴ـ گزینه «۴» تغییر طول میله تحت بار محوری F برابر است با:

$$\delta=\frac{FL}{AE}=\frac{۶/۲۸\times ۲۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۲۰^{۲}\times ۱۰۰}=۰/۴\,mm$$

۵ـ گزینه «۲» تکیه‌گاه A برداشته شده و به جای آن نیروی R_A قرار داده می‌شود. اکنون می‌توان با استفاده از روش جمع آثار مقدار نیروی داخلی در بخش AC را به دست آورده سپس مقدار تنش را در این مقطع تعیین نمود.



$$\delta_A=\frac{R_AL}{AE}+\alpha L\Delta T-\frac{P(۲\frac{L}{۳})}{AE}=۰\Rightarrow\frac{R_AL}{AE}+\alpha L\Delta T-\frac{(AE\alpha\Delta T)۲\frac{L}{۳}}{AE}=۰$$

$$\frac{R_A}{AE}+\alpha\Delta T-\frac{۲}{۳}\alpha\Delta T=۰\Rightarrow R_A=-\frac{۱}{۳}A\alpha\Delta T$$

۶ـ گزینه «۲» میله (۱) علاوه بر کشش تحت اثر خمش نیز قرار دارد. چون نیروی p در میله (۱) محوری نبوده پس ابتدا باید آنرا به مرکز مقطع باریک انتقال داد که این باعث ایجاد یک گشتاور خمشی نیز می‌شود و تنش ماکزیمم را افزایش می‌دهد.

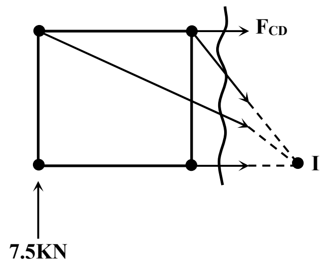
۷ـ گزینه «۴» نیروی فشاری ایجاد شده در دو میله برابر خواهد بود. در نتیجه تنش هر دو میله به دلیل مساوی بودن مساحت برابر است.

۸ـ گزینه «۲» خرپای داده شده در شکل از نوع معین می‌باشد، بنابراین با تغییر دمای میله‌ها تنشی در میله‌ها ایجاد نمی‌شود.

۹ـ گزینه «۱» چون مجموع تنش‌های قائم برابر صفر است، بنابراین حجم المان تغییر نخواهد کرد.

۱۰ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی تغییر طول باید کرنش عرضی را از رابطه‌ی زیر تعیین نمود:

$$\nu=-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\Rightarrow\varepsilon_y=-\nu\varepsilon_x\Rightarrow\frac{\Delta y}{d}=-\nu\frac{P}{AE}\Rightarrow\Delta y=-\nu\frac{Pd}{AE}=-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵\times ۲۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۲۰^{۲}\times ۱۰۰}=-\frac{۱}{۳۰۰}\,mm$$



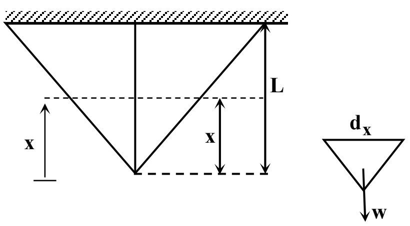
۱۱ــ گزینه «۲» به دلیل تقارن خرپا نیروی تکیه‌گاهی در A مساوی $A_y = ۷/۵\ KN$ است.

از روش برش برای تعیین نیروی CD استفاده می‌شود:

$$\Sigma M_I = ۰ \Rightarrow -F_{CD} \times ۲ - ۷/۵ \times ۶ = ۰ \Rightarrow F_{CD} = -۲۲/۵\ KN$$

$$\sigma_{CD} = \frac{-F}{A_{CD}} \Rightarrow A_{CD} = \frac{+۲۲/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲/۵ \times ۱۰^۷} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴}\ m^۲ \Rightarrow A_{CD} = ۱/۸\,cm^۲$$

۱۲ــ گزینه «۴»



$$\Delta = \int \frac{wdx}{A_x E}\ ,\ w = \gamma v = \gamma \frac{A_x x}{۳}$$

$$\Delta = \int_۰^L \frac{\gamma A_x \frac{x}{۳} dx}{A_x E} = \frac{\gamma}{E} \times \frac{L^۲}{۶}$$

$$w = \gamma \frac{AL}{۳} \Rightarrow \Delta = \frac{WL}{۲AE}$$

۱۳ــ گزینه «۲» در رابطه حجم به جای مساحت رابطه‌ای برحسب نیروی P و به جای طول BC رابطه‌ای برحسب طول معلوم AD قرار داده می‌شود:

$$V_{BC} = A_{BC} L_{BC} \quad ; \quad \sigma = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{۲P}{\sin\theta\sigma}$$

$$L_{BC} = \frac{L_{AD}}{۲\cos\theta}$$

$$V_{BC} = \frac{۲P}{\sin\theta \times \sigma} \times \frac{L_{AD}}{۲\cos\theta} = \frac{۲PL_{AD}}{\sigma \sin ۲\theta} \xrightarrow{\text{زمانی این رابطه مینیمم است که } \sin ۲\theta = ۱ \text{ باشد}} ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow V_{BC} = V_{min}$$

به ازاء $\theta = \frac{\pi}{۴}$ حجم میله BC مینیمم می‌شود.

۱۴ــ گزینه «۱» جسم تحت برش مطلق تنها دچار تغییر شکل شده ولی حجمش تغییری نمی‌کند. در جسمی که تحت برش مطلق است مجموع تنش‌های عمودی صفر است.

۱۵ــ گزینه «۲» دو بخش میله‌ی مرکب مانند فنرهای موازی رفتار می‌کنند نیرویی که تکیه‌گاه A تحمل می‌کند برابر نیروی داخلی در فنر معادل میله‌ی AC است.

$$R_A = F_{AC} = k_{AC} \times \frac{P}{k_{eq}} = \frac{AE}{L_۱} \times \frac{P}{\frac{AE}{L_۱} + \frac{۲AE}{L_۲}} \Rightarrow R_A = P \times \frac{L_۲}{L_۲ + ۲L_۱}$$

۱۶ــ گزینه «۴» همانطور که در متن درس نیز بیان شد، نمودار تنش ـ کرنش برای مواد نرم با درصد کربن پایین به شکل مطرح شده در صورت سؤال و تنها ماده‌ای که در گزینه‌ها ماده‌ی نرم با درصد کربن پایین است فولاد ساختمانی است.

۱۷ــ گزینه «۲»

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V_۰ = \frac{۱-۲\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \times V_۰ = \frac{۱-۲\times ۰/۳}{۲۱ \times ۱۰^۵} \times ۵۲۵۰ \times ۱۲۰۰ \Rightarrow \Delta V = ۱/۲\ cm^۳$$

۱۸ــ گزینه «۳» در ابتدا با برش زدن میله مرکب در مقاطع مختلف نیروی داخلی در قسمت‌های AB, BC, CD به ترتیب مساوی ۲۵kN, ۱۲۵kN, ۵۰kN بدست می‌آید.

$$\delta_D = \sum_{i=۱}^{n=۳} \frac{F_i L_i}{A_i E_i} = \frac{۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۱۵۰۰}{۵۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} + \frac{۱۲۵ \times ۱۰^۳ \times ۱۲۵۰}{۸۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} + \frac{۲۵ \times ۱۰^۳ \times ۱۷۵۰}{۸۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} \simeq ۵/۷۱\ mm$$

۱۹ـ گزینه «۳» میلگردهای فولادی و بتن مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند، بنابراین نسبت نیرویی که این دو تحمل می‌کنند برابر است با:

$$\frac{F_s}{F_c}=\frac{A_sE_s}{A_cE_c+۸A_sE_s}=\frac{۱\times۱۰\,E_c}{۱۶\times۱۲E_c+۸\times۱\times۱۰\,E_c}$$

$$\frac{F_s}{F_c}=\frac{۱۰}{۱۹۲+۸۰}=\frac{۱۰}{۳۷۲}$$

۲۰ـ گزینه «۲»

$$\varepsilon_V=۴\times۱۰^{-۳}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$\xrightarrow{\text{چون جسم تحت تنش تک‌محوره است.}}\varepsilon_V=۴\times۱۰^{-۳}=\varepsilon_x-\nu\varepsilon_x-\nu\varepsilon_x=\varepsilon_x-۲\nu\varepsilon_x=۸\times۱۰^{-۳}-۲\times\nu\times۸\times۱۰^{-۳}\Rightarrow\nu=۰/۲۵$$

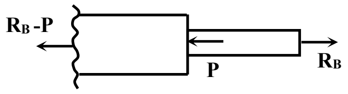
۲۱ـ گزینه «۴»

$$\frac{\delta_۱}{\delta_۲}=\frac{\frac{F(۲L)}{۲AE}}{\frac{FL}{AE}}=۱$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$\delta=\frac{PL}{AE}\Rightarrow P=\frac{AE}{L}\delta=\frac{۴۰۰\times۲۱}{۱۲۰۰۰}\times۲=۱/۴\,kN=۱۴۰۰\,N$$

۲۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه تنش در وسط تیر، کافی است که نیروی داخلی تیر در این قسمت محاسبه شود:

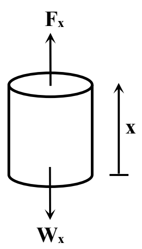


$$\sigma=\frac{(R_B-P)}{A_۲}=\frac{(۹۶۰۰-۲۴۰۰۰)}{۶۰۰}\Rightarrow\sigma=-۲۴\frac{N}{mm^۲}$$

۲۴ـ گزینه «۱» می‌توان برای محاسبه نیروهای تکیه‌گاهی، میله را مانند یک تیر ساده تحت بار متمرکز خارجی در نظر گرفته با گشتاورگیری حول هر تکیه‌گاه نیروی دیگر تکیه‌گاه را بدست آورد.

$$R_A=\frac{P\times۲L/۳}{L}=\frac{۲P}{۳}\Rightarrow\sigma_{AC}=\frac{R_A}{A}=\frac{۲}{۳}\frac{P}{A}$$

۲۵ـ گزینه «۳»



$$\sigma=\frac{F_x}{A}=\frac{W_x}{A}=\frac{mg}{A}$$

$$\sigma=\frac{\rho V_xg}{A}=\frac{\rho Axg}{A}=\rho xg=\gamma x$$

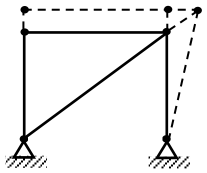
تنش قائم در استوانه‌ای که تحت وزن خود آویزان است، با فاصله x نسبت خطی دارد.

$$x=\frac{h}{۲}\Rightarrow\sigma=\gamma\frac{h}{۲}$$

۲۶ـ گزینه «۲» y,x در راستای شعاعی بوده و تنش‌های آنها با هم برابر است.

$$\sigma_z=-\frac{P}{A}=-\frac{۱۰۰۰۰}{۰/۰۱}=-۱\,Mpa\quad,\quad\sigma_x=\sigma_y$$

$$\varepsilon_x=۰=\frac{۱}{E}\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\}\Rightarrow\sigma_x(۱-\nu)=\nu\sigma_z\Rightarrow\sigma_x(۱-۰/۴۵)=-۰/۴۵\times۱\Rightarrow\sigma_x=-۰/۸۲\,Mpa=\sigma_y$$



۲۷ـ گزینه «۲» به دلیل آنکه سازه معین استاتیکی می‌باشد، اجزای آن می‌توانند تحت افزایش دما تغییر طول دهند بدون آن که کششی در آنها ایجاد شود، در این حالت مفصل A جابجایی افقی نداشته فقط جابجایی قائم خواهد داشت.

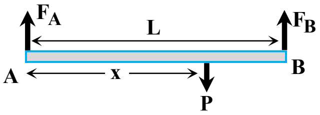
۲۸ـ گزینه «۱»

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu\sigma_x\} \Rightarrow E\varepsilon_y = \sigma_0 - \nu^2\sigma_0 \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

۲۹ـ گزینه «۲»

روش اول: برای آنکه میله AB افقی باقی بماند، باید جابجایی‌های دو کابل باهم برابر باشند:



$$\Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow \frac{F_A L}{E_1 A} = \frac{F_B L}{E_2 A} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow F_A = F_B\frac{E_1}{E_2} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \Rightarrow xP = LF_B \Rightarrow x = L\dfrac{F_B}{P} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B = P \overset{(1)}{\Rightarrow} F_B = \dfrac{P}{1+\dfrac{E_1}{E_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{L}{1+\dfrac{E_1}{E_2}} \Rightarrow x = \frac{LE_2}{E_2+E_1}$$

روش دوم: با استفاده از تعیین موقعیت مرکز سختی میله‌ها مقدار $\bar{x}$ مطابق مقابل به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i E_i}{\sum E_i} = \frac{0\times E_1 + LE_2}{E_1+E_2} = \frac{E_2 L}{E_1+E_2}$$

۳۰ـ گزینه «۲» چون کرنش در راستای طولی معلوم است و همچنین جسم تحت بارگذاری تک محوری قرار دارد پس کرنش‌های جانبی را هم می‌توان با استفاده از ضریب پواسون به دست آورد.

$$V = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\varepsilon$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon - \nu\varepsilon - \nu\varepsilon = \varepsilon(1-2\nu)$$

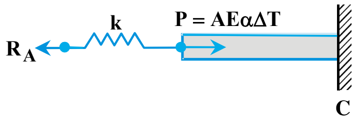
از طرفی: $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V_0} \Rightarrow \Delta V = \varepsilon_V V_0$

حجم نهایی $V = V_0 + \Delta V = V_0 + \varepsilon_V V_0 = V_0(1+\varepsilon_V) = V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon)$

اگر عبارت موجود در گزینه «۲» را ساده نموده و از جملات کوچک مرتبه دوم و بالاتر آن صرف‌نظر کنیم، می‌توان نتیجه گرفت که گزینه «۲» صحیح است.

$$V = V_0(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2 = V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon-2\nu\varepsilon^2+\nu^2\varepsilon^2+\nu^2\varepsilon^3) \Rightarrow V \simeq V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon)$$

پاسخنامه آزمون (۲)

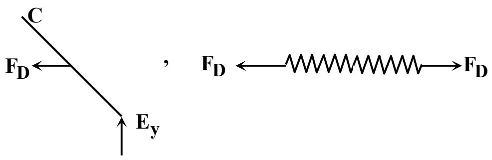


۱ـ گزینه «۱» تکیه‌گاه A را برداشته و به جای آن نیروی R_A قرار داده می‌شود. جابه‌جایی مقطع A تحت اثر نیروی R_A، افزایش دما و نیروی فشاری P برابر صفر است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\delta_A = ۰ \Rightarrow \alpha L \Delta T + \frac{R_A}{k} + \frac{R_A L}{AE} - \frac{(AE\alpha\Delta T)L}{AE} = ۰ \Rightarrow R_A = ۰$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا تعادل کل سازه را بررسی کرده تا نیروی تکیه‌گاهی E محاسبه شود:

$$\Sigma M_A = ۰ \Rightarrow E_y \times ۱۲ - ۱۲ \times ۸ \times ۴ = ۰ \Rightarrow E_y = ۳۲ \text{ ton}$$



اکنون قطعه CDE را جداگانه در نظر گرفته و حول نقطه C گشتاور می‌گیریم تا نیروی فنر بدست آید:

$$CDE \text{ قطعه}: \Sigma M_C = ۰ \Rightarrow ۳۲ \times ۶ - F_D \times ۵ = ۰ \Rightarrow F_D = ۳۸/۴ \text{ tons}$$

با توجه به نیروی بدست آمده برای F_D فنر تحت کشش بوده در نتیجه ازدیاد طول داریم:

$$F_D = K\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{۳۸/۴}{۲۰} = ۱/۹۲ \text{ cm}$$

۳ـ گزینه «۲» در صورتی که میله وسطی وجود نداشته باشد، تغییر مکان مفصل D در راستای قائم طبق مثال حل شده در متن درس، مساوی $\frac{\alpha L \Delta T}{\cos^۲ \alpha}$ می‌باشد. (L طول میله وسطی) که بزرگتر از میزان افزایش طول میله وسطی $\alpha L \Delta T$ است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که میله وسطی تحت کشش و میله‌های جانبی تحت فشار قرار می‌گیرند.

۴- گزینه «۴» رابطه سازگاری بر اساس تشابه مثلث مطابق شکل روبه‌رو نوشته می‌شود.

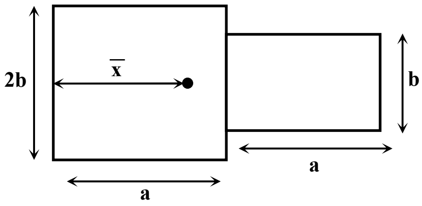
$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{۳a}{a} = ۳ \Rightarrow \frac{\frac{F_C L}{۲AE}}{\frac{F_B(۲L)}{AE}} = ۳ \Rightarrow \frac{F_C}{۴F_B} = ۳ \Rightarrow \frac{F_C}{F_B} = ۱۲$$

۵ـ گزینه «۳» تغییر طول میله‌ی مرکب تحت اثر افزایش دما برابر صفر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\delta = ۰ \Rightarrow \alpha L \Delta T - \frac{F\frac{L}{۲}}{AE} - \frac{F\frac{L}{۲}}{۲AE} = ۰ \Rightarrow F\left(\frac{۱}{۲AE} + \frac{۱}{۴AE}\right) = \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{۳}{۴AE}\right) = \alpha\Delta T \Rightarrow F = \frac{۴AE\alpha\Delta T}{۳} \Rightarrow \frac{F}{۲A} = \frac{۲}{۳}E\alpha\Delta T = \sigma_{AB}$$

۶ـ گزینه «۲»

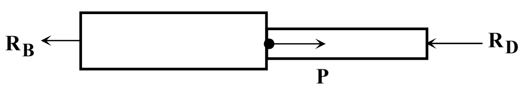


روش اول: در صورتی که بار خارجی بر مرکز سطح مقطع اعمال شود، بار محوری محسوب می‌شود. در چنین حالاتی ابتدا باید تیر از جنس‌های مختلف را به یک تیر همگن تبدیل نمود، بدین صورت که مساحت سطح مقطع تیر قوی‌تر را در ضریب n ضرب نماییم. توجه شود که اثر این افزایش مساحت فقط در راستای عرضی باید اعمال شود، $(n=\frac{E_2}{E_1}>1)$ در این حالت تیری با مقطع گسترش یافته ولی جنس یکسان بدست می‌آید. مرکز سطح مقطع گسترش یافته نقطه اثر نیروی محوری خواهد بود.

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{2}A_i\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{2}A_i}\Rightarrow \overline{x}=\frac{(2ab)\frac{a}{2}+ab\times\frac{3a}{2}}{2ab+ab}=\frac{a^2b+\frac{3}{2}a^2b}{3ab}\Rightarrow \overline{x}=\frac{5}{6}a$$

روش دوم: یافتن مرکز سختی تیر با فرض اینکه L برای دو جنس یکسان باشد.

۷ـ گزینه «۳»



فرض مسئله:
$$\frac{R_B}{2A}=\frac{R_D}{A}\Rightarrow R_B=2R_D$$

از طرفی:
$$R_B+R_D=P\Rightarrow 3R_D=P\Rightarrow\begin{cases}R_D=\frac{P}{3}\\ R_B=\frac{2P}{3}\end{cases}$$

میله در B گیردار است، در نتیجه تغییر طول میله در نقطه B مساوی صفر است، قسمت BC از میله تحت کشش و قسمت CD تحت فشار می‌باشد.

$$\frac{R_BL_1}{2AE}-\frac{R_DL_2}{AE}=0\Rightarrow\frac{\frac{2P}{3}\times L_1}{2}=\frac{\frac{P}{3}\times L_2}{1}\Rightarrow\frac{1}{3}L_1=\frac{L_2}{3}\Rightarrow\frac{L_1}{L_2}=1$$

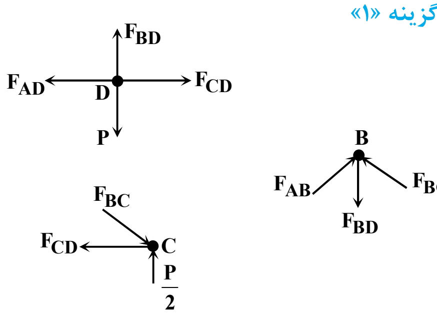
۸ـ گزینه «۴» تغییر مساحت ورق را می‌توان با استفاده از کرنش سطحی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\varepsilon_A=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1-\frac{1}{4}}{100000}(100+50)\Rightarrow\varepsilon_A=112/5\times10^{-5}$$

$$\Rightarrow\varepsilon_A=\frac{\Delta A}{A}=112/5\times10^{-5}\Rightarrow\Delta A=112/5\times10^{-5}\times1000\times2000=2250\,mm^2$$

۹ـ گزینه «۱» در صورتی که تکیه‌گاه صلب در طرفین وجود نداشته باشد چون $\alpha_A>\alpha_B$ می‌باشد. در صورت افزایش دما جسم A تحت فشار و جسم B تحت کشش قرار می‌گیرد . ولی در صورتی که دو جسم از طرفین مقید باشند، افزایش طول در هر دو میله برابر صفر است. لذا هر دو میله تحت فشار می‌باشند. در بین گزینه‌ها گزینه (۱) صحیح‌تر است.

۱۰ـ گزینه «۱»



تعادل مفصل D : $\sum F_y=0\Rightarrow F_{BD}=P\ (T)$

تعادل مفصل B : $F_{AB}\cos45+F_{BC}\cos45-P=0\Rightarrow F_{AB}=F_{BC}=\frac{P}{\sqrt{2}}\ (C)$

تعادل مفصل C : $\frac{P}{\sqrt{2}}\cos45-F_{CD}=0\Rightarrow F_{CD}=\frac{P}{2}\Rightarrow F_{CD}=F_{AD}=\frac{P}{2}\ (T)$

چون ضریب اطمینان برای کشش مساوی ۲ است، بنابراین:

چون ضریب اطمینان برای عضوهای فشاری مساوی ۳ است، بنابراین:

$$AB\ ,\ BC: ۳ = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{all}} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_\circ}{۳\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{\frac{P}{\sqrt{۲}}}{A} = \frac{\sigma_\circ}{۳\sqrt{۲}} \Rightarrow P = \frac{\sigma_\circ A}{۳}$$

$$AD\ ,\ CD: ۲ = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{all}} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_\circ}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{P}{۲}}{A} = \frac{\sigma_\circ}{۲} \Rightarrow P = \sigma_\circ A$$

از بین سه جواب بدست آمده، جواب حداقل مطلوب می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۳» تغییر طول میله‌ی دو سر گیردار تحت اثر تغییر دما برابر صفر است.

$$\Delta = \circ = ۳\alpha L\Delta T - \frac{FL}{۲AE} \Rightarrow \sigma = ۶E\alpha\Delta T$$

میله تحت نیروی فشاری محوری قرار گرفته است. در این حالت تنش برشی ماکزیمم در زاویه ۴۵° نسبت به محور طولی جسم اتفاق افتاده و مساوی نصف تنش قائم ماکزیمم است. در نتیجه :

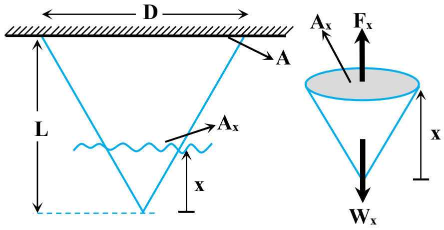
$$\tau_{max} = \frac{F}{A}\sin ۴۵ \cos ۴۵ = \sigma \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶E\alpha\Delta T}{۲} = ۳E\alpha\Delta T$$

۱۲ـ گزینه «۲» تنش در راستای z برابر $(\sigma_z = \circ)$ صفر بوده چون در جهت z تغییر فرم آزاد است. اما جسم در جهت y کاملاً مقید است. بنابراین:

$$\varepsilon_y = \circ \Rightarrow \sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z) = \circ \Rightarrow \sigma_y = \upsilon\sigma_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{۱}{E}\{\sigma_x - \upsilon\sigma_y\} = \frac{۱}{E}\{\sigma_x - \upsilon(\upsilon\sigma_x)\} = \frac{\sigma_x}{E}(۱-\upsilon^۲) \quad \Rightarrow \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{E}{۱-\upsilon^۲}$$

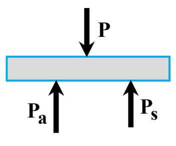
۱۳ـ گزینه «۱» برش دلخواهی به فاصله‌ی x از انتهای میله‌ی مخروطی زده و نیروی داخلی آن را مطابق زیر به دست می‌آوریم.



$$F_x = W_x = \omega V_x = \frac{\omega}{۳}A_x x \Rightarrow \frac{F_x}{A_x} = \frac{\omega}{۳}x$$

$$\delta = \int_\circ^L \frac{F_x dx}{A_x E} = \frac{۱}{E}\int_\circ^L \frac{\omega}{۳}x dx = \frac{\omega}{۳E}[\frac{x^۲}{۲}]_\circ^L = \frac{\omega L^۲}{۶E}$$

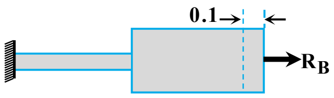
۱۴ـ گزینه «۲» فولاد و آلومینیوم توسط دو گیره صلب تحت فشار قرار دارند، بنابراین تغییر طول آن‌ها باهم برابر است:



$$\left.\begin{array}{l} \text{رابطه تعادل} : P = P_s + P_a \\ \text{رابطه سازگاری} : \Delta_a = \Delta_s \Rightarrow \frac{P_s}{P_a} = \frac{E_s A_s}{E_a A_a} \end{array}\right\} \Rightarrow P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_a A_a}P$$

$$\Rightarrow \sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{E_s}{E_s A_s + E_a A_a}P = \frac{۲۰۰ \times ۲۰۰ \times ۱۰^۳}{۲۰۰ \times \frac{\pi}{۴}(۹۰^۲ - ۷۵^۲) + ۲۵ \times \frac{\pi}{۴} \times ۷۵^۲} \quad \Rightarrow \sigma_s = ۸۰/۱\ MPa$$

۱۵ـ گزینه «۴» در اثر کاهش دما میله مرکب منقبض شده از طرفی تکیه‌گاه در برابر انقباض میله مقاومت از خود نشان می‌دهد بنابراین رابطه سازگاری به صورت زیر نوشته می‌شود:



افزایش طول میله مرکب ناشی از نیروی تکیه‌گاهی ـ انقباض میله مرکب ناشی از کاهش دما $= -۰/۱m$

رابطه سازگاری: $\delta_T - \delta_F = -۰/۱mm \Rightarrow \left(\dfrac{R_B \times ۲۵۰}{۷۰۰۰۰ \times ۷۵۰} + \dfrac{R_B \times ۵۰۰}{۹۰۰۰۰ \times ۵۰۰}\right) - (۲۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۵۰۰ \times ۲۰ + ۲۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۲۵۰ \times ۲۰) = -۰/۱$

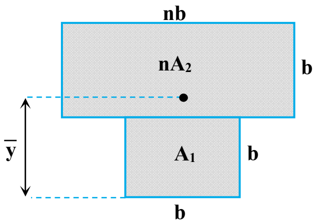
$$\Rightarrow R_B = \dfrac{۰/۲۲۵}{\left(\dfrac{۲۵۰}{۷۰۰۰۰ \times ۷۵۰} + \dfrac{۵۰۰}{۹۰۰۰۰ \times ۵۰۰}\right)} = ۱۴۱۷۵\ \text{N} \ \Rightarrow \sigma_{BC} = \dfrac{R_B}{A_{BC}} = \dfrac{۱۴۱۷۵}{۷۵۰} = ۱۸/۹\ \text{MPa}$$

۱۶ـ گزینه «۱» تغییر مکان مقطع C با استفاده از روش جمع آثار برابر است با:

$$\delta_C = \dfrac{۲W(\frac{L}{۲})}{۲AE} + \dfrac{WL}{۲AE} + \dfrac{W(\frac{L}{۲})}{AE} + \dfrac{WL}{۲AE} = \dfrac{WL}{AE}\left(\dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۲}\right) = \dfrac{۲WL}{AE}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

روش اول: دو میله در صورتی تحت کشش یکنواخت می‌باشند که بار P، بر مرکز سختی سطح مقطع میله مرکب اثر کند، برای پیدا نمودن مرکز سختی میله مرکب باید سطح مقطع با جنس قوی‌تر را گسترش دهیم.

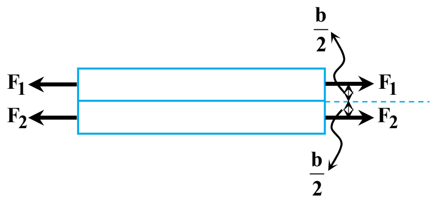


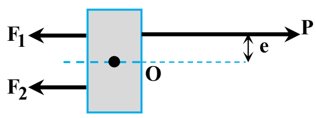
$$n = \dfrac{E_۱}{E_۲}$$

$$\bar{y} = \dfrac{k_۱y_۱ + k_۲y_۲}{k_۱ + k_۲} = \dfrac{E_۱A_۱y_۱ + E_۲A_۲y_۲}{A_۱E_۱ + A_۲E_۲} = \dfrac{A_۱y_۱ + nA_۲y_۲}{A_۱ + nA_۲}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \dfrac{\frac{b}{۲} \times b^۲ + \frac{۳b}{۲} \times nb^۲}{b^۲ + nb^۲} = \dfrac{\frac{b}{۲} + \frac{۳b}{۲} \times n}{n+۱} \Rightarrow e = \bar{y} - b = \dfrac{\frac{b}{۲} + \frac{۳bn}{۲}}{n+۱} - b = \dfrac{\frac{bn}{۲} - \frac{b}{۲}}{n+۱} = \dfrac{b}{۲} \times \dfrac{\frac{E_۱}{E_۲} - ۱}{\frac{E_۱}{E_۲} + ۱} \Rightarrow e = \dfrac{b}{۲}\,\dfrac{E_۱ - E_۲}{E_۱ + E_۲}$$

روش دوم: برای این که میله‌ها، تحت کشش باشند باید نیرو در میله‌ها، در وسط آن‌ها باشد.





معادلات تعادل:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow P - F_۱ - F_۲ = ۰ \Rightarrow F_۱ + F_۲ = P \quad (۱)$$

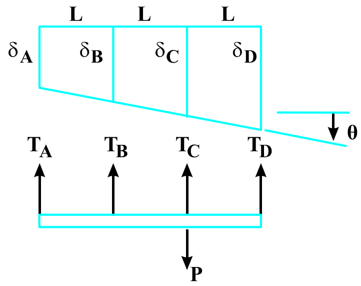
$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow Pe = F_۱\dfrac{b}{۲} + F_۲\dfrac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow Pe = (F_۱ - F_۲)\dfrac{b}{۲}$$

طبق اصل سازگاری، تغییر طول میله‌ها باهم برابر است پس:

رابطه سازگاری: $\Delta_۱ = \Delta_۲ \Rightarrow \dfrac{F_۱L}{AE_۱} = \dfrac{F_۲L}{AE_۲} \Rightarrow F_۱ = \dfrac{E_۱}{E_۲}F_۲ \quad (۳)$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow e = \dfrac{b}{۲}\,\dfrac{E_۱ - E_۲}{E_۱ + E_۲}\ ,\ F_۱ = \dfrac{E_۱}{E_۱ + E_۲}P\ ,\ F_۲ = \dfrac{E_۲}{E_۱ + E_۲}P$$

۱۸ـ گزینه «۱» میله‌ی صلب افقی پس از اعمال بار به سمت پایین حرکت کرده و اندکی مایل می‌شود.



زاویه‌ی میله صلب با افق برابر است با:

$$\theta=\frac{\delta_B-\delta_A}{L}$$

اکنون می‌توان تغییر طول میله‌های B و C و D را برحسب تغییر مکان میله‌ی A و زاویه‌ی θ نوشت:

$$\delta_B=\delta_A+L\theta \qquad (1)$$

$$\delta_C=\delta_A+2L\theta=2\delta_B-\delta_A \qquad (2)$$

$$\delta_D=\delta_A+3L\theta=3\delta_B-2\delta_A \qquad (3)$$

از طرفی معادلات تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum F_y=0\Rightarrow T_A+T_B+T_C+T_D=P \qquad (4)$$

$$\sum M_D=0\Rightarrow T_A(3L)+T_B(2L)+T_C L=PL \qquad (5)$$

با حل همزمان معادلات بالا نیروی کششی در سیم A به صورت مقابل به دست می‌آید.

$$T_A=\frac{1}{10}P$$

۱۹ـ گزینه «۱» در اثر افزایش دمای میله‌ی AB خواهیم داشت:

$$\alpha\frac{L}{2}\Delta T-\frac{F\frac{L}{2}}{2AE}-\frac{F\frac{L}{2}}{AE}=0\Rightarrow F\left(\frac{1}{4AE}+\frac{1}{2AE}\right)=\frac{\alpha\Delta T}{2}$$

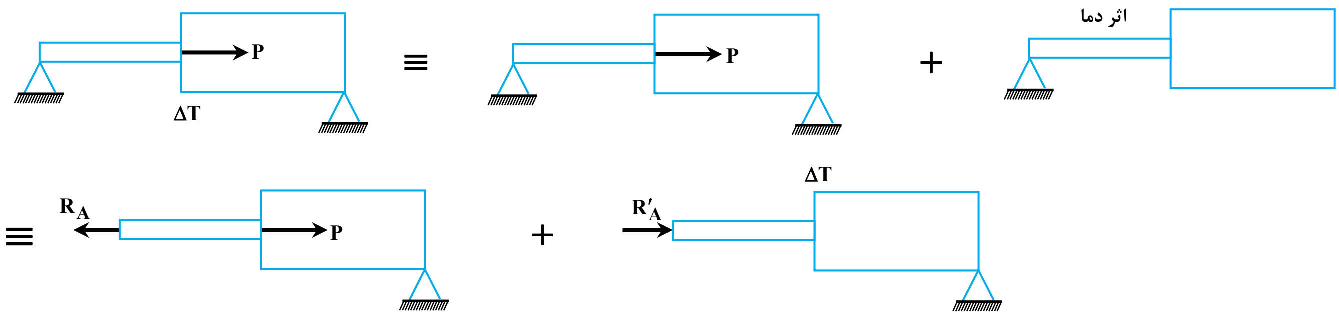
$$\Rightarrow F\left(\frac{3}{4AE}\right)=\frac{\alpha\Delta T}{2}\Rightarrow F=\frac{2}{3}AE\alpha\Delta T\Rightarrow\sigma_{AB}=\frac{F}{2A}=\frac{E\alpha\Delta T}{3}\Rightarrow\sigma_{AB}=\frac{2(10^5)(10^{-5})120}{3}=80\,\text{MPa}$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به حل تشریحی مثال (۹) فصل اول درس‌نامه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$\delta_B=\frac{P\times H}{2AE\cos^3\alpha}=\frac{P\times 2L\cos\alpha}{2AE\cos^3\alpha}=\frac{PL}{AE\cos^2\alpha}$$

۲۱ـ گزینه «۱»

روش اول: این مسئله نامعین استاتیکی است و از جمع آثار آن را حل می‌کنیم:



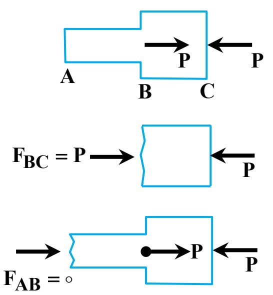
جابجایی کلی نقطه A تحت اثر نیرو و دما برابر صفر است، لذا:

$$\frac{R_AL}{AE}+\frac{R_AL}{3AE}-\frac{PL}{3AE}+\frac{(-R'_A)L}{AE}+\frac{(-R'_A)L}{3AE}+2L\alpha\Delta T=0$$

از آنجایی که تنش در قسمت AB برابر صفر است پس نیروی داخلی در این قسمت باید مساوی صفر شده و $R_A=R'_A$ باشد، در نتیجه:

$$\frac{-PL}{3AE}+2L\alpha\Delta T=0\Rightarrow\ \Delta T=\frac{P}{6AE\alpha}$$

روش دوم: برای آنکه تنش در میله AB صفر گردد، نیروی تکیه‌گاهی در A نباید وجود داشته باشد. بنابراین نیروی تکیه‌گاهی در C باید برابر P به صورت روبرو باشد.



از آنجا که نقطه‌ی A، جابجایی ندارد پس باید جابجایی این نقطه ناشی از نیرو، برابر با جابجایی‌اش در اثر تغییر دما باشد، پس رابطه سازگاری به این صورت نوشته می‌شود:

$$\delta_P=\delta_T\Rightarrow\left(\frac{F_{BC}L}{3AE}+\cancel{\frac{F_{AB}L}{AE}}^{\,0}\right)=\alpha L\Delta T+\alpha L\Delta T$$

$$\Rightarrow\frac{PL}{3AE}=2\alpha L\Delta T\Rightarrow\Delta T=\frac{P}{6AE\alpha}$$

۲۲ـ گزینه «۱» با توجه به حل تشریحی مثال (۱۸) فصل اول درسنامه (۱) می‌توان نوشت:

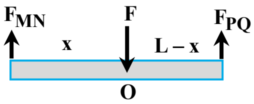
$$\tan^{۲}\alpha = ۲ \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \alpha = \cos^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۳ـ گزینه «۳» با استفاده از روش جمع آثار می‌توان نوشت:

$$\delta_A = \frac{PL}{A_{AB}E_{AB}} + \frac{PL}{A_{BC}E_{BC}} - \frac{۲۴۰۰\times L}{A_{BC}E_{BC}} = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۴۰۰\times۱۰۰} + \frac{P}{۸۰۰\times۲۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۸۰۰\times۲۰۰}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{۱}{۴۰۰۰۰} + \frac{۱}{۱۶۰۰۰۰}\right) = \frac{۲۴}{۱۶۰۰} \Rightarrow P = ۴۸۰N$$

۲۴ـ گزینه «۱»



طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{MN} = \varepsilon_{PQ} \Rightarrow \frac{F_{MN}}{A_۱E_۱} = \frac{F_{PQ}}{A_۲E_۲} \Rightarrow \frac{F_{MN}}{F_{PQ}} = \frac{A_۱E_۱}{A_۲E_۲} \qquad (۱)$$

معادله تعادل $\sum M_O = ۰ \Rightarrow -F_{MN}\times x + F_{PQ}\times(l-x) = ۰ \Rightarrow \frac{F_{MN}}{F_{PQ}} = \frac{x}{l-x} \qquad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{A_۱E_۱}{A_۲E_۲} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow x(A_۲E_۲ + A_۱E_۱) = l\times A_۱E_۱ \quad ; \quad x = \frac{A_۱E_۱\times l}{A_۲E_۲ + A_۱E_۱}$$

۲۵ـ گزینه «۲» در اجسام ایزوتروپیک چون خواص جسم در همه جهات یکسان است، بنابراین تحت تغییرات دما تنشی در جسم ایجاد نمی‌شود.

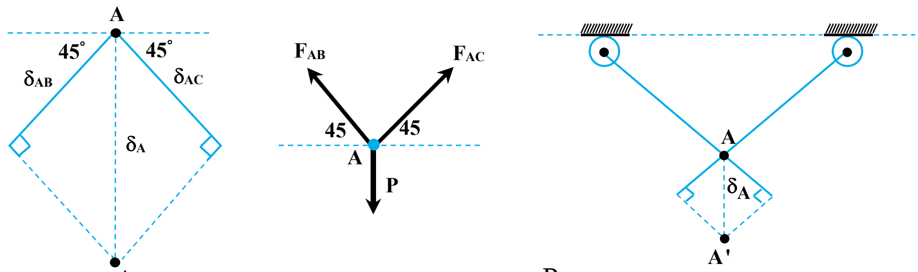
۲۶ـ گزینه «۴» تمرکز تنش در اجسام از لحاظ تئوری ناشی از تغییرات ناگهانی سطح مقطع، گوشه‌های تیز و به طور خلاصه تابع شکل هندسی می‌باشد.

۲۷ـ گزینه «۳»

$$\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow E = \frac{FL}{A\delta} = \frac{۱۰KN\times۶۰۰mm}{۵۰mm^{۲}\times۱۵۰\times۱۰^{-۳}mm} \Rightarrow E = ۸۰۰GPa$$

۲۸ـ گزینه «۱»

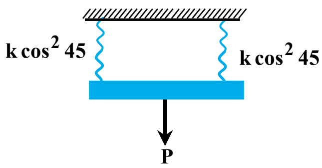
روش اول: با توجه به شکل رسم شده برای جابجایی مفصل A می‌توان نوشت:



$$\delta_A = \frac{\delta_{AB}}{\cos ۴۵} = \sqrt{۲}\delta_{AB} \quad ; \quad \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲F_{AB}\sin ۴۵ = P \Rightarrow F_{AB} = \frac{P}{\sqrt{۲}}$$

$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB}L}{AE} = \frac{\frac{P}{\sqrt{۲}}\times L}{AE} \Rightarrow \delta_A = \sqrt{۲}\times\frac{PL}{\sqrt{۲}AE} = \frac{PL}{AE}$$

روش دوم: با استفاده از معادل‌سازی دو میله با فنر می‌توان همین نتیجه را ساده‌تر به دست آورد. به این صورت که هر میله زاویه‌دار را طبق تذکر ۱۲ به یک فنر تبدیل کرده و چون دو فنر دارای خیز یکسان در مفصل A می‌باشند، با استفاده از قانون فنرهای موازی، سختی معادل فنرها را می‌توان به دست آورد. در نهایت جابجایی مفصل A از رابطه $\frac{P}{k_{eq}}$ تعیین می‌شود.



$$\delta = \frac{P}{k_{eq.}} = \frac{P}{۲k\cos^{۲}۴۵} = \frac{P}{۲k\times\frac{۱}{۲}} = \frac{P}{k} = \frac{P}{\frac{AE}{L}} = \frac{PL}{AE}$$

۲۹ـ گزینه «۱»

ΔT تغییر طول میله ناشی از تغییر دمای $= L\alpha\Delta T$

P تغییر طول میله ناشی از نیروی محوری $= \dfrac{PL}{EA}$

برای حالتی که با افزایش دمای T، نیروی P به صورت مساوی بین دو ستون تقسیم می‌شود، داریم: $P_1 = P_2 = \dfrac{P}{2}$

رابطه‌ی سازگاری: $(L\alpha T)_1 - (\dfrac{PL}{2EA})_1 = (L\alpha T)_2 - (\dfrac{PL}{2EA})_2$

$$\Rightarrow \alpha_1 T - \frac{P}{2E_1A_1} = \alpha_2 T - \frac{P}{2E_2A_2} \qquad \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)T = \frac{P}{2}(\frac{1}{E_1A_1} - \frac{1}{E_2A_2})$$

$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = 3a^2 \qquad \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)T = \frac{P}{2}(\frac{1}{4E_2a^2} - \frac{1}{3E_2a^2}) = \frac{-P}{24E_2a^2} \xrightarrow{E_1=4E_2} (\alpha_2 - \alpha_1)T = \frac{P}{6E_1a^2} \qquad (I)$$

در حالت (۲) که تمام نیرو را مقطع اول تحمل می‌کند، داریم: $(L\alpha\Delta T)_1 - (L\alpha\Delta T)_2 = \left(\dfrac{PL}{EA}\right)_1$ رابطه‌ی سازگاری

$$L_1 = L_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T = \frac{P}{E_1A_1} = \frac{P}{E_1a^2} \qquad (II)$$

با جاگذاری II در I $\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)T = \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{6} \Rightarrow \Delta T = -6T$

پس بایستی به میزان $6T$ کاهش یابد.

۳۰ـ گزینه «۴» در این میله، مؤلفه‌های تنش به صورت زیر می‌باشد. (چون بارگذاری محوری است تنش‌های قائم در راستای y و z مساوی صفر است.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

تغییر حجم برای المانی تحت تنش محوری و تغییرات دما طبق قانون هوک عمومی برابر است با:

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V$$

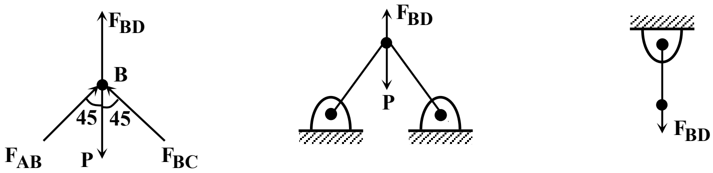
طبق قانون هوک عمومی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha T \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha T \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta V = [\frac{1-2\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\alpha T]V \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \Delta V = [\dfrac{1-2\upsilon}{E}\dfrac{P}{A} + 3\alpha T]V \\ V = AL \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta V = \frac{1-2\upsilon}{E}PL + 3AL\alpha T$$

پاسخنامه‌آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۱»



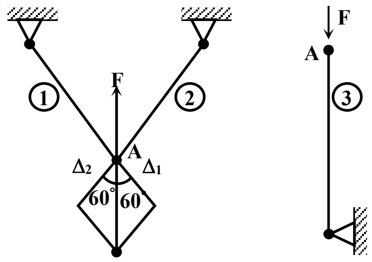
از معادله تعادل در مفصل B نوشته می‌شود:

$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{BD} + ۲F_{AB}\cos ۴۵ = P \xrightarrow{\text{(با فرض مساوی بودن نیروی سه میله)}} F = \frac{P}{۱+\sqrt{۲}}$$

اگر دو میله AB و BC به تنهایی تحت نیروی P در راستای محور تقارن سازه قرار گیرند، جابجایی مفصل D در راستای نیرو مساوی $\frac{PL}{۲AE\cos^۲\theta}$ می‌باشد و با تغییر مکان مفصل B از سازه ناشی از افزایش طول میله BD، مساوی است.

رابطه سازگاری: $\frac{(P-F)L}{۲A_۱E\cos^۲ ۴۵} = \frac{F\times L}{AE} \Rightarrow \frac{(P-\frac{P}{۱+\sqrt{۲}})}{۲\times A_۱\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{\frac{P}{۱+\sqrt{۲}}}{A} \Rightarrow \frac{A_۱}{A} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}}{۲\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۲}$

۲ـ گزینه «۲» میله‌های (۱) و (۲) تحت اثر افزایش دما، افزایش طولی برابر $\Delta_۱$ داشته و همچنین تحت اثر نیروی فشاری وارده از طرف میله (۳) کاهش طول خواهند داشت. عکس‌العمل نیروی F نیز باعث کاهش طول میله (۳) خواهد شد. بنابراین جابجایی مفصل A تحت عوامل ΔT و F برابر است با:



$$\alpha L\Delta T = \Delta_۱$$

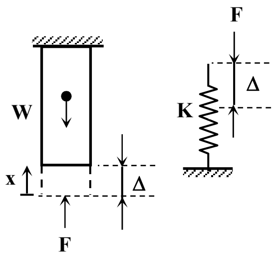
رابطه سازگاری: $\frac{\Delta_۱}{\cos ۶۰} - \frac{FL}{۲AE\cos^۲ ۶۰} = \frac{FL}{AE} \Rightarrow ۲\alpha L\Delta T = F(\frac{L}{AE}+\frac{۲L}{AE}) \Rightarrow F = \frac{۲}{۳}AE\alpha\Delta T$

جمله دوم از رابطه فوق مربوط به تغییر مکان مفصل A تحت نیروی خارجی است.

چون زاویه بین سه میله برابر است، در نتیجه نیروی فشاری به وجود آمده در سه میله مساوی و برابر F می‌باشد.

۳ـ گزینه «۴» تغییر طول فنر و میله در نقطه اتصال به یکدیگر با هم برابرند، از آنجائیکه تغییر طول میله ناشی از نیروی وزن و نیروی فشاری فنر می‌باشد، در نتیجه:

تغییر طول یک میله تحت اثر وزن آن برابر است با:



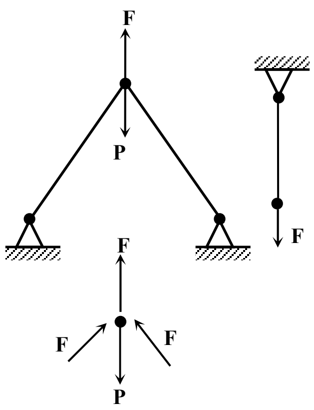
$$\delta = \int\frac{wdx}{AE}, w = \gamma v = \gamma Ax$$

$$\Rightarrow \delta = \int_۰^L \frac{\gamma Axdx}{AE} = \frac{\gamma}{E}\frac{L^۲}{۲} = \frac{\gamma(AL)L}{۲AE} = \frac{WL}{۲AE} = \frac{WL}{۲AE}$$

البته می‌توان وزن را به صورت نیروی متمرکز در نظر گرفت و به راحتی به جواب بالا رسید.

$$\frac{WL}{۲AE} - \frac{FL}{AE} = \frac{F}{K} = \Delta \Rightarrow \frac{WL}{۲AE} = F(\frac{L}{AE}+\frac{۱}{K}) \Rightarrow F = \frac{\frac{WL}{۲AE}}{\frac{L}{AE}+\frac{L}{۲AE}} = \frac{\frac{WL}{۲AE}}{\frac{۳L}{۲AE}} = \frac{W}{۳}$$

$$\Delta = \frac{F}{K} = \frac{FL}{۲AE} = \frac{WL}{۶AE}$$



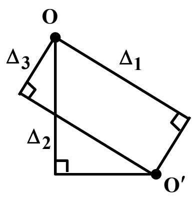
۴ـ گزینه «۲» با توجه به روابط (۱) و (۲) در مثال ۳۳ متن درس می‌توان نوشت:

رابطه سازگاری : $\Delta=\frac{(P-F)L}{۲A_۲E\cos^۲ ۴۵}=\frac{FL}{A_۱E}\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{(P-F)}{۲\times\frac{۱}{۲}F}=\frac{P-F}{F}$

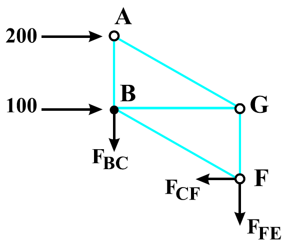
با نوشتن رابطه تعادل در راستای y برای نقطه اتصال ۳ میله نتیجه می‌شود که:

$$\Sigma F_y=۰\Rightarrow P=F+۲F\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=F(۱+\sqrt{۲})$$

$$\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{F(۱+\sqrt{۲})-F}{F}=\sqrt{۲}$$



۵ـ گزینه «۴» به دلیل اینکه نیروی P در راستای قائم است ، نیرو در میله‌های (۱) و (۳) مساوی می‌باشد، از طرفی چون $A_۱<A_۳$ در نتیجه طبق رابطه $\Delta=\frac{PL}{AF}$ ، $\Delta_۱>\Delta_۳$ و نقطه O به طرف پایین و سمت راست انحراف می‌یابد.

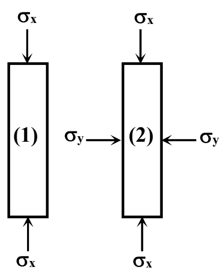


۶ـ گزینه «۳» یک برش مایل در خرپا زده و با کمک معادله‌ی تعادل نیروی داخلی در عضو CF را به دست می‌آوریم.

$$\sum F_x=۰\Rightarrow -F_{CF}+۱۰۰+۲۰۰=۰\Rightarrow F_{CF}=۳۰۰\text{kips}$$

$$\sigma_{CF}=\frac{F_{CF}}{A}=\frac{۳۰۰\text{kips}}{۲\text{in}^۲}=۱۵۰\text{ksi}$$

۷ـ گزینه «۲»



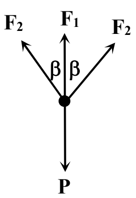
$$\frac{\Delta V_۲}{\Delta V_۱}=\frac{\varepsilon_{V_۲}}{\varepsilon_{V_۱}}=\frac{(\frac{۱-۲\nu}{E})(\sigma_{x_۲}+\sigma_{y_۲}+\sigma_{z_۲})}{(\frac{۱-۲\nu}{E})(\sigma_{x_۱}+\sigma_{y_۱}+\sigma_{z_۱})}$$

$$\sigma_{x_۱}=-P\ ,\ \sigma_{y_۱}=\sigma_{z_۱}=۰$$

$$\sigma_{x_۲}=-P\ ,\ \sigma_{y_۲}\neq۰\ ,\ \sigma_{z_۲}=۰$$

$$\varepsilon_{y_۲}=۰=\sigma_{y_۲}-\nu\sigma_{x_۲}=۰\Rightarrow\sigma_{y_۲}=\nu\sigma_{x_۲}=-\nu P$$

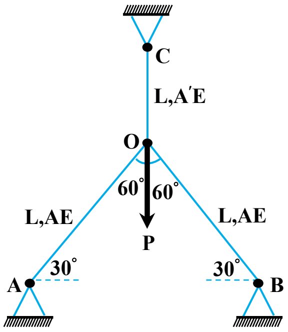
$$\frac{\Delta V_۲}{\Delta V_۱}=\frac{-P-\nu P+۰}{-P+۰+۰}=\frac{۱+\nu}{۱}\ ,\ ۰<\nu<۰/۵\Rightarrow ۱<۱+\nu<۱/۵\Rightarrow\frac{\Delta v_۲}{\Delta v_۱}>۱$$

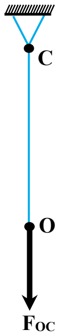


۸ـ گزینه «۴» با توجه به مثال ۲۰ در فصل اول درسنامه (۶) می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_y=۰\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta+F_۱=P\\ F_۱=\frac{P}{۱+۲\cos^۳\beta}\qquad(۱)\end{array}\right\}\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta+\frac{P}{۱+۲\cos^۳\beta}=P$$

$$\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta=\frac{۲\cos^۳\beta\times P}{۱+۲\cos^۳\beta}\Rightarrow F_۲=\frac{\cos^۲\beta}{۱+۲\cos^۳\beta}\times P\qquad(۲)\qquad;(۱),(۲)\Rightarrow\frac{F_۱}{F_۲}=\frac{۱}{\cos^۲\beta}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$



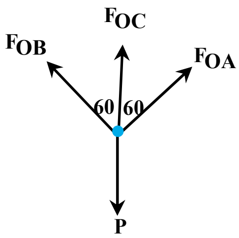


۹ـ گزینه «۳» برای حل مسئله می‌توان ابتدا میله OC را در نظر نگرفت و به جای آن نیروی داخلی آن میله را قرار داد، سپس از رابطه سازگاری استفاده نمود.

$$\Delta_O=\frac{(P-F_{OC})L}{2AE\cos^2 60}=\frac{F_{OC}L}{A'E}\Rightarrow\frac{P-F_{OC}}{2A\times\frac{1}{4}}=\frac{F_{OC}}{A'}\qquad(1)$$

از طرفی نیرو در میله‌ها مساوی است.

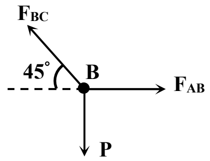
از نوشتن تعادل برای مفصل O نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y=0\Rightarrow F_{OC}+F_{OA}\cos 60+F_{OB}\cos 60-P=0\Rightarrow F_{OC}=\frac{P}{2}\qquad(2)$$

با قرار دادن نتیجه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{P-\frac{P}{2}}{\frac{A}{2}}=\frac{\frac{P}{2}}{A'}\Rightarrow\frac{A'}{A}=\frac{1}{2}$$



۱۰ـ گزینه «۲» اعضای AB, BC هرکدام دو نیرویی بوده و نیرو را در راستای خط واصل نقاط ابتدا به انتهای عضو تحمل می‌کنند. بنابراین امتداد نیرو در عضو BC در راستای BC است.

$$\cot g45=\frac{F_{AB}}{P}\Rightarrow F_{AB}=P\ \Rightarrow\Delta_{AB}=\frac{PR}{AE}$$

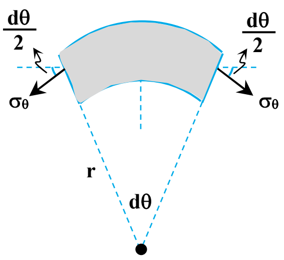
۱۱ـ گزینه «۲» در اثر تغییر دما در میله‌ی مرکب دو سرگیردار، تغییر طول میله برابر صفر است، بنابراین طبق رابطه‌ی سازگاری می‌توان نوشت:

$$\delta=\delta_T+\delta_F=0\ \Rightarrow\alpha\frac{L}{3}\Delta T+\frac{\alpha}{2}\frac{L}{3}\Delta T+2\alpha\frac{L}{3}\Delta T-\frac{F\frac{L}{3}}{A(2E)}-\frac{F\frac{L}{3}}{2AE}-\frac{F\frac{L}{3}}{3A(\frac{E}{2})}=0$$

$$\Rightarrow\alpha\Delta T(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3})=\frac{F}{AE}(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9})\ \Rightarrow\alpha\Delta T\frac{7}{6}=\frac{F}{AE}\frac{10}{18}\ \Rightarrow F=\frac{21}{10}AE\alpha\Delta T$$

حداکثر تنش فشاری در میله‌ی باریک‌تر ایجاد شده بنابراین مقدار آن مساوی است با:

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{21}{10}E\alpha\Delta T$$



۱۲ـ گزینه «۲» برای یک المان کوچک به زاویه مرکزی dθ می‌توان قانون دوم نیوتن را به صورت زیر نوشت:

$$\sum F_n=ma_n$$

اگر ضخامت المان در جهت عمود بر صفحه برابر یک در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$[\sigma_\theta\sin\frac{d\theta}{2}\times dr]\times 2=a_n dm=r\omega^2 dm$$

از آن‌جا که زاویه $\frac{d\theta}{2}$ بسیار کوچک است پس: $\sin\frac{d\theta}{2}\simeq\frac{d\theta}{2}$.

$$\sigma_\theta\frac{d\theta}{2}\times 2dr=r\omega^2\rho dV$$

از طرفی حجم المان برابر است با:

$$dV=dr\times 1\times rd\theta$$

در نتیجه:

$$\sigma_\theta=\frac{r\omega^2\rho\times dr\times 1\times rd\theta}{dr\ \ d\theta}=\rho r^2\omega^2$$

۱۳ـ گزینه «۳» تغییرات حجم با استفاده از کرنش حجمی در یک المان مکعبی برابر است با:

$$\Delta V=\varepsilon_v V_\circ=\varepsilon_v\times a^۳=\frac{(۱-۲\nu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)a^۳\qquad(۱)$$

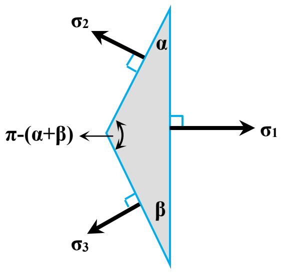
$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم مکعب } V=a^۳\\ \text{قطر مکعب } d=a\sqrt{۳}\Rightarrow a=\dfrac{d}{\sqrt{۳}}\end{array}\right\}\Rightarrow V=\frac{d^۳}{۳\sqrt{۳}}$$

از طرفین رابطه فوق دیفرانسیل می‌گیریم، در نتیجه ارتباط بین تغییرات حجم و تغییرات قطر به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \Delta V=\frac{۳d^۲\Delta d}{۳\sqrt{۳}}\Rightarrow \Delta d=\frac{۳\sqrt{۳}\Delta V}{۳d^۲}=\frac{\sqrt{۳}\Delta V}{d^۲}\qquad(۲)$$

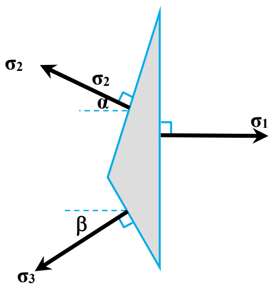
$$(۱),(۲)\Rightarrow\ \Delta d=\frac{\sqrt{۳}(۱-۲\nu)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)a^۳}{E\times(a\sqrt{۳})^۲}\Rightarrow \Delta d=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\frac{(۱-۲\nu)a}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

۱۴ـ گزینه «۴» با نوشتن معادلات تعادل برای المان و همچنین قانون مثلث برای المان مثلثی نشان داده شده می‌توان نتیجه گرفت گزینه «۴» صحیح است.



$$\text{قانون مثلث}\quad \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a\ ;\ c=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}a$$



معادلات تعادل برای المان مثلثی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\sum F_y=\circ\Rightarrow\sigma_۲\sin\alpha\times b=\sigma_۳\sin\beta\times c\Rightarrow\sigma_۲=\sigma_۳$$

$$\sum F_x=\circ\Rightarrow\sigma_۲\cos\alpha\times b+\sigma_۳\sin\beta\times c=\sigma_۱ a$$

$$\Rightarrow\sigma_۲\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a+\sigma_۳\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}a=\sigma_۱ a\Rightarrow$$

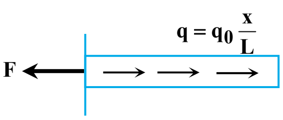
$$\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a=\sigma_۱ a\ \Rightarrow\sigma_۲\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}a=\sigma_۱ a\ \Rightarrow\sigma_۱=\sigma_۲=\sigma_۳$$

۱۵ـ گزینه «۴» تغییر مکان انتهای میله که تحت بارگذاری گسترده محوری $q(x)$ قرار دارد، عبارت است از :

$$\delta=\int_\circ^L\frac{F}{EA}dx$$

چون نیروی خارجی به صورت بار گسترده است، برای محاسبه نیروی داخلی باید از رابطه انتگرالی زیر استفاده نمود.

در این تست:



$$\delta=\int_\circ^L\frac{\frac{q_\circ}{۲L}x^۲}{EA}dx=\frac{q_\circ}{۲LEA}\int_\circ^L x^۲dx=\frac{q_\circ}{۲LEA}\frac{x^۳}{۳}\Big|_\circ^L=\frac{q_\circ}{LEA}\frac{L^۳}{۶}\Rightarrow\delta=\frac{q_\circ L^۲}{۶EA}$$

۱۶ـ گزینه «۱» در صورتی که تغییر مکان $\Delta(x)$ در هر نقطه تابعی از مکان باشد، کرنش ε_x برابر است با:

$$\varepsilon_x=\frac{d\Delta(x)}{dx}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{در این تست}\quad\varepsilon_x=\dfrac{d(kx^۳)}{dx}=۳kx^۲\\ \text{جابجایی انتهای میله}\quad\Delta_\circ=kL^۳\end{array}\right\}\Rightarrow\varepsilon_x=\frac{۳\Delta_\circ}{L^۳}x^۲$$

۱۷ـ گزینه «۴» طبق تذکر ۵ درسنامه ۶ فصل اول می‌توان نوشت:

$$\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{2} k_i a_i^2} = \frac{3PL}{\frac{2AE}{L}(L)^2 + \frac{4AE}{L}(2L)^2} = \frac{3PL}{18AEL} = \frac{P}{6AE}$$

۱۸ـ گزینه «۳» در حالت نهایی هر سه میله نیرویی به اندازه‌ی بار تسلیم تحمل می‌کنند، بنابراین با نوشتن معادله تعادل $\sum F_y = 0$ برای مفصل تحت بار خارجی می‌توان بار نهایی سازه را به صورت زیر به دست آورد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2\sigma_y A\cos 60 + 2\sigma_y A\cos 60 + \sigma_y A - P_u = 0 \Rightarrow P_u = 3\sigma_y A$$

۱۹ـ گزینه «۴» نیروی خارجی باید در مرکز سختی میله اثر کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = \frac{A_1E_1x_1 + A_2E_2x_2}{A_1E_1 + A_2E_2} = \frac{3AE \times L}{AE + 3AE} = \frac{3}{4}L$$

۲۰ـ گزینه «۲» میله‌ها وقتی رها می‌شوند که نیرویی به آن‌ها وارد نشود، بنابراین هنگام رها شدن یکی از میله‌ها، نیروی P باید تماماً به میله‌ی دیگر وارد شود.

$$\left.\begin{array}{l} \text{در حالت اول}: \frac{PL}{2AE_2} = T(\alpha_1 - \alpha_2)L \\ \text{در حالت دوم}: \frac{PL}{AE_1} = 3T(\alpha_1 - \alpha_2)L \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{حالت اول}}{\text{حالت دوم}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{3}$$

۲۱ـ گزینه «۳» تغییر طول میله در اثر نیروی محوری در ناحیه الاستیک میله در حالت اولیه به اندازه‌ی 7mm کشیده می‌شود، بعد از باربرداری مقدار جابجایی الاستیک به حالت اولیه باز می‌گردد در صورتی که تغییر مکان پلاستیک، دیگر باز نمی‌گردد. در نتیجه:

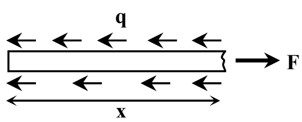
$$\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow \delta = \frac{\sigma_y L}{E} = \frac{(300\times 10^6)(500\times 10^{-3})}{200\times 10^9} \Rightarrow \delta = 0/75\text{mm}$$

۲۲ـ گزینه «۳» با توجه به این که حجم نمونه در تغییر شکل پلاستیک ثابت است می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4}d_1^2 L_0 = \frac{\pi}{4}d^2 L \Rightarrow \frac{L}{L_0} = \frac{d_1^2}{d^2} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow e = \text{Ln}\frac{L}{L_0} = \text{Ln}\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 = 2\text{Ln}\frac{d_1}{d}$$

۲۳ـ گزینه «۱» اگر در یک فاصله دلخواه x از انتهای میله برش بزنیم نیروی محوری داخلی برابر خواهد بود با:

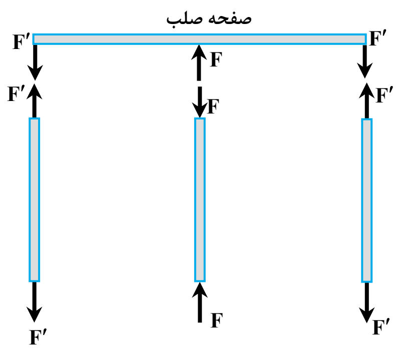


$$F = \int q\,dx = \int_0^x q_0\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{q_0 x^3}{3L^2}$$

و اما تغییر طول میله تحت بار داخلی F برابر است با:

$$\delta = \int_0^L \frac{F\,dx}{AE} = \frac{1}{AE}\int_0^L \frac{q_0 x^3}{3L^2}dx = \frac{q_0}{3AEL^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L = \frac{q_0 L^2}{12AE}$$

۲۴ـ گزینه «۲» دیاگرام آزاد صفحه صلب و سه میله به صورت مقابل می‌باشد.



تغییر طول ناشی از تغییر دما $\delta_T = L\alpha\Delta T$

تغییر طول ناشی از نیروهای محوری $\delta = \frac{PL}{EA}$

برای میله وسط $\delta_۱ = L\alpha\Delta T - \frac{FL}{EA}$

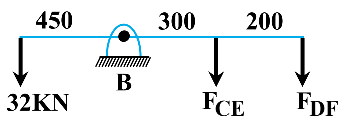
برای میله‌های کناری $\delta_۲ = \frac{F'L}{EA}$

مطابق با دیاگرام آزاد صفحه صلب $\Rightarrow F' = \frac{F}{۲}$

به دلیل تقارن باید $\delta_۱ = \delta_۲$ باشد. $\delta_۱ = \delta_۲ \Rightarrow L\alpha\Delta T - \frac{FL}{EA} = \frac{FL}{۲EA} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\frac{FL}{EA} = L\alpha\Delta T \Rightarrow F' = \frac{F}{۲} = \frac{EA\alpha\Delta T}{۳}$

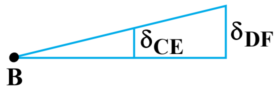
برای میله‌های کناری $\Rightarrow \sigma = \frac{F'}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{E\alpha\Delta T}{۳}$

۲۵ـ گزینه «۴»

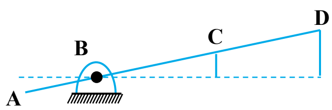


$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow ۳۲\times۴۵۰ - F_{CE}\times۳۰۰ - F_{DF}\times۵۰۰ = ۰ \quad (۱)$$

در اثر اعمال نیروی خارجی، میله صلب ABCD به شکل زیر کج می‌شود که مـی‌تـوان قـانون تشـابه مثلث را برای آن نوشت.



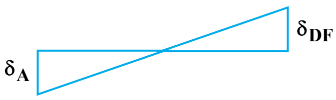
تشابه مثلث : $\frac{\delta_{DF}}{\delta_{CE}} = \frac{۵۰۰}{۳۰۰} = \frac{۵}{۳} \quad (۲)$



$$\delta = \frac{FL}{AE} \xrightarrow{(۲)} \frac{\frac{F_{DF}\times۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times۱۵^۲\times E}}{\frac{F_{CE}\times۶۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times۱۰^۲\times E}} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{F_{DF}}{F_{CE}} = \frac{۵\times۶۰۰\times۱۵^۲}{۳\times۷۵۰\times۱۰^۲} = ۳/۰ \Rightarrow F_{CE} = \frac{F_{DF}}{۳/۰} \quad (۳)$$

$$(۱),(۳) \Rightarrow F_{DE} = ۲۴\,kN$$

۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به مثلث رسم شده و استفاده از نسبت تشابه می‌توان نوشت:



$$\frac{\delta_A}{\delta_{DF}} = \frac{۴۵۰}{۵۰۰} \quad ; \quad \frac{\delta_A}{\frac{F_{DF}\times۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times۱۵^۲\times۷۰}} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \delta_A = \frac{۹}{۱۰}\times\frac{۲۴\times۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times۱۵^۲\times۷۰} = ۱/۳mm$$

۲۷ـ گزینه «۱»

$$\varepsilon_z = \frac{۱}{E}\{\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\} = \frac{۱}{E}[\sigma_\circ - \upsilon(\sigma_\circ + ۰)] \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_\circ}{E}(۱-\upsilon) \Rightarrow \frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_z} = \frac{E}{۱-\upsilon}$$

۲۸ـ گزینه «۴» کرنش در جهت y برابر نسبت تغییرات قطر به قطر اولیه است.

$$G = \frac{E}{۲(۱+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{۲G} - ۱ = \frac{۲۰۰}{۱۶۰} - ۱ = ۰/۲۵ \quad ; \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F}{AE} \quad (۱)$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \ , \ \frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_y \quad (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{\Delta d}{d} = -۰/۲۵\times\frac{F}{AE} \Rightarrow \Delta d = -۰/۲۵\times\frac{۲۰۰۰\times۱۰}{\frac{\pi}{۴}\times۱۰^۲\times۲۰۰\times۱۰^۳}$$

$$\Rightarrow \Delta d = ۳/۱۸\times۱۰^{-۴}\ mm$$

۲۹ـ گزینه «۴» کرنش در راستای محور x با استفاده از قانون هوک عمومی برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{۱}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\} \qquad (۱)$$

اما طبق فرض صورت مسأله کرنش در راستای محور z برابر صفر است، در نتیجه داریم:

$$\varepsilon_z = \frac{۱}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\} = ۰ \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \varepsilon_x = \frac{۱}{E}\{\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\times\nu(\sigma_x + \sigma_y)\} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{۱}{E}\{\sigma_x(۱-\nu^۲) - \nu\sigma_y(۱+\nu)\}$$

۳۰ـ گزینه «۱» تغییر طول میله مخروطی تحت اثر افزایش دما برابر $\alpha L\Delta T$ می‌باشد، اما تکیه‌گاهها با اعمال نیروی فشاری P مانع این تغییر طول می‌شوند. با توجه به حل تشریحی مثال (۷) فصل اول درسنامه‌ی (۳) مقدار تغییر طول میله‌ی مخروطی ناقص تحت اثر نیروی محوری P برابر است با:

$$\delta_P = \frac{۴PL}{\pi d_۱ d_۲ E}$$

اکنون طبق رابطه‌ی سازگاری می‌توان نوشت:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = ۰ \Rightarrow \alpha L\Delta T - \frac{۴PL}{\pi d_۱ d_۲ E} = ۰ \Rightarrow P = \frac{\pi\alpha E d_۱ d_۲ \Delta T}{۴}$$

بیشترین تنش در اثر نیروی محوری P در باریک‌ترین بخش میله رخ خواهد داد.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{min}} = \frac{P}{\frac{\pi}{۴}d_۲^۲} = \frac{۴}{\pi}\times\frac{\frac{\pi\alpha E d_۱ d_۲\Delta T}{۴}}{d_۲^۲} = E\alpha\frac{d_۱}{d_۲}\Delta T$$