مدرسان شریف

فصل اول

«دستگاه اعداد حقیقی و مختلط»

درسنامه (۱): نظریه مجموعه‌ها

مقدمه

در اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ میلادی به علت رخ دادن بعضی از پارادوکس‌ها و تناقضات در ریاضی که ناشی از عدم درک و به کارگیری نادرست بعضی از مفاهیم ریاضی مانند حد، بی‌نهایت و ... بود، ریاضیدانان طراز اول به فکر دقیق‌سازی ریاضی و خالی نمودن آن از هرگونه شک و ابهام افتادند. گرچه تلاش‌های اولیه آنها خود دچار تناقضات زیادی گشت، ولی چاره‌ای جز این نبود! باید برای ریاضیات نوین پایه‌های محکم و تردیدناپذیر وضع می‌شد.

ریاضیدانان ابتدا به سراغ ساخت مجموعه‌ها براساس اصولی رفتند که این اصول با یکدیگر تناقض نداشته و نتوان از آنها استدلالی متناقض به دست آورد. بعد از آن نوبت به ساخت اعداد رسید. شاید در ابتدا این کار بیهوده به نظر برسد، زیرا بسیاری وجود اعداد را از مسلمات می‌دانند. اما به دلایلی که در این فصل از آن مطلع خواهید شد، باید به نحو مطلوبی ابتدا اعداد طبیعی بر پایه اصول و تعاریف قبل و سپس اعداد صحیح به کمک اعداد طبیعی و در نهایت اعداد گویا از اعداد صحیح و اصول قبل ساخته می‌شدند. نکته‌ای که در ساخت این اعداد به شدت باید لحاظ گردد، آرمانی نمودن آنها بود به این معنا که در نهایت آنها باید بر شهود ما و توقعی که ما از آنها داریم منطبق باشند، به طور مثال در مجموعه اعداد طبیعی که ساخته می‌شود باید $۲\times۲=۴$ گردد، در غیر این صورت مجموعه‌ای که ساخته‌ایم چیز دیگری به جز مجموعه اعداد طبیعی است. ریاضیدانان تا مرحله ساخت مجموعه‌ی اعداد گویا از اصول و قضایای قبل به مشکل خاصی برخورد نکردند، اما ساخت مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه‌های قبل به این سادگی‌ها نبود و مدتی زمان برد تا تکنیک ساخت آن کشف گردید. گرچه بعد از ساختن مجموعه اعداد حقیقی، می‌توان نگاه اصل موضوعی به آن داشت و آنالیز را به وسیله اصول موضوعه اعداد حقیقی آغاز کرد، ولی قبل از ساخت دقیق مجموعه اعداد حقیقی، این کار به لحاظ منطقی امکان‌پذیر نبود. به هر حال ما در این فصل ابتدا مروری گذرا به دستگاه اصل موضوعی مجموعه‌ها انداخته، خواص رابطه و تابع و انواع آن را در حد نیاز یادآوری می‌کنیم، نگاهی به جبر و جبرخطی انداخته و آنچه را برای ساخت مجموعه اعداد حقیقی و ادامه مطالعه کتاب نیاز داریم معرفی می‌کنیم و در نهایت به یکی از الگوهای ساخت اعداد حقیقی براساس مجموعه اعداد گویا می‌پردازیم. بعد از ساخت دقیق مجموعه اعداد حقیقی، خواص آن، مانند اصل کمال، خاصیت ارشمیدسی، ترتیب کلی و داشتن زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا و ... را بررسی و اثبات کرده و در نهایت وارد میدان اعداد مختلط می‌گردیم. ورود ما به مجموعه اعداد مختلط در حد مقدماتی و بیان چند تعریف و قضیه خواهد بود. بعد از این فصل آماده‌ایم که به طور جدی وارد آنالیز ریاضی گردیم.

باید به شما دانشجوی عزیز بگوییم که عمده‌ی مطالبی که در این فصل می‌خوانید جنبه **یادآوری و مرور** دارد، یادآوری مباحثی از مبانی ریاضی، جبر، جبر خطی و سایر دروس مقدماتی دیگر. در واقع آنالیز ریاضی از مبحث ساخت مجموعه اعداد حقیقی آغاز می‌گردد، لذا اگر اطلاعات شما در درس‌های مقدماتی ریاضی به ویژه درس مبانی ریاضی کافی می‌باشد، می‌توانید از بسیاری از این مباحث عبور کرده و مطالعه‌ی خود را از مبحث ساخت مجموعه اعداد حقیقی از سر بگیرید. اگرچه این فصل دارای کمترین تعداد سؤال در آزمون‌ها می‌باشد ولی بدون فهم آن نمی‌توان به فهم آنالیز ریاضی دست یافت.

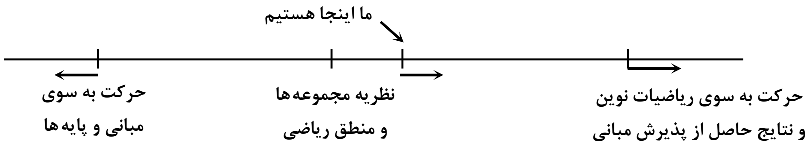
آنچه از نظریه مجموعه‌ها نیاز داریم

مشابه هندسه که همه‌ی حقایق و قضایای آن از چند اصل ساده و مقدماتی قابل استنتاج و استخراج می‌باشند، ریاضیات نوین و جدید نیز بر پایه چند اصل اساسی استوار گردیده است. با ذکر مثالی، بحث خود را آغاز می‌کنیم. فرض کنید که شما در میان جاده‌ای قرار گرفته‌اید که نه ابتدای آن را می‌دانید و نه انتهای آن را. طبیعی است که اگر علاقه‌ای به پیمودن این جاده داشته باشید باید در نهایت در یکی از دو جهت ممکن، شروع به حرکت کنید. ممکن است در ابتدا حرکت در جهتی برای شما ساده‌تر و یا جذاب‌تر باشد و در آن سمت حرکت خود را آغاز کنید ولی پس از برخورد با موانع جدی، راه طی شده را بازگشته و به محل اول خود برگردید و در سمت دیگر شروع به حرکت کنید. گاهی ممکن است مجبور شوید چندین بار این مسیر را طی کنید و جهت حرکت خود را عوض کنید.

نقش بشر در مواجهه با ریاضیات مانند نقش شما در مواجهه با آن جاده است، انسان با قسمتی از ریاضیات مواجه گردیده است که نه **ابتدای** آن بوده و نه **انتهای** آن! پس از مدتی که این جاده را به سمت جلو طی کرد، ریاضیدانان دو دسته شدند، عده‌ای این جاده را برگشتند و سعی کردند مبدأ آن را پیدا کنند، که ما امروزه به آن اصول موضوعه ریاضیات می‌گوییم، و دسته‌ای نیز بی‌توجه به مبدأ (مبانی ریاضیات) به سمت مقصد در این جاده حرکت کردند. با انباشت تجربه‌های دو گروه، بلاخص تجربیات افرادی که در هر دو سوی مسیر گام برداشتند، شاید امروزه ریاضی‌دانان به این نتیجه رسیده باشند که این جاده و مسیر نه مبدأ معلوم و مشخصی دارد و نه مقصدی معلوم. فقط می‌توان با وضع اصول موضوعه‌ای مناسب برای خود، مبدأ و محل شروعی را در نظر گرفت.

به عنوان مثال اصول اقلیدس محل شروع هندسه اقلیدسی و اصول نظریه مجموعه‌ها محل شروع ریاضیات نوین (جبر، آنالیز، توپولوژی) می‌باشد.

ابتدا مقدماتی را برای شما یادآوری کرده و سپس بحث اصلی خود را آغاز می‌کنیم.



اصول نظریه مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل (Zermelo - Fraenkel)

این اصول توسط دو ریاضیدان به نام‌های تسرملو و فرانکل برای نظریه مجموعه‌ها وضع شده است که ما آن را در اینجا مبنای کار خود قرار می‌دهیم، در اصطلاح به این دستگاه اصل موضوعی، ZF گفته می‌شود. اصولی که در ادامه خواهد آمد به زبان ساده شیوه ساخت مجموعه‌ها را در علم ریاضی بیان می‌کنند، این اصول تعیین می‌کنند که در ریاضی به چه اشیایی **مجموعه** گفته می‌شود و به چه اشیایی نمی‌توان مجموعه گفت. وظیفه‌ی این اصول روشن ساختن مفهوم مجموعه در علم ریاضی می‌باشد.

- **اصل وجود (The Axiom of Existence):** مجموعه‌ای وجود دارد که شامل هیچ عضوی نمی‌باشد. به بیان خیلی ساده مجموعه تهی وجود داشته و ما آن را با نماد $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.
- **اصل محتوا یا گسترش (The Axiom of Extensionality):** اگر هر عضوی از مجموعه A عضو مجموعه B و هر عضوی از مجموعه B عضوی از مجموعه A باشد، آنگاه مجموعه A با مجموعه B برابر است یعنی $A = B$.
- **اصل جداپذیری (The Axiom Schema of Comprehension):** اگر $P(x)$ یک خاصیتی در مورد عضو x باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی A، $\{x \in A \mid P(x)\}$ یک مجموعه است.
- **اصل زوج‌سازی (The Axiom of Pair):** به ازای هر دو مجموعه A و B مجموعه $A \cup B$ وجود دارد که اعضای آن یا عضو A اند و یا عضو B. به بیان ساده‌تر اجتماع دو مجموعه، خود یک مجموعه است.
- **اصل اجتماع (The Axiom of Union):** اگر A یک مجموعه باشد، اجتماع همه‌ی اعضای A نیز مجموعه است.
- **اصل مجموعه توانی (The Axiom of Power Set):** اگر A یک مجموعه باشد، مجموعه $P(A)$ به گونه‌ای موجود است که $B \in P(A)$ اگر و تنها اگر $B \subseteq A$.
- **اصل موضوع بی‌نهایت (The Axiom of Infinity):** مجموعه استقرایی وجود دارد. این اصل به زبان خیلی ساده، یعنی مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد.
- **اصل نظم (The Axiom of Regularity):** مجموعه‌ای وجود ندارد که عضو خودش باشد.

در مورد اصل جداپذیری منظور از خاصیت، یک صفت برای عضو دلخواه x است به عنوان مثال x فرد باشد، x مثبت و گویا باشد، x مرد باشد، x آبی باشد و ... . در مورد اصل مجموعه توانی نیز باید گفت که این اصل می‌گوید: اگر A مجموعه باشد آنگاه $\{B | B \subseteq A\}$ نیز مجموعه است. این مجموعه را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. اصل موضوع بی‌نهایت، وجود مجموعه اعداد طبیعی را یک اصل می‌داند، یعنی در ریاضیاتی که از این اصل ناشی می‌شود وجود مجموعه اعداد طبیعی یک اصل است و **قابل اثبات** نمی‌باشد. در نهایت اصل نظم برای جلوگیری از بروز تناقض در ساخت مجموعه‌ها لازم است، زیرا مجموعه‌هایی که عضو خودشان می‌باشند در ریاضیات بی‌معنی‌اند و لذا مجموعه نمی‌باشند. برای شروع هنوز یک اصل دیگر مانده است که بیان آن نیازمند توضیحاتی می‌باشد، این اصل چیزی نیست جز **اصل انتخاب**، که بحث برانگیزترین اصل در تمام ریاضیات قرن ۱۸ و۱۹ و حتی ۲۰ بود. اصلی که اضافه کردن آن به اصول ZF دستگاه اصل موضوعی ZFC را برای ما تشکیل می‌دهد (حرف C اول کلمه Choice به معنای انتخاب است).

❖ **تعریف ۱:** فرض کنیم که S خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، تابع $g : S \to \bigcup_{A \in S} A$ را یک **تابع انتخاب** می‌گوییم، هرگاه $\forall A \in S \to g(A) \in A$.

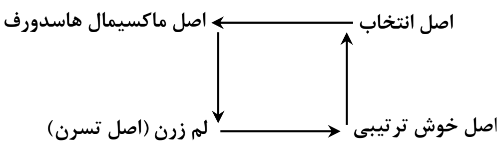
مثال ۱: الف: اگر $A_۱ = \{۱\}$ ، $A_۲ = \{۱,۲\}$ و $S_۱ = \{A_۱\}$ ، $S_۲ = \{A_۱, A_۲\}$ یک تابع انتخاب برای خانواده $S_۱$ و یک تابع انتخاب برای خانواده $S_۲$ بنویسید.
ب: اگر $A_n = \{۱,۲,...,n\}$ و $S = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ آنگاه یک تابع انتخاب برای خانواده S بنویسید.

☑ **پاسخ:** الف: تابع $g : S_۱ = \{A_۱\} \to \{۱\}$ که $g(A_۱) = ۱$ به وضوح برای $S_۱$ یک تابع انتخاب می‌باشد، زیرا $g(A_۱) = ۱ \in A_۱$. همچنین تابع $f : S_۲ = \{A_۱, A_۲\} \to \{۱,۲\}$ که $f(A_۱) = ۱$ و $f(A_۲) = ۲$، یک تابع انتخاب برای $S_۲$ است، زیرا $f(A_۱) = ۱ \in A_۱$ و $f(A_۲) = ۲ \in A_۲$.
ب: تابع $f : S \to \{۱,۲,۳,...\}$ با ضابطه‌ی $f(A_n) = n$ یک تابع انتخاب برای خانواده S است، زیرا $f(A_n) = n \in A_n$.

همان‌طورکه مشاهده فرمودید نوشتن یک تابع انتخاب برای خانواده‌ای **متناهی** از مجموعه‌ها کار چندان دشواری نمی‌باشد، همچنین در حالتی که مجموعه S مجموعه‌ای نامتناهی ولی به نوعی ساختار **منظمی** داشته باشد، مانند مجموعه اعداد طبیعی، باز هم این کار امکان‌پذیر است، ولی آیا هر خانواده دلخواه S، که لزوماً نامتناهی است، دارای یک تابع انتخاب می‌باشد؟ سؤال در **وجود** تابع انتخاب به هیچ وجه سؤال کم‌ارزشی نمی‌باشد و در عمل وقتی به طور ریشه‌ای و اصولی به سراغ اثبات قضایای مهم در ریاضی می‌رویم، به گونه‌ای **درستی اثبات** وابسته به وجود یک تابع انتخاب می‌گردد. وقتی ریاضیدانان، بسیاری از اثبات‌های مهم و اساسی شاخه‌های مختلف ریاضی را بررسی کرده‌اند، پی بردند که درستی بسیاری از آنها به این بستگی دارد که آیا یک تابع انتخاب برای یک خانواده دلخواه از مجموعه‌ها وجود دارد یا خیر؟

- **اصل انتخاب (The Axiom of Choice):** هر خانواده ناتهی دلخواه از مجموعه‌های ناتهی دارای حداقل یک تابع انتخاب است.

این ۹ اصل، دستگاه اصل موضوعه ما است و تمام نتایج را می‌توان با کمی صرف وقت از این ۹ اصل به نوعی استخراج کرد. این دستگاه، دستگاه "ZFC" نام دارد. در مورد اصل انتخاب ذکر این نکته نیز ضروری می‌باشد که این اصل دارای صورت‌های معادل دیگری هم می‌باشد. به عنوان مثال، "اصل ماکسیمال هاسدورف"، "اصل تسرن (لم زرن)" و "اصل خوش ترتیبی" همگی با اصل انتخاب معادل می‌باشند، در شکل مقابل سه اصل دیگر که هم‌ارز اصل انتخاب می‌باشند را مشاهده می‌کنید:



مثال ۲: فرض کنید که خانواده‌ی $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فضای مرجع M باشند و $B \subseteq M$ در این صورت نشان دهید که:

الف) $B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$ ب) $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$

ج) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ د) $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

☑ **پاسخ:** الف: با عضوگیری نشان می‌دهیم که هر طرف تساوی زیرمجموعه طرف دیگر می‌باشد.

$$x \in B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) \to (x \in B) \wedge (x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \to (x \in B) \wedge (\exists j \in I \ni x \in A_j)$$
$$\to (x \in B \wedge (x \in A_j)) \to x \in B \cap A_j \to x \in \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \to B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

اما برای اثبات عکس رابطه:

$$x \in \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \to \exists j \in I \ni x \in B \cap A_j \to (x \in B) \wedge (x \in A_j)$$
$$\to (x \in B) \wedge (x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \to x \in B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) \to \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \subseteq B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i)$$

بنابراین رابطه‌ی الف برقرار می‌باشد، اثبات قسمت ب به طور مشابه انجام می‌شود.

ج: این بخش قوانین دمورگان را برای یک خانواده دلخواه از مجموعه‌ها بیان می‌کند.

$$x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c \to x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \to \forall i \in I \;;\; x \notin A_i \to \forall i \in I \;;\; x \in A_i^c \to x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \to (\bigcup_{i\in I} A_i)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

برای اثبات عکس رابطه داریم:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \to \forall i \in I \;;\; x \in A_i^c \to \forall i \in I \;;\; x \notin A_i \to x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \to x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c \to \bigcap_{i\in I} A_i^c \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$$

بنابراین رابطه برقرار می‌باشد.

اثبات قسمت د نیز به طور مشابه انجام می‌پذیرد.

مثال ۳: اگر $A,B \subseteq M$ باشند نشان دهید که:

الف) $B^c \subseteq A^c \leftrightarrow A \subseteq B$ ب) $A \cap B = \varnothing \leftrightarrow A \subseteq B^c$ ج) $A - B = A \cap B^c$

☑ **پاسخ:** الف: فرض کنیم که $A \subseteq B$ در این صورت: $x \in B^c \to x \notin B \to x \notin A \to x \in A^c \to B^c \subseteq A^c$

و اگر فرض کنیم که $B^c \subseteq A^c$ در این صورت: $x \in A \to x \notin A^c \to x \notin B^c \to x \in B \to A \subseteq B$

بنابراین حکم برقرار می‌باشد.

ب:
$$(x \in A) \wedge (A \cap B) = \varnothing \to x \notin B \to x \in B^c \to A \subseteq B^c$$
$$(x \in A) \wedge (A \subseteq B^c) \to x \in B^c \to x \notin B \to A \cap B = \varnothing$$

این اتحاد، بسیار پر کاربرد می‌باشد و به ویژه در فصل ۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ج:
$$x \in A - B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B^c) \leftrightarrow x \in A \cap B^c$$

بنابراین $A - B = A \cap B^c$

توجه فرمایید که ارزش اتحاد $A - B = A \cap B^c$ در این است که عمل **تفاضل** را برحسب دو عمل **اشتراک** و **مکمل** بازنویسی می‌کند.

یادآوری برخی از مباحث در مورد تابع و رابطه

❖ **تعریف ۲: حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه:** فرض کنیم که B و A دو مجموعه باشند، حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B را با نماد $A \times B$ نشان داده می‌شود که برابر است با مجموعه همه زوج‌های مرتبی که مؤلفه اول آنها متعلق به مجموعه A بوده و مؤلفه دوم آنها متعلق به مجموعه B باشد، به بیان دیگر:
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

مثال ۴: الف: اگر $A = \{a,b\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$ حاصل‌ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را به‌دست آورید.

ب: نشان دهید به ازای سه مجموعه دلخواه A، B و C داریم: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

☑ **پاسخ:** الف: طبق تعریف داریم: $A \times B = \{(x,y) \mid x \in \{a,b\} \wedge y \in \{۱,۲,۳\}\} = \{(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۱),(b,۲)(b,۳)\}$

و به طور مشابه برای $B \times A$: $B \times A = \{(۱,a),(۱,b),(۲,a),(۲,b),(۳,a),(۳,b)\}$

همان‌طور که در این مثال ساده مشاهده گردید، الزامی به اینکه $A \times B = B \times A$ باشد نیست!

ب: با عضوگیری رابطه را اثبات می‌کنیم:
$$(a,b) \in A \times (B \cap C) \leftrightarrow (a \in A) \wedge (b \in B \cap C) \leftrightarrow (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (b \in C)$$
$$\leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C) \leftrightarrow ((a,b) \in A \times B) \wedge ((a,b) \in A \times C)$$
$$\leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

بنابر اصل گسترش حکم برقرار می‌باشد.

➢ **توجه۱:** در مورد تعریف حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه باید بگوییم که:

الف ـ در حالت کلی مجموعه $A \times B$ با مجموعه $B \times A$ برابر نمی‌باشد. بنابراین حاصل‌ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

ب ـ اگر مجموعه A یا مجموعه B تهی باشد آنگاه $A \times B = \varnothing$ و $B \times A = \varnothing$.

ج ـ اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ دارای $m.n$ عضو می‌باشند.

دـ اگر $A = B$ باشد داریم $A \times B = A \times A = A^۲$، لذا منظور از $A^۲$ ضرب دکارتی مجموعه A در خودش می‌باشد.

مثال ۵: فرض کنیم A، B، C، $D \subseteq X$، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
۲) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$
۳) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
۴) $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که مجموعه‌های A و B زیرمجموعه مجموعه X هستند، لذا $A \times B \subseteq X \times X$ و منظور از $(A \times B)^c$ مجموعه $X \times X - (A \times B)$ است. با مثال نشان می‌دهیم که رابطه $(A \times B)^c = A^c \times B^c$ نادرست است. فرض کنیم که $X = \{a,b,c,d\}$ ، $A = \{a,b\}$ و $B = \{a\}$ در این صورت: $A \times B = \{(a,a),(b,a)\}$
$$(A \times B)^c = X \times X - A \times B = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),...\}$$
$$A^c \times B^c = \{(c,b),(c,c),(c,d),(d,b),(d,c),(d,d)\}$$

توجه شود که $(b,b)\notin A^c\times B^c$ ولی $(b,b)\in(A\times B)^c$ بنابراین $A^c\times B^c\neq(A\times B)^c$. در مورد گزینه ۴ نیز باید گفت که مجموعه‌های $(A\times B)\times C$ و مجموعه‌های $A\times(B\times C)$ اگرچه مساوی نمی‌باشند زیرا اعضای مجموعه $(A\times B)\times C$ به صورت $((a,b),c)$ است که $b\in B$ ، $a\in A$ و $c\in C$ و اعضای مجموعه $A\times(B\times C)$ به صورت $(a,(b,c))$ است که $b\in B$ ، $a\in A$ و $c\in C$ ولی بین این دو مجموعه می‌توان یک تناظر برقرار نمود به بیان دیگر این دو مجموعه در تناظر یک به یک با یکدیگرند. $(a,(b,c))\longleftrightarrow((a,b),c)$

مفهوم بعدی که می‌خواهیم معرفی کنیم، مفهوم رابطه است. ایده‌ی این مفهوم، مانند بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی، از شهود ما نسبت به محیط اطرافمان گرفته شده است. به طور مثال وقتی می‌گوییم شخص a با شخص b در رابطه‌اند اگر و تنها اگر در یک کلاس دانشگاه باشند در واقع ما یک نوع رابطه بین دانشجویان یک دانشگاه تعریف کرده‌ایم. «در یک کلاس دانشگاه بودن» نوعی رابطه بین دانشجویان یک دانشگاه تعریف می‌کند. در مورد اشیاء ریاضی نیز می‌توانیم مشابه این روابط را تعریف کنیم، به طور مثال مجموعه A (یعنی یک شیء ریاضی) با مجموعه B (یعنی یک شیء ریاضی دیگر) در رابطه است اگر و تنها اگر $A\subseteq B$، درواقع زیرمجموعه بودن نوعی رابطه بین مجموعه‌ها در ریاضی تعریف می‌کند.

❖ **تعریف۳:** فرض کنیم که A و B دو مجموعه باشند، یک **رابطه** مانند R از مجموعه A در مجموعه B یک زیرمجموعه از مجموعه $A\times B$ است. به بیان ساده‌تر هر زیرمجموعه از حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B است.

$$R \text{ یک رابطه از } A \text{ در } B \text{ است} \leftrightarrow R\subseteq A\times B$$

در مورد تعریف رابطه به چند نکته باید توجه کنیم:

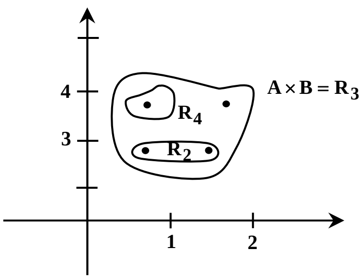
الف: رابطه‌ی A در B با رابطه‌ی B در A فرق می‌کند، یعنی ترتیب مجموعه‌های A و B در تعریف رابطه مهم است (زیرا $A\times B$ و $B\times A$ در حالت کلی با هم فرق می‌کنند).

ب: طبق تعریف به ازای هر دو مجموعه A و B مجموعه $\varnothing$ نیز یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B است.

ج: از آنجا که هر رابطه از A در B زیرمجموعه $A\times B$ است، لذا اگر $R\neq\varnothing$ اعضای آن به صورت زوج‌های مرتب (a,b) می‌باشند که $a\in A$ و $b\in B$. همچنین منظور از نماد aRb (می‌خوانیم a تحت R با b در رابطه است) این است که $(a,b)\in R$ لذا: $(a,b)\in R\leftrightarrow aRb$.

مثال۶: الف: چهار رابطه از مجموعه $A=\{۱,۲\}$ در مجموعه $B=\{۳,۴\}$ بنویسید.

ب: اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ آنگاه تعداد کل رابطه‌ها از مجموعه A در مجموعه B چه تعداد است؟



نمودار رابطه‌های A در B

☑ **پاسخ:** الف: ابتدا حاصل‌ضرب دکارتی این دو مجموعه را تشکیل می‌دهیم:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}=\{(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۴)\}$$

رابطه‌های $R_۱,R_۲,R_۳$ و $R_۴$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$R_۱=\varnothing$$
$$R_۲=\{(۱,۳),(۲,۳)\}$$
$$R_۳=\{(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۴)\}$$
$$R_۴=\{(۱,۴)\}$$

دقت کنید $R_۳$ برابر همان مجموعه $A\times B$ می‌باشد، بنابراین روابط می‌توانند تهی یا تک‌عضوی و ... تا این‌که با کل مجموعه $A\times B$ برابر گردند، باشند.

ب: می‌دانیم که اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ آنگاه $|A\times B|=m.n$. بنابراین کل مجموعه $A\times B$ دارای mn عضو می‌باشد. هر رابطه طبق تعریف یک زیرمجموعه از مجموعه $A\times B$ می‌باشد، بنابراین باید تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه $A\times B$ را به‌دست آوریم، از طرفی در نظریه مجموعه‌ها می‌دانیم که اگر مجموعه X دارای k عضو باشد، آنگاه مجموعه X دارای ۲^k زیرمجموعه است. به زبان ریاضی $|P(X)|=۲^{|X|}$ بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه $A\times B$ برابر است با $۲^{|A\times B|}=۲^{mn}$ به طور مثال در قسمت الف تعداد کل روابطی که می‌توان از مجموعه A در مجموعه B نوشت $۲^{۲\times۲}=۱۶$ تا می‌باشد.

مثال۷: کدام‌یک از روابط زیر تابعی از مجموعه $\mathbb{R}$ به مجموعه $\mathbb{R}$ است؟

الف: $f=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲=۲\}$ ، ب: $g=\{(x,y)\mid |x|+|y|=۱\}$ ، ج: $h=\{(x,y)\mid |x|+y^۳=۱\}$

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج **متمایزی** با **مؤلفه اول یکسان** در آن نباشد.

الف: تابع نیست زیرا: $(-۱,۱)\neq(-۱,-۱)\to(-۱,۱)\wedge(-۱,-۱)\in f$

ب: تابع نمی‌باشد زیرا: $(۰,۱)\neq(۰,-۱)\to(۰,۱)\wedge(۰,-۱)\in g$

ج: تابع است زیرا: $x=x'\to|x|=|x'|\to-|x|=-|x'|\to۱-|x|=۱-|x'|\to\sqrt[۳]{۱-|x|}=\sqrt[۳]{۱-|x'|}\to y=y'$

بنابراین در رابطه‌ی h اگر دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند، مؤلفه‌های دوم آنها نیز یکسان می‌گردد.

خواص رابطه‌ها

در رابطه‌های شهودی‌تر، روابط همگی یک شکل نبوده و دارای خواص متعددی می‌باشند، به طور مثال در میان افراد یک شرکت یا اداره «مافوق بودن» یک رابطه است و می‌توان نوشت:

شخص a مافوق شخص b است. $\leftrightarrow a \sim b$ (یعنی شخص a در رابطه با شخص b است.)

در رابطه بالا واضح است که اگر $a \sim b$ آنگاه شخص b دیگر نمی‌تواند با شخص a در رابطه باشد زیرا بین دو شخص a و b که a مافوق شخص b است، دیگر شخص b نمی‌تواند مافوق شخص a باشد. اما این رابطه دارای خاصیت جالب $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \rightarrow a \sim c$ می‌باشد، یعنی اگر شخص a مافوق شخص b و شخص b مافوق شخص c باشد، طبیعی است که شخص a مافوق شخص c می‌گردد. در ضمن در این رابطه $a \sim a$ معنی‌دار نمی‌باشد، زیرا هیچ شخصی در یک شرکت مافوق خودش نمی‌باشد.

به عنوان مثالی دیگر رابطه‌ی:

شخص a با شخص b دوست است. $\leftrightarrow a \approx b$

رابطه‌ای است که از $a \approx b$ نتیجه می‌شود $b \approx a$ ولی از $(a \approx b) \wedge (b \approx c)$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \approx c$ و همچنین $a \approx a$ نیز برقرار نمی‌باشد و سرانجام رابطه‌ی:

شخص a در کشور شخص b زندگی می‌کند. $\leftrightarrow a \cong b$

به وضوح دارای سه خاصیت $a \cong b \leftrightarrow b \cong a$ و $a \cong a$ و $(a \cong b) \wedge (b \cong c) \rightarrow a \cong c$ به ازای همه اشخاص ممکن a، b و c است. اکنون این خواص را به طور دقیق در ریاضی معرفی می‌کنیم.

❖ **تعریف ۴:** فرض کنیم R رابطه‌ای از مجموعه A در مجموعه A باشد، در این صورت:

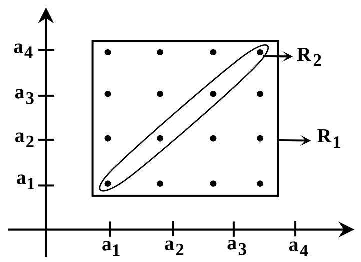
الف: R **انعکاسی** است هرگاه $\forall a \in A \ ; \ aRa$

ب: R **متقارن** است هرگاه $\forall a,b \in A \ ; \ aRb \rightarrow bRa$

ج: R **متعدی** است هرگاه $\forall a,b,c \in A \ ; \ (aRb) \wedge (bRc) \rightarrow aRc$

د: R **هم‌ارزی** است هرگاه دارای سه خاصیت انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

➢ **توجه۲:** این ویژگی‌ها مختص رابطه‌هایی می‌باشند که از یک مجموعه به خودش تعریف می‌گردد، لذا اگر $A \neq B$ آنگاه متقارن بودن، انعکاسی بودن و یا متعدی بودن رابطه‌ی $R \subseteq A \times B$ بی‌معنی است.



مثال۸: الف: نشان دهید که بر روی هر مجموعه ناتهی A حداقل دو رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد.

ب: نشان دهید $a \sim b \leftrightarrow m \mid b-a$ به ازای هر $m \in \mathbb{Z}-\{0\}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی مجموعه $\mathbb{Z}$ است.

☑ **پاسخ:** فرض کنیم $A \neq \varnothing$ مجموعه‌ای دلخواه باشد، در این صورت رابطه‌های $R_1 = A \times A$ و $R_2 = \{(a,a) \mid a \in A\}$ رابطه‌هایی **هم‌ارزی** بر روی A می‌باشند و R_1 بزرگ‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی ممکنی است که می‌توان بر روی A تعریف کرد و R_2 کوچک‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی ممکن است. اثبات هم‌ارزی بودن این روابط بسیار ساده است. به R_2 **رابطه‌ی قطری** نیز گفته می‌شود.

به طور مثال، نموداری برای مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ رسم کرده‌ایم. در ضمن منظور از کوچک‌ترین رابطه‌ی هم ارزی بودن R_2 این است که اگر R رابطه‌ی هم‌ارزی دلخواهی باشد، آنگاه $R_2 \subseteq R$ و منظور از بزرگ‌ترین رابطه‌ی هم ارزی بودن R_1 نیز این است که اگر R رابطه‌ی هم‌ارزی دلخواهی باشد، آنگاه $R \subseteq R_1$ است.

ب: رابطه به این صورت است: $\forall a,b \in \mathbb{Z} \quad ; \quad a \sim b \leftrightarrow m \mid b-a$

که m یک عدد صحیح ناصفر است.

I: اثبات انعکاسی بودن ~ : از آنجا که $m \mid 0$ و $a-a=0$، لذا $m \mid a-a$ و این یعنی $a \sim a$ بنابراین این رابطه انعکاسی است.

II: اثبات متقارن بودن ~ : فرض کنیم که $a \sim b$، پس $m \mid b-a$، لذا $\exists k \in \mathbb{Z} \ \ni \ b-a = mk$، از آنجا که $k \in \mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر $-k \in \mathbb{Z}$ لذا $a-b = -mk = m(-k)$ پس $m \mid a-b$، بنابراین $b \sim a$ و این یعنی ~ متقارن است.

III: اثبات متعدی بودن ~ : فرض کنیم که $a \sim b$ و $b \sim c$، لذا:

$$\begin{cases} \exists s \in \mathbb{Z} \quad \ni \quad b-a = sm \\ \exists t \in \mathbb{Z} \quad \ni \quad c-b = tm \end{cases}$$

با جمع دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$b-a+c-b = sm+tm \rightarrow c-a = (s+t)m \xrightarrow{s+t \in \mathbb{Z}} m \mid c-a \rightarrow c \sim a$$

و چون نشان دادیم که رابطه متقارن است، لذا $a \sim c$ بنابراین رابطه‌ی ~ متعدی هم می‌باشد. از I، II و III نتیجه می‌شود که ~ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه اعداد صحیح است.

مدرسان شریف

فصل دوم

«فضاهای متریک و توپولوژیک»

درسنامه (۱): تعریف متر بر روی یک مجموعه

مقدمه

در اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن۱۹ میلادی به دنبال موج **دقیق‌سازی و تجرید** که به تدریج تمام ریاضیات را فرا می‌گرفت، ریاضی‌دانانی نیز به دقیق‌سازی و تجرید بخشی از ریاضیات، که در آن زمان به حسابان (یا حساب دیفرانسیل و انتگرال) شهرت یافته بود، پرداختند. موضوع اصلی حسابان در آن روزها و تا آن زمان بررسی رفتار توابع، بررسی حد دنباله‌ها، مباحثی پیرامون مشتق و انتگرال توابع و ... بود. مفاهیمی که تا آن زمان چندان دقیق و روشن بیان نشده و با اشتباهات و زایدات فراوانی درهم آمیخته بودند. ریاضی‌دانان ابتدا به کار دقیق نمودن این مفاهیم همت نهادند و پس از آن‌که به اطمینان قابل قبولی دست یافتند، سعی کردند تا این مفاهیم را تا حد امکان مجردتر و محض‌تر کرده و از آن‌ها تئوری‌ها و نظریه‌های اساسی را به‌دست آورند. اما به طور مشخص مسیر تجرید چه بود و باید از کجا شروع می‌شد؟ می‌دانیم که تجرید درواقع چیزی نمی‌باشد جز بیان یک قضیه و یا یک مفهوم به کمک علائم و مفاهیم ریاضی. در تجرید کمتر به کاربرد یک قضیه یا یک مفهوم توجه می‌شود و هدف ارائه یک بیان محض از آن قضیه یا گزاره است. ریاضی‌دانان، همان‌طورکه در فصل اول توضیح دادیم، تجرید را از ساخت مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد گویا و در نهایت مجموعه اعداد حقیقی آغاز کردند. بعد از این مفاهیم، نوبت تجرید مفهوم حد فرا می‌رسد. درواقع باید مفهوم حد را به صورتی مجرد بیان و بازنویسی کرد. در این فصل می‌خواهیم در مورد روند این کار بحث کنیم. ریاضی‌دانان پس از کمی دقت دریافتند که مفهوم حد خود بر پایه‌ی مفهوم ساده‌تر و اساسی‌تری به نام **فاصله** استوار است. در تاریخ ریاضی از «موریس فرشه» به عنوان اولین ریاضی‌دانی که به طور دقیق و مدون از مفهوم متر و فضای متری استفاده کرده است نام برده می‌شود، اگرچه ریاضی‌دانان دیگری نیز در خلق این نظریه جدید نقش داشته‌اند. فضای متریک بعد از معرفی، به شدت توسعه پیدا کرد و توانست خیلی زود جای خود را در ریاضیات باز نماید و به حق به یکی از موفق‌ترین نگاه‌های محض به مفاهیم کلی تبدیل گشت. شما به زودی و با مطالعه‌ی این فصل و هم‌چنین مطالعه ادامه کتاب به ارزش این نظریه پی خواهید برد. سعی کردیم تا شما را آهسته و به تدریج با مفاهیم جدید آشنا سازیم و به کمک مثال‌های متنوع آن‌ها را در ذهنتان جا بیندازیم، سعی دیگر ما در این فصل این است که شما **علت و** چرایی تعاریف و مفاهیم را هم درک کنید تا دیگر مجبور به حفظ مطالبی که علت تعریف آن‌ها را نمی‌دانید نباشید.

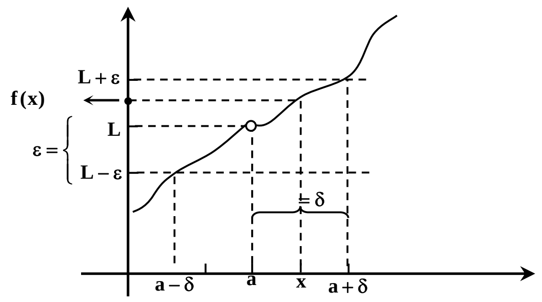
تابع متر

در درس ریاضی عمومی۱ دیدیم که برای یک تابع مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ می‌توان مفهومی به نام مفهوم «حد در یک نقطه» را تعریف کرد. به زبان شهودی وقتی می‌گوییم حد تابع f در نقطه‌ی a از دامنه آن برابر مقدار L است، یعنی وقتی متغیر در دامنه تابع، به طور مثال x، به نقطه a **نزدیک** می‌شود، تابع به L **نزدیک** می‌گردد. همان طور که ذکر شد، این بیان، صرفاً یک بیان شهودی است و هیچ اطلاعات "کمی" را در اختیار ما قرار نمی‌دهد. این بیان در واقع به علت آن‌که عبارت " متغیر x به نقطه a نزدیک شود" و عبارت "مقدار تابع به L نزدیک شود" عباراتی **نادقیق** می‌باشند، بیانی ریاضی و دقیق نمی‌باشد. برای رفع این مشکل، ابتدا باید بدانیم منظور ما از " نزدیک شدن" چیست؟ یعنی وقتی می‌گوییم متغیر x به نقطه a نزدیک می‌گردد به طور دقیق منظور ما چیست؟ شاید شما بپرسید که کجای این عبارت نادقیق است؟ یا اینکه ابهام عبارات ذکر شده در چیست؟ در پاسخ باید بگوییم که چون منظور ما از کلمه نزدیک شدن مشخص نیست، عبارت بالا، گنگ می‌باشد.

زمانی‌که می‌گوییم متغیر تابع f به نقطه‌ی a از دامنه‌اش نزدیک می‌شود، منظور از نزدیک شدن به روشنی مشخص نمی‌باشد. بنابراین عبارات بالا دارای ابهام می‌باشند. این مشکل را می‌توان با تعریفِ دقیق فاصله حل کرد، در واقع نقطه‌ی x به نقطه‌ی a نزدیک می‌گردد اگر و تنها اگر **فاصله‌ی** آن‌ها کوچک و کوچک‌تر شود. در مجموعه اعداد حقیقی خوشبختانه می‌توانیم فاصله دو نقطه را به کمک تابع قدرمطلق به دست آوریم، زیرا $|a-x|$ برابر اندازه فاصله‌ی نقطه‌ی x از نقطه‌ی a است. به کمک تابع قدرمطلق، می‌توان تعریف قابل قبولی از حد یک تابع در یک نقطه به شرح زیر ارائه داد:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad ; \quad \exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad 0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

تعریف بالا به زبان ساده یعنی فاصله‌ی نقطه‌ی $f(x)$ تا نقطه‌ی L را می‌توان کمتر از مقدار $\varepsilon>0$ دلخواه قرار داد (فاصله را کوچک کرد) به شرط آن که بتوان فاصله‌ی نقطه‌ی x را از نقطه‌ی a کمتر از مقدار $\delta>0$ قرار داد. این تعریف، هم تعریفی دقیق می‌باشد و هم روشن و قابل استفاده و از همه مهم‌تر غیرشهودی (و البته منطبق بر شهود). اساس تعریف بالا، بر مفهوم **فاصله** و تابع **قدرمطلق** استوار است. هم‌چنین این تعریف به تعریف $\varepsilon-\delta$ حد نیز معروف است.



فاصله‌ی $f(x)$ از L از ε کمتر است زیرا فاصله‌ی x تا a از δ کمتر می‌باشد.

اکنون فرض کنید که دامنه تابع f به جای مجموعه $\mathbb{R}$ مجموعه $\mathbb{R}^2$ و یا برد آن به جای مجموعه $\mathbb{R}$ مجموعه $\mathbb{R}^2$ باشد، آیا باید حد را برای این تابع جدید کنار گذاشته و برای این دسته از توابع حد را تعریف نکنیم؟ آیا تمام توابع مفید و مورد استفاده در ریاضی محض و کاربردی توابعی به فرم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هستند و ما کمتر با توابعی به فرم $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (n,m اعدادی طبیعی‌اند.) سروکار داریم؟ آیا بررسی رفتار این توابع در یک نقطه‌ی خاص، یعنی همان حد، بی‌اهمیت است؟ اگر فقط اندکی ریاضی یا فیزیک خوانده باشیم مشاهده خواهیم کرد که توابعی به فرم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به هیچ‌وجه پاسخ‌گوی تمام نیازهای نظری و عملی ما نمی‌باشند و ما حداقل به توابعی به فرم $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ نیازمندیم. اما چگونه حد را برای این توابع تعریف کنیم؟ برای پاسخ به این سؤال یک‌بار دیگر به تعریف حد تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ در نقطه‌ی a نگاه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad ; \quad \exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad 0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

می‌خواهیم تعریف بالا را به دقت بررسی کنیم و ببینیم که کدام‌یک از اجزای آن را می‌توانیم برای یک تابع دلخواه $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ به کار بندیم. در این تعریف تعدادی صور وجود دارد (مانند $\forall,\exists$) که این صورها را می‌توان در هر جای دیگری نیز استفاده کرد. لذا نیازی به تعمیم آن‌ها وجود ندارد. هم‌چنین به جای $x\in\mathbb{R}$ می‌توان نوشت $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ زیرا دامنه تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ مجموعه $\mathbb{R}^n$ است و باید x عضو دامنه تابع باشد، با استدلالی مشابه باید a به صورت $(a_1,\dots,a_n)$ و L به‌صورت $(L_1,\dots,L_m)$ باشد. اکنون نوبت به عبارت $0<|x-a|<\delta$ رسیده است چگونه می‌توانیم این عبارت را برای $x,a\in\mathbb{R}^n$ بازنویسی کنیم؟ می‌دانیم که عبارت $0<|(x_1,\dots,x_n)-(a_1,\dots,a_n)|<\delta$ عبارتی است بی‌معنی! لذا نمی‌توان اینگونه آن را تعمیم داد. پس باید راه دیگری برای تعمیم آن به مجموعه $\mathbb{R}^n$ یافت. گفتیم که منظور از $0<|x-a|<\delta$ این است که **فاصله‌ی** نقطه‌ی a تا نقطه‌ی x هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و همواره از $\delta>0$ کمتر است. پس باید به نوعی فاصله‌ی نقطه‌ی $(x_1,\dots,x_n)$ از نقطه‌ی $(a_1,\dots,a_n)$ را در مجموعه $\mathbb{R}^n$ بیابیم. به طور مشابه در مورد عبارت $|f(x)-a|<\varepsilon$ باید بتوانیم فاصله‌ی نقطه‌ی L از نقطه‌ی $f(x)$ را در مجموعه $\mathbb{R}^m$ بیابیم. "بنابراین مشکل اصلی تعریف مفهوم فاصله" در مجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ و یا در حالت کلی در مجموعه دلخواه X است. لذا اگر بتوانیم فاصله‌ی دو نقطه را در مجموعه $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ به دست آوریم، تعریف حد تابع در یک نقطه نباید چندان کار سختی باشد. اکنون باید چند لحظه فرض کنیم که این تابع وجود دارد یعنی فرض کنیم که $d_{\mathbb{R}^n}$ تابعی باشد که به هر دو نقطه از فضای $\mathbb{R}^n$، فاصله آن دو نقطه را نسبت می‌دهد.

در این صورت، جدای از این‌که این تابع وجود دارد یا خیر و جدای از اینکه به چه شکل و شمایلی است باید تعریف حد این‌گونه باشد:

حد تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ در نقطه‌ی $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ برابر نقطه‌ی $L=(L_1,\dots,L_m)\in\mathbb{R}^m$ است هرگاه:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad 0<d_{\mathbb{R}^n}(x,a)<\delta \to d_{\mathbb{R}^m}(f(x),L)<\varepsilon$$

قبل از بیان هر بحثی از شما می‌خواهیم که چند بار دیگر تعریف بالا را بخوانید و به تک‌تک جزئیات آن توجه فرمایید. هم‌چنین، این تعریف را با تعریف قبلی حد مقایسه کرده و شباهت‌ها و تفاوت‌های آن را بررسی کنید. تنها تفاوتی که این تعریف با تعریف قبل دارد این است که به جای تابع قدرمطلق از تابع‌های $d_{\mathbb{R}^n}$ و $d_{\mathbb{R}^m}$ استفاده کرده‌ایم. اما از کجا معلوم که توابع $d_{\mathbb{R}^n}$ و $d_{\mathbb{R}^m}$ **وجود** دارند و از کجا معلوم که **رفتار** آن‌ها مانند تابع قدرمطلق است؟ برای پاسخ دادن به سؤالات بالا ابتدا باید رفتارها و خواص اساسی تابع قدرمطلق را بیان کنیم. توجه شود که منظور ما از تابع قدرمطلق تابعی است که هر دو نقطه‌ی $a,b\in\mathbb{R}$ را به نقطه‌ی $|a-b|$ از بازه $[0,+\infty)$ تصویر می‌کند.

خواص اساسی تابع $|.|:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ با ضابطه‌ی $(a,b)\to|a-b|$

۱ـ دامنه آن مجموعه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه $[0,+\infty)$ است، زیرا $\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\ |a-b|\geq 0$

۲ـ $a=b\leftrightarrow|a-b|=0$.

۳ـ $\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\ |a-b|=|b-a|$.

۴ـ خاصیت مثلثی: $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ |a-b|\leq|a-c|+|c-b|$

بنابراین اگر تابع $d_{\mathbb{R}^n}$ در مجموعه $\mathbb{R}^n$ می‌خواهد مانند تابع قدرمطلق در مجموعه $\mathbb{R}$ رفتار کند باید حداقل از سه خاصیت اساسی۲، ۳، ۴ بهره‌مند باشد. با اطلاعاتی که از قبل داریم می‌دانیم که تابع $d_{\mathbb{R}^n}$ با تعریف مقابل: $d_{\mathbb{R}^n}((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

فاصله‌ی دو نقطه از فضای $\mathbb{R}^n$ را به ما می‌دهد. آیا این تابع تمام خواص اساسی قدرمطلق را دارد و می‌تواند به جای آن در تعریف حد بنشیند؟ قبل از پاسخ دادن به این سؤال، برای راحتی و قرارداد تعریفی را ارئه داده و سپس به سؤال پاسخ می‌دهیم، این تعریف چیزی نمی‌باشد جز تعریف تابع متر، یعنی گسترش مفهوم تابع قدرمطلق به تابعی دلخواه. به بیان دیگر می‌خواهیم بر روی مجموعه ناتهی دلخواهی مانند X تابعی مانند $D:X\times X\to[0,+\infty)$ چنان تعریف کنیم که مانند تابع $|\,|:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ عمل کند.

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید که X مجموعه‌ای ناتهی باشد، تابع $d:X\times X\to\mathbb{R}$ را یک **متر** بر مجموعه X می‌نامیم هرگاه d دارای سه خاصیت زیر باشد:

الف ـ $\forall x,y\in X\ ;\ d(x,y)\geq 0$ و $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$.

ب ـ (خاصیت جابه‌جایی) $\forall x,y\in X\ ;\ d(x,y)=d(y,x)$

ج ـ (خاصیت مثلثی) $\forall x,y,z\in X\ ;\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

در این صورت X را یک **فضای متریک** یا به‌طور ساده‌تر **متری** نامیده و با نماد (X,d) نمایش می‌دهند.

➢ **توجه۱:** الف‌ـ اگر $d:X\times X\to\mathbb{R}$ یک متر باشد گوییم d یک متر بر مجموعه X است و نه بر مجموعه $X\times X$.

ب‌ـ از آنجا که $\forall x,y\in X\ ;\ d(x,y)\geq 0$ لذا برد تابع d زیرمجموعه‌ای از بازه $[0,+\infty)$ می‌باشد، لذا به جای نماد $d:X\times X\to\mathbb{R}$ می‌توان از نماد $d:X\times X\to[0,+\infty)$ نیز استفاده کرد در این حالت دیگر نیازی به بیان شرط $\forall x,y\in X\ ;\ d(x,y)\geq 0$ نمی‌باشد، زیرا بازه $[0,+\infty)$ در نمایش تابع d به طور ضمنی به این مطلب اشاره دارد.

در مورد علت نامگذاری این دسته از توابع به نام متر باید کمی توضیح دهیم. به نظر شما چرا به این دسته از توابع متر می‌گویند؟ شما فرض کنید که در یک اتاق قرار دارید و می‌خواهید به کسی‌که آن اتاق را ندیده است توضیح دهید که اتاق به چه شکل است!؟ وقتی می‌خواهید بـه آن فـرد چیـدمان اتـاق را توضیح دهید باید به نوعی به او بگویید که اشیای اتاق در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند.

به طور مثال می‌گویید: کمد در سمت چپ اتاق و میز در سمت راست و به فاصله دو متری از آن قرار دارد به فاصله نیم‌متر از درب ورود و در سمت راست قفسه کتاب قرار دارد و پنجره مقابل آن و در فاصله سه متری از درب ورود است و ... . همان‌طور که دیدید اگر شما یک متر در دست داشته باشید و فاصله‌ی اشیاء را به کمک آن بسنجید و اشیاء و فاصله‌های آن‌ها را به شخص دیگری بگویید او می‌تواند "تصور دقیق‌تری" از اتاق را در ذهن خود داشته باشد. به بیان دیگر، دانستن اینکه اشیاء یک مجموعه در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند به ما کمک می‌کند که آن مجموعه را بهتر بشناسیم و تصورش کنیم. طبیعی است که در حالت عادی ما از متر برای اندازه‌گیری فواصل بهره می‌گیریم و به همین علت نیز هر تابعی که مانند متر معمولی رفتار کند را یک متر می‌نامیم.

تا به این‌جا ما فقط یک تابع متر می‌شناسیم و آن هم تابع $d(a,b)=|a-b|$ بر مجموعه $\mathbb{R}$ است. همان‌طور که از روند بحثمان از ابتدا معلوم است هدف این تابع این می‌باشد که به هر دو نقطه‌ای از مجموعه $\mathbb{R}$ عددی به نام فاصله آن دو نقطه را به آن‌ها نسبت دهد، بنابراین توقع ما از هر تابع متری این است که به هر دو نقطه از فضا، فاصله‌ی آن دو نقطه را نسبت دهد. حال به کمک تعریف جدید، سؤالمان را بازنویسی می‌کنیم: آیا $d_{\mathbb{R}^n}$ با تعریفی که ذکر شد یک متر بر مجموعه $\mathbb{R}^n$ است؟

✍ **مثال۱: نشان دهید که تابع $d_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ با تعریف زیر یک متر بر روی مجموعه $\mathbb{R}^n$ است:**

$$\mathbf{d_{\mathbb{R}^n}((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}}$$

☑ **پاسخ:** به ترتیب باید بررسی کنیم و ببینیم که تابع $d_{\mathbb{R}^n}$ کدام خواص را دارد، برای راحتی به جای $d_{\mathbb{R}^n}$ از d استفاده می‌کنیم.

الف ـ از آن‌جا که $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \sqrt{x}\geq 0$ و $(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$ عددی حقیقی و نامنفی است لذا:

$$\forall(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\to d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))\geq 0$$

اکنون فرض کنیم که $d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=0$، در این صورت باید عبارت زیر رادیکال مساوی صفر شود و این یعنی $(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2=0$ ولی $\forall 1\leq i\leq n\ ;\ (x_i-y_i)^2\geq 0$ و لذا زمانی جمع این اعداد برابر صفر می‌شود که تک تک آن‌ها برابر صفر باشند یعنی $\forall 1\leq i\leq n;(x_i-y_i)^2=0$، بنابراین $\forall 1\leq i\leq n\quad (x_i-y_i)=0\to x_i=y_i$ پس $(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$ این یعنی d شرط الف متر بودن را دارد.

ب ـ با توجه به این‌که $\forall 1 \le i \le n \; ; \; (x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ لذا واضح است که تابع d خاصیت جابه‌جایی را نیز دارد.

ج ـ برای اثبات این قسمت نیاز به **نامساوی مینکوفسکی** داریم، می‌دانیم که این نامساوی به‌صورت زیر است:

اگر $(\forall 1 \le i \le n \; ; \; x_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad y_i \in \mathbb{R}) \quad \wedge \quad (p > 1)$

آنگاه: $$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

یا به بیان دیگر $\| x + y \|_p \le \| x \|_p + \| p \|_p$ که x و y بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ اند.

(توجه شود که اثبات این نامساوی در برنامه فصول اول این کتاب نیست) اکنون اگر $p = 2$ باشد، این نامساوی به صورت زیر در می‌آید:

$$(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

که با توجه به زوج بودن p از نوشتن قدرمطلق صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که: $\forall a \in \mathbb{R} \; ; \; |a|^2 = |a^2| = a^2$

باید بتوانیم با ترفندی از این نامساوی برای رسیدن به هدف خود استفاده کنیم، می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \le d((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)) + d((z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n)) \quad (**)$$

از طرفی: $$d((z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n)) = (\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad d((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

عبارت‌های بالا کلید حل معما‌اند از سمت چپ عبارت (**) شروع می‌کنیم:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{را اضافه و کم می‌کنیم } z_i} (\sum_{i=1}^{n} ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{(\text{طبق نامساوی مینکوفسکی})}{\le} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} = d((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)) + d((z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n))$$

بنابراین d خاصیت سوم متر، یعنی خاصیت مثلثی را هم دارا می‌باشد.

از قسمت الف، ب و ج نتیجه می‌شود که $d = d_{\mathbb{R}^n}$ یک متر روی فضای $\mathbb{R}^n$ است. از آن‌جا که فضاهای $\mathbb{R}^n$ اقلیدسی می‌باشند، این متر را نیز **متر اقلیدسی** می‌نامند.

◆ ◆ ◆ ◆

پیش از این مثال، فقط یک فضای متریک می‌شناختیم و آن هم $(\mathbb{R}, |.|)$ (بخوانید فضای متری $\mathbb{R}$ با متر قدرمطلق) بود، ولی اکنون به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ حداقل یک فضای متری داریم یعنی $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ یعنی مجموعه $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی. نکته جالب این است که اگر مقدار n را برابر یک قرار دهیم داریم:

$$d_{\mathbb{R}^1}(x_1, y_1) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = | x_1 - y_1 | = d(x_1, y_1)$$

یعنی به تعبیری متر تعریف شده بر فضای $\mathbb{R}^n (n > 1)$ همان متر موجود بر فضای $\mathbb{R}$ است که **توسیع** داده شده است. اکنون توانسته‌ایم در فضای $\mathbb{R}^n$ فاصله و در نتیجه مفهوم دوری و نزدیکی را تعریف کنیم. لذا می‌توان در این فضاها حد را به نحو مطلوب بیان کرد، زیرا اگر یادتان باشد تنها مشکل ما در تعمیم مفهوم حد نداشتن تعریفی روشن و واضح از مفهوم نزدیک شدن بود، که اکنون آن را می‌توانیم به کمک مفهوم متر بیان کنیم.

فرض کنیم که $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تابعی با ضابطه‌ی $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ باشد که $\forall 1 \le i \le m \; ; \; f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

در این صورت منظور از $(L_1, \dots, L_m) = \lim\limits_{(x_1, \dots, x_n) \to (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n)$ این است که:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni \quad \forall \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{=x} \in \mathbb{R}^n \quad 0 < \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{فاصله نقطه‌ی } x \text{ تا نقطه‌ی } a} < \delta \longrightarrow \underbrace{(\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - L_i)^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{فاصله نقطه‌ی } f(x) \text{ تا نقطه‌ی } L} < \varepsilon$$

بنابراین به کمک تجریدِ مفهوم فاصله و متر، توانستیم حد را در فضاهای دلخواه $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. اکنون به حل چند مثال و تست در این رابطه می‌پردازیم:

مثال۲: اگر d_n تابع متر اقلیدسی بر فضای $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت کدام گزینه درست است؟

($f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تابع و $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ، $L=(L_1,\ldots,L_m)$)

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $0<d_m(x,a)<\delta \to d_n(f(x),L)<\varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}^m \quad \ni \quad \forall\varepsilon>0 \; ; \; \exists\delta>0$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $d_n(x,a)<\delta \to d_m(f(x),L)<\varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad \ni \quad \forall\varepsilon>0 \; ; \; \exists\delta>0$

۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $0<d_n(x,a)<\delta \to d_m(f(x),L)<\varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad \ni \quad \forall\varepsilon>0 \; ; \; \exists\delta>0$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $0<d_n(x,a)<\delta \to 0<d_m(f(x),L)<\varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad \ni \quad \forall\varepsilon>0 \; ; \; \exists\delta>0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در گزینه ۱ باید توجه شود که $f(x)$ زمانی قابل تعریف است که $x\in\mathbb{R}^n$ باشد در صورتی که $x\in\mathbb{R}^m$ است، در ثانی d_m تابعی است که از $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ به $[0,+\infty)$ تعریف شده است و نمی‌تواند a که عضو مجموعه $\mathbb{R}^n$ است را در دامنه خود داشته باشد، به بیان دیگر $d_m(x,a)$ بی‌معنی است زیرا $x,a\notin\mathbb{R}^m$ بنابراین گزینه ۱ درست نمی‌باشد. در گزینه ۲ عبارت $d_n(x,a)<\delta$ یعنی $d_n(x,a)$ می‌تواند برابر صفر شود (زیرا $\delta>0$) اما اگر $d_n(x,a)=0$ در این صورت باید x مساوی a گردد (طبق خاصیت متر) بنابراین در عبارت $d_m(f(x),L)<\varepsilon$ به جای x، باید a قرار دهیم. اما ممکن است $f(a)$ وجود نداشته باشد. به بیان دیگر ممکن است f در یک همسایگی از نقطه‌ی a تعریف شده باشد ولی f در نقطه‌ی a تعریف نشده باشد. (مانند تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در نقطه‌ی $a=0$ مقدار ندارد.) بنابراین این گزینه نیز تعریف حد نمی‌باشد. در گزینه ۴ نیز عبارت $0<d_m(f(x),L)<\varepsilon$ یعنی هیچ‌گاه عبارت $d_m(f(x),L)$ برابر صفر نمی‌شود در صورتی که هیچ الزامی به برقراری این شرط نیست. به طور مثال تابع ثابت در هر نقطه‌ای حد دارد و حد آن برابر مقدار ثابت تابع است در صورتی که: $\forall x\in D_f \; ; f(x)=L$

بنابراین گزینه ۴ نیز برابر تعریف حد نمی‌باشد و گزاره ذکر شده در آن صحیح نیست. با مراجعه به تعریف حد می‌بینیم که گزینه ۳ درست است. توجه فرمایید که تغییر کوچک‌ترین بخشی از این تعریف غیر ممکن بوده و تعریف جدید دیگر تعریف حد نمی‌باشد. $L,f,x,d_m,d_n,\delta,\varepsilon$ و ... هرکدام در این تعریف **جایگاه خاص** و **معنی خاص** خود را دارند.

مثال۳: کدام گزینه در مورد تابع متر درست نمی‌باشد؟ $(X\neq\varnothing)$

۱) اگر تابع‌های d_1,d_2 مترهایی بر مجموعه X باشند، در این صورت d_1+d_2 نیز متری بر این مجموعه است.

۲) اگر تابع d متری بر مجموعه X و $c\in[0,+\infty)$، آنگاه cd نیز متری بر این مجموعه است.

۳) اگر d_1 و d_2 مترهایی بر مجموعه X باشند، آنگاه $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d_1(x_1,x_2)+d_2(y_1,y_2)$ متری بر مجموعه X^2 است.

۴) اگر d_1 و d_2 مترهایی بر مجموعه X باشند، آنگاه $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$ متری بر مجموعه X^2 است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم که d تابع متر بر مجموعه X باشد. طبق ادعای مطرح شده در گزینه ۲ باید به ازای هر $c\geq 0$ تابع cd نیز یک متر بر مجموعه X باشد. اگر $c=0$ باشد در این صورت تابع cd تابع ثابت صفر می‌شود و اکنون اثبات می‌کنیم که این تابع متری نیست. فرض کنیم که $x\neq y$ و $x,y\in X$، در این صورت:

$$(cd)(x,y)=c(d(x,y))\overset{c=0}{=}0\times d(x,y)=0$$

اگر cd بخواهد متر باشد باید $x=y$ گردد که این خلاف فرض است. بنابراین اگر X مجموعه‌ای با حداقل دو عضو باشد، تابع صفر نمی‌تواند متری بر این مجموعه گردد. لذا گزاره ذکر شده در این گزینه غلط است. اما گزاره‌های ذکر شده در سایر گزینه‌ها درست می‌باشند. این گزاره‌ها به نحوی می‌گویند که چگونه می‌توان از مترهای موجود مترهای جدیدی را تولید کرد. ما به عنوان نمونه یکی از این عبارات را اثبات می‌کنیم.

اثبات درستی گزینه (۴): فرض کنیم که d_1 و d_2 مترهایی بر مجموعه X و $d:X^2\times X^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$$

باشد. نشان می‌دهیم که d یک متر بر مجموعه X^2 است. در چند مرحله اثبات را انجام می‌دهیم.

الف‌ـ از آنجا که d_1 و d_2 مترهایی بر مجموعه X می‌باشند لذا $d_1(x_1,x_2)$ و $d_2(y_1,y_2)$ به ازای هر $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ نامنفی هستند و این یعنی:

$$\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in X \; ; \; d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$$

اگر $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0$، در این صورت $\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=0$ و چون d_1 و d_2 نامنفی‌اند لذا باید $d_1(x_1,x_2)=d_2(y_1,y_2)=0$.

اکنون چون d_1 و d_2 متر می‌باشند داریم: $(x_1=x_2) \quad \wedge \quad (y_1=y_2)$

و این یعنی $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. به طور عکس نیز اگر $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ آنگاه:

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\to(x_1=x_2)\ \wedge\ (y_1=y_2)\xrightarrow[d_2,d_1]{\text{فرض متر بودن}}d_1(x_1,x_2)=0=d_2(y_1,y_2)$$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=\max\{0,0\}=0\to d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0$$

بنابراین d شرط اول متر بودن را دارد.

ب- $d((x_2,y_2),(x_1,y_1))=\max\{d_1(x_2,x_1),d_2(y_2,y_1)\}=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

بنابراین d خاصیت جابجایی دارد.

ج- اما برای اثبات خاصیت مثلثی در واقع باید نشان دهیم که: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\le d((x_1,y_1),(x_3,y_3))+d((x_3,y_3),(x_2,y_2))$

و این یعنی:

$$\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}\le\max\{d_1(x_1,x_3),d_2(y_1,y_3)\}+\max\{d_1(x_3,x_2),d_2(y_3,y_2)\}\qquad(*)$$

برای اثبات رابطه بالا، که ابتدا ممکن است خیلی پیچیده به نظر برسد رابطه‌ی دیگری را اثبات می‌کنیم: فرض کنیم که $a,b,c,g,h,f\in[0,+\infty)$ و $a\le b+c$ و $g\le f+h$، می‌خواهیم نشان دهیم که: $\max\{a,g\}\le\max\{f,b\}+\max\{h,c\}\qquad(**)$

برای اثبات رابطه‌ی بالا سمت راست را برابر k می‌گیریم یعنی: $k=\max\{f,b\}+\max\{h,c\}$. می‌دانیم برای آنکه ماکزیمم مجموعه‌ای بخواهد از عدد k کوچک‌تر گردد باید تک‌تک اعضای آن مجموعه از k کوچک‌تر باشند به بیان دیگر:

$$(\forall x\in A\ \ ;\ \ x\le k)\leftrightarrow\max A\le k$$

در رابطه‌ی (**) می‌خواهیم نشان دهیم که ماکزیمم مجموعه $\{a,g\}$ از k کوچک‌تر است، بنابراین باید نشان دهیم که تک‌تک اعضای این مجموعه کوچک‌تر از kاند. $g\le f+h\le\max\{b,f\}+\max\{c,h\}=k \qquad a\le b+c\le\max\{b,f\}+\max\{c,h\}=k$

بنابراین $\max\{a,g\}\le k$ و این یعنی رابطه (**) درست است. اکنون اگر قرار دهیم:

$$a=d_1(x_1,x_2)\qquad b=d_1(x_1,x_3)\qquad c=d_1(x_3,x_2)$$
$$g=d_2(y_1,y_2)\qquad f=d_2(y_1,y_3)\qquad h=d_2(y_3,y_2)$$

آنگاه طبق خاصیت مثلثی مترهای d_1 و d_2 داریم:

$$a=d_1(x_1,x_2)\le d_1(x_1,x_3)+d_1(x_3,x_2)=b+c\qquad g=d_2(y_1,y_2)\le d_2(y_1,y_3)+d_2(y_3,y_2)=f+h$$

بنابراین این اعداد در رابطه (**) صدق می‌کنند در صورتی که این اعداد را جایگزین کنیم عبارت (**) برابر عبارت (*) می‌گردد، لذا d خاصیت مثلثی را نیز دارد.

اثبات درستی گزاره‌های ذکر شده در گزینه‌های (۱) و (۳) نیز به طور مشابه قابل انجام است.

حال، می‌خواهیم مفهوم حد را از فضای $\mathbb{R}^n$ به فضاها و مجموعه‌های دلخواه تعمیم دهیم، مشابه حالت تعمیم تعریف حد از مجموعه $\mathbb{R}$ به مجموعه $\mathbb{R}^n$ به کمک تابع فاصله، این بار نیز تعریف ما براساس مفهوم فاصله خواهد بود. به بیان دیگر، می‌خواهیم بدانیم که اگر $X,Y\ne\varnothing$ و $f:X\to Y$ یک تابع باشد، در این صورت منظور از عبارت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ که $a\in X$ و $L\in Y$ چیست؟ اگر بگوییم که منظور ما این است که اگر متغیر x به نقطه a **نزدیک** گردد آنگاه نقطه $f(x)$ به نقطه L **نزدیک** می‌گردد، در این صورت در فضای X و به طور مشابه در فضای Y منظور از نزدیک شدن چیست؟ اگر منظور کوچک‌تر شدن فاصله است، پس منظور از **فاصله** در این فضاها چیست؟

بنابراین لازم است تا مجموعه‌های X و Y "فضاهایی متریک" باشند تا بتوان بر روی آن‌ها "مفهوم حد" را تعریف کرد، اکنون اگر (X,d) و (Y,d') دو فضای متریک و $f:(X,d)\to(Y,d')$ یک تابع و $a\in X$ و $L\in Y$ باشد، منظور ما از $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ این است که:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\ni\quad\forall x\in X\quad 0<d(x,a)<\delta\to d'(f(x),L)<\varepsilon$$

بنابراین می‌توان حد و به تبع آن دنباله، پیوستگی، حتی در مواقعی مشتق و انتگرال را بر فضایی دلخواه (البته ناتهی) تعریف کرد به شرط آن‌که بر روی آن فضا یک متر داشته باشیم. به طور مجدد تأکید می‌کنیم که مفهوم حد بر اساس مفهوم فاصله تعریف شده است. با بررسی چند مثال به تدریج منظور ما از این بحث‌ها بر شما روشن خواهد شد، لذا به دقت به مثال‌های بعد توجه فرمایید.

➢ **توجه۲:** گاهی برای تأکید بر این‌که تابع d متری بر روی فضای X است از نماد d_X استفاده می‌کنیم. هم‌چنین به تابع d **تابع فاصله** (distance function) نیز گفته می‌شود.

مدرسان شریف

فصل سوم

«دنباله و سری»

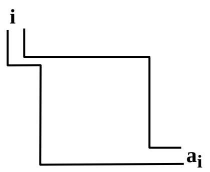
درسنامه (۱): دنباله و همگرایی آن

مقدمه

در زندگی روزمره، بسیار رخ می‌دهد که با دنباله‌ای از اعداد که پشت‌سر هم قرار دارند مواجه شویم. به طور مثال میـزان دمـای هـوای یـک شـهر خـاص در ۵ روز متوالی می‌تواند اعداد ۲۲،۲۳،۲۴،۲۵،۲۲ باشد یا میزان نرخ تورم در کشوری در ۳ سال متوالی به ترتیب اعـداد ۲/۶ ، ۳/۵ و ۳/۶ باشـد. فـرض کنیـد میزان درآمد یک فرد در هر روز سال را به ترتیب یادداشت کنیم در این صورت یک دنباله از اعداد خواهیم داشت. بسیاری از این دنباله‌هـا در رونـد زنـدگی مردم نقشی اساسی دارند مانند میزان بارش ماهانه، نرخ تورم، نرخ بیکاری سالانه، میزان درآمد یک فرد در هر سال و... لذا طبیعی است که بـه بررسـی ایـن اشیاء بپردازیم. به طور مثال اگر دنباله‌ی اعدادی که میزان بارش باران در یک شهر را بیان می‌کند یک کاهش جدی را به ما نشان دهـد بایـد اقـدامات لازم برای جلوگیری از خشکسالی در آن شهر انجام گیرد، و یا اگر نرخ تورم و بیکاری افزایش یابد، باید برای مقابله با آن برنامه‌ای بلندمدت را درنظر گرفت.

در مورد یک رشته از اعداد مانند $(a,b,c,d,\dots)$ شاید اولین سؤالی که به ذهن می‌رسد این باشد که این اعداد افزایش می‌یابند یا کاهش، سؤال دیگـر ایـن است که آیا پایان‌پذیرند یا بدون پایان ادامه دارند. آیا این اعداد حول یک عدد خاص متمرکزند و یا پراکنده می‌باشند. میزان تغییرات این اعداد تـا چـه حـد است. آیا با داشتن n جمله‌ی اول می‌توان جمله‌ی $n+1$ را به درستی حدس زد؟ و... این مقدمه انگیزه‌های خارجی تعریف دنبالـه مـی‌باشـند، حـال آنکـه وقتی شیء «دنباله» وارد ریاضیات گردید نه تنها با سؤالات کمتری مواجه نشد بلکه روز به روز با سؤالات جدیدی مواجه گشت. در این فصل می‌خواهیم بـه مدل‌سازی این شیء «طبیعی» به وسیله «ریاضیات» بپردازیم و تا حد امکان به سؤالات اولیه و مهم پاسخ دهیم.

تعریف دنباله



همان طورکه ذکر کردیم، به طور شهودی دنباله یعنی یک‌سری عدد که با نظمی خاص تولید می‌شـوند، یعنـی "ترتیـب" تولید شدن این اعداد بسیار مهم است. حال می‌خواهیم این «شیء طبیعی» را در ریاضیات مدل‌سازی کنیم، برای آنکه به ترتیب این اعداد تأکید کنیم می‌توانیم این رشته از اعداد را با $a(۱),a(۲),a(۳),\dots$ نشان دهیم و منظور از $a(i)$ ، iاُمین عضو این سری از اعداد است به بیان دیگر عددی که در مرحله‌ی iام قرار دارد. می‌توانیم برای سادگی قرار دهیم a_i. لـذا مشکل ترتیب این جملات قابل حل است. مسئله بعد مدل‌سازی مفهوم «ضابطه» یا «نظم» تولید این اعداد اسـت، یعنـی باید دستگاهی بسازیم که در مرحله iام عدد a_i را تولید کند.

در فصل اول دیدیم که «تابع» مانند دستگاهی عمل می‌کند که به هر ورودی فقط یک خروجی نسبت می‌دهد. پس بهتر است دنباله را برحسب مفهوم تابع اینگونه تعریف کنیم:

دنباله تابعی است از مجموعه $\mathbb{N}$ به مجموعه $\mathbb{R}$ که به هر عضو $n\in\mathbb{N}$ عدد حقیقی یکتای a_n را نسبت می‌دهد. می‌توانیم این تابع را بـا f نشـان دهـیم در این صورت:

$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n\to a_n \end{cases}$$

به نظر شما آیا تعریف بالا تعریف مناسبی برای دنباله است؟ آیا این تعریف تعریف کاملی است؟ آیا برد دنباله حتماً باید زیرمجموعه، مجموعه اعداد حقیقی باشد؟

فرض کنید دستگاهی داریم که در هر مرحله یک ماتریس تولید می‌کند مانند: $a_۱=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ $\quad a_۲=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ $\quad a_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$ $\quad \dots$

و یا دستگاهی که در هر مرحله یک عدد مختلط تولید می‌کند مانند مثال مقابل: $a_۱=۳+۴i$ $\quad a_۲=-۱+i$ $\quad a_۳=۲i$ $\quad \dots$

لذا بهتر است برد این تابع به جای مجموعه $\mathbb{R}$ زیرمجموعه یک مجموعه دلخواه باشد تا تعریف جامع‌تری از دنباله را بتوانیم ارائه دهیم. در فصل اول فقط دنباله را تعریف کردیم و علت‌های چنین تعریفی را برای آن ذکر نکردیم اکنون می‌توانید علت تعریف دنباله به این صورت را بهتر درک کنید.

❖ **تعریف۱:** فرض کنید که A مجموعه ناتهی دلخواهی باشد، یک **دنباله** از اعضای مجموعه A، تابعی است مانند f از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به مجموعه A. برای راحتی تصویر عضو $n \in \mathbb{N}$ را با f_n نمایش می‌دهیم.

$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to A \\ n\to f(n)=f_n \end{cases}$$

تذکر۱: در بعضی موارد به جای تعریف دنباله از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه‌ای دلخواه، از مجموعه $\{0,1,2,3,...\}$ به عنوان دامنه استفاده می‌شود و گاهی نیز به جای تعریف دنباله بر کل مجموعه اعداد طبیعی، فقط آن را بر یک زیرمجموعه سره و متناهی آن مانند: $\mathbb{N}_k=\{1,2,....,k\}$ تعریف می‌کنند، در این حالت دنباله را متناهی می‌نامیم.

تذکر۲: برای نمایش دنباله از نمادهای متفاوتی استفاده می‌گردد مانند:

$(a_1,a_2,a_3,...)$ یا $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ یا $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ یا $\{a_i\}$ و... (می‌توان به جای i از هر نماد دیگری مانند n,k ,...استفاده کرد).

قرارداد ما در این کتاب استفاده از نماد $\{a_i\}$ است مگر آنکه بخواهیم اندیس شروع دنباله را ذکر کنیم به طور مثال: $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ یا $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ و...

مثال۱: اگر $f(n)=f_n=\frac{n}{n+1}$ باشد در این صورت این تابع مولد دنباله $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$ است که آن را با $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $g_n=(-1)^n$ باشد در این صورت این تابع مولد دنباله $-1,1,-1,1,-1,...$ است. این دنباله را با $\left\{(-1)^n\right\}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $S_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ باشد در این صورت این تابع مولد دنباله $1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12},...$ است. این دنباله را با $\left\{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right\}$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات یافتن فرمولی صریح برای تابع مولد یک دنباله امکان‌پذیر نمی‌باشد و در واقع در اکثر موارد وضع به این منوال است و در مواردی هم که دنباله دارای فرمول صریح می‌باشد الگوریتم و راهکاری برای به دست آوردن آن وجود ندارد. به طور مثال به هیچ وجه ساده نمی‌باشد که فرمولی برای دنباله $(\frac{1}{2},\frac{13}{3},\frac{35}{4},...)$ بیابیم و بفهمیم که این دنباله از دستور $f_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)}+n^2$ به‌دست می‌آید.

به هر حال گرچه دانستن فرمول صریح f_n تقریباً تمام اطلاعات در مورد دنباله را به ما می‌دهد ولی در حالت کلی راهکاری برای به دست آوردن f_n به وسیله جملات دنباله وجود ندارد.

دنباله‌های بازگشتی

فرض کنید که a_i نشان‌دهنده میزان حساب بانکی شما در ماه i ام بعد از افتتاح حساب در یک بانک و a_0 مقدار اولیه حساب بانکی شما باشد. اگر شما در ماه اول b_1 تومان به حسابتان واریز کنید آنگاه $a_1=a_0+b_1$ و اگر در ماه دوم نیز b_2 تومان به حسابتان واریز کنید آنگاه $a_2=a_1+b_2$ و اگر در ماه i ام، b_i تومان به حسابتان واریز کنید آنگاه $a_i=a_{i-1}+b_i$ = میزان موجودی حساب شما، در ماه i ام است. در این مثال دنباله a_i برحسب مقادیر قبل از خودش تعریف شده است. در ریاضیات و در عالم واقع مثال‌های بسیاری رخ می‌دهد که جملات یک دنباله برحسب مقادیر قبل از خودش تعریف گردد به این دنباله‌ها، دنباله‌های بازگشتی می‌گوییم.

❖ **تعریف۲:** دنباله $\{a_n\}$ را یک **دنباله بازگشتی** می‌نامیم هرگاه هر جمله‌ای از دنباله تابعی از جملات قبل دنباله باشد.

مثال۲: دنباله $\{F_n\}$ با ضابطه $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ و شرایط اولیه $F_1=F_2=1$ یک دنباله بازگشتی می‌باشد. این دنباله به دنباله فیبوناتچی معروف است. $1,1,2,3,5,8,13,21,...$ در این مثال هر جمله مجموع دو جمله قبل از خودش می‌باشد.

مثال۳: دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_{n-2}})$ را در نظر بگیرید. چون x_{n+1} برحسب x_n و x_{n-2} بیان شده است، لذا باید سه جمله اول دنباله را مشخص کنیم. فرض کنید: که $x_1=a$ و $x_2=1, x_3=1$ در این صورت داریم:

$$a,1,1,1,\frac{a+1}{2},\frac{3a+1}{4},...$$

مثال۴: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ دنباله $\{a_n\}$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\theta \; d\theta$. رابطه‌ای بازگشتی برای این دنباله به دست آورید.

☑ **پاسخ:** این مثال نشان می‌دهد که دنباله‌ها از روش‌های متفاوتی قابل تولید کردن می‌باشند.

ابتدا به ازای $n=1$، a_n را محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^1\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta \xrightarrow[du=-\sin\theta d\theta]{u=\cos\theta} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u} = -Ln|u|]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -Ln|\cos\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = Ln\sqrt{2} \to a_1 = Ln\sqrt{2}$$

$$a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1+\tan^2\theta)-1)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2\theta)d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = (\tan\theta)_0^{\frac{\pi}{4}} - (\frac{\pi}{4}-0) = (1-0) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

اکنون به محاسبه a_n برای $n \geq 3$ می‌پردازیم:

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta^{n-2}\tan^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}\theta\,(1+\tan^2\theta-1)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}\theta(1+\tan^2\theta)d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}\theta d\theta$$

$$= (\frac{\tan^{n-1}\theta}{n-1})_0^{\frac{\pi}{4}} - a_{n-2} = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$$

بنابراین $a_1 = Ln\sqrt{2}$ و $a_2 = \frac{4-\pi}{4}$ و $a_n = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$ به ازای هر $n \geq 3$ لذا جمله a_n را برحسب ۲ جمله‌ی قبل خود می‌توان نوشت.

مثال۵: الف ـ نشان دهید که $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ بار}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

ب ـ حد دنباله بازگشتی مقابل را حساب کنید. $n \geq 1$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $\quad a_1 = \sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** الف ـ به کمک استقرا داریم:

برای $n=1$ حکم برقرار است.

$$n=1 \to 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$

فرض کنیم که حکم برای $n=k$ برقرار باشد، یعنی:

$$n=k \to \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k\text{ بار}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

اکنون حکم را برای $n=k+1$ اثبات کنیم، به طرفین فرض عدد ۲ را اضافه کرده و سپس از طرفین با توجه به مثبت بودنشان ریشه دوم می‌گیریم:

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = 2(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}})$$

می‌دانیم که $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ پس $1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2^2(\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}})} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

و این یعنی $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{(k+1)+1}}$ بنابراین حکم برقرار می‌باشد.

ب ـ دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}$ با دستور مسئله به صورت مقابل است: $a_1 = \sqrt{2} \quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad a_4, a_5, \ldots.$

لذا $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n\text{ بار}}$ که با توجه به الف $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

اکنون چون $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ موجود و برابر عدد یک است، لذا: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2\times1 = 2 \to \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$

و این یعنی: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$ است. توجه کنید که این مسئله راه‌حل دیگری هم براساس قضایای دنباله‌های یکنوا و کراندار دارد.

مفهوم همگرایی

دنباله $a_n = \frac{n}{n+1}$ را درنظر بگیرید، در جدول زیر مقدار جملات این دنباله به همراه مقدار $|a_n - 1|$ را به ازای چند مقدار n محاسبه کرده‌ایم.

n	۱	10^1	10^2	10^3	10^4	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{1000}{1001}$	$\frac{10000}{10001}$	
a_n	۰/۵	۰/۹۰۹۰	۰/۹۹۰۰	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۹	
$\|a_n - 1\|$	۰/۵	۰/۰۹۰۹	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۹	

در جدول بالا کمی دقیق شوید، به نظر شما آیا نظمی در این اعداد وجود دارد یا خیر؟ با افزایش مقدار n اعداد سطر آخر چه تغییری می‌کند؟ جدول بالا این حقیقت را نشان می‌دهد که با افزایش مقدار n مقدار $|a_n - 1|$ کاهش می‌یابد و این کاهش طوری است که احتمالاً از هر $\varepsilon > 0$ کمتر می‌گردد. لذا نقطه ۱ برای دنباله $\{a_n\}$ یک نقطه **خاص** است. می‌توانید به جای عدد یک اعداد دیگری را انتخاب کنید و ببینید که این اتفاق رخ نمی‌دهد. حال اگر بخواهیم این مفهوم را به یک فضای متری تعمیم دهیم باید به جای قدرمطلق از متر فضا استفاده کنیم. در واقع نقطه a حد دنباله $\{a_n\}$ است اگر $d(a, a_n)$ با افزایش n از هر $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده کمتر گردد.

❖ **تعریف ۳:** دنباله $\{x_n\}$ از فضای متری (X,d) را **همگرا** گوییم هرگاه نقطه $x \in X$ چنان موجود باشد که:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \to d(x_n, x) < \varepsilon$$

در این صورت نقطه x را (مقدار) حد دنباله $\{x_n\}$ نامیده و گوییم دنباله $\{x_n\}$ به نقطه x میل می‌کند (یا دنباله $\{x_n\}$ به نقطه x همگرا است.) همچنین از نماد $x_n \to x$ وقتی $n \to +\infty$ و یا $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ برای بیان این مفهوم استفاده می‌کنیم.

مثال ۶: نشان دهید که $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ($\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ دنباله‌ای در مجموعه $\mathbb{R}$ و با متر معمولی است).

☑ **پاسخ:** طبق تعریف همگرایی دنباله، باید نشان دهیم که:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ \forall n \geq n_0 \to d(\frac{n}{n+1}, 1) < \varepsilon$$

فرض کنیم که $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، ابتدا عبارت $d(\frac{n}{n+1}, 1)$ را در مجموعه اعداد حقیقی محاسبه می‌کنیم:

$$d(\frac{n}{n+1}, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

اگر عدد طبیعی n_0 را طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی چنان انتخاب کنیم که: $1 < \varepsilon(n_0 + 1)$ در این صورت:

$$\forall n \geq n_0 \ ; \ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

لذا کافی است مقدار n را از مقدار n_0 بزرگ‌تر انتخاب کنیم در این صورت:

$$d(\frac{n}{n+1}, 1) = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

پس حکم اثبات شد و لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

تذکر ۳: تعریف جدید همگرایی را با تعریف همگرایی دنباله که در فصل اول دیده بودیم مقایسه کنید. مشابه زمانی که می‌خواستیم مفهوم حدِ یک تابع را در یک فضای دلخواه تعریف کنیم و آن را برحسب فاصله و متر تعریف کردیم در این‌جا نیز تعریف جدید ما بر مبنای مفهوم متر و فاصله است. در مجموعه اعداد حقیقی با متر اقلیدسی، از آنجا که فاصله نقاط توسط تابع قدرمطلق محاسبه می‌شود، لذا تعریف $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ \forall n \geq n_0 \to |x_n - x| < \varepsilon$$

اما در یک فضای متریک دلخواه تعریف $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ به صورت مقابل است:

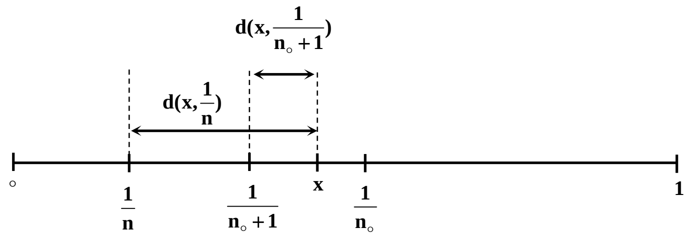
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ \forall n \geq n_0 \to d(x_n, x) < \varepsilon$$

لذا یک بار دیگر این نکته را به شما یادآوری می‌کنیم که هرگاه در فضایی، متر داشته باشیم می‌توانیم از مفهوم دوری و نزدیکی نقاط با یکدیگر صحبت کنیم و هرگاه بتوانیم از مفهوم دوری و نزدیکی بین نقاط با یکدیگر صحبت کنیم می‌توانیم از مفهوم **حد، همگرایی و واگرایی** صحبت کنیم.

مثال۷: آیا دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ در فضای $(0,1)$ با متر اقلیدسی همگرا است؟

پاسخ: می‌دانیم که با افزایش n مقدار $\frac{1}{n}$ کاهش می‌یابد و فاصله $\frac{1}{n}$ از نقطه صفر یعنی $d(0,\frac{1}{n})=\left|0-\frac{1}{n}\right|$ از هر $\varepsilon>0$ کمتر می‌گردد اما $0\notin(0,1)$ لذا دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ در این فضا به نقطه صفر همگرا نمی‌باشد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این دنباله به هیچ نقطه‌ای از این فضا میل نمی‌کند به این منظور فرض کنیم که $x\in(0,1)$ باشد در این صورت طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n_0 چنان موجود است که $n_0\le\frac{1}{x}<n_0+1$



همانطور که می بینید فاصله نقطه $d(x,\frac{1}{n_0+1})$ تا نقطه x حداقل برابر فاصله نقطه $\frac{1}{n_0+1}$ از نقطه x است.

لذا $\frac{1}{n_0+1}<x\le\frac{1}{n_0}$. پس $\forall n\ge n_0+1$ فاصله $\frac{1}{n}$ تا x حداقل برابر $d(x,\frac{1}{n_0+1})=x-\frac{1}{n_0+1}$ می‌باشد. پس مقدار عبارت $d(x,\frac{1}{n})$ با افزایش n از یک مقدار ثابتی کمتر نمی‌گردد لذا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\neq x$. از آنجا که نقطه x دلخواه بود، پس دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ در فضای $(0,1)$ به هیچ نقطه‌ای همگرا نمی‌باشد. در صورتی که این دنباله در مجموعه $\mathbb{R}$ به نقطه صفر همگرا است.

نتیجه۱: همگرایی دنباله $\{x_n\}$ در فضای (X,d) به سه عامل: ویژگی دنباله، خواص متر d و ویژگی‌های فضا و مجموعه X بستگی دارد و با تغییر هرکدام از آن‌ها همگرایی دنباله ممکن است تغییر کند. لذا جهت تأکید می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ در فضای X و با متر d همگرا است و یا دنباله $\{x_n\}$ در فضای (X,d) همگراست. هم‌چنین اگر نقطه همگرایی را بدانیم می‌گوییم: دنباله $\{x_n\}$ در فضای X و یا متر d به نقطه x همگرا است.

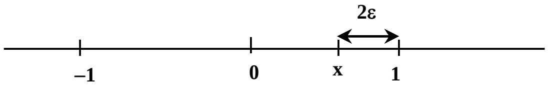
در طبیعت و در ریاضیات با دنباله‌های متفاوتی مواجه می‌شویم که جملات آن با افزایش مقدار n به هیچ مقدار خاصی نزدیک نمی‌شوند. در بسیاری از موارد هم هیچ نظم خاصی بر جملات یک دنباله حاکم نمی‌باشد در این حالات نام خاصی به دنباله‌ها می‌دهیم.

❖ **تعریف۴:** دنباله $\{x_n\}$ از فضای متری (X,d) را در این فضا **واگرا** می‌نامیم هرگاه دنباله $\{x_n\}$ در این فضا همگرا نباشد.

به بیان دیگر $\{x_n\}$ در فضای X واگرا است $\Leftrightarrow$ $(\forall x\in X\quad \exists\varepsilon>0\quad \ni\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \exists n_0\ge n\ \wedge\ |x_{n_0}-x|\ge\varepsilon)$

مثال۸: نشان دهید دنباله‌های $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ ، $\{n\}$ و $\{(-1)^n\}$ در مجموعه $\mathbb{R}$ با متر معمولی واگرا هستند.

پاسخ: وقتی جملات دنباله $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ را می‌نویسیم دنباله مقابل به دست می‌آید: $1,0,-1,0,1,\ldots$. در این دنباله ارقام $0,1,-1$ با یک تناوب و تکراری پشت‌سر هم می‌آیند، لذا طبیعی است که این دنباله همگرا نمی‌باشد. حال به اثبات دقیق این مطلب می‌پردازیم. فرض کنیم که $x\in\mathbb{R}$ باشد اگر $x\neq-1,0,1$ باشد، قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{|x-0|,|x-1|,|x+1|\}$ آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ $\varepsilon<d(\sin\frac{n\pi}{2},x)$ و اگر ۱ یا ۱- یا $x=0$ باشد با فرض $\varepsilon=\frac{1}{2}$ همواره می‌توان به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ عدد $n_0\in\mathbb{N}$ را یافت که $n_0\ge n$ ولی $|x_n-x|\ge\frac{1}{2}$.



راه دیگر اثبات حد نداشتن دنباله $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ را در آینده خواهید دید.

جملات دنباله $\{n\}$ با افزایش مقدار n به طور بی‌کران افزایش می‌یابد و طبیعی است که این دنباله نمی‌تواند به هیچ عددی همگرا باشد اکنون ادعای خود را به طور دقیق اثبات می‌کنیم. فرض کنیم که $x\in\mathbb{R}$ باشد طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی m_0 چنان موجود است که:

$m_0\le x<m_0+1$

لذا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر مقدار n را از مقدار $m_0 + 1$ بزرگ‌تر اختیار کنیم آنگاه فاصله جملات دنباله $\{n\}$ تا نقطه x حداقل $|x - m_0 - 1|$ یا حداقل $|x - m_0|$ است. پس هیچ نقطه‌ای از مجموعه $\mathbb{R}$ برای این دنباله نقطه حدی نمی‌باشد.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که دنباله $\left\{(-1)^n\right\}$ نیز واگراست.

اثبات همگرایی و یا واگرایی یک دنباله، با استفاده از تعریف $(\varepsilon - n)$ در حالت کلی ساده نبوده و نیازمند دقت‌ها و تکنیک‌های خاص می‌باشد. بنابراین طبیعی است که به دنبال قضایایی کلی در این زمینه باشیم، در ادامه بحث به تدریج این قضایا را بیان و اثبات خواهیم کرد.

قضیه۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعضای آن باشد در این صورت:

الف ـ حد دنباله $\{x_n\}$ در صورت وجود یکتا است (قضیه یکتایی حد دنباله). ب ـ دنباله $\{x_n\}$ به نقطه $x \in X$ همگراست اگر و فقط اگر هر همسایگی از x همه اعضای دنباله $\{x_n\}$ به غیر از تعداد متناهی از اعضای آن را دربرداشته باشد.

اثبات:

الفـ فرض کنید که دنباله $\{x_n\}$ به دو نقطه y, x میل کند به بیان دیگر $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ به کمک مفهوم همگرایی نشان می‌دهیم که $x = y$.

فرض کنیم که $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده باشد طبق تعریف همگرایی داریم:

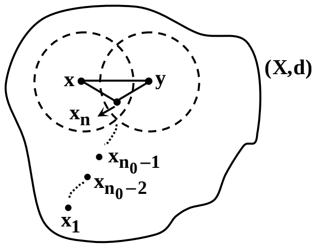
$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ni \forall n \ge n_1 \ ; \ d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \exists n_2 \in \mathbb{N} \ni \forall n \ge n_2 \ ; \ d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

وجود عدد n_1 از تعریف حد $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ و وجود عدد n_2 نیز از تعریف حد $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ اثبات می‌شود.

فرض کنیم $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ باشد از آنجا که عدد n_0 از اعداد n_1 و n_2 بزرگ‌تر است، لذا به ازای هر عدد طبیعی n که $n \ge n_0$ هر دو رابطه $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ برقرار است. طبق خاصیت مثلثی متر d داریم:

$$\forall n \ge n_0 \ ; \ d(x,y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

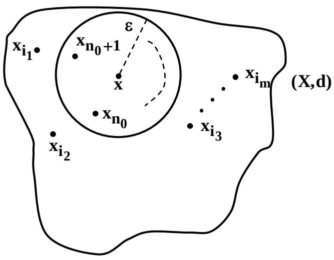
لذا $0 \le d(x,y) < \varepsilon$، از آن‌جا که عدد $\varepsilon > 0$ دلخواه بوده پس باید $d(x,y) = 0$ و چون d متر است، طبق خاصیت متر باید $x = y$، بنابراین حد دنباله در صورت وجود یکتاست.



بـ فرض کنیم که $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ و $B_X(x;r)$ همسایگی دلخواهی از نقطه x باشد. طبق تعریف همگرایی داریم:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \ni \quad \forall n \ge n_0 \ ; \ d(x_n, x) < r$$

توجه شود که در تعریف همگرایی به جای ε مقدار r یعنی شعاع گوی را قرار دادیم. لذا اعضای دنباله $\{x_n\}$ از جمله n_0 به بعد در $B_X(x;r)$ قرار می‌گیرند و حداکثر اعضای $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$ خارج از این گوی می‌باشند. حال چون مجموعه $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}\}$ مجموعه‌ای متناهی است پس حکم برقرار می‌باشد.



اثبات عکس قضیه: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، طبق فرض فقط تعداد متناهی از اعضای دنباله $\{x_n\}$ خارج گوی $B_X(x;\varepsilon)$ قرار دارند، فرض کنیم این تعداد متناهی اعضای $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ باشند (علت انتخاب اندیس i_k این است که الزاماً این اعضای متناهی متوالی نمی‌باشند به طور مثال اعضای x_1, x_{85} و x_{150} ممکن است خارج این همسایگی باشند.) حال داریم:

$$n_0 = \max\{i_1, \ldots, i_m\}$$

لذا:

$$\forall n \ge n_0 \ ; \ x_n \in B_x(x;\varepsilon)$$

پس:

و این یعنی $\forall n \ge n_0 \ ; \ d(x_n, x) < \varepsilon$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. بنابراین دنباله $\{x_n\}$ همگرا به نقطه x است.

فصل چهارم

«حد و پیوستگی»

درسنامه (۱): حد و انواع آن

مقدمه

برای بررسی رفتار یک تابع در دامنه‌ی تعریف‌اش، باید بتوانیم ابتدا رفتار آن تابع را در تک‌تک نقاط دامنه‌اش بررسی کنیم، زیرا توابع در نقاط مختلف معمولاً رفتارهای متفاوتی دارند.

نقاط دامنه نیز از لحاظ توپولوژیکی به دو دسته قابل افرازند: نقاط حدی و نقاط تنها (ایزوله).

بررسی رفتار تابع در یک نقطه‌ی تنها بسیار ساده است؛ زیرا اگر $f:X\to Y$ یک تابع از فضای متری (X,d) به فضای متری (Y,d') و $p\in X$ یک نقطه تنهای دامنه باشد، آنگاه طبق تعریف، همسایگی مانند $B_X(p;r)$ از نقطه p چنان موجود است که $D(f)\bigcap(B_X(p;r)-\{p\})=\varnothing$ و لذا تابع فقط در یک نقطه از گوی $B_X(p;r)$ تعریف می‌شود، به طور طبیعی رفتار تابع در این نقطه با مقدار $f(p)$ مشخص می‌گردد.

اما بررسی رفتار تابع در نقاط حدی دامنه به این سادگی نبوده و مستلزم دقت‌های ویژه‌ای می‌باشد. نکته‌ای که باید به آن توجه داشته باشید این است که گاهی، نقاط حدی دامنه اگرچه عضو دامنه نبوده، یعنی تابع در آن نقطه تعریف نشده است، ولی بازهم مشتاقیم بدانیم رفتار تابع در نزدیکی آن نقطه چگونه است. به‌عنوان مثال تابع $f:(\circ,1)\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه صفر تعریف نمی‌گردد ولی دانستن رفتار این تابع در همسایگی‌های نقطه‌ی صفر برای ما بسیار با اهمیت است.

حد تابع

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید که (X,d) و (Y,d') دو فضای متری، $E\subseteq X$، $f:E\to Y$ یک تابع و p نقطه حدی مجموعه E باشد. گوییم تابع f در نقطه‌ی p به نقطه $q\in Y$ میل می‌کند هرگاه:

$$\forall\varepsilon>\circ\quad\exists\delta>\circ\quad\ni\quad\forall x\in E\quad \circ<d(x,p)<\delta\to d'(f(x),q)<\varepsilon$$

➢ **توجه۱:** الف) الزامی به اینکه $p\in D(f)$ باشد نیست (یعنی $f(p)$ ممکن است وجود نداشته باشد).

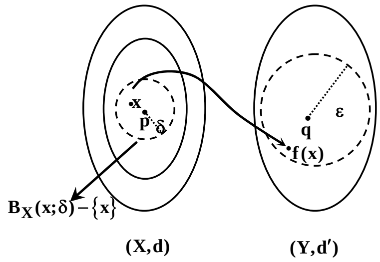
ب) به تفاوت مترها دقت کنید، فاصله‌ی نقطه x تا نقطه p با متر d و فاصله‌ی نقطه $f(x)$ تا نقطه q با متر d' محاسبه می‌شود.

ج) برعکس نقطه p نقطه x باید حتماً از دامنه انتخاب شود. در ثانی نقطه x نمی‌تواند برابر نقطه p گردد $(d(x,p)>\circ)$.

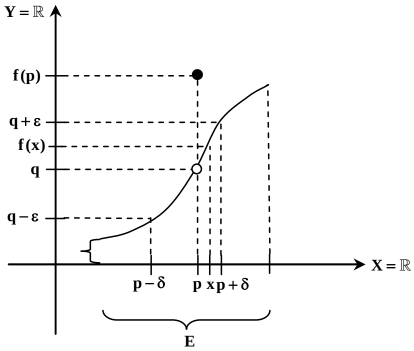
د) برای بیان تعریف بالا از دو نماد $\lim\limits_{x\to p}f(x)=q$ و یا "$f(x)\to q$ وقتی $x\to p$" نیز استفاده می‌گردد.

هـ) گزاره $(\varepsilon-\delta)$ حد به زبان ساده می‌گوید: **فاصله‌ی** نقطه $f(x)$ در فضای Y از نقطه $q\in Y$ از عدد $\varepsilon>\circ$ کمتر است، به شرط آن‌که فاصله نقطه $x\in E$ در فضای X از نقطه p کمتر از عدد $\delta>\circ$ باشد.

برای روشن‌تر شدن این تعریف شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



مثالی از یک فضای متری دلخواه



مثالی از تابع حقیقی مقدار

مثال۱: الف) نشان دهید که $f:[۰,۳]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^۲$ در نقطه $x=۲$ دارای حد است. حد آن را به دست آورید.

ب) نشان دهید که تابع $f:(۰,۱)\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ در نقطه‌ی $x=۰$ حد ندارد.

ج) نشان دهید که تابع $f:(۰,۲)-\{۱\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ دارای حد است، حد آن را به دست آورید.

پاسخ: الف) ادعا می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۴$ بنابراین باید نشان دهیم که:

$$\forall\varepsilon>۰\quad\exists\delta>۰\quad\ni\quad\forall x\in[۰,۱]\quad ۰<|x-۲|<\delta\to|f(x)-۴|=|x^۲-۴|<\varepsilon$$

ابتدا عبارت $|x^۲-۴|$ را ساده کرده و رابطه‌ی آن را با عبارت $|x-۲|$ مشخص می‌نماییم. طبق اتحادهای جبری داریم: $x^۲-۴=۴(x-۲)+(x-۲)^۲$

بنابراین: $|x^۲-۴|\le ۴|x-۲|+|x-۲|^۲$

بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $۱>\delta>۰$ در این صورت $\delta>\delta^۲>۰$ اکنون اگر عبارت $|x-۲|$ از عدد $\delta>۰$ کمتر باشد، داریم:

$$|x^۲-۴|\le ۴|x-۲|+|x-۲|^۲<۴\delta+\delta^۲<۴\delta+\delta=۵\delta$$

فرض کنیم که $\varepsilon>۰$ داده شده باشد، اگر $\delta>۰$ را طوری انتخاب کنیم که $\delta<\frac{\varepsilon}{۵}$ و $\delta<۱$ در این صورت داریم:

$$\text{اگر } ۰<|x-۲|<\delta\Rightarrow\begin{cases}|x-۲|^۲<\delta^۲<\delta\\ ۴|x-۲|<۴\delta\end{cases}$$

لذا $|x^۲-۴|\le ۴|x-۲|+|x-۲|^۲<\delta+۴\delta=۵\delta<۵\frac{\varepsilon}{۵}=\varepsilon$ و این همان ادعای ما است، بنابراین حکم اثبات شد و می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}x^۲=۴$$

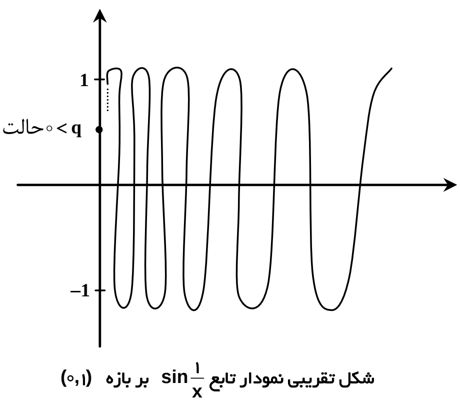
ب) حکمی که می‌خواهیم در مورد تابع ذکر شده در قسمت ب اثبات کنیم کمی متفاوت است، ما می‌خواهیم اثبات کنیم که این تابع در نقطه‌ی صفر فاقد حد است و این یعنی:

$$\forall q\in\mathbb{R}\quad\exists\varepsilon>۰\quad\ni\quad\forall\delta>۰\quad\exists x\in(۰,۱)\quad\ni\quad ۰<|x-۰|<\delta\quad\wedge\quad|f(x)-q|\ge\varepsilon$$

عبارتی که در بالا نوشته‌ایم نقیض منطقی وجود حد است. (توجه کنید که: $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$) از آن‌جا که مجموعه برد این تابع زیرمجموعه‌ی بازه $[-۱,۱]$ در مجموعه $\mathbb{R}$ است، لذا به جای انتخاب $q\in\mathbb{R}$ فرض کنیم که $q\in[-۱,۱]$ انتخاب شده است. بنابراین باید نشان دهیم که:

$$\forall q\in[-۱,۱]\quad\exists\varepsilon>۰\quad\ni\quad\forall\delta>۰\quad\exists x\in(۰,۱)\quad\ni\quad ۰<x<\delta\quad\wedge\quad|f(x)-q|\ge\varepsilon$$

فرض کنیم که $q\in[-۱,۱]$ باشد.

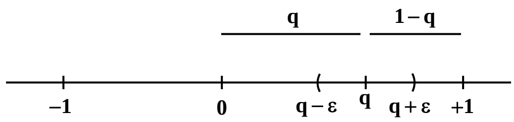


شکل تقریبی نمودار تابع $\sin\frac{۱}{x}$ بر بازه $(۰,۱)$

مسئله را به ۳ حالت افراز می‌کنیم:

I) $q>\circ$ II) $q=\circ$ III) $q<\circ$

I) در این حالت $\varepsilon=\frac{۱}{۲}\min\{q,۱-q\}$ (توجه کنید که هدف ما معرفی یک $\varepsilon>\circ$ به ازای این نقطه q داده شده است.) با این تکنیک اگر $x\in(\circ,۱)$ چنان باشد که $|f(x)-q|<\varepsilon$ در این صورت الزاماً $f(x)>\circ$ است. به شکل مقابل توجه کنید:



اکنون باید نشان دهیم که:

$$\forall\delta>\circ\quad \exists x\in(\circ,۱)\quad \ni\quad \circ<x<\delta\ \wedge\ |f(x)-q|\geq\varepsilon$$

فرض کنیم که $\delta>\circ$ داده شده است، طبق خاصیت ارشمیدسی مجموعه اعداد حقیقی عدد $k\in\mathbb{N}$ را چنان بزرگ انتخاب می‌کنیم که $\delta>\dfrac{۱}{۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}}>\circ$ با توجه به این رابطه مقدار x را برابر $\dfrac{۱}{۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}}$ می‌گیریم، در این صورت:

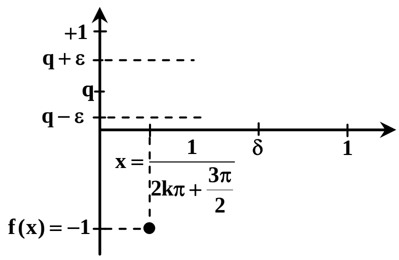
$$f(x)=\sin\frac{۱}{x}=\sin\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}}}\right)=\sin\left(۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\right)=\sin\frac{۳\pi}{۲}=-۱$$

به ازای این x باید $|f(x)-q|\geq\varepsilon$ زیرا در غیر این صورت، یعنی حالتی که $|f(x)-q|<\varepsilon$ طبق ادعایی که اثبات شده $f(x)>\circ$ و چون $f(x)=-۱$ لذا این نتیجه تناقض است. بنابراین به ازای $\delta>\circ$ داده شده نقطه x را با شرایط مسئله یافتیم و این حکم را در حالت I اثبات می‌کند. اثبات حکم در دو حالت دیگر به طور مشابه انجام می‌گیرد.

II) راهنمایی: $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$، به ازای $\delta>\circ$ داده شده $x=\dfrac{۱}{۲k\pi}$ (k طوری است که $x<\delta$).

III) راهنمایی $\varepsilon=\frac{۱}{۲}\min\{|q|,|۱-q|\}$، به ازای $\delta>\circ$ داده شده $x=\dfrac{۱}{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ (k طوری است که $x<\delta$).

بنابراین تابع f در نقطه صفر حد ندارد.



ج) ادعا می‌کنیم که حد این تابع در نقطه $x=۱$ برابر ۲ است پس باید نشان دهیم که:

$$\forall\varepsilon>\circ\quad \exists\delta>\circ\quad \ni\quad \forall x\in(\circ,۲)-\{۱\}\qquad \circ<|x-۱|<\delta\rightarrow\left|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲\right|<\varepsilon$$

به طور مشابه ابتدا عبارت $\left|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲\right|<\varepsilon$ را ساده می‌کنیم:

$$\left|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲\right|=\left|\frac{x^۲-۲x+۱}{x-۱}\right|=\left|\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}\right|$$

چون می‌دانیم که مقدار x هیچ‌گاه برابر عدد ۱ نمی‌گردد (زیرا $d(x,۱)>\circ$)، لذا:

$$\left|\frac{(x-۱)^۲}{(x-۱)}\right|=|x-۱|$$

اگر عدد $\delta>\circ$ را طوری انتخاب کنیم که $\delta<\varepsilon$ حکم برقرار است، زیرا:

$$\circ<|x-۱|<\delta\rightarrow\left|\frac{(x-۱)^۲}{(x-۱)}\right|<\delta\rightarrow\left|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲\right|<\underbrace{\delta<\varepsilon}_{\text{طبق ادعا}}\rightarrow|f(x)-۲|<\varepsilon$$

توجه کنید که در قسمت (الف) $f(۲)=۴$ موجود بوده و برابر میزان حد تابع در نقطه ۲ یعنی $\lim\limits_{x\to۲}f(x)$ است، در قسمت (ب) $f(\circ)$ موجود نمی‌باشد و در قسمت (ج) نیز حد تابع در نقطه $x=۱$ وجود دارد ولی $f(۱)$ موجود نیست.

نتیجه ۱: ممکن است تابعی در نقطه‌ای **حد** داشته باشد، ولی در آن نقطه **مقدار** نداشته باشد و یا مقدار تابع در آن نقطه بر حد تابع منطبق نباشد.

مثال۲: آیا حد روبه‌رو درست محاسبه شده است؟ $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1})=0$

پاسخ: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ باشد، آنگاه دامنه تابع f مجموعه تک عضوی {۱} است و به وضوح این مجموعه به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\mathbb{R}$ هیچ نقطه‌ی حدی ندارد در صورتی که در تعریف حد باید نقطه p یک نقطه‌ی حدی دامنه تابع f باشد. لذا عبارت بالا اشتباه است و حد تابع $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ در نقطه ۱ وجود ندارد توجه شود که $f(1)$ موجود بوده و برابر صفر است. بنابراین رابطه $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1})=0$ نادرست است.

◆ ◆ ◆ ◆

نتیجه ۲: وجود مقدار تابع در یک نقطه دلیلی بر وجود حد تابع در آن نقطه نمی‌باشد (حتی اگر آن نقطه یک نقطه حدی دامنه تابع باشد).

مثال۳: فرض کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ که $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $a,L\in\mathbb{R}$، در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 2a} f(\frac{x}{2})=L$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2a} f(\frac{x}{2})=\frac{L}{2}$ ۳) $\lim\limits_{x\to a} f(\frac{x}{2})=L$ ۴) $\lim\limits_{x\to a} f(\frac{x}{2})=\frac{L}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» برای اثبات گزینه ۱ تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $g(x)=f(\frac{x}{2})$ تعریف می‌کنیم. در این صورت درستی رابطه $\lim\limits_{x\to 2a} f(\frac{x}{2})=L$ معادل است با اینکه $\lim\limits_{x\to 2a} g(x)=L$. هم‌چنین برای روشن شدن روند اثبات فرض و حکم را جداگانه می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 0<|x-a|<\delta \to |f(x)-L|<\varepsilon \quad (I)$$ فرض

$$\lim_{x\to 2a} g(x)=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 0<|x-2a|<\delta' \to |g(x)-L|<\varepsilon \quad (II)$$ حکم

برای اثبات حکم، رابطه II، فرض کنیم که $\varepsilon>0$ داده شده باشد، طبق فرض عدد $\delta>0$ چنان موجود است که اگر $x\in\mathbb{R}$ و $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$. ادعا می‌کنیم که باید $2\delta>\delta'>0$، زیرا در این صورت داریم: $(x\in\mathbb{R}) \wedge (0<|x-2a|<\delta')\le 2\delta \to 0<\left|\frac{x}{2}-a\right|<\delta$

بنابراین فاصله نقطه $\frac{x}{2}$ تا نقطه a از عدد δ کوچک‌تر است پس باید: $\left|f(\frac{x}{2})-a\right|<\varepsilon$ اما $f(\frac{x}{2})=g(x)$ لذا اگر داشته باشیم $0<|x-2a|<2\delta$ آنگاه $|g(x)-L|<\varepsilon$. بنابراین رابطه II اثبات شد و حکم برقرار است. برای رد گزینه‌های (۲) و (۳) تابع $f(x)=2x$ را در نقطه $a=1$ و برای رد گزینه (۴) تابع $f(x)=x^2$ را در نقطه $a=1$ بررسی کنید.

◆ ◆ ◆ ◆

قضیه۱: حد تابع در یک نقطه در صورت وجود، یکتا است.

اثبات: فرض کنیم که این‌گونه نباشد بنابراین $L_1,L_2\in Y \quad \exists L_1\neq L_2$ به طوری که $\lim\limits_{x\to p} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to p} f(x)=L_2$ (E,p,Y,X,f) همان مفاهیم تعریف۱ هستند. بنابراین:

$$\lim_{x\to p} f(x)=L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x\in E \quad 0<d(x,p)<\delta \to d(f(x),L_1)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to p} f(x)=L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \ni \quad \forall x\in E \quad 0<d(x,p)<\delta' \to d(f(x),L_2)<\frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $x\in E$ را طوری انتخاب کنیم که $0<d(x,p)<\delta$ و $0<d(x,p)<\delta'$

(این کار مشابه انتخاب ماکزیمم n_1 و n_2 در اثبات حد دنباله است) آنگاه هر دو رابطه بالا برقرار است، اکنون طبق خاصیت مثلثی متر داریم:

$$0\le d(L_2,L_1)\le d(f(x),L_1)+d(L_2,f(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

چون ε عدد مثبت دلخواهی بود پس به ازای هر $\varepsilon>0$ داریم $0\le d(L_1,L_2)<\varepsilon$ بنابراین طبق خواص اعداد حقیقی باید $d(L_1,L_2)=0$ و طبق خاصیت متر نتیجه می‌شود که $L_1=L_2$ و این با فرض $L_1\neq L_2$ در تناقض است لذا حد تابع در صورت وجود **یکتا** است.

مثال۴: تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تعریف شده و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$. هم‌چنین حدهای یگانه $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ و $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ هر دو موجودند، نشان دهید که $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))=\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))=L$.

پاسخ: فرض کنیم که $\varepsilon>0$ داده شده باشد، چون نقطه‌ی L حد تابع f در نقطه (a,b) است لذا:

$$\exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \to |f(x,y)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

تابع $g(x)=\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $\circ<|x-a|<\delta$ نقطه y را چنان انتخاب می‌کنیم که $\circ<|y-b|<\sqrt{\delta^{۲}-|x-a|}$، پس $\circ<\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}}<\delta$ و لذا $|f(x,y)-L|<\frac{\varepsilon}{۲}$.

اکنون اگر x را ثابت نگه داریم و $y\to b$، آنگاه $\left|g(x)-L\right|\le\frac{\varepsilon}{۲}<\varepsilon$. پس $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b}(f(x,y)))=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ و به طور مشابه برای قسمت دوم.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵: اگر f تابعی از $\mathbb{R}^{۲}$ به $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{۱}{x}+x\sin\frac{۱}{y} & x\ne\circ\ ,\ y\ne\circ \\ \circ & x=\circ\ \text{یا}\ y=\circ\end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد حدود $A=\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)$، $B=\lim\limits_{x\to\circ}\lim\limits_{y\to\circ} f(x,y)$ و $C=\lim\limits_{y\to\circ}\lim\limits_{x\to\circ} f(x,y)$ صحیح است؟ (سراسری ۸۴)

۱) A موجود ولی B و C موجود نیستند.
۲) A، B و C هیچکدام موجود نیستند.
۳) A موجود نیست ولی B و C موجودند.
۴) A،B و C هر سه موجودند.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\left|f(x,y)\right|\le\left|y\sin\frac{۱}{x}\right|+\left|x\sin\frac{۱}{y}\right|\le|x|+|y|$$

و از آنجا که $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)}(|x|+|y|)=\circ$، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\left|f(x,y)\right|=\circ$$

پس:

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)=\circ$$

داریم:

$$\lim_{x\to\circ}\lim_{y\to\circ} f(x,y)=\lim_{x\to\circ}(\circ+\lim_{y\to\circ} x\sin\frac{۱}{y})$$

ولی $\lim\limits_{y\to\circ} x\sin\frac{۱}{y}$ وجود ندارد پس حد فوق موجود نیست. به طور مشابه ثابت می‌شود که $\lim\limits_{y\to\circ}\lim\limits_{x\to\circ} f(x,y)$ وجود ندارد. پس A موجود است ولی B و C موجود نیستند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: فرض $X\subseteq\mathbb{R}^n$ فشرده و $f:X\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد که برای هر $t\in\mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}\left[t,\infty\right)$ بسته است. کدام گزینه درست است؟
(ریاضی محض ـ دکتری ۹۴)

۱) $x_\circ\in X$ وجود دارد به طوری که $f(x_\circ)=\sup\limits_{x\in X} f(x)<\infty$.
۲) ممکن است تابع f سوپریمم و اینفیمم خود را بر X نگیرد.
۳) $y_\circ\in X$ وجود دارد به طوری که $f(y_\circ)=\inf\limits_{x\in X} f(x)>-\infty$.
۴) f کران‌دار است.

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید $\alpha=\sup\limits_{x\in X} f(x)$ و $t_n\to\alpha$، چون به ازای هر n، $f^{-۱}[t_n,\infty)$ بسته و X فشرده است، لذا $f^{-۱}[t_n,\infty)$ نیز فشرده است و چون $t_n\to\alpha$. پس $\alpha<\infty$ و لذا گزینه (۱) درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: فرض کنید $f:A\times B\to\mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد. کدام گزینه درست است؟ (دکتری ۹۵)

۱) $\sup\limits_y\inf\limits_x f(x,y)\le\inf\limits_y\sup\limits_x f(x,y)$
۲) $\sup\limits_y\inf\limits_x f(x,y)\le\inf\limits_x\sup\limits_y f(x,y)$
۳) $\sup\limits_y\inf\limits_x f(x,y)\ge\inf\limits_x\sup\limits_y f(x,y)$
۴) $\sup\limits_x\inf\limits_y f(x,y)\le\inf\limits_x\sup\limits_y f(x,y)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\inf_{x\in A} f(x,y)\le\underset{\forall(x,y)\in A\times B}{f(x,y)}\le\sup_{y\in B} f(x,y)\to$$

$$\inf_x f(x,y)\le\sup_y f(x,y)\ \frac{\text{از طرف راست}\ \inf\ \text{نسبت به}\ x}{\text{از طرف چپ}\ \sup\ \text{نسبت به}\ y}$$

$$\sup_y\inf_x f(x,y)\le\inf_x\sup_y f(x,y)$$

لذا گزینه‌ی (۲) صحیح می‌باشد. در واقع از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که اگر $f(x)$ تابعی یک‌متغیره باشد، آنگاه $f(x)\le\sup f(x)$ و همچنین اگر $\forall x;f(x)\le a$ آنگاه $\sup\limits_x f(x)\le a$ و اگر $f(x)\ge a$ آنگاه $\inf\limits_x(f(x))\ge a$. و همچنین همواره $\inf f(x)\le f(x)$.

فضای برداری $\mathbb{R}^X$

منظور از Y^X مجموعه تمامی توابعی است که می‌توان از مجموعه X به مجموعه Y نوشت. اکنون مجموعه X فقط یک مجموعه نبوده و ساختار متریک نیز دارد. یعنی (X,d) یک فضای متری است. هم‌چنین می‌دانیم که جمع و ضرب اسکالر و ضرب روی این فضا این‌گونه تعریف می‌گردد:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x\in X\ \forall f,g\in\mathbb{R}^X$$
$$(c.f)(x)=cf(x) \qquad \forall c\in\mathbb{R} \qquad\qquad (fg)(x)=f(x)g(x)$$

$\mathbb{R}^X$ با این اعمال به یک **فضای برداری** و علاوه بر آن با عمل ضرب خود به یک **جبر** تبدیل می‌گردد.

قضیه۲: فرض کنیم که (X,d) یک فضای متری، $D\subseteq X$ و توابع f و g توابعی از مجموعه D به مجموعه $\mathbb{R}$ باشند. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ (به ازای یک $a\in D'$) در این صورت:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=L+M$ ب) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x)=cL\ ;\ \forall c\in\mathbb{R}$ ج) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=LM$ د) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{L}{M}$ (به شرطی که $M\neq 0$ و تابع g بر یک همسایگی نقطه a ناصفر باشد).

(مشابه حالت دنباله‌ها تأکید می‌کنیم که به عنوان مثال منظور از $\lim\limits_{x\to a} fg(x)=LM$ این است که حد تابع fg در نقطه a **موجود** بوده و برابر $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ است).

اثبات: قسمت ج را به نمایندگی اثبات می‌کنیم، باید نشان دهیم که:

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x\in D \quad 0<d(x,a)<\delta\to d_{\mathbb{R}}((fg)(x),ML)=|(fg)(x)-ML|<\varepsilon$$

عبارت آخر را محاسبه می‌کنیم:

$$|(fg)(x)-ML|=|f(x)g(x)-ML|=|f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-ML|\le|f(x)-L||g(x)|+|L||g(x)-M|$$

بنابراین باید عبارت $|f(x)-L||g(x)|+|g(x)-M||L|$ با نزدیک شدن نقطه x به نقطه a از $\varepsilon>0$ کمتر گردد. فرض کنیم که $\varepsilon>0$ داده شده است طبق فرضیات مسئله (وجود حدهای توابع f و g در نقطه a) داریم:

$$\exists\delta_1>0 \quad\ni\quad \forall x\in D \quad 0<d(x,a)<\delta_1\to|f(x)-L|<\varepsilon \qquad (I)$$
$$\exists\delta_2>0 \quad\ni\quad \forall x\in D \quad 0<d(x,a)<\delta_2\to|g(x)-M|<\varepsilon \qquad (II)$$

درواقع به ازای این $\varepsilon>0$ داده شده اعداد δ_1 و $\delta_2>0$ را چنان یافته‌ایم که دو رابطه I و II برقرار باشد. طبق خواص قدرمطلق و نامساوی داریم:

$$\text{if } x\in D\ \wedge\ 0<d(x,a)<\delta_2\to|g(x)|-|M|<|g(x)-M|<\varepsilon\to|g(x)|\le(|M|+\varepsilon)$$

فرض کنیم که $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ داریم:

$$\forall x\in D \quad 0<d(x,a)<\delta\to|f(x)-L||g(x)|+|g(x)-M||L|\le\varepsilon(|M|+\varepsilon)+|L|\varepsilon$$

بنابراین:

$$|(fg)(x)-LM|\le\varepsilon(|M|+\varepsilon)+|L|\varepsilon=(|M|+|L|+\varepsilon)\varepsilon<(|M|+|L|+1)\varepsilon$$

بنابراین عبارت $|(fg)(x)-LM|$ از یک مضرب ثابت از $\varepsilon>0$ کمتر گشته و چون ε دلخواه بود پس حکم برقرار است.

در فصل قبل و در مبحث دنباله‌ها قضیه قبل را البته با شکلی متفاوت‌تر دیده بودیم در آنجا دیدیم که اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا باشند، آنگاه دنباله‌های $\{a_n+b_n\},\{a_nb_n\},\{ca_n\}(c\in\mathbb{R})$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (با شرط $b_n\neq 0\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\neq 0$) نیز همگی همگرا بوده و داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to+\infty}a_n)(\lim_{n\to+\infty}b_n) \qquad \lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\lim_{n\to+\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n} \qquad \lim_{n\to+\infty}ca_n=c\lim_{n\to+\infty}a_n$$

اکنون به جای دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ توابع f و g و به جای شرط $n\to+\infty$ شرط $x\to a$ را قرار می‌دهیم.

مدرسان شریف

فصل پنجم

«مشتق‌گیری»

درسنامه: مشتق توابع و خواص آن

مشتق یکی از مفاهیم بنیادین در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. همان‌طور که می‌دانید مسئله تعیین سرعت لحظه‌ای یک جسم متحرک در فیزیک و مسئله‌ی تعیین خط مماس بر یک خم در هندسه هر دو به مفهوم مشتق منجر می‌شوند. در این فصل ما از دیدگاهی کاملاً تحلیلی به مطالعه‌ی مشتق و خواص آن می‌پردازیم و برای این کار توجه خود را به توابعی معطوف می‌کنیم که بر بازه‌ها یا قطعه‌هایی از خط حقیقی تعریف شده‌اند، دقت شود که وقتی دامنه توابع مجموعه‌های دیگری مثل $\mathbb{R}^n$، n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک، یا اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یا یک منفلید (منفلید به طور شهودی یعنی یک $\mathbb{R}^n$ خمیده و پرچین و چروک مانند رویه‌های هموار) باشد تفاوت‌های چشمگیری در نظریه‌ی مشتق‌گیری حاصل می‌شود که در درس‌های دیگری نظیر آنالیز ریاضی ۳، توابع مختلط و هندسه‌ی منفلید به مطالعه‌ی این نظریه پرداخته می‌شود. به هرحال هدف از این مقدمه این است که بدانیم دامنه‌ی توابع بسیار مهم‌ترند تا مقادیر خود توابع چون تفاوت در دامنه‌ها، تفاوت در نظریه‌ها را ایجاب می‌کند، برای مثال در طبیعت کمیت‌های اسکالر زیادی یافت می‌شود که می‌توان آنها را به مقادیر یک تابع وابسته کرد اما دامنه‌ی این توابع چه باشد خود مسئله‌ی مهمی است و به روشن‌تر شدن مباحث کمک کرده و حتی ممکن است خود مبنای نظریه‌ی جدیدی باشد.

مشتق یک تابع حقیقی

❖ **تعریف۱:** فرض کنیم f یک تابع حقیقی مقدار بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد. به ازای هر $x \in [a,b]$، خارج قسمت نیوتنی

$$(۱)\qquad \varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad (a<t<b\ ,\ t\neq x)$$

را تشکیل داده و تعریف می‌کنیم:

$$(۲)\qquad f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد پس به تابع f تابع f' مربوط می‌شود که قلمروش تمام آن xهایی است که برای آن حد ۲ وجود دارد. f' را **مشتق** f می‌نامیم. بنابراین هرگاه f' در نقطه‌ی x تعریف شده باشد یعنی چنانچه حد ۲ موجود باشد، گوییم f در x مشتق‌پذیر است و اگر f' در هر نقطه از مجموعه‌ی E، $E\subset[a,b]$، تعریف شده باشد، گوییم f بر E **مشتق‌پذیر** است.

تذکر۱:

الف) تعریف بالا را به طور معادل با تعریف $\varepsilon-\delta$ یکی می‌دانند: تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در x مشتق‌پذیر است هرگاه $\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=L$ موجود باشد یعنی:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t}\ \ 0<|t-x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-L\right|<\varepsilon$$

ب) در عبارت ۲ می‌توان حدود سمت راست و سمت چپ را در نظر گرفت تا به ترتیب مشتق‌های سمت راست و چپ $f'_-(x)\ ,\ f'_+(x)$ به دست بیاید و همان‌طور که می‌دانید $f'(x)$ موجود است اگر $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ موجود و برابر باشند. در ضمن در نقاط انتهایی دامنه‌ی تعریف، یعنی نقاط a و b، مشتق در صورت وجود همان مشتق‌های سمت راست و سمت چپ است. توجه کنید که تفاوت ظریفی بین $f'_+(x)$ و $f'(x^+)$ است چون $f'_+(x)=\lim_{t\to x^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ در صورت وجود، درحالی‌که $f'(x^+)=\lim_{t\to x^+}f'(t)$ در حالت اخیر فرض بر وجود تابع f' است و همین‌طور است تفاوت بین $f'_-(x)$ و $f'(x^-)$. در ادامه در برخی مسائل به این تفاوت‌ها اشاره شده است.

ضمناً بعدها در نظریه سری‌های فوریه مشتق‌های یک طرفه‌ی $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ را اندکی متفاوت‌تر تعریف می‌کنند. برای مثال $f'_+(x)=\lim\limits_{t\to x^+}\dfrac{f(t)-f(x^+)}{t-x}$ که در آن $f(x^+)=\lim\limits_{t\to x^+}f(t)$ و مشابهاً $f'_-(x)$ را تعریف می‌کنند. طبق این دیدگاه اگر f در x پیوسته باشد آنگاه $f'(x)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ موجود و برابر باشند. توجه شود که ما از این تعریف در ادامه استفاده نخواهیم کرد.

پ) تعریف ۱ در اعداد مختلط نیز معتبر است. اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک میدان است لذا در آنجا نیز همانند $\mathbb{R}$، ساختن خارج قسمت‌ها معنی دارد، اما یک تفاوت بزرگ وجود دارد و آن مربوط به دامنه می‌شود. روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ شما از دو سمت راست و چپ می‌توانید به یک عدد مفروض نزدیک شوید اما در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ بی‌شمار مسیر برای نزدیک شدن وجود دارد و همین تفاوت باعث می‌شود که اگر تابع مفروضی در عدد مختلطی مشتق‌پذیر باشد آنگاه در همان نقطه بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر شود و مفاهیم تحلیلی بودن و بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بودن برهم منطبق می‌شوند در حالی که در توابع با دامنه‌ی حقیقی چنین چیزی غلط است. دیگر تفاوت مهم $\mathbb{R}$ با $\mathbb{C}$، مربوط به وجود ترتیب در $\mathbb{R}$ است و این خود باعث ایجاد قضایای جالبی در $\mathbb{R}$ می‌شود که در $\mathbb{C}$ غلط‌اند، به هنگام مطرح شدن این قضایا به این تفاوت‌ها اشاره خواهیم کرد.

قضیه۱: فرض کنیم تابع حقیقی f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. هرگاه f در نقطه‌ی $x\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، f در x پیوسته است.

مثال۱: فرض کنید $A=\left\{\dots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ و تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\inf\left\{|y-x|:y\in A\right\}$ تعریف شود. در صورتی‌که K مجموعه نقاطی باشد که تابع f در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست، کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ۹۲)

۱) هر نقطه K، نقطه‌ای تنها در K است.
۲) K بسته است ولی فشرده نیست.
۳) K فشرده است.
۴) K بسته نیست.

پاسخ: گزینه «۳» تابع f در نقاط $\{\frac{1}{n}\mid n\geq 1\}\cup\{\frac{3}{4n}\mid n\geq 1\}\cup\{0\}$ دارای شکستگی می‌باشد و لذا مشتق‌پذیر نیست. حال چون مجموعه‌ی این نقاط، بسته و کران‌دار می‌باشد لذا فشرده است.

تذکر۲: دقت شود که اولاً این قضیه در دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی درست نیست چون در آنجا تابع علامت sgn دارای مشتق $(\mathrm{sgn})'(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ +\infty & x=0\end{cases}$ است در حالیکه sgn در $x=0$ ناپیوسته است. ثانیاً عکس قضیه‌ی فوق غلط است مثلاً تابع $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ در نظر بگیرید. این تابع در صفر پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست چون $f'_+(0)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{|t|}{t}=1$ ، $f'_-(0)=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{|t|}{t}=-1$ لذا طبق تذکر ۱ـ ب $f'(0)$ موجود نیست. در فصل سوم با استفاده از انتقالات این تابع، تابع g را بر کل $\mathbb{R}$ چنان تعریف می‌کنیم که متناوب باشد مثلاً $g(x+2):=f(x)$ اکنون تابع تعریف شده توسط سری $G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n g(4^n x)$ چنان است که بر کل $\mathbb{R}$ پیوسته است اما در هیچ جای $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست. اولین مثال از توابع پیوسته‌ی هیچ‌جا مشتق‌پذیر توسط ویراشتراس با ضابطه‌ی $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ ارائه شده و باعث تعجب جامعه‌ی ریاضی قرن نوزدهم گردید.

قضیه۲: (خواص جبری مشتق): فرض کنیم f و g بر بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده و در نقطه‌ی $x\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت $f\pm g$ ، $f.g$ و f/g در x مشتق‌پذیرند، و

الف) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

ب) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (قاعده‌ی لایب نیتز)

پ) $(\dfrac{f}{g})'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ به شرطی که $g(x)\neq 0$

قضیه۳: (قاعده‌ی زنجیری): اگر تابع f در نقطه‌ی x و تابع g در نقطه‌ی $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه تابع مرکب gof در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر است و $(gof)'(x)=g'(y).f'(x)$.

مثال۲: اگر توابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و f در نقطه a مشتق‌پذیر باشند و $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x\in\mathbb{R})$ کدام گزینه صحیح است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

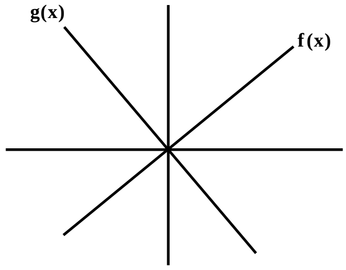
۱) h همواره در a مشتق‌پذیر است.

۲) h در a مشتق‌پذیر است اگر $f(a)\neq g(a)$.

۳) h در a مشتق‌پذیر است اگر $f(a)\neq 0$ و $g(a)\neq 0$.

۴) h در a مشتق‌پذیر است اگر $f(a)=g(a)$.

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنید $f(x)=x$ و $g(x)=-x$، با رسم نمودار دو تابع داریم:



واضح است که هم f و هم g در $x=0$ مشتق‌پذیرند، اما $h(x)=|x|$ که در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. پس گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند. کافی است قرار دهیم $f(x)=x+1$ و $g(x)=-x+1$ که باز هم $h(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و $g(0)\neq 0$ و $f(0)\neq 0$ و لذا گزینه (۳) نیز نادرست است. اگر $f(a)\neq g(a)$، لذا یا $f(a)>g(a)$ و یا $f(a)<g(a)$ فرض کنیم حالت اول رخ بدهد در این صورت از آنجا که f و g در a پیوسته هستند (چون مشتق‌پذیرند)، لذا به ازای هر x از یک همسایگی از a نیز $f(x)>g(x)$ و لذا $h(x)=f(x)$ و h در a مشتق‌پذیر خواهد بود.

مثال۳: الف) مشتق هر تابع ثابت صفر است. مشتق تابع همانی $f(x)=x$ برابر است با $f'(x)=1$ با بکار بردن قاعده لایب نیتز معلوم می‌شود که اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$ و اگر $n<0$ از قضیه ۲ـ پ داریم $f'(x)=nx^{n-1}$. بنابراین هر چندجمله‌ای مشتق‌پذیر است و همچنین هر تابع گویا جز در نقاطی که مخرجش صفر است، مشتق‌پذیر می‌باشد (تابع گویا، تابعی مثل $g(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ است که در آن p و q چندجمله‌ای هستند).

ب) تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ x\sin\frac{1}{x} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ گرچه در صفر پیوسته است اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. برای پیوستگی توجه داریم که اولاً $f(0)=0$ ثانیاً چون $|f(x)|\leq|x|$ پس $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$ لذا $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. اما برای مشتق‌ناپذیر بودن f در صفر باید نشان دهیم که حد خارج قسمت نیوتنی $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ وقتی $x\to 0$ موجود نیست. برای این کار دو دنباله‌ی متمایز $(\frac{1}{n}),(\frac{1}{2\pi n})$ را که به صفر همگرایند در نظر می‌گیریم اکنون

$$\frac{f(\frac{1}{2\pi n})-f(0)}{\frac{1}{2\pi n}-0}=\frac{\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n)}{\frac{1}{2\pi n}}=\sin 2\pi n=0\to 0 \qquad \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}=1\to 1$$

بنابراین حد خارجی قسمت نیوتنی یکتا نبوده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ موجود نیست.

پ) تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست اما برای $x\neq 0$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

ت) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است و $f'(0)=0$ و نیز برای $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}.$$

ث) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\notin\mathbb{Q} \\ \cos x & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ در این صورت $h(x)=fog(x)=f(\lfloor x\rfloor)$ و چون $[x]\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ پس $h(x)=\cos\lfloor x\rfloor$. به وضوح اگر $x\in\mathbb{Z}$ آنگاه h در x پیوسته نیست. بنابراین h در نقاط صحیح نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد حال اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آنگاه عدد صحیح $n\in\mathbb{Z}$ هست که $n<x<n+1$ و در این حالت $h(x)=\cos(n)$ لذا، h روی بازه‌ی $(n,n+1)$ برابر مقدار ثابت $\cos(n)$ است. پس مشتق آن در این بازه صفر است پس در کل h' در نقاط غیرصحیح موجود و برابر صفر است.

مشتقات مراتب بالاتر: فرض کنیم f'، تابع مشتق تابع f بر یک بازه باشد. اگر مجدداً f' بر این بازه مشتق‌پذیر باشد، مشتق f' را با f'' نشان داده و آن را **مشتق دوم f** می‌نامیم. لذا:

$$(f')'(x) = f''(x) = \lim_{t\to x}\frac{f'(t)-f'(x)}{t-x}$$

مشتقات مراتب بالاتر به صورت استقرایی و با رابطه‌ی $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ و $n>1, n\in\mathbb{N}$ ، تعریف می‌شوند یعنی با تکرار روند عمل مشتق‌گیری، دنباله‌ی $f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ را داریم که هر جمله‌ی آن مشتق تابع قبلی است. $f^{(n)}$ را مشتق nاُم یا مرتبه‌ی n تابع f گویند. بنا به قرارداد $f = f^{(0)}$ و توجه داریم که $f^{(1)} = f'$ و $f^{(2)} = f''$. اگر $f^{(n)}(x)$ برای هر $x\in(a,b)$ و هر $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد گوییم f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است یا به اصطلاح هموار است.

مثال۴: فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم باشد و $f(0) = f'(0) = 0$، $f''(1) = 2$ اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f''(x)$ گویا باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) ۴ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به راحتی دیده می‌شود که تابع $f(x) = x^2$ در شرایط مسئله صدق کرده و $f(2) = 4$. به طور کلی چون به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f''(x)$ گویا است، لذا $f''(x)$ باید تابعی ثابت باشد.

مثال۵: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داده شده به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f(f(x)) = -x$. در مورد تابع f کدام گزینه درست است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) f همه جا مشتق‌پذیر است. ۲) f فقط در صفر مشتق‌پذیر است.
۳) f بر $\mathbb{R}$ پیوسته نیست. ۴) f فقط در نقطه صفر پیوسته است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به برهان خلف فرض کنیم تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. طبق ضابطه داریم:

$$f(f(0)) = 0$$

$$\begin{matrix} f(f(a)) = -a \\ f(f(-a)) = a \end{matrix} \Rightarrow -a\times a < 0 \quad (a\in\mathbb{R}-\{0\})$$

پس طبق قضیه مقدار میانی داریم:

$$\exists b\in(f(a)\ ,\ f(-a))\ \text{s.t}\ f(b) = 0$$

f پیوسته است، پس:

$$\exists c: f(c) = b \Rightarrow f(f(c)) = 0$$

از طرفی طبق ضابطه تابع، $f(f(c)) = -c = 0$ پس $c = 0$، چون a دلخواه بود، لذا:

$$\forall x\in\mathbb{R}: f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

در نتیجه ضابطه f به‌صورت $f(x) = -x$ است، اما داریم:

$$\begin{cases} f(f(x)) = -x \\ f(f(x)) = f(-x) = x \end{cases} \quad ※$$

پس f نمی‌تواند پیوسته باشد.

مثال۶: کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ۸۷)

۱) تابعی وجود دارد که فقط در دو نقطه پیوسته و در همان دو نقطه هم مشتق‌پذیر است.
۲) تابعی وجود دارد که فقط در یک نقطه پیوسته و در همان نقطه هم مشتق‌پذیر است.
۳) اگر به ازای $x,y\in\mathbb{R}$ ، $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ آنگاه f مشتق‌پذیر است.
۴) تابع غیرصفر وجود دارد که $f(0) = 0$ و همهٔ مشتقات آن در $x = 0$ مساوی صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x) = |x|$ در این صورت

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)| = \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$$

ولی تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

اثبات سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): قرار می‌دهیم $f:[0,4\pi]\to\mathbb{R}$ و $f(x) = \begin{cases} \cos x & ;\ x\in[0,4\pi]\cap\mathbb{Q} \\ -1 & ;\ x\in[0,4\pi]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$ در این صورت f تنها در نقاط $x_0 = \pi$ و $x_0 = 3\pi$ پیوسته است و در این دو نقطه مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر صفر می‌باشد (زیرا $(\cos x)'|_{x=3\pi} = (\cos x)'|_{x=\pi} = 0$ و $(-1)'|_{x=3\pi} = (-1)'|_{x=\pi} = 0$).

گزینه (۲): قرار می‌دهیم $f(x)=\begin{cases} x & ; x\in\mathbb{Q} \\ x^2+x & ; x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در این صورت تابع f تنها در نقطه $x=0$ پیوسته است (زیرا $x=0 \Leftrightarrow x=x^2+x$) و در این نقطه مشتق‌پذیر نیز است و مشتق آن برابر ۱ می‌باشد زیرا: $(x)'|_{x=0}=(x^2+x)'|_{x=0}=1$

گزینه (۴): قرار می‌دهیم $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases}$ در این صورت $f(0)=0$ و $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}=0$ و اگر $f^{(k)}(0)=0$ باشد آنگاه:

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{P_{k+1}(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}Q_{k+1}(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}}=0$$

که در آن $P_{k+1}(\frac{1}{x})$ و $Q_{k+1}(\frac{1}{x})$ دو چندجمله‌ای برحسب $\frac{1}{x}$ می‌باشند، پس به استقراء ثابت کردیم که $f^{(n)}(0)=0$ به ازای هر $n\in\mathbb{N}$.

مثال ۷: (دستور لایب نیتز): فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و مشتقات مرتبه‌ی n توابع f و g موجود باشد. نشان دهید: $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$

برهان: با استقرا بر n، فرمول را ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ درست است چون $(fg)'=f'g+fg'$. فرض کنید برای n فرمول درست باشد نشان می‌دهیم برای $n+1$ نیز درست است:

$$(fg)^{(n+1)}=((fg)^{(n)})'=(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)})'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^{(k)}g^{(n-k)}]' \quad \text{(بنابر خاصیت خطی مشتق)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}]f^{(k)}g^{(n+1-k)}=f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

تذکر ۳: الف) اگر $n\in\mathbb{N}$ و تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ، n مرتبه مشتق‌پذیر باشد آنگاه از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که $f^{(n-1)}$ روی (a,b) پیوسته است.
ب) یک تابع هموار، پیوسته است، مشتقات تمام مراتب یک تابع هموار، هموار است و در نتیجه این مشتقات پیوسته هستند.

مثال ۸: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f''(x)>0$. اگر $f(1)+f'(1)>0$، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۶)

۱) f تابعی زوج است. ۲) f تابعی فرد است. ۳) $f(2)<0$ ۴) $f(2)>0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $f(x)=x^2+x$ تمامی شرایط را دارد، زیرا: $f(1)+f'(1)=4>0$ و $f''(x)=2>0$
۱ تا f نه تابعی فرد و نه تابعی زوج است و شرط $f(2)<0$ نیز برقرار نمی‌باشد. بنابراین تنها گزینه ممکن، گزینه (۴) است.

کلاس‌های هموار: اگر تابع f مشتق‌پذیر و تابع مشتق آن، f' پیوسته باشد آنگاه گوییم f به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و گوییم f از کلاس C^1 است. اگر تابع f، n مرتبه مشتق‌پذیر بوده و تابع $f^{(n)}$ پیوسته باشد آنگاه گوییم f به طور پیوسته n مرتبه مشتق‌پذیر است و گوییم f از کلاس C^n است. اگر f هموار باشد، از تذکر فوق (قسمت ب)، نتیجه می‌شود که برای هر $n\in\mathbb{N}$، f از کلاس C^n است بنابراین می‌گوییم f از کلاس C^∞ است. برای نمادگذاری بهتر، گوییم یک تابع پیوسته از کلاس C^0 است. اگر چنین فکر کنیم که هر C^n، نمایانگر مجموعه‌ای از توابع باشد آنگاه دنباله‌ی نزولی $C^0\supseteq C^1\supseteq C^2\supseteq\ldots\supseteq C^\infty=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}C^n$ از مجموعه‌ها را داریم.

هر شمول $C^{n} \supseteq C^{n+1}$، یک شمول سره است یعنی $C^{n} \supsetneq C^{n+1}$ بالفرض برای $n=1$ تابع پیوسته‌ای هست که از کلاس C^{1} است اما از کلاس C^{2} نیست و همین‌طور. برای مثال:

$f(x)=|x|$ از کلاس C^{0} است اما از کلاس C^{1} نیست.

$f(x)=x|x|$ از کلاس C^{1} است اما از کلاس C^{2} نیست. (*)

$f(x)=|x|^{3}$ از کلاس C^{2} است اما از کلاس C^{3} نیست.

$\vdots$

$f(x)=x^{n-1}|x|$ از کلاس C^{n-1} است اما از کلاس C^{n} نیست.

برای نمونه درستی * را نشان می‌دهیم. داریم $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x^{2} & x<0 \end{cases}$. برای مقادیر $x>0$ مشتق تابع، $2x$ است، برای مقادیر $x<0$ مشتق تابع، $-2x$ است. در ضمن در نقطه‌ی $x=0$ داریم:

$$f'_{+}(0)=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{t^{2}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+}} t=0 \quad ; \quad f'_{-}(0)=\lim_{t\to 0^{-}}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{-}}\frac{-t^{2}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0^{-}} -t=0$$

پس $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)$ و بنابراین $f'(0)=0$ در نتیجه $f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$ و پیوستگی f' محرز می‌شود بنابراین f از کلاس C^{1} است. دوباره با محاسبه‌ی f'' برای $x>0$ و $x<0$ معلوم می‌شود که $f''(x)$ به ترتیب برای این بازه‌ها عبارت است از ۲و ۲-. اما $f''(0)$ موجود نمی‌باشد و حتی $f''_{+}(0)\neq f''_{-}(0)$ ، لذا f'' نمی‌تواند پیوسته باشد بنابراین f از کلاس C^{2} نیست.

تذکر۴: به جز مفهوم هموار بودن، یک مفهوم دیگر تحت عنوان تحلیلی بودن وجود دارد که چنین تعریف می‌شود: تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ برای هر $x\in(a,b)$ تحلیلی است هرگاه بتوان آن را حول x به صورت یک سری توانی نمایش داد یعنی $\delta>0$ موجود باشد به طوری که برای هر $|h|<\delta$ سری توانی $\sum a_{n}h^{n}$ همگرا بوده و $f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n}h^{n}$. سری‌های توانی و همگرایی آنها در فصل ۴ مطرح می‌شوند و آنجا خواهیم دید که $a_{n}=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ و این یکتایی نمایش f برحسب سری توانی مذکور را بیان می‌کند. به هرحال از نماد C^{ω} برای نمایش توابع تحلیلی استفاده می‌کنیم با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال و استقرا می‌توان نشان داد که برای تابع $g(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^{2}}} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ داریم $\forall n\in\mathbb{N}\ g^{(n)}(x)=0$. بنابراین حول $x=0$ نمی‌توان مقادیر $g(x)$ را برحسب یک سری توانی (درواقع سری تیلور آن) نمایش داد چون سری نمایش صفر می‌شود، درحالی‌که $g(x)$ ناصفر است (یعنی حول نقطه صفر، سری تیلور g به خود g همگرا نمی‌شود). این تابع هموار است اما تحلیلی نیست و چون هر تابع تحلیلی، هموار است پس شمول $C^{\infty}\supseteq C^{\omega}$ نیز سره است یعنی $C^{\infty}\supsetneq C^{\omega}$ لذا برای توابع حقیقی، تحلیلی بودن و هموار بودن دو موضوع متفاوت‌اند درحالی‌که در آنالیز مختلط این دو مفهوم برهم منطبق‌اند.

مثال۹: فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت:

۱) مشتق $|f|$ در هر نقطه‌ی $x\neq 0$ موجود است.

۲) اگر $f(x)=0$ آنگاه $|f|$ در x مشتق‌پذیر نیست.

۳) $|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است همچنین اگر $f'(x)=0$ آنگاه $|f|'(x)=0$.

۴) $|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است همچنین اگر $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ آنگاه $|f|'(x)=0$.

پاسخ: گزینه «۴» قرار دهید $g(x)=|x|$ بنابراین $h(x)=|f|(x)=gof(x)$. چون تابع g در جاهایی که $x\neq 0$ مشتق‌پذیر است. از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که تابع $h=|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است و نیز اگر $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ آنگاه

$$(1)\quad h'_{+}(x)=\lim_{t\to x^{+}}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\frac{|f(t)|-|f(x)|}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\frac{|f(t)|}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\left|\frac{f(t)}{t-x}\right|$$

مدرسان شریف

فصل ششم

«انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس»

درسنامه (۱): انتگرال و خواص آن

مقدمه

از حسابان به یاد دارید که مسئله‌ی پیدا کردن مساحت زیر منحنی و مقدار جابه‌جایی یک ذره متحرک به عمل انتگرال‌گیری ختم می‌شود. منشأ مسئله‌ی مشتق هم که ذره‌ی متحرک بود در فصل قبل مورد بحث قرار گرفت. گرچه انتگرال و مشتق به دو طریق مختلف عرضه شده و اساساً از هم مستقل‌اند اما چنانچه از ریاضی عمومی به یاد بیاورید در قضیه‌ی بنیادین این دو عمل با هم ظاهر شده و معکوس هم‌اند. در آن‌جا که با مفهوم انتگرال ریمان کار می‌کردید دیدید که اگر تابع f برای $x \geq a$ ،x، پیوسته باشد و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ آن‌گاه F مشتق‌پذیر بوده و $F'(x) = f(x)$ یعنی عمل‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری به نوعی معکوس هم‌اند. در این فصل انتگرال ریمان را که به ترتیب موجود در خط حقیقی وابسته است (ترتیب موجود در دامنه توابع مهم‌تر است) تعریف می‌کنیم، ما این کار را برای حالت کلی‌تر انتگرال ریمان که انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس نام دارد انجام می‌دهیم. این انتگرال شامل دو تابع f و α بوده و با نماد $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ یا $\int_a^b fd\alpha$ نموده می‌شود که با اتخاذ تابع خاص همانی به جای α یعنی $\alpha(x) = x$ به همان انتگرال ریمان معمولی در حسابان می‌رسیم. نشان می‌دهیم که اگر α مشتق‌پذیر بوده و α' انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$، یعنی انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس به انتگرال ریمان معمولی تبدیل می‌شود. اگر α مشتق‌پذیر یا پیوسته نباشد، ممکن است که انتگرال ریمان ـ اشتیل یس $\int fd\alpha$ موجود باشد و اتفاقاً اهمیت این نوع انتگرال در همین است یعنی حالتی که α ناپیوسته است. خواهیم دید که چگونه با انتخاب αهای مناسب می‌توان Σ و $\int$ را به هم تبدیل کنیم. اما چرا انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس مهم است؟

اشتیل‌یس (۹۴-۱۸۵۶) با کار روی همگرایی کسرهای مسلسل و جواب آن به مسئله‌ی فیزیکی توزیع جرم و گشتاور رسید (که حتماً خواننده در درس ریاضیات عمومی و فیزیک با محاسبه‌ی این مسائل چه به صورت انتگرال و چه به صورت یک مجموع برخورد کرده است) و انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس را ابداع کرد. کاربرد دیگر این انتگرال در نظریه‌ی احتمال است اما مهم‌ترین کاربرد آن در قضیه‌ی نمایش ریس است، ۱۵ سال بعد از مرگ اشتیل‌یس، فردریک ریس ریاضیدان مجارستانی توانست با استفاده از این انتگرال تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی فضای توابع پیوسته‌ی $C([a,b])$ را مشخص کند. این قضیه می‌گوید: نگاشت $I : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ تابعک خطی پیوسته است اگر و تنها اگر تابع صعودی α روی $[a,b]$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in C([a,b])$، $I(f) = \int_a^b fd\alpha$. یعنی هریک چنین تابعک خطی پیوسته‌ای، یک انتگرال است (مفهوم تابعک خطی و پیوسته بودن آن از مفاهیم شاخه آنالیز تابعی بوده و در آنجا مورد مطالعه قرار می‌گیرند).

در ادامه، توابعی حقیقی را که بر یک بازه‌ی فشرده مانند $[a,b]$ تعریف شده‌اند در نظر می‌گیریم، در ضمن تابعی را که از آن انتگرال می‌گیریم کراندار فرض می‌کنیم (این محدودیت‌ها به راستی یکی از معایب انتگرال ریمان و ریمان ـ استیل‌یس‌اند.)

تعریف و وجود انتگرال

❖ **تعریف۱:** فرض کنید $[a,b]$ بازه‌ی فشرده‌ای از اعداد حقیقی باشد، منظور از یک افراز P از بازه‌ی $[a,b]$، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $x_0, x_1, \dots, x_n$ است به طوری که $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$ دقت شود که مجموعه مرتب $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ **افراز** نام دارد.

حالا فرض کنید f یک تابع حقیقی کراندار روی $[a,b]$ باشد، برای افراز P از $[a,b]$ قرار دهید:

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} \ , \ m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} \quad 1 \le i \le n$$

توجه شود که به خاطر فرض کرانداری f؛ اعداد m_i و M_i موجود و حقیقی‌اند. هم‌چنین فرض کنید α یک تابع صعودی بر $[a,b]$ باشد (لذا کراندار هم خواهد شد چون $\alpha(a) \le \alpha(x) \le \alpha(b)$ برای هر x، $a \le x \le b$)، دوباره برای افراز P مذکور قرار دهید: $\Delta_i\alpha = \Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ $1 \le i \le n$

واضح است که $\Delta\alpha_i \ge 0$ اکنون برای تابع حقیقی و کراندار f قرار دهید:

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \ , \ L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

$L(p,f,\alpha)$ را مجموع پایینی و $U(p,f,\alpha)$ را مجموع بالایی می‌گویند. حالا تعریف کنید:

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{U(P,f,\alpha) : [a,b] \text{ افراز } P\} \qquad \underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{L(P,f,\alpha) : [a,b] \text{ افراز } P\}$$

به علت کرانداری f، همواره $\underline{\int_a^b} f d\alpha$, $\overline{\int_a^b} f d\alpha$ موجودند. $\underline{\int_a^b} f d\alpha$ را انتگرال پایینی و $\overline{\int_a^b} f d\alpha$ را انتگرال بالایی f نسبت به α می‌گوییم و چنان‌چه این دو مساوی باشند مقدار مشترک آن‌ها را با $\int_a^b f d\alpha$ یا $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ نشان داده و آن را انتگرال ریمان ـ اشتیل یس f نسبت به α روی $[a,b]$ می‌نامیم و به طور نمادین می‌نویسیم $f \in R(\alpha)$ روی $[a,b]$، یعنی f روی $[a,b]$ نسبت به α انتگرال‌پذیر ریمان ـ اشتیل یس است. تابع f را انتگرالده و تابع α را انتگرال‌گیر می نامند.

مثال۱: فرض کنید $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد. $A \subseteq [a,b]$ در $[a,b]$ چگال است و $c > 0$. اگر به ازای هر x از A، داشته باشیم $f(x) \ge c$، کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\int_a^b f(x)dx = c$　　۲) $\int_a^b f(x)dx > c$　　۳) $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$　　۴) $\int_a^b f(x)dx \ge c(b-a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید $U(f,P)$ یک مجموع بالای f متناظر با افراز $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ باشد، در این صورت:

$$M_i(f) = \sup\{f(t) : x_{i-1} \le t \le x_i\} \ge c$$

(زیرا A در $[a,b]$ چگال است و در نتیجه $t_i \in A$ موجود است به گونه‌ای که $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ پس $f(t_i) \ge c$ به ازای حداقل یک $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$).

$$\Rightarrow U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f) \Delta x_i \ge c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a) \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,P) : P \in P[a,b]\} \ge c(b-a)$$

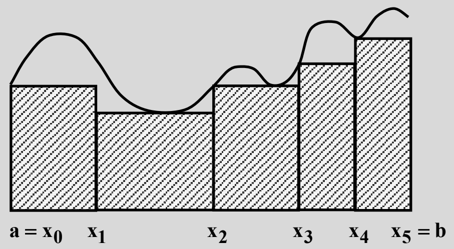
و از آنجا که بنابر فرض، $\int_a^b f(x)dx$ موجود است داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \ge c(b-a)$$

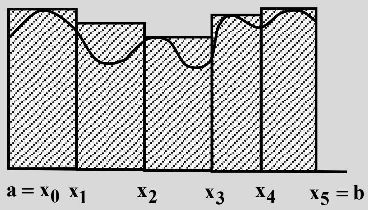
تذکر۱:

الف) تعریف بالا از انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس منسوب به داربو (Darboux) ریاضی‌دان فرانسوی است. تعریف دیگری برای انتگرل ریمان ـ اشتیل یس موجود است که در ادامه خواهد آمد. روش داربو دارای این مزیت است که همواره $\underline{\int_a^b} f d\alpha$, $\overline{\int_a^b} f d\alpha$ موجودند و دارای این عیب است که تقارن موجود در فرمول انتگرال جزء به جزء را برای انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس از بین می‌برد و برای برقراری این تقارن باید شرط‌های محدود کننده‌تری روی α بگذاریم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که چرا باید از $U(P,f,\alpha)$ها اینفیمم گرفت در حالی که فرمول خود $U(P,f,\alpha)$ شامل یک سوپریمم است و چرا باید از $L(P,f,\alpha)$ها سوپریمم گرفت در حالی که فرمول معرف $L(P,f,\alpha)$ شامل یک اینفیمم است.

➢ **توجه ۱:** دقت شود که انگار سوپریممِ سوپریمم‌ها و اینفیممِ اینفیمم‌ها مجاز نیست. شکل برای $\alpha(x)=x$ یعنی حالت ریمانی انتگرال رسم شده است.



$L(P,f,\alpha)=$ مساحت هاشور خورده



$U(P,f,\alpha)=$ مساحت هاشور خورده

از روی شکل هویداست که اگر بخواهیم به مساحت واقعی نزدیک‌تر شویم باید از $U(P,f,\alpha)$ها، اینفیمم و از $L(P,f,\alpha)$ها، سوپریمم بگیریم.

ب) حالت $\alpha(x)=x$ همان انتگرال ریمان معمولی را نتیجه می‌دهد در این حالت به جای $\int_a^b f d\alpha$ می‌نویسیم $\int_a^b f$ و چنانچه این مقدار موجود باشد می‌نویسیم $f\in R$ بر $[a,b]$. ضمناً در این حالت به ترتیب به جای $L(P,f,\alpha)$ و $U(P,f,\alpha)$ می‌نویسند: $L(P,f)$ و $U(P,f)$. برای شهود بیشتر فرض کنید در این حالت افراز P مثل قبل بوده، $I_j=[x_{j-1},x_j]$ ، χ_{I_j} تابع مشخصه‌ی بازه‌ی I_j و m_j و M_j مثل قبل باشند توابع پله‌ای زیر را تعریف کنید:

$$\phi_P=\sum_{j=1}^{n} m_j\chi_{I_j}\ ,\ \Phi_P=\sum_{j=1}^{n} M_j\chi_{I_j}$$

در این صورت $\phi_P\le f\le\Phi_P$ ، $U(P,\Phi_P)=\int\Phi_P=\sum_{j=1}^{n}M_j\lambda(I_j)$ و $L(P,\phi_P)=\int\phi_P=\sum_{j=1}^{n}m_j\lambda(I_j)$ که در آن $\lambda(I_j)=x_j-x_{j-1}$.

اکنون چنانچه مقادیر $\lim_P\int\Phi_P=\inf\{\sum_{j=1}^{n}M_j\lambda(I_j):P$ روی تمام افرازهای $\}$ و $\lim_P\int\phi_P=\sup\{\sum_{j=1}^{n}m_j\lambda(I_j):P$ روی تمام افرازهای $\}$ موجود و برابر باشند آنگاه $\int f=\lim_P\int\phi_P=\lim_P\int\Phi_P$. توجه دارید که توابع ϕ_P,Φ_P توابعی پله‌ای هستند که f را به ترتیب از بالا و پایین تقریب می‌زنند و حد مذکور روی تمام افرازها گرفته می‌شود. دقت کنید این توابع تقریب‌زننده روی بازه‌های باز همبند، ثابت و پیوسته‌اند و این یکی از معایب انتگرال ریمان است و باعث می‌شود که نقاط پیوستگی تابع f طوری باشند که f شبیه یک تابع پیوسته عمل کند! در حالی که از اول در تعریف انتگرال هیچ اسمی از پیوستگی f برده نشده است [محک لبگ ـ قضیه‌ی ۶ ـ را نگاه کنید] دقت کنید که مطالب فوق را می‌توان چنین هم بیان کرد:

تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، توابع پله‌ای Φ و ϕ روی $[a,b]$ چنان موجود باشند که برای هر $x\in[a,b]$ $\phi(x)\le f(x)\le\Phi(x)$ و نیز $\int_a^b(\Phi(x)-\phi(x))dx<\varepsilon$. حالا اگر $\varepsilon\to 0$ آنگاه انتگرال $\int_a^b(\Phi-\phi)$ به صفر میل کرده و لذا $\int_a^b\Phi=\int_a^b\phi$، این مقدار مشترک را انتگرال f روی $[a,b]$ می‌نامیم.

پ) با توجه به تعریف آشکار است که مقدار $\int_a^b fd\alpha$ فقط به f، α، a و b وابسته است، لذا برای نوشتن $\int_a^b fd\alpha$ به صورت $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ مهم نیست که از چه متغیر مستقلی استفاده می‌کنیم یعنی نوشتن $\int_a^b f(y)d\alpha(y)$ هم درست است پس: $\int_a^b fd\alpha=\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^b f(y)d\alpha(y)=\cdots$

ت) این که می‌گوییم انتگرال ریمان (یا ریمان ـ اشتیل یس) به ترتیب موجود در $\mathbb{R}$ وابسته است به دو دلیل می‌باشد: یکی مربوط به دامنه است که در آن افراز انجام می‌دهیم و نقاط افرازی به صورت $a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=b$ مرتب شده‌اند و دیگر اینکه به خاطر وجود $\sup$ و $\inf$ در تعاریف انتگرال‌های پایین و بالاست چون $\sup$ و $\inf$ در مجموعه‌های مرتب با معنی‌اند (در نظریه توابع مختلط انتگرال را به صورت مساحت تعبیر نمی‌کنند بلکه در آن جا انتگرال را روی مسیرها در نظر می‌گیرند هر چند که اغلب این انتگرال‌های روی مسیر را می‌توان با استفاده از انتگرال ریمان محاسبه کرد).

ث) یک تعریف دیگر از انتگرال ریمان ـ اشتیل یس موجود است که به جای صعودی بودن α، به کراندار بودن α بسنده می‌کند یعنی f و α مثل هم هستند لذا می‌توان نقش آن دو را عوض کرد و در نتیجه در این تعریف یک نوع تقارن به چشم می‌خورد در حالی که تعریف اول این تقارن را ندارد. قبل از ارائه‌ی آن مفهوم تظریف (refinement) یک افراز را شرح می‌دهیم: هرگاه P و Q دو افراز $[a,b]$ بوده و $Q\supseteq P$ باشد آن‌گاه اصطلاحاً گویند Q یک تظریف P است یا Q از P ظریف‌تر (finer) است. به طور شهودی اگر شما با نقاط افرازی موجود در Q و P ، زیربازه‌های مربوطه از $[a,b]$ را بسازید می‌بینید که زیربازه‌های حاصله از نقاط Q، ریزتر از زیربازه‌های مربوط به نقاط P هستند و در واقع واژه‌ی ظریف‌تر (finer) اشاره به این ریزتر بودن زیربازه‌ها دارد توجه دارید که ((fine)) معنی «ریز» هم می‌دهد. مثلاً برای دو افراز P_2 و P_1، افراز $P^*=P_1\cup P_2$ از هر دوی آن‌ها ظریف‌تر است؛ P^* را تظریف مشترک P_2 و P_1 می‌نامیم.

فرض کنید $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ یک افراز $[a,b]$ بوده و توابع f و α هر دو روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ حقیقی و کراندار باشند آن‌گاه منظور از مجموع ریمان ـ اشتیل‌یس f نسبت به α نظیر به افراز P، عدد حقیقی $S(P,f,\alpha)$ با ضابطه‌ی $S(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\alpha_i$ است که در آن ξ_i عدد دلخواهی در زیربازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ بوده و $\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$. اکنون گوییم تابع f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است هرگاه عدد حقیقی مانند I وجود داشته باشد که برای هر $\varepsilon>0$، یک افراز از $[a,b]$ مانند P_ε موجود باشد به قسمی که برای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε ($P\supseteq P_\varepsilon$) و هر مجموع ریمان ـ اشتیل یس $S(P,f,\alpha)$ نظیر به P داشته باشیم $|S(P,f,\alpha)-I|<\varepsilon$.

در این صورت عدد I یکتاست و با نماد $I=\int_a^b fd\alpha=\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس f نسبت به α روی $[a,b]$ می‌نامیم. یکی مزیت‌های این روش این است که روی $[a,b]$: $\alpha\in R(f)\Leftrightarrow f\in R(\alpha)$. در این حالت فرمول انتگرال جزء به جزء برقرار است:

$$\int_a^b fd\alpha+\int_a^b \alpha df=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)$$

درحالی‌که با تعریف داربو از انتگرال، رابطه‌ی جزء به جزء با شرط مشتق‌پذیر بودن f,α و $f',\alpha'\in R$ بر $[a,b]$ برقرار است [ر.ک قضیه ۲۱]. در ادامه هرجا که از این تعریف استفاده شود از آن به عنوان «تعریف دوم» نام می‌بریم. خواننده‌ای که با مفهوم تور (که تعمیم مفهوم دنباله است) در توپولوژی آشنایی دارد می‌داند که تعریف ع یی انتگرال ریمان اشتیل‌یس را می‌توان به همراه دیگر مفاهیم حد، تحت عنوان واحدی فرمول بندی کرد و لذا به شباهت بین این حدود پی بُرد. در ضمن اگر α تابع همانی باشد $S(P,f,\alpha)$ را با $S(P,f)$ نمایش می‌دهیم. به هر حال قرارداد ما بر این است که از تعریف داربو استفاده کنیم و قضایای بعد بر پایه‌ی تعریف داربو است.

قضیه۱: هرگاه P^* یک تظریف P باشد آن‌گاه: $L(P,f,\alpha)\le L(P^*,f,\alpha)$ و $U(P^*,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)$

نتیجه۱: $\underline{\int_a^b} fd\alpha\le\overline{\int_a^b} fd\alpha$

قضیه۲: (محک انتگرال‌پذیری ریمان): $f\in R(\alpha)$ اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$ افرازی مانند P موجود باشد که: $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$

نکته۱:

الف) مشابه قضیه‌ی بالا را می‌توان برای تعریف دوم بیان کرد، در این صورت قضیه‌ی حاصله حاوی شرطی است که در واقع شبیه شرط کوشی برای دنباله‌هاست (ر.ک به کتاب بارتل)، در ضمن شرط موجود در قضیه‌ی بالا را شرط ریمان می‌نامند. به نمودار مندرج در توجه ۱ دقت کرده و ببینید که تفاضل یک مستطیل بالایی با یک مستطیل پایینی مجدداً یک مستطیل است و چنین مستطیل‌هایی نمودار f را دربردارند نه سطح زیر نمودار f را. حالا شرط ریمان می‌گوید که f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ تعدادی متناهی مستطیل موجود باشد که مجموع مساحت‌های آن‌ها کمتر از ε بوده و نمودار f را دربرداشته باشد.

ب) در قضیه‌ی فوق، چنانچه شرط ریمان به ازای یک ε و Pای برقرار گردید آن‌گاه برای هر افراز ظریف‌تر از P مثل P^* نیز برقرار است به شرطی که ε را تغییر ندهیم یعنی ε ثابت باشد.

پ) هرگاه شرط ریمان برای $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ برقرار باشد و t_i,s_i نقاط دلخواهی در $[x_{i-1},x_i]$ باشند آن گاه $\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\Delta\alpha_i<\varepsilon$.

ت) هرگاه $f\in R(\alpha)$ و مفروضات قسمت قبل برقرار باشد آن گاه $|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i-\int_a^b fd\alpha|<\varepsilon$، این رابطه می‌گوید چنانچه از قبل بدانیم $f\in R(\alpha)$ آن‌گاه برای محاسبه‌ی $\int_a^b fd\alpha$ به جای استفاده از مجموع‌های بالایی و پایینی و کار طاقت‌فرسای $\sup$ و $\inf$ گیری، می‌توان مجموع $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$ را به ازای نقاط دلخواه t_i تشکیل داده و از آن‌ها حد گرفت. از این روش در محاسبه‌ی حد Σهای عجیب و غریب و تبدیل آن‌ها به انتگرال در مسائل تستی زیاد استفاده می‌شود (برای این کار شما باید قادر باشید که f را به درستی شناسایی کنید. در این مسائل معمولاً $\alpha(x)=x$ و افراز P منظم است یعنی $\Delta\alpha_i=\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$). لذا اگر $f\in R(\alpha)$ آن‌گاه $\int_a^b fd\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$.

توجه کنید که عکس این حکم لزوماً درست نیست، یعنی از وجود $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $f\in R(\alpha)$. همانطور که اشاره شد از این مطلب برای محاسبه حدهای مشتمل Σ استفاده می‌شود که اصطلاحاً به آن تبدیل سری به انتگرال می‌گوییم. گیریم $f\in R[a,b]$ لذا:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$$

بالاخص برای $b=1$ و $a=0$ داریم: $\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$ به عنوان تمرینی ساده حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ را بیابید.

مثال۲: فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{گویا } x \\ 0 & \text{اصم } x \end{cases}$ **و** $a=\int_0^1 f(x)dx$ **و** $b=\int_{-0}^{1} f(x)dx$ **به‌ترتیب انتگرال ریمان بالایی و پایینی f باشند. کدام گزینه درست است؟** (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۷)

۱) $a=b=0$ ۲) $b=0\ ,\ a=\frac{1}{4}$ ۳) $a=b=\frac{1}{4}$ ۴) $b=\frac{1}{5}, a=\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به ازای هر افراز $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ داریم $m_i(f)=0$ و $M_i(f)=x_i^3$ $(i=1,...,n)$ بنابراین داریم: $b=\int_0^1 f(x)dx=0$

و خواهیم داشت: $a=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$

◆ ◆ ◆ ◆

قضیه۳: هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$.

قضیه۴: هرگاه f روی $[a,b]$ یکنوا بوده و α بر $[a,b]$ پیوسته باشد آن‌گاه $f\in R(\alpha)$.

تذکر۲: در قضیه‌ی فوق ممکن است که f بی‌نهایت ناپیوستگی داشته باشد. البته می‌دانیم که به علت یکنوایی f تعداد این ناپیوستگی‌ها حداکثر شمارا بوده و همه‌ی این‌ها از نوع اول هستند.

قضیه۵: هرگاه f تعدادی متناهی نقطه‌ی ناپیوستگی روی $[a,b]$ داشته، ولی α در هر کدام از این نقاط پیوسته باشد در این صورت، $f\in R(\alpha)$.

نکته۲:

الف) شرط فوق یک شرط کافی برای انتگرال‌پذیری است اکنون به بیان یک شرط لازم می‌پردازیم. به کمک محک ریمان و تعریف ناپیوستگی می‌توان نشان داد که هرگاه f و α در یک نقطه‌ی درونی $[a,b]$ ناپیوستگی مشترک داشته باشد آن‌گاه $f\not\in R(\alpha)$. این مطلب با شرط ضعیف‌تر «ناپیوستگی راست یا چپ» برقرار است: اگر f و α هر دو از راست (یا چپ) در نقطه‌ی درونی c ناپیوسته باشند آنگاه $f\not\in R(\alpha)$. لذا اگر ناپیوستگی‌های f و α همدیگر را نپوشانند انتگرال‌پذیری از بین می‌رود. در نقاط انتهایی دامنه باید اندکی محتاط بود و وقتی می‌گوییم «سمت راست یا چپ c»، باید این «سمت» داخل $[a,b]$ باشد.

ب) این‌که انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس به شدت به ناپیوستگی‌های f و α حساس است، یکی از معایب این نوع انتگرال است. شما در تعاریف دیدید که به هنگام تعریف $\int f d\alpha$ بحثی از پیوستگی یا ناپیوستگی f نشد. ما برای انتگرال ریمان، $\alpha(x)=x$، محکی به دست می‌دهیم که انتگرال‌پذیری و پیوستگی را به هم مربوط می‌کند. این محک بیان می‌کند دقیقاً کدام توابع حقیقی کراندار روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان هستند.

مثال۳: تابع $\mathbb{R}$ $\to$ $f:[0,1]$ **با ضابطه** $f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N} \\ 1 & , \quad \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$ **را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) $\overline{\int_0^1} f(x)dx=0$ ۲) $\underline{\int_0^1} f(x)dx=0$ ۳) $\int_0^1 f(x)dx=1$ ۴) $\int_0^1 f(x)dx$ موجود نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» f دارای تعداد نامتناهی نقاط ناپیوستگی است، اما نسبت به $\alpha(x)=x$ انتگرال‌پذیر ریمان است، زیرا با فرض $\varepsilon>0$، عدد $u\in(0,1)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $u<\frac{\varepsilon}{2}$. تابع f بر بازه $[u,1]$ فقط تعدادی متناهی ناپیوستگی دارد، افرازی مانند P_1 برای $[u\ ,\ 1]$ هست به‌طوری‌که:

$$U(P_1,f)-L(P_1,f)<\frac{\varepsilon}{2}$$

اگر قرار دهیم $P=P_1\cup\{0\}$، آنگاه P افرازی برای $[0,1]$ است و $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$، یعنی f بر $[0,1]$ در شرط ریمان برای انتگرال‌پذیری صدق می‌کند. داریم: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1dx=1$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: فرض کنید تابع $\mathbb{Q}$ $\to$ $f:(0,1)$ **غیرثابت باشد، کدام گزینه درست است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) تابع f پیوسته نیست. ۲) تابع f می‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۳) مجموعه نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارا است. ۴) تابع f انتگرال‌پذیر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به برهان خلف فرض کنیم f پیوسته است. اگر f یک نگاشت پیوسته از فضای متریک X به فضای متریک Y باشد و E زیرمجموعه همبندی از X باشد، آنگاه $f(E)$ در Y همبند است. با توجه به همبندی $(0,1)$ و پیوستگی f خواهیم داشت $f((0,1))$ در $\mathbb{Q}$ همبند است. اما مجموعه‌های همبند در $\mathbb{Q}$ همگی تک‌عضوی‌اند، بنابراین $f((0,1))=\{P\}$. در نتیجه f باید تابعی ثابت باشد که تناقض است.

مثال۵: تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}\ ;\ x\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{100}\}\\ 2\sqrt{2x}\ ;\ \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟ (علوم کامپیوتر- سراسری ۹۵)

۱) f انتگرال‌پذیر ریمان نیست و $\underline{\int_0^1} f(x)dx=\ln(2)$

۲) f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_0^1 f(x)dx=\sqrt{2}$

۳) f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_0^1 f(x)dx=\ln(2)$

۴) f انتگرال‌پذیر ریمان نیست و $\overline{\int_0^1} f(x)dx=\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع f روی بازه $[0,1]$ کراندار بوده و در نقاط مجموعه $\{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{100}\}$ ناپیوسته است. همچنین x روی بازه $[0,1]$ پیوسته است.

پس f انتگرال‌پذیر ریمان است:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2\sqrt{2x}\,dx=2\sqrt{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\sqrt{2}$$

مثال۶: فرض کنید توابع حقیقی کراندار f و α روی بازه $[a,b]$ مفروض باشند به طوری که α صعودی باشد. در کدام حالت انتگرال ریمان اشتیل یس f نسبت به α همواره موجود <u>نیست</u>؟ (سراسری ۹۱)

۱) α در یک نقطه ناپیوسته باشد.

۲) f در یک نقطه ناپیوسته باشد.

۳) f و α هر دو در یک نقطه از راست ناپیوسته باشند.

۴) f و α هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳ و ۴» احتمالاً طراح بین نقاط درونی و مرزی $[a,b]$ تفاوت قائل شده است که با این وصف مابین دو گزینه (۳) و (۴) گزینه (۴) بهترین انتخاب است. چونکه گزینه‌ی (۳) فقط برای نقاط درونی درست است ابتدا نشان می‌دهیم که اگر c یک نقطه‌ی درونی بازه $[a,b]$ بوده و f و α هر دو از راست در $x=c$ ناپیوسته باشند آنگاه $f\notin R(\alpha)$ بر $[a,b]$. P را یک افراز $[a,b]$ حاوی نقطه‌ی c بگیرید. هرگاه c نقطه‌ی انتهایی چپ زیر بازه‌ی i ام باشد آنگاه:

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta\alpha_k\ge(M_i-m_i)(\alpha(x_i)-\alpha(c))$$

نامساوی فوق بدین خاطر است که جمع‌وندهای $\sum$ همگی نامنفی هستند. اکنون اگر c ناپیوستگی مشترک f و α از راست باشد آنگاه یک $\varepsilon>0$ موجود است که می‌توان نقطه‌ی x_i را طوری انتخاب کرد که $M_i-m_i\ge\varepsilon\ ,\ \alpha(x_i)-\alpha(c)\ge\varepsilon$ و در نتیجه $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\ge\varepsilon^2$ و لذا شرط ریمان نقض می‌شود. برای حالتی که c نقطه ناپیوستگی مشترک چپ است استدلالی مشابه به کار می‌رود. احتمالاً منظور طراح از آوردن دو گزینه‌ی ۳و۴ بخاطر این بوده که اگر c نقطه‌ی انتهایی باشد، آنگاه یکی از دو حالت استدلال فوق درست است بنابراین بهترین انتخاب گزینه ۴ است.

❖ **تعریف۲:** فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$. گوییم A از اندازه‌ی صفر (یا پوچ یا قابل اغماض) است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ خانواده‌ای شمارا از بازه‌های باز مانند $\{(a_k,b_k)\}$ وجود داشته باشند به قسمتی که $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ و $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\varepsilon$ دقت کنید که اندازه A، اینفیمم طول پوشش‌های باز است.

تذکر۳: وقتی A از اندازه‌ی صفر است می‌گویند A یک مجموعه‌ی پوچ است یا $\lambda(A)=0$ که در آن λ اندازه‌ی لبگ روی $\mathbb{R}$ است و به نحوی طول زیرمجموعه‌های خاصی از $\mathbb{R}$ را اندازه می‌گیرد. دقت شود که زیرمجموعه‌های خاصی از $\mathbb{R}$ نه همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$. این زیرمجموعه‌ها طوری هستند که با اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌های مجموعه‌های باز ساخته می‌شوند.

در کُل گردایه‌ی چنین زیرمجموعه‌هایی پیچیده است. این گردایه، مجموعه‌های بورل نامیده می‌شود. برای مثال مجموعه‌های تک‌عضوی، متناهی، شمارا و نیز مجموعه‌ی کانتور C جزء مجموعه‌های بورل بوده و از اندازه‌ی صفر هستند. اجتماع و اشتراک زیرمجموعه‌های پوچ، پوچ است و همچنین هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی پوچ، پوچ است. استفاده از اندازه‌ی λ و مفهوم پوچ بودن باعث ایجاد مفهوم «تقریباً همه جایی» می‌شود. گویند یک خاصیت یا رابطه تقریباً همه جاست هرگاه مجموعه جاهایی که این خاصیت یا رابطه برقرار نباشد، پوچ یا قابل اغماض باشد. یعنی اگر N= مجموعه جاهایی که رابطه غلط است، آنگاه: $\lambda(N)=0$. یعنی جاهای ناخوشایند، قابل اغماض باشد.

مدرسان شریف

فصل هفتم

«دنباله‌ها و سری‌های توابع»

درسنامه: همگرایی و آزمون‌های مربوطه

در این فصل ما با توابعی سروکار خواهیم داشت که از یک مجموعه یا یک فضای متری به توی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ تعریف شده‌اند. برای مثال دنباله‌ای از توابع $f_n : X \to \mathbb{C}$ را در نظر گرفته و مفهوم دو نوع همگرایی را به این دنباله الصاق می‌کنیم، این دو نوع همگرایی عبارتند از همگرایی نقطه به نقطه و همگرایی یکنواخت. هدف این است که چنانچه دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ تحت هریک از این همگرایی‌ها به تابع f همگرا شود آنگاه چه مقدار از خواص f_nها مثل پیوستگی، مشتق‌پذیری و انتگرال‌پذیری به f منتقل می‌شود. خواهید دید که همگرایی یکنواخت این خواص خوب را نگه می‌دارد! از لحاظ تاریخی این مفاهیم توسط ریاضیدانان قرن ۱۹ برای توجیه کارهای فوریه ابداع شد، سرانجام لبگ نشان داد که چنانچه انتگرال را به مفهومی که خود تعریف کرد بکار برند آنگاه همگرایی نقطه‌وار خاصیت انتگرال‌پذیری را حفظ می‌کند! در قسمت‌های بعدی مفهوم هم‌پیوستگی معرفی می‌شود تا از طریق آن بتوان زیرمجموعه‌های فشرده‌ی فضای بی‌نهایت بعدی توابع پیوسته‌ی $C(K)$ را دسته‌بندی کرد که در اینجا خود K یک فضای متریک فشرده است، لذا قضیه‌ی آرزلا ـ آسکولی بیان می‌شود که شبیه قضیه‌ی هاینه بورل برای فضای متناهی‌البعد است و به عنوان نتیجه‌ای از آن قضیه آرزلا بیان می‌شود که همتای بی‌نهایت بعدی قضیه‌ی بولتزانو می‌باشد. از قضیه‌ی آرزلا ـ اسکولی در معادلات دیفرانسیل و آنالیز تابعی به‌شدت استفاده می‌شود. سرانجام قضیه‌ی عمیق استون ـ ویراشتراس را بیان می‌کنیم، این قضیه می‌گوید چنانچه A زیرمجموعه‌ی خاصی از $C(K)$ بوده و در خواص جبری معینی صدق کند آنگاه A از خاصیت توپولوژیکی چگال بودن برخوردار است. خواننده‌ای که می‌خواهد درک عمیق‌تری نسبت به همگرایی نقطه‌وار و همگرایی یکنواخت داشته باشد بهتر است به کتاب توپولوژی مانکرز یا کتاب‌های پیشرفته‌تر مراجعه کند.

بحث درباری مسئله‌ی اصلی

❖ **تعریف۱:** فرض کنیم $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی یا مختلط مقدار باشد که بر مجموعه‌ی E تعریف شده‌اند و برای هر $x \in E$، دنباله‌ی $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ همگراست. در این صورت می‌توانیم تابع f را با ضابطه‌ی

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E) \qquad (۱)$$

روی E تعریف کنیم. در این شرایط می‌گوییم دنباله‌ی (f_n) بر E به f، نقطه به نقطه همگراست و با نماد $f_n \xrightarrow[E]{p.w} f$ و یا اگر E معلوم باشد با $f_n \xrightarrow{p.w} f$ نشان می‌دهیم. توجه دارید که برد در این حالت می‌تواند فضای متریک هم باشد. به همین نحو اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به ازای هر $x \in E$ همگرا باشد و f را به‌صورت مقابل تعریف کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E) \qquad (۲)$$

f را مجموع سری $\sum f_n$ می‌نامیم. توجه دارید که ابتدا مجموع‌های جزئی $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ را تشکیل داده سپس حد می‌گیریم $f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$؛ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ صرفاً یک نماد است و اگر دنباله‌ی $(S_N(x))_{N=1}^{\infty}$ همگرا باشد حد آن را با $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ نشان می‌دهیم اما اگر واگرا باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بی‌معنی است! به هرحال ما از قبل می‌دانیم که دنباله‌ی مجموع‌های جزئی را سری می‌نامند اما نوشتن $(S_N(x))_{N=1}^{\infty}$ برای نمایش سری کمی دردسرآفرین است، لذا قرارداد می‌کنیم که سری را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ نشان دهیم و چنانچه سری همگرا باشد، همان نماد $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بیانگر حد آن هم خواهد بود.

خلاصه نماد $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هم برای نمایش خود سری و هم برای نمایش حد آن به کار می‌رود، لذا مواظب این استفاده‌ی دوگانه باشید. توجه کنید که در این حالت برد نمی‌تواند هر متریکی باشد چون می‌خواهیم Σ با معنی باشد، لذا باید بُرد دارای خواص جبری هم باشد. مسئله اصلی این است که آیا خواص مهم توابع f_n؛ مثل پیوستگی، مشتق‌پذیری، انتگرال‌پذیری، تحت اعمال حدی (۱) یا (۲) حفظ می‌شوند یا نه؟ یعنی اگر f_nها پیوسته، مشتق‌پذیر و یا ریمان ـ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه آیا f، که با روابط(۱) یا (۲) داده می‌شود به ترتیب پیوسته، مشتق‌پذیر و یا ریمان ـ انتگرال‌پذیر خواهد بود؟ و اگر چنین است چه ارتباطی بین این خواص f_nها؛ (پیوستگی f_nها، f'_n و $\int f_n$) با خواص متناظر f؛ (پیوستگی f، f' و $\int f$) وجود دارد. پیوستگی f در نقطه‌ی x یعنی:

$$\lim_{t\to x} f(t)=f(x) \qquad (۳)$$

پس اینکه سؤال شود آیا حد دنباله‌ای از توابع پیوسته، پیوسته است (با توجه به (۱) و جایگذاری‌های مناسب) مثل این است که بپرسیم آیا

$$\lim_{t\to x}(\lim_{n\to\infty} f_n(t))=\lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to x} f_n(t)) \qquad (۴)$$

برقرار است، یعنی آیا ترتیب انجام اعمال حدی بالا مجاز است (توجه کنید (۴) از (۳) و با توجه به (۱) و جایگذاری‌های مناسب به دست آمده است). در سمت چپ (۴) ، ابتدا $n\to+\infty$ و سپس $t\to x$؛ اما در سمت راست آن، ابتدا $t\to x$ و بعد $n\to\infty$.

با ذکر چند مثال نشان می‌دهیم که تعویض ترتیب اعمال حدگیری مهم و تأثیرگذار است و پس از آن به دنبال شرایطی می‌گردیم که ترتیب اعمال حدی در آن مهم و تأثیرگذار نباشد! یعنی بتوان ترتیب اعمال حدی را تعویض کرد.

مثال۱: (ترتیب اعمال حدگیری در همگرایی نقطه به نقطه بسیار مهم است، زیرا این همگرایی به نقطه‌ها وابسته است!)

الف) به ازای ...,$m=1,2,3$ و ...,$n=1,2,3$ دنباله‌ی مضاعف $S_{m,n}$ را با ضابطه‌ی $S_{m,n}=\frac{m}{m+n}$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر ابتدا روی m و سپس روی n حد بگیریم با نتیجه این‌که ابتدا روی n و سپس روی m حد بگیریم متفاوت است. ابتدا n را ثابت گرفته و روی m حد می‌گیریم، لذا: $\lim_{m\to\infty} S_{m,n}=1$ ، و بعد روی n حد می‌گیریم پس

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} S_{m,n}=1 \qquad (۱)$$

از طرف دیگر ابتدا m را ثابت گرفته و روی n حد بگیرید، لذا $\lim_{n\to\infty} S_{m,n}=0$ حالا با حدگیری روی m داریم

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_{m,n}=0 \qquad (۲)$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\neq\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} S_{m,n}$.

ب) فرض کنیم ...,$n=0,1,2$; $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ داده شده باشد. اکنون

$$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=x^2\sum\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n=x^2\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=x^2\frac{1+x^2}{x^2}=1+x^2 \qquad (۳)$$

توجه کنید که چون برای هر $x\neq 0$، $1>\frac{1}{1+x^2}>0$ پس در محاسبه‌ی بالا از قضیه‌ای مربوط بر سری‌های هندسی مبنی‌بر اینکه اگر $|r|<1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}$ استفاده شده است.

$$x=0 \Rightarrow f_n(x)=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=0 \qquad (۴)$$

لذا از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ تابع f را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی مقابل تعریف می‌کند:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

می‌بینید که با وجود اینکه هر f_nی پیوسته است اما $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ناپیوسته است.

پ) دنباله‌ی $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ را چنین تعریف کنید: $f_m(x)=\lim_{k\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2k}$

اگر $m!x\in\mathbb{Z}$ آنگاه $\cos m!\pi x=1$ و لذا $f_m(x)=1$. اما اگر $m!x\notin\mathbb{Z}$ پس $-1\lneq\cos m!\pi x\lneq 1$ و در نتیجه $|\cos m!\pi x|\lneq 1$ و لذا هر چقدر k بزرگ‌تر شود $(\cos m!\pi x)^{2k}$ کوچک‌تر شده و بنابراین اگر $k\to\infty$، آنگاه $(\cos m!\pi x)^{2k}\to 0$، در نتیجه اگر $m!x\notin\mathbb{Z}$، $f_m(x)=0$.

بنابراین $f_m(x)=\begin{cases}1 & ، \ m!x\in\mathbb{Z}\\ 0 & ، \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$**. اما $m!x\in\mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$، $(p,q)=1$ و $q\,|\,m!$. لذا** $f_m(x)=\begin{cases}1 & ، \ x=\frac{p}{q}\ ,\ q\,|\,m!\\ 0 & ، \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$.

در نتیجه برای هر m، f_m در یک مجموعه $D=\mathbb{Z}\cup F$ ناپیوسته می‌شود که F یک مجموعه‌ی متناهی است (درواقع $F=\{\frac{p}{q}: 1\le p\le q\ ,\ q|m!\}$)

بنابراین $\lambda(D)=0$ پس بنا به محک لبگ f_m (روی هر بازه‌ی بسته) انتگرال‌پذیر ریمان است. حالا قرار می‌دهیم $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$

اگر x گنگ باشد آنگاه همیشه $m!x\notin\mathbb{Z}$ لذا $f_m(x)=0$ و در نتیجه $f(x)=0$. اما اگر x گویا باشد آنگاه x به فرم $\frac{p}{q}$ است که در آن $p\in\mathbb{Z}$، $q\in\mathbb{N}$ و

$(p,q)=1$. به وضوح اگر $m\ge q$ آنگاه $m!x=m!\frac{p}{q}$ صحیح است چون $q|m!$ و لذا برای $x\in\mathbb{Q}$ می‌بینیم که اگر m رشد کند، عاقبت m مخرج x را پشت‌سر گذاشته و از m به بعد ($m\ge$ (مخرج x))، $f_m(x)=1$ لذا $f(x)=1$. از این رو

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2k}=\begin{cases}1 & ,\ x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ,\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

و چون اندازه‌ی نقاط ناپیوستگی f صفر نیست پس $f\notin R$ و این در حالی بود که برای هر m، $f_m\in R$. بنابراین از طریق همگرایی نقطه‌وار، یک تابع حدی همه‌جا ناپیوسته به دست آورده‌ایم که برخلاف جملات دنباله، انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

ت) فرض کنید $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $n=1,2,3,\ldots$ با ضابطه‌ی $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ داده شده‌اند. به وضوح از کراندار بودن $\sin nx$ و اینکه $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ نتیجه می‌گیریم که $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. بنابراین $f'(x)=0$. اما از طرف دیگر $f_n'(x)=\sqrt{n}\cos(nx)$ و می‌بینید که $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ در حالت کلی موجود نیست و این یعنی دنباله‌ی (f_n') به f' همگرا نیست. برای مثال اگر $x=0$ آنگاه $f_n'(0)=\sqrt{n}$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)=+\infty\neq 0=f'(0)$

و می‌بینیم که گرچه هم f' و هم f_n' موجودند اما ارتباطی معقول بین آنها نیست.

ث) فرض کنیم $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$، $n=1,2,\ldots$، با ضابطه‌ی $f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n$ داده شده‌اند. برای $x=0$ داریم $f_n(0)=0$، لذا

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0 \qquad (5)$$

اما اگر $1\ge x>0$ چون $1>1-x^2\ge 0$ و $(1-x^2)^n$ بسیار سریع به صفر میل می‌کند پس بنا به یکی از قضایای فصل ۳ کتاب رودین $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. به هرحال این مطلب به همراه (۵) نتیجه می‌دهند که برای $0\le x\le 1$ داریم $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. می‌بینیم که هم $f_n\in R$ و هم $f\in R$. اما ارتباطی معقول بین $\int f_n$ و $\int f$ نیست چون:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0 \qquad (6)$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 n^2x(1-x^2)^n\,dx=n^2\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx=\frac{n^2}{2n+2} \qquad (7)$$

دیده می‌شود که $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)=+\infty$ در حالی‌که $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ و در نتیجه (حد انتگرال $\neq$ انتگرال حد)

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\neq\int f=\int\lim_{n\to\infty} f_n \qquad (8)$$

حتی اگر در تعریف f_nها، n^2 را با n جایگزین کنیم در (۷) به جای $\frac{n^2}{2n+1}$، عبارت $\frac{n}{2n+1}$ به دست می‌آید که همگرا به $\frac{1}{2}$ است و لذا دوباره به (۸) می‌رسیم.

مثال‌های بالا نشان می‌دهند که همگرایی نقطه به نقطه برای تعویض ترتیب اعمال حدگیری کافی نیست و مشکلات و بی‌دقتی‌هایی به‌وجود می‌آورند. برای رسیدن به تعویض ترتیب اعمال حدگیری مجبوریم یک نوع دیگر از همگرایی را معرفی کنیم. اما قبل از آن ذکر چند نکته ضروری است.

مثال ۲: فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، تساوی $f(0)=0$ از کدام گزینه نتیجه می‌شود؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x+n)\,dx=0$　　۲) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})\,dx=0$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (f(x))^n\,dx=0$　　۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$ و f تابعی پیوسته است، لذا $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{x}{n})=0$ حال اگر $f(0)\neq 0$، $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})\,dx\neq 0$ پس اگر $\int_0^1 f(\frac{x}{n})\,dx=0$، داریم: $f(0)=0$

مثال۳: فرض کنید $f(x)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای $n=0,1,2,\dots$ قرار دهیم $a_n=\int_0^1 f(n+x)dx$ به طوری‌که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. در این صورت مقدار $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$ کدام است؟ (دکتری ۹۵)

۱) 0 ۲) $f(a)$ ۳) a ۴) ممکن است موجود نباشد.

پاسخ: گزینه «۳» به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $\int_0^1 f(n+x)dx=\int_n^{n+1}f(t)dt$. حال فرض کنید $t>0$ داده شود. با توجه به این‌که $N_0\in\mathbb{N}$ موجود است که:

$$n\ge N_0 \to \left|\int_n^{n+1}f(t)dt-a\right|=\left|\int_0^1 f(n+x)dx-a\right|<\varepsilon$$

حال با تغییر متغیر $nx=t$ خواهیم داشت:

$$\int_0^1 f(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$$

حال عدد $N_1\in\mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $N_1>N_0$ و $\frac{-N_0}{N_1}(a-\varepsilon)>-\varepsilon$; $\frac{-N_0}{N_1}(a+\varepsilon)<\varepsilon$; $\frac{1}{N_1}\left|\int_0^{N_0}f(t)dt\right|<\varepsilon$

در این‌صورت برای $n\ge N_1$:

$$\left|\int_0^1 f(nx)dx-a\right|=\left|\int_0^n f(t)\frac{dt}{n}-a\right|=\left|\frac{1}{n}\left(\int_0^{N_0}f(t)dt+\int_{N_0}^n f(t)dt\right)-a\right|$$

از طرفی $\int_{N_0}^n f(t)dt=\int_{N_0}^{N_0+1}f(t)+\dots+\int_{n-1}^n f(t)dt$ پس:

$$(n-N_0)(a-\varepsilon)\le\int_{N_0}^n f(t)dt\le(n-N_0)(a+\varepsilon)\Rightarrow\left(1-\frac{N_0}{n}\right)(a-\varepsilon)\le\frac{1}{n}\int_{N_0}^n f(t)dt\le\left(1-\frac{N_0}{n}\right)(a+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon-\frac{N_0}{n}(a-\varepsilon)\ge-2\varepsilon\ ,\ \frac{-N_0}{n}(a+\varepsilon)+\varepsilon\le 2\varepsilon$$

پس با توجه به رابطه‌ی $-\varepsilon<\frac{1}{N_1}\int_0^{N_0}f(t)dt<\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$-3\varepsilon\le\frac{1}{n}\int_0^{N_0}f(t)dt+\frac{1}{n}\int_{N_0}^n f(t)dt-a\le 3\varepsilon$$

پس $\left|\int_0^1 f(nx)dx-a\right|<3\varepsilon$ و در نتیجه: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

نکته۱: **الف)** اگر (f_n), Σf_n به طور نقطه‌ی همگرا باشند آنگاه لزوماً روابط $\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim f_n$ و یا $\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$ برقرار نیست و این یکی دیگر از ضعف‌های انتگرال ریمان است، درواقع در انتگرال لبگ این دو رابطه تحت کمترین شرایط ممکن برای حدود نقطه به نقطه برقرارند.

ب) مشابهت زیادی بین انتگرال‌های بی‌پایان وابسته به یک پارامتر $\left(\int_a^{+\infty}f(x,t)dx\right)$ و سری‌های توابع $\left(\sum_{n=1}^{\infty}f(n,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\right)$ وجود دارد.

مثال۴: فرض کنید $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$، در این صورت مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\int_{1392}^{2014}f(nx)dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) ۶۲۲ ۲) ۶۲۳ ۳) ۶۲۱ ۴) ۶۲۰

پاسخ: گزینه «۱» چون f تابعی پیوسته است، لذا

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1392}^{2014}f(nx)dx=\int_{1392}^{2014}\lim_{n\to\infty}f(nx)dx=\int_{1392}^{2014}\lim_{n\to\infty}f(x)dx=\int_{1392}^{2014}dx=2014-1392=622$$

مثال۵: فرض کنید $f,g:[a,b]\to(0,+\infty)$ توابع پیوسته باشند. مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$ کدام است؟ (آمار و ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sup_{a\le x\le b} f(x)g(x)$ ۲) $\inf_{a\le x\le b} f(x)$ ۳) $\sup_{a\le x\le b} f(x)$ ۴) $\inf_{a\le x\le b} f(x)g(x)$

پاسخ: گزینه «۳» با فرض $f(x)=x$، $g(x)=1$، $a=0$ و $b=1$ داریم $\int_0^1 x^n dx=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$ از سویی می‌دانیم که برای دنباله $\{a_n\}$، اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=l$. پس با فرض $a_n=\frac{1}{n+1}$ داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=1$، لذا $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. برای رد گزینه (۱) کافی است قرار دهیم $f(x)=x$ و $g(x)=2x$ و $a=0$ و $b=1$. داریم:

$$\int_0^1 2x^{n+1}dx=\frac{2}{n+2}x^{n+2}\Big|_0^1=\frac{2}{n+2}$$

با قرار دادن $a_n=\frac{2}{n+2}$، داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2}{n+3}}{\frac{2}{n+2}}=\frac{n+2}{n+3}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

و لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

اما در گزینه (۱) داریم:

$$\sup_{0\le x\le 1} 2x^2=2$$

مثال۶: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)(\sin^n x-\sin^{n+2}x)\,dx$ کدام است؟ (ریاضی کاربردی ـ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) ۱ ۳) وجود ندارد. ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۴» چون

$$\sin^n x-\sin^{n+2}x=\sin^n x(1-\sin^2 x)=\sin^n x\cos^2 x$$

پس با قرار دادن $y=\sin^{(n+2)}x$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=(n+2)\sin^{n+1}x\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(n+2)(n+1)\sin^n x\cos^2 x-(n+2)\sin^{n+2}x\Rightarrow\int\frac{d^2y}{n+2}=\int(n+1)\sin^n x\cos^2 x\,dx^2-\int\sin^{n+2}x\,dx$$

$$\Rightarrow(n+2)\sin^{n+1}x\cos x=\int n\sin^n x\cos^2 x\,dx\Rightarrow\frac{(n+1)(n+2)\sin^{n+1}x\cos x}{x}=\int(n+1)\sin^n x\cos^2 x\,dx$$

حال با قرار دادن حدود ۰ و $\frac{\pi}{2}$ سمت چپ برابر صفر است و لذا گزینه (۴) صحیح است.

همگرایی یکنواخت

❖ **تعریف۲:** گوییم دنباله‌ای از توابع مانند $(f_n)_{n=1}^{\infty}$، روی مجموعه E به طور یکنواخت به تابع f همگراست هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیحی مانند $N\in\mathbb{N}$ باشد به طوری که برای هر $n\ge N$ و هر $x\in E$ داشته باشیم $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. در این حالت به طور نمادین می‌نویسیم $f_n\xrightarrow[E]{u}f$ یا $f_n\underset{E}{\Longrightarrow}f$ و اگر ابهامی در مورد E نباشد می‌نویسیم $f_n\Longrightarrow f$ یا $f_n\xrightarrow{u}f$.

مثال۷: فرض کنید بر بازه‌ی $[0,1]$، $f_n(x)=nx^n$. دنباله توابع f_n دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۹۱)

۱) در $[0,1)$ همگرای نقطه‌وار است.

۲) در $[0,1]$ همگرای نقطه‌وار است

۳) روی $[0,1)$ همگرای یکنواخت است.

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx$

پاسخ: گزینه «۱» اولاً دنباله‌ی f_n در نقطه‌ی $x=1$ واگراست و چنانچه $0\le x_0<1$، $\lim\limits_{n\to\infty}nx_0^n=0$ لذا $f\xrightarrow[[0,1)]{p.w}0$. نشان می‌دهیم این همگرایی نمی‌تواند یکنواخت باشد. نقاط نمونه‌ای $x_k=\left(\frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{k}}$ یک دنباله از نقاط در بازه $[0,1]$ تشکیل می‌دهند که همگرایی یکنواخت دنباله‌ی (f_n) را به هم می‌زنند. چون:

$$f(x_k)=k\times\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}$$

در حالی‌که برای تابع حدی $f=\lim f_n$ داریم $f(x_k)=0$ بنابراین $|f_k(x_k)-f(x_k)|=\frac{1}{2}$. بنابراین تعریف همگرایی یکنواخت برای هر ε ای نمی‌تواند برقرار باشد.

ـ گزینه‌های (۲) و (۳) بنا به بحث فوق نادرست‌اند.

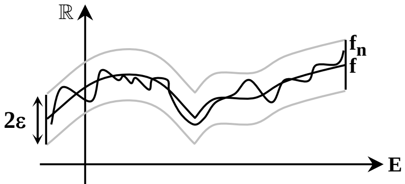
ـ در مورد گزینه‌ی ۴ داریم $\int_0^1 f_n(x)dx=n\int_0^1 x^n dx=\frac{n}{n+1}$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1$ اما $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0=0$.

نکته۲: الف) مقایسه‌ی بین همگرایی‌های نقطه به نقطه و یکنواخت:

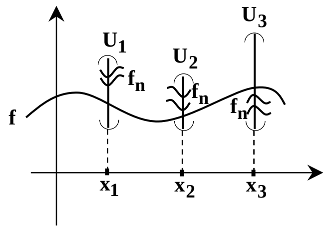
$$(1)\ \ f_n \xrightarrow{p.w} f \equiv \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{in\ \mathbb{C}} f(x) \equiv \forall x \in X\ , \forall \varepsilon > 0\ \exists N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}\ s.t\ n \ge N(x,\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$(2)\quad f_n \xrightarrow{u} f \equiv f_n \Longrightarrow f \equiv \forall \varepsilon > 0\quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ s.t\ \ n\ge N(\varepsilon)\ ,\ x\in X\ \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

همان‌طورکه می‌بینید در همگرایی نقطه‌وار $N=N(x,\varepsilon)$ هم به x وابسته است و هم به ε در حالی که در همگرایی یکنواخت $N=N(\varepsilon)$ فقط به ε وابسته است. شهود هندسی در مورد همگرایی یکنواخت چنین است: فرض کنید $f_n \Longrightarrow f$، و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. حالا یک نوار قائم حول f به شعاع ε رسم کنید. لذا می‌بینید که برای n های به اندازه‌ی کافی بزرگ نمودار f_nها داخل این نوار قائم به شعاع ε می‌افتند. به نمودار زیر دقت کنید. شکل هندسی مربوط به همگرایی نقطه‌وار نیز داده شده است.



مدل همگرایی یکنواخت



مدل همگرایی نقطه‌وار (اعضای دنباله، در نقاط، به تابع حدی نزدیک‌اند، اما این نزدیک شدن یکدست و قابل کنترل نیست).

ب) مفهوم همگرایی یکنواخت برای سری‌ها نیز معنی دارد، کافی است از دنباله‌ی مجموع‌های جزئی استفاده کنیم. برای دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ قرار دهید $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$، اکنون چنانچه تابعی مانند f موجود باشد که تعریف ۲ را برای دنباله‌ی $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ و تابع f برقرار سازد؛ یعنی $S_N \Longrightarrow f$؛ آنگاه گوییم سری $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به تابع f همگراست. البته بنا به قرارداد چون خود سری (S_N) و حدش را با $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ نمایش دهیم، می‌گوییم سری $\sum f_n$ به تابع f همگرای یکنواخت است. پس می‌گوییم سری $\sum f_n$ به تابع f همگرای یکنواخت است هرگاه دنباله‌ی مجموع‌های جزئی آن به طور یکنواخت به تابع f همگرا باشد. **پ)** همگرایی یکنواخت، همگرایی نقطه وار را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب درست نیست.

مثال۸: اگر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته و $f(1)=0$، در این صورت دنباله توابع $h_n(x)=x^n f(x)$ در $[0,1]$ ... (سراسری ۸۴)

۱) همگرای یکنواخت نیست.
۲) همگرای یکنواخت به یک تابع ناپیوسته است.
۳) همگرای یکنواخت به یک تابع پیوسته است.
۴) همگرای نقطه‌ای به یک تابع ناپیوسته است.

پاسخ: گزینه «۳» تابع f پیوسته و $[0,1]$ فشرده است پس f روی این بازه کران‌دار است، یعنی $M>0$ موجود است به گونه‌ای که:

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f(x)\le M$$

حال به ازای $x\in[0,1)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = 0\times f(x)=0$$

و به ازای $x=1$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = 1\times f(1)=0$$

پس دنباله $\{f_n\}$ به صورت نقطه به نقطه به تابع پیوسته $f(x)=0$ همگرا است.

حال ثابت می‌کنیم این همگرایی یکنواخت است. پس فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. در این صورت از آنجا که $f(1)=0$ و f پیوسته است، $\delta>0$ موجود است به گونه‌ای که:

$$1-\delta<x\le 1\ \Rightarrow |f(x)-f(1)|=|f(x)|<\varepsilon$$

همچنین $\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n=0$ ، پس عدد طبیعی N_0 موجود است به گونه‌ای که:

$$n\ge N_0\ \Rightarrow M(1-\delta)^n<\varepsilon$$

پس به ازای $n\ge N_0$ و $x\in[0,1]$ داریم:

$$\begin{cases} x\in[0,1-\delta)\ \Rightarrow |h_n(x)|=\left|x^n f(x)\right|\le(1-\delta)^n M<\varepsilon \\ x\in[1-\delta,1]\ \Rightarrow |h_n(x)|=\left|x^n f(x)\right|\le|f(x)|<\varepsilon \end{cases}$$

پس دنباله $\{h_n\}$ روی $[0,1]$ به تابع پیوسته $f(x)=0$ همگرای یکنواخت است.

مدرسان شریف

فصل هشتم

«چند تابع خاص»

درسنامه: سری‌های توانی و فوریه

مقدمه

در فصل پیش به اندازه‌ی کافی در باب انواع همگرایی یک سری تابعی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بحث کردیم. در این فصل دامنه و برد توابع را حقیقی گرفته و در دو مورد در باب همگرایی و مباحث مربوطه‌ی این سری تابعی بحث می‌کنیم. مورد اول $f_n(x)=a_n x^n \ , \ a_n \in \mathbb{R}$ ؛ و دومی $f_n(x)=\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx$ است. در مورد اول سری حاصله را سری توانی و در مورد دوم سری حاصله را سری مثلثاتی می‌گویند. در اینجا ما با نوعی حالت «ترکیب» (Synthetics) سروکار داریم، یعنی شما با ترکیبات جبری توابعی مثل f_n، تابع جدیدی (در صورت همگرایی سری) مانند $S(x)=\sum f_n(x)$ می‌سازید. امّا این روند حالت معکوس هم دارد و این به نوبه‌ی خود بسیار جالب است، مثلاً فرض کنید این دفعه تابع $A(x)$ داده شده و شما می‌خواهید آن را به نوعی به f_nها «تجزیه» کنید و بعد می‌خواهید ببینید که چه رابطه‌ای بین $A(x)$ و $\sum f_n(x)$ وجود دارد. البته ما در حالت تجزیه باز دو مورد خاص $f_n(x)=a_n(A)x^n$ و $f_n(x)=\alpha_n(A)\cos nx+\beta_n(A)\sin nx$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$\beta_n(A)\ , \ \alpha_n(A)\ , \ a_n(A)$

به این معنی است که ضریب f_n از تابع A به دست آمده است. در حالت تجزیه (و نیز ترکیب) با دو مسئله‌ی اساسی سروکار داریم:

۱ـ مسئله‌ی همگرایی: برای کدام xها، سری $\sum f_n(x)$ همگرا می‌شود؟ و این همگرایی از چه نوع است؟ یعنی تحت کدام نرم یا متریک است یا تحت کدام نوع همگرایی؟

۲ـ مسئله‌ی نمایش: اگر سری $\sum f_n(x)$ حاصل از تجزیه‌ی تابع A همگرا شود این سری چه تابعی را نمایش می‌دهد و چه رابطه‌ای بین $\sum f_n(x)$ و $A(x)$ وجود دارد؟

در این فصل در مورد حالت اول (ترکیب)، مسئله را برای $\sum a_n x^n$ بررسی می‌کنیم، این سری به سری توانی مشهور است. امّا مسئله‌ی سری مثلثاتی $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx+\beta_n \cos nx)$ از اهداف این کتاب نبوده و می‌توانید برای اطلاعات بیشتر به کتاب‌های سری‌های مثلثاتی اثر A.Zygmund یا N.Bari مراجعه کنید.

در حالت دوم (تجزیه) مسئله را برای سری $\sum a_n x^n$ دوباره پیگیری می‌کنیم، که برای آنها تجزیه و ترکیب بسیار به هم مربوط می‌شوند امّا برای سری مثلثاتی وضع بسیار پیچیده‌تر بوده و برای حالت‌های خاصی از تابع A آن را بررسی می‌کنیم، در مورد اخیر به علت طبیعت تناوبی توابع سینوسی و کسینوسی واضح است که باید A متناوب و از دوره‌ی تناوب 2π باشد، امّا این تنها کافی نیست بلکه باید A یک تابع انتگرال‌پذیر بوده و $\alpha_n(A)\ , \ \beta_n(A)$ برحسب انتگرال‌هایی شامل A داده شده باشند. در این مورد اخیر، این سری مثلثاتی خاص، سری فوریه نام دارد. برای همگرایی سری فوریه، سه نوع همگرایی را بررسی می‌کنیم که عبارتند از نقطه‌وار، یکنواخت و همگرایی در $\|.\|_2$. همگرایی نقطه‌وار سری فوریه یک موضوع بسیار ظریف و حساس است که به نوبه‌ی خود از آن بحث خواهیم کرد. دلیل اتخاذ دو مورد توانی و مثلثاتی برای $f_n(x)$ نیز به خاطر خواص و کاربردهای آنهاست.

سری توانی

سری‌های توانی یا همان توابع تحلیلی به ما امکان می‌دهند که از دیدگاهی کاملاً تحلیلی و نه شهودی، توابع موجود در حسابان را بازتعریف کنیم. این کار جدای از مزیت روش‌های تقریب، این فایده را دارد که می‌توان این باز بیان جدید را به راحتی به فضاهای کلی‌تر به جز $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ تعمیم داده و بر غنای نظریه و کاربردهای ریاضیات در طبیعت افزود. سری‌های توانی در حل معادلات دیفرانسیل نیز بسیار کارآمدند.

❖ **تعریف۱:** سری توابع حقیقی $\sum f_n$ را **سری توانی** حول نقطه $x=c$ گوییم هرگاه تابع‌های f_n به صورت:

$$f_n(x)=a_n(x-c)^n\ \ ,\ \ n=0,1,2,\dots\ \ ;\ \ a_n,c\in\mathbb{R}$$

باشند و دامنه‌ی هر f_n نیز زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. بخاطر سادگی در نمادگذاری فقط به حالت $c=0$ می‌پردازیم، این کار از کلیت مطلب نمی‌کاهد، چون با انتقال $x'=x-c$ می‌توان بحث سری توانی در حول c را به بحث سری توانی حول 0 فرو کاست. بنابراین هروقت از سری توانی نام می‌بریم منظورمان یک سری به فرم (۱) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\dots$ می‌باشد.

گرچه توابع $f_n(x)=a_nx^n$ ظاهر شده در (۱) همگی روی $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند، امّا نباید انتظار داشت که سری برای هر $x\in\mathbb{R}$ همگرا شود. برای مثال با استفاده از آزمون ریشه یا نسبت می‌توان نشان داد که سری‌های $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty}x^n\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ به ترتیب برای xهای واقع در مجموعه‌های $\{0\}$, $\{x\in\mathbb{R}\,;\,|x|<1\}$, $\mathbb{R}$ همگرا می‌شوند. بنابراین مجموعه‌ای که در آن سری توانی همگرا می‌شود ممکن است بزرگ، متوسط و یا کوچک باشد. امّا دقت کنید که هر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ نمی‌تواند دامنه‌ی همگرایی یک سری توانی باشد (بعداً می‌بینیم که این مجموعه باید همبند باشد). ما از قبل حد بالای یک دنباله‌ی حقیقی مثل a_n را دیده‌ایم و آن را به صورت $\limsup a_n$ نشان و به صورت سوپریمم تمام حدود زیردنباله‌های دنباله‌ی (a_n) تعریف کرده‌ایم. مزیت استفاده از $\limsup$ و $\liminf$ این است که همیشه (در $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$) موجودند به خصوص در حالتی که دنباله‌ی (a_n) کراندار است هر دو موجود و حقیقی‌اند، در حالی‌که ممکن است که دنباله حد نداشته باشید یا رفتار همگرایی‌اش نامشخص باشد. استفاده از $\limsup$ و $\liminf$ اطلاعات زیادی چه در رابطه با خود a_n و چه به هنگام مقایسه‌ی آن با دنباله‌های دیگر به دست می‌دهد.

یک دید مناسب نسبت به $\limsup$ و $\liminf$ این است که ابتدا دنباله‌ای کراندار (a_n) را در نظر گرفته و توافق می‌کنیم که در نمایش $\{a_n\}$ از برد این دنباله تمام تکرارهای یک عضو را نشان دهیم یا برای راحتی کار می‌توانید اعضای دنباله‌ی (a_n) را کاملاً متمایز بگیرید حال قرار دهید $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ که طبق قرارداد در آن تکرار مجاز است مجموعه‌ی نقاط حدی یا تجمع A را با A' نشان دهید. حالا:

$$\limsup\ a_n=\sup A'\qquad,\qquad \lim\inf\ a_n=\inf A'$$

که بنابه اصل کمال $\inf A'$ و $\sup A'$ موجود می‌باشند و چون مجموعه A' بسته است پس $\inf A',\sup A'\in A'$ و می‌دانیم که $\alpha\in A'\Leftrightarrow\exists(a_{n_k})\ \text{s.t}\ \alpha=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$ اکنون طبق قراردادهای کتاب رودین می‌توان این مفاهیم را به $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ گسترش داد.

❖ **تعریف۲:** فرض کنیم سری توانی $\sum a_nx^n$ داده شده است، قرار دهید $\gamma=\limsup(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ و شعاع همگرایی سری $\sum a_nx^n$ را به صورت $R=1/\gamma$ تعریف کنید، توجه کنید برای $\gamma=0$ داریم $R=+\infty$، و برای $\gamma=+\infty$ داریم $R=0$، بنابراین بازه‌ی همگرایی این سری عبارت خواهد بود از $(-R,R)$.

قضیه۱: (کوشی ـ آدامار): اگر R شعاع همگرایی سری $\sum a_nx^n$ باشد، آنگاه سری در فاصله‌ی $|x|<R$ به طور مطلق همگراست ولی برای $|x|>R$ واگراست.

مثال۱: شعاع همگرایی سری توانی $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3+\sin\frac{n\pi}{4})^nx^n$ برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $a_n=(3+\sin\frac{n\pi}{4})^n$ در این صورت شعاع همگرایی سری برابر $\dfrac{1}{\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}}$ می‌باشد. از طرفی $3+\sin\frac{n\pi}{4}\geq 2$ پس $|a_n|=a_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup(3+\sin\frac{n\pi}{4})=3+\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sin\frac{n\pi}{4}$ و از طرفی $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sin\frac{n\pi}{4}=1$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=4$ در نتیجه شعاع همگرایی سری برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد.

توجه:

۱- قضیه‌ی کوشی ـ آدامار هیچ چیزی در مورد دو نقطه‌ی انتهایی فاصله‌ی همگرایی، $|x|=R$، نمی‌گوید. سری در این نقاط می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

به عنوان مثال سری $\sum x^n$ در $x=\pm ۱$ واگرا، سری $\sum \frac{۱}{n} x^n$ در $x=-۱$ همگرا و در $x=۱$ واگرا و سری $\sum \frac{۱}{n^۲} x^n$ در $x=\pm ۱$ همگراست.

۲- برای محاسبه شعاع همگرایی می‌توان از رابطه $R=\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+۱}|}$ که ساده‌تر است، استفاده کرد.

قضیه۲: سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R داده شده است. اگر K یک زیرمجموعه‌ی فشرده از بازه‌ی همگرایی $(-R,R)$ باشد در این صورت سری توانی در K همگرای یکنواخت است. توجه کنید که K زیرمجموعه‌ی فشرده است نه لزوماً زیربازه‌ی فشرده.

قضیه۳: مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ در فاصله‌ی همگرایی پیوسته است. همچنین در هر زیربازه‌ی فشرده‌ی دلخواه از بازه‌ی همگرایی می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

مثال۲: تابع $f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{x^n}{n!})^۲$: (سراسری ۹۱)

۱) فقط روی $[-۱,۱]$ پیوسته است.
۲) فقط روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.
۳) فقط روی $(-۱,۱)$ پیوسته است.
۴) فقط در $x=۰$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۲» نشان می‌دهیم شعاع همگرایی بی‌نهایت است. کافی است آزمون ریشه یا نسبت را در مورد سری‌های عددی به کاربرید قرار دهید $u_n(x)=(\frac{x^n}{n!})^۲$.

$$\rho(x)=\lim\left|\frac{u_{n+۱}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+۱}\right|^۲=۰$$

و چون $\forall x \quad \rho(x)<۱$ پس هر سری برای هر xی همگراست و لذا شعاع همگرایی سری $R=\infty$ است و بنابه قضیه‌ای در مورد سری‌های توانی مبنی‌بر پیوسته بودن سری روی فاصله‌ی همگرایی، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

قضیه۴: (مشتق): از هر سری توانی می‌توان در بازه‌ی همگرایی جمله به جمله مشتق گرفت. در حقیقت اگر $S(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ آنگاه $S'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} n a_n x^{n-۱}$ و هر دو سری (سری مربوط به S و S') دارای یک شعاع همگرایی هستند.

تذکر۱: قضیه‌ی فوق هیچ ادعایی در مورد نقاط انتهایی، $|x|=R$، نمی‌کند. اگر یک‌سری در یکی از نقاط انتهایی همگرا باشد، ممکن است که سری مشتق آن در این نقطه همگرا باشد یا نباشد. برای مثال $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{x^n}{n^۲})$ در هر دو نقطه‌ی انتهایی $x=\pm ۱$ همگرا می‌شود. امّا سری مشتق آن $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{n-۱}}{n}=\sum_{m=۰}^{\infty}\frac{x^m}{m+۱}$ در $x=-۱$ همگرا می‌شود درحالی که در $x=۱$ واگرا می‌شود.

چنانچه قضیه‌ی فوق را مکرراً به کار ببریم، می‌بینیم که اگر k یک عدد طبیعی باشد، آنگاه از سری توانی $S(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ می‌توان k مرتبه مشتق متوالی (به صورت جمله به جمله) گرفت و به دست آورد (۲) $S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}$. به علاوه این سری روی $|x|<R$ به طور مطلق به $S^{(k)}$ همگرا بوده و در هر زیربازه‌ی فشرده از $|x|<R$ به طور یکنواخت به $S^{(k)}$ همگرا می‌شود. اگر در رابطه (۲) مقدار $x=۰$ را قرار دهیم، فرمول مهم $S^{(k)}(۰)=k!a_k$ به دست می‌آید لذا $a_k=\frac{S^{(k)}(۰)}{k!}$ و در نتیجه:

قضیه۵: (صورت قوی قضیه‌ی یکتایی): اگر $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ در یک فاصله‌ی $(-r,r)$, $r>۰$ به یک تابع S همگرا شوند آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n$.

مثال۳: فرض کنید سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ بر بازه $S=(-r,r)$ همگرا باشند، که $r>0$ و E را در مجموعه نقاط x در S بگیرید که دو سری فوق در آن نقاط برابر باشند. ضعیف‌ترین شرط برای آنکه لزوماً تساوی $a_n=b_n$ برای هر $n\geq 1$ برقرار باشد، کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) E متناهی باشد.　　۲) E ناشمارا باشد.　　۳) E فشرده باشد.　　۴) E شمارای نامتناهی باشد.

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که می‌دانید باید مجموعه نقاط حدی E در S ناتهی باشد حال $\bar{S}=[-r,r]$ فشرده بوده و $E\subseteq \bar{S}$ بنابر قضیه‌ای از آنالیز ریاضی ۱ می‌دانیم که اگر E نامتناهی باشد آنگاه E یک نقطه‌ی حدی در $\bar{S}$ دارد. درحالی‌که ما به دنبال نقاط حدی E در S هستیم. اما نشان می‌دهیم $E'\subseteq E$ و لذا کار تمام است. قرار دهید $c_n=a_n-b_n$ و $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ بنابراین $E=\{x\in S: f(x)=0\}=f^{-1}\{0\}$ اما از انجا که f روی S پیوسته است پس $f^{-1}\{0\}$ بسته و لذا E بسته خواهد شد. بنابراین $E'\subseteq E$ و چون از قبل می‌دانیم که E نقطه حدی دارد پس $E'\neq\varnothing$ و لذا E در S نقطه‌ی حدی دارد.

قضیه۶: (صورت ضعیف یکتایی نمایش): چنانچه تساوی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ روی یک مجموعه‌ی E، $E\subseteq(-R,R)$ اتفاق افتد و E نقطه‌ی حدی داشته باشد یعنی $E'\neq\varnothing$ آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ، $a_n=b_n$ و لذا تساوی $\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$ در کل $(-R,R)$ برقرار است.

تذکر۲: آ: فرمول $S^{(k)}(0)=k!a_k$ از این رو جالب است که اولاً مقادیر مشتقات تابع S را در مرکز بازه‌ی همگرایی، مستقیماً براساس ضرایب موجود در بسط $S(x)=\sum a_n x^n$ نمایش می‌دهد و از طرف دیگر می‌گوید که ضرایب موجود در این بسط با مقادیر S و مشتقاتش در یک نقطه مشخص می‌شوند.
ب) معادل قضیه یکتایی برای سری‌های مثلثاتی، یک قضیه‌ی بسیار عمیق و سنگین است که به قضیه‌ی یکتایی کانتور مشهور است.

قضیه۷: (ضرب): فرض کنید توابع s، t روی بازه‌ی $(-r,r)$ توسط سری‌های $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ t(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ داده شده‌اند، در این صورت ضرب آنها سری $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$، با ضرایب $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ ,\ n=0,1,2,\ldots$ بوده که روی فاصله‌ی $(-r,r)$ مطلقاً همگراست و شعاع همگرایی سری حاصلضرب حداقل برابر r است.

تذکر۳: الف) امکان دارد که شعاع همگرایی سری حاصلضرب بیشتر از r باشد. ب) $c_n=\sum_{i+j=n} a_i b_j$ و ضمناً می‌توان سری‌های مربوط به $t,\ s$ را به طور صوری در هم ضرب کرده تا ضرایب c_n بدست بیایند. البته چنین ضربی را ضرب کوشی دو سری می‌نامند که شبیه ضرب تلفیقی (کانولوشن) انتگرال است.

قبلاً دیده‌ایم که سری $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ روی بازه‌ی همگرایی‌اش $(-R,R)$ تابعی پیوسته است. حال اگر سری در یک نقطه انتهایی مانند $x=R$ همگرا باشد آنگاه S در $x=R$ تعریف شده اما سؤال این است که آیا همچنان در نقطه‌ی $x=R$ پیوسته خواهد ماند؟ یعنی آیا روی $(-R,R]$ پیوسته است؟ دقیق‌تر بگوییم در قضیه‌ی ۲ خاطرنشان کردیم که سری توانی در هر زیرمجموعه‌ی فشرده از فاصله‌ی همگرایی، همگرای یکنواخت است، امّا هیچ دلیل یا نشانه‌ای وجود ندارد که از امکان تعمیم این نتیجه به نقاط انتهایی فاصله حکایت کند. با این حال آبل قضیه‌ای در این باره دارد که در زیر می‌آید و می‌گوید چنانچه سری در یکی از دو سر فاصله‌ی همگرایی، همگرا فرض شود در این صورت همگرایی یکنواخت به این نقطه هم گسترش می‌یابد. در قضیه‌ی زیر برای سهولت شعاع همگرایی را برابر ۱ فرض کرده‌ایم، این مطلب از کلیت قضیه نمی‌کاهد چون کافی است از تغییر مقیاس $x'=\frac{x}{R}$ استفاده کنید.

قضیه۸: (آبل): فرض کنید سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x|<1$ به تابع $S(x)$ همگرا باشد. در این صورت اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به A همگرا باشد آنگاه سری توانی در $[0,1]$ به طور یکنواخت به S همگرا شده و در نتیجه $\lim_{x\to 1^-} S(x)=A$. بنابراین S در نقطه‌ی $x=1$ و حتی در بازه‌ی $(-1,1]$ پیوسته است.

با نگاه کردن به این قضیه در جهت عکس می‌توان دریافت که شما می‌توانید یک مقدار حدی را به سری‌ای مانند $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نسبت دهید بدون اینکه حتی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد.

برای مثال فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ داده شده باشد، ممکن است $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ موجود باشد یا نباشد، به هرحال سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ را تشکیل دهید. چنانچه آهنگ رشد b_n زیاد نباشد آن وقت این سری توانی برای $|x|<1$ به تابعی مانند $B(x)$ همگرا است. اکنون جهت عکس قضیه بالا چنین است. فرض کنید $\lim_{x\to 1^-} B(x)=\beta$ در این صورت می‌توان β را به $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نسبت داد هر چند که $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد یا نباشد. در این حالت سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ را جمع‌پذیر آبل به β گویند. اکنون محتوای قضیه‌ی آبل می‌گوید چنانچه $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum b_n$ نیز به همان حد جمع‌پذیر آبل است. یعنی اگر $A=\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ آنگاه $\lim_{x\to 1^-} B(x)=\beta=A$. توجه کنید که سری ممکن است واگرا باشد امّا همچنان جمع‌پذیر آبل باشد مثلاً $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ واگرا است در حالی‌که اگر قرار دهیم $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$ ، $|x|<1$ آنگاه $\lim_{x\to 1^-} B(x)=\frac{1}{2}$ و لذا سری $\sum (-1)^n$ جمع‌پذیر آبل به $\frac{1}{2}$ است.

قضیه۹: (قضیه تاوبر): فرض کنید سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x|<1$ به $S(x)$ همگرا باشد و $\lim_{n\to\infty} (na_n)=0$ اگر $\lim_{x\to 1^-} S(x)=A$ آنگاه سری $\sum a_n$ به A همگرا است.

تاکنون مباحث ما حول مجموع یک سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بوده است، حال فرض کنید یک تابع f به شما داده‌اند و از شما می‌خواهند که آن را تجزیه کنید و به اصطلاح به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)x^n$ بسط دهید که در آن $a_n(f)$ بیانگر وابستگی ضریب به تابع f است. اکنون دو مسئله‌ی عمده وجود دارد، یکی همگرایی و دیگری نمایش امّا همگرایی در قضایای پیشین بحث شد. چنانچه سری به دست آمده همگرا باشد، شما انتظار دارید که این سری، تابع f را نمایش بدهد. و از طرفی اگر این سری، f را در بازه‌ی $(-R,R)$ نمایش بدهد آنگاه طبق قضیه‌ی یکتایی و مباحث قبل از آن بایستی $a_n(f)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ، $n=0,1,2,\ldots$. لذا همیشه ما سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)x^n$ را با ضرایب $a_n(f)=a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ می‌سازیم. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ را سری تیلور f حول نقطه $c=0$ می‌نامیم امّا همیشه سری تیلور به خود تابع f همگرا نیست. مثال مشهور در این زمینه $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$ است. قبلاً نشان داده‌ایم که برای هر $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ، $f^{(n)}(0)=0$ ، لذا ضرایب سری تیلور f همگی برابر صفر می‌شوند و در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$ روی $(-R,R)$ که $R>0$ ، امّا شما می‌دانید که همواره f روی $(-R,R)$ مخالف صفر است بنابراین اگر $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ آنگاه $\sum a_n x^n$ سری تیلور s بوده در حالی‌که $s\neq f$. در ادامه سعی ما بر این خواهد بود که شرایط لازم و کافی برای نمایش یک تابع برحسب سری تیلورش بیان کنیم. به هرحال سؤال این است که سری تیلور یک تابع هموار، چه وقت به خود تابع همگرا است؟ قضیه ۱۲ پاسخ می‌دهد.

❖ **تعریف۳:** تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ را **تحلیلی** گوییم هرگاه f را بتوان به طور موضعی به صورت یک سری توانی بیان کرد. معادلاً هرگاه برای هر $c\in(a,b)$ عدد $\delta>0$ چنان یافت شود که اگر $|h|<\delta$ آنگاه $f(c+h)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$ یا معادلاً اگر $x\in(h-c,h+c)$ آنگاه $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. طبق قضیه‌ی مشتق‌گیری جمله به جمله، تابع f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و نیز $f^{(n)}(c)=n!a_n$ لذا نمایش f برحسب سری توانی یکتاست. کلاس توابع تحلیلی را با C^{ω} نمایش می‌دهیم. همانطور که می‌دانید $C^{\infty}\underset{\neq}{\supset}C^{\omega}$ ، سره بودن این شمول به دلیل وجود تابعی مثل $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$ است.

❖ **تعریف۴:** الف) فرض کنید $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ هموار باشد (یعنی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد به طور صوری $f\in C^{\infty}$) در این صورت سری تیلور f برای هر $c\in(a,b)$ سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$ است؛ برای بستگی این سری به تابع f از نماد $f\sim\sum\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$ استفاده می‌کنند. توجه شود که این نماد چیزی در مورد همگرایی سری تیلور به خود تابع f نمی‌گوید. بلکه می‌گوید در سری تیلور $\sum a_n h^n$ ضرایب a_n از طریق فرمول $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ بدست می‌آیند.

ب) فرض کنید $\sigma>0$ طوری باشد که بازه‌ی $I_\sigma=[c-\sigma,c+\sigma]$ داخل بازه‌ی (a,b) قرار گیرد و قرار دهید $M_n=\sup\{|f^{(n)}(t)|:t\in I_\sigma\}$ در این‌صورت مقدار $\alpha=\alpha(c)=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}$ را آهنگ رشد مشتق f روی I_σ گوییم. توجه دارید که $\sqrt[n]{|a|}=\sqrt[n]{\left|f^{(n)}(c)\right|/n!}\le\sqrt[n]{M_n/n!}$ بنابراین شعاع همگرایی سری تیلور (الف) که با $R=\frac{1}{(\lim\sup\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}})}$ داده می‌شود، در رابطه‌ی $\frac{1}{\alpha}\le R$ صدق می‌کند. به ویژه اگر α عددی حقیقی باشد، شعاع همگرایی سری تیلور مثبت است.

قضیه۱۰: اگر $\alpha\sigma<1$ آنگاه سری تیلور روی I_σ به طور یکنواخت به تابع f همگراست.

قضیه۱۱: فرض کنید f به صورت سری توانی همگرای $f(c+h)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nh^n$ با شعاع همگرایی R، $R>\sigma$ بیان شده است. در این صورت f روی I_σ دارای آهنگ رشد مشتقی کراندار است.

توجه دارید که در قضیه‌ی بالا سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ دارای شعاع R است یعنی سری روی $(c-R,c+R)$ همگراست.

مثال۴: اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارای بازه همگرایی $E=(-r,r)$ باشد در این صورت f بر $[-r,r]$ پیوسته است اگر و تنها اگر: (سراسری ۸۷)

۱) $0<r<1$ ۲) $\{-r,r\}\subseteq D_f$ ۳) $D_f\subseteq E$ ۴) $R_f=\overline{E}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $\{-r,r\}\subseteq D_f$ باشد آنگاه $\sum a_nr^n$ همگرا خواهد بود و از طرفی به ازای $x\in(-r,r)$ داریم: $\left|a_nx^n\right|\le a_nr^n$

پس بنابر آزمون M ـ وایراشتراس $\sum a_nx^n$ به طور یکنواخت به تابع f همگرا می‌باشد و از آنجا که دنباله مجموع جزئی $\sum_{n=1}^{k}a_nx^n$ بر $[-r,r]$ پیوسته است، تابع f نیز بر $[-r,r]$ پیوسته می‌باشد. و برعکس، اگر تابع f بر $[-r,r]$ پیوسته باشد آنگاه: $\lim\limits_{x\to\pm r}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

موجود و برابر $f(\pm r)$ می‌باشد. یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\pm r)^n$ موجود است و در نتیجه: $\{-r,r\}\subseteq D_f$

قضیه۱۲: (قضیه تحلیلی): یک تابع هموار، تحلیلی است اگر و تنها اگر به صورت موضعی دارای آهنگ رشد مشتقی کراندار باشد. یعنی برای هر $c\in(a,b)$ از دامنه‌اش یک $\sigma>0$ یافت شود که اگر به ازای I_σ مقدار $\alpha(c)$ را تشکیل دهیم آنگاه $\alpha(c)$ عددی حقیقی و متناهی باشد. این قضیه بیان می‌کند که در چه صورت و در چه شرایطی سری تیلور یک تابع به آن تابع همگرا می‌گردد.

فرع: چنانچه یک تابع هموار دارای مشتقات به طور یکنواخت کراندار باشد آنگاه تحلیلی است. یعنی اگر برای $f\in C^{\infty}$ عدد $M>0$ چنان موجود باشد که برای هر θ از دامنه‌ی f، $|f^{(n)}(\theta)|\le M$ آنگاه $f\in C^{\omega}$. به عنوان مثال تابع $f(x)=\sin x$ در این فرع صدق می‌کند.

قضیه۱۳: قضیه تیلور (صورت اول): اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ و سری دارای شعاع همگرایی R باشد آنگاه f روی $(-R,R)$ تحلیلی است.

قضیه‌ی بالا می‌گوید سری‌های توانی، توابعی تحلیلی هستند یعنی f نه تنها می‌تواند به صورت یک سری توانی حول $c=0$ بسط داده شود، بلکه می‌توان آن را حول هر نقطه c دیگری $c\in(-R,R)$، بسط داد. البته روش دیگری برای بیان این قضیه، قضیه‌ی ۱۵ است که در اثبات آن از قضیه‌ی زیر استفاده می‌شود.