آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» توجه داریم که معادلات به فرم کلی $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $u=ax+by+c$ به معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

در اینجا $u=4x+y+1$ است و مشتق آن نسبت به x به‌صورت $\frac{du}{dx}=4+\frac{dy}{dx}$ است. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل صورت مسأله داریم:

$$\frac{du}{dx}=4+\frac{dy}{dx}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-4\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دیفرانسیل مسأله}}\frac{du}{dx}-4=u^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=u^2+4$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} du=(u^2+4)\,dx\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } u^2+4}\frac{du}{u^2+4}=dx$$

رابطه به‌دست آمده یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر است. از طرفین آن انتگرال می‌گیریم. لذا داریم:

$$\frac{1}{2}tg^{-1}(\frac{u}{2})=x+c\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}}tg^{-1}(\frac{u}{2})=2x+2c\xrightarrow{\text{از طرفین tg می‌گیریم}}\frac{u}{2}=tg(2x+2c)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}}u=2tg(2x+2c)\xrightarrow{u=4x+y+1}4x+y+1=2tg(2x+2c)$$

گفته شد که نقطه $(0,1)$ در جواب معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. بنابراین آن را در رابطه فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$0+1+1=2tg(2c)\Rightarrow tg(2c)=1\Rightarrow 2c=tg^{-1}(1)\Rightarrow 2c=\frac{\pi}{4}$$

حالا با جایگذاری $2c=\frac{\pi}{4}$ در جواب عمومی، به جواب خصوصی $4x+y+1=2tg(2x+\frac{\pi}{4})$ می‌رسیم.

۲ـ گزینه «۱» معادله به فرم استاندارد $Mdx+Ndy=0$ داده شده است و در آن N و M به صورت توابع چندجمله‌ای داده شده‌اند. پس ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا معادله مفروض کامل است یا نه:

$$\begin{cases}M=-(x^2+y^2+1)\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-2y\\ N=2xy\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=2y\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2y-2y=-4y$$

معادله کامل نیست اما اگر $-4y$ را بر N تقسیم کنیم عامل انتگرال‌ساز را به‌عنوان تابعی از x خواهیم داشت:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dy}\Rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{-4y}{2xy}dx}=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2Lnx}=e^{Lnx^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

حالا عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ را در طرفین معادله دیفرانسیل ضرب می‌کنیم تا به یک معادله کامل برسیم:

$$\frac{2y}{x}dy-(1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x^2})dx=0$$

و سپس به سادگی جواب عمومی را با توجه به این‌که $N^*=0$ است تعیین می‌کنیم:

$$\int Mdx+\int N^*dy=c\Rightarrow-\int(1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x^2})dx+\int 0dy=c\Rightarrow-(x-\frac{y^2}{x}-\frac{1}{x})=c\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x}-x^2+y^2+1=cx\Rightarrow y^2=x^2+cx-1$$

گفته شد که جواب عمومی معادله از $(1,1)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$1=1+c-1\Rightarrow c=1\Rightarrow y^2=x^2+x-1$$

خب، حالا باید در جواب عمومی $y=\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم: با جایگذاری به رابطه $x^2+x-6=0$ می‌رسیم. در صورتی‌که رابطه به‌دست آمده را به فرم $(x+3)(x-2)=0$ بنویسیم، دو جواب $\begin{cases}x=2\\x=-3\end{cases}$ برای $y=\sqrt{5}$ به‌دست می‌آید.

۳ـ گزینه «۴» در این معادله که به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده، خطی بودن نسبت به x و y منتفی است. زیرا در ضریب dx عواملی برحسب x دیده می‌شود و همچنین در ضریب dx یک چندجمله‌ای درجه اول از y حضور ندارد. اما با تقسیم طرفین بر $\cos^2 y$، در سمت راست تساوی تنها تابعی از x داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\frac{\sin 2y}{\cos^2 y}=x^2 \xrightarrow{\sin 2y=2\sin y\cos y} \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\frac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y}=x^2 \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 y}=1+tg^2 y} (1+tg^2 y)\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}tg\,y=x^2$$

حالا توجه کنید که مشتق تابع $g(y)=tg\,y$ در اولین جمله سمت چپ تساوی ظاهر شده است. پس معادله دارای فرم $g'(y)y'+h(x)g(y)=\varphi(x)$ است و تغییر متغیر مناسب $u=tg\,y$ است. با جایگذاری درمعادله داریم:

$$u'=(1+tg^2 y)y' \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} u'+\frac{2}{x}u=x^2$$

واضح است که پس از تغییر متغیر به یک معادله خطی برای تابع مجهول u نسبت به x رسیدیم. جواب معادله به‌دست آمده به‌سادگی تعیین می‌شود:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2Lnx}=x^2 \Rightarrow u(x)=\frac{1}{x^2}[\int x^2.x^2dx+c]$$

$$u(x)=\frac{1}{x^2}[\frac{x^5}{5}+c] \xrightarrow{u=tg\,y} tgy=\frac{1}{x^2}(\frac{x^5}{5}+c) \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2} x^2tgy=(\frac{x^5}{5})+c$$

۴ـ گزینه «۱» اگر کمی دقت کنید در معادله جمله $2xdx+2ydy$ را می‌بینیم. این عبارت یک دیفرانسیل کامل به‌صورت $d(x^2+y^2)$ است. از طرفی عبارت x^2+y^2 نیز عیناً در معادله ظاهر شده است. پس به روش دیفرانسیل کامل می‌توان معادله را حل کرد. ابتدا طرفین تساوی را بر x^2+y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dy+\frac{2y}{x^2+y^2}dy+\frac{2x}{x^2+y^2}dx=0 \Rightarrow dy+\frac{2ydy+2xdx}{x^2+y^2}=0$$

می‌دانیم $d(Ln(x^2+y^2))=\frac{2ydy+2xdx}{x^2+y^2}$ است، پس معادله در واقع به فرم $dy+d(Ln(x^2+y^2))=0$ می‌باشد. لذا از طرفین آن انتگرال می‌گیریم تا به جواب عمومی برسیم:

$$y+Ln(x^2+y^2)=Lnc \Rightarrow Ln(x^2+y^2)-Lnc=-y \Rightarrow Ln\frac{x^2+y^2}{c}=-y$$

$$\frac{x^2+y^2}{c}=e^{-y} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } ce^{+y}} (x^2+y^2)e^y=c$$

۵ـ گزینه «۳» برای معادلات به فرم $f(x,y,y')=0$ ابتدا خطی بودن را بررسی می‌کنیم. واضح است که با یک معادله برنولی سروکار داریم که در آن $\alpha=2$ است. پس تغییر متغیر $u=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ را به‌کار می‌گیریم تا معادله را به یک معادله خطی تبدیل کنیم:

$$u=\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

معادله دیفرانسیل داده شده را بر $-y^2$ تقسیم می‌کنیم تا در سمت راست تساوی تنها $Q(x)$ باقی بماند.

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}tg(x)=\sec x$$

حالا از تغییر متغیر و مشتق آن برای جایگذاری در رابطه فوق استفاده می‌کنیم:

$$\frac{du}{dx}+tg(x)u=\sec x$$

همان‌طورکه می‌بینید یک معادله مرتبه اول خطی با تابع مجهول u داریم که در آن $p(x)=tg\,x$ و $q(x)=\sec x$ است، ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int tg\,x\,dx}=e^{-Ln\cos x}=e^{Ln\cos^{-1}x}=\cos^{-1}x=\frac{1}{\cos x}$$

بنابراین جواب معادله به‌صورت مقابل است:

$$u=\frac{1}{\frac{1}{\cos x}}[\int\frac{1}{\cos x}.\sec xdx+c] \Rightarrow u=\cos x[tg\,x+c]$$

در گام بعدی نیز باید $u=\frac{1}{y}$ قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{y}=\cos x[tg\,x+c]$$

برای تعیین ثابت c از شرط اولیه داده شده یعنی $(0,1)$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{1}=1(0+c) \Rightarrow c=1 \Rightarrow \frac{1}{y}=\cos x(tgx+1) \Rightarrow \frac{1}{y}=\sin x+\cos x$$

$$y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$$

رابطه فوق جواب خصوصی معادله دیفرانسیل صورت سؤال است. برای تعیین x که در آن مقدار تابع $y=\sqrt{2}$ است به جای y در جواب خصوصی، $y=\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم و با استفاده از اتحاد $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)$ داریم:

$$\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2\sin(\frac{\pi}{4}+x)=1 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} \sin(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$$

۶ـ گزینه «۱» با ضرب dx در معادله دیفرانسیل، آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(e^{x^2}+e^{y^2})y\,dy+e^{x^2}(xy^2-x)\,dx=0 \Rightarrow e^{x^2}(xy^2-x)\,dx+(e^{x^2}+e^{y^2})y\,dy=0$$

حالا به یک معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ رسیده‌ایم که در آن M و N از ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی تشکیل شده است. لذا در گام نخست شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} M=e^{x^2}(xy^2-x) \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2xye^{x^2} \\ N=(e^{x^2}+e^{y^2})y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=2xye^{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل کامل است و می‌توان جواب عمومی را به راحتی تعیین کرد با توجه به اینکه $M^*=-xe^{x^2}$، لذا داریم:

$$\int M^*\,dx+N\,dy=c \Rightarrow \int -xe^{x^2}+\int(e^{x^2}+e^{y^2})y\,dy=c \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}y^2e^{x^2}+\frac{1}{2}e^{y^2}=c$$

$$e^{x^2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{y^2}=c \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۲}} e^{x^2}(y^2-1)+e^{y^2}=2c$$

با قرار دادن C به جای $2c$ به جواب عمومی $e^{x^2}(y^2-1)+e^{y^2}=C$ می‌رسیم.

۷ـ گزینه «۳» واضح است که معادله داده شده نه نسبت به x و نه نسبت به y خطی نیست. با توجه به فرم معادله داده شده بـه نظـر مـی‌رسـد کـه روش دسته‌بندی کارساز باشد. چون عبارت $2ydx+2xdy=2d(xy)$ یک دیفرانسیل کامل است. همچنین اگر به عبارت $2x^2y^{\frac{3}{2}}dx+x^3y^{\frac{1}{2}}dy$ خوب نگاه کنید متوجه می‌شوید به ترتیب ۱ واحد به توان x اضافه شده و یک واحد از توان y کم شده است. پس این عبارت را نیز می‌تـوان بـه صـورت دیفرانسـیل کامـل نوشت. بنابراین داریم:

$$2ydx+2xdy+2x^2y^{\frac{3}{2}}dx+x^3y^{\frac{1}{2}}dy=0 \Rightarrow 2d(xy)+\frac{2}{3}d(x^3y^{\frac{3}{2}})=0$$

دیدیم که معادله به فرم دیفرانسیل کامل ظاهر شد. از طرفین آن انتگرال می‌گیریم:

$$2xy+\frac{2}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}=c$$

می‌دانیم که نقطه $(1,1)$ در جواب عمومی صدق می‌کند؛ لذا با جایگذاری در معادله و تعیین c جواب خصوصی به دست می‌آید.

$$0+0=c \Rightarrow c=0 \Rightarrow 2xy+\frac{2}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}=0 \Rightarrow y(2x+\frac{2}{3}x^3\sqrt{y})=0$$

۸ـ گزینه «۱» این تست به دو روش حل می‌گردد. روش اول دسته‌بندی است. وجود عبارت $2xdy+2ydx=2d(xy)$ در تشخیص و به‌کارگیری این روش به ما کمک می‌کند. اما در روش دوم با دو خط غیرموازی، $2y-x+5$ و $2x-y-4$ سروکار داریم. مطابق با دستورالعمل گفته شده برای دو خـط متقـاطع ابتدا باید محل تقاطع آن‌ها را پیدا کنیم (α,β). آنگاه از تغییر متغیر $x=X+\alpha$ یا $X=x-\alpha$ و $y=Y+\beta$ یا $Y=y-\beta$ استفاده می‌کنیم تا در نهایـت به یک معادله جدید تفکیک‌پذیر برسیم. در این تست از روش اول که حجم محاسبات کمتری دارد استفاده می‌کنیم:

$$(2x-y-4)dy+(2y-x+5)dx=0 \Rightarrow 2xdy-ydy-4dy+2ydx-xdx+5dx=0$$

$$2xdy+2ydx-ydy-4dy+5dx-xdx=0 \Rightarrow 2d(xy)-\frac{1}{2}d(y^2)-4dy+5dx-\frac{1}{2}d(x^2)=0$$

ملاحظه می‌کنید که معادله به شکل دیفرانسیل کامل ظاهر شد. با انتگرال‌گیری داریم:

$$2xy-\frac{y^2}{2}-4y+5x-\frac{1}{2}x^2=C \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۲}} 4xy-y^2-8y-x^2+10x=2c \xrightarrow{2c=C} 4xy-y^2-8y-x^2+10x=c$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا y' را $\frac{dy}{dx}$ نوشته و سپس طرفین معادله را در dx ضرب می‌کنیم تا $(xy+x^۳y^۳)dy = dx$ به‌دست آید. در ضریب dx تابعی برحسب x نیست. در ضریب dy یک چندجمله‌ای برحسب x وجود دارد که از دو ترم درجه ۱ و درجه ۳ تشکیل شده است. پس معادله برنولی است. در معادله به‌دست آمده طرفین را بر dy نیز تقسیم می‌کنیم تا به $xy+x^۳y^۳ = \frac{dx}{dy}$ یا $\frac{dx}{dy} = xy + x^۳y$ دست یابیم.

حالا با انتقال جمله xy به سمت چپ تساوی داریم:
$$\frac{dx}{dy} - yx = x^۳y^۳$$

حالا معادله را بر $x^۳$ تقسیم می‌کنیم تا در سمت راست تساوی فقط $q(y)$ داشته باشیم. سپس با تغییرمتغیر $u = x^{۱-۳} = x^{-۲} = \frac{۱}{x^۲}$ معادله برنولی را به فرم خطی مرتبه اول نسبت به x تبدیل می‌کنیم:
$$\frac{۱}{x^۳}\frac{dx}{dy} - \frac{y}{x^۲} = y^۳ \xrightarrow{u=x^{-۲} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -۲x^{-۳}\frac{dx}{dy} \Rightarrow x^{-۳}\frac{dx}{dy} = \frac{-۱}{۲}\frac{du}{dy}} \frac{-۱}{۲}\frac{du}{dy} - yu = y^۳ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } -۲} \frac{du}{dy} + ۲yu = -۲y^۳$$

حالا باید $\mu(y)$ را تعیین کنیم:
$$\mu(y) = e^{\int ۲y\,dy} = e^{y^۲}$$

و با داشتن $\mu(y)$ جواب عمومی را به‌دست می‌آوریم:
$$u(y) = \frac{۱}{e^{y^۲}}[\int e^{y^۲}(-۲y^۳)dy + c] \Rightarrow u(y) = e^{-y^۲}(-۲\int y^۳e^{y^۲}dy + c)$$

جهت محاسبه انتگرال $\int y^۳e^{y^۲}dy$ از تغییرمتغیر $y^۲ = v$ استفاده می‌کنیم. نتیجه این تغییرمتغیر $۲ydy = dv$ است. با جایگذاری در انتگرال داریم: $\int \frac{ve^v\,dv}{۲}$ حاصل انتگرال از روش جز به جز برابر $\frac{(v-۱)}{۲}e^v$ به‌دست می‌آید. با جایگزینی دوبار $v = y^۲$ حاصل به‌صورت $\frac{۱}{۲}(y^۲-۱)e^{y^۲}$ خواهد بود.

پس تا به اینجای کار داریم:
$$u(y) = e^{-y^۲}(-۲\times\frac{۱}{۲}(y^۲-۱)e^{y^۲} + c) = -(y^۲-۱) + ce^{-y^۲}$$

با جایگزینی $u = \frac{۱}{x^۲}$ خواهیم داشت:
$$\frac{۱}{x^۲} = ۱ - y^۲ + ce^{-y^۲} \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} = ۱ - y^۲ + \frac{c}{e^{y^۲}}$$

۱۰ـ گزینه «۳» ابتدا اگر خوب دقت کنید خواهید دید در ضریب dx خبری از x نیست. در ضریب dy هم دوجمله برحسب x داریم. یکی $x^۱$ و دیگری $x^\alpha = x^۳$. پس معادله نسبت به x برنولی است. ابتدا طرفین را بر $۲y\,dy$ تقسیم می‌کنیم:
$$\frac{dx}{dy} - \frac{۱}{۲y}(x - x^۳y\cos y) = ۰ \Rightarrow x' - \frac{۱}{۲y}x = \frac{-x^۳}{۲}\cos y$$

با تغییر متغیر $u = x^{۱-۳} = x^{-۲}$ که نتیجه $u' = -۲x^{-۳}x'$ را دارد. این معادله به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل خواهد شد. ابتدا طرفین را بر $x^۳$ تقسیم می‌کنیم و سپس جایگذاری مربوط به تغییرمتغیر را انجام می‌دهیم:
$$\frac{۱}{x^۳} - \frac{۱}{۲y}\frac{۱}{x^۲} = \frac{-۱}{۲}\cos y \Rightarrow \frac{-۱}{۲}u' - \frac{۱}{۲y}u = \frac{-۱}{۲}\cos y \xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } -۲} u' + \frac{۱}{y}u = \cos y.$$

حالا به یک معادله خطی مرتبه اول رسیده‌ایم، با محاسبه عامل انتگرال‌ساز داریم:
$$u(y) = e^{\int \frac{۱}{y}dy} = e^{Lny} = y$$

بنابراین جواب معادله به‌صورت زیر خواهد بود:
$$u = \frac{۱}{y}[\int y\cos y\,dy + c] = \frac{۱}{y}(y\sin y + \cos y + c) \xrightarrow{u=\frac{۱}{x^۲}} \frac{۱}{x^۲} = \frac{۱}{y}(y\sin y + \cos y + c) \xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } y} \frac{y}{x^۲} = y\sin y + \cos y + c$$

حالا باید شرط $y(۱) = \pi$ را در معادله جایگذاری کنیم تا جواب خصوصی حاصل شود:
$$\frac{\pi}{۱} = \pi\sin\pi + \cos\pi + c \Rightarrow \pi = ۰ - ۱ + c \Rightarrow c = \pi + ۱ \Rightarrow \frac{y}{x^۲} = y\sin y + \cos y + \pi + ۱$$

توجه: حاصل انتگرال $\int y\cos y$ به روش جدول به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

مشتق ↓	انتگرال ↓
y	$\cos y$
۱	$+\ \sin y$
۰	$-\ \cos y$

$$\int y\cos y\,dy = y\sin y + \cos y$$

۱۱ــ گزینه «۲» جملات x، $\sqrt{xy}$ و y همگی همگن از درجه ۱ هستند. پس با تقسیم طرفین بر x سعی می‌کنیم که عبارت $\frac{y}{x}$ را در معادله بسازیم.

$$(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{xy}}{x^2})y'=\frac{y}{x} \Rightarrow (1-\sqrt{\frac{xy}{x^2}})y'=\frac{y}{x} \Rightarrow (1-\sqrt{\frac{y}{x}})y'=\frac{y}{x}$$

با به‌کارگیری تغییرمتغیر $u=\frac{y}{x}$ یا $y=ux$ که نتیجه $y'=xu'+u$ را دارد خواهیم داشت:

$$(1-\sqrt{u})(xu'+u)=u \Rightarrow (xu'+u)-\sqrt{u}(xu'+u)=u$$

$$xu'+u-x\sqrt{u}u'-u\sqrt{u}=u \Rightarrow x(1-\sqrt{u})u'=u\sqrt{u} \xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} x(1-\sqrt{u})\frac{du}{dx}=u\sqrt{u}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } (1+\sqrt{u})du} \frac{x}{dx}=\frac{u\sqrt{u}}{(1-\sqrt{u})du} \xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}} \frac{dx}{x}=\frac{(1-\sqrt{u})du}{u\sqrt{u}}$$

رابطه جدید به‌دست آمده یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر است. با انتگرال‌گیری از طرفین آن خواهیم داشت:

$$\text{Ln}\,x=\int(\frac{1}{u\sqrt{u}}-\frac{1}{u})du=-2u^{-\frac{1}{2}}-\text{Ln}u+c \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \text{Ln}x=-2(\frac{y}{x})^{-\frac{1}{2}}-\text{Ln}\frac{y}{x}+c$$

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x})^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}} \text{Ln}x=-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\text{Ln}y+\text{Ln}x+c \Rightarrow \text{Ln}y+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=c$$

۱۲ــ گزینه «۳» اگر طرفین معادله را در dx ضرب کنیم به رابطه $xdy+ydx+x(1-x^2y^2)^{\frac{1}{2}}dx=0$ می‌رسیم. همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید معادله نسبت به x خطی نیست چون در ضریب dx عبارت شامل x داریم.

همچنین نسبت به y هم خطی نیست. چون ضریب dx باید شامل چند جمله‌ای درجه اول از y باشد. جمله $x(1-x^2y^2)^{\frac{1}{2}}$، نسبت به y از حالت درجه اول خارج است. اما آیا معادله نسبت به y برنولی است؟ برای برنولی بودن نسبت به y باید در ضریب dx جمله y و y^{α} همزمان با هم داشته باشیم که این اتفاق هم رخ نداده است. پس چاره کار به‌کارگیری سایر روش‌ها از جمله روش تغییر متغیر است. باید تغییر متغیری به‌گونه‌ای انتخاب شود که زیر رادیکال تنها تابعی از یک متغیر باشد. اگر $u=xy$ در نظر بگیریم زیر رادیکال به‌صورت $1-u^2$ تبدیل می‌شود. همچنین مشتق آن یعنی $du=xdy+ydx$ نیز عیناً در معادله ظاهر شده است. با این توضیحات داریم:

$$du+x\sqrt{1-u^2}\,dx=0 \xrightarrow{\text{معادله تقسیم‌بر} \sqrt{1-u^2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}+xdx=0 \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-xdx$$

معادلات دیفرانسیل جدید به‌دست آمده تفکیک‌پذیر است. از طرفین آن انتگرال می‌گیریم:

$$\sin^{-1}(u)=-\frac{x^2}{2}+c \xrightarrow{u=xy} \sin^{-1}xy=-\frac{x^2}{2}+c$$

$$\frac{x^2}{2}+\sin^{-1}xy=c$$

۱۳ــ گزینه «۳» معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ داده شده و چون M و N از ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی تشکیل شده است بررسی کامل بودن معادله در اولویت است. در ابتدا با محاسبه $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ کامل بودن معادله را تحقیق می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=e^x(1+x) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=0 \\ N=-(xe^x-ye^y) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-(x+1)e^x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(x+1)e^x$$

ملاحظه می‌کنید که معادله کامل نیست، اما اگر بر M تقسیم کنیم. می‌توانیم فاکتور انتگرال را به‌عنوان تابعی از y محاسبه کنیم.

$$-\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-\frac{1}{e^x(1+x)}(x+1)e^x=-1$$

آنگاه فاکتور انتگرال برابر است با:

$$e^{\int -dy}=e^{-y}$$

این فاکتور را در معادله ضرب می‌کنیم. حاصل یک معادله دیفرانسیل کامل خواهد بود:

$$e^{-y}\times e^x(1+x)dx-e^{-y}(xe^x-ye^y)dy=0 \Rightarrow e^{x-y}(1+x)dx-(xe^{x-y}-y)dy=0$$

با به‌کارگیری $\int M^*dx+\int Ndy$ که در آن $M^*=0$ است جواب عمومی معادله به‌دست می‌آید: $\int 0dx+\int -(xe^{x-y}-y)dy=c \Rightarrow xe^{x-y}+\frac{y^2}{2}=c$

۱۴ـ گزینه «۱» اگر خوب دقت کنید! $1+x^2+y^2+x^2y^2=(1+x^2)(1+y^2)$ است و معنای آن این است که معادله را می‌توان برحسب x و y جدای از یکدیگر نوشت. بنابراین داریم:

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } xdx} ydy=\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\,xdy$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \sqrt{1+y^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

با کمی ساده‌سازی دیدید که به یک معادله تفکیک‌پذیر رسیده‌ایم. از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم:

$$\int y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx+c\Rightarrow(1+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c\ \Rightarrow\sqrt{1+y^2}=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

۱۵ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین بر $x(x-y)$ به رابطه $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+y)}{x(x-y)}$ خواهیم رسید که این معادله همگن از درجه صفر است. با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})}=(\frac{y}{x})\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

با قرار دادن $u=\frac{y}{x}$ و مشتق آن یعنی $y=xu\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ به یک معادله تفکیک‌پذیر دست خواهیم یافت:

$$x\frac{du}{dx}+u=u\frac{1+u}{1-u}\ \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u\frac{1+u}{1-u}-u=u(\frac{1+u}{1-u}-1)$$

$$x\frac{du}{dx}=u\frac{1+u-(1-u)}{1-u}=\frac{2u^2}{1-u}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{x}{dx}=\frac{2u^2}{1-u}\cdot\frac{1}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}}\frac{dx}{x}=\frac{(1-u)du}{2u^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u})du$$

اگر از طرفین رابطه جدید انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\text{Ln}x=\frac{1}{2}(-\frac{1}{u}-\text{Ln}u)+c\xrightarrow{u=\frac{y}{x}}\text{Ln}cx=\frac{1}{2}(-\frac{1}{\frac{y}{x}}-\text{Ln}\frac{y}{x})+c$$

$$2\text{Ln}x=-\frac{x}{y}-\text{Ln}\frac{y}{x}+2c\Rightarrow\text{Ln}c^2x^2+\text{Ln}\frac{y}{x}=-\frac{x}{y}+2c$$

$$\text{Ln}(x^2\times\frac{y}{x})=-\frac{x}{y}+2c\Rightarrow\text{Ln}cyx=-\frac{x}{y}+2c\ \Rightarrow\text{Ln}xy+\frac{x}{y}=2c\xrightarrow{2c=c}\text{Ln}xy+\frac{x}{y}=c$$

۱۶ـ گزینه «۳» با انتقال جمله $2e^{-y}$ به سمت چپ تساوی و سپس ضرب معادله در dx داریم، طرفین معادله را در dx داریم:

$$(x+1)\frac{dy}{dx}+(1-2e^{-y})=0\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } dx}(x+1)dy(1-2e^{-y})dx=0$$

$$(1-2e^{-y})dx+(x+1)dy=0$$

حالا چون فرم نمایش معادله به صورت $Mdx+Ndy=0$ است و M و N از ترکیب توابع چندجمله‌ای و خطی تشکیل شده است بررسی می‌کنیم که آیا $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$:

$$\begin{cases}M=1-2e^{-y}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=+2e^{-y}\\ N=x+1\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=1\end{cases}\qquad\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2e^{-y}-1=-(1-2e^{-y})$$

خب، معادله کامل نیست اما با تقسیم بر $-M$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{-M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{1}{1-2e^{-y}}[-(1-2e^{-y})]=+1\Rightarrow\mu(x)=e^{\int+dy}=e^{+y}$$

با ضرب e در معادله به یک معادله دیفرانسیل کامل خواهیم رسید:

$$e^{+y}(1-2e^{-y})dx+e^{+y}(x+1)dy=0\Rightarrow(e^y-2)dx+(x+1)e^ydy=0$$

و نهایتاً به روش زیر جواب عمومی معادله معین خواهد شد.

$$\int Mdx+\int N^*dy=c\ \Rightarrow\int(e^y-2)dx+\int e^ydy=c$$

$$(e^y-2)x+e^y=c\ \Rightarrow e^y(x+1)=2x+c$$

۱۷ـ گزینه «۱» واضح است که یک معادله برنولی با $\alpha=3$ داریم. ابتدا طرفین تساوی را بر y^3 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+tgx\frac{1}{y^2}=\cos x$$

حالا تغییر متغیر $u=y^{1-3}=y^{-2}=\frac{1}{y^2}$ و مشتق آن یعنی $\frac{du}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}=-2\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}$ را به‌کار می‌گیریم:

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+tgx\,u=\cos x\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } -2}\frac{du}{dx}-2tgx\,u=-2\cos x$$

پس از تغییر متغیر به یک معادله خطی مرتبه اول با $p(x)=-2tgx$ رسیده‌ایم. در این معادله $\mu(x)=e^{\int -2tgx}=e^{2Ln\cos x}=\cos^2 x$ است. با داشتن $\mu(x)$ جواب عمومی را تعیین می‌کنیم:

$$u(x)=\frac{1}{\cos^2 x}[\int\cos^2 x(-2\cos x)dx+c]=\frac{1}{\cos^2 x}[-2\int\cos^3 xdx+c]$$

حاصل انتگرال را به روش اتحاد مثلثاتی به‌صورت $\int\cos^3 xdx=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$ داریم: لذا جواب عمومی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(x)=\frac{1}{\cos^2 x}(-2\sin x+\frac{2}{3}\sin^3 x+c)\xrightarrow{u=\frac{1}{y^2}}\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\cos^2 x}(\frac{2}{3}\sin^3 x-2\sin x+c)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y^2\cos^2 x}\cos^2 x=y^2(\frac{2}{3}\sin^3 x-2\sin x+c)$$

۱۸ـ گزینه «۲» با کمی دقت واضح است معادله نسبت به y خطی نیست (چون در ضریب dy توابعی شامل y داریم). از طرفی در ضریب dx هم عامل x نداریم و در ضریب dy هم توان x عدد یک است، پس معادله نسبت به x خطی خواهد بود. با تقسیم طرفین بر dy و $1+y^2$ داریم:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{xy}{1+y^2}\xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}}\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$$

همان‌طور که می‌بینید یک معادله دیفرانسیل خطی برحسب x و با متغیر y داریم؛ ابتدا $\mu(y)$ را حساب می‌کنیم:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{y}{1+y^2}dy}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{1+y^2}}=e^{\frac{1}{2}Ln(1+y^2)}=e^{Ln\sqrt{1+y^2}}=e^{\sqrt{1+y^2}}$$

حالا فرم جواب را می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}[\int(\sqrt{1+y^2})\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}dy+C]\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}=\int\sin ydy+C\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}=-\cos y+C\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$$

۱۹ـ گزینه «۳» یک معادله خطی مرتبه اول داریم:

$$M(t)=e^{\int\frac{\cos t}{\sin t}dt}=e^{Ln(\sin t)}=\sin t$$

پس جواب به شکل زیر است:

$$y=\frac{1}{\sin t}[\int\sin t\times\frac{e^t}{\sin t}dt+c]\Rightarrow y=\frac{e^t+c}{\sin t}\Rightarrow y(1)=b\Rightarrow b=\frac{e+c}{\sin t}\Rightarrow c=b\sin 1-e\Rightarrow y(t)=\frac{e^t+b\sin 1-e}{\sin t}$$

چون $t\to 0$، لذا $\sin t\to 0$ و این یعنی مخرج به سمت صفر می‌رود و بنابراین باید $e^t+b\sin t-e\to 0$ تا حاصل حد y (در $t\to 0$) عدد شود؛ پس $b\sin t-e$ باید برابر با -1 شود (چون $e^0=1$ است) پس $b\sin 1-e=-1$ و این یعنی $b=\frac{e-1}{\sin 1}$ است.

۲۰ـ گزینه «۴» به علت وجود عامل‌های غیرخطی $y\cos y$ در ضریب dy و $-yx\sin y$ در ضریب dx معادله نسبت به x یا y خطی نیست. عبارت xy در تمام جملات ظاهر شده است. با تقسیم معادله بر xy داریم:

$$\frac{1}{xy}(y^2-yx\sin y)dx+\frac{1}{xy}(xyLn x-x^2y\cos y)dy=0$$

$$(\frac{y}{x}-\sin y)dx+(Ln x-x\cos y)dy=0$$

$$[\frac{y}{x}dx+Ln x\,dy]-[\sin y\,dx+x\cos y\,dy]=0$$

جمله اول درون پرانتز دیفرانسیل کامل به‌صورت $d(yLnx)$ و جمله دوم دیفرانسیل کامل به‌صورت $d(x\sin y)$ است. در نتیجه معادله به فرم دیفرانسیل کامل $d(yLnx)-d(x\sin y)=0$ می‌شود. از معادله جدید انتگرال می‌گیریم:

$$yLn x-x\sin y=c$$

با جایگذاری $(1,\frac{\pi}{2})$ ثابت c تعیین خواهد شد:

$$\frac{\pi}{2}Ln1-\sin\frac{\pi}{2}=c\Rightarrow c=-1$$

پس جواب خصوصی معادله دارای فرم مقابل است:

$$yLnx-x\sin y+1=0$$

۲۱ــ گزینه «۳» ابتدا با ساده‌سازی سعی می‌کنیم معادله را به فرم $y=f(x,y')$ بنویسیم:

$$(y-xy')^{۲}=۱+y' \xrightarrow{\text{طرفین به توان } \frac{۱}{۲}} y-xy=\pm\sqrt{۱+y'} \Rightarrow y=xy'\pm\sqrt{۱+y'}$$

اکنون با جایگذاری p به جای y' معادله را به‌صورت $y=xp\pm\sqrt{۱+p}$ بازنویسی می‌کنیم و در ادامه با مشتق‌گیری نسبت به x معادله جدید دیگری به‌صورت $y'=p+xp'\pm\frac{p'}{۲\sqrt{۱+p}}$ ایجاد می‌نماییم. این معادله نیز با جایگذاری دوباره p به جای y' به‌صورت زیر خواهد بود.

$$p=p+xp'\pm\frac{p'}{۲\sqrt{۱+p}} \Rightarrow xp'\pm\frac{p'}{۲\sqrt{۱+p}}=۰ \Rightarrow p'(x\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۱+p}})=۰$$

از رابطه فوق حاصل $x\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۱+p}}$ برابر صفر است که از آن $p=\frac{۱}{۴x^{۲}}-۱$ نتیجه می‌شود. لذا با جایگذاری p در معادله $y=xp\pm\sqrt{۱+p}$ جواب معادله به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$y=x(\frac{۱}{۴x^{۲}}-۱)\pm\sqrt{۱+(\frac{۱}{۴x^{۲}}-۱)} \Rightarrow y=\frac{۱}{۴x}-x\pm\sqrt{\frac{۱}{۴x^{۲}}} \Rightarrow y=\frac{۱}{۴x}-x\pm\frac{۱}{۲x}$$

اما همان‌طور که از معادله دیفرانسیل مشخص است حاصل $۱+y'\geq ۰$ است و این به‌ازای علامت منفی رخ خواهد داد، پس داریم:

$$y=\frac{۱}{۴x}-x-\frac{۱}{۲x}=-\frac{۱}{۴x}-x$$

و حاصل $y(-\frac{۱}{۴})$ نیز با جایگذاری برابر $y=\frac{۵}{۴}$ خواهد بود.

۲۲ــ گزینه «۲» واضح است که معادله تفکیک‌پذیر و یا همگن نیست. از طرفی این معادله نسبت به x و یا y نیز خطی نیست چون در ضریب dx، عبارتی برحسب x و در ضریب dy عبارت e^{y} برحسب y را وجود دارد، اما با نوشتن معادله به‌صورت $e^{y}y'+۳e^{y}=۴\cos x$، ملاحظه می‌کنیم که اگر تغییر $u=e^{y}$ را به‌کار بگیریم. مشتق آن نیز؛ یعنی $u'=e^{y}y'$ عیناً در معادله ظاهر شده است. پس معادله با این تغییر متغیر به فرم خطی تبدیل خواهد شد.

$$u'+۳u=۴\cos x \Rightarrow \mu(x)=e^{\int ۳dx}=e^{۳x} \Rightarrow u(x)=\frac{۱}{e^{۳x}}[\int e^{۳x}(۴\cos x)dx+c]$$

$$u(x)=e^{-۳x}[۴\int e^{۳x}\cos x dx+c]=e^{-۳x}(\frac{۲e^{۳x}[\sin x+۳\cos x]}{۵}+c)$$

$$u(x)=\frac{۲}{۵}(\sin x+۳\cos x)+ce^{-۳x} \xrightarrow{u=e^{y}} e^{y}=\frac{۲}{۵}(\sin x+۳\cos x)+ce^{-۳x}$$

۲۳ــ گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم $\frac{dy}{dx}$ را برای هر دو منحنی محاسبه کنیم.

$$x^{n}+y^{n}=c_{۱} \Rightarrow y^{n}=c_{۱}-x^{n} \xrightarrow{\text{از معادله نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم}} ny^{n-۱}y'=-nx^{n-۱} \Rightarrow y'=\frac{-nx^{n-۱}}{ny^{n-۱}}=-(\frac{x}{y})^{n-۱}$$

$$y=\frac{x}{۱-c_{۲}x} \Rightarrow ۱-c_{۲}x=\frac{x}{y} \Rightarrow -c_{۲}x=\frac{x}{y}-۱ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} -c_{۲}=\frac{۱}{y}-\frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{از معادله نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم}}$$

$$۰=-\frac{y'}{y^{۲}}+\frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow \frac{y'}{y^{۲}}=\frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow y'=\frac{y^{۲}}{x^{۲}}=(\frac{y}{x})^{۲}=(\frac{x}{y})^{-۲}$$

از طرفی می‌دانیم که برای دو منحنی عمود بر هم در نقطه تماس حاصل‌ضرب شیب‌ها -۱ است:

$$y'_{۱}+y'_{۲}=-(\frac{x}{y})^{n-۱}\times(\frac{x}{y})^{-۲}=-۱ \Rightarrow -(\frac{x}{y})^{n-۳}=-۱ \Rightarrow (\frac{x}{y})^{n-۳}=۱ \Rightarrow n=۳$$

۲۴ــ گزینه «۳» دقت کنید که معادله به فرم $x=f(y,y')$ داده شده است. پس در گام اول به جای y'، p را قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{y}{p}+\frac{۱}{p^{۲}} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} ۱=\frac{py'-yp'}{p^{۲}}+\frac{-۲pp'}{p^{۴}} \xrightarrow{y'=p} ۱=\frac{pp-yp'}{p^{۲}}-\frac{۲p'}{p^{۳}}$$

$$۱=۱-\frac{y}{p^{۲}}p'-\frac{۲}{p^{۳}}p' \Rightarrow ۰=-p'(\frac{y}{p^{۲}}+\frac{۲}{p^{۳}})$$

جواب غیرعادی معادله هنگامی رخ می‌دهد که عبارت درون پرانتز صفر شود:

$$\frac{y}{p^{۲}}+\frac{۲}{p^{۳}}=۰ \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } p^{۲}} y+\frac{۲}{p}=۰ \Rightarrow \frac{۲}{p}=-y \Rightarrow p=-\frac{۲}{y}$$

خب! اکنون با جایگذاری $-\frac{۲}{y}$ به‌جای p در معادله $x=\frac{y}{p}+\frac{۱}{p^{۲}}$ جواب غیرعادی تعیین می‌شود:

$$x=\frac{۶}{(-\frac{۲}{y})}+\frac{۱}{(-\frac{۲}{y})^{۲}} \Rightarrow x=-\frac{y^{۲}}{۲}+\frac{y^{۲}}{۴}=-\frac{y^{۲}}{۴} \Rightarrow x=-\frac{y^{۲}}{۴} \Rightarrow ۴x=-y^{۲}$$

۲۵ـ گزینه «۴» معادله به‌صورت $f(x,y,y')=0$ داده شده است و به‌صورت خطی استاندارد برحسب y است. ابتدا با تعیین فاکتور انتگرال به حل مسأله می‌پردازیم:

$$\mu(x)=e^{\int -Ln2dx}=e^{-Ln2x}=(e^{-Ln2})^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$$

$$y=\frac{1}{2^{-x}}[\int 2^{-x}\{2^{\sin x}(\cos x-1)Ln2\}dx+c]=\frac{2^{\sin x-x}+c}{2^{-x}}=2^{\sin x}+c2^x$$

حالا دقت کنید: در $x\to\infty$ چون جمله 2^x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، تنها راه کراندار ماندن y صفر بودن ضریب c است. به عبارتی دیگر $y=2^{\sin x}$ و این جواب نیز به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ نتیجه $y=\sqrt{2}$ را در پی دارد.

۲۶ـ گزینه «۳» معادله داده شده به فرم $y'=f(t,y,y')$ بوده و تفکیک‌پذیر است. بنابراین به سادگی قابل حل است.

$$\frac{dy}{dt}=y^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y^{-\frac{1}{3}}dy=dt\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=t+c$$

چون گفته شده که جواب عمومی از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد پس ثابت $c=0$ است. بنابراین جواب خصوصی برابر $y^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}t\Rightarrow y=\sqrt{(\frac{2}{3}t)^3}$ است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید برای هر مقدار از t در بازه $[0,1]$ یک جواب منحصر به فرد برای y به دست می‌آید.

۲۷ـ گزینه «۱» معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده که برای این معادله بررسی خطی بودن در اولویت نخست قرار دارد. به‌دلیل وجود ترم e^x در ضریب dx، نسبت به x خطی نیست. همچنین به‌دلیل عدم وجود یک چندجمله‌ای درجه اول از y، معادله نسبت به y نیز غیرخطی است. اما با نوشتن معادله به فرم $\frac{y'}{y}+Lny=e^x$ ملاحظه می‌کنیم که مشتق Lny، یعنی $\frac{y'}{y}$ عیناً در جمله اول ظاهر شده است. پس تغییرمتغیر $u=Lny$ را در نظر می‌گیریم تا به یک معادله خطی مرتبه اول برحسب u دست یابیم و سپس به سادگی جواب عمومی را تعیین می‌کنیم:

$$\xrightarrow{u'=\frac{y'}{y}}u'+u=e^x\Rightarrow\mu(x)=e^{\int dx}=e^x\Rightarrow u(x)=\frac{1}{e^x}[\int e^x.e^x dxec]$$

$$u(x)=\frac{1}{e^x}(\frac{e^{2x}}{2}+c)=\frac{1}{2}e^x+ce^{-x}\xrightarrow{u=Lny}Lny=\frac{1}{2}e^x+ce^{-x}$$

۲۸ـ گزینه «۱» در این معادله باید ابتدا خطی بودن را بررسی کنیم چون فرم نمایش معادله به صورت $f(x,y,y')=0$ است. اگر y' را به‌صورت $y'=\frac{dy}{dx}$ بنویسیم ملاحظه می‌کنید که معادله نسبت به y خطی نیست، چون ترم غیرخطی tg y در آن ضرب شده است. اما در ضریب dx خبری از x نیست. ضمن اینکه یک چندجمله‌ای درجه اول برحسب x در ضریب dy وجود دارد. پس معادله نسبت به x خطی است. با ضرب معادله در $\frac{dx}{dy}$ سعی می‌کنیم فرم استاندارد معدله خطی نسبت به x را به‌دست آوریم:

$$\frac{dx}{dy}+1+(x+y)tg\,y=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}+1+x\,tg\,y+y\,tg\,y=0$$

$$\frac{dx}{dy}+tg\,y\,x=-1-y\,tg\,y$$

در معادله خطی مرتبه اول بالا داریم:

$$\mu(y)=e^{\int tg\,y\,dy}=e^{-Ln\cos y}=e^{Ln\cos^{-1}y}=\cos^{-1}y=\frac{1}{\cos y}$$

حالا با داشتن عامل انتگرال‌ساز جواب عمومی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x(y)=\frac{1}{\frac{1}{\cos y}}[\int\frac{1}{\cos y}(-1-y\,tg\,y)+c]=\cos y[\int\frac{-\cos y-y\sin y}{\cos^2 y}dy+c]$$

$$x(y)=\cos y[\frac{-y}{\cos y}+c]\Rightarrow x=-y+c\cos y\Rightarrow x+y=c\cos y$$

گفته شد که جواب عمومی از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد. پس این نقطه را در معادله جایگذاری می‌کنیم: $1+0=c\cos 0\Rightarrow c=1\Rightarrow x+y=\cos y$

با جایگذاری نقطه $(0,b)$ در جواب خصوصی داریم: $b=\cos b$ و چون تابع کسینوس کراندار است، پس $-1\le b\le 1$ خواهد بود.

۲۹ـ گزینه «۲» حل معادله راحت است؛ یک معادله تفکیک‌پذیر داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos 2x}{3+2y}\Rightarrow (3+2y)dy=2\cos 2x dx\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\int(3+2y)dy=\int 2\cos 2x dx\Rightarrow 3y+y^2=\sin 2x+c$$

$$\xrightarrow{y(0)=-1}-3+1=0+c\Rightarrow c=-2\Rightarrow 3y+y^2=\sin 2x+2\Rightarrow y^2+3y=\sin 2x-2\Rightarrow (y^2+\frac{3}{2})^2=\sin 2x+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\sin 2x+\frac{1}{4}}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\sin 2x+\frac{1}{4}}$$

با توجه به اینکه $y(0)=-1$، بنابراین فقط جواب $y=-\frac{3}{2}+\sqrt{\sin 2x+\frac{1}{4}}$ قابل قبول است؛ اما حالا باید ریشه‌های معادله‌ی $y'=0$ را حساب کنیم:

$$y=-\frac{3}{2}+\sqrt{\sin 2x+\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=\frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x+\frac{1}{4}}}\Rightarrow \cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4}$ جواب ماکزیمم می‌شود؛ چون قبل از آن مقدار مشتق مثبت و بعد از آن منفی است. مقدار جواب به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ برابر با مقدار زیر است:

$$y=-\frac{3}{2}+\sqrt{\sin(2\times\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}}=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

۳۰ـ گزینه «۲» با ضرب عامل انتگرال‌ساز در معادله داریم:

$$(x^{\alpha+4}y^{\beta}+x^{\alpha+1}y^{\beta+1})dy-[x^{\alpha+3}y^{\beta+1}-x^{\alpha}y^{\beta+2}]dx=0$$

می‌خواهیم با استفاده از روش سریع‌تر گفته شده در کتاب، سؤال را حل کنیم. برای این منظور معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$[-x^{\alpha+3}y^{\beta+1}dx+x^{\alpha+4}y^{\beta}dy]+[x^{\alpha}y^{\beta+2}dx+x^{\alpha+1}y^{\beta+1}dy]=0$$

حالا با استفاده از فرمول مقابل در هر یک از پرانتزها می‌توان معادله را حل کرد:

$$\frac{\text{توان بزرگتر } y}{\text{ضریب توان کوچکتر } y}=\frac{\text{توان بزرگتر } x}{\text{ضریب توان کوچکتر } x}$$

برای پرانتز اول داریم:

$$\frac{\beta+1}{1}=\frac{\alpha+4}{-1}\Rightarrow \alpha+4=-(\beta+1)$$

برای پرانتز دوم داریم:

$$\frac{\beta+2}{1}=\frac{\alpha+1}{1}\Rightarrow \beta+2=\alpha+1$$

پس α و β از حل دستگاه مقابل حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-5\\ \beta-\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow 2\beta=-6\Rightarrow \beta=-3\Rightarrow \alpha=-2$$

بنابراین عامل انتگرال‌ساز معادله به صورت $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2y^3}$ است که با ضرب آن در معادله داریم:

$$(\frac{1}{x^2y^3})x(x^3+y)dy-(\frac{1}{x^2y^3})y(x^3-y)dx=0\Rightarrow -\frac{1}{x^2y^2}(x^3-y)dx+\frac{1}{xy^3}(x^3+y)dy=0$$

بنابرین جواب معادله به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\int Mdx+\int N^*dy=c\Rightarrow \int(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x^2y})dx+\int(0)dy=c\Rightarrow -\frac{x^2}{2y^2}-\frac{1}{xy}=c$$

۳۱ـ گزینه «۳» با کمی دقت واضح است می‌توان از عدد ۲، در سه جمله‌ی اول عبارت سمت راست فاکتور گرفت و به عبارت $9x^2+6xy+y^2$ رسید. واضح است این عبارت برابر با $(3x+y)^2$ است، پس معادله به صورت $y'=2(3x+y)^2-1$ بازنویسی می‌شود. برای حل معادله از تغییر متغیر $u=3x+y$ استفاده می‌کنیم. یعنی داریم:

$$u=3x+y\Rightarrow u'=3+y'\Rightarrow y'=u'-3$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$u'-3=2u^2-1\Rightarrow u'=2u^2+2\Rightarrow \frac{du}{dx}=2(u^2+1)\Rightarrow \frac{du}{2(u^2+1)}=dx\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{du}{(u^2+1)}=\int dx\Rightarrow \frac{1}{2}\text{Arctg}u=x+c_1$$

$$\xrightarrow{u=3x+y}\frac{1}{2}\text{Arctg}(3x+y)=x+c_1\Rightarrow \text{Arctg}(3x+y)=2x+2c_1\xrightarrow{2c_1=c}\text{Arctg}(3x+y)=2x+c$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین tg می‌گیریم}}3x+y=\text{tg}(2x+c)\Rightarrow y=\text{tg}(2x+c)-3x\xrightarrow{y(0)=1}1=\text{tg}(0+c)-0\Rightarrow c=\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب به صورت $y=\text{tg}(2x+\frac{\pi}{4})-3x$ خواهد بود.

۳۲ـ گزینه «۳» طرفین را در e^y ضرب می‌کنیم تا در سمت راست معادله فقط جمله‌ای برحسب x داشته باشیم: $xy'(1+y)e^y + ye^y = e^x$

ما می‌خواهیم به معادله‌ای به صورت $u'+p(x)u=q(x)$ برسیم، پس با توجه به دومین جمله‌ی معادله سمت چپ تساوی حدس می‌زنیم انتخاب $u=ye^y$ مناسب باشد. اکنون با تغییر متغیر $u=ye^y$ خواهیم داشت $u'=y'e^y+yy'e^y$. به عبارتی $u'=y'(1+y)e^y$، پس معادله را می‌توانیم به صورت مقابل بنویسیم: $xu'+u=e^x \Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x}e^x$

یک معادله‌ی خطی مرتبه اول داریم که در آن $p(x)=\frac{1}{x}$ و $q(x)=\frac{1}{x}e^x$ است.

عامل انتگرال‌ساز را حساب می‌کنیم: $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{Lnx}=x$

جواب عمومی به صورت مقابل به دست می‌آید: $u=\frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x)q(x)dx+c] \Rightarrow u=\frac{1}{x}[\int x\times\frac{1}{x}e^x dx+c]=\frac{1}{x}[\int e^x dx+c] \Rightarrow u=\frac{1}{x}(e^x+c)$

حالا با جایگذاری $u=ye^y$ خواهیم داشت: $ye^y=\frac{1}{x}(e^x+c) \Rightarrow xye^y-e^x=c$

تحلیل سؤال: یک سؤال نسبتاً مشکل که نمونه‌ی آن را می‌توانید در اغلب رشته‌های مهندسی طی سال‌های اخیر پیدا کنید. (برای مثال عمران ۹۵ و مکانیک ۹۴) در این نوع از معادلات، لازم است تغییر متغیر مناسب را برای تبدیل معادله به یک معادله خطی مرتبه اول پیدا کنیم. نکته اصلی سؤال همان انتخاب مناسب u است و ادامه‌ی حل به سادگی انجام می‌شود. معمولاً ایده اصلی آن است که ابتدا کاری کنیم که سمت راست تساوی فقط برحسب x باشد و سپس در سمت چپ تساوی $u'+p(x)u$ را ایجاد کنیم.

۳۳ـ گزینه «۳» ابتدا معادله دیفرانسیل را باز می‌کنیم: $\left[\sin y - x(x-1)^2\right]dx+\left[x(x-1)\cos y\right]dy=0$

برای بررسی کامل بودن معادله بالا، مقدار Δ را محاسبه می‌کنیم: $\Delta=Q_x-P_y=(2x-1)\cos y-\cos y=2(x-1)\cos y\neq 0$

همان‌طور که می‌بینیم معادله مذکور، کامل نمی‌باشد. برای محاسبه عامل انتگرال‌ساز داریم:

$$a(x)=\frac{\Delta}{-Q}=\frac{2(x-1)\cos y}{-x(x-1)\cos y}=-\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2Lnx}=\frac{1}{x^2}$$

با ضرب فاکتور انتگرال $\mu(x)$ در معادله دیفرانسیل داریم: $\left[\frac{\sin y}{x^2}-\frac{(x-1)^2}{x}\right]dx+\left[\frac{x-1}{x}\cos y\right]dy=0$

با حذف جملات شامل y از عبارت P و سپس انتگرال‌گیری از باقیمانده معادله بالا داریم:

$$\left[-x-\frac{1}{x}+2\right]dx+\left[\cos y-\frac{1}{x}\cos y\right]dy=0$$

$$-\frac{x^2}{2}-Lnx+2x+\sin y-\frac{\sin y}{x}=C$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ضریب $\sin y$ برابر $1-\frac{1}{x}$ یا $\frac{x-1}{x}$ می‌باشد.

۳۴ـ گزینه «۴» ابتدا عبارت را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^{-y}-e^x \xrightarrow{\text{طرفین را در } e^y \text{ ضرب می‌کنیم}} e^y\frac{dy}{dx}=e^{2x}-e^y.e^x \Rightarrow e^y y'+e^x e^y=e^{2x}$$

با توجه به وجود e^y در ضریب y' و وجود تابعی برحسب x در سمت راست آن و همچنین e^y که در e^x ضرب شده با استفاده از تغییرمتغیر $e^y=u$ داریم: $e^y=u \Rightarrow e^y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx}+e^x u=e^{2x}$

حالا با یک معادله‌ی مرتبه اول خطی روبه‌رو هستیم که در آن $p(x)=e^x$ و $q(x)=e^{2x}$ است، لذا داریم: $\mu(x)=e^{\int e^x dx}=e^{e^x}$

بنابراین داریم: $u=\frac{1}{e^{e^x}}[\int e^{e^x}.e^{2x}dx+c] \xrightarrow[e^x dx=dt]{e^x=t} e^{e^x}.u=\int e^t.t.dt \Rightarrow e^{e^x}.u=e^t(t-1)+c=e^{e^x}(e^x-1)+c$

$$\Rightarrow u=e^x-1+ce^{-e^x} \xrightarrow{u=e^y} e^y=e^x-1+ce^{-e^x}$$

۳۵ـ گزینه «۱» آنچه در همان ابتدا به ذهن می‌رسد این است که طرفین را بر x^3 تقسیم و در dx ضرب کنیم: $xdy+ydx=-\frac{\sec(xy)}{x^3}dx$

عبارت سمت چپ $d(xy)$ است، از طرفی $\sec(xy)$ هم داریم، لذا می‌توان معادله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d(xy)}{\sec(xy)}+\frac{dx}{x^3}=0 \Rightarrow \int\cos(xy)d(xy)+\int x^{-3}dx=c \Rightarrow \sin(xy)+\frac{x^{-2}}{-2}=c \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 2\sin(xy)-\frac{1}{x^2}=c$$

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۱» معادله به صورت $f(x,y,y')$ داده شده است. بنابراین ابتدا خطی بودن معادله را بررسی می‌کنیم. در ضریب dx عبارتی برحسب x وجود دارد. پس معادله نسبت به x خطی نیست. در ضریب dy جمله‌ای برحسب y نیست اما وجود جمله $yLny$ امکان استفاده مستقیم از روش مربوط به معادلات خطی مرتبه اول را غیرممکن می‌سازد. با کمی ساده‌سازی کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$x\frac{dy}{dx}+yLny-xye^x=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} xdy+(yLny-xye^x)dx=0$$

$$\begin{cases} M=yLny-xye^x \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=Lny+1-xe^x \\ N=x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Lny-xe^x$$

معادله کامل هم نیست، اما اگر حاصل $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ را بر M تقسیم کنیم، عبارت باقیمانده فقط تابع y است، پس عامل انتگرال‌ساز را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy}=e^{\int\frac{Lny-xe^x}{-y(Lny-xe^x)}dy} \Rightarrow \mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز در معادله دیفرانسیل، نهایتاً به یک معادله کامل می‌رسیم:

$$(Lny-xe^x)dx+\frac{x}{y}dy=0$$

با به‌کارگیری روش (الف) حل معادلات کامل داریم:

$$\int -xe^x dx+\int\frac{x}{y}dy=c \Rightarrow -(x-1)e^x+xLny=c \Rightarrow xLny=(x-1)e^x+c$$

توجه کنید که اگر معادله دیفرانسیل را به‌صورتی می‌نوشتیم که در سمت راست تساوی فقط $p(x)$ و در ضریب y' عبارتی برحسب x نباشد به رابطه زیر می‌رسیدیم:

$$x\frac{dy}{dx}+yLny=xye^x \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}yLny=ye^x \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}Lny=e^x$$

حالا دقت کنید که روش گفته شده در نکته ۲ معادلات قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه اول در اینجا قابل اعمال است؛ $h(x)=\frac{1}{x},\varphi(x)=e^x$ و $g(y)=Lny$ و g مشتق g یعنی $g'=\frac{y'}{y}$ نیز در اولین جمله سمت چپ تساوی تکرار شده است. پس تغییر متغیر $u=Lny$ معادله دیفرانسیل را به فرم خطی تبدیل می‌کند.

$$u=Lny \Rightarrow u'=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} u'+\frac{1}{x}u=e^x$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{Lnx}=x \Rightarrow u(x)=\frac{1}{x}[\int xe^x+c]$$

$$u(x)=\frac{1}{x}((x-1)e^x+c) \xrightarrow{u=Lny} Lny=\frac{(x-1)e^x+c}{x} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} xLny=(x-1)e^x+c$$

۲ـ گزینه «۴» توجه کنید که در معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ که M و N به صورت توابع چندجمله‌ی داده شده‌اند در گام نخست کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم. بنابراین ابتدا $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=xy^2+e^{-\frac{1}{x^3}} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2xy \\ N=-x^2y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-2xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4xy$$

واضح است اگر این عبارت بر N تقسیم شود، نتیجه را فقط برحسب x خواهیم داشت:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-x^2y}[4xy]=-\frac{4}{x}$$

حالا به راحتی عامل انتگرال‌ساز محاسبه می‌شود:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-4}{x}dx}=e^{-4Lnx}\Rightarrow e^{Lnx^{-4}}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$$

حالا این عامل را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^4}(xy^2+e^{-\frac{1}{x^3}})dx+\frac{1}{x^4}(-x^2y)dy=0\Rightarrow\left(\frac{y^2}{x^3}+\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{x^4}\right)dx-\frac{y}{x^2}dy=0$$

بنابراین جواب عمومی معادله به‌صورت مقابل است:

$$\int Mdx+\int N^*dy=c\Rightarrow\int\left(\frac{y^2}{x^3}+\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{x^4}\right)dx=c\Rightarrow-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{3}=c$$

$$-\frac{y^2}{2x^2}=-\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{3}+c\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در }-2}\frac{y^2}{x^2}=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{x^3}}-2c\xrightarrow{-2c=c}\frac{y^2}{x^2}=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{x^3}}+c$$

چون جواب معادله از نقطه $(1,\sqrt{\frac{2}{3e}})$ می‌گذرد، لذا داریم:

$$\frac{\frac{2}{3e}}{1}=\frac{2}{3}e^{-1}+c\Rightarrow c=0$$

با جایگذاری مقدار ثابت جواب خصوصی به‌صورت مقابل خواهیم داشت:

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{x^3}}$$

در این مرحله نوبت به خواسته سؤال می‌رسد. در صورت جایگذاری $x=-1$ درجواب خصوصی $y^2=\frac{2}{3}e$ یا $y=\sqrt{\frac{2}{3}e}$ خواهد بود.

۳ـ گزینه «۳» معادله داده شده به دلیل وجود $\frac{1}{x}$ در ضریب dx و $\frac{1}{y}$ در ضریب dy خطی نیست. همچنین این معادله کامل هم نیست. اما اگر دقت کنید وجود $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}$ که می‌دانیم دیفرانسیل $d(Lnx-Lny)$ است، در تشخیص به‌کارگیری روش دسته‌بندی برای حل تست به ما کمک می‌کند. بنابراین با ساده‌سازی داریم:

$$\left\{\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right\}+\left\{\frac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}\right\}=0$$

صورت و مخرج عبارت دوم را بر x^2y^2 تقسیم می‌کنیم. لذا داریم:

$$\left[\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right]+\left[\frac{\frac{x^2dy}{x^2y^2}-\frac{y^2dx}{x^2y^2}}{\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}}\right]=0\Rightarrow\left[\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right]+\left[\frac{\frac{dy}{y^2}-\frac{dx}{x^2}}{(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})^2}\right]=0\Rightarrow\left[\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right]+\left[\frac{-\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}}{(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2}\right]=0$$

در مورد عبارت اول درون کروشه توضیح داده شد . اما در مورد عبارت دوم، $d\left(\frac{1}{(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}\right)=\frac{-\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}}{(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2}$. پس معادله شامل دو دیفرانسیل کامل است که به‌صورت $d(Lnx-Lny)-d\left(\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\right)=0$ بازنویسی می‌شود. با انتگرال‌گیری داریم:

$$Lnx-Lny$$

$$Ln\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{\frac{y-x}{xy}}=c\Rightarrow Ln\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{xy}{y-x}=c\Rightarrow Ln\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{xy}{x-y}=c$$

۴ـ گزینه «۱» در ضریب dx عبارتی برحسب x وجود ندارد و همچنین ضریب dy شامل دو بخش یکی چندجمله‌ای درجه اول نسبت به x و دیگری یک چندجمله‌ای درجه ۳ نسبت به x است. در این مواقع اگرچه نمی‌توان به‌صورت مستقیم از روش مربوط به معادلات مرتبه اول خطی استفاده کرد؛ اما احتمالاً با معادلاتی سروکار داریم که با تغییر متغیر به معادله خطی تبدیل می‌شوند. حالا ممکن است برنولی باشد یا سایر تغییر متغیرها. ابتدا کسرهای طرفین را معکوس می‌کنیم.

$$\frac{dx}{dy}=xy(x^{2}\sin y^{2}+1)\Rightarrow \frac{dx}{dy}-yx=x^{3}y\sin y^{2}$$

ملاحظه می‌کنید که با یک معادله برنولی نسبت به تابع مجهول y سروکار داریم که در آن $\alpha=3$. با تقسیم طرفین بر x^{3} داریم:

$$\frac{1}{x^{3}}\frac{dx}{dy}-y\frac{1}{x^{2}}=y\sin y^{2}$$

از تغییر متغیر $u=x^{1-3}=x^{-2}=\frac{1}{x^{2}}$ که نتیجه آن $\frac{du}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{x^{3}}\frac{dx}{dy}$ است، برای جایگذاری در معادله استفاده می‌کنیم:

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}-yu=y\sin y^{2}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } -2}\frac{du}{dy}+2yu=-2y\sin y^{2}$$

در معادله فوق $p(y)=2y$ است، لذا عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(y)=e^{\int 2y\,dy}=e^{y^{2}}$ است. حالا جواب عمومی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$u(y)=\frac{1}{ey^{2}}[\int e^{y^{2}}(-2y\sin y^{2})dy+c]=e^{-y^{2}}[+\int -2y\sin y^{2}e^{y^{2}}dy+c]$$

به روش جزء به جزء حاصل انتگرال $\int -2y\sin y^{2}e^{y^{2}}dy$ برابر $-\frac{e^{y^{2}}}{2}(\sin y^{2}-\cos y^{2})$ است. پس داریم:

$$u=e^{-y^{2}}[-\frac{e^{y^{2}}}{2}(\sin y^{2}-\cos y^{2})+c]\xrightarrow{u=\frac{1}{x^{2}}}\frac{1}{x^{2}}=e^{-y^{2}}(-\frac{e^{y^{2}}}{2}(\sin y^{2}-\cos y^{2})+c)$$

$$\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{2}(\cos y^{2}-\sin y^{2})+ce^{-y^{2}}\Rightarrow \frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{2}(\cos y^{2}-\sin y^{2})=ce^{-y^{2}}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } e^{+y^{2}}}e^{y^{2}}(\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{2}(\cos y^{2}-\sin y^{2}))=c$$

۵ـ گزینه «۴» با طرفین وسطین سعی می‌کنیم معادله را به فرم $Mdx+Ndy=0$ بنویسیم:

$$(x^{3}-y+xy^{2})dx=(x-x^{2}y+y^{3})dy\Rightarrow (x^{3}-y+xy^{2})dx-(x-x^{2}y+y^{3})dy=0$$

و چون N و M به صورت توابع چندجمله‌ای داده شده است ابتدا کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=x^{3}-y+xy^{2}\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=-1+2xy \\ N=-x+x^{2}y-y^{3}\Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1+2xy \end{cases}\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

پس معادله کامل است و جواب عمومی را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\int M^{*}dx+\int Ndy=c\Rightarrow \int x^{3}dx-\int (x-x^{2}y+y^{3})dy=c\Rightarrow \frac{x^{4}}{4}-xy+\frac{x^{2}y^{2}}{2}-\frac{y^{4}}{4}=C\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } 4}x^{4}-4xy+2x^{2}y^{2}-y^{2}=4c$$

به راحتی و با جایگذاری $y(0)=0$ مقدار $c=0$ به‌دست می‌آید. در نتیجه جواب خصوصی معادله به‌صورت مقابل است: $x^{4}-4xy+2x^{2}y^{2}-y^{2}=0$

بر روی صفحه $x=y$ می‌توان در جواب خصوصی به‌جای x ، y را قرار داد چون روی صفحه ذکر شده طول و عرض نقاط برابرند. پس داریم:

$$x^{4}-4x^{2}+2x^{4}-x^{4}=0\Rightarrow 2x^{2}(-2+x^{2})=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

۶ـ گزینه «۳» در این معادله که به فرم $f(x,y,y')=0$ داد شده واضح است که با یک معادله برنولی مواجه هستیم. با نوشتن $\sqrt{\frac{x}{y}}=x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$ ملاحظه می‌کنید که $\alpha=-\frac{1}{2}$ است و تغییر متغیر مناسب $u=y^{1-(-\frac{1}{2})}=y^{\frac{3}{2}}$ است. ابتدا طرفین را در $y^{\frac{1}{2}}$ ضرب می‌کنیم تا در سمت راست تساوی تنها تابعی از x داشته باشیم:

$$y^{\frac{1}{2}}y'+\sqrt{x}y^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

برای تغییر متغیر $u=y^{\frac{3}{2}}$ داریم:

$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\Rightarrow u'=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'\Rightarrow y^{\frac{1}{2}}y'=\frac{2}{3}u'$$

حالا در معادله جایگذاری‌ها را انجام می‌دهیم:

$$\frac{2}{3}u'+\sqrt{x}u=\frac{2}{3}\sqrt{x}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{3}{2}}u'+\frac{3\sqrt{x}}{2}u=\sqrt{x}$$

در معادله خطی جدید، $p(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}$. عامل انتگرال‌ساز مناسب به‌صورت $\mu(x)=e^{\int\frac{3\sqrt{x}}{2}}=e^{\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}=e^{x^{\frac{3}{2}}}$ محاسبه می‌شود؛ لذا به سادگی جواب عمومی را محاسبه می‌کنیم:

$$u(x)=\frac{1}{e^{x^{\frac{3}{2}}}}[\int e^{x^{\frac{3}{2}}}.\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}dx+c]=e^{-x^{\frac{3}{2}}}[\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}dx+c]$$

$$u(x)=e^{-x^{\frac{3}{2}}}(\frac{4}{9}e^{x^{\frac{3}{2}}}+c)=\frac{4}{9}+ce^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

در گام آخر به‌جای u، $y^{\frac{3}{2}}$ قرار می‌دهیم:

$$y^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}+ce^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

۷ـ گزینه «۴» با انتقال جمله $2x\sin y$ به سمت چپ تساوی، $\cos y\, y'-2x\sin y=-2x$ به دست می‌آید. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ جمله $\sin y$ را در سمت راست و مشتق $\sin y$ یعنی $\cos y$ را در سمت چپ y' داریم؛ لذا تغییرمتغیر $u=\sin y$ مناسب است که نتیجه $\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cos y$ را دارد. پس معادله برحسب u به‌صورت روبه‌رو بازنویسی می‌شود:

$$\frac{du}{dx}-2xu=-2x$$

حالا به یک معادله خطی مرتبه اول رسیده‌ایم که حل آن آسان است. ابتدا عامل انتگرال‌ساز را محاسبه می‌کنیم:

$$\mu(x)=e^{\int-2x\,dx}=e^{-x^2}$$

سپس جواب عمومی معادله را تعیین می‌کنیم:

$$u(x)=\frac{1}{e^{-x^2}}[\int e^{-x^2}x-2x\,dx+c]=e^{x^2}(e^{-x^2}+c)\xrightarrow{u=\sin y}\sin y=e^{x^2}(e^{-x^2}+c)$$

$$\xrightarrow{\text{جواب از } (0,0) \text{ عبور می‌کند}}\sin 0=e^{0}(e^{0}+c)\Rightarrow 0=1+c\Rightarrow c=-1\Rightarrow \sin y=e^{x^2}(e^{-x^2}-1)$$

$$\sin y=1-e^{x^2}$$

می‌دانیم که تابع sin یک تابع کراندار در محدوده $[-1,+1]$ است، پس داریم:

$$-1\le 1-e^{x^2}\le 1\Rightarrow\begin{cases}1-e^{x^2}\le 1\Rightarrow 1-1\le e^{x^2}\Rightarrow 0\le e^{x^2}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ -1\le 1-e^{x^2}\Rightarrow e^{x^2}\le 1+1\Rightarrow e^{x^2}\le 2\Rightarrow x^2\le \mathrm{Ln}2\Rightarrow -(\mathrm{Ln}2)^{\frac{1}{2}}\le x\le(\mathrm{Ln}2)^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

و چون دامنه تابع y از اشتراک دو جواب به دست می‌آید پس $x\in[-(\mathrm{Ln}2)^{\frac{1}{2}},(\mathrm{Ln}2)^{\frac{1}{2}}]$ است.

۸ـ گزینه «۳» وجود عبارت $\frac{y}{x^۲}$ در کمان tg به ما در انتخاب تغییرمتغیر کمک می‌کند. تغییر متغیر $u=\frac{y}{x^۲}$ یا $y=ux^۲$ را در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$y'=x^۲u'+۲xu$$

$$u=\frac{y}{x^۲}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } x} ux=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{y}{x}=ux$$

روابط بالا را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$x^۲u'+۲xu=۲ux+xtgu\Rightarrow x^۲u'=xtgu\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} xu'=tgu$$

$$\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} x\frac{du}{dx}=tgu\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر} du}\frac{x}{dx}=\frac{tgu}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرهای طرفین}}\frac{dx}{x}=\frac{du}{tgu}=\frac{\cos u\,du}{\sin u}$$

دیدیم که به یک معادله دیفرانسیل از نوع جداشونده رسیدیم. از طرفین معادله فوق انتگرال می‌گیریم:

$$Lnx=Ln\sin u+Lnc\ \Rightarrow Lnx=Lnc\sin u\ \Rightarrow x=c\sin u$$

حالا به‌جای u، $\frac{y}{x^۲}$ قرار می‌دهیم:

$$x=c\sin\frac{y}{x^۲}$$

چون جواب عمومی از نقطه $(\sqrt{۲},\pi)$ عبور می‌کند پس ثابت c را می‌توان به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\sqrt{۲}=c\sin\frac{\pi}{(\sqrt{۲})^۲}\ \Rightarrow\sqrt{۲}=c\sin\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow c=\sqrt{۲}$$

$$x=\sqrt{۲}\sin\frac{y}{x^۲}\ \Rightarrow\frac{x}{\sqrt{۲}}=\sin\frac{y}{x^۲}\ \Rightarrow\sin^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})=\frac{y}{x^۲}\ \Rightarrow y=x^۲\sin^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})$$

حد تابع $\frac{y(x)}{x^۳}$ در $x\to ۰$ از ما خواسته شده است، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲\sin^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})}{x}\xrightarrow{\text{حاصل حد هم‌ارزی}}=\lim_{x\to ۰}(\frac{\frac{x}{\sqrt{۲}}}{x})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۹ـ گزینه «۱» می‌دانیم که معادله داده شده نسبت به y خطی نیست. چون در ضریب dy ترم غیرخطی $e^{۳y}$ آمده است. از طرفی در ضریب dx عبارتی برحسب x وجود ندارد ضمن اینکه جمله $۲xe^{۳y}$ نسبت به x از درجه اول است. اما حواستان باشد! ممکن است به اشتباه بیفتید و با تقسیم طرفین بر dy به $\frac{dx}{dy}-۲e^{۳y}x-۸xLnx=۰$ یا $\frac{dx}{dy}-۲e^{۳y}x=۸xLnx$ برسید. می‌بینید که این تساوی هیچ شباهتی به معادلاتی که تا حالا در موردشان بحث کردیم، ندارد. برای خطی‌بودن معادله به دست آمده باید در سمت راست تساوی Q(y) داشته باشیم. پس بهتر است جمله $۸xLnx$ را به سمت چپ تساوی و جمله $-۲e^{۳y}x$ را به سمت راست تساوی منتقل کنیم؛ لذا $\frac{dx}{dy}-۸xLnx=۲e^{۳y}x$ به دست می‌آید. در سمت راست تساوی باید تنها تابعی از y وجود داشته باشد، پس طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم؛ تا به $\frac{۱}{x}\frac{dx}{dy}-۸Lnx=۲e^{۳y}$ برسیم. حالا اگر خوب دقت کنید مشتق عبارت Lnx نسبت به y یعنی $\frac{۱}{x}\frac{dx}{dy}$ در اولین جمله آمده است. پس با تغییرمتغیر $u=Lnx$ می‌توان معادله را به یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به تابع مجهول x تبدیل کرد.

$$u=Lnx\ \Rightarrow\frac{du}{dy}=\frac{۱}{x}\frac{dx}{dy}\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}\frac{du}{dy}-۸u=۲e^{۳y}$$

عامل انتگرال معادله جدید به‌صورت $\mu(y)=e^{\int -۸dy}=e^{-۸y}$ به دست می‌آید؛ بنابراین به‌سادگی جواب عمومی را تعیین می‌کنیم.

$$u(y)=\frac{۱}{e^{-۸y}}[\int e^{-۸y}.۲e^{۳y}dy+c]=e^{۸y}[۲\int e^{-۵y}dy+c]=e^{۸y}[\frac{-۲}{۵}e^{-۵y}+c]$$

حالا باید به‌جای u، Lnx قرار دهیم:

$$Lnx=e^{۸y}(-\frac{۲}{۵}e^{-۵y}+c)\ \Rightarrow e^{-۸y}Lnx=-\frac{۲}{۵}e^{-۵y}+c$$

$$e^{-۸y}Lnx+\frac{۲}{۵}e^{-۵y}=c\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۵}}-۵e^{-۸y}Lnx+۲e^{-۵y}=۵c\xrightarrow{۵c=C}۵e^{-۸y}Lnx+۲e^{-۵y}=C$$

۱۰ـ گزینه «۳» با ساده‌سازی در سمت راست تساوی دو جمله $-y-\frac{yLny}{tgx}$ را داریم. اگر جمله $-y$ را به سمت چپ تساوی منتقل کنیم حاصل $y'+y=\frac{-yLny}{tg\,x}$ خواهد بود و اگر جمله $\frac{-yLny}{tg\,x}$ را به سمت چپ انتقال دهیم، $y'+\frac{yLny}{tg\,x}=-y$ به دست می‌آید. در هر دو حالت در سمت راست تساوی نباید y وجود داشته باشد. پس معادله اول را به yLny و معادله دوم را بر y تقسیم می‌کنیم تا به‌ترتیب $\frac{y'}{yLny}+\frac{۱}{Lny}=\frac{۱}{tg\,x}$ و $\frac{y'}{y}+\frac{Lny}{tg\,x}=-۱$ به‌دست آید. با توجه به فرم معادلات به‌دست آمده واضح است باید دنبال تغییر متغیر باشیم. در معادله دوم اگر Lny را به‌عنوان تغییرمتغیر $u=Lny$ در نظر بگیریم مشتق آن یعنی $u'=\frac{y'}{Lny}$ در جمله اول آمده است. در صورتی‌که اگر در معادله اول تغییر متغیر $u=\frac{۱}{Lny}$ را در نظر می‌گرفتیم مشتق آن یعنی $u'=\frac{-y'}{yLn^۲y}$ در جمله اول وجود نداشت. در نهایت، معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\frac{y'}{y}+\frac{Lny}{tg\,x}=-۱\Rightarrow\frac{y'}{y}+\cot x\,Lny=-۱$$

حالا تغییر متغیر مناسب $u=Lny$ و مشتق آن یعنی $u'=\frac{y'}{Lny}$ یک معادله خطی مرتبه اول به صورت مقابل ایجاد می‌کنند: $u'+\cot x\,u=-۱$

در این معادله عامل انتگرال‌ساز $u(x)=e^{\int\cot x\,dx}=e^{Ln\sin x}=\sin x$ است؛ لذا به‌راحتی جواب عمومی معادله را تعیین می‌کنیم:

$$u(x)=\frac{۱}{\sin x}[\int\sin x.\cot x\,dx+c]=\frac{۱}{\sin x}[\int\cos x\,dx+c]$$

$$u(x)=\frac{\sin x+c}{\sin x}\xrightarrow{u=Lny}Lny=\frac{\sin x+c}{\sin x}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در }\sin x}\sin x\,Lny=\sin x+c\Rightarrow\sin x\,Lny-\sin x=c\Rightarrow\sin x(Lny-۱)=c$$

۱۱ـ گزینه «۱» معادله به فرم $Mdx+Ndy=۰$ داده شده و چون M و N از ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی تشکیل شده است بررسی کامل بودن معادله در اولویت است. ابتدا $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}M=\frac{y}{x}Ln(Ln\,y)+\frac{۲}{۳}xy^۴\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۱}{xLny}+\frac{۸}{۳}xy^۳\\ N=\frac{Ln\,x}{Ln\,y}+x^۲y^۳\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{۱}{x\,Ln\,y}+۲xy^۳\end{cases}$$

چون $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ پس معادله کامل نیست. بنابراین عامل انتگرال‌ساز را برای معادله به دست می‌آوریم. با تقسیم $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ بر $-M$ داریم:

$$\frac{-۱}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۱}{xLny}+\frac{۱}{۳}xy^۳-[\frac{۱}{x\,Lny}+۲xy^۳]}{-\frac{y}{x}Ln(Lny)-\frac{۲}{۳}xy^۴}=\frac{\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۲}{۳}xy^۳}{-y[\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۲}{۳}xy^۳]}=\frac{-۱}{y}$$

در این مرحله عامل انتگرال‌ساز را به‌صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{۱}{y}dy}=c^{-Ln\,y}=e^{Ln\,y^{-۱}}=y^{-۱}=\frac{۱}{y}$$

سپس عامل انتگرال‌ساز را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم تا معادله به یک معادله کامل تبدیل شود:

$$[\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۲}{۳}xy^۳]dx+[\frac{Ln\,x}{y\,Lny}+x^۲y^۲]dy=۰$$

حالا جواب عمومی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\int M\,dx+\int N^*\,dy=c\Rightarrow\int(\frac{Ln(Lny)}{x}+\frac{۲}{۳}xy^۳)dx=c$$

$$Ln(x)Ln(Lny)+\frac{۱}{۳}x^۲y^۳=c$$

۱۲ـ گزینه «۳» معادله داده شده از ۳ جمله همگن با درجه ۲ تشکیل شده است. می‌دانیم که تغییرمتغیر مناسب برای معادلات همگن به‌صورت $u=\frac{y}{x}$ است. پس معادله را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم تا همه جملات به‌صورت $\frac{y}{x}$ ظاهر شوند:

$$\frac{x^۲y'}{x^۲}=۳\frac{(x^۲+y^۲)}{x^۲}tg^{-۱}(\frac{y}{x})+\frac{xy}{x^۲}\Rightarrow y'=۳(۱+(\frac{y}{x})^۲)tg^{-۱}(\frac{y}{x})+\frac{y}{x}$$

حالا باید به‌جای $\frac{y}{x}$، u و به جای y'، $xu'+u$ قرار دهیم. پس داریم:

$$xu'+u=۳(۱+u^۲)tg^{-۱}u+u\Rightarrow xu'=۳(۱+u^۲)tg^{-۱}u$$

$$\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} x\frac{du}{dx}=۳(۱+u^۲)tg^{-۱}u \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{x}{dx}=\frac{۳(۱+u^۲)tg^{-۱}u}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}}\frac{dx}{x}=\frac{du}{۳(۱+u^۲)tg^{-۱}u}$$

پس از اعمال تغییر متغیر به یک معادله جدید تفکیک‌پذیر رسیده‌ایم که باید از طرفین انتگرال بگیریم. توجه کنید که اگر $tg^{-۱}u$ را به‌عنوان تغییر متغیر جدید مثلاً $v=tg^{-۱}u$ در نظر بگیریم آنگاه $dv=\frac{۱}{۱+u^۲}$ خواهد بود. با این توضیحات جواب عمومی معادله را به‌سادگی می‌توان محاسبه نمود:

$$\frac{dx}{x}=\frac{۱}{۳}\frac{\frac{du}{۱+u^۲}}{tg^{-۱}u}=\frac{۱}{۳}\frac{dv}{v}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}Lnx=\frac{۱}{۳}Lnv+Lnc$$

$$\xrightarrow{v=tg^{-۱}u}Lnx=\frac{۱}{۳}Lntg^{-۱}u+Lnc\xrightarrow{u=\frac{y}{x}}Lnx=\frac{۱}{۳}Lntg^{-۱}(\frac{y}{x})+Lnc$$

$$۳(Lnx-Lnc)=Lntg^{-۱}(\frac{y}{x})\Rightarrow ۳Ln\frac{x}{c}=Lntg^{-۱}(\frac{y}{x})\,Ln\frac{x^۳}{c^۳}=Lntg^{-۱}\frac{y}{x}$$

$$\frac{x^۳}{c^۳}=tg^{-۱}(\frac{y}{x})\xrightarrow{\frac{۱}{c^۳}=c}cx^۳=tg^{-۱}(\frac{y}{x})$$

۱۳ـ گزینه «۱» همان‌طور که می‌بینید معادله به فرم $y=f(x,y')$ داده شده است. لذا با تغییر متغیر $y'=p$ داریم:

$$y=۲xp+p^۴x^۲\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}y'=۲p+۲xp'+۴p^۳x^۲p'+۲xp^۴\xrightarrow{y'=p}$$

$$p=۲p+۲xp'+۴p^۳x^۲p'+۲xp^۴\Rightarrow(p+۲xp')(۱+۲xp^۳)=۰$$

حالا دو حالت داریم، اول اینکه شرط کنیم، $۱+۲xp^۳\neq ۰$ باشد، در نتیجه با این شرط می‌توان جواب عمومی را تعیین کرد.

در صورتی‌که بخواهیم جواب غیرعادی را تعیین کنیم با فرض $۱+۲xp^۳=۰$ یا $p^۳=-\frac{۱}{۲x}$ و جایگذاری در معادله، y را تعیین می‌کنیم.

$$y=۲xp+p^۴x^۲=xp(۲+xp^۳)\xrightarrow{p^۳=-\frac{۱}{۲x}}y=xp(۲+xx-\frac{۱}{۲x})=\frac{۳}{۲}xp\xrightarrow{p=\frac{-۱}{(۲x)^{\frac{۱}{۳}}}}y=\frac{۳}{۲}x(\frac{-۱}{(۲x)^{\frac{۱}{۳}}})=\frac{-۳}{۲^{\frac{۴}{۳}}}x^{\frac{۲}{۳}}$$

این جواب غیرعادی معادله است که البته باید کنترل کنیم که در معادله صدق می‌کند یا نه؟ ابتدا باید y' را محاسبه کنیم:

$$y'=\frac{-۳}{۲^{\frac{۴}{۳}}}\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{-۲}{۲^{\frac{۴}{۳}}}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{-۱}{۲^{\frac{۱}{۳}}}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

حالا باید y و y' در معادله دیفرانسیل جایگذاری کنیم؛ اما به جهت جلوگیری از محاسبات طولانی ضریب y' یعنی $\frac{-۱}{۲^{\frac{۱}{۳}}}$ را c در نظر می‌گیریم پس داریم $y'=cx^{-\frac{۱}{۳}}$. در نتیجه y نیز به‌صورت $y=\frac{۳}{۲}cx^{\frac{۲}{۳}}$ است. حالا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$\frac{۳}{۲}cx^{\frac{۲}{۳}}=۲x(cx^{-\frac{۱}{۳}})+x^۲(cx^{-\frac{۱}{۳}})^۴\Rightarrow\frac{۳}{۲}cx^{\frac{۲}{۳}}=۲cx^{\frac{۲}{۳}}+c^۴x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}cx^{\frac{۲}{۳}}=(۲c+c^۴)x^{\frac{۲}{۳}}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } cx^{\frac{۲}{۳}}}\frac{۳}{۲}=۲+c^۳\Rightarrow c^۳=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{c=-\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۳}}}}(-\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۳}}})^۳=-\frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۳}}}=-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

پس جواب غیرعادی در معادله صدق می‌کند.

۱۴ـ گزینه «۴» با کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$(x+y)(dx-dy)=dx+dy \Rightarrow (x+y)dx-(x+y)dy=dx+dy$$

$$xdx+ydx-xdy-ydy-dx-dy=0 \Rightarrow (x+y-1)dx-(x+y+1)dy=0$$

توابع M و N شامل دو خط موازی $x+y+1$ و $x+y-1$ هستند. پس با تغییر متغیر $u=x+y$ که نتیجه $du=dx+dy \Rightarrow dy=du-dx$ را وارد خواهیم داشت:

$$(u-1)dx-(u+1)(du-dx)=0 \quad (u-1)dx-(u+1)du+(u+1)dx=0$$

$$2udx=(u+1)du \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } u} 2dx=(1+\frac{1}{u})du$$

ملاحظه می‌کنید که معادله جدید تفکیک‌پذیر است. از طرفین آن انتگرال می‌گیریم:

$$2x=u+Lnu+c \xrightarrow{u=x+y} 2x=(x+y)+Ln(x+y)+c$$

$$\Rightarrow x-y-Ln(x+y)=c \Rightarrow f(x,y)=x-y-Ln(x+y)-c$$

رابطه به‌دست آمده جواب خصوصی معادله دیفرانسیل صورت سؤال است. برای تعیین وضعیت اکسترمم‌های آن ابتدا باید بررسی کنیم که جواب خصوصی نقطه بحرانی دارد یا نه:

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=1-\dfrac{1}{x+y}=0 \Rightarrow x+y=1 \\ f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1-\dfrac{1}{x+y}=0 \Rightarrow x+y=-1 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که به ازای هیچ x و y دستگاه $\begin{cases} f_x=x+y=1 \\ f_y=x+y=-1 \end{cases}$ برقرار نیست. پس جواب معادله دیفرانسیل داده شد، نقطه بحرانی ندارد.

۱۵ـ گزینه «۲» در این معادله که به فرم $f(x,y,y')=0$ است. اولویت اول بررسی خطی بودن معادله است. با کمی تیزبینی متوجه می‌شوید که در ضریب dy خبری از y نیست، همچنین در ضریب dx، y و y^α را داریم. پس معادله داده شده نسبت به y برنولی است. با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$-\cos x\frac{dy}{dx}+y=y^2(1-\sin x) \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -\cos x} \frac{dy}{dx}-\frac{1}{\cos x}y=-y^2\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

طرفین تساوی را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{\cos x}\frac{1}{y}=-\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

در این معادله ضریب $-\frac{1}{\cos x}$ را به‌عنوان تغییر متغیر در نظر می‌گیریم، یعنی $u=\frac{1}{y}$، لذا داریم:

$$\frac{du}{dx}=\frac{-\frac{dy}{dx}}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{du}{dx}$$

حالا u و مشتق آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$-\frac{du}{dx}-\frac{1}{\cos x}u=-\frac{1-\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{du}{dx}+\sec x u=\sec x-tgx$$

$$\mu(x)=e^{\int \sec x dx}=e^{Ln(\sec x+tgx)}=\sec x+tgx$$

با داشتن $\mu(x)$ جواب عمومی را تعیین می‌کنیم:

$$u(x)=\frac{1}{\sec x+tgx}[\int(\sec x+tgx)(\sec x-tgx)dx+c]$$

$$u(x)=\frac{1}{\sec x+tgx}[\int(\sec^2 x+tg^2x)dx+c] \Rightarrow u(x)=\frac{1}{\sec x+tgx}[\int dx+c]$$

$$u(x)=\frac{x+c}{\sec x+tgx} \xrightarrow{u=\frac{1}{y}} \frac{1}{y}=\frac{x+c}{\sec x+tgx} \Rightarrow y=\frac{\sec x+tgx}{x+c}$$

گفته شد که جواب معادله از $(2,0)$ می‌گذرد:

$$2=\frac{\sec 0+tg0}{0+c} \Rightarrow 2=\frac{1}{c} \Rightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{\sec x+tgx}{x+\frac{1}{2}}$$

۱۶ـ گزینه «۴» توجه کنید که این یک معادله درجه دوم نسبت به y' است که به روش دلتا می‌توان دو پاسخ برای y' به‌صورت $y'=f(x,y)$ محاسبه کرد. ابتدا به روش دلتا عمل می‌کنیم و دو جواب y' را برحسب x و y محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=B^2-4Ac \Rightarrow \Delta=[-(x^2+y^2)]^2-4(xy)(xy) \Rightarrow \Delta=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$$

$$\Delta=x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2=x^4-2x^2y^2+y^4 \Rightarrow \Delta=(x^2-y^2)^2$$

$$y'=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A} \Rightarrow y'=\frac{+(x^2+y^2)\pm(x^2-y^2)}{2xy} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{x}{y} \\ y'=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

ابتدا معادله اول یعنی $y'=\frac{x}{y}$ را حل می‌کنیم. با نوشتن $y'=\frac{dy}{dx}$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ydy=xdx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y^2=x^2+2c_1 \Rightarrow y^2-x^2-2c_1=0 \xrightarrow{-2c_1=c_1} y^2-x^2+c_1=0$$

برای معادله دوم نیز داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } \frac{dx}{y}} \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \text{Ln}y=\text{Ln}x+\text{Ln}c_2 \Rightarrow \text{Ln}y=\text{Ln}\,c_2x \Rightarrow y=c_2x \Rightarrow y-c_2x=0$$

حل دو معادله صورت گرفته است. با ضرب دو جواب، جواب عمومی معادله حاصل خواهد شد.

$$(y-c_2x)(y^2-x^2+c_1)=0$$

۱۷ـ گزینه «۳» سؤال را با کمی دقت می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dx}(2+\sin x)(1+y)=0 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} (2+\sin x)(y+1)=c \Rightarrow y+1=\frac{c}{2+\sin x} \Rightarrow y=\frac{c}{2+\sin x}-1$$

گفته شده $y(0)=k$ و لذا داریم:

$$k=\frac{c}{2+0}-1 \Rightarrow c=2(k+1)$$

بنابراین جواب به شکل زیر است:

$$y=\frac{2(k+1)}{2+\sin x}-1 \Rightarrow y'=\frac{-2(k+1)\cos x}{(2+\sin x)^2} \quad , \; y'=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{2} \xrightarrow{\text{فرض می‌کنیم } k=0} x=\frac{\pi}{2}$$

با توجه به اینکه $k>-1$ لذا $-2(k+1)$ عددی منفی است. از طرفی $\cos x$ قبل از $\frac{\pi}{2}$ مثبت و بعد از آن منفی می‌شود و این یعنی مقدار مشتق قبل از $\frac{\pi}{2}$ منفی و بعد از آن مثبت است، پس $x=\frac{\pi}{2}$ طول نقطه‌ی مینیمم است و مقدار تابع به ازای آن برابر است با:

$$y=\frac{2(k+1)}{2+\sin\frac{\pi}{2}}-1=\frac{2(k+1)}{3}-1=\frac{2k-1}{3}$$

۱۸ـ گزینه «۲» معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ داده شده و چون M و N از ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی تشکیل شده است بررسی کامل بودن معادله در اولویت است. ابتدا $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=e^x(x+1) \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=0 \\ N=ye^y-xe^x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-e^x-xe^x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=e^x+xe^x$$

با توجه به اینکه حاصل $\frac{\partial N}{\partial y}\neq\frac{\partial M}{\partial y}$ پس معادله کامل نیست؛ اما اگر حاصل آن را بر M تقسیم کنیم عامل انتگرال‌ساز را به‌صورت تابعی از y خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{e^x(x+1)}(e^x(x+1))=-1$$

$$\mu(y)=e^{\int -dy}=e^{-y}$$

عامل انتگرال‌ساز را در معادله ضرب می‌کنیم:

$$e^{-y}.e^x(x+1)dx+e^{-y}(ye^y-xe^x)dy=0 \qquad\qquad e^{x-y}(x+1)dx+(y-xe^{x-y})dy=0$$

توجه کنید که در صورت استفاده از روش M^*، حاصل $M^*=0$ است. پس جواب عمومی به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\int M^*dx+\int Ndy=0 \Rightarrow \int 0dx+\int(y-xe^{x-y})dy=c \Rightarrow \frac{y^2}{2}+xe^{x-y}=c$$

گفته شد که جواب عمومی از نقطه $(0,2)$ می‌گذرد با جایگذاری در رابطه بالا مقدار c تعیین می‌شود پس از آن جواب خصوصی معادله به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$\frac{2^2}{2}+0=c \Rightarrow c=2 \Rightarrow \frac{y^2}{2}+xe^{x-y}=2$$

۱۹ـ گزینه «۴» معادله به صورت $y'=f(\frac{ax+by+c_1}{a_1x+b_1y+c_1})$ داده شده و چون دو خط $x-y+3$ و $2x-2y+5$ موازی هستند $(\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1})$ پس از تغییر متغیر $u=x-y$ استفاده می‌کنیم. به‌کارگیری این تغییر متغیر با توجه به اینکه $\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{du}{dx}$ است، معادله دیفرانسیل را به یک معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌کند:

$$(2(x-y)+5)\frac{dy}{dx}=x-y+3\xrightarrow{\text{جایگذاری تغییر متغیر}}(2u+5)(1-\frac{du}{dx})=u+3$$

$$2u+5-2u\frac{du}{dx}-5\frac{du}{dx}=u+3\Rightarrow-(2u+5)\frac{du}{dx}=-(u+2)\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم‌بر }-(u+2)}\frac{-(2u+5)}{-(u+2)}\frac{du}{dx}=1\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در }dx}\frac{2u+5}{u+2}du=dx$$

$$\frac{2(u+2)+1}{u+2}du=dx$$

در این مرحله باید از معادله تفکیک‌پذیر به‌دست آمده انتگرال گرفت:

$$\int(2+\frac{1}{u+2})du=\int dx\Rightarrow 2u+\mathrm{Ln}u+2=\mathrm{Ln}x+c\xrightarrow{u=x-y}(x-y)+\mathrm{Ln}(x-y+2)=x+c\Rightarrow x-2y+\mathrm{Ln}(x-y+2)=c$$

۲۰ـ گزینه «۴» معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده بنابراین ابتدا باید خطی بودن معادله بررسی شود. با دقت در معادله می‌بینیم که در ضریب dy، جمله‌ای برحسب y وجود ندارد. همچنین در ضریب dx (یعنی عبارت‌های $-ny$ و $e^x(x+1)^{n+1}$) می‌توانیم یک چندجمله‌ای از درجه اول برای y پیدا کنیم. به عبارت دیگر $-ny$؛ پس معادله داده شده نسبت به y خطی است. ابتدا با تقسیم طرفین بر $(x+1)$ معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n$$

در رابطه بالا $p(x)=-\frac{n}{x+1}$؛ در نتیجه $\mu(x)$ به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود: $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}\Rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{-n}{x+1}dx}=e^{-n\mathrm{Ln}(x+1)}=(x+1)^{-n}$

خب، با داشتن $\mu(x)$ به محاسبه جواب عمومی معادله می‌پردازیم:

$$y(x)=\frac{1}{(x+1)^{-n}}[\int(x+1)^{-n}.e^x(x+1)^n dx+c]\Rightarrow y(x)=(x+1)^n[\int e^x dx+c]$$

$$y(x)=(x+1)^n[e^x+c]$$

برای محاسبه حد جواب عمومی هنگامی‌که $x\to+\infty$ دو حالت را در نظر می‌گیریم. حالت اول $n>0$ باشد، در این حالت واضح است که y نیز به سمت $+\infty$ میل می‌کند. اما اگر $n<0$ باشد، آنگاه جواب عمومی حاصل‌ضرب دو عبارت است که یکی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و دیگری به سمت صفر. با توجه به اینکه سرعت رشد (e^x+c) بیشتر از $(x+1)^n$ است، پس حاصل‌ضرب آنها نیز به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

۲۱ـ گزینه «۳» ملاحظه می‌کنید که معادله به‌صورت $f(x,y,y')=0$ داده شده است. این معادله نسبت به x و یا y خطی نیست، چون در ضریب dx عاملی برحسب x حضور دارد و برای خطی بودن نسبت به y عدم حضور یک چندجمله‌ای درجه اول نسبت به y در ضریب dx معادله را نسبت به x نیز غیرخطی می‌کند، اما با نوشتن معادله به‌صورت $y'+\cot y=x\cos y\cot y$ و آن‌گاه با ضرب طرفین در $\sin y$ معادله به فرم $\sin yy'+\cos y=x\cos^2 y$ ظاهرخواهد شد. در این معادله با درنظر گرفتن تغییر متغیر $u=\cos y$ ملاحظه خواهید کرد که مشتق آن یعنی $u'=\sin yy'$ نیز عیناً در جمله اول تکرار شده است. لذا با جایگذاری تغییر متغیر داریم:

$$\xrightarrow{u=\cos y}-u'+u=xu^2\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }-1}u'-u=-xu^2$$

اما معادله فوق از نوع برنولی با $a=2$ است. ابتدا این معادله را بر u^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{u}=x$$

حالا تغییر متغیر $v=u^{1-2}=u^{-1}=\frac{1}{u}$ که نتیجه $v'=-u^{-2}u'=-\frac{u'}{u^2}$ را به همراه دارد، به‌کار می‌گیریم:

$$-v'-v=x\Rightarrow v'+v=x$$

معادله حاصل شده برحسب v از نوع خطی است که به سادگی قابل حل خواهد بود.

$$\mu(x)=e^{\int dx}=e^x\Rightarrow v(x)=\frac{1}{e^x}[\int e^x.x+c]=\frac{(x-1)e^x}{e^x}+\frac{c}{e^x}$$

$$v=(x-1)+ce^{-x}\xrightarrow{v=\frac{1}{u}}\frac{1}{u}=x-1+ce^{-x}\xrightarrow{u=\cos y}\frac{1}{\cos y}=(x-1+ce^{-x})$$

$$\cos y=(x-1+ce^{-x})^{-1}$$

۲۲ـ گزینه «۱» با ساده‌سازی می‌توان معادله داده شده را به‌صورت $(xy'-y)^{۲}-e^{۲y'}=۰$ یا $(xy'-y)^{۲}=e^{۲y'} \Rightarrow xy'-y=\pm e^{y'}$ نوشت. در صورت انتقال جمله xy' به سمت راست تساوی فرم $y=f(x,y')$ ظاهر می‌شود و برای این دسته از سؤالات با به‌کارگیری تغییر متغیر $y'=p$ جواب غیرعادی به سادگی تعیین می‌شود:

$$xy'-y=\pm e^{y'} \Rightarrow -y=-xy'\pm e^{y'} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }-۱} y=xy'\mp e^{y'} \xrightarrow{y'=p} y=xp\mp e^{p} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} y'=p+xp'\mp p'e^{p} \xrightarrow{y'=p} p=p+xp'\mp p'e^{p} \Rightarrow ۰=p'(x\mp e^{p})$$

جواب غیرعادی به‌ازای $x\mp e^{p}=۰$ حاصل می‌شود. به عبارتی $e^{p}=\pm x \Rightarrow p=Ln|x|$. با جایگذاری روابط اخیر در رابطه ⁎ جواب غیرعادی به‌صورت $y=x(Ln|x|)\mp(\pm x) \Rightarrow y=xLn|x|\pm x$ تعیین خواهد شد.

۲۳ـ گزینه «۳» توجه کنید که مشتق $\sec y$ یعنی $\frac{\sin yy'}{\cos^{۲}y}$ نیز در معادله ظاهر شده است. لذا با درنظر گرفتن $u=\sec y$ به حل معادله می‌پردازیم:

$$du=\frac{\sin ydy}{\cos^{۲}y} \Rightarrow udx+(۱+e^{-x})du=۰ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } u(۱+e^{-x})} \frac{dx}{۱+e^{-x}}+\frac{du}{u}=۰$$

حالا از معادله تفکیک‌پذیر فوق انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{dx}{۱+e^{-x}}+\int\frac{du}{u}=Lnc \Rightarrow Ln(۱+e^{x})+Lnu=Lnc \Rightarrow u(۱+e^{x})=c \xrightarrow{u=\sec y} \sec y(۱+e^{x})=c$$

حالا با اعمال شرط اولیه در معادله ثابت c را تعیین می‌کنیم:

$$\sec\frac{\pi}{۴}(۱+e^{۰})=c \Rightarrow c=۲\sqrt{۲} \Rightarrow \sec y(۱+e^{x})=۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }\cos y} (۱+e^{x})=۲\sqrt{۲}\cos y \Rightarrow \cos y=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(۱+e^{x})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(۱+e^{x})$$

۲۴ـ گزینه «۳» معادله داده شده فرم استاندارد یک معادله خطی نسبت به y است. ابتدا نیاز به محاسبه $\mu(x)$ به‌صورت $\mu(x)=e^{\int -Lnxdx}=e^{x(۱-Lnx)}=e^{x(۱-Lnx)}$ داریم و به کمک آن جواب عمومی را تعیین می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{e^{x(۱-Lnx)}}[\int e^{x(۱-Lnx)}(-(۱+۲Lnx)x^{-x})dx+c]=\frac{e^{x(۱-۲Lnx)}+c}{e^{x(۱-Lnx)}}$$

$$y=e^{-xLnx}+ce^{-x(۱-Lnx)}=e^{-xLnx}+ce^{x(Lnx-۱)}$$

حالا باید مقدار c را تعیین کنیم. می‌دانیم که در $x\to\infty$ پاسخ مسأله کران‌دار می‌ماند. جمله e^{-xLnx} در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند. اما جمله $e^{x(Lnx-۱)}$ در بی‌نهایت به صورت e^{∞} خواهد بود و نامحدود است. بنابراین تنها راه جلوگیری از نامحدود شدن پاسخ عمومی این است که ثابت C را صفر در نظر بگیریم. به عبارت دیگر جواب معادله برابر $y=e^{-xLnx}$ است و به ازای $x=۳$ داریم: $y(۳)=e^{-۳Ln۳}=e^{Ln۳^{-۳}}=۳^{-۳}=\frac{۱}{۳^{۳}}=\frac{۱}{۲۷}$

۲۵ـ گزینه «۴» در این معادله $f(x,y)=\frac{۴y^{۲}Lny}{x-۲}+x$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۴}{x-۲}(۲yLny+y)$ است، با توجه به اینکه دو تابع $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقاط $x\neq ۲$ و $y>۰$ پیوسته هستند بیشینه فاصله $x_{۰}=۶$ تا نقطه ناپیوستگی $x=۲$ برابر ۴ و بیشینه فاصله نقطه $y_{۰}=۳$ تا نقاط ناپیوستگی $y=۰$ برابر ۳ است. لذا مساحت بزرگ‌ترین مستطیل برابر $۴۸=(۳+۳)(۴+۴)$ خواهد بود.

۲۶ـ گزینه «۲» با توجه به فرم گزینه‌ها واضح است که عامل انتگرال‌ساز تابع x و y است و برای به‌دست آوردن آن باید از فرمول مادر کمک گرفت. اما استفاده از فرمول مادر نیز منوط به تشخیص فرم z است که آن هم با توجه به متفاوت بودن فرم گزینه‌ها غیرممکن است.
لذا بهترین کار این است که گزینه‌ها را تک‌تک در معادله ضرب کنیم و شرط کامل بودن معادله را بررسی کنیم:

$$\text{گزینه (۱)} \Rightarrow xe^{۲x}dx+\frac{y+۳}{x}e^{y}dy=۰ \Rightarrow \begin{cases} M=xe^{۲x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=۰ \\ N=\frac{y+۳}{x}e^{y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{y+۳}{x^{۲}}e^{y} \end{cases}$$

$$\text{گزینه (۲)} \Rightarrow x^{۲}e^{۲x}dx+(y+۳)e^{y}dy=۰ \Rightarrow \begin{cases} M=x^{۲}e^{۲x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=۰ \\ N=(y+۳)e^{y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=۰ \end{cases}$$

بنابراین $x^{۲}e^{y}$ فاکتور انتگرال معادله خواهد بود.

۲۷ـ گزینه «۲» معادله داده از ۳ جمله همگن با درجه یک ایجاد شده است. با انتخاب تغییر متغیر $y=ux$ که نتیجه $y'=xu'+u$ را به همراه دارد، داریم:

$$x(xu'+u)=x\,tgu+xu \Rightarrow x^۲u'+xu=xtgu+xu \Rightarrow x^۲u'=xtgu$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر x}} xu'=tgu \xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} x\frac{du}{dx}=tgu \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر du}} \frac{x}{dx}=\frac{tgu}{du} \xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}} \frac{dx}{x}=\frac{du}{tgu}$$

حالا از رابطه فوق انتگرال می‌گیریم: $Lnx=Ln\sin u+Lnc \Rightarrow x=c\sin u \xrightarrow{u=\frac{۱}{x}} x=c\sin\frac{y}{x}$

و چون جواب از نقطه $(۲,\pi)$ عبور می‌کند ثابت c را تعیین می‌کنیم: $۲=c\sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow c=۲ \Rightarrow x=۲\sin\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\sin\frac{y}{x}$

از آنجایی که تابع سینوس کراندار است، پس $-۱\le\frac{x}{۲}\le۱$ و $-۲\le x\le۲$ است.

۲۸ـ گزینه «۲» ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر دسته منحنی داده شده را به صورت زیر با مشتق‌گیری از طرفین محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{۱+tg^۲x}{\tan x+\alpha}\ ; & (۱)\\ y=Ln(\tan x+\alpha)\ ; & (۲)\end{cases} \Rightarrow e^y=tg(x-\alpha) \xrightarrow{\text{با جایگذاری (۲) در (۱)}} y'=\frac{۱+tg^۲x}{e^y}$$

برای به دست آوردن مسیرهای قائم باید y' را با $-\frac{۱}{y'}$ جایگذاری کنیم: $\xrightarrow{y'\mapsto\frac{-۱}{y'}} -\frac{۱}{y'}=\frac{۱+tg^۲x}{e^y} \Rightarrow y'=-\frac{e^y}{۱+tg^۲x}$

معادله فوق تفکیک‌پذیر است، لذا با ساده‌سازی و انتگرال‌گیری داریم:

$$y'=-\frac{e^y}{۱+tg^۲x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-e^y}{۱+tg^۲x} \Rightarrow \int\frac{dy}{e^y}=-\int\frac{dx}{۱+tg^۲x} \Rightarrow$$

$$e^{-y}=-\int\cos^۲x\,dx=-\int\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos۲x\,dx=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\sin۲x+c \Rightarrow e^{-y}+c=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}\sin۲x$$

۲۹ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با توجه به وجود $tg^{-۱}y$ و همچنین $۱+y^۲$ در ترکیب معادله با فرض این‌که $u=tg^{-۱}y$ باشد، آن‌گاه $\frac{dy}{۱+y^۲}=du$ خواهد بود. پس معادله به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود: $dx=\frac{dy}{۱+y^۲}(tg^{-۱}y-x) \Rightarrow dx=du(u-x)$

حالا دوباره از تغییر متغیر $u-x=t$ استفاده می‌کنیم که نتیجه $du-dx=dt$ را دارد. با جایگذاری $d=dx+dt$ و $u-x=t$ در معادله بالا داریم:

$$dx=(dt+dx)t \Rightarrow dx-tdx=tdt \Rightarrow dx(۱-t)=tdt \Rightarrow dx=\frac{t}{۱-t}dt \Rightarrow \int dx=\int\frac{t}{۱-t}dt \Rightarrow x+c=\int(-۱+\frac{۱}{۱-t})dt$$

$$\Rightarrow x+c=-t-Ln(۱-t) \xrightarrow[u=tg^{-۱}y]{t=u-x} \Rightarrow c=-tg^{-۱}y-Ln(۱+x-tg^{-۱}y)$$

روش دوم: با توجه به این که در ضریب dx، x نداریم و در ضریب dy هم توان x یک است، پس معادله نسبت به x خطی است، لذا با بازنویسی معادله داریم:

$$(۱+y^۲)\frac{dx}{dy}=tg^{-۱}y-x \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{۱}{۱+y^۲}x=\frac{tg^{-۱}y}{۱+y^۲}$$

با در نظر گرفتن $p(y)=\frac{۱}{۱+y^۲}$ و $q(y)=\frac{tg^{-۱}y}{۱+y^۲}$ و محاسبه عامل انتگرال‌ساز حل معادله را ادامه می‌دهیم: $\mu(y)=e^{\int\frac{۱}{۱+y^۲}dy}=e^{tg^{-۱}y}$

بنابراین جواب معادله به صورت مقابل نوشته می‌شود: $x=\frac{۱}{e^{tg^{-۱}y}}[\int e^{tg^{-۱}y}.\frac{tg^{-۱}y}{۱+y^۲}dy+c] \xrightarrow{\text{زیر انتگرال از تغییر متغیر } tg^{-۱}y=t \text{ کمک می‌گیریم}}$

$$\Rightarrow x.tg^{-۱}y=\int te^tdt+c \Rightarrow x\,tg^{-۱}y=te^t-e^t+c \Rightarrow x\,tg^{-۱}y=e^{tg^{-۱}y}(tg^{-۱}y-۱)+c \Rightarrow x=tg^{-۱}y-۱+ce^{-tg^{-۱}y}$$

که این همان جواب به‌دست آمده از قسمت اول است کافیست، $tg^{-۱}y-۱$ را به سمت چپ منتقل کنید و از طرفین Ln بگیرید.

۳۰ـ گزینه «۳» دقت کنید که معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده که در این معادله در ضریب dy عبارتی برحسب y حضور ندارد؛ ضمن اینکه در ضریب dx یک چندجمله‌ای درجه اول از y وجود دارد، لذا معادله نسبت به y خطی است. به منظور دستیابی به فرم استاندارد، معادله را بر $(1+x^2)Ln(1+x^2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$y'-\frac{2x}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}y=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2xArctgx}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{2xArctgx}{Ln(1+x^2)}\right)$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-2x}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}dx}=e^{-LnLn(1+x^2)}=e^{Ln\{Ln(1+x^2)\}^{-1}}=\frac{1}{\{Ln(1+x^2)\}}$$

$$y=\frac{1}{\frac{1}{\{Ln(1+x^2)\}}}\left[\frac{1}{Ln(1+x^2)}\left\{\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{2xArctgx}{Ln(1+x^2)}\right)\right\}dx+c\right]=Ln(1+x^2)\left(\frac{Arctgx}{Ln(1+x^2)}+c\right)\Rightarrow y=Arctgx+cLn(1+x^2)$$

اما گفته شده که در $x\to-\infty$ جواب برابر $-\frac{\pi}{2}$ است که این امر به‌ازای $c=0$ رخ می‌دهد.

بنابراین $y=Arctgx$ و $y'=\frac{1}{1+x^2}$ که در این صورت به‌ازای $x=\sqrt{3}$، $y'(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$ حاصل می‌شود.

۳۱ـ گزینه «۱» سؤال را می‌توان به روش حل معادله برنولی نیز حل کرد. اما با دقت می‌توان با استفاده از روش دیفرانسیل کامل پاسخ داد. معادله را با انتقال ydx به سمت چپ و تقسیم بر y^2 کردن طرفین، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$ydx+xy^2dx=xdy\Rightarrow\frac{xdy-ydx}{y^2}=xdx\Rightarrow-d\left(\frac{x}{y}\right)=d\left(\frac{x^2}{2}\right)\Rightarrow-\frac{x}{y}=\frac{x^2}{2}+c$$

گفته شده منحنی جواب از نقطه‌ی $(1,-1)$ عبور می‌کند، لذا داریم:

$$-\frac{1}{(-1)}=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

بنابراین شکل جواب مدنظر به صورت $-\frac{x}{y}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ است که با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$-\frac{2x}{y}=x^2+1\Rightarrow y=-\frac{2x}{x^2+1}$$

برای به دست آوردن نقاط اکسترمم باید از جواب مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$y'=-\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm1$$

مقدار مشتق قبل از $x=-1$ مثبت و بعد از آن منفی است، پس $x=-1$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع است. مقدار جواب در نقطه‌ی $x=-1$ برابر با $y=-\frac{2(-1)}{(-1)^2+1}=+1$ است.

۳۲ـ گزینه «۴» با دقت به معادله می‌بینید که فاکتور $\cos y$ معادله را نسبت به y غیرخطی کرده است، اما وجود جمله $\sin y$ ما را به انتخاب تغییر متغیر $u=\sin y$ راهنمایی می‌کند. در این صورت مشتق آن یعنی $u'=\cos yy'$ نیز در معادله ظاهر شده است؛ لذا با اعمال تغییر متغیر داریم:

$$x^2u'=2xu-1\Rightarrow x^2u'-2xu=-1\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x^2}u'-\frac{2}{x}u=-\frac{1}{x^2}$$

حالا برای معادله خطی فوق فاکتور انتگرال برابر $\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2Lnx}=e^{Lnx^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ است و جواب عمومی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\left[\int\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx+c\right]=x^2\left[\frac{1}{3}x^{-3}+c\right]\Rightarrow u=\frac{x^{-1}}{3}+cx^2\xrightarrow{u=\sin y}\sin y=\frac{x^{-1}}{3}+cx^2$$

۳۳ـ گزینه «۳» می‌دانیم که شیب منحنی همان y' است و چون شیب منحنی $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ است، پس داریم:

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

اما معادله دیفرانسیل فوق به‌دلیل وجود ترم $\frac{y}{x}$ همگن بوده و با جایگذاری $y=ux$ یا $\frac{y}{x}=u$ داریم:

$$\frac{d}{dx}(ux)=\frac{1}{u}+u\Rightarrow xu'+u=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}\Rightarrow xu'=\frac{1+u^2}{u}-u=\frac{1+u^2-u^2}{u}=\frac{1}{u}$$

$$xu'=\frac{1}{u}\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}}x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{x}{dx}=\frac{1}{udu}\Rightarrow\frac{dx}{x}=udu$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\operatorname{Ln}x=\frac{u^2}{2}+c\xrightarrow{u=\frac{y}{x}}\operatorname{Ln}x=\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2+c$$

گفته شده که نقطه $(\sqrt{e},\sqrt{e})$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\operatorname{Ln}\sqrt{e}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}})^2+c\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=0\Rightarrow\operatorname{Ln}x=\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2$$

و از بین گزینه‌ها به‌ازای $x=1$ حاصل y برابر صفر است، پس نقطه $(0,1)$ در معادله جواب صدق می‌کند.

۳۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $1-\sin y>0$ تعیین علامت y' بستگی به x^3 دارد. لذا حول نقطه $x=0$ به‌ازای $x>0$ شیب مثبت و به‌ازای $x<0$ شیب منفی است. پس نقطه $x=0$ یک نقطه مینیمم نسبی محسوب می‌شود.

۳۵ـ گزینه «۴» معادله داده شده نه تفکیک‌پذیر است و نه همگن، لذا در قدم بعدی خطی بودن آن را بررسی می‌کنیم. با نوشتن $y'=\frac{dy}{dx}$ ملاحظه می‌کنید که معادله قطعاً نسبت به y خطی نیست چون دو جمله برحسب y در آن ضرب شده؛ $(x^2y^2-y^4)$ اما وضعیت نسبت به x متفاوت است و معادله نسبت به x از نوع برنولی است. برای این منظور ابتدا کسرها را به صورت معکوس نوشتند، یعنی $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2-y^4-4}{2xy^3}$ و سپس با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2}{2xy^3}-\frac{(y^4+4)}{2xy^3}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{y^4+4}{2y^3}x^{-1}\Rightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{x}{2y}=-\frac{y^4+4}{2y^3}x^{-1}$$

تغییرمتغیر مناسب معادله برنولی بالا $u=x^{1-(-1)}=x^2$ است. ابتدا معادله را در x ضرب می‌کنیم سپس با تغییرمتغیر و مشتق آن که به‌صورت $u'=2xx'$ است به جایگذاری می‌پردازیم:

$$x\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x^2=-\frac{y^4+4}{2y^3}\Rightarrow\frac{u'}{2}-\frac{1}{2y}u=-\frac{y^4+4}{2y^3}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } 2}u'-\frac{1}{y}u=-\frac{y^4+4}{y^3}$$

عامل انتگرال‌ساز معادله خطی مرتبه اول به‌دست آمده به‌صورت $\mu(y)=e^{\int\frac{1}{-y}dy}=e^{-\operatorname{Ln}y}=e^{\operatorname{Ln}y^{-1}}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ است. سپس جواب عمومی به‌سادگی تعیین خواهد شد:

$$u(y)=\frac{1}{\frac{1}{y}}[\int\frac{1}{y}\frac{y^4+4}{-y^3}dy+c]=y[\int\frac{y^4+4}{y^4}dy+c]=y[\int(1+4y^{-4})dy+c]$$

$$u(y)=y(y-\frac{4}{3y^3}+c)\xrightarrow{u(y)=x^2}x^2=y^2-\frac{4}{3y^2}+cy\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } 3y^2}3x^2y^2=3y^4+3cy^3-4=0$$

با جایگذاری نقطه $(1,1)$ داریم:

$$3=3+3c-4\Rightarrow 3c=4$$

پس کافی است به‌جای $3c$ عدد ۴ را قرار داده تا جواب خصوصی تعیین گردد.

$$3x^2y^2=3y^4+4y^3-4=0\Rightarrow f(x,y)=3x^2y^2-3y^4-4y^3+4=0$$

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۲» معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ داده شده و در آن M و N به صورت توابع چندجمله‌ای داده شده‌اند. پس ابتدا کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=x^2-2x+2y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=4y \\ N=2xy \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

متأسفانه معادله کامل نیست اما اگر بر N تقسیم کنیم، عبارت حاصل فقط تابع x است. پس عامل انتگرال‌ساز معادله به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}=e^{\int\frac{2y}{2xy}dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{Lnx}\Rightarrow \mu(x)=x$$

حالا $\mu(x)=x$ را در معادله ضرب می‌کنیم:

$$(x^3-2x^2+2xy^2)dx+2x^2y\,dy=0$$

با روش (ب) گفته شده برای حل معادلات کامل به انتگرال‌گیری و تعیین جواب عمومی مسأله می‌پردازیم:

$$\int Mdx+\int N^*dy=c \Rightarrow \int(x^3-2x^2+2xy^2)dx+\int 0dy=c \Rightarrow \frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+x^2y^2=c$$

گفته شده که $(0,0)$ در جواب صدق می‌کند. بنابراین به راحتی $c=0$ محاسبه می‌شود.

$$\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+x^2y^2=0 \Rightarrow x^2y^2=-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3=\frac{x^2}{12}(-3x^2+8x)\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر}} y^2=\frac{-3x^2+8x}{12}=\frac{x(8-3x)}{12}$$

حالا توجه کنید که y^2 یک عبارت همواره مثبت است. پس حاصل $x(8-3x)$ نیز باید همواره مثبت باشد. از مباحث مربوط به تعیین علامت معادله درجه دوم به خاطر داریم که برای حالتی‌که ریشه‌های معادله $\begin{cases}x=0\\ x=\frac{8}{3}\end{cases}$ باشند، در صورت منفی بودن ضریب جمله درجه ۲، بین دو ریشه‌ها علامت تابع مثبت و بیرون از آن منفی خواهد بود. پس برای مثبت بودن سمت راست تساوی ورودی x باید به‌صورت مقابل باشد: $D=[0,\frac{8}{3}]$

روش دوم: معادله دیفرانسیل را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x^2-2x+2y^2)dx+2xy\,dy=0\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } dx} x^2-2x+2y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$2xy\frac{dy}{dx}+2y^2=-(x^2-2x)\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} 2y\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y^2=-x+2$$

حالا خوب دقت کنید. در جمله دوم، عبارت y^2 را داریم که مشتق آن یعنی $2y\frac{dy}{dx}$ عیناً در جمله اول تکرار شده است. پس تغییر متغیر $u=y^2$ معادله بالا را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می‌کند:

$$u=y^2 \Rightarrow u'=2yy'\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} u'+\frac{2}{x}u=-x+2$$

حالا معادله دیفرانسیل خطی به‌دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2Lnx}=x^2 \Rightarrow u(x)=\frac{1}{x^2}[\int x^2(-x+2)dx+c]$$

$$u(x)=\frac{1}{x^2}[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+c]\xrightarrow{u=y^2} y^2=\frac{1}{x^2}[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+c]\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2} y^2x^2=-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+c$$

ادامه حل نیز مطابق روش اول خواهد بود.

۲ـ گزینه «۱»

روش اول: باتوجه به معادله دیفرانسیل داده شده $(\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3})$ ملاحظه می‌شود که این معادله از نـوع معـادلات دیفرانسـیل تفکیـک‌پـذیر، خطـی، برنولی و .... که راه حل مشخصی دارند نمی‌باشد لذا نیاز به تغییر متغیر جهت ساده نمودن معادله دیفرانسیل می‌باشد.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y(x^2+y^2)}$$

$$x^2+y^2=z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2xdx+2ydy=dz \Rightarrow 1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}\frac{dz}{dx} \\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}\end{array}\right\} \Rightarrow 1+\frac{1}{z}=\frac{1}{2x}\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{z+1}{z}=\frac{dz}{2xdx}\Rightarrow 2xdx=\frac{z}{z+1}dz$$

همانطور که ملاحظه می‌شود معادله دیفرانسیل را با یک تغییر متغیر $(x^2+y^2=z)$ به یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل نمودیم کـه بـه راحتـی قابل حل است کافی است از طرفین انتگرال بگیریم.

$$\int\frac{z}{z+1}dz=\int 2xdx \xrightarrow[dz=du]{z+1=u}\int\frac{u-1}{u}du=x^2+c\Rightarrow \int(1-\frac{1}{u})du=x^2+c$$

$$\Rightarrow u-Lnu=x^2+c \Rightarrow (z+1)-Ln(z+1)=x^2+c \xrightarrow{z=x^2+y^2}(x^2+y^2+1)-Ln(x^2+y^2+1)=x^2+c$$

باتوجه به شرط ارائه شده در صورت مسأله که به ازای $y=0$ داریم $x=0$ مقدار ثابت c را بدست می‌آوریم:

$$(0+0+1)-Ln(0+0+1)=0+c \Rightarrow c=1$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل: $(x^2+y^2+1)-Ln(x^2+y^2+1)=x^2+1 \Rightarrow y^2-Ln(x^2+y^2+1)=0$

$$\Rightarrow y^2=Ln(x^2+y^2+1)\Rightarrow e^{y^2}=x^2+y^2+1\Rightarrow e^{y^2}-y^2-1=x^2$$

حال به حل حد داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{y\to0}\frac{x^2}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{e^{y^2}-y^2-1}{y^2}=\frac{0}{0} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{y\to0}\frac{2ye^{y^2}-2y}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{2y(e^{y^2}-1)}{2y}=\lim_{y\to0}(e^{y^2}-1)=0$$

روش دوم:

یادآوری: هر معادله به فرم $\frac{dy}{dx}+yf(x)=y^ng(x)$ که در آن $n\neq0,1$ می‌باشد را معادلهٔ دیفرانسیل برنولی از درجهٔ n گویند و برای حل با تغییر متغیر $z=y^{1-n}$، معادلهٔ دیفرانسیل برنولی درجهٔ n به یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود و جواب عمومی بصورت زیر خواهد بود:

$$z=e^{-(1-n)\int f(x)dx}.[\int e^{(1-n)\int f(x)dx}.(1-n)g(x)dx+c]$$

حال به حل مسأله می‌پردازیم، اگر معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$ را بصورت زیر بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y+y^3}{x}=xy+y^3x^{-1}\Rightarrow \frac{dx}{dy}-xy=y^3x^{-1}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود به یک معادله دیفرانسل برنولی برحسب x از درجهٔ (-1) تبدیل می‌شود و داریم:

$$n=-1\ ,\ f(y)=-y\ ,\ g(y)=y^3\ ,\ z=x^{1-(-1)}=x^2$$

$$z=e^{-2\int -ydy}[\int e^{2\int -ydy}.2y^3dy+c]=e^{y^2}.[\int e^{-y^2}.2y^3dy+c]$$

برای حل انتگرال داخل کروشه از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم و در نهایت خواهیم داشت:

$$z=e^{y^2}[-y^2e^{-y^2}-e^{-y^2}+c]=-y^2-1+ce^{y^2}\xrightarrow{z=x^2}x^2=-y^2-1+ce^{y^2}$$

با توجه به شرط ارائه شده در صورت سوال $c=0$ بدست می‌آید و داریم:

$$x^2=-y^2-1+e^{y^2}\Rightarrow \lim_{y\to0}(\frac{-y^2-1+e^{y^2}}{y^2})=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{y\to0}(\frac{-2y+2ye^{y^2}}{2y})$$

$$=\lim_{y\to0}(\frac{2y(-1+e^{y^2})}{2y})=\lim_{y\to0}(-1+e^{y^2})=-1+1=0 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است}$$

۳ـ گزینه «۴» معادله داده شده نه خطی است و نه کامل اما فرم معادله داده شده به مسائلی که با روش دسته‌بندی حل می‌شوند شباهت زیادی دارد. وجود عبارت $y^{\frac{3}{2}}$ و $x^{\frac{3}{2}}$ در سمت راست تساوی و همچنین عبارت‌های $\sqrt{x}\,dx$ و $\sqrt{y}\,dy$ که می‌دانیم دارای فرم دیفرانسیلی $\frac{2}{3}d(x^{\frac{3}{2}})$ و $\frac{2}{3}d(y^{\frac{3}{2}})$ هستند راهنمای دانشجو برای حل تست به روش دسته‌بندی است؛ لذا معادله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x}\,dx+\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{x}\,dx-\sqrt{y}\,dy}=\sqrt{\frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{d(x^{\frac{3}{2}})+d(y^{\frac{3}{2}})}{d(x^{\frac{3}{2}})-d(y^{\frac{3}{2}})}=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

حالا به‌جای $y^{\frac{3}{2}}$ و $x^{\frac{3}{2}}$ از تغییر متغیرهای $u=x^{\frac{3}{2}}$ و $v=y^{\frac{3}{2}}$ استفاده می‌کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\frac{du+dv}{du-dv}=\frac{v}{u}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} u\,du+u\,dv=v\,du-v\,dv$$

$$u\,du+v\,dv=v\,du-u\,dv\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } u^2+v^2}\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}=\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}$$

واضح است که $u\,du+v\,dv=\frac{1}{2}d\mathrm{Ln}(u^2+v^2)$ و $\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}=-d\,tg^{-1}(\frac{v}{u})$ است. با جایگذاری معادله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}d(\mathrm{Ln}(u^2+v^2))=-d\,tg^{-1}(\frac{v}{u})\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(u^2+v^2)=-tg^{-1}(\frac{v}{u})+c$$

$$\mathrm{Ln}\sqrt{u^2+v^2}+tg^{-1}(\frac{v}{u})=c$$

در گام آخر به‌جای u و v، $x^{\frac{3}{2}}$ و $y^{\frac{3}{2}}$ قرار می‌دهیم.

$$\mathrm{Ln}\sqrt{x^3+y^3}+tg^{-1}(\frac{y}{x})^{\frac{3}{2}}=c$$

پس تابع $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ و تابع $g(x,y)=\sqrt{\frac{y^3}{x^3}}$ است.

۴ـ گزینه «۱» در معادلاتی به فرم $f(x,y,y')=0$ بررسی خطی بودن در اولویت نخست است. توجه کنید که در معادله دیفرانسیل داده شده در ضریب dy عبارتی برحسب y وجود ندارد. همچنین در ضریب dx وجود عبارت $-y\cos x$ شرط دوم خطی بودن نسبت به y را ارضا می‌کند. یعنی در ضریب dx یک چندجمله‌ای درجه ۱ از y وجود دارد. پس معادله نسبت به y خطی است. با تقسیم طرفین تساوی بر ضریب $\frac{dy}{dx}$، (یعنی $\sin x$) سعی می‌کنیم آن را به فرم استاندارد بنویسیم:

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \sin x}\frac{dy}{dx}-y\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin^2 x}{x^2\sin x}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}-\cot x\,y=-\frac{\sin x}{x^2}$$

با توجه به اینکه $p(x)=-\cot x$، لذا عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(x)=e^{\int -\cot x\,dx}=e^{-\mathrm{Ln}\sin x}=e^{\mathrm{Ln}\frac{1}{\sin x}}=\frac{1}{\sin x}$ است؛ بنابراین جواب به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$y(x)=\frac{1}{\frac{1}{\sin x}}[\int\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x^2}+c]=\sin x[\int\frac{-1}{x^2}dx+c]\Rightarrow y=\sin x(\frac{1}{x}+c)$$

$$y=\frac{\sin x}{x}+c\sin x$$

برای اینکه حد تابع $y=f(x)$ در بی‌نهایت صفر شود باید مجموع حدهای $\frac{\sin x}{x}$ و $c\sin x$ نیز صفر گردد. واضح است که تابع $\frac{\sin x}{x}$ دارای حد صفر در بی‌نهایت است، اما تابع $c\sin x$ به دلیل نوسان کردن تابع $\sin$ در بی‌نهایت حد ندارد جز اینکه ضریب $c=0$ باشد. پس داریم: $y=f(x)=\frac{\sin x}{x}$

حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. حد تابع $f(x)$ در مبدأ مختصات برابر ۱ است (کافی است از هم‌ارزی $\sin x<x$ استفاده کنیم).

پس بدون نیاز به محاسبات سایر گزینه‌ها، گزینه ۱ جواب تست خواهد بود. به منظور تعیین مقدار مینیمم تابع f در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ باید تعیین کنیم که f در این بازه صعودی است یا نزولی. ابتدا

$$y=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow y'=\frac{+x\cos x-x\sin x}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{\cos x-\sin x}{x}=\frac{\cos x(1-tg\,x)}{x}$$

به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ تابع $y=f(x)$ نقطه اکسترمم دارد. چون در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$، x و $\cos$ مثبت هستند، لذا صعودی یا نزولی بودن تابع را علامت $(1-\operatorname{tg}x)$ تعیین می‌کند و چون تانژانت برای $x>\frac{\pi}{4}$ بیشتر از ۱ است، پس در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ تابع نزولی است و کمترین مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ اتفاق می‌افتد.

$$y_{min}=f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

چون تابع در ربع اول، $x\in(0,\frac{\pi}{2})$، ابتدا صعودی و سپس نزولی است، کمترین مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه اتفاق می‌افتد. $f(0)=1$ و $f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$.

با مقایسه $f(0)$ و $f(\frac{\pi}{2})$ متوجه می‌شویم $f(x)$ در تمام بازه از $f(\frac{\pi}{2})$ بزرگتر است.

$$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}\xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین بر روی بازه }(0,\frac{\pi}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}=1$$

همچنین چون تابع $\sin x$ و x فرد است، حاصل تقسیم آن‌ها یک تابع زوج می‌شود.

۵ـ گزینه «۴» M و N به‌صورت توابع چندجمله‌ای داده شده‌اند و بررسی کامل بودن معادله اولویت نخست است.

$$\begin{cases}M=2x^3-xy^2\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-2xy\\ N=2y^3-x^2y\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-2xy\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

پس معادله کامل بوده و چون $N^*=2y^3$ جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$\int(2x^3-xy^2)dx+\int 2y^3dy=c\Rightarrow\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}y^4=c\xrightarrow{\text{معادله ضربدر ۲}}x^4-x^2y^2+y^4=2c$$

با جایگذاری نقطه $(0,0)$، مقدار c صفر می‌شود و جواب خصوصی به‌صورت $x^4-x^2y^2+y^4=0$ است. با اضافه و کم کردن x^2y^2، می‌توان رابطه اخیر را به‌صورت $(x^2-y^2)^2+x^2y^2=0$ نوشت. چون هر دو جمله همواره مثبت هستند، تساوی زمانی برقرار است که $xy=0$ و $x^2-y^2=0$ باشد. لذا فقط نقطه $(0,0)$ در معادله صدق می‌کند.

۶ـ گزینه «۴» معادله از سه جمله همگن با درجه ۳ تشکیل شده است. پس معادله به روش همگن قابل حل است. ابتدا طرفین تساوی را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^2}{x^3}\sqrt{y^2-x^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^3+(\frac{y}{x})^2\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^3+(\frac{y}{x})^2\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^3+(\frac{y}{x})^2\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}$$

$$\frac{y}{x}=\sec u\Rightarrow y=x\sec u\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sec u+x\sec u\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}$$

با جایگذاری تغییر متغیر و مشتق آن در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\sec u+x\sec u\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}=\sec^3u+\sec^2u\sqrt{\sec^2u-1}\xrightarrow{\sec^2u-1=\operatorname{tg}^2u}\sec u+x\sec u\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}=\sec^3u+\sec^2u.\operatorname{tg}u$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }\sec u}1+x\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}=\sec^2u+\sec u.\operatorname{tg}u$$

$$x\operatorname{tg}u\frac{du}{dx}=\sec^2u-1+\sec u.\operatorname{tg}u=\operatorname{tg}^2u+\sec u.\operatorname{tg}u$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }\operatorname{tg}u}x\frac{du}{dx}=\operatorname{tg}u+\sec u\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }du}\frac{x}{dx}=\frac{\operatorname{tg}u+\sec u}{du}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرهای طرفین}}\frac{dx}{x}=\frac{du}{\operatorname{tg}u+\operatorname{se}u}=\frac{du}{\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{1}{\cos u}}=\frac{du}{\frac{\sin u+1}{\cos u}}=\frac{\cos u\,du}{\sin u+1}$$

خب، تا حالا به یک معادله تفکیک‌پذیر رسیده‌ایم. از طرفین این رابطه انتگرال می‌گیریم: $\operatorname{Ln}x+\operatorname{Ln}c=\operatorname{Ln}(\sin u+1)\Rightarrow\operatorname{Ln}cx=\operatorname{Ln}(\sin u+1)$

می‌دانیم که $\frac{1}{\cos u}=\sec u=\frac{y}{x}$، پس $\cos u=\frac{x}{y}$ و با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin u=\sqrt{1-\cos^2 u}$، حاصل $\sin u=\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}$ یا $\sin u=\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}$ می‌شود. با جایگذاری آن در جواب عمومی داریم: $Lncx=Ln(\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}+1)=Ln(\frac{\sqrt{y^2-x^2}+y}{y}) \Rightarrow cx=\frac{\sqrt{y^2-x^2}+y}{y}$

با ضرب y در طرفین رابطه به $cxy=\sqrt{y^2-x^2}+y$ می‌رسیم. برای تعیین c از شرط اولیه داده شده استفاده می‌کنیم:

$$c=\sqrt{1-1}+1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow xy=y+\sqrt{y^2-x^2}$$

با ساده‌سازی جواب خصوصی فوق داریم:

$$xy-y=\sqrt{y^2-x^2} \Rightarrow y(x-1)=\sqrt{y^2-x^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} y^2(x-1)^2=y^2-x^2$$

$$y^2(x-1)^2-y^2=-x^2 \Rightarrow y^2((x-1)^2-1)=-x^2 \Rightarrow y^2=\frac{-x^2}{(x-1)^2-1}$$

صورت کسر سمت راست تساوی همواره منفی است. با توجه به سمت چپ تساوی نتیجه می‌گیریم مخرج کسر نیز باید همواره منفی باشد:

$$(x-1)^2-1\le 0 \Rightarrow (x-1)^2\le 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1\le 1 \Rightarrow x\le 2 \\ x-1\ge -1 \Rightarrow x\ge 0 \end{cases}$$

پس دامنه اعتبار جواب مسأله به ازای $x\in[0,2]$ است.

۷ـ گزینه «۱» در ضریب dy عبارتی برحسب y وجود ندارد همچنین در ضریب dx، y و y^α را می‌بینیم پس معادله نسبت به y برنولی است. ابتدا با تقسیم طرفین بر dx سعی می‌کنیم شکل استاندارد یک معادله برنولی نسبت به y را به‌دست آوریم:

$$x\frac{dy}{dx}=x^2y^2(1+e^x)-y \Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2(1+e^x) \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2(1+e^x)$$

مشاهده می‌کنید که به یک معادله برنولی با $\alpha=2$ رسیدیم. ابتدا معادله را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\frac{y}{y^2}=\frac{xy^2(1+e^x)}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\frac{1}{y}=x(1+e^x)$$

می‌دانیم تغییر متغیر $u=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ و مشتق آن یعنی $\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dx}$ معادله برنولی را به یک معادله خطی جدید نسبت به تابع مجهول u تغییر می‌دهد با جایگذاری داریم: $-\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=x(1+e^x) \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۱-}} \frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-x(1+e^x)$

در معادله خطی به‌دست آمده $p(x)=-\frac{1}{x}$، لذا عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-Lnx}=e^{Lnx^{-1}}=x^{-1}=\frac{1}{x}$ است. حالا با دانستن $\mu(x)$ جواب عمومی را به روش مقابل حساب می‌کنیم: $u(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}[\int\frac{1}{x}(-x(1+e^x))dx+c]=x[\int-(1+e^x)dx+c]=x[-x-e^x+c]$

در این مرحله با جایگذاری $u=\frac{1}{y}$ به‌جای u داریم: $\frac{1}{y}=-x^2-xe^x+cx$

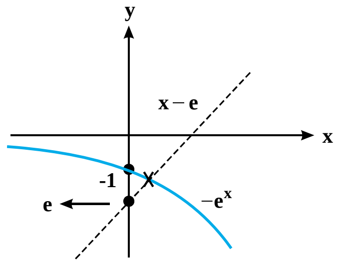
تا اینجا جواب عمومی را تعیین کرده‌ایم. برای محاسبه جواب خصوصی از شرط $y(1)=-1$ داریم:

$$-1=-1-e+c \Rightarrow c=e \Rightarrow \frac{1}{y}=-x^2-xe^x+xe \Rightarrow y=\frac{1}{-x^2-x(e^x-e)}$$

برای تعیین مجانب‌ها باید توجه کنیم که تابع y مجانب مایل ندارد. چون درجه x در این صورت باید از درجه x در مخرج ۱ واحد بیشتر باشد. در $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ مخرج به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛ بنابراین کل کسر به سمت صفر میل می‌کند و این یعنی محور xها (خط $y=0$) یکی از مجانب‌های افقی تابع $y(x)$ است.. در $\pm\infty$ برای تعیین مجانب قائم باید مخرج کسر مساوی صفر قرار داده شود.

لذا داریم:

$$-x^2-x(e^x-e)=0 \Rightarrow -x(x+e^x-e)=0$$



$x=0$ یکی از مجانب‌های قائم است اما آیا عبارت درون پرانتز نیز به ازای x یا xهایی صفر می‌شود؟ به کمک رسم نمودار داریم:

$$x+e^x-e=0 \Rightarrow x-e=-e^x$$

چون دو تابع $-e^x$ و $x-e$ تنها در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند پس عبارت درون پرانتز فقط به ازای یک مقدار از x مساوی صفر می‌شود. در نهایت تابع دارای ۲ محانب قائم و یک مجانب افقی است.

۸ـ گزینه «۴» معادله به صورت $f(x,y,y')=0$ داده شده است و لذا ابتدا خطی بودن آن را بررسی می‌کنیم. اگر به‌جای y'، $\frac{dy}{dx}$ قرار دهیم متوجه می‌شویم که جمله $2yx$ در ضریب dy و جمله مثلاً $2x^2$ در ضریب dx معادله را از حالت خطی نسبت به x یا y خارج کرده است. اما به دلیل وجود ترکیب x و y در توان تابع نمایی یعنی $e^{\frac{x^2+y^2}{x}}$ می‌توانیم تغییر متغیر $u=\frac{x^2+y^2}{x}$ را انتخاب کنیم. در این صورت $u'=\frac{(2x+2yy')x-(x^2+y^2)}{x^2}$ می‌شود. با نگاه کردن به معادله دیفرانسیل متوجه می‌شویم که اگر جمله (x^2+y^2) را به سمت چپ تساوی منتقل کنیم عبارت $x(2yy'+2x)-(x^2+y^2)$ به‌دست می‌آید که دقیقاً صورت کسر u' است؛ بنابراین جمله (x^2+y^2) را به سمت چپ تساوی منتقل کرده و معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$x(2yy'+2x)-(x^2+y^2)=xe^{\frac{(x^2+y^2)}{x}}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x^2}\frac{x(2yy'+2x)-(x^2+y^2)}{x^2}=\frac{xe^{\frac{x^2+y^2}{x}}}{x^2}$$

حالا به‌جای سمت چپ تساوی، u' و به‌جای $\frac{x^2+y^2}{x}$، u قرار می‌دهیم:

$$u'=\frac{1}{x}e^u\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}e^u\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } dx}du=\frac{1}{x}e^u dx\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } e^{-u}}e^{-u}du=\frac{dx}{x}$$

به‌سادگی ملاحظه کردید که به یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر رسیدیم. حالا از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم:

$$-e^{-u}=\operatorname{Ln}|x|+c\xrightarrow{u=\frac{x^2+y^2}{x}}-e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}=\operatorname{Ln}|x|+c$$

۹ـ گزینه «۲» چون معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده باید بررسی خطی بودن را در اولویت اول قرار دهیم. اگر خوب دقت کنید در ضریب dy خبری از y نیست؛ اما در ضریب dx علاوه بر وجود y و y^α یک جمله اضافه $-e^x y^0$ وجود دارد که معادله را از فرم برنولی خارج می‌کند. همچنین به علت وجود عامل غیرخطی‌کننده e^x معادله نسبت به x هم خطی نیست پس باید به دنبال راه‌حل‌های دیگر مثل تغییرمتغیر باشیم. اگر معادله را در e^{-x} ضرب کنیم داریم $e^{-x}y'=e^{-2x}y^2+ye^{-x}-1$. حالا خوب دقت کنید! دو جمله در طرفین تساوی داریم که از مشتق $(e^{-x}y)$ به‌وجود آمده‌اند. یعنی $e^{-x}y'-ye^{-x}$. ضمن اینکه $(e^{-x}y)^2$ هم در معادله وجود دارد. پس با انتخاب تغییرمتغیر $u=e^{-x}y$ که نتیجه آن $u'=-e^{-x}y+e^{-x}y'$ است داریم:

$$e^{-x}y'=e^{-2x}y^2+ye^{-x}-1\Rightarrow e^{-x}y'-ye^{-x}=(e^{-x}y)^2-1$$

$$u'=u^2-1\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}}\frac{du}{dx}=(u^2-1)\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در } dx}du=(u^2-1)dx$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } u^2-1}\frac{du}{u^2-1}=dx\xrightarrow{\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}}\frac{du}{(u-1)(u+1)}=dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right]du=dx$$

ملاحظه کردید که به یک معادله تفکیک‌پذیر رسیدیم. اینک از طرفین آن انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(u-1)-\operatorname{Ln}(u+1))=x+c\Rightarrow\operatorname{Ln}\frac{u-1}{u+1}=2x+2c$$

$$\frac{u-1}{u+1}=e^{2x}.e^{2c}\xrightarrow{u=e^{-x}y}\frac{e^{-x}y-1}{e^{-x}y+1}=e^{2c}e^{2x}\Rightarrow\frac{e^{-x}(y-e^x)}{e^{-x}(y+e^x)}=e^{2c}e^{2x}$$

$$\frac{y-e^x}{y+e^x}=e^{2c}e^{2x}\xrightarrow{e^{2c}=C}\frac{y-e^x}{y+e^x}=Ce^{2x}$$

ثابت C با جایگذاری $y(0)=b$ به دست می‌آید. لذا داریم:

$$\frac{b-e^0}{b+e^0}=Ce^0\Rightarrow C=\frac{b-1}{b+1}$$

برای تعیین مجانب تابع y باید آن‌ها را برحسب x به‌صورت صریح بنویسیم. با ترکیب صورت در مخرج به ساده‌سازی خواهیم پرداخت. برای این‌منظور قرینه صورت را به مخرج در طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$\frac{y-e^x}{y+e^x}=\frac{Ce^{2x}}{1}\xrightarrow{\text{اضافه کردن قرینه صورت به مخرج}}\frac{y-e^x}{(y+e^x)-(y-e^x)}=\frac{Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$$

$$\frac{y-e^x}{2e^{2x}}=\frac{Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 2e^{2x}} y-e^x=\frac{2Ce^{3x}}{1-Ce^{2x}}$$

$$y=e^x+\frac{2Ce^{3x}}{1-Ce^{2x}}$$

می‌دانیم که مجانب قائم وقتی حاصل می‌شود که مخرج کسر صفر شود. به‌عبارتی دیگر:

$$1-Ce^{2x}=0\Rightarrow Ce^{2x}=1\Rightarrow e^{2x}=\frac{1}{C}\Rightarrow 2x=\text{Ln}\frac{1}{C}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{1}{C}$$

$$x=\text{Ln}(\frac{1}{C})^{\frac{1}{2}}=\text{Ln}\sqrt{\frac{1}{C}}$$

از طرفی $C=\frac{b-1}{b+1}$. پس طول مجانب قائم به‌صورت $x=\text{Ln}\sqrt{\frac{1}{\frac{b-1}{b+1}}}=\text{Ln}\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}$ محاسبه می‌شود.

۱۰ـ گزینه «۳» اگر دقت کنید می‌بینید که معادله دارای ترم‌های همگن از درجه ۱ است. با قراردادن تغییرمتغیر $u=\frac{y}{x}$ و مشتق آنکه به‌صورت $y=ux\Rightarrow y'=xu'+u$ است داریم:

$$x\sin u(xu'+u)=ux\sin u+x\cos u\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x\sin u} xu'+u=u+\cot u$$

$$xu'=\cot u\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} x\frac{du}{dx}=\cot u\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{x}{dx}=\frac{\cot u}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}}\frac{dx}{x}=\frac{du}{\cot u}=\frac{du}{\frac{\cos u}{\sin u}}=\frac{\sin u\,du}{\cos u}$$

در نهایت به یک معادله تفکیک‌پذیر دست یافتیم. از طرفین آن انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\text{Ln}\,x=-\text{Ln}\cos u+\text{Ln}\,c\xrightarrow{u=\frac{y}{x}}\text{Ln}x=-\text{Ln}\cos\frac{u}{x}+\text{Ln}\,c$$

$$\text{Ln}\,x+\text{Ln}\frac{y}{x}=\text{Ln}\,c=0\Rightarrow\text{Ln}[x\cos(\frac{y}{x})]=\text{Ln}\,c\Rightarrow x\cos\frac{y}{x}=c$$

از شرط اولیه داده شده که به‌صورت $(1,0)$ است ثابت c را تعیین می‌کنیم:

$$1\cos 0=c\Rightarrow c=1\Rightarrow x\cos(\frac{y}{x})=1$$

حالا باید نقطه $(0,1)$ را در معادله جایگذاری کنیم. با جایگذاری خواهیم داشت:

$$b\cos\frac{1}{b}=1\Rightarrow\cos(\frac{1}{b})=(\frac{1}{b})$$

در ادامه به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم $-1\le\frac{1}{b}=\cos(\frac{1}{b})\le 1$ پس داریم:

$$-1\le\frac{1}{b}\le 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{b}\le 1\Rightarrow b\ge 1\\ \frac{1}{b}\ge -1\Rightarrow b\le -1\end{cases}$$

بررسی گزینه (۲): از طرفی می‌دانیم که در تابع زوج cos و در بازه $[-1,+1]$، بیشترین مقدار در $x=0$ رخ می‌دهد و کمترین مقدار در ابتدا و انتهای بازه؛ در نتیجه به ازای هر نقطه مانند $x=\frac{1}{b}$ رابطه $\cos\frac{1}{b}>\cos 1$ برقرار است.

بررسی گزینه (۳): همچنین نقاط $b=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ در آن $k\in\mathbb{Z}$ است، هرچند عبارت $\cos\frac{1}{b}=\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}$ را صفر می‌کند؛ اما معادله به‌صورت $\cos(\frac{1}{b})=\frac{1}{b}$ است و برای برقرار بودن تساوی، باید دو طرف صفر شوند که این‌گونه نیست، پس گزینه اشتباه است.

بررسی گزینه (۴): اگر دو تابع $\cos x$ و x را رسم کنید خواهید دید که نقطه تلاقی دو تابع که همان x است از $\frac{1}{2}$ بزرگ‌تر خواهد بود و چون $b=\frac{1}{x}$ پس داریم:

$$x>\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}}\frac{1}{x}<2\xrightarrow{b=\frac{1}{x}} b<2$$

۱۱ـ گزینه «۴» y' در ۲ جمله ظاهر شده است. با فاکتورگیری از y' به رابطه $y'(x^3 \sin y - x) = -2y$ می‌رسیم. حالا برای این معادله که به صورت $f(x, y, y') = 0$ داده شده است ابتدا وضعیت خطی بودن آن را بررسی می‌کنیم. در ضریب dy ترم غیرخطی‌کننده $x^3 \sin y$ قرار دارد. اما در ضریب dx نه تنها از x خبری نیست، بلکه در ضریب dy، x و x^{α} داریم. پس معادله نسبت به x برنولی است. با نوشتن $y' = \frac{dy}{dx}$ و ضریب طرفین در $\frac{dx}{dy}$ سعی می‌کنیم فرم استاندارد معادله برنولی نسبت به x را بسازیم:

$$x^3 \sin y - x = -2y\frac{dx}{dy} \Rightarrow -2y\frac{dx}{dy} + x = x^3 \sin y \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -2y} \frac{dx}{dy} - \frac{x}{2y} = -x^3 \frac{\sin y}{2y}$$

در معادله برنولی به‌دست آمده $\alpha = 3$ است. ابتدا معادله را بر x^3 تقسیم می‌کنید و در ادامه با انتخاب $u = x^{1-3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ و نتیجه آن صورت $\frac{du}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{x^3}\frac{dx}{dy}$ به جایگذاری می‌پردازیم:

$$\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow -\frac{du}{2} - \frac{1}{2y}u = -\frac{\sin y}{2y} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } -2} du + \frac{1}{y}u = \frac{\sin y}{y}$$

دیدیم که به یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به u رسیده‌ایم. چون $p(y) = \frac{1}{y}$ است؛ لذا عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{Lny} = y$ است که با داشتن μ جواب معادله به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$u(y) = \frac{1}{y}[\int y\frac{\sin y}{y}dy + c] \Rightarrow u = \frac{1}{y}[-\cos y + c] \xrightarrow{u=\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y}[-\cos y + c] \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y} \frac{y}{x^2} = -\cos y + c$$

با جایگذاری $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \pi)$ داریم:

$$\frac{\pi}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2} = -\cos\pi + c \Rightarrow 2 = -(-1) + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = 1 - \cos y$$

$$\cos y = 1 - \frac{y}{x^2}$$

تا به اینجای کار جواب خصوصی تعیین شده است. اما چون تابع کسینوس کراندار است و مقدار آن در بازه $[-1,1]$ است داریم:

$$-1 \le \cos y = 1 - \frac{y}{x^2} \le 1 \Rightarrow -1 \le 1 - \frac{y}{x^2} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y}{x^2} \le 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} \ge 0 \Rightarrow y \ge 0 \\ 1 - \frac{y}{x^2} \ge -1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} \le 2 \Rightarrow y \le 2x^2 \end{cases}$$

پس جواب خصوصی به‌صورت $0 \le y \le 2x^2$ است و تابع $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = 0$ است.

۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به تکرار جمله $2x + 3y$ در صورت و مخرج و همچنین فرم معادله داده شده که به فرم کلی $y' = f(ax + by + c)$ است، از تغییر متغیر $u = 2x + 3y$ استفاده می‌کنیم:

$$u = 2x + 3y \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx} \Rightarrow 3\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 3} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(\frac{du}{dx} - 2)$$

حالا در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{3}(\frac{du}{dx} - 2) = \frac{2u + 5}{u + 4} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 3} \frac{du}{dx} - 2 = \frac{3(2u + 5)}{u + 4} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3(2u + 5)}{u + 4} + 2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3(2u + 5) + 2(u + 4)}{u + 4} = \frac{8u + 23}{u + 4} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} du = \frac{8u + 23}{u + 4}dx$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{8u+23}{u+4}} \frac{u + 4}{8u + 23}du = dx \Rightarrow \frac{\frac{1}{8}(8u + 23) + 4 - \frac{23}{8}}{8u + 23}du = dx$$

معادله دیفرانسیل بدست آمده تفکیک‌پذیر است.

$$(\frac{1}{8} + \frac{\frac{9}{8}}{8u + 23})du = dx$$

کافی است از طرفین آن انتگرال‌گیری کنیم تا به جواب عمومی دست یابیم:

$$\frac{1}{8}u + \frac{9}{8}[\frac{1}{8}Ln(8u + 23)] = x + c \Rightarrow \frac{u}{8} + \frac{9}{64}Ln(8u + 23) = x + c_1 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 8} u + \frac{9}{8}Ln(8u + 23) = 8x + 8c_1 \xrightarrow{u=2x+3y}$$

$$2x + 3y + \frac{9}{8}Ln(16x + 24y + 23) = 8x + 8c_1 \Rightarrow 3y - 6x + \frac{9}{8}Ln(16x + 24y + 23) = 8c_1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 3} y - 2x + \frac{3}{8}Ln(16x + 24y + 23) = \frac{8}{3}c_1$$

با فرض $\frac{8}{3}c_1 = c$ به جواب $y - 2x + \frac{3}{8}Ln(16x + 24y + 23) = c$ می‌رسیم.

۱۳ـ گزینه «۴» با فرض $y^2=u$ که نتیجه $2yy'=u'$ را در پی دارد، معادله به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$y'=\frac{1}{x^2y^3+xy}\Rightarrow y'=\frac{1}{y(x^2y^2+x)}\Rightarrow yy'=\frac{1}{x^2y^2+x}\xrightarrow[yy'=\frac{u'}{2}]{y^2=u}\frac{u'}{2}=\frac{1}{x^2u+x}\Rightarrow u'(x^2u+x)=2$$

$$\Rightarrow\frac{du}{dx}(x^2u+x)=2\Rightarrow\frac{dx}{du}-\frac{x}{2}=x^2\frac{u}{2}$$

به یک معادله‌ی برنولی رسیده‌ایم که با تغییر متغیر $z=x^{1-2}=x^{-1}$ و در نتیجه $z'=-x^{-2}x'$ داریم:

$$\frac{z'}{-x^{-2}}-\frac{x}{2}=x^2\frac{u}{2}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } -x^{-2}}z'+\frac{z}{2}=-\frac{u}{2}$$

که یک معادله‌ی خط برحسب z و متغیر u است، لذا داریم: $\mu(u)=e^{\int\frac{1}{2}du}=e^{\frac{1}{2}u}$

پس جواب معادله به صورت مقابل است: $z=\frac{1}{e^{\frac{u}{2}}}[\int e^{\frac{u}{2}}(-\frac{u}{2})du+c]$

ابتدا جواب انتگرال $-\frac{1}{2}\int ue^{\frac{1}{2}u}du$ را حساب می‌کنیم:

u	$e^{\frac{u}{2}}$
⊕ 1	$2e^{\frac{u}{2}}$
⊖ 0	$4e^{\frac{u}{2}}$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\int ue^{\frac{1}{2}u}du=-\frac{1}{2}[2ue^{\frac{u}{2}}-4e^{\frac{u}{2}}]=-ue^{\frac{u}{2}}+2e^{\frac{u}{2}}$$

بنابراین داریم:

$$z=\frac{1}{e^{\frac{u}{2}}}[-ue^{\frac{u}{2}}+2e^{\frac{u}{2}}+c]\Rightarrow z=-u+2+ce^{-\frac{u}{2}}\xrightarrow[u=y^2]{z=\frac{1}{x}}x^{-1}=-y^2+2+ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا باید جواب معادله را به دست آوریم؛ چون معادله‌ی خطی است، لذا عامل انتگرال‌ساز را با فرض $p(t)=\frac{1}{2}$ به راحتی برابر با $\mu(t)=e^{\int-\frac{1}{2}dt}=e^{-\frac{t}{2}}$ به دست می‌آوریم. پس جواب به صورت زیر است:

$$y=\frac{1}{e^{-\frac{t}{2}}}[\int e^{-\frac{t}{2}}.2\cos tdt+c]\Rightarrow ye^{-\frac{t}{2}}=e^{-\frac{t}{2}}(\frac{8\sin t-4\cos t}{5})+c\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } e^{-\frac{t}{2}}}y=\frac{1}{5}(8\sin t-4\cos t)+ce^{\frac{t}{2}}$$

حالا شرط $y(0)=a$ را لحاظ می‌کنیم:

$$y(0)=a\Rightarrow a=0-\frac{4}{5}\cos(0)+ce^{0}\Rightarrow c=a+\frac{4}{5}$$

بنابراین جواب به شکل مقابل است:

$$y=\frac{1}{5}(8\sin t-4\cos t)+(a+\frac{4}{5})e^{\frac{t}{2}}$$

برای نوسانی شدن باید قسمت نمایی از بین برود؛ و این یعنی $a+\frac{4}{5}=0$ شود و لذا $a=-\frac{4}{5}$ باید باشد.

یادآوری: حاصل انتگرال $\int e^{ax}\cos bxdx$ برابر با $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]$ است.

۱۵ـ گزینه «۱» واضح است که معادله دیفرانسیل داده شده، دارای فرم کلی $y'=f(ax+by+c)$ است و همان‌گونه که قبلاً در درسنامه معادلات تفکیک‌پذیر گفته شد، تغییر متغیر $u=x+y$ و نتیجه آن، یعنی، $u'=1+y'$ یا $y'=u'-1$ کلید حل سؤال خواهد بود و در نهایت این معادله دیفرانسیل را به یک معادله تفکیک‌پذیر برحسب متغیر جدید یعنی u تبدیل خواهد کرد. در ادامه به حل سؤال می‌پردازیم:

$$u'-1=\sec(u)\Rightarrow u'=1+\sec u\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}}\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{\cos u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{\cos u+1}{\cos u}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx}du=\frac{\cos u+1}{\cos u}dx\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\cos u+1}{\cos u}}\frac{du}{\frac{\cos u+1}{\cos u}}=dx\Rightarrow\frac{\cos u\,du}{1+\cos u}=dx$$

ملاحظه کردید که به یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر رسیدیم. در این مرحله از طرفین آن انتگرال می‌گیریم و پس از انتگرال‌گیری به‌جای متغیر u، معادل آن یعنی $x+y$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\cos u}{1+\cos u}du=dx\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\int\frac{\cos u+1-1}{1+\cos u}du=x+c$$

$$\int(1-\frac{1}{1+\cos u})du=x+c\xrightarrow{1+\cos u=2\cos^2(\frac{u}{2})}\int(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{u}{2}})du=x+c$$

$$u-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}=x+c\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}=1+tg^2(\frac{u}{2})}u-\frac{1}{2}\int(1+tg^2\frac{u}{2})du=x+c$$

$$u-\frac{1}{2}[2tg(\frac{u}{2})]=x+c\Rightarrow u-tg(\frac{u}{2})=x+c\xrightarrow{u=x+y}x+y-tg\frac{1}{2}(x+y)=x+c$$

$$y-tg\frac{1}{2}(x+y)=c$$

$$y-\frac{1}{2}tg(x+y)=c\xrightarrow{y(0)=0}0-\frac{1}{2}tg(0)=0\Rightarrow 2y=tg(x+y)$$

حالا دو منحنی $y=-x+\frac{\pi}{3}$ و جواب خصوصی به دست آمده، یعنی $2y=tg(x+y)$ را با هم برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=-x+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2y=tg(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\2y=tg(x+y)\end{cases}$$

۱۶ـ گزینه «۳» در نگاه اول متوجه می‌شویم که این معادله دیفرانسیل نسبت به x یا y خطی نیست. چون در ضریب dx عبارت‌هایی برحسب x وجود دارد. برای y هم همین‌طور. اما وجود عبارت $\frac{y-3}{x+1}$ در توان تابع نمایی ما را به انتخاب تغییر متغیر $u=\frac{y-3}{x+1}$ هدایت می‌کند. برای تغییر متغیر موردنظر داریم:

$$u=\frac{y-3}{x+1}\Rightarrow y-3=u(x+1)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(x+1)\frac{du}{dx}+u$$

حالا تغییر متغیر و مشتق آن را در معادله دیفرانسیل صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم:

$$(x+1)\frac{du}{dx}+u=\frac{(x+1)^2+(x+1)^2-u^2e^u}{(x+1)(x+1)ue^u}=\frac{(x+1)^2(1+u^2e^u)}{(x+1)^2ue^u}=\frac{1+u^2e^u}{ue^u}$$

$$(x+1)\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{ue^u}+u\Rightarrow(x+1)\frac{du}{dx}=\frac{1}{ue^u}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{x+1}{dx}=\frac{1}{ue^u}\cdot\frac{1}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}}\frac{dx}{x+1}=ue^u du$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر است. از طرفین آن انتگرال می‌گیریم: $Ln(x+1)+c=(u-1)e^u$

اگر به‌جای u عبارت $\frac{y-3}{x+1}$ قرار دهیم، جواب عمومی معادله تعیین می‌شود:

$$(\frac{y-3}{x+1}-1)e^{\frac{y-3}{x+1}}=Ln(x+1)+c\Rightarrow(\frac{y-x-4}{x+1})e^{\frac{y-3}{x+1}}=Ln(x+1)+c$$

روش دوم: معادله دیفرانسیل صورت سؤال یک عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$ دارد. لذا با ضرب آن در معادله، یک معادله دیفرانسیل جدید کامل خواهیم داشت و به راحتی می‌توان جواب آن را تعیین کرد.

با توجه به اینکه فرم $f(x,y)=c$ در گزینه‌ها داده شده کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم. با طرفین وسطین کردن داریم:

$$[(x+1)^2+(y-3)^2 e^{\frac{y-3}{x+1}}]dx=[(x+1)(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}]dy$$

$$[(x+1)^2+(y-3)^2 e^{\frac{y-3}{x+1}}]dx-[(x+1)(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}]dy=0$$

$$M=(x+1)^2+(y-3)^2 e^{\frac{y-3}{x+1}} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}+\frac{(y-3)^2}{x+1}e^{\frac{y-3}{x+1}}$$

$$N=-(x+1)(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}+\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}(x+1)e^{\frac{y-3}{x+1}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}$$

همانطورکه می‌بینید معادله کامل نیست، اما اگر حاصل را بر N تقسیم کنیم تنها عبارتی برحسب x باقی می‌ماند:

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{1}{-(x+1)(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}}(3(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}})=\frac{-3}{x+1}$$

درنتیجه عامل انتگرال‌ساز به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-3}{x+1}dx}=e^{-3\text{Ln}x+1}=e^{\text{Ln}(x+1)^{-3}}=(x+1)^{-3}=\frac{1}{(x+1)^3}$$

با ضرب $\mu(x)$ در طرفین معادله داریم:

$$\frac{1}{(x+1)^3}[(x+1)^2+(y-3)^2 e^{\frac{y-3}{x+1}}]dx-\frac{1}{(x+1)^3}[(x+1)(y-3)e^{\frac{y-3}{x+1}}]dy=0$$

$$\{\frac{1}{x+1}+\frac{(y-3)^2}{(x+1)^3}e^{\frac{y-3}{x+1}}\}dx-\frac{y-3}{(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}dy=0$$

در گام آخر باید بررسی کنیم که محاسبه جواب عمومی با روش M^*، که نتیجه آن $\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-(y-3)}{(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}dy=C$ است راحت‌تر است یا روش N^*، $\int[\frac{1}{1+x}+\frac{(y-3)^2}{(x+1)^3}e^{\frac{y-3}{x+1}}]dx+\int 0\,dy=C$. واقعیت این است که محاسبات هر دو روش به یک میزان است. از روش الف به محاسبه جواب عمومی می‌پردازیم:

$$\int M^*dx+\int N\,dy=c \Rightarrow \int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-(y-3)}{(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}dy=c \Rightarrow \text{Ln}(x+1)+\int\frac{(y-3)}{-(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}dy=c$$

اگر از تغییر متغیر $u=\frac{y-3}{x+1}$ در انتگرال $-\int\frac{y-3}{(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}dy$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$du=\frac{dy}{x+1} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int\frac{-(y-3)}{(x+1)^2}e^{\frac{y-3}{x+1}}=\int -ue^u\,dy=-(u-1)e^u$$

با جایگذاری مقدار اصلی u حاصل انتگرال $-(u-1)e^u=-(\frac{y-3}{x+1}-1)e^{\frac{y-3}{x+1}}=-\frac{(y-x-4)}{x+1}e^{\frac{y-3}{x+1}}$ می‌شود؛ لذا جواب عمومی معادله نهایتاً به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{Ln}(x+1)-\frac{y-x-4}{x+1}e^{\frac{y-3}{x+1}}=c \Rightarrow -\frac{y-x-4}{x+1}e^{\frac{y-3}{x+1}}=-\text{Ln}(x+1)+c \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر}-1} e^{\frac{y-3}{x+1}}(\frac{y-x-4}{x+1})=\text{Ln}(x+1)-c$$

$$\xrightarrow{-c=C} e^{\frac{y-3}{x+1}}(\frac{y-x-4}{x+1})=\text{Ln}\,x+1+C$$

۱۷ـ گزینه «۲» با ساده‌سازی داریم:
$$(2x^3+2xy^2-7x)dx+(2x^2y+2y^3-8y)dy=0$$
اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که در عبارت $2xy^2dx+2x^2ydy$ با اضافه شدن ۱ واحد به توان x، ۱ واحد از توان y کاهش می‌یابد. بنابراین این عبارت دیفرانسیل کامل است، پس با دسته‌بندی مناسب داریم:
$$2d[\frac{x^4}{4}]-7d[\frac{x^2}{2}]+d(x^2y^2)+2d(\frac{y^4}{4})-8d(\frac{y^2}{2})=0$$
با انتگرال‌گیری داریم:
$$2\frac{x^4}{4}-\frac{7x^2}{2}+x^2y^2+2\frac{y^4}{4}-8\frac{y^2}{2}=c\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۲}}x^4-7x^2+2x^2y^2+y^4-8y^2=c$$
با جایگذاری شرط اولیه $y(0)=0$ به سادگی $c=0$ به‌دست می‌آید.
$$f(x,y)=x^4+2x^2y^2+y^4-7x^2-8y^2=(x^2+y^2)^2-7x^2-8y^2$$
برای محاسبه نقاط اکسترمم باید دستگاه $\begin{cases}f_x=0\\f_y=0\end{cases}$ را حل کنیم.
$$\begin{cases}f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x(x^2+y^2)-14x=x(4(x^2+y^2)-14)=0\\ f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+y^2)-16y=y(4(x^2+y^2)-16)=0\end{cases}$$
از حل دستگاه بالا نقطه بحرانی تابع به‌صورت $(0,0)$ محاسبه می‌شود. با استفاده از آزمون مشتق دوم به محاسبه $A=f_{xx}(0,0)$، $B=f_{xy}(0,0)$ و $C=f_{yy}(0,0)$ می‌پردازیم:
$$f_{xx}=4(x^2+y^2)-14+8x^2\Rightarrow A=f_{xx}(0,0)=-14$$
$$f_{xy}=8xy\Rightarrow B=f_{xy}(0,0)=0$$
$$f_{yy}=4(x^2+y^2)-16+8y^2\Rightarrow c=f_{yy}(0,0)=-16$$
با توجه به اینکه $AC-B^2>0$ و $A<0$ است پس نقطه $(0,0)$، یک نقطه ماکزیمم موضعی خواهد بود.

روش دیگری که برای حل این نوع از معادلات در اختیار داریم استفاده از تغییر متغیر است. در درسنامه معادلات تفکیک‌پذیر توضیح داده شده که معادلاتی به فرم $xf(x^2,y^2)dx+yg(x^2,y^2)dy=0$ را می‌توان با تغییر متغیر $u=x^2$ و $v=y^2$ به شکل $f(u,v)du+g(u,v)dv=0$ تبدیل کرد و سپس معادله جدید را به روش مناسب حل کرد.

۱۸ـ گزینه «۴» در این سؤال با نوشتن $y'=\frac{dy}{dx}$ می‌بینید که در ضریب dy تابعی از y وجود ندارد. همچنین در ضریب dx علاوه بر وجود چندجمله‌ای درجه ۱ از y، عبارت $\sqrt[3]{y-2}$ نیز وجود دارد. به دلیل حضور $y-2$ زیر رادیکال، تغییر متغیر $u=y-2$ که نتیجه $y'=u'$ را به همراه دارد را در معادله اعمال می‌کنیم. در این سؤال عبارت زیر رادیکال مزاحمت ایجاد می‌کند! همچنین $(y-2)$ در سمت چپ تساوی با علامت منفی تکرار شده است. پس با انتخاب $u=y-2$ که نتیجه آن به‌صورت $u'=y'$ است داریم:
$$u'-u=xe^x\sqrt[3]{u}\Rightarrow u'-u=xe^xu^{\frac{1}{3}}$$
ملاحظه می‌کنید که معادله جدید برنولی با $\alpha=\frac{1}{3}$ است. ابتدا معادله را بر $u^{\frac{1}{3}}$ تقسیم می‌کنیم:
$$\frac{u'}{u^{\frac{1}{3}}}-\frac{u}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{xe^xu^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow u^{-\frac{1}{3}}u'-u^{\frac{2}{3}}=xe^x$$
حالا تغییرمتغیر $v=u^{1-\frac{1}{3}}=u^{+\frac{2}{3}}$ را در نظر گرفته و داریم:
$$v'=\frac{dv}{dx}=+\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}u'\Rightarrow u^{-\frac{1}{3}}u'=\frac{3}{2}v'$$
با جایگذاری تغییرمتغیر v و مشتق آن به معادله جدید می‌رسیم:
$$\frac{3}{2}v'-v=xe^x$$
این معادله نسبت به v خطی است. پس با تقسیم طرفین بر $\frac{3}{2}$ سعی می‌کنیم در v' باقی بماند، لذا داریم:
$$\frac{\frac{3}{2}v'}{\frac{3}{2}}-\frac{v}{\frac{3}{2}}=\frac{xe^x}{\frac{3}{2}}\Rightarrow v'-\frac{2}{3}v=\frac{2}{3}xe^x$$
در این مرحله عامل انتگرال‌ساز را به‌صورت $\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{3}dx}=e^{-\frac{2}{3}x}$ محاسبه می‌کنیم. پس جواب عمومی به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.:

$$v(x)=\frac{1}{e^{-\frac{2}{3}x}}[\int e^{-\frac{2}{3}x}(\frac{2}{3}xe^{x})dx+c]=e^{\frac{2}{3}x}[\int\frac{2}{3}xe^{\frac{x}{3}}dx+c]$$

$$v(x)=e^{\frac{2}{3}x}[2\int\frac{x}{3}e^{\frac{x}{3}}dx+c]=e^{\frac{2}{3}x}(2(x-3)e^{\frac{x}{3}}+c)$$

$$v(x)=2(x-3)e^{x}+ce^{\frac{2}{3}x}$$

می‌دانیم که $v=u^{\frac{2}{3}}$ و $u=y-2$. پس $v=(y-2)^{\frac{2}{3}}$ است و حالا v را در معادله قرار می‌دهیم تا جواب عمومی به‌صورت زیر تعیین شود.

$$(y-2)^{\frac{2}{3}}=2(x-3)e^{x}+ce^{\frac{2}{3}x}$$

اگر شرط $y(0)=2$ را در جواب قرار دهیم داریم:

$$(2-2)^{\frac{2}{3}}=2(0-3)e^{0}+ce^{0}\ \Rightarrow c=6\ \Rightarrow (y-2)^{\frac{2}{3}}=2(x-3)e^{x}+6e^{\frac{2}{3}x}$$

$$(y-2)^{\frac{2}{3}}=2e^{x}[(x-3)+3e^{\frac{-x}{3}}]\xrightarrow{\text{طرفین به توان }\frac{3}{2}}y-2=2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}x}[(x-3)+3e^{\frac{-x}{3}}]^{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow y=2+2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}x}[(x-3)+3e^{\frac{-x}{3}}]^{\frac{3}{2}}$$

اگر $x=3$ را در جواب خصوصی فوق جایگذاری کنیم حاصل به‌صورت $y(3)=2+\sqrt[3]{36e^{4}}$ محاسبه خواهد شد.

۱۹ـ گزینه «۳» در این سؤال y' در دو جمله مجزا آمده است. برای تشخیص بهتر انتخاب روش حل با انتقال جمله xy' به سمت چپ تساوی معادله به‌صورت $y'(x^{3}\sin y-x)+2y=0$ نوشته می‌شود. حالا چون معادله فرم $f(x,y,y')=0$ را دارد ابتدا وضعیت خطی بودن آن را بررسی می‌کنیم. با در نظرگرفتن $y'=\frac{dy}{dx}$ ملاحظه می‌کنید وجود جمله $\sin y$ معادله را نسبت به y غیرخطی می‌کند اما در ضریب dx، خبری از x نیست و در ضریب $2dy$ جمله برحسب x داریم. یکی x و دیگری x^{2}. پس معادله نسبت به x برنولی است. ابتدا معادله را در $\frac{dx}{dy}$ ضرب می‌کنیم:

$$x^{3}+2y\frac{dx}{dy}=0\ \Rightarrow 2y\frac{dx}{dy}-x=-x^{3}\sin y$$

در ادامه باید معادله را بر $2y$ تقسیم کنیم و به ساده‌سازی ادامه دهیم تا معادله برای اعمال تغییرمتغیر آماده گردد.

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{2y}=-x^{3}\frac{\sin y}{2y}\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر }x^{3}}\frac{1}{x^{3}}\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}\frac{1}{x^{2}}=-\frac{\sin y}{2y}$$

معادله برنولی به‌دست آمده با تغییرمتغیر $u=x^{1-3}=x^{-2}=\frac{1}{x^{2}}$ که نتیجه $u'=-2x^{-3}x'=\frac{-2}{x^{3}}x'$ را در پی دارد به یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به u تبدیل خواهد شد. با جایگذاری داریم:

$$-\frac{u'}{2}-\frac{1}{2y}u=-\frac{\sin y}{2y}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در }-2}u'+\frac{1}{y}u=\frac{\sin y}{y}$$

با محاسبه عامل انتگرال‌ساز داریم:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{Lny}=y$$

بنابراین جواب عمومی معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(y)=\frac{1}{y}[\int y\times\frac{\sin y}{y}dy+c]\ \Rightarrow u(y)=\frac{1}{y}[\int\sin y\,dy+c]$$

$$u(y)=\frac{-\cos y+c}{y}\xrightarrow{u=\frac{1}{x^{2}}}\frac{1}{x^{2}}=\frac{-\cos y+c}{y}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}y=x^{2}(-\cos y+c)$$

گفته شده که جواب از نقطه $(1,0)$ عبور می‌کند. با جایگذاری، ثابت c نیز تعیین خواهد شد: $0=1(-\cos 0+c)\ \Rightarrow c=1\ \Rightarrow y=x^{2}(1-\cos y)$

اما چون تابع $\cos y$ کراندار است داریم:

$$-1\le\cos y\le 1\xrightarrow{\text{ضرب‌در }-1}-1\le-\cos y\le 1\xrightarrow{\text{به‌اضافه }+1}$$

$$+1-1\le 1-\cos y\le 1+1\ \Rightarrow 0\le 1-\cos y\le 2\xrightarrow{\text{طرفین ضرب‌در }x^{2}}0\le x^{2}(1-\cos y)\le 2x^{2}\ \Rightarrow 0\le y(x)\le 2x^{2}$$

پس تابع $f(x)=2x^{2}$ و $g(x)=0$ است.

۲۰ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $y'=[\frac{\sqrt{۲}(y+۲)}{x+y-۱}]^۲$ و دارای فرم $y'=f(\frac{a_۱x+b_۱y+c_۱}{ax+by+c})$ است. پس معادله قابلیت تبدیل شدن به یک معادله تفکیک‌پذیر را دارد. ابتدا باید برای دو خط غیرموازی $x+y-۱=۰$ و $\sqrt{۲}y+۲\sqrt{۲}=۰$ $(\frac{۱}{۰}\neq\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ محل تقاطع را پیدا کنیم. از معادله دوم $y=-۲$ به دست می‌آید و با جایگذاری در معادله اول، $x=۳$ به دست می‌آید. پس نقطه تقاطع دو خط به‌صورت $(\alpha,\beta)=(۳,-۲)$ است. با به‌کارگیری تغییرمتغیر $\begin{cases}x=X+۳\\y=Y-۲\end{cases}$ معادله به‌صورت $\frac{dY}{dX}=(\frac{\sqrt{۲}Y}{X+Y})^۲$ به یک معادله همگن تبدیل می‌شود که باید از تغییرمتغیر $u=\frac{Y}{X}$ استفاده کنیم. با این توضیح می‌توانیم به‌جای Y در سمت راست تساوی u و به‌جای X عدد ۱ قرار دهیم همچنین با داشتن $Y=uX$ به‌جای Y' عبارت $u+Xu'$ قرار می‌دهیم:

$$u+Xu'=(\frac{\sqrt{۲}u}{۱+u})^۲\ \Rightarrow Xu'=\frac{۲u^۲}{(۱+u)^۲}-u=\frac{۲u^۲-u(۱+u)^۲}{(۱+u)^۲}$$

$$Xu'=\frac{۲u^۲-u-۲u^۲-u^۳}{(۱+u)^۲}=\frac{-u(۱+u^۲)}{(۱+u)^۲}\xrightarrow{u'=\frac{du}{dX}}X\frac{du}{dX}=\frac{-u(۱+u^۲)}{(۱+u)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du}\frac{X}{dX}=\frac{-u(۱+u^۲)}{(۱+u)^۲}\cdot\frac{۱}{du}\xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}}\frac{dX}{X}=-\frac{(۱+u)^۲\,du}{u(۱+u^۲)}$$

حالا معادله تفکیک‌پذیر به دست آمده را با انتگرال‌گیری از طرفین حل می‌کنیم:

$$\text{Ln}X+c=-\int\frac{(۱+u)^۲\,du}{u(۱+u^۲)}$$

برای محاسبه انتگرال $\int\frac{(۱+u)^۲}{u(۱+u^۲)}$ با استفاده از تفکیک‌پذیری کسرها داریم:

$$\frac{(۱+u)^۲}{u(۱+u^۲)}=\frac{۱+۲u+u^۲}{u(۱+u^۲)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{۱+u^۲}=\frac{A(۱+u^۲)+Bu^۲+Cu}{u(۱+u^۲)}=\frac{(A+B)u^۲+Cu+A}{u(۱+u^۲)}$$

با مقایسه $(A+B)u^۲+Cu+A$ و $u^۲+۲u+۱$ مقادیر A، B و C به‌صورت $\begin{cases}A=۱\\B=۰\\C=۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید. پس کسر به‌صورت $\frac{(۱+u)^۲}{u(۱+u^۲)}=\frac{۱}{u}+\frac{۲}{۱+u^۲}$ تجزیه می‌شود. حالا حاصل انتگرال قابل محاسبه خواهد بود:

$$-\int(\frac{۱}{u}+\frac{۲}{۱+u^۲})du=-(\text{Ln}\,u+\text{Arc}\,\text{tg}\,u)$$

با جایگذاری حاصل انتگرال در جواب عمومی داریم:

$$\text{Ln}\,X+c=-\text{Ln}\,u-\text{Arc}\,\text{tg}\,u\xrightarrow{u=\frac{Y}{X}}\text{Ln}\,X+c=-\text{Ln}(\frac{Y}{X})-\text{Arc}\,\text{tg}\frac{Y}{X}$$

اما تغییرمتغیر اولیه به‌صورت $\begin{cases}x=X+۳\\y=Y-۲\end{cases}$ بوده است؛ بنابراین مقادیر X و Y را به‌صورت $\begin{cases}X=۳-x\\Y=-۲-y\end{cases}$ در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\text{Ln}\,|۳-x|+c=-\text{Ln}\,|\frac{-۲-y}{۳-x}|-\text{Arc}\,\text{tg}(\frac{-۲-y}{۳-x})$$

$$\text{Ln}\,|۳-x|+c=-\text{Ln}\,|\frac{y+۲}{x-۳}|-\text{Arc}\,\text{tg}(\frac{y+۲}{x-۳})$$

$$\text{Ln}\,|۳-x|+\text{Ln}\,|\frac{y+۲}{x-۳}|-\text{Arc}\,\text{tg}(\frac{y+۲}{x-۳})=-c$$

اگر به‌جای $-c$، C قرار دهیم جواب عمومی به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$\text{Ln}\,|x-۳|+\text{Ln}\,|\frac{y+۲}{x-۳}|-\text{Arc}\,\text{tg}(\frac{y+۲}{x-۳})=C$$

توجه: ورودی تابع Ln نمی‌تواند شامل عددی منفی باشد؛ بنابراین پس از انتگرال‌گیری عبارت جلوی Ln را در قدر مطلق قرار می‌دهند.

۲۱ـ گزینه «۱» این معادله با انتقال ترم $-y$ به سمت راست تساوی دارای فرم $y=f(x,y')$ است، ابتدا به جای y'، عبارت p را قرار می‌دهیم سپس یک بار دیگر از رابطه مشتق می‌گیریم و دوباره به‌جای y'، p قرار می‌دهیم.

$$y=x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+2x\frac{dy}{dx}\Rightarrow y=x^2p^4+2xp\xrightarrow{\text{از معادله مشتق می‌گیریم}}y'=2xp^4+4x^2p^3p'+2p+2xp'$$

$$\xrightarrow{y'=p}p=(4x^2p^3+2x)p'+2xp^4+2p\Rightarrow 2x(2xp^3+1)p'+p(2xp^3+1)=0$$

$$(2xp^3+1)(2xp'+p)=0$$

جواب عمومی با فرض $2xp^3+1\neq 0$ محاسبه می‌شود. اگر $2xp^3+1=0\Rightarrow p^3=-\frac{1}{2x}$، آنگاه با قرار دادن در معادله زیر جواب غیرعادی به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y=x^2p^4+2xp=xp(xp^3+2)\xrightarrow{p=(-\frac{1}{2x})^{\frac{1}{3}},\,p^3=-\frac{1}{2x}}x\left(-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(x\left(-\frac{1}{2x}\right)+2\right)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{1}{2}+2\right)\Rightarrow -\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}x^{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x^2}\quad \text{یا}\quad y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$$

اما آیا جواب غیرعادی در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟ باید y و y' را در معادله دیفرانسیل جایگذاری کنیم: ابتدا y' را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{2x}}$$

به منظور جلوگیری از محاسبات طولانی y و y' را ساده‌تر در نظر می‌گیریم بدین صورت که:

$$y=A\sqrt[3]{x^2}\quad \text{و}\quad y'=\frac{2}{3}A\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\quad \text{و}\quad A=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$$

حالا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$x^2\left(\frac{2}{3}A\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4+2x\left(\frac{2}{3}A\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)-A\sqrt[3]{x^2}=0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4A^4\frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{3}A\frac{x}{\sqrt[3]{x}}-A\sqrt[3]{x^2}=0\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^4A^4\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3}A\sqrt[3]{x^2}-A\sqrt[3]{x^2}=0$$

با تقسیم معادله بالا بر $A\sqrt[3]{x^2}$ داریم:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4A^3+\frac{4}{3}-1=0\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^4A^3=-\frac{1}{3}$$

اما $A=\frac{-3}{2\sqrt[3]{2}}$ و $A^3=-\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}$ و با جایگذاری در سمت چپ تساوی فوق داریم:

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]=-\frac{1}{3}$$

پس جواب غیرعادی نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

۲۲ـ گزینه «۳» ابتدا $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=2x+9y^2\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=6x+3y^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(2x+9y^2)-(6x+3y^2)=6y^2-4x$$

حالا $N-M$ را حساب می‌کنیم:

$$(3x^2+3xy^2+6y^3)-(5x^2+2xy+3y^3)=-2x^2+3xy^2-2xy+3y^3=-x(2x-3y^2)-(2x-3y^2)=-(x+y)(2x-3)^2$$

با تشکیل $\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ داریم:

$$\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-2(2x-3y^2)}{-(x+y)(2x-3y^2)}=\frac{2}{x+y}$$

بنابراین $z=x+y$ و $F(z)=\frac{2}{x+y}$ و لذا داریم:

$$\mu=e^{\int F(z)dz}=e^{\int\frac{2}{z}dz}=e^{2Lnz}=e^{Lnz^2}=z^2=(x+y)^2$$

با ضرب معادله در عامل انتگرال‌ساز داریم:

$$(x+y)^2(5x^2+2xy+3y^2)dx+3(x+y)^2(x^2+xy^2+2y^3)dy=0$$

حالا معادله کامل است و باید جواب عمومی را تعیین کنیم، می‌توانیم فرض کنیم $M^*=x^2(5x^2)=5x^4$ و لذا داریم:

$$\int 5x^4dx+\int 3(x^2+y^2+2xy)(x^2+xy^2+2y^3)dy=c$$

$$x^5+3\int[x^4+x^3y^2+2x^2y^3+y^2x^2+xy^4+2y^5+2x^3y+2x^2y^3+4xy^4]dy=c$$

$$\Rightarrow x^5+3\int[x^4+x^3y^2+4x^2y^3+y^2x^2+5xy^4+2y^5+2x^3y]dy=c$$

$$\Rightarrow x^5+3\left[x^4y+\frac{x^3y^3}{3}+\frac{4x^2y^4}{4}+\frac{y^3}{3}x^2+\frac{5xy^5}{5}+\frac{2y^6}{6}+\frac{2x^3y^2}{2}\right]=c\Rightarrow x^5+3x^4y+x^3y^3+3x^2y^4+y^3x^2+3xy^5+y^6+3x^3y^2=c$$

۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به این که عبارت $(x+y)$ چند بار در معادله به کار رفته است تغییر متغیر $u=x+y$ را در نظر می‌گیریم:

$$u=x+y \Rightarrow u'=1+\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u'-1$$

با جایگذاری $x+y=u$ و $\frac{dy}{dx}=u'-1$ در معادله داریم:

$$\frac{dy}{dx}+x(x+y)=x^3(x+y)^3-1 \Rightarrow u'-1+xu=x^3u^3-1 \Rightarrow u'+xu=x^3u^3 \Rightarrow \frac{u'}{u^3}+\frac{x}{u^2}=x^3$$

معادله به دست آمده از نوع برنولی است پس تغییر متغیر $z=\frac{1}{u^2}$ را اعمال می‌کنیم:

$$z=\frac{1}{u^2} \Rightarrow z'=\frac{-2u'}{u^3} \Rightarrow \frac{u'}{u^3}=\frac{-z'}{2}$$

$$\frac{u'}{u^3}+\frac{x}{u^2}=x^3 \Rightarrow \frac{-z'}{2}+xz=x^3 \Rightarrow z'-2xz=-2x^3$$

معادله از نوع خطی مرتبه اول به دست آمد پس آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -2xdx}=e^{-x^2} \Rightarrow z=\frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x).(-2x^3)dx+c]=e^{x^2}.[\int -2x^3e^{-x^2}dx+c]$$

$$\Rightarrow z=e^{x^2}[(x^2+1)e^{-x^2}+c]=x^2+1+ce^{x^2} \xrightarrow{z=\frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2}=x^2+1+ce^{x^2} \xrightarrow{u=x+y} \frac{1}{(x+y)^2}=x^2+1+ce^{x^2}$$

۲۴ـ گزینه «۴» ابتدا معادله دیفرانسیل منحنی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$r=c(\sec\theta-\cos\theta) \Rightarrow c=\frac{r}{\sec\theta-\cos\theta} \xrightarrow{\frac{d}{d\theta}} 0=\frac{r'(\sec\theta-\cos\theta)-r(\sec\theta\,tg\theta+\sin\theta)}{(\sec\theta-\cos\theta)^2}$$

$$r'(\sec\theta-\cos\theta)-r(\sec\theta tg\theta+\sin\theta)=0 \Rightarrow \frac{r'}{r}=\frac{\sec\theta tg\theta+\sin\theta}{\sec\theta-\cos\theta}$$

حالا به جای r'، عبارت $-\frac{r^2}{r'}$ را قرار می‌دهیم و سپس به حل معادله دیفرانسیل جدید می‌پردازیم:

$$\frac{(-\frac{r^2}{r'})}{r}=\frac{\sec\theta\,tg\theta+\sin\theta}{\sec\theta-\cos\theta} \Rightarrow -\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{\sec\theta tg\theta+\sin\theta}{\sec\theta-\cos\theta}$$

$$-\frac{r}{dr}=\frac{\sec\theta tg\theta+\sin\theta}{\sec\theta-\cos\theta}\frac{1}{d\theta} \xrightarrow{\text{معکوس کردن کسرها}} -\frac{dr}{r}=\frac{\sec\theta-\cos\theta}{\sec\theta tg\theta+\sin\theta}d\theta \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} -Lnr-Lnc=-\frac{1}{2}Ln|\sin^2\theta-2|$$

$$-Lnrc=-\frac{1}{2}Ln|\sin^2\theta-1-1| \Rightarrow -Lnrc=-\frac{1}{2}Ln|-\cos^2\theta-1| \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } -2} 2Lnrc=Ln|1+\cos^2\theta| \Rightarrow Lnr^2c^2=Ln|1+\cos^2\theta|$$

$$r^2c^2=1+\cos^2\theta \xrightarrow{c^2=C} cr^2=1+\cos^2\theta$$

۲۵ـ گزینه «۳» این معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ است و برای خطی بودن در اولویت است. واضح است که معادله خطی نیست، زیرا وجود ضریب $\sin y$ در y' این معادله را نسبت به y غیرخطی کرده است. در مورد x نیز می‌توان گفت که در ضریب dy باید یک چندجمله‌ای درجه اول از x حضور داشته باشد که این‌جور نیست، اما با به‌کارگیری تغییر متغیر $u=\cos y$ ملاحظه می‌کنید که $u'=-\sin yy'$ نیز در معادله ظاهر شده است. پس با جایگذاری داریم:

$$-u'=(1-u)u \Rightarrow -u'=u-u^2 \Rightarrow -u'-u=-u^2 \Rightarrow u'+u=u^2$$

این معادله نسبت به u برنولی با $\alpha=2$ است، لذا با تقسیم معادله بر u^2 داریم:

$$\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{u}=1 \xrightarrow{u=u^{1-2}=u^{-1};\,v'=-\frac{u'}{u^2}} -v'+v=1 \Rightarrow v'-v=-1$$

حالا معادله برای v خطی است. به سادگی می‌توانیم جواب v و سپس با جایگذاری $u=\frac{1}{u}$ و سپس $u=\cos y$ به پاسخ عمومی مسأله دست یافت.

$$\mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x} \Rightarrow v=\frac{1}{e^{-x}}[\int e^{-x}\times -1dx+c] \Rightarrow v=\frac{e^{-x}+c}{e^{-x}}=1+ce^x$$

$$\xrightarrow{v=\frac{1}{u}} \frac{1}{u}=1+ce^x \xrightarrow{u=\cos y} \frac{1}{\cos y}=1+ce^x \Rightarrow \cos y=(1+ce^x)^{-1} \Rightarrow y=\cos^{-1}(1+ce^x)^{-1}$$

۲۶ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین بر dx داریم: $e^x y' = y(2xy+e^x) \Rightarrow y'-y=2y^2xe^{-x}$

معادله از نوع برنولی به دست آمد پس با تغییر متغیر $u=\frac{1}{y}$ مسئله را حل می‌کنیم: $u=\frac{1}{y} \Rightarrow u'=\frac{-y'}{y^2}$

$$y'-y=2y^2xe^{-x} \Rightarrow \frac{y'}{y^2}-\frac{1}{y}=2xe^{-x} \Rightarrow -u'-u=2xe^{-x} \Rightarrow u'+u=-2xe^{-x}$$

معادله از نوع خطی مرتبه اول به دست آمد:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int dx}=e^x \Rightarrow u=\frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x).(-2xe^{-x})dx+c]=e^{-x}.[\int -2xdx+c]=e^{-x}(-x^2+c)$$

$$\Rightarrow ue^x=-x^2+c \Rightarrow x^2+e^xu=c \xrightarrow{u=\frac{1}{y}} x^2+e^xy^{-1}=c$$

۲۷ـ گزینه «۲» خوشبختانه z داده شده است. اگر فرمول کلی را به‌کار بگیریم با توجه بـه اینکـه $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ آنگاه $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}dz$.

در صورتی‌که عامل انتگرال‌ساز برحسب z باشد حتماً باید $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}$ نیز برحسب z (همان (x^2-y^2)) باشد.

۲۸ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین بر $(T-10)$ و سپس ضربدر dt به معادله $\frac{dT}{T-10}=-kdt$ می‌رسیم که یک معادله تفکیک‌پذیر است. با انتگرال‌گیری از معادله داریم: $Ln(T-10)=-kt+a \Rightarrow e^{LnT-10}=e^{-kt+a}=e^a.e^{-kt} \Rightarrow T-10=e^ae^{-kt}$

با جایگذاری ثابت جدید c به جای e^a به رابطه $T-10=ce^{-kt}$ دست می‌یابیم. اما دو ثابت k و c از شرایط اولیه تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} T(0)=100 \Rightarrow 100-10=ce^0 \Rightarrow c=90 \Rightarrow T-10=90e^{-kt} \\ T(4)=60 \Rightarrow 60-10=90e^{-4k} \Rightarrow 50=90e^{-4k} \Rightarrow e^{-4k}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9} \Rightarrow e^{-k}=(\frac{5}{9})^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها زمانی موردنظر است که در آن $T=20$ می‌شود: $20-10=90e^{-kt}=90(e^{-k})^t \xrightarrow{e^{-k}=(\frac{5}{9})^{\frac{1}{4}}} 10=90(\frac{5}{9})^{\frac{t}{4}} \Rightarrow (\frac{5}{9})^{\frac{t}{4}}=\frac{1}{9}$

$$\Rightarrow Ln(\frac{5}{9})^{\frac{t}{4}}=Ln\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{t}{4}Ln\frac{5}{9}=Ln\frac{1}{9} \Rightarrow t=4\frac{Ln\frac{1}{9}}{Ln\frac{5}{9}}=4\log_{\frac{5}{9}}\frac{1}{9}\simeq 14/9$$

۲۹ـ گزینه «۲» اگر به گزینه‌ها دقت کنید جواب عمومی از ضرب دو عبارت تشکیل شده، بنابراین از حل معادله دیفرانسیل درجه ۲ دو جواب به‌دست می‌آوریم و سپس هرکدام را جداگانه حل می‌کنیم:

$$y'^2-(3y^2+\cos x)y'+3y^2\cos x=0 \Rightarrow y'_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y'_{1,2}=\frac{(3y^2+\cos x)\pm\sqrt{(3y^2+\cos x)^2-4(3y^2\cos x)}}{2}=\frac{3y^2+\cos x\pm\sqrt{(3y^2)+6y^2\cos x+\cos^2 x-12y^2\cos x}}{2}$$

$$y'_{1,2}=\frac{3y^2+\cos x\pm\sqrt{(3y^2)^2-6y^2\cos x+\cos^2 x}}{2}=\frac{3y^2+\cos x\pm\sqrt{(3y^2-\cos x)^2}}{2}$$

$$y'_{1,2}=\frac{3y^2+\cos x\pm(3y^2-\cos x)}{2} \Rightarrow \begin{cases} y'_1=3y^2 \\ y'_2=\cos x \end{cases}$$

حالا دو معادله دیفرانسیل داریم که هرکدام باید جداگانه حل شوند:

معادله اول: $y'=3y^2 \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx}=3y^2 \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{dx}{y^2}} \frac{dy}{y^2}=3dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} -\frac{1}{y}=3x-k \Rightarrow 3x+\frac{1}{y}-k=0 \quad (1)$

معادله دوم: $y'=\cos x \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx}=\cos x \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } dx} dy=\cos xdx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} y=\sin x-k \Rightarrow y-\sin x+k=0 \quad (2)$

حالا دو جواب (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم؛ یعنی $(3x+\frac{1}{y}-k)(y-\sin x+k)$.

۳۰ــ گزینه «۴» با طرفین وسطین کردن سعی می‌کنیم معادله را به فرم $M\,dx + N\,dy = 0$ بنویسیم:

$$(x+\sin y)dx = (\sin 2y - x\cos y)dy \Rightarrow (x+\sin y)dx - (\sin 2y - x\cos y)dy = 0$$

و چون M و N از ترکیب توابع مثلثاتی و چندجمله‌ای است، شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} M = x+\sin y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos y \\ N = -\sin 2y + x\cos y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

با توجه به اینکه $M^* = x$، جواب عمومی معادله را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\int M^* dx + \int N dy = c \Rightarrow \int x\,dx + \int [-\sin 2y + x\cos y]dy = c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2y}{2} + x\sin y = C$$

ثابت C را با جایگذاری $y(0) = \frac{\pi}{2}$ تعیین می‌کنیم:

$$0 + \frac{-1}{2} + 0 = C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

با جایگذاری $C = -\frac{1}{2}$ در جواب عمومی، به جواب خصوصی دست می‌یابیم.

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2y}{2} + x\sin y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2y}{2} + x\sin y = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} + x\sin y = 0 \xrightarrow{\frac{1+\cos 2y}{2} = \cos^2 y} \frac{x^2}{2} + \cos^2 y + x\sin y = 0$$

$$\xrightarrow{\cos^2 y = 1-\sin^2 y} \frac{x^2}{2} + 1 - \sin^2 y + x\sin y = 0 \Rightarrow \sin^2 y = x\sin y + \frac{x^2}{2} + 1 \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } 2} 2\sin^2 y = 2x\sin y + x^2 + 2$$

سعی می‌کنیم در سمت راست تساوی اتحاد مربع $(x+\sin y)^2$ را بسازیم. برای این منظور باید جمله $\sin^2 y$ را به طرفین تساوی اضافه کنیم؛ لذا داریم:

$$2\sin^2 y + \sin^2 y = \sin^2 y + 2x\sin y + x^2 + 2 \Rightarrow 3\sin^2 y = (x+\sin y)^2 + 2$$

$$3\sin^2 y - 2 = (x+\sin y)^2$$

حالا خوب دقت کنید. جمله سمت راست تساوی همواره مثبت است. پس $3\sin^2 y - 2$ نیز باید همواره مثبت باشد.

$$3\sin^2 y - 2 \ge 0 \Rightarrow \sin^2 y \ge \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sin y \ge \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \sin y \le -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

اما چون تابع sin یک تابع کراندار بین $[-1,+1]$ است پس داریم:

$$\sin y \in [-1, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1]$$

۳۱ــ گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با توجه به اینکه هم $(y+e^y)$ داریم و هم $(1+e^y)dy$ (یعنی دیفرانسیل عبارت $y+e^y$ را هم داریم) پس از تغییر متغیر $u = y+e^y$ کمک می‌گیریم.

$$y + e^y = u \Rightarrow (1+e^y)dy = du$$

بنابراین داریم:

$$(u - e^{-x})dx + du = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = e^{-x}$$

به یک معادله‌ی مرتبه اول خطی رسیده‌ایم؛ لذا داریم:

$$\mu = e^{\int 1 dx} = e^x$$

بنابراین جواب معادله به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{e^x}[\int e^x . e^{-x} + c] \Rightarrow ue^x = x + c \xrightarrow{u = y+e^y} (y+e^y)e^x = x + c \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } e^{-x}} y + e^y = (x+c)e^{-x}$$

روش دوم: ابتدا $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + e^y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + e^y \Rightarrow \quad \text{معادله کامل نیست}$$

اگر این عبارت را بر $N = 1 + e^y$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}) = \frac{1+e^y}{1+e^y} = 1$$

لذا عامل انتگرال‌ساز به شکل $M = e^{\int 1 dx} = e^x$ خواهد بود. با ضرب آن در معادله داریم:

$$e^x(y + e^y - e^{-x})dx + e^x(1+e^y)dy = 0$$

بنابراین جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\int (e^x y + e^y . e^x - 1)dx + \int (\text{عبارتی که از حذف جملات شامل x از N حاصل می‌شود})\,dy = c \Rightarrow e^x y + e^y e^x - x + 0 = c \Rightarrow e^x(y+e^y) = x + c$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } e^{-x}} y + e^y = (x+c)e^{-x}$$

۳۲ـ گزینه «۳» با توجه به وجود $xLny$ در ضریب dx و در ضریب dy از تغییر متغیر $xLny = u$ کمک می‌گیریم:

$$xLny = u \Rightarrow Lnydx + \frac{x}{y}dy = du \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y} yLnydx + xdy = ydu$$

دنبال این هستیم معادله‌ای برحسب u و متغیر x ایجاد کنیم:

$$xydx + (2xLny+1)\overbrace{(yLnydx + xdy)}^{ydu} = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y} xdx + (2u+1)du = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{x^2}{2} + \frac{2u^2}{2} + u = C_1 \Rightarrow x^2 + 2u^2 + 2u = 2C_1 \xrightarrow{2C_1 = C} x^2 + 2x^2Ln^2y + 2xLny = C$$

۳۳ـ گزینه «۲» با توجه به تک‌تک گزینه‌ها جواب عمومی را تعیین می‌کنیم و بین جواب عمومی و مشتق آن نسبت به c، ثابت c را حذف می‌کنیم تا به جواب غیرعادی دست یابیم و سپس با مقایسه جواب حاصل با $y = x - x^3$ گزینه صحیح را انتخاب می‌کنیم.

بررسی گزینه (۱) :
$$\begin{cases} y = xc - 2\left(\frac{1+c}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \\ 0 = x - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1+c}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1+c}{3} = \left(\frac{9}{4}x\right)^{-3}, c = 3\left(\frac{9}{4}x\right)^{-3} - 1 \end{cases} \Rightarrow y = \left\{3\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right\}x^{-2} - x$$

بررسی گزینه (۲) :
$$\begin{cases} y = xc + 2\left(\frac{1-c}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\ 0 = x - \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\left(\frac{1-c}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1-c}{3} = x^2 \; ; c = 1 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow y = x(1-3x^2) + 2(x^2)^{\frac{3}{2}} = x - x^3$$

۳۴ـ گزینه «۴» معادله داده شده از نوع برنولی بوده که در آن $a = 2$ است. اما اینجا قصد داریم به روش ابتکاری زیر مسأله را حل کنیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{dt}{ap - bp^2}} \frac{dp}{ap - bp^2} = dt \Rightarrow \frac{dp}{p(a-bp)} = dt \xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{p} + \frac{b}{a-bp}\right)dp = dt$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{1}{a}\int\frac{dp}{p} + \frac{b}{a}\int\frac{dp}{a-bp} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{a}Lnp - \frac{1}{a}Ln(a-bp) = t + k$$

$$\frac{1}{a}Ln\frac{p}{a-bp} = t + k \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } a} Ln\frac{p}{a-bp} = at + ak \Rightarrow e^{Ln\frac{p}{a-bp}} = e^{at}.e^{ak}$$

$$\frac{p}{a-bp} = e^{ak}.e^{at} \xrightarrow{e^{ak} = c} \frac{p}{a-bp} = ce^{at}$$

وقتی $t \to +\infty$ چون $a > 0$ پس $ce^{at} \to \infty$ و لذا مخرج کسر $\frac{p}{a-bp}$ باید به صفر میل کند. پس داریم:

$$a - bp = 0 \Rightarrow p = \frac{a}{b} = \frac{10^{-1}}{10^{-7}} = 10^6$$

۳۵ـ گزینه «۳» در این معادله باید ابتدا خطی بودن را بررسی کنیم چون معادله به صورت $f(x,y,y')=0$ داده شده است. معادله نسبت به y خطی نیست چون در ضریب y'، جمله y وجود دارد. همچنین نسبت به x هم خطی نیست چون اگر $y'=\dfrac{dy}{dx}$ بنویسیم و معادله را در dx ضرب کنیم به رابطه $xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$ می‌رسیم که باز هم در ضریب dx، عبارتی برحسب x وجود دارد. منتها چون $xdx+ydy=\dfrac{d(x^2+y^2)}{2}$ و حتی خود عبارت x^2+y^2 هم در معادله آمده است، بنابراین روش دسته‌بندی برای حل این سؤال مناسب خواهد بود. با ساده‌سازی داریم:

$$\xrightarrow{xdx+ydy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)} \frac{1}{2}d(x^2+y^2)=(x^2+y^2)dx \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x^2+y^2} \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=dx$$

اگر فرض کنیم $x^2+y^2=u$ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{2}\frac{du}{u}=dx \xrightarrow{\text{طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{1}{2}Lnu=x+c$$

حالا به‌جای u، x^2+y^2 قرار می‌دهیم:

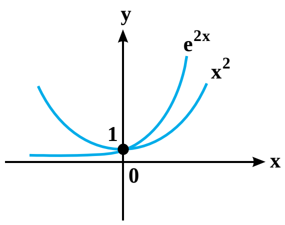
$$\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)=x+c$$

با جایگذاری نقطه $(0,-1)$ در جواب عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}Ln(0+1)=0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)=x \Rightarrow Lnx^2+y^2=2x$$

$$x^2+y^2=e^{2x} \Rightarrow y^2=e^{2x}-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{e^{2x}-x^2}$$

حالا دقت کنید که عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد؛ یعنی $e^{2x}-x^2\geq 0$. برای تعیین محدوده x که به ازای آن نامساوی $e^{2x}\geq x^2$ برقرار باشد از روش رسم نمودار کمک می‌گیریم:



نقطه $(0,1)$ محل تلاقی دو تابع بوده و از مقایسه دو تابع می‌دانیم که رشد تابع e^{2x} بسیار بیشتر از x^2 است. لذا شکل تقریبی این دو تابع به‌صورت روبه‌رو است و چون به ازای $x\geq 0$ نامساوی برقرار می‌شود دامنه جواب به‌صورت $D=[0,+\infty)$ خواهد بود.

توجه: مقایسه نرخ رشد دو تابع از جمله مباحث دوره دبیرستان بوده ولی من باب یادآوری باید از دو تابع مشتق گرفت و مقادیر مشتق آنها را با هم مقایسه کرد. مشتق توابع x^2 و e^{2x} به‌ترتیب $2e^{2x}>x^2$ است. حالا به سادگی ملاحظه می‌کنید که به ازای هر مقدار از $x\geq 0$ مقدار تابع $2e^{2x}>2x$ است. چون حاصل $2x$ را می‌تواند در تابع نمایی قرار داده‌ایم. لذا واضح است $2e^{2x}$ بیشتر از $2x$ خواهد بود.