

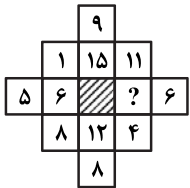


## بخش چهارم: حل مسئله

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمتی، شامل مقایسه‌های کمتی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و... تشکیل شده است. توجه داشته باشید به خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورات عمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هر کدام از سؤال‌های ۲۴ تا ۲۷ را به دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۴- در شکل زیر، بین اعداد ارتباط خاصی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟



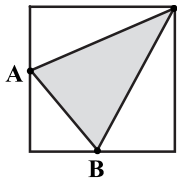
۳ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۹ (۴)

۲۵- در شکل زیر، نقاط A و B وسط اضلاع مربع قرار دارند. چند درصد از مساحت مربع، هاشور خورده است؟



۲۲/۵ (۱)

۲۵ (۲)

۳۲/۵ (۳)

۳۷/۵ (۴)

۲۶- کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که اگر یکی از آن کم شود، بر ۷ و اگر یکی به آن اضافه شود، بر ۳ بخش پذیر خواهد بود را در نظر بگیرید. مجموع ارقام این عدد، کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۴ (۳)

۱۱ (۲)

۸ (۱)

۲۷- نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. دو نفر به اسامی C و D که هیچ پولی ندارند، به آنها ملحق می‌شوند. A، مقداری از پولش را به C می‌دهد و B، مقداری از پولش را بین C و D (نه لزوماً برابر) تقسیم می‌کند، به طوری که نهایتاً، هر چهار نفر به یک اندازه پول خواهند داشت. C، چند درصد از پول دریافتی را از B گرفته است؟

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۰ (۲)

۳۰ (۱)

راهنمایی: سؤال ۲۸، شامل دو مقدار یا کمیت است، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورات عمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۱ را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۲ را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه، گزینه ۳ را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه، گزینه ۴ را علامت بزنید.

۲۸- دو ساعت رومیزی، همزمان رأس یک ساعت خاص، شروع به کار می‌کنند. یکی از ساعت‌ها هر ۵ ثانیه و دیگری هر ۸ ثانیه یک بوق می‌زند.

ب

الف

حداقل مدت زمانی که از شروع، لازم است تا دو

حداقل مدت زمانی که از شروع، لازم است تا هر دو

ساعت، مجموعاً ۲۶ بوق بزنند.

ساعت، برای دومین بار با هم بوق بزنند.

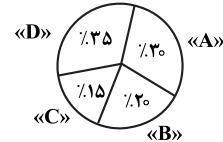
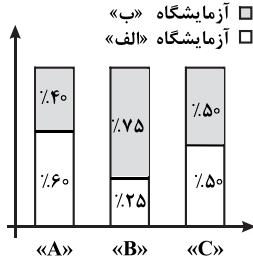


**راهنمایی:** با توجه به اطلاعات و نمودارهای زیر، به سؤال‌های ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.

چهار ماده شیمیایی «A»، «B»، «C» و «D»، در مجموع به یک مقدار در دو آزمایشگاه «الف» و «ب» موجود است. نمودار شماره ۱، درصد مقدار هر ماده شیمیایی از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه و نمودار شماره ۲، درصد مقدار سه ماده شیمیایی «A»، «B» و «C» به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب» را نشان می‌دهد.

نمودار شماره ۱: «درصد مقدار هر ماده شیمیایی از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه»

نمودار شماره ۲: «درصد مقدار سه ماده شیمیایی «A»، «B» و «C» به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب»»



۲۹- اختلاف مقدار ماده شیمیایی D در دو آزمایشگاه، چند درصد از مجموع مقادیر چهار ماده شیمیایی در دو آزمایشگاه است؟

- ۱) ۴/۵      ۲) ۴      ۳) ۳/۵      ۴) ۳

۳۰- اگر آزمایشگاه «ب»، ۹/۶ لیتر ماده شیمیایی A داشته باشد، آزمایشگاه «الف»، چند لیتر ماده شیمیایی B دارد؟

- ۱) ۱۰      ۲) ۸      ۳) ۴      ۴) ۲

## بخش چهارم: حل مسئله

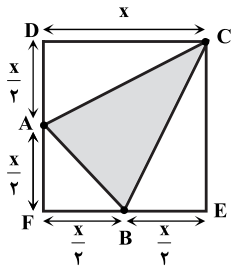
۲۴- گزینه «۱» سؤال راحتی است! در هر باکس چهارتایی سه عدد که در یک ردیف هستند، با هم جمع می‌شوند و تقسیم بر ۳ می‌شوند و عدد چهارم نوشته می‌شود. به عنوان مثال داریم:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1+6+8=15 \Rightarrow \frac{15}{3}=5, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 15 & 11 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1+15+11=27 \Rightarrow \frac{27}{3}=9$$

$$\frac{11+?+4}{3}=6 \Rightarrow 11+?+4=18 \Rightarrow ?=18-15=3$$

بنابراین داریم:

۲۵- گزینه «۴» بیشترین مطلبی که در صورت سؤال داده شده است، این است که رئوس A و B وسط اضلاع مربع هستند. اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم:



می‌خواهیم بدانیم مساحت مثلث هاشورخورده چند درصد مساحت مربع است؟ می‌توان مساحت هاشورخورده را حساب کرد

و از مساحت مربع کم کرد. دو مثلث یکسان ADC و BEC داریم که مساحت هر کدام از آن‌ها برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times x$  است،

پس مجموع مساحت این دو مثلث  $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times x = \frac{x^2}{2}$  است. مساحت مثلث ABF هم برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{8}$  است،

پس مساحت مثلث هاشورخورده برابر است با:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{8}\right) = x^2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = x^2 \left(\frac{8-4-1}{8}\right) = \frac{3}{8}x^2 \xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } 12/5} \frac{3}{8}x^2$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = \frac{3 \times 12/5}{8 \times 12/5} = \frac{37/5}{100} x^2$$

۲۶- گزینه «۱»

روش اول: طبق داده‌های سؤال داریم:

$$a = 3k - 1 = 3(k-3) + 8$$

$$a = 7k' + 1 = 7(k'-1) + 8$$

حال چون باقی‌مانده‌ی عدد موردنظر (a) بر ۳ و ۷ برابر می‌شود با ۸، پس باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۲۱ نیز برابر ۸ می‌باشد. پس باید کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که بر ۲۱ بخش‌پذیر است را به علاوه عدد ۸ کنیم تا عدد موردنظر به دست آید.

$$21k > 1000 \Rightarrow k > \frac{1000}{21} \Rightarrow k > 47/62$$

$$21 \times 48 = 1008 \Rightarrow a = 1008 + 8 = 1016$$

اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از رقم بالا  $k = 48$  می‌باشد، پس داریم:

روش دوم: فرض کنیم عدد موردنظر N باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} N-1 = 7k \\ N+1 = 3k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 7k+1 \\ N = 3k'-1 = 3k''+2 \end{cases}$$

N باید عددی باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۷ و ۳ به ترتیب ۱ و ۲ باشد. کافی است اولین عدد با این ویژگی را پیدا کنیم. اولین عددی که در این شرایط صدق کند ۲۹ است. اعداد بعدی را می‌توانیم با اضافه کردن کم‌کم ۳ و ۷ به اولین عدد محاسبه کنیم:

$$N_1 = 29, N_2 = 21+29, N_3 = 2 \times 21 + 29, N_4 = 3 \times 21 + 29, \dots$$

$$N_{k+1} = k \times 21 + 29 \xrightarrow{k_{\max} = 47} N = 47 \times 21 + 29 = 1016$$

که مجموع ارقام این عدد ۸ می‌باشد.

توضیح بیشتر: در حالتی که  $\begin{cases} N = aq + m \\ N = bq' + n \end{cases}$  را داریم، کافی است اولین N که در این شرایط صدق می‌کند را پیدا کنیم. برای یافتن اعداد بعدی با این شرایط کافی است کم‌کم a و b را به  $N_1$  اضافه کنیم.



۲۷- گزینه «۳» ابتدا صورت سؤال را به زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم:

گفته شده نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. پس  $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$ . از طرفی با فرض این که A، به اندازه‌ی x از پول خودش را به C داده و B به اندازه‌ی y به C و

به اندازه‌ی z به D بدهد، لذا با توجه به این که در نهایت پول چهار نفر یکسان می‌شود، داریم:

$$\underbrace{A-x}_{\text{پول A}} = \underbrace{x+y}_{\text{پول C}} = \underbrace{B-y-z}_{\text{پول B}} = \underbrace{z}_{\text{پول D}}$$

$$A-x = x+y \Rightarrow A = 2x+y$$

از معادله‌ی اول و دوم سمت چپ داریم:

از معادله‌ی سوم و چهارم و همچنین مقایسه معادله‌ی آخر و معادله‌ی اول داریم:

$$B-y-z = x+y \xrightarrow{z=A-x} B-y-A+x = x+y \Rightarrow B = A+2y \xrightarrow{A=2x+y} B = 2x+y+2y = 2x+3y$$

$$\frac{2x+y}{2x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10x+5y = 6x+9y \Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y$$

چون  $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{y}{y+y} = \frac{1}{2} = 50\%$$

۲۸- گزینه «۳» با توجه به صورت سؤال باید کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۵ و ۸ را حساب کرد.

مقدار ستون (الف): در ثانیه‌ی ۸۰ام هر دو ساعت برای دومین بار با هم بوق می‌زنند. حال باید ببینیم مقدار ستون (ب) از عدد ۸۰ بیشتر است یا کمتر؟ تا ثانیه ۸۰ داریم:

$$\begin{cases} 16 \times 5 = 80 \\ 10 \times 8 = 80 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع تعداد زنگ این دو ساعت تا ثانیه ۸۰} = 16 + 10 = 26$$

پس مقدار ستون (ب) هم همان ۸۰ ثانیه است که دو ساعت مجموعاً ۲۶ بار بوق می‌زنند.

فرض کنیم کل حجم ماده‌های شیمیایی N باشد، از این مقدار  $\frac{N}{4}$  سهم آزمایشگاه (الف) و  $\frac{N}{4}$  سهم آزمایشگاه (ب) است. مواد A، B، C و D به ترتیب ۳۰، ۲۰، ۱۵ و ۳۵ درصد N هستند. جدول سمت چپ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

آزمایشگاه (ب)	$\frac{40}{100} \times \frac{30}{100} N = 0/12N$	$\frac{75}{100} \times \frac{20}{100} N = 0/15N$	$\frac{50}{100} \times \frac{15}{100} N = 0/075N$	$\frac{N}{2} - (0/12N + 0/15N + 0/075N) = 0/155N$
آزمایشگاه (الف)	$\frac{60}{100} \times \frac{30}{100} N = 0/18N$	$\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} N = 0/05N$	$\frac{50}{100} \times \frac{15}{100} N = 0/075N$	$\frac{N}{2} - (0/18N + 0/05N + 0/075N) = 0/195N$
	A	B	C	D

اکنون مقادیر مواد شیمیایی در هر آزمایشگاه به تفکیک مشخص شده و می‌توانیم به سؤالات پاسخ دهیم:

$$\text{در دو آزمایشگاه D اختلاف } 0/195N - 0/155N = 0/04N$$

۲۹- گزینه «۲»

مقدار کل را چون N فرض کردیم، پس پاسخ ۰/۰۴ درست است. یعنی اختلاف ماده D در دو آزمایشگاه ۰/۰۴ از کل مواد شیمیایی است.

$$0/12N = 9/6 \Rightarrow N = 80$$

۳۰- گزینه «۳» ماده‌ی A در آزمایشگاه مطابق جدول برابر است با:

$$0/05N = 0/05 \times 80 = 4$$

اکنون می‌توانیم حجم ماده‌ی B در آزمایشگاه (الف) را محاسبه کنیم:

## سوالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۹

## استعداد تحصیلی

## بخش اول: درک مطلب

راهنمایی: در این بخش، دو متن به‌طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

## متن (۱)

ویژگی‌های خاص توفان تندری (بعد از این توفان نامیده می‌شود) که می‌تواند مخاطرات جبران‌ناپذیری را برجای گذارد، برای غالب هواشناسان کم‌وبیش روشن است. دیوبادها، فروپکش‌ها (downburst)، بادهای بسیار شدید و سیلاب‌های لحظه‌ای، از جمله شرایط جوی خطرناکی است که با توفان همراهی می‌شوند. همچنین، همراهی غالب پدیده‌های مخاطره‌انگیز جو در هوانوردی، از جمله تلاطم، یخ‌زدگی، چینش باد، آذرخش، تگرگ و مانند آن با توفان، موجب شده است از این پدیده، به منزله مخرب‌ترین پدیده جوی در عملیات پرواز یاد شود. [۱] از این‌رو، به‌نظر می‌رسد که پیش‌بینی آن، در حکم یکی از اصولی‌ترین وظایف مراکز پیش‌بینی برای برطرف ساختن نیازهای جوامع اجتماعی گوناگون، از جمله هوانوردی، کشاورزی، دریایی و مانند آن مطرح باشد.

[۲] از ۱۹۵۱ تاکنون، روش‌های زیادی برای پیش‌بینی توفان‌های قوی (توفان تندری قوی، توفانی است که بادهای بسیار شدید جستی با سرعت ۲۵/۷ متر بر ثانیه در سطح زمین تولید می‌کند یا با تگرگ‌هایی با قطر حداقل ۲ سانتی‌متر همراه می‌شود. [۳]) مطرح شده است. ولی غالب این روش‌ها، زمانی کاربردی هستند که سامانه‌های فعال بزرگ‌مقیاس در منطقه وجود داشته باشند. [۴] داسول در ۱۹۸۱ و مادوکس و داسول در ۱۹۸۲، روش‌های ساختند که روش‌های پیشنهادی تا آن زمان، شیوه مناسبی برای پیش‌بینی توفان‌ها نبوده‌اند و غالب دیوبادهای شدید با شرایط جوی ویژه‌ای که در الگوهای همدیدی قابل مشاهده و بررسی نیست، همراهی می‌شوند. روش‌های پیش‌بینی به کمک درخت تصمیم‌گیری (decision tree)، از سال ۱۹۷۵ با عرضه الگویی از سوی دوراک برای دیوبادهای مناطق حاره آغاز شد. بلویل و جانسون (۱۹۸۲)، از این روش برای پیش‌بینی بارش برف و ویژگی‌های کیفی آن استفاده کردند. پیش‌بینی بادهای فروشیب نیز به کمک این روش، در ۱۹۸۶ از سوی براون مطرح شده است. ویس (۱۹۸۵) نیز از این روش برای پیش‌بینی دیوبادهای همراه با توفان‌های مناطق حاره‌ای استفاده کرد. روشی که در این تحقیق مطرح می‌شود نیز، الگوریتمی است که کولکوهن (۱۹۸۷) برای پیش‌بینی توفان، توفان‌های شدید و دیوبادها مطرح ساخت.

۱- مقصود اصلی نویسنده متن، کدام مورد زیر است؟

(۲) ایجاد زمینه برای نشان دادن اهمیت اجرای پروژه‌های تحقیقی

(۱) واکاوی اجمالی دلیل معضلی که هنوز لاینحل مانده است.

(۴) تعریف و توصیف پدیده‌ای طبیعی، ولی خطرناک

(۳) تأکید بر لزوم کاربردی بودن علم و پروژه‌های تحقیقی

۲- متن حاضر، برگرفته از کدامین بخش یک مقاله علمی است؟

(۴) تحلیل داده‌ها

(۳) نتیجه‌گیری

(۲) چکیده

(۱) مقدمه

۳- کدام مورد، به بهترین وجه، رابطه میان پاراگراف اول با پاراگراف دوم را نشان می‌دهد؟

(۴) علت و معلول

(۳) تعریف و طبقه‌بندی

(۲) تناقض و رفع تناقض

(۱) راه‌حل برای یک معضل

۴- کدام محل در متن که با شماره‌های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین محل برای قرار گرفتن جمله زیر است؟

«باران‌های سنگین و یا سیل‌آسا نیز شامل این تعریف می‌شوند.»

(۴) [۴]

(۳) [۳]

(۲) [۲]

(۱) [۱]



## متن (۲)

خیلی پیش تر از آنکه عصر فضا آغاز شود، دانشمندان فرصت این را داشتند تا نمونه‌های فضایی را روی زمین بررسی کنند. شهاب‌سنگ‌ها همگی نمونه‌هایی از فضای اطراف ما هستند که به زمین می‌رسند. اگر بتوانیم آنها را پیدا کنیم، به راحتی و رایگان توانسته‌ایم نمونه‌هایی از فضاهای دوردست تر را روی زمین بررسی کنیم. روزانه چند تن ذرات ریز و درشت فضایی به جو زمین برخورد می‌کنند. آنهایی که کوچک‌ترند، در جو می‌سوزند و به شکل شهابی کوچک در آسمان دیده می‌شوند. اما برخی از آنها به اندازه کافی بزرگ هستند که از سوختن در جو زمین، جان سالم به‌دربرند و به شکل یک شهاب‌سنگ، روی زمین یا درون دریاها سقوط کنند. بسیاری از این شهاب‌سنگ‌ها، با توجه به ترکیبی که دارند و تغییراتی که هنگام برخورد با زمین رخ می‌دهد، آنچنان قابلیت استخراج داده‌های مهم را ندارند. اما گاه در بین این سنگ‌های سرگردان، نمونه‌های فوق‌العاده ارزشمندی پیدا می‌شود؛ شهاب‌سنگ‌هایی از ماه و مریخ. این سنگ‌ها، زمانی بخشی از سطح مریخ یا ماه بوده‌اند. شاید چند میلیون سال پیش، برخوردی بزرگ با سطح ماه یا مریخ باعث شده باشد تا بخشی از خرده‌سنگ‌هایی که از محل برخورد به هوا برخاسته‌اند، از دام گرانش این اجرام فرار کرده و به فضای بین‌سیارات وارد شوند. آنها میلیون‌ها سال در این فضا سرگردان مانده‌اند تا اینکه سرانجام به دام گرانش زمین افتاده‌اند و به شکل شهاب‌سنگی روی زمین سقوط کرده‌اند. ارزش این سنگ‌های بادآورده به قدری زیاد است که گروه‌های جست‌وجو، سالانه در مناطقی که شانس پیدا کردن شهاب‌سنگ‌ها بیشتر است (مانند قطب جنوب)، دنبال این سنگ‌ها می‌گردند و اگر بتوانند نمونه‌ای از آنها را پیدا کنند، به گنجینه‌ای بی‌نظیر دست یافته‌اند. گاهی قیمت این سنگ‌ها، از قیمت الماس هم‌وزنشان بیشتر است؛ مثلاً یکی از جنجال‌برانگیزترین بحث‌ها درباره وجود حیات در مریخ، مربوط به یکی از همین شهاب‌سنگ‌هاست. شهاب‌سنگی به نام ALH8400 که در قطب جنوب پیدا شده و منشأ مریخی دارد و در دهه ۱۹۹۰ در صدر اخبار جهان قرار گرفت، چون گروهی از محققان اعلام کرده بودند که نمونه‌ای از فسیل با نشانه‌های حیاتی در آن پیدا کرده‌اند. البته جامعه علمی، حتی آن موقع، از این همه تعجیل و ساده‌انگاری در نتیجه‌گیری که شده بود، متعجب شدند؛ سفری طولانی در فضا و سوختن در جو زمین و برخورد با زمین، باعث تغییر در شرایط سنگ‌ها می‌شود. به همین دلیل، این نمونه‌ها اگرچه بسیار ارزشمند هستند، اما دانشمندان ترجیح می‌دهند خود محل نمونه‌برداری را تعیین کنند.

۵- با توجه به متن، کدام مورد زیر، توصیفی مختصر و مناسب از شهاب‌سنگ‌های مطروحه در متن است؟

- (۱) مهمانان بی‌موقع (۲) پیام‌هایی از گذشته (۳) بادآورده‌های ارزشمند (۴) پیش‌آهنگان عصر جدید

۶- کدام مورد، به بهترین وجه، مقصود اصلی متن از بحث شهاب‌سنگ‌ها را نشان می‌دهد؟

- (۱) توصیف کاربری آنها (۲) تعریف و طبقه‌بندی  
(۳) توصیف فیزیکی و تعیین منشأ (۴) به چالش کشیدن فرضیه‌ای قدیمی و جافتاده

۷- مطابق متن، کدام مورد در خصوص شهاب‌سنگ‌ها صادق است؟

- (۱) هنوز اظهارنظر درباره مفید بودن یا مفید نبودن شهاب‌سنگ‌ها برای بررسی امکان وجود حیات در کرات دیگر زود است، زیرا بسیاری از شهاب‌سنگ‌هایی که در قعر اقیانوس‌ها مدفون هستند، تجزیه و تحلیل نشده‌اند.  
(۲) اگر همه شهاب‌سنگ‌ها می‌توانستند به زمین برسند، امروزه فرضیات معتبرتری از امکان وجود حیات در کرات دیگر در دسترس داشتیم.  
(۳) بیشتر شهاب‌سنگ‌هایی که می‌توانند از سد جو زمین بگذرند، در آب‌های قطبین فرود می‌آیند.  
(۴) اگر سنگ‌ها بلافاصله بعد از جدایی از منبع خود می‌توانستند به زمین برسند، منبع بهتر و موثقی‌تری برای بررسی برخی ویژگی‌های مکانی که از آن آمده بودند، در اختیار انسان قرار می‌دادند.

۸- کدام مورد، به بهترین وجه، دیدگاه جامعه علمی دهه ۱۹۹۰ در ارتباط با ادعای مربوط به شهاب‌سنگی به نام ALH8400 را توصیف می‌کند؟

- (۱) هیجان و تعجب (۲) شک و تردید عمیق  
(۳) بی‌اعتمادی و نگرانی (۴) بی‌تفاوتی، ولی همراه با امیدواری

## پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۹

## استعداد تحصیلی

## بخش اول: درک مطلب

## پاسخ سؤالات متن (۱)

## خلاصه پاراگراف‌های متن:

**پاراگراف اول:** بیان ویژگی‌های طوفان تندری، شرایط جوی به وجود آمده در اثر این پدیده و لزوم نیاز به پیش‌بینی این پدیده.  
**پاراگراف دوم:** بیان تاریخچه روش‌های پیش‌بینی توفان‌های قوی، علت ناکارآمد بودن روش‌های قدیمی و بیان روش‌های نوین در پیش‌بینی این دسته از توفان‌ها.

۱- گزینه «۲» نویسنده در پاراگراف اول متن به بیان ویژگی‌های توفان تندری و تأثیر مخرب آن بر جوامع اجتماعی پرداخته و در پاراگراف دوم به توضیح تاریخچه‌ای از روش‌های پیش‌بینی این توفان‌ها اشاره دارد. بنابراین هدف اصلی او ایجاد زمینه برای نشان دادن اهمیت انجام پروژه‌های تحقیقاتی در مورد روش‌های نوین پیش‌بینی این توفان‌ها می‌باشد.

۲- گزینه «۱» در مقالات علمی در بخش مقدمه به بیان مسئله اصلی مورد بررسی در مقاله و همچنین پیشینه تاریخی و کارهای انجام‌شده قبلی و ایرادات و نواقص احتمالی آنها پرداخته می‌شود و نویسنده با روش‌های پیشنهادی جدید سعی در برطرف کردن و بهبود این نواقص دارد.

۳- گزینه «۴» علت بیان تاریخچه و روش‌های پیش‌بینی توفان‌های تندری این است که این توفان‌ها تأثیر مخرب بر جوامع اجتماعی داشته و بسیاری از روش‌های قدیمی در این زمینه ناکارآمد بودند و شدت تأثیر این توفان‌ها بر فعالیت‌های انسانی آن قدر زیاد است که نیازمند پیش‌بینی دقیق می‌باشد.

۴- گزینه «۳» در عبارت «باران‌های سنگین و یا سیل‌آسا نیز شامل این تعریف می‌شوند» به بیان یک‌سری ویژگی‌ها پرداخته می‌شود که مربوط به توفان تندری می‌باشد. کلمه «نیز» بیان‌کننده این است که در جمله قبل باید ویژگی‌های دیگری در مورد این توفان‌ها بیان شده باشد که با توجه به متن، عبارت قبل از [۳] به بیان ویژگی‌های توفان تندری قوی پرداخته است.

## پاسخ سؤالات متن (۲)

**خلاصه متن:** یکی از روش‌های بررسی و مطالعه پیرامون فضای اطراف ما، بررسی شهاب‌سنگ‌هایی است که وارد جو زمین شده‌اند و توانسته‌اند به شکل تقریباً سالم به سطح زمین برسند. البته بسیاری از این شهاب‌سنگ‌ها پس از جدا شدن از محل اولیه خود و با ورود به جو زمین دچار تغییراتی می‌شوند و قابلیت استخراج داده‌های مهم را ندارند.

یکی از جنجال برانگیزترین این شهاب‌سنگ‌ها، شهاب‌سنگی به نام ALH۸۴۰۰ بود که در قطب جنوب پیدا شد و منشأ مریخی داشت و نمونه‌ای از فسیل با نشانه‌های حیاتی در آن پیدا شد.

۵- گزینه «۳» شهاب‌سنگ‌هایی که به سطح زمین می‌رسند اشیاء بسیار باارزش برای بررسی فضای پیرامون ما می‌باشند که بدون هیچ زحمتی و به راحتی در اختیار ما قرار می‌گیرند. پس می‌توان آن‌ها را بادآورده‌های ارزشمندی دانست که به مطالعه پیرامون فضا کمک شایانی می‌نمایند.

۶- گزینه «۱» مقصود اصلی نویسنده متن از بیان بحث شهاب‌سنگ‌ها توصیف کاربری آنها در مطالعه پیرامون فضای اطراف ما می‌باشد که با استفاده از آنها می‌توان به مطالعه پیرامون فضا و سایر سیاره‌ها و ستاره‌های اطرافمان پردازیم.

۷- گزینه «۴» شهاب‌سنگ‌ها پس از جدایی از منبع خود و رهایی از گرانش آن، وارد فضای بین سیارات می‌شوند و ممکن است میلیون‌ها سال در این فضا سرگردان باشند و دچار تغییرات ساختاری شوند.

پس اگر بلافاصله بعد از جدایی از منبع خود توسط گرانش زمین بر روی زمین سقوط کنند کمتر دچار تغییرات شده و منبع موثقی‌تری برای بررسی ویژگی‌های مکان اولیه خود می‌باشند.

۸- گزینه «۲» در سطر ۱۶ و ۱۷ بیان شده است که شهاب‌سنگ ALH۸۴۰۰ سفری طولانی در فضا داشته و سوختن در جو زمین و برخورد با آن، باعث تغییر در شرایط آن شده است. پس یافتن نمونه‌ای از فسیل با نشانه‌های حیاتی در آن، تعجیل و ساده‌انگاری در نتیجه‌گیری می‌باشد که باید به آن شک و تردید داشت.

**PART A: Grammar**

**Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.**

- 31- The rate that bright comets enter the solar system implies there should be around 3000 of them buzzing around, ..... only 25 are known.  
 1) nonetheless                      2) regardless of the fact                      3) and yet                      4) as there are
- 32- Contemporary theories of interpretation require that, in our analyses of texts, we consider not only what the text says .....“made.”  
 1) also its meaning gets and                      2) but also gets the meaning of it  
 3) but its meaning also gets                      4) but how its meaning gets
- 33- ..... individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.  
 1) That                      2) An                      3) The                      4) It is that
- 34- Plant scientists have been trying for years to genetically modify flowers for aesthetic purposes. The first to go on sale were blue carnations ..... in Australia, in 1996.  
 1) were produced                      2) produced                      3) had been produced                      4) to produce
- 35- Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, ..... weapon platforms.  
 1) they are often called                      2) often called                      3) called they are often                      4) that are called often
- 36- Articulating what the difference between humans and other creatures consists of ..... behind it have formed a large and difficult project tackled by biologists, anthropologists, psychologists, and philosophers.  
 1) uncovering the biology                      2) the biology of uncovering  
 3) the biology uncovering                      4) and uncovering the biology
- 37- Most healthcare professionals view depression as “just part of getting old and argue that this illness, ....., can have serious, even fatal consequences.  
 1) untreated then                      2) untreated whether it is                      3) if untreated                      4) that is untreated
- 38- Ted had a terrible habit of boasting so much about his smallest accomplishments ..... his vainglory became renowned throughout the small college campus.  
 1) that                      2) as                      3) in that                      4) as though

**PART B: Vocabulary**

**Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.**

- 39- Dogs growl and show their teeth in an attempt to frighten the animal or person they perceive as a .....  
 1) habitat                      2) prey                      3) suspicion                      4) threat
- 40- Based on his recent poor decisions, it was obvious that Seth lacked even a modicum of good .....  
 1) sentiment                      2) sense                      3) sensation                      4) sensitivity
- 41- The judge ..... the extraneous evidence because it was not pertinent to the trial.  
 1) disclosed                      2) distended                      3) dismissed                      4) distorted
- 42- The more frequently employees take time to exercise during working hours each week, the fewer sick days they .....  
 1) expend                      2) save                      3) take                      4) recall
- 43- Classic psychology experiments have shown that when rats are first ..... with an electrical shock to fear a tone when it sounds, they later fear the tone even without the associated shock.  
 1) conditioned                      2) sparkled                      3) displayed                      4) intended



## بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱- گزینه «۳» با توجه به سرعت و تعداد ورود ستاره‌های دنباله‌دار به منظومه شمسی می‌توان حدس زد که باید تقریباً ۳۰۰۰ مورد از آن‌ها وجود داشته؛ با این حال تنها ۲۵ عدد از آنها شناسایی شده‌اند.

**توضیح:** همان‌طور که می‌دانید *nonetheless* قید ربط است؛ یعنی قبل از آن باید نقطه یا نقطه‌ویرگول و بعد از آن باید حتماً *comma* بیاید. با این حساب گزینه (۱) نادرست است. گزینه (۲) در صورتی ارزش بررسی کردن دارد که طراح بعد از *fact* از حرف ربط *that* استفاده می‌کرد. گزینه (۳) صحیح است، هم با توجه به مفهوم جمله و هم با توجه به اینکه قبل از *and* *comma* می‌آید. و گزینه (۴) نادرست است چون بعد از *as* دو تا فعل داریم؛ یکی *are* و یکی *know*.

۳۲- گزینه «۴» نظریه‌پردازان معاصر در زمینه ترجمه شفاهی باور دارند ما در آنالیز متن، علاوه بر چیزی که متن می‌گوید، باید به نحوه شکل‌گیری معنی آن نیز توجه داشته باشیم.

**توضیح:** همان‌طور که می‌بینیم این تست با مبحث *not only ... but also* سروکار دارد. اول از همه اینکه در این ساختار *but also* می‌تواند به صورت *but* یا *also* هم به کار برود. پس امیدوارم فوری گزینه (۲) را نزنه باشید. ضمناً می‌دانیم ساختار *(also) ... but not only* مستلزم رعایت ساختار موازی است؛ بنابراین چون بعد از *not only* کلمه پرسشی *what* را داریم باید بعد از *(also) but* هم از کلمه‌ی پرسشی *how* استفاده کنیم: *... not only what the text says but how its meaning gets made.*

۳۳- گزینه «۱» اینکه شبکه‌های اجتماعی بر روی رفتار افراد تاثیرگذار هستند، قابل تردید نمی‌باشد. **توضیح:** تست بسیار ساده‌ای است. توی مبحث جمله‌واره‌ی اسمی گفتیم یکی از کاربردهای *that clause* این است که قبل از فعل *be* به عنوان فاعل استفاده شوند. گفتیم در این موارد *that* به صورت «اینکه» ترجمه می‌شود:

**That individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.**

مثال بیشتر:

**That coffee grows in Brazil is well known.**

۳۴- گزینه «۲» گیاه‌شناسان سال‌هاست که با استفاده از اصلاح ژنتیک به دنبال زیباتر ساختن گل‌ها هستند. گل میخک آبی اولین موردی بود که برای فروش عرضه شد. این گل در سال ۱۹۹۶ در استرالیا تولید شد.

**توضیح:** این تست از دو جمله تشکیل شده که برای پاسخگویی به آن فقط به جمله دوم نیاز داریم. جمله دوم دارای فعل اصلی *were* می‌باشد، با این حساب به هیچ فعل اصلی دوم دیگری نیاز نداریم چون هر جمله فقط و فقط باید یک فعل اصلی داشته باشد. این یعنی حذف همزمان گزینه‌های (۱) و (۳). گزینه (۴) نادرست است چون قصد بیان هدف نداریم. ضمناً شکل اولیه گزینه (۲) این‌طوری بوده:

The first to go on sale were blue carnations **that were produced** in Australia, in 1996.

اگر *that were* را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۳۵- گزینه «۲» سلاح‌ها از طریق وسایل نقلیه مختلفی حمل و تحویل داده می‌شوند. این وسایل نقلیه اغلب با نام پلتفرم سلاح شناخته می‌شوند. **توضیح:** تقریباً هر سال از این مبحث سؤال می‌آید و ما هم هر سال می‌گوییم بعد از *comma* کاربرد *that* ممنوع است. (این یعنی حذف گزینه (۴)). گزینه (۱) در صورتی صحیح است که *comma* به نقطه تبدیل بشود و *they* هم به *They*. مهم‌ترین دلیل رد گزینه (۳) کاربرد *they* بعد از *called* است. ضمناً شکل اولیه‌ی گزینه‌ی ۲ این‌طوری بوده:

Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, **which are often called** weapon platforms.

اگر *which are* را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۳۶- گزینه «۴» درک تفاوت بین انسان و سایر موجودات و مسائل بیولوژیکی نهفته در آن باعث بوجود آمدن مباحث و تحقیقات دشوار و گسترده‌ای شده است که دانشمندی از رشته‌های مختلف مانند زیست‌شناسی، انسان‌شناسی، روانشناسی و فلسفه به آن می‌پردازند.

**توضیح:** توی تست‌هایی که این‌قدر طولانی هستند، اولین کار این است که به دنبال فعل اصلی باشیم. فعل اصلی سوال ما *have formed* است. پس به خاطر حضور *have* باید فاعلمون جمع باشد. اما *articulating* به تنهایی به فعل مفرد نیاز دارد، این یعنی باید *articulating* را با *and* به یک ساختار *ing* دار موازی دیگر متصل کنیم تا آن موقع کاربرد فعل *have* هم معنی پیدا کند. و چون فقط گزینه (۴) است که دارای *and* می‌باشد، می‌توانیم باقی گزینه‌ها را رد کنیم.

۳۷- گزینه «۳» اکثر متخصصین حوزه بهداشت و درمان، افسردگی را بخشی از پروسه افزایش سن می‌دانند و اعتقاد دارند که در صورت عدم درمان می‌تواند عواقب بسیار وخیمی داشته و یا حتی باعث مرگ بیمار شود.

**توضیح:** اول از همه اینکه طراح سؤال ظاهراً یادش رفته آن (") را که باز کرده ببندد. باید این علامت را قبل از *and* بیاورد. حالا می‌رسیم به رد گزینه‌ها. کاربرد *that* بعد از *کاما ممنوع* است (یعنی رد گزینه (۴)). گزینه ۱ نادرست است چون معلوم نیست طراح سوال آن *then* را بابت چی استفاده کرده. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون بعد از *is* هیچ عبارت کامل‌کننده‌ای نداریم. اما برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۳) صحیح است باید اصل جمله را پیدا کنیم.

*Most healthcare professionals argue that this illness, if it is untreated, can have serious, even fatal consequences.*

چون *it* به *this illness* برمی‌گردد، می‌توانیم با فرض اینکه فاعل‌ها یکسان هستند، فاعل جمله‌واره‌ی وابسته یعنی *it* و فعل *is* را حذف کنیم و یک وجه وصفی بسازیم:

*Most healthcare professionals argue that this illness, if untreated, can have serious, even fatal consequences.*

۳۸- گزینه «۱» تد اخلاق بسیار زشتی داشت و به خاطر کوچک‌ترین موفقیت‌هایش به قدری فخرفروشی می‌کرد که عادت خودستایی او در سرتاسر محوطه‌ی کوچک دانشگاه زبازد عام و خاص بود.

**توضیح:** از ساختار *that...so* استفاده شده.

....so much about ..... that ....

### بخش دوم: واژگان

**دستورالعمل:** در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۹- گزینه «۴» سگ‌ها در هنگام مواجهه با خطر / تهدید، پارس می‌کنند و دندان‌های خود را نشان می‌دهند تا حیوان یا شخص مورد نظر را بترسانند.

(۱) زیستگاه، زیست‌بوم (۲) طعمه (۳) سوءظن، تردید (۴) خطر، تهدید

۴۰- گزینه «۲» ضعف تصمیمات اخیر سبت نشان می‌دهد که کوچکترین درکی نسبت به مسائل مختلف ندارد.

(۱) تمایل، گرایش، احساس (۲) شعور، معنی، ادراک (۳) احساس، هیجان (۴) حساسیت

۴۱- گزینه «۳» قاضی شواهد غیرضروری را مردود اعلام کرد زیرا ارتباط چندانی با روال دادرسی نداشت.

(۱) افشاء کردن، فاش کردن (۲) بزرگ کردن، منبسط کردن (۳) مردود شمردن، رد کردن (۴) کج کردن، تحریف کردن

۴۲- گزینه «۳» کارمندان هرچقدر در طول هفته بیشتر ورزش کنند، کمتر به مرخصی استعلاجی نیاز پیدا می‌کنند.

**توضیح:** جواب این سؤال عیناً توی خود سؤال آمده. یعنی اول بوده *take time* حالا شده *take days*.

اصطلاح *take sick days* یعنی «استعلاجی گرفتن».

۴۳- گزینه «۱» طبق آزمایشات روانشناسی کلاسیک، وقتی موش‌ها برای ترسیدن از یک صدای بخصوص به وسیله شوک الکتریکی شرطی شوند، بعدها بدون وجود شوک الکتریکی هم از آن صدا می‌ترسند.

(۱) شرطی کردن (۲) درخشیدن، برق زدن (۳) نمایش دادن (۴) قصد داشتن



## سوالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۱۴۰۱

### استعداد تحصیلی

#### بخش اول: درک مطلب

■ راهنمایی: در این بخش، دو متن به طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

#### متن (۱)

سوخت‌های زیستی به عنوان سوخت سبز جایگزین و تجدیدپذیر تولیدشده از منابع مختلف بیولوژیکی تعریف شده است. محتوای انرژی سوخت زیستی از منابع زیستی و مواد آلی که بدن موجودات زنده را می‌سازند، به وجود آمده است. در واقع، سوخت زیستی نوعی از سوخت است که از منابع زیست‌توده (بیومس) به وجود می‌آید. این بدان معنا است که ماهیت سوخت زیستی به گیاهان برمی‌گردد و همین امر، موجب تجدیدپذیر بودن آن می‌شود. سوخت‌های زیستی را براساس مواد اولیه مورد استفاده در تولید آنها، به سه نسل طبقه‌بندی کرده‌اند: نسل اول، دوم و سوم. سوخت‌های نسل اول یا سوخت‌های زیستی معمولی، سوخت‌های تولیدشده از محصولات غذایی و زراعی‌اند. نسل اول سوخت‌های زیستی (FGF) از قند، نشاسته، روغن و چربی حیوانی و گیاهی به دست می‌آیند. این سوخت‌ها شامل دیزل زیستی، الکل زیستی، اتانول و گازهای زیستی مانند متان‌اند و در محصولات خوراکی مانند دانه‌های روغنی، سویا، گندم، تخم شلغم روغنی، سیب‌زمینی، نارگیل، جو، نیشکر، چغندر قند، ذرت و... یافت می‌شوند. اتانول ذرت در آمریکا، اتانول نیشکر در برزیل و سایر سوخت‌های زیستی در جاهای دیگر، از اولین نسل مواد خام برای برآوردن تقاضای انرژی جهانی در بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۸ بوده است. در این نسل، مواد غذایی با ارزش فقط برای تولید سوخت زیستی باید کشت شود که این امر، موجب به خطر انداختن امنیت چرخه غذایی می‌شود. همچنین کشت محصولات برای تولید سوخت زیستی، لزوماً اقتصادی نیست. سوخت‌های نسل اول، با وجود تجدیدپذیر بودن نمی‌تواند یک گزینه عملی برای تأمین نیاز انرژی جهانی باشد. از این رو، نسل دوم (SGF) شناسایی شدند که شامل سوخت زیستی محصولات غیرغذایی یا ضایعات کشاورزی، به‌ویژه زیست‌توده‌های لیگنوسلولزی هستند. مواد اولیه این نسل از سوخت‌ها، جزو مواد غذایی محسوب نمی‌شوند. مواد لیگنوسلولز، کاه غلات، باگاس (تفاله) نیشکر، گیاه کاساوا، بقایای (تفاله‌های) جنگلی، گیاه میسانتوس (علف نقره‌ای)، ضایعات جامد شهرداری، چمن‌های گیاهی، گیاه جاتروفا و چوب، مثال‌هایی از سوخت نسل دوم هستند. در حال حاضر، استفاده از این نسل برای تولید سوخت‌های زیستی در مراحل مختلف با سرعت کامل انجام می‌شود. با وجود مزایای فراوان این نسل از سوخت‌ها، ممکن است استخراج سوخت از مواد اولیه ذکرشده دشوار باشد. تولید سوخت‌های زیستی نسل دوم، به فناوری‌های گران‌قیمت و پیشرفته‌ای نیاز دارد. میکرو جلبک‌ها مواد اولیه سوخت‌های زیستی نسل سوم (TGF) هستند. آزمایشات فراوانی بر روی جلبک‌ها به عنوان منبع غنی از چربی برای تولید سوخت‌های زیستی انجام شده است. با استخراج چربی و همچنین استفاده مستقیم از این جلبک‌ها، سوخت‌های زیستی نسل سوم تولید شده‌اند. پرورش و کشت جلبک‌ها به عنوان منبع غنی از چربی برای اولین بار در سال‌های ۱۹۷۸ تا ۱۹۹۶ مورد آزمایش قرار گرفت و ایده پرورش این جلبک‌ها در تصفیه‌خانه فاضلاب نیز مطرح شد. تولید جلبک برای تولید سوخت به دلیل گران‌قیمت بودن، هنوز در مقیاس تجاری، جایگاه خود را نیافته است، اما مطالعات امکان‌سنجی برای دستیابی به عملکرد بالا صورت گرفته است. تولید سوخت‌های نسل سوم باعث کاهش تولید مواد غذایی نمی‌شود و همچنین نیازی به زمین‌های کشاورزی وسیع و آب شیرین نیست و تولید به صرفه سوخت در این رده، دور از انتظار نیست.

کله ۱- طبق متن، در حال حاضر، کدام مورد، مسئله مشترک در خصوص سوخت‌های زیستی نسل دوم و سوم است؟

- (۱) تولید با استفاده از ضایعاتی که مصرف غذایی انسانی ندارند  
(۲) نحوه استخراج سوخت از مواد اولیه  
(۳) هزینه تولید مربوطه  
(۴) سرعت بالای تولید

کله ۲- کدام مورد، عملکرد جمله‌ای از پاراگراف ۳ که زیر آن خط کشیده شده است را به بهترین وجه، توصیف می‌کند؟

- (۱) شاهدهی بر درستی ادعایی که در جمله ماقبل آن آورده شده است  
(۲) تأکید بر تنوع مواد قابل استفاده برای تولید سوخت زیستی نسل دوم  
(۳) خاطر نشان کردن مزیت بارز این نسل از سوخت زیستی نسبت به نسل اول این سوخت‌ها  
(۴) ارائه مثال‌هایی عینی مبنی بر بی‌ضرر بودن موادی که در فرایند تولید نسل دوم سوخت زیستی مصرف می‌شود

کله ۳- مبنای طبقه‌بندی سوخت‌های زیستی در متن، کدام است؟

- (۱) پیچیدگی فناوری لازم  
(۲) مقرون به صرفه بودن  
(۳) کارآمدی نهایی  
(۴) ماده اولیه

۴- اطلاعات کافی برای پاسخ به کدام سؤال زیر، در متن موجود است؟

- ۱) چرا نسل اول سوخت‌های زیستی، از محصولات غذایی تهیه شد؟
- ۲) آیا بودجه لازم برای تولید سوخت‌های زیستی نسل دوم، قابل تهیه است؟
- ۳) تولید به‌صرفه کدام‌یک از سه نسل سوخت‌های زیستی نسبت به بقیه، محتمل‌تر به نظر می‌رسد؟
- ۴) دلیل استفاده از مواد مختلف در محل‌های مختلف، در تولید سوخت‌های زیستی نسل اول چه بوده است؟

### متن (۲)

برخی از فعالیت‌های انسانی موجب تغییرات وضعیت تنش ساختگاهی و حتی زمین‌ساختی شده که پیامد آن می‌تواند زمین‌لرزه باشد. به این نوع زمین‌لرزه‌ها، زمین‌لرزه القایی یا تحریک‌شده می‌گویند. از میان زمین‌لرزه‌های القایی، آبیگری مخازن سدها باعث ایجاد بزرگ‌ترین لرزه‌ها شده‌اند. بخشی از مسئله لرزه‌خیزی القایی که به وابستگی زمین‌لرزه‌ها به آبیگری مخزن سدها، به‌ویژه تغییرات سطح آب در مخزن سد و در نتیجه، بارگذاری و باربرداری مربوط است، برای اولین بار توسط کاردر (۱۹۷۰) مطرح شد. وقوع یک زمین‌لرزه مخرب با بزرگای  $6/3$  در سد کوینا در هند (۱۹۶۷) موجب توجه بین‌المللی به این مسئله شد (سیمپسون و همکاران، ۱۹۸۸). زلزله‌های القایی نه‌تنها در اثر آبیگری دریاچه سدها، بلکه در هنگام تخلیه دریاچه‌ها نیز ممکن است رخ دهند.

محل احداث اکثر سدهای ایران، در مناطق لرزه‌خیز و کوهستانی واقع شده است، ازسوی دیگر به‌دلیل پراکندگی گسل‌ها در مناطق کوهستانی و فرسایش شیب دامنه آنها، خطراتی را برای سد به‌دنبال خواهد داشت؛ زیرا سدها معمولاً در دره‌ها ساخته می‌شوند و عواقب شکست سد و بروز سیل می‌تواند فاجعه‌آفرین باشد. از این‌رو، لزوم مطالعات دقیق‌تر در خصوص زلزله‌های القایی مخزن ضروری به‌نظر می‌رسد؛ بنابراین با دخالت دادن عوامل لرزه‌خیزی نواحی گوناگون در توزیع سکونتگاه‌های انسانی و مراکز مهم اقتصادی و وضع مقررات ایمنی متناسب با خطر زمین‌لرزه، می‌توان از تلفات و خسارات ناشی از زمین‌لرزه که پدیده‌ای اجتناب‌ناپذیر می‌باشد، کاست.

براساس تجربیات موجود در مورد مخزن بزرگ با ژرفای آب بیش از  $80$  تا  $100$  متر می‌توان وقوع زمین‌لرزه‌ای با بزرگای  $6/5$  را انتظار داشت. البته ذکر این نکته مهم است که معمولاً زمین‌لرزه‌های القایی بزرگ در نواحی با زمین‌ساخت جنبی و احتمال گسیختگی کواترنری رخ می‌دهد. ازسوی دیگر، امکان گسیختگی سطحی زمین‌لرزه‌ای نیز در لرزه‌خیزی القایی وجود دارد. مثلاً زلزله ۱۹۶۷ سد کوینا در هند (سیمپسون و همکاران، ۱۹۸۸؛ گوپتا، ۲۰۰۲) با وقوع  $30$  سانتی‌متر تغییر مکان سطحی در راستای یک گسل کواترنری که از یکی از جناح‌های مخزن سد عبور می‌کند، همراه بود. [۱] بدیهی است که چنین گسیختگی در زیر محور سد نیز می‌تواند رخ دهد و از آنجا که مخزن سد توزیع تنش را درون گسل‌های منطقه تغییر می‌دهد، گسل‌های غیرفعال نیز می‌توانند در چنین شرایطی، فعالیت لرزه‌ای نشان دهند.

مطالعات انجام‌شده، نشانگر تشابه زمین‌لرزه‌های القایی با زمین‌لرزه‌های طبیعی در اکثر موارد بوده و بزرگای آن تا حدّ زیادی به وضعیت زمین‌ساختی منطقه نیز مربوط است. [۲] ازسوی دیگر، احتمال وقوع این رویدادها در درون مخزن یا نزدیک آن بیشتر بوده و بیشتر در بازه تا  $10$  سال بعد از احداث سد را شامل می‌شود. سازوکار زمین‌لرزه القایی در اثر آبیگری مخزن سد، تحت تأثیر افزایش فشار آب منفذی است. تجربیات قبلی نشان می‌دهند که با گذشت زمان، به عمق زمین‌لرزه‌ها افزوده و برعکس، از تعداد آنها کاسته می‌شود. [۳] این زمین‌لرزه‌ها خصوصاً در مناطق با سوابق لرزه‌ای، ممکن است موجب چکانش زمین‌لرزه‌های بزرگ شود. [۴]

۵- مقصود اصلی متن، کدام است؟

- ۱) هشدار دادن نسبت به بی‌توجهی به پدیده‌ای که برخی آن را طبیعی می‌پندارند.
- ۲) مقایسه دو پدیده ظاهراً مشابه و تأثیر آنها بر یکی از مهم‌ترین ساخته‌های بشر
- ۳) بررسی علل و تبعات زیست‌محیطی پدیده‌ای نسبتاً جدید
- ۴) توصیف یک پدیده و بررسی عوامل مؤثر در ایجاد آن

۶- طبق متن، چرا مطالعه زلزله‌های القایی مخزن، در ایران ضروری است؟

- ۱) پیامدهای وقوع آن، قابل اغماض نیست.
- ۲) اطلاعات کافی درباره آن وجود ندارد.
- ۳) در برخی نقاط جهان، مشکل‌زا بوده است.
- ۴) با یکی از مسائل حیاتی، یعنی منابع تأمین آب برای انسان گره خورده است.

۷- طبق متن، در خصوص زمین‌لرزه‌های القایی، کدام مورد صحیح نیست؟

- ۱) گسیختگی سطحی زمین‌لرزه‌ای در اثر آنها، امری محتمل است.
- ۲) آنها ممکن است در زمان خالی کردن آب دریاچه سدها نیز روی دهند.
- ۳) بزرگای آنها ارتباط کمی با وضعیت زمین‌ساختی منطقه مربوطه‌شان دارد.
- ۴) سازوکار آنها به هنگام آبیگری مخزن سد، بی‌تأثیر از افزایش فشار آب منفذی نیست.

۸- کدام محل در متن که با شماره‌های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین محل برای قرار گرفتن جمله زیر است؟

«همچنین در صورت آبیگری تدریجی سد، احتمال کاهش رویدادهای لرزه‌ای وجود دارد»

[۴] (۴)

[۲] (۳)

[۳] (۲)

[۱] (۴)

## بخش دوم: استدلال منطقی

■ **راهنمایی:** برای پاسخگویی به سؤال‌های این بخش، لازم است موقعیتی را که در هر سؤال مطرح شده، مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید و سپس گزینه‌های را که فکر می‌کنید پاسخ مناسب‌تری برای آن سؤال است، انتخاب کنید. هر سؤال را با دقت بخوانید و با توجه به مطالب مطرح شده در هر سؤال و نتایجی که بیان شده و بیان نشده ولی قابل استنتاج است، پاسخی را که صحیح‌تر به نظر می‌رسد، انتخاب و در پاسخنامه علامت بزنید.

کجه ۹- با بررسی پاسخ‌های دانشجویانی که در این مطالعه شرکت کردند، می‌توان نتیجه گرفت که کلاس‌های مجازی اساتید، التزام کمتری به قانع کردن دانشجویانی دارند که پرسش‌هایی را مطرح می‌کنند و بستر برای سرسری گرفتن پاسخ به سؤالات آنها مهیاست. بنابراین، اگر در شرایط حضوری، یکی از عواملی که به کنترل میزان سواد استاد منجر می‌شود، پرسش‌های چالش‌برانگیز دانشجویان باشد، آنگاه می‌توان استدلال کرد که این عامل، با تزلزل همراه شده است. یکی از ویژگی‌های فضای مجازی، قدرت‌بخشی به کنشگرانی (کاربرانی) است که در شرایط حضوری، نقایص و محدودیت‌هایی دارند. فرضی که قبول نتیجه‌گیری نویسنده بر مبنای آن قرار گرفته است، کدام است؟

- (۱) کلاس مجازی برای برخی اساتید که از دانش کافی برای پاسخ به سؤالات چالش‌برانگیز برخوردار نیستند، ایده‌آل است.
- (۲) جواب کامل استاد به سؤالات چالش‌برانگیز دانشجویان، از ملاک‌های اصلی ارزیابی کلاس کارآمد است.
- (۳) لازم است بر نحوه تعامل استاد و دانشجو در کلاس‌های مجازی، نظارت دقیق انجام پذیرد.
- (۴) پاسخ شرکت‌کنندگان در مطالعه مذکور، منعکس‌کننده واقعیت موجود بوده است.

کجه ۱۰- امروزه مشخص شده که مهم‌ترین عامل تولید، نیروی انسانی کارآمد است. بهره‌مندی نیروی انسانی از توانمندی بیشتر و کیفیت بهتر کار، گذشته از اینکه نقش بزرگی در افزایش تولید بازی می‌کند، به بهره‌گیری گسترده‌تر از منابع فیزیکی و طبیعی می‌انجامد. بیشتر اندیشمندان علوم انسانی از جمله جامعه‌شناسان، اقتصاددانان و متخصصان علم مدیریت، بر این نکته توافق دارند که آنچه سرانجام ویژگی‌ها و روند توسعه اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و سیاسی کشور را تعیین می‌کند، منابع انسانی است.

کدام مورد، رابطه دو بخش از متن که زیر آنها خط کشیده شده است را به بهترین وجه توصیف می‌کند؟

- (۱) اولی، قانونی عام است و دومی، آن را به حوزه‌های مختلف علم تسری می‌دهد.
- (۲) اولی، ادعای متن است و دومی، تمسک به منبع موثق برای تأیید آن است.
- (۳) اولی و دومی، هر دو ادله‌ای هستند که نتیجه‌گیری متن را تقویت می‌کنند.
- (۴) اولی، قانونی عمومی را بیان می‌دارد و دومی، کاربرد عملی آن را مشخص می‌کند.

کجه ۱۱- بسیاری از انسان‌های نخستین به دلیل انجماد در یخ، تقریباً سالم به ما رسیده‌اند. آنها خصوصیات ژنتیکی هزاران سال پیش را در دل خود دارند و می‌توان «دی‌ان‌ای» آنها را استخراج کرد. نکته مشکل‌ساز ماموت‌ها درباره انسان وجود ندارد و می‌توان از میزبان مشابه با نمونه منقرض شده انسان استفاده کرد. به این ترتیب، به نظر می‌رسد پیش از ماموت‌ها و دایناسورها، فرصت برای زنده کردن دوباره انسان‌های باستانی فراهم باشد. کدام مورد را می‌توان به درستی، از متن استنباط کرد؟

- (۱) ماموت‌هایی که می‌توان از آنها برای احیای دوباره این موجود استفاده کرد، در یخ یافت شده‌اند.
- (۲) وجود نمونه زنده و شبیه به موجودی که منقرض شده باشد، به کار احیای آن کمک می‌کند.
- (۳) استخراج «دی‌ان‌ای» جانورانی که نمونه مشابهی با آنها در حال حاضر وجود ندارد، مشکل است.
- (۴) پیشرفت‌های حاصل از کار در زمینه بازیابی حیوانات منقرض، انسان را به فکر زنده کردن دوباره انسان‌های باستانی انداخته است.

کجه ۱۲- **کارمند:** برای فروش آخرین مدل موتورسیکلت‌های تولیدی شرکت، یک روش خوب در شرایط موجود، حضور و فعالیت بیشتر در شبکه‌های اجتماعی و کار تبلیغی زیاد در این زمینه است.

**مدیر:** کاملاً مخالفم. دو سال پیش که از همین طریق، دست به معرفی نسل قبلی همین محصول زدیم، راه به جایی نبردیم. دنبال راه دیگری باشید.

کدام مورد، در صورتی که صحیح فرض شود، جواب مدیر را به قوی‌ترین وجه تضعیف می‌کند؟

- (۱) مردم در شبکه‌های اجتماعی، زمانی که نسل قبلی موتورسیکلت‌های شرکت، تولید و به بازار روانه شد، حضور کم‌رنگی داشتند.
- (۲) بسیاری از کارخانه‌ها و شرکت‌ها، از تبلیغات تلویزیونی برای معرفی محصولات خود استفاده می‌کنند و فروش بالایی هم دارند.
- (۳) در یک نظرسنجی به عمل آمده، افرادی که در مصاحبه‌ها شرکت کردند، به کارایی بالای تبلیغ از طریق شبکه‌های اجتماعی، امتیاز خوبی دادند.
- (۴) شرکت‌های رقیب که محصول خود را از طریق همین شبکه‌های اجتماعی عرضه و تبلیغ می‌کنند، به اذعان مدیران ارشدشان، از این نوع تبلیغ، به نتیجه موردانتظارشان نرسیده‌اند.



۱۳- سال گذشته در منطقه «الف» که در آنجا میوه «ب» رویانده می‌شود، هوا به‌طور استثنایی بسیار گرم شد، ولی این هوای گرم که همیشه باعث هجوم انواع ملخ‌ها از جمله ملخ خاصی که به این میوه حمله می‌کند می‌شود، موجب آسیب به این میوه نشد. نظر بر این است که هوای گرم باعث ایجاد ترکیب خاصی در این میوه می‌شود که ملخ‌های طرفدار این میوه را از خود می‌راند.

کدام مورد، در صورتی که صحیح فرض شود، نتیجه‌گیری متن را به بهترین وجه تقویت می‌کند؟

- ۱) ترکیب خاصی که در میوه «ب» در زمان گرما ایجاد می‌شود، در برخی گیاهان دیگر نیز وجود دارد.
- ۲) سرعت تولیدمثل و رشدونمو ملخی که به میوه «ب» علاقه‌مند است، از افزایش دمای هوا تأثیر می‌پذیرد.
- ۳) در آن سال، تمامی محصولات کشاورزی و گیاهی دیگر منطقه، به شدت تخریب شده و آسیب جدی دیدند.
- ۴) سال گذشته، گرم شدن هوا خاص منطقه «الف» نبود و بسیاری مناطق دیگر که به پرورش میوه «ب» مشغول هستند نیز، این گرمایش را تجربه کردند.

۱۴- کاندیدای ریاست جمهوری: در صورتی که به من رأی بدهید و انتخاب شوم، مالیات‌های ناعادلانه را حذف و حداقل دستمزد را افزایش می‌دهم تا به رونق اقتصادی و رفاه اجتماعی بهتری دست یابیم.

کاندیدای رقیب: فکر می‌کنید او واقعاً فرد مناسبی برای انتخاب شما است؟ وی اگر آدم باهوشی بود، به جای شغل دولتی، تا حالا یک شرکت خصوصی تأسیس کرده بود و خودش و دیگران را به نان و نوایی رسانده بود. مهم‌ترین خطای منطقی در استدلال کاندیدای رقیب، کدام است؟

- ۱) نادیده گرفتن امکان ایجاد تغییر در شرایط محیطی و شخصیتی انسان‌ها
- ۲) نادیده گرفتن ویژگی‌های فردی لازم برای تصدی پست‌های گوناگون
- ۳) برجسته کردن یک استثنا و جا زدن آن به عنوان قانونی مطلق
- ۴) حمله به شخصیت فرد، به جای پاسخ به راهکار و استدلال او

۱۵- آب، آب داغ یا آب جوش مصارف زیادی دارند؛ یک مقدار پودر نسکافه با کمی شکر را درون یک فنجان آب داغ بریزید و به هم بزنید تا از یکی از لذت‌بخش‌ترین مصارف آنها باخبر شوید! از مصارف دیگر آن چه؟ مثل شستن و ...؛ ولی فکر کنم تا به حال درباره استفاده از آب و مشتقات آن به‌عنوان سیال محرک در وسایل حمل‌ونقل چیزی نشنیده باشید. تصور کنید یک نفر کنار جاده ایستاده و یک چهارلتری را با دستش تکان می‌دهد و از خودروهایی دیگر، تقاضای سوخت می‌کند. شما که فردی باشخصیت بوده و با خودرو در حال عبور از جاده هستید، با دیدن صحنه و با وجود قحطی سوخت، دلتان به رحم می‌آید و خودروی خود را جلوتر متوقف می‌کنید و از آن فرد می‌پرسید: «بنزین تمام کرده‌اید؟» آن فرد هم با یک حالت خاصی جواب می‌دهد: «.....»!

کدام مورد، به منطقی‌ترین وجه، جای خالی در متن را کامل می‌کند؟

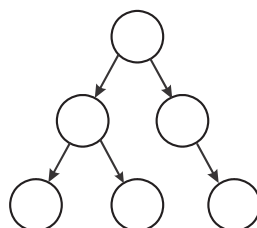
- ۱) نه پس، آب خوردن می‌خوام
- ۲) نه، خودروی من بنزین مصرف نمی‌کند
- ۳) فکر کنم ماشین من رو، دست‌کم گرفتی
- ۴) خداروشکر که بالاخره تو این دنیا یکی پیدا شد

### بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ **راهنمایی:** در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید. **راهنمایی:** با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۶ تا ۱۹ پاسخ دهید.

در یک خانواده ۶ نفری به اسامی A، B، C، D، E و F، یک نفر از محیط بیرون از منزل، ویروس کرونا را گرفته، وارد محیط خانه کرده است و این ویروس، مطابق الگوی زیر، به دیگر اعضای خانواده انتقال یافته است. پس از مدتی، چهار نفر از افراد خانواده بهبود می‌یابند و دو نفر فوت می‌کنند. اطلاعات زیر در این خصوص موجود است.

- دو نفری که فوت می‌شوند، نه C جزو شان است و نه به یکدیگر ویروس را انتقال داده‌اند.
- A به B، ویروس را منتقل کرده است.
- حداقل یکی از افراد فوت‌شده، از F ویروس را گرفته است.
- یکی از افراد فوت‌شده ویروس را به D منتقل کرده است.





## پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۱۴۰۱

### استعداد تحصیلی

#### بخش اول: درک مطلب

##### پاسخ سؤالات متن (۱)

- ۱- گزینه «۳» با توجه به مطالب سطر ۱۱ تا پایان متن و خصوصاً سطر ۱۶ همچنین سطر ۲۰ پاسخ به سؤال، گزینه (۳) است.
- ۲- گزینه «۱» قبل از عبارتی که زیر آن خط کشیده شده است، جمله‌ی زیر آمده است:  
«مواد اولیه این نسل از سوخت‌ها، جزو مواد غذایی محسوب نمی‌شوند»  
و در ادامه، مثال‌ها و در واقع شاهدهی از نوع این مواد آورده شده است. بنابراین پاسخ به سؤال، گزینه (۱) است.
- ۳- گزینه «۴» در خط ۴ اشاره شده است که سوخت‌های زیستی را براساس مواد اولیه مورد استفاده در تولید آن‌ها، به سه نسل طبقه‌بندی کرده‌اند.
- ۴- گزینه «۳» به موارد (۱)، (۲) و (۴) به هیچ وجه در متن پاسخی داده نشده است، ولی پاسخ به سؤال مطرح شده در گزینه (۳) به نوعی قابل دریافت است.

##### پاسخ سؤالات متن (۲)

- ۵- گزینه «۴» متن به توصیف پدیده «زمین‌لرزه‌های القایی» پرداخته و در سراسر متن تأثیرات آن را بیان می‌کند. بنابراین بهترین جواب گزینه (۴) است.
- ۶- گزینه «۱» با توجه به سطر ۷ و ۸، جواب گزینه (۱) است.
- ۷- گزینه «۳» به وضوح در سطرهای ۱۲ و ۱۳ عنوان شده است که معمولاً زمین‌لرزه‌های القایی بزرگ در نواحی با زمین ساخت جنینا و احتمال گسیختگی کواترنر رخ می‌دهد و این یعنی بزرگای زمین‌لرزه‌های القایی ارتباط مستقیم با زمین‌ساخت منطقه دارد. همچنین عیناً در سطر ۱۷ و ۱۸ اشاره شده است که بزرگای زمین‌لرزه‌های القایی تا حد زیادی به وضعیت زمین‌ساختی منطقه دارد.
- ۸- گزینه «۲» با توجه به وجود کلمه‌ی همچنین در جمله‌ی داده‌شده در صورت این سؤال و قرار داشتن عبارت «از سوی دیگر» در ابتدای قسمت [۲] و نظر به ارتباط مستقیم جمله داده شده در سؤال و سطور قبل و بعد [۲]، بهترین مکان قسمت [۲] می‌باشد.

#### بخش دوم: استدلال منطقی

- ۹- گزینه «۴» در سؤالات «فرض پنهان» دنبال گزینه‌ای هستیم که اگر آن گزینه را معکوس کنیم، اعتبار و صحت استدلال از بین می‌رود. معکوس گزینه (۴) به شکل زیر است:  
معکوس گزینه (۴): پاسخ شرکت‌کنندگان در مطالعه مذکور، منعکس‌کننده واقعیت موجود نبوده است.
- ۱۰- گزینه «۲» واضح است قسمت اول ادعای نویسنده و متن است و قسمت دوم با استناد به نظر بیشتر اندیشمندان، اقتصاددانان و جامعه‌شناسان ادعای متن را تأیید و تقویت می‌کند. پس گزینه (۲) به بهترین شکل نقش دو قسمت را تعیین می‌کند.
- ۱۱- گزینه «۲» در متن، به عبارت گزینه (۲) اشاره شده است و تنها گزینه‌ای است که می‌توان به طور صددرصد از متن استنباط کرد، همین است.
- ۱۲- گزینه «۱» خلاصه استدلال این است که کارمند می‌گوید اگر در رسانه‌های اجتماعی تبلیغ کنیم، فروش **موتورهای جدید** بالا می‌رود. مدیر در پاسخ می‌گوید **دو سال** پیش که **نسل قبلی** موتورها را در **رسانه‌های اجتماعی** تبلیغ کردیم، راه به جایی نبردیم. واضح است در رد استدلال مدیر، بهترین عبارت گزینه (۱) است. در واقع مدیر دارد از دو سال قبل و عدم فروش موتورهای دو سال قبل صحبت می‌کند و حال اینکه مردم در دو سال پیش حضور کم‌رنگی در رسانه‌های اجتماعی داشته‌اند، پس نمی‌شود، عدم موفقیت تبلیغ در رسانه‌های اجتماعی در آن زمان را به زمان حال تعمیم دهیم.
- ۱۳- گزینه «۳» خلاصه متن این است که گرم شدن هوا در منطقه الف که باعث افزایش و هجوم ملخ‌ها می‌شود باعث آسیب به میوه (ب) نشده است و دلیل آن این است که **گرم شدن هوا ترکیب خاصی** در میوه (ب) ایجاد می‌کند که ملخ‌ها را از خود می‌رانند. می‌خواهیم این استدلال را تقویت کنیم. معمولاً باید به گزینه‌ای توجه کنیم که **دلیل پایه‌ای** را تأیید و تقویت می‌کند. گزینه (۳) به خوبی این کار را کرده است و دقیقاً می‌گوید همان ترکیب خاص در میوه (ب) باعث راندن ملخ‌ها و در نتیجه عدم آسیب به میوه (ب) شده است. چون تمام میوه‌های دیگر تخریب شده‌اند.
- ۱۴- گزینه «۴» کاندیدای رقیب به جای پاسخ منطقی به ادعای کاندیدای ریاست جمهوری به شخصیت کاندید و عدم توانایی او در برخی موارد، حمله می‌کند. پس بهترین گزینه، گزینه (۴) است.
- ۱۵- گزینه «۲» سؤال راحتی است و گزینه (۲) باید در پایان متن قرار گیرد. فکر می‌کنم گزینه‌های دیگر خنده‌دار باشند تا اینکه بخواهند کمی ما را به شک بیندازند!

**PART C: Reading Comprehension**


**Directions:** Read the following two passages and select the choice (1), (2), (3), or (4) that best answers each question. Then mark the correct choice on your answer sheet.

**Passage 1:**

Good work-life balance has been found beneficial for businesses because it can reduce absenteeism, increase job satisfaction, promote better job autonomy, attract talents, improve employee retention, improve employee attitudes and behaviors, and improve productivity. Despite these benefits, the construction industry is still known for its poor work-life balance. For example, the average number of hours worked in the construction industry was 62.5 among site-based project staff, 56.1 among office-based project staff, and 49.0 among head or regional office staff, far longer than the typical 38-hour working week in Australia.

The male-dominated nature of the construction industry makes the culture of ‘work hard and play hard’ the norm of the industry. The industry is also highly competitive, forcing construction organizations to reduce their labor cost, operate with low profit margin, and work with unreasonable time constraints. This culture in the Australian construction industry drives employees to work longer hours than contractually obligated. The work-life balance of employees in the construction industry has been sacrificed for a large salary award, which has led to serious relationship strains and mental health issues, such as suicide and burnout. Despite the efforts to implement work-life balance strategies and initiatives, the work-life balance in the industry remains poor because of a lack of enforcement and the industry culture.


Previous research has identified factors that can affect work-life balance. Technology development has given individuals a greater sense of mobility in their daily lives. This increased mobility and interconnectedness has enabled the workforce to become more itinerant, thus allowing individuals to work from home, communicate while in transit, and be available 24 hours a day, seven days a week. Technology has the potential to improve work-life balance. For example, parents can complete work from home, thus allowing individuals to start a family, while undertaking the majority of work roles and responsibilities on one mobile device. This offers greater flexibility to individuals than traditional office-based personnel and helps individuals manage both work and life commitments with greater ease.

 **51- The statistics presented in the last sentence of paragraph 1 are intended to which of the following?**

- 1) To suggest that there is a deficiency blocking progress in the construction industry
- 2) To justify a problem mentioned earlier in the same paragraph
- 3) To underscore a tendency to disregard a common challenge
- 4) To support an earlier assertion

 **52- Which of the following best describes the main purpose of paragraph 2?**

- 1) To help resolve a paradox
- 2) To explore the causes of a phenomenon
- 3) To compare one domain of work with some others
- 4) To point out the shortcomings in a specific area of industry

 **53- Which of the following is NOT stated in the passage about the issue of the poor work-life balance in the construction industry?**

- 1) The job contracts may sometimes not reflect the true severity of the issue.
- 2) The issue has the potential to lead to a state of mental exhaustion.
- 3) The competitiveness of this industry makes the issue insoluble.
- 4) The issue, as it is, has certain health-related consequences.

 **54- Which of the following best describes the author’s attitude towards the effect technology can have on the work-life balance in the construction industry?**

- 1) Favorable
- 2) Skeptical
- 3) Mild irritation
- 4) Resigned acceptance





55- Which of the following is more likely to be the topic of the paragraph that comes after this passage?

- 1) Need for further research to illuminate the impact of technology on work-life balance
- 2) Reasons why work-life balance has gained prominence in recent times
- 3) Problems associated with traditional office-based jobs
- 4) Another factor that can affect work-life balance

**Passage 2:**

Positivism is a current of thought whose beginning is usually attributed to the approaches of Auguste Comte, who only considered the knowledge from the empirical sciences valid. This paradigm, also known as Quantitative or Rationalist, establishes the existence of a certain uniformity and order in nature, which means that the natural world has its own existence, independent of who investigates it. Based on this, it is governed by laws that allow explaining, predicting and controlling phenomena. This paradigm is particularly predominant in engineering education, where students are passive throughout the learning process, and depend on the educator as a source of information and not on themselves as constructors of knowledge.

From an epistemological point of view, Positivism has an objective position, a distant and non-interactive attitude between the subject and the peers, assuming that reality is given and can be absolutely known by the subject (e.g., an engineering student), and therefore requires finding the right and valid method to discover that reality. Consequently, positivist science is based on the assumption that the subject has an absolute possibility of knowing reality through a specific method. This is the type of problems that engineering students often encounter in classrooms, by using this traditional approach, which do not necessarily prepare them for the real problems that they will find as future engineers.

Hence, Positivism emphasizes verification, based on observation and opposing any science that is constructed without any empirical correlates. The most important characteristic of positivist theory is the search for a systematic, verifiable and measurable knowledge, focusing on the cause of phenomena that occur, from observation, measurement and statistical procedure. In this way, this paradigm leads the students to answer tests in the most accurate way possible in terms of either what educator has taught or study books, getting much better academic grades but not necessarily a better understanding.

56- The type of class run based on positivism, as it is described in the passage, is one which .....

- 1) stresses group work
- 2) presents highly subjective topics
- 3) is teacher-fronted
- 4) is project-oriented

57- What does the underlined "it" in paragraph 1 refer to?

- 1) uniformity
- 2) positivism
- 3) existence
- 4) world

58- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

- 1) What attribute of positivism is said to be the most consequential?
- 2) How has positivism come to underlie the teaching methodology in engineering classes?
- 3) Is the assumption that "reality is given" a widely accepted one in the scientific community?
- 4) When are two positivist researchers likely to arrive at two different readings of the same outside reality?

59- Which of the following could best be inferred from the passage?

- 1) To investigate each type of reality, a positivist is required to use a discrete scientific method.
- 2) The laws established by Auguste Comte as those governing nature are accepted as such by other positivists.
- 3) Engineering students trained based on the tenets of positivism cannot efficiently handle their job demands once they start work.
- 4) The contribution of positivism to the discovery of the real world is undisputed, though there are some philosophers who argue otherwise.

60- The underlined "subject" in paragraph 2 can best be replaced by which of the following?

- 1) problem
- 2) researcher
- 3) assumption
- 4) scientific theme

بخش سوم: درک مطلب

دو متن زیر را بخوانید و از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) گزینه‌ای را انتخاب کنید که برای هر سؤال بهترین پاسخ باشد. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

متن ۱: تعادل کار - زندگی خوب برای کسب‌وکارها مفید و مؤثر است چون می‌تواند غیبت از کار را کاهش دهد، رضایت شغلی را افزایش دهد، استقلال کاری بهتر را ارتقا دهد، افراد بااستعداد را جذب کند، حفظ و سرکار ماندن کارمندان را بالا ببرد، نگرش و رفتار کارکنان را بهتر کند، و بهره‌وری را بهبود ببخشد. به رغم این مزایا، صنایع عمرانی همچنان به خاطر تعادل کار - زندگی ضعیف‌شان معروف هستند. مثلاً، تعداد متوسط ساعات‌های کاری در صنایع عمرانی بین کارکنان پروژه‌های مبتنی بر محل ۶۲/۵ ساعت بود، بین کارکنان پروژه‌های مبتنی بر دفتر ۵۶/۱ ساعت بود، و بین کارکنان دفتری هیئت مدیره یا منطقه‌ای ۴۹ ساعت بود، که {تمام این ارقام} بسیار بیشتر از ۳۸ ساعت کار معمول در هفته در استرالیا است.

تسلط مردان بر صنایع عمرانی باعث می‌شود فرهنگ «سخت کار کن، سخت بازی کن» به یک هنجار در این صنعت تبدیل شود. همچنین رقابت در این صنعت بسیار بالاست که این موضوع شرکت‌های عمرانی را وادار می‌کند هزینه کار را کاهش دهند، با حاشیه سود پایین فعالیت کنند، و با محدودیت‌های زمانی غیرمعمولی کارکنند. این فرهنگ در صنایع عمرانی استرالیا کارکنان را وادار می‌کند که ساعات‌های طولانی‌تری از آنچه در قرارداد تعهد داده‌اند کار کنند. تعادل کار - زندگی کارکنان صنایع عمرانی، فدای حقوق بیشتر شده که این موضوع به روابط پُرتنش و بیماری‌ها و مسائل ذهنی از قبیل خودکشی و فرسودگی شغلی منجر شده است. به رغم تلاش‌های صورت گرفته جهت پیاده‌سازی استراتژی‌ها و راهکارهای تعادل کار-زندگی، تعادل کار-زندگی در صنایع عمرانی به خاطر نبود قوانین و فرهنگ صنعتی، ضعیف باقی مانده است.

پژوهش‌های پیشین، عوامل تأثیرگذار بر تعادل کار - زندگی را شناسایی کرده است. توسعه فناوری به افراد حس پویایی بیشتری در زندگی روزانه‌شان داده است. این افزایش پویایی و پیوند و همبستگی، نیروی کار را قادر ساخته که دوره‌گردتر شوند و در نتیجه به افراد اجازه می‌دهد که از خانه کار کنند، حین رفت‌وآمد با هم ارتباط برقرار کنند، هر روز هفته ۲۴ ساعته در دسترس باشند. فناوری این توانایی را دارد که تعادل کار - زندگی را بهتر کند. مثلاً، والدین می‌توانند از خانه کارهایشان را انجام دهند که این موضوع به افراد اجازه می‌دهد تشکیل خانواده بدهند، و اکثریت نقش‌ها و مسئولیت‌های کاری را بر روی یک موبایل انجام دهند. این، انعطاف‌پذیری بیشتری به افراد می‌دهد تا به پرسنل مبتنی بر دفتر سنتی و به افراد کمک می‌کند کار و تعهدات زندگی‌شان را با سهولت بیشتری مدیریت کنند.

۵۱- گزینه «۴» هدف از آمار و ارقام ارائه شده در جمله آخر پاراگراف ۱ چیست؟

گزینه (۴): پشتیبانی از ادعایی که قبل‌تر (در خط قبلی) مطرح شده است.

**توضیح:** به عنوان یک قانون سرانگشتی می‌توانیم بگوییم که اصلی‌ترین هدف ارائه مثال (exemplification) پشتیبانی از ایده‌های قبلی است. یعنی چون آمار و ارقام مذکور در قالب مثال آمده، می‌توان گفت آخرین جمله پاراگراف اول از جمله پُرتنش زیر حمایت و پشتیبانی می‌کند:

Despite these benefits, the construction industry is still known for its poor work-life balance. For example, the average number of hours worked in the construction industry was 62.5 among site-based project staff, 56.1 among office-based project staff, and 49.0 among head or regional office staff, far longer than the typical 38-hour working week in Australia.

۵۲- گزینه «۲» کدام یک از موارد زیر هدف اصلی پاراگراف ۲ را به بهترین نحو توصیف می‌کند؟

گزینه (۲): بیان علت و دلایل یک پدیده

**توضیح:** پاراگراف دوم در مورد causes (دلایل) این پدیده بحث می‌کند:

The construction industry is still known for its poor work-life balance.

۵۳- گزینه «۳» کدام یک از موارد زیر درباره مسئله تعادل کار - زندگی ضعیف در صنایع عمرانی در متن ذکر نشده است؟

گزینه (۳): رقابت {زیاد} در این صنایع باعث می‌شود این مسئله غیرقابل حل (insoluble) شود.

**توضیح:** متن اصلاً چیزی در مورد «غیرقابل حل بودن، حل‌نشده بودن» این مسئله نگفته اما باقی گزینه‌ها به وضوح در متن گفته شده‌اند: گزینه (۱):

This culture in the Australian construction industry drives employees to work longer hours than contractually obligated.

گزینه‌های (۲) و (۴):

The work-life balance of employees in the construction industry has been sacrificed for a large salary award, which has led to serious relationship strains and mental health issues (choice 4), such as suicide and burnout (choice 2)

۵۴- گزینه «۱» کدام یک از موارد زیر به بهترین نحو نگرش نویسنده متن را به تأثیر فناوری بر تعادل کار - زندگی در صنایع عمرانی توصیف می‌کند؟

گزینه (۱): {نگرش} مثبت و مطلوب

**توضیح:** با مطالعه پاراگراف آخر متن به سادگی در می‌یابیم که نویسنده نگرش مثبتی به این موضوع دارد.

۵۵- گزینه «۴» کدام یک از موارد زیر احتمالاً عنوان پاراگرافی خواهد بود که به دنبال این متن می‌آید؟  
گزینه (۴): عامل دیگری که می‌تواند بر تعادل کار - زندگی اثر بگذارد.

**توضیح:** برای پاسخگویی به سؤالاتی که عنوان پاراگراف بعد از متن را می‌خواهند باید آخرین جمله (و گاهی اولین جمله آخرین پاراگراف) متن را بخوانیم. در این مورد، اولین جمله آخرین پاراگراف متن این است: **Previous research has identified factors that can affect work-life balance.** یکی از این عوامل، «فناوری» است که در پاراگراف آخر بهش پرداخته شده. بنابراین پاراگراف بعدی احتمالاً در مورد یک عامل دیگر خواهد بود.

**متن ۲:** پوزیتیویسم یکی از مکاتب فکری است که آغازش معمولاً به رویکردهای آگوست کومته نسبت داده می‌شود. کومته صرفاً دانش به دست آمده از علوم تجربی را معتبر می‌دانست. این پارادایم که «کمی» یا «عقل‌گرایی» هم نامیده می‌شود، معتقد است در طبیعت نوعی همسانی و نظم مشخص وجود دارد که این یعنی جهان طبیعی وجودیت مختصی دارد که مستقل از کسانی است که آن {جهان طبیعی} را بررسی می‌کنند. براساس این نگرش، قوانینی بر جهان طبیعی حاکم هستند که توضیح، پیش‌بینی و کنترل پدیده‌ها را میسر می‌کنند. این پارادایم خصوصاً در آموزش مهندسی غالب است که در آن دانشجویان در طول فرایند یادگیری غیرفعال‌اند و به آموزش‌دهنده به عنوان منبع اطلاعات متکی‌اند و نه به خودشان به عنوان خلق‌کننده دانش. از منظر معرفت‌شناختی، پوزیتیویسم یک موضع بی‌طرف دارد؛ یک نگرش از راه‌دور و غیرتعاملی بین سوژه و هم‌سن‌وسالانش، با این فرض که واقعیت مشخص است و سوژه (مثلاً یک دانشجوی مهندسی) می‌تواند آن را به طور کامل بداند؛ و بنابراین نیاز است روش مناسب و معتبر برای کشف آن واقعیت را پیدا کرد. در نتیجه، علم پوزیتیویست براساس این فرضیه است که سوژه از این شانس مطلق برخوردار است که واقعیت را از طریق یک روش خاص بداند. این از جمله مشکلاتی است که دانشجویان مهندسی اغلب در کلاس درس با آنها مواجه هستند، با استفاده از این رویکرد سنتی، که لزوماً آنها را برای مشکلات حقیقی که آنها ممکن است به عنوان مهندسان آینده با آنها روبه‌رو شوند، آماده نمی‌کند. بنابراین، پوزیتیویسم بر تأیید (verification) تأکید دارد، آن هم براساس مشاهده و با هر گونه علمی که بدون استفاده از همبستگی‌های تجربی ایجاد شود، مخالف است. مهم‌ترین ویژگی نظریه پوزیتیویست، جستجو برای دانش سیستماتیک، قابل‌تایید و قابل‌اندازه‌گیری از طریق مشاهده، اندازه‌گیری و رویه‌های آماری است. به این ترتیب، این پارادایم دانشجویان را هدایت می‌کند که آزمون‌ها را به دقیق‌ترین روش ممکن پاسخ دهند، یا براساس آنچه معلم تدریس کرده یا براساس مطالعه کتاب و کسب نمرات بسیار بهتر اما نه لزوماً درک و شناخت بهتر.

۵۶- گزینه «۳» آن‌طور که در متن گفته شده، کلاسی که براساس پوزیتیویسم اداره شود، کلاسی است که ..... .

- (۱) بر کار گروهی تأکید دارد  
(۲) موضوعاتی بسیار ذهنی و سلیقه‌ای ارائه می‌دهد  
(۳) معلم‌محور است  
(۴) مبتنی بر پروژه است

**توضیح:** در پاراگراف اول چنین گفته شده:

This paradigm [positivism] is particularly predominant in engineering education, where students are **passive** throughout the learning process, and depend on the *educator as a source of information* and not on themselves as constructors of knowledge.

از این جمله می‌توان برداشت کرد کلاسی که براساس پوزیتیویسم باشد، کلاسی است که دانشجویان نقش غیرفعالی در آن دارند و معلم به عنوان منبع اطلاعات نقش پررنگ‌تری دارد.

۵۷- گزینه «۴» ضمیر it به natural world برمی‌گردد.

۵۸- گزینه «۱» براساس اطلاعات متن به کدام یک از سؤالات زیر می‌توان پاسخ داد؟

گزینه (۱): مهم‌ترین ویژگی و مشخصه پوزیتیویسم چیست؟

**توضیح:** پاسخ سؤال مطرح شده در گزینه (۱) در این خطوط یافت می‌شود:

*The most important characteristic of positivist theory is the search for a systematic, verifiable and measurable knowledge, focusing on the cause of phenomena that occur, from observation, measurement and statistical procedure.*

گزینه‌های (۲) و (۴) به وضوح رد می‌شوند. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون معنی‌اش می‌شود: «پوزیتیویسم چگونه به اصل زیربنایی روش تدریس مرسوم در کلاس‌های مهندسی تبدیل شد؟» که در متن چیزی در این مورد گفته نشده.

۵۹- گزینه «۳» کدام یک از موارد زیر به درستی از متن استنباط می‌شود؟

گزینه (۳): دانشجویان مهندسی‌ای که براساس اصول پوزیتیویسم آموزش می‌بینند نمی‌توانند به محض شروع کار، به طرز مؤثری مسائل و مشکلات کاری‌شان را مدیریت کنند.

**توضیح:** پاسخ از خطوط آخر پاراگراف دوم استنباط می‌شود:

This is the type of problems that engineering students often encounter in classrooms, by using **this traditional approach [positivism]**, which do not necessarily prepare them for the real problems that they will find as future engineers.

۶۰- گزینه «۲» لغت subject در پاراگراف دوم را می‌توان با کدام یک از موارد زیر جایگزین کرد؟

گزینه (۲): محقق

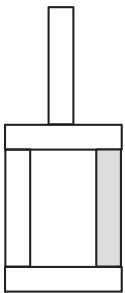
**توضیح:** subject (که در متون پژوهشی به صورت «سوژه» ترجمه می‌شود) در اینجا به engineering student برمی‌گردد؛ یا به کسی که طبق متن in search of knowledge باشد. پس می‌توان آن را با researcher جایگزین کرد.

کله ۱۳- یک نخ با طول نامعلوم که سرعت سوختن در سراسر آن ثابت است، در اختیار داریم. قرار است نخ را از نقاطی آتش بزینیم و مدت زمان سوختن کامل آن را اندازه بگیریم.

«الف»	«ب»
مدت زمان سوختن کامل نخ، اگر آن را از دو سر و نقطه‌ای که طول نخ را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کند، همزمان آتش بزینیم.	مدت زمان سوختن کامل نخ، اگر آن را از دو نقطه که هرکدام از یک سر نخ، فاصله‌ای به اندازه $30^\circ$ درصد طول نخ دارند، همزمان آتش بزینیم.

### بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ راهنمایی: در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزینید. راهنمایی: با توجه به اطلاعات و شکل زیر، به سؤال‌های ۱۴ تا ۱۶ پاسخ دهید.



کودکی توسط ۵ آجر A, B, C, D و E که یکی از آن‌ها تیره است، سازه مقابل را با گذاشتن سه آجر به طور عمودی و دو آجر به طور افقی ساخته است. درخصوص ساخت این سازه، اطلاعات زیر در دست است.

- آجرهای B و C، یکی به طور افقی و دیگری عمودی قرار گرفته‌اند و این اتفاق برای آجرهای D و E نیز رخ داده است.
- آجر A با آجر E در تماس است، ولی با آجر B در تماس نیست.
- آجرهای B و D، هیچ‌کدام تیره رنگ نیستند.

کله ۱۴- اگر پایین‌ترین آجر B باشد، کدام آجر با سه آجر دیگر، در تماس است؟

- (۱) A (۲) C (۳) D (۴) E

کله ۱۵- اگر آجر D فقط با یک آجر در تماس باشد، جایگاه چند آجر از ۴ آجر دیگر، به طور قطع مشخص می‌شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

کله ۱۶- اگر آجرهای B و E با هم در تماس نباشند، جایگاه کدام آجر یا آجرهای زیر در سازه، به طور قطع مشخص می‌شود؟

- (۱) فقط II (۲) II و III (۳) فقط III (۴) I و II

A.I D.II E.III

■ راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۷ تا ۲۰ پاسخ دهید.

پنج نفر به اسامی A, B, C, D و E برای خرید فرش به یک فروشگاه فرش مراجعه و هرکدام یک تخته فرش می‌خرند. فرش‌های فروشگاه در سایزهای ۶، ۹ و ۱۲ متری و در رنگ‌های لاکه و کرم عرضه می‌شوند. از ۵ فرش خریداری شده، ۲ عدد ۶ متری، ۲ عدد ۹ متری و ۱ عدد ۱۲ متری بوده است. اطلاعات زیر درخصوص سایز و رنگ فرش‌های خریداری شده موجود است:

- C، نه فرش ۹ متری خریده است و نه فرش‌های خریداری شده توسط A و D.
- فرش‌های E خریده، از فرش‌های A خریده، کوچک‌تر و هم‌رنگ فرش ۱۲ متری فروخته شده بوده است.
- فرش‌های A و B، نه هم‌اندازه بوده‌اند و نه هم‌رنگ.

کله ۱۷- اگر D یک فرش ۶ متری لاکه خریده باشد، کدام یک از فرش‌های زیر را خریده است؟

- (۱) ۹ متری کرم (۲) ۶ متری کرم (۳) ۹ متری لاکه (۴) ۶ متری لاکه

کله ۱۸- اگر B یک فرش ۱۲ متری کرم خریده باشد، کدام مورد زیر درخصوص نام افراد و فرش‌هایی که خریده‌اند، صحیح نیست؟

- (۱) C و E - فرش‌های هم‌رنگ (۲) B و C - فرش‌های هم‌رنگ (۳) C و D - فرش‌های هم‌اندازه (۴) A و D - فرش‌های هم‌اندازه

کله ۱۹- اگر D و E، فرش‌های کاملاً مشابهی خریده باشند، کدام مورد زیر درخصوص نام فرد و فرش‌های که خریداری کرده است، به‌طور قطع صحیح است؟

- (۱) B - فرش ۹ متری (۲) C - فرش ۶ متری (۳) E - فرش لاکه (۴) A - فرش کرم

کله ۲۰- اگر B از A فرش بزرگ‌تری آن هم به رنگ لاکه خریده باشد، چه کسی یک فرش ۶ متری کرم خریده است؟

- (۱) C (۲) E

(۴) B نمی‌تواند فرش لاکه بزرگ‌تر از فرش A خریده باشد.

(۳) هیچ‌کس

در اینجا نیز ۴ مسیر برای سوختن داریم:

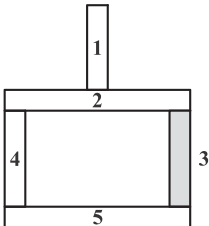
$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow (5) \\ \leftarrow (6) \\ \rightarrow (7) \\ \leftarrow (8) \end{array} \right.$$

مسیرهای (۵) و (۸) هر کدام  $3X/0$  و مسیرهای (۶) و (۷) نیز هر کدام  $2X/0$  را می‌سوزانند.

بنابراین مدت زمان سوختن در هر دو حالت یکی است و گزینه (۳) صحیح است.

### بخش سوم: سؤالات تحلیلی

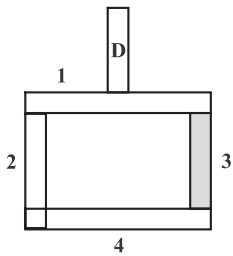
#### ۱۴- گزینه «۴»



آجر شماره ۳، با سه آجر دیگر در تماس است؛ بنابراین باید این آجر را نامگذاری کنیم. اگر آجر ۵، B باشد، چون D تیره رنگ نیست، یکی از آجرهای ۱، ۲ یا ۴، D خواهد بود. از طرف دیگر چون B افقی است، C باید عمودی باشد و می‌تواند یکی از آجرهای ۱، ۳ یا ۴ باشد. همچنین چون آجر A نباید با B در تماس باشد، یا آجر شماره ۱ است و یا آجر شماره ۲.

حال فرض می‌کنیم آجر A شماره‌ی ۲ باشد، خواهیم داشت: D یا ۱ خواهد بود یا ۴؛ بنابراین حتماً یک آجر عمودی است، ولی چون در این صورت باید افقی باشد و گزینه‌ای برایش نمی‌ماند، A باید آجر شماره‌ی ۱ باشد. چون A آجر شماره‌ی ۱ است و باید با آجر E در تماس باشد، آجر شماره‌ی ۲، آجر E است.

#### ۱۵- گزینه «۲»



اگر آجر D فقط با یک آجر در تماس باشد، یعنی موقعیت بالاترین آجر را دارد. چون آجر B نباید تیره‌رنگ باشد، یکی از آجرهای ۱، ۲ یا ۴ خواهد بود. از طرف دیگر، چون آجر D عمودی است، آجر E باید افقی باشد و یکی از آجرهای ۱ و ۴ خواهد بود.

اگر E، آجر شماره ۱ باشد، آجر B یا ۲ خواهد بود یا:

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \end{array} \right\} 4$$

اگر B، ۲ باشد، C آجر ۴ و A آجر ۳ می‌شود (زیرا C در این صورت باید افقی باشد).  
اگر B، ۴ باشد، A قطعاً ۲ یا ۳ خواهد بود و چون با E در تماس خواهد بود، امکان‌پذیر نیست.

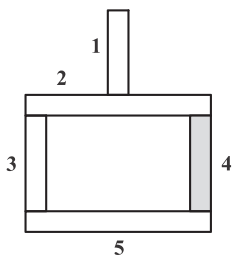
اگر E، آجر شماره ۴ باشد، آجر B یا ۱ خواهد بود یا:

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \end{array} \right\} 2$$

اگر B، ۲ باشد، C آجر ۱ و A آجر ۳ می‌شود (زیرا C در این صورت باید افقی باشد).  
اگر B، ۱ باشد، A قطعاً ۲ یا ۳ خواهد بود و چون با E در تماس خواهد بود، امکان‌پذیر نیست.

بنابراین تنها حالت‌های ۱ و ۳ امکان‌پذیر هستند، که جایگاه B (آجر ۲) و جایگاه A (آجر ۳) را به‌طور قطعی مشخص می‌کنند.

۱۶- گزینه «۱» طبق شکل زیر آجرهای شماره «۱ و ۳»، «۱ و ۴»، «۱ و ۵» و «۲ و ۵»، «۳ و ۴» با هم در تماس نیستند و حالت‌های زیر را خواهیم داشت: (۱۰ حالت؛ زیرا آجرهای B و E نیز جایگشت دارند:  $2 \times 5 = 10$ )



حالت ۱: اگر B، ۱ و E، ۳ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی ۵، C آجر شماره‌ی ۲ و D آجر شماره‌ی ۴ خواهد بود، ولی چون D نمی‌تواند آجر تیره‌رنگ باشد، این حالت غیرقابل قبول است.

حالت ۲: اگر E، ۱ و B، ۳ باشد، در این حالت آجر ۲، آجر A خواهد بود و چون با B در تماس می‌شود، غیرقابل قبول است.

حالت ۳: اگر B، ۱ و E، ۴ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی ۵، C آجر شماره‌ی ۲ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود و چون D و E هر دو عمودی می‌شوند، غیرقابل قبول است.

حالت ۴: اگر E، ۱ و B، ۴ باشد، در این حالت چون B تیره رنگ می‌شود، غیرقابل قبول است.

حالت ۵: اگر B، ۱ و E، ۵ باشد، در این حالت، A آجر شماره‌ی ۴، C آجر شماره‌ی ۲ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود و قابل قبول است.

حالت ۶: اگر E، ۱، B و ۵، باشد، در این حالت A آجر شماره ۲، C آجر شماره ۴ و D آجر شماره ۳ خواهد بود، و چون D و E هر دو عمودی می‌شوند، غیرقابل قبول است.

حالت ۷: اگر B، ۲ و E، ۵، باشد، در این حالت آجر A یکی از آجرهای ۳ یا ۴ خواهد بود و در نتیجه با آجر ۲ که B است، تماس خواهد داشت؛ بنابراین غیرقابل قبول است.

حالت ۸: اگر E، ۲ و B، ۵، باشد، در این حالت A آجر شماره ۱، C آجر شماره ۴ و D آجر شماره ۳ خواهد بود و قابل قبول است.

حالت ۹: اگر B، ۳ و E، ۴، باشد، در این حالت A یکی از آجرهای ۲ یا ۵ خواهد بود و قطعاً با B است، تماس خواهد داشت؛ بنابراین غیرقابل قبول است.

حالت ۱۰: اگر E، ۳ و B، ۴، باشد، در این حالت چون آجر B تیره رنگ می‌شود، غیرقابل قبول است.

بنابراین حالت‌های ۵ و ۸، حالت‌های قابل قبول هستند و نقطه‌ی اشتراک آن‌ها، قطعی بودن جایگاه D به‌عنوان آجر شماره ۳ است.

۱۷- گزینه «۱» متناسب با خرید فرش ۶ متری لاکی توسط خریدار D و فرضیات ارائه شده در صورت سؤال، جدول زیر را ترسیم می‌نماییم:

خریدار	سایز	رنگ
D	۶	لاکی
A	۶ یا ۱۲	لاکی
B	۶ یا ۹ یا ۱۲	کرم
C	۶ یا ۱۲	کرم
E	۶ یا ۹	?

→ با توجه به گزینه‌های داده شده، یا ۶ یا ۹ خواهد بود.

طبق فرضیات، رنگ فرش‌های خریداران A و D با هم و رنگ فرش‌های خریداران B و C با هم یکسان است؛ در نتیجه فرش خریداری شده توسط B قطعاً کرم است.

اگر B فرش ۶ متری خریداری کرده باشد، چون D نیز ۶ متری خریداری کرده است، ۲ فرش ۹ متری و ۱ فرش ۱۲ متری باقی می‌ماند؛ چون C فرش ۹ متری نخریده است، فرش ۱۲ متری برای اوست و A و E هر دو ۹ متری خریده‌اند که با فرض دوم سؤال در تناقض است. پس B یک فرش ۹ متری کرم خریداری نموده است.

۱۸- گزینه «۳» متناسب با خرید فرش ۱۲ متری کرم توسط B و فرضیات ارائه شده توسط صورت سؤال، جدول زیر را ترسیم می‌نماییم:

خریدار	سایز	رنگ
B	۱۲	کرم
A	۹	لاکی
C	۶	کرم
D	۹	لاکی
E	۶	کرم

→ مشاهده می‌کنیم که این دو فرش، هم‌اندازه نیستند.

۱۹- گزینه «۲» چون D و E فرش‌های کاملاً مشابه خریداری کرده‌اند، یا هر دو باید ۶ متری خریداری کرده باشند یا ۹ متری. اگر E و D، ۶ متری خریداری کرده باشند؛ به دلیل اینکه C، فرش ۹ متری نمی‌خرد، باید ۱۲ متری خریداری کرده باشد و B و A، ۹ متری، که برخلاف فرض سوم صورت سؤال است؛ بنابراین این حالت غیرقابل قبول است و E و D، ۹ متری خریداری کرده‌اند و چون فرش A باید بزرگ‌تر از فرش E باشد، A، ۱۲ متری و B و C، ۶ متری خواهند بود؛ پس به‌طور قطعی، خریدار C، فرش ۶ متری خریده است.

خریدار	سایز	رنگ
B	۱۲	لاکی
A	۹	کرم
C	۶	لاکی
D	۹	کرم
E	۶	لاکی

۲۰- گزینه «۳» B از A فرش بزرگ‌تری خریده است و طبق فرض دوم صورت سؤال نیز A از E فرش بزرگ‌تری خریداری کرده است؛ بنابراین قطعاً B، ۱۲ متری، A، ۹ متری و E، ۶ متری خریداری کرده‌اند و چون C، ۹ متری نخریده است، فرش او ۶ متری خواهد بود و D است که ۹ متری خریده است. در مورد رنگ‌ها هم می‌دانیم که A و D یک رنگ و B و C نیز یک رنگ خواهند بود و چون فرش خریداری شده توسط E، هم‌رنگ فرش ۱۲ متری است، B و C و E یک رنگ می‌شوند که طبق گفته‌ی صورت سؤال، لاکی هستند؛ در نتیجه A و D، فرش کرم خریده‌اند و جدول مقابل را خواهیم داشت:

در نتیجه، هیچ‌کس یک فرش ۶ متری کرم نخریده است.



### سوالات فیزیک

مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکتروپدینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته (۱)

کله ۱- هامیلتونی یک دستگاه کوانتومی  $H = \frac{ch}{\lambda} (a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$  است که  $I$  و  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  به ترتیب ماتریس واحد و ماتریس های پاولی در فضای هیلبرت با بعد ۲ هستند.  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  و  $a_0, \lambda$  ثابت اند. اگر این دستگاه گسیل الکترومغناطیسی انجام دهد، طول موج آن چقدر است؟ ( $\hbar$  ثابت پلانک و  $c$  سرعت نور در خلأ است.)

$$\frac{\lambda a_0}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (۴) \quad \frac{\lambda a_0}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (۳) \quad \frac{\lambda}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (۲) \quad \frac{\lambda}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (۱)$$

کله ۲- ذره ای به جرم  $m$  در چاه پتانسیل یک بعدی  $V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -\frac{\hbar^2}{ma} \delta(x-a) & x \geq 0 \end{cases}$  در نظر بگیرید ( $a > 0$ ). اگر انرژی حالت مقید را

به صورت  $E = \frac{-\hbar^2 k^2}{2m}$  نشان دهیم، مقدار  $k$  از کدام رابطه به دست می آید؟

$$\tanh(ka) = \left(\frac{2}{ka} - 1\right)^{-1} \quad (۴) \quad \tan(ka) = \left(\frac{2}{ka} - 1\right)^{-1} \quad (۳) \quad \tanh(ka) = \frac{2}{ka} - 1 \quad (۲) \quad \tan(ka) = \frac{2}{ka} - 1 \quad (۱)$$

کله ۳- نمایش عملگر  $\hat{O}$  روی حالت  $|\alpha\rangle$  در فضای مکان به صورت  $\langle x' | \hat{O} | \alpha \rangle = \left(\frac{d}{dx'} + \frac{d}{dx''}\right) \langle x' | \alpha \rangle$  مقدار  $\langle x' | \hat{O} | x'' \rangle$  با کدام رابطه برابر است؟

$$\left(\frac{1}{(x' - x'')^2} - \frac{1}{(x' - x'')}\right) \delta(x' - x'') \quad (۲) \quad \left(\frac{2}{(x' - x'')^2} - \frac{1}{(x' - x'')}\right) \delta(x' - x'') \quad (۱)$$

$$\left(\frac{1}{(x' - x'')^2} + \frac{1}{(x' - x'')}\right) \delta(x' - x'') \quad (۴) \quad \left(\frac{2}{(x' - x'')^2} + \frac{1}{(x' - x'')}\right) \delta(x' - x'') \quad (۳)$$

کله ۴- هامیلتونی یک دستگاه کوانتومی در پایه های راست هنجار  $\{|+\rangle, |- \rangle\}$  به صورت زیر است. در لحظه  $t = 0$  دستگاه در حالت  $|+\rangle$  است. احتمال این که این دستگاه در لحظه  $t > 0$  در حالت مانای متناظر با ویژه مقدار بزرگتر انرژی باشد، چقدر است؟

$$H = \hbar\omega(|+\rangle\langle+| - i\sqrt{5}|+\rangle\langle-| + i\sqrt{5}|-\rangle\langle+| - 3|-\rangle\langle-|)$$

$$\frac{25}{36} \quad (۴) \quad \frac{1}{6} \quad (۳) \quad \frac{5}{6} \quad (۲) \quad \frac{11}{36} \quad (۱)$$

کله ۵- هامیلتونی سیستمی متشکل از دو نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی جفت شده به صورت زیر است. انرژی اولین تراز برانگیخته این دستگاه کدام است؟

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 xy$$

$$\frac{3}{\sqrt{\lambda}} (1 + \sqrt{2}) \hbar\omega \quad (۴) \quad \sqrt{\frac{3}{\lambda}} (1 + \sqrt{2}) \hbar\omega \quad (۳) \quad \frac{3}{\sqrt{\lambda}} (1 + \sqrt{3}) \hbar\omega \quad (۲) \quad \sqrt{\frac{3}{\lambda}} (1 + \sqrt{3}) \hbar\omega \quad (۱)$$

کله ۶- ذره ای به جرم  $m$  و مقید در چاه پتانسیل یک بعدی  $V(x) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|}$  در محدوده  $-\infty < x < +\infty$  در نظر بگیرید. در تقریب WKB انرژی

حالت پایه کدام گزینه است؟  $\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{\pi}{2}\right)$

$$-\frac{\lambda m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (۴) \quad -\frac{16m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (۳) \quad -\frac{16m}{9\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (۲) \quad -\frac{\lambda m}{9\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (۱)$$

کله ۷- انتشارگر یک ذره بین دو نقطه  $\vec{x}$  و  $\vec{x}'$  به صورت  $\langle \vec{x}' | e^{-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}} | \vec{x} \rangle$  تعریف می شود. اگر  $[T(\vec{\ell}), H] = 0$  که در

آن  $T(\vec{\ell}) = e^{-\frac{i\vec{\ell} \cdot \vec{p}}{\hbar}}$  عملگر انتقال و  $\vec{\ell}$  برداری دلخواه است، کدام خاصیت برای انتشارگر درست است؟

$$K(\vec{x}'', \vec{x}', t - t_0) = K(\vec{x}', \vec{x}'', t - t_0) \quad (۲) \quad K(\vec{x}'', \vec{x}', t - t_0) = K(-\vec{x}'', -\vec{x}'; t - t_0) \quad (۱)$$

$$K(\vec{x}'', \vec{x}', t - t_0) = K^*(\vec{x}'', \vec{x}'; t - t_0) \quad (۴) \quad K(\vec{x}'', \vec{x}', t - t_0) = K(\vec{x}'' - \vec{x}'; t - t_0) \quad (۳)$$



۸- کدام ماتریس می‌تواند نمایش ماتریسی یک عملگر دوران در فضای هیلبرت دوبعدی باشد؟

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  ماتریس‌های پاولی،  $\vec{a} = \sin\beta \cos\alpha \hat{i} + \sin\beta \sin\alpha \hat{j}$  است و  $\alpha, \beta$  هر مقدار دلخواهی می‌توانند اختیار کنند.

$$\begin{array}{llll} \frac{\cos\beta + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}}{\cos\beta - i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}} & (۴) & \sin\beta - i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} & (۳) \\ \cos\beta + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} & (۲) & & \frac{\cos\beta + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}}{\sin\beta - i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}} & (۱) \end{array}$$

۹- اگر  $\hat{D}^{(j=\frac{1}{2})}(\hat{n}, \phi)$  عملگر دوران یک دستگاه کوانتومی حول محور  $\hat{J}_z$  با  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{j}$  به اندازه زاویه  $\phi = +6^\circ$  باشد. دوران یافته حالت  $|+\rangle$  تحت این عملگر کدام است؟ ( $\pm$ ) ویژه بردارهای ماتریس پاولی  $\sigma_z$  و  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  بردارهای یک در جهت محورهای  $x$  و  $y$  هستند.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(3|+\rangle + (\sqrt{2}-i)|-\rangle) \quad (۲) \qquad \frac{1}{2\sqrt{3}}((\sqrt{2}-i)|+\rangle + 3|-\rangle) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}((\sqrt{2}+i)|+\rangle + \sqrt{3}|-\rangle) \quad (۴) \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}|+\rangle + (\sqrt{2}+i)|-\rangle) \quad (۳)$$

۱۰- مجموعه‌ای متشکل از دو ذره هر یک با اسپین یک ( $s_1 = 1, s_2 = 1$ ) در نظر بگیرید. ویژه مقدار  $\hat{S}_z$  مجموعه برابر  $\hbar$  است که

$\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{S}_{2z}$  است. اگر  $P_2$  احتمال این که اسپین کل مجموعه  $s = 2$  و  $P_1$  احتمال این که اسپین کل آن  $s = 1$  باشد، مقدار  $\frac{P_2}{P_1}$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \qquad \frac{3}{5} \quad (۳) \qquad \frac{1}{2} \quad (۲) \qquad ۱ \quad (۱)$$

۱۱- اگر  $\psi_{\ell}^{j, m_j}$  ویژه تابع مشترک عملگرهای  $J^2, L^2, J_z$  به ترتیب با ویژه مقادیر  $\hbar^2 j(j+1), \hbar^2 \ell(\ell+1), m_j \hbar$  باشد، کدام عبارت در مورد

$$\text{توابع } \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\ell}^{j, 2} - \psi_{\ell}^{j, -2}) \text{ و } \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{\ell}^{j, 2} + i\psi_{\ell}^{j, -2}\right) \text{ درست است؟}$$

(۱)  $\phi_2$  ویژه تابع مشترک عملگرهای پارته و وارونی زمان است.

(۲)  $\phi_1$  ویژه تابع مشترک عملگرهای پارته و وارونی زمان است.

(۳)  $\phi_1$  و  $\phi_2$  هر دو ویژه تابع عملگر وارونی زمان هستند اما  $\phi_1$  ویژه تابع عملگر پارته نیست.

(۴)  $\phi_1$  و  $\phi_2$  هر دو ویژه تابع عملگر پارته هستند اما هیچ یک ویژه تابع عملگر وارونی زمان نیستند.

۱۲- ذره‌ای به جرم  $m$  در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی  $V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$  در نظر بگیرید. با تابع موج آزمون و بهنجار

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2\lambda+1)(\lambda+1)}}{2\lambda a^\lambda \sqrt{a}} (a^\lambda - |x|^\lambda) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-1) \quad (۴) \qquad \lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+1) \quad (۳) \qquad \lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+1) \quad (۲) \qquad \lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-1) \quad (۱)$$

۱۳- اتم هیدروژنی در حالت برانگیخته  $|n\ell m\rangle$  توسط میدان الکتریکی یکنواخت  $\vec{E}_0$  مختل می‌شود به طوری که انرژی پتانسیل برهمکنش به

$$V(t) = \begin{cases} e\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \sin(\omega t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0, t > T \end{cases}$$
 شکل

امکان پذیر است؟ ( $\Delta m = m' - m, \Delta \ell = \ell' - \ell$ )

$$\Delta m = \pm 1, \pm 2, \Delta \ell = \pm 1, \pm 2 \quad (۴) \qquad \Delta m = \pm 1, \pm 2, \Delta \ell = 0, \pm 1 \quad (۳) \qquad \Delta m = 0, \pm 1, \Delta \ell = \pm 1 \quad (۲) \qquad \Delta m = 0, \pm 1, \Delta \ell = 0 \quad (۱)$$

۱۴- پرتویی از پروتون که جریانی به شدت  $5 \times 10^{-9} \text{ A}$  تولید می‌کند به هدفی از مس برخورد می‌کند. ضخامت هدف چنان است که چگالی سطحی

آن  $\frac{mg}{cm^2}$  است. آشکارسازی با مساحت  $5cm^2$  عمود بر پرتوی پراکنده شده در راستایی معین و به فاصله  $20cm$  از هدف قرار دارد. اگر در هر

ثانیه  $10^6$  پروتون توسط آشکارساز شمرده شود، سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی از مس در این راستا چند  $\frac{cm^2}{atom}$  است؟

steradian

$$\frac{6}{7} \times 10^{-25} \quad (۴) \qquad \frac{1}{3} \times 10^{-25} \quad (۳) \qquad \frac{8}{1} \times 10^{-7} \quad (۲) \qquad \frac{4}{0} \times 10^{-6} \quad (۱)$$



## پاسخنامه فیزیک

## مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکتروپدینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)

۱- گزینه «۱» روش اول (حل تشریحی): کافی است ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی را محاسبه کنیم. در این صورت فرض کنید  $E_1$  و  $E_2$  ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی باشد. با گذار سیستم بین دو ویژه مقدار انرژی فوتونی با انرژی  $h\nu = |E_2 - E_1|$  گسیل می‌شود که همان موج الکترومغناطیسی گسیلی سیستم است. قبل از محاسبه ویژه مقادیر انرژی سیستم به دو نکته زیر توجه کنید:

نکته (۱):  $V$  یک ویژه بردار ماتریس  $A$  می‌باشد، اگر و تنها اگر  $V$  یک ویژه بردار ماتریس  $\alpha I + \beta A$  باشد. در اینجا  $I$  ماتریس واحد و  $\alpha$  و  $\beta$  ثوابتی دلخواه هستند.

نکته (۲): اگر  $\hat{n}$  بردار یکه  $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$  باشد (به عبارتی  $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ ) آن‌گاه همواره داریم:

$$(\sigma \cdot \hat{n})^2 = I$$

بنابراین از نکته (۱) چنانچه  $|\psi_1\rangle$  ویژه بردار  $\hat{H} = \alpha I + \beta \sigma \cdot \hat{n}$  باشد آنگاه  $\langle \psi_1 | \sigma \cdot \hat{n} | \psi_1 \rangle = \lambda$  و نیز خواهد بود:

$$(\alpha I + \beta \sigma \cdot \hat{n}) |\psi_1\rangle = \lambda |\psi_1\rangle \Rightarrow \beta \sigma \cdot \hat{n} |\psi_1\rangle = (\lambda - \alpha) |\psi_1\rangle$$

حال چنانچه  $\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$  باشد ( $|\vec{a}|$  اندازه بردار  $\vec{a}$  و  $\hat{a}$  بردار یکه در جهت  $\vec{a}$  می‌باشد) داریم:

$$H = \frac{ch}{\lambda} (a_x I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{ch}{\lambda} (a_x I + |\vec{a}| \hat{a} \cdot \vec{\sigma})$$

از نکته (۲) نشان می‌دهیم ویژه مقادیر  $\sigma \cdot \hat{a}$ ،  $\lambda = \pm 1$  می‌باشند. فرض کنید  $\lambda$  ویژه مقدار  $\sigma \cdot \hat{a}$  می‌باشد، آنگاه داریم:

$$\sigma \cdot \hat{a} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \Rightarrow (\sigma \cdot \hat{a})^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle = \lambda^2 |\psi\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ یا } \lambda = -1$$

$$\text{tr}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = 0$$

اما دقت کنید که چون بررسی هر ماتریس پاولی  $\text{tr}(\sigma_i) = 0$  است. آنگاه:

از رابطه بالا و نکته زیر نتیجه می‌شود که هم  $\lambda = 1$  و هم  $\lambda = -1$  ویژه مقادیر  $\sigma \cdot \hat{n}$  می‌باشند.

نکته (۳): دقت کنید که اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  با ویژه مقادیر  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  باشد آنگاه:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \Rightarrow \text{tr}(\sigma \cdot \lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

حال فرض کنید  $|\psi\rangle$  ویژه بردار  $\hat{n}$  باشد. آنگاه طبق نکات بالا داریم:

$$\hat{H} |\psi\rangle = \frac{ch}{\lambda} (a_x I + |\vec{a}| \hat{a} \cdot \vec{\sigma}) |\psi\rangle = \frac{ch}{\lambda} (a_x \pm |\vec{a}|) |\psi\rangle$$

پس:

$$E_{1,2} = \frac{ch}{\lambda} (a_x \pm |\vec{a}|) \Rightarrow |E_1 - E_2| = \frac{2ch}{\lambda} |\vec{a}| = \frac{hc}{\lambda_e}$$

$$\Rightarrow \lambda_e = \frac{\lambda}{2|\vec{a}|} = \frac{\lambda}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

که  $\lambda_e$  طول موج گسیل الکترومغناطیسی است.

نکته (۴): همواره به خاطر بسپارید که ویژه مقادیر  $\sigma \cdot \hat{n}$ ،  $\lambda = \pm 1$  هستند. (برای  $\hat{n}$  دلخواه)

روش دوم (حل تستی): کافی است قرار دهیم  $a_x = a_y = a_z = 0$ . آنگاه به ازای  $a_z = 1$  هامیلتونی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\hat{H} = \frac{ch}{\lambda} \sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{ch}{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{ch}{\lambda} \end{pmatrix}$$

پس اختلاف دو ویژه مقدار  $\hat{H}$  در این حالت  $\frac{2ch}{\lambda}$  خواهد بود و در نتیجه  $\lambda_e = \frac{\lambda}{2}$  می‌شود. تنها گزینه‌ای که در شرایط بالا صدق می‌کند گزینه (۱) می‌باشد.

۲- گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که حالت مقید بدین معنی است که مقدار تابع موج به ازای  $|x| \rightarrow \infty$  به صفر میل کند. به عبارتی دیگر:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) \rightarrow 0$$

به ازای  $x \geq 0$  معادله شرودینگر به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left( \frac{2\delta(x-a)}{a} - k^2 \right) \psi(x) = 0 \quad ; \quad x \geq 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi$$

در نوشتن رابطه بالا از معادله شرودینگر مستقل از زمان مقابل استفاده کردیم:



همچنین  $k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$  می‌باشد. دقت کنید با توجه به تعریف  $k^2$ ، از معادله (۱) برای  $x > a$  نتیجه می‌شود که حالات مقید متناظر با  $E < 0$  هستند (برای  $E > 0$  پاسخ‌ها نوسانی‌اند). حال پاسخ‌های معادله (۱) را برای دو بازه  $0 < x < a$  و  $x > a$  جداگانه به دست می‌آوریم. در این بازه‌ها به راحتی دیده می‌شود که:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx} + Be^{-kx} = \psi_1(x) & , 0 < x < a \\ Ce^{-kx} = \psi_2(x) & , x > a \end{cases}$$

در معادله بالا  $k > 0$  فرض شده است.

با توجه به اینکه برای  $x < 0$ ، پتانسیل بی‌نهایت است پس در  $x = 0$  تابع موج می‌بایست صفر شود.

$$\psi(x=0) \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

همچنین شرط دیگر پیوستگی تابع موج در  $x = a$  می‌باشد. پس داریم:

$$Ae^{ka} - Ae^{-ka} = Ce^{-ka} \quad (*)$$

که در رابطه بالا از  $A = -B$  استفاده کردیم. حال برای به دست آوردن شرط دیگر از معادله (۱) در بازه  $[a-\epsilon, a+\epsilon]$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \psi(x) \frac{\delta(x-a)}{a} dx - k^2 \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \psi(x) dx = 0 \quad (2)$$

با میل دادن  $\epsilon$  به سمت صفر با توجه به پیوستگی  $\psi(x)$  در  $x = a$  جمله سوم در (۲) صفر می‌شود و دو جمله اول به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\psi_2'(a+\epsilon) - \psi_1'(a-\epsilon)) + \frac{2\psi_2(a)}{a} = 0 \quad (3)$$

$$\psi_2'(a) = -kCe^{-ka} \quad (4)$$

$$\psi_1'(a) = kAe^{ka} + kAe^{-ka}$$

پس از (۳) و (۴) داریم:

$$-kCe^{-ka} - kAe^{ka} - kAe^{-ka} + \frac{2Ce^{-ka}}{a} = 0 \quad (5)$$

با قرار دادن (\*) در معادله (۵) خواهیم داشت.

$$-kAe^{+ka} + kAe^{-ka} - kAe^{+ka} - kAe^{-ka} + \frac{2}{a}(Ae^{+ka} - Ae^{-ka}) = 0 \quad (6)$$

حال دقت کنید که:

$$-kAe^{ka} + kAe^{-ka} = -2kA \sinh(ka) \quad (6)$$

$$-kAe^{ka} - kAe^{-ka} = -2kA \cosh(ka) \quad (6)$$

$$Ae^{ka} - Ae^{-ka} = 2A \sinh ka \quad (6)$$

$$\Rightarrow -2kA \sinh(ka) - 2kA \cosh(ka) + \frac{4A}{a} \sinh ka = 0 \quad (7)$$

با تقسیم طرفین معادله بالا بر  $2A \sinh ka$  خواهیم داشت:

$$ka \coth(ka) = 2 - ka \Rightarrow \coth ka = \frac{2}{ka} = \frac{2}{ka} - 1 \Rightarrow \tanh ka = \left(\frac{2}{ka} - 1\right)^{-1}$$

که همان گزینه (۴) است.

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$$

۳- گزینه «۱» ابتدا دقت کنید که اگر  $|x\rangle$  و  $|x'\rangle$  دو بردار پایه فضای مکان باشند همواره داریم:

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle x' | \hat{0} | x'' \rangle &= \left( \frac{d}{dx'} + \frac{d^2}{dx'^2} \right) \langle x' | x'' \rangle \\ &= \left( \frac{d}{dx'} + \frac{d^2}{dx'^2} \right) \delta(x' - x'') \end{aligned} \quad (1)$$

همان‌طور که از رابطه (۱) دیده می‌شود با مشتق مرتبه اول و دوم تابع دلتای دیراک مواجه هستیم.

نکته: مشتق مرتبه  $n$  - ام تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int f(x) \delta^n(x+a) dx = - \int \frac{df}{dx} \delta^{n-1}(x+a) dx \quad (2)$$

حال در رابطه (۲) قرار می‌دهیم  $f(x) = (x+a)g(x+a)$  (a مستقل از x است).



پس برای  $n=1$  خواهیم داشت:

$$\int (x+a)g(x+a)\delta'(x+a)dx = -\int \delta(x+a)\frac{d}{dx}((x+a)g(x+a))dx$$

$$= -\int \delta(x+a)(g(x+a) + (x+a)g'(x+a))dx = -\int \delta(x+a)g(x+a)dx \quad (3)$$

در رابطه بالا از این موضوع که  $\int \delta(x+a)(x+a)g'(x+a)dx = 0$  استفاده کردیم.

(در حالت کلی همواره داریم:  $\int \delta(x+a)f(x)dx = f(-a)$ ) از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$(x+a)\delta'(x+a) = -\delta(x+a) \Rightarrow \delta'(x+a) = -\frac{\delta(x+a)}{x+a}$$

چرا که  $g(x)$  دلخواه است. مشابهاً برای مشتق مرتبه دوم تابع دلتای دیراک داریم:

$$f(x) = (x+a)^r g(x+a)$$

$$\Rightarrow \int (x+a)^r g(x+a)\delta^{(r)}(x+a)dx$$

$$= -\int \delta'(x+a)\frac{d}{dx}((x+a)^r g(x+a))dx \quad (\text{با استفاده از تعریف})$$

$$= \int \delta(x+a)\frac{d^r}{dx^r}((x+a)^r g(x+a))dx \quad (\text{با استفاده از تعریف})$$

$$= \int \delta(x+a)(r g(x+a) + r(r-1)g'(x+a) + (x+a)^r g''(x+a))dx$$

مشابهاً دو جمله آخر در انتگرال‌گیری بالا حاصل صفر می‌دهند و داریم:

$$\int (x+a)^r g(x+a)\delta^{(r)}(x+a)dx = r \int \delta(x+a)g(x+a)dx$$

$$\delta^{(r)}(x+a) = \frac{r!}{(x+a)^r} \delta(x+a)$$

چون  $g(x+a)$  دلخواه است پس:

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n} n! \delta(x)$$

نکته: در حالت کلی داریم:

حال کافی است در روابط بالا به جای  $x, x', a$  و به جای  $-x'', a$  قرار دهیم. آنگاه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d}{dx'} + \frac{d^r}{dx'^r}\right)\delta(x'-x'') = \left(\frac{-1}{x'-x''} + \frac{r!}{(x'-x'')^r}\right)\delta(x'-x'')$$

که همان گزینه (۱) می‌باشد.

۴- گزینه «۲» فرض کنیم که ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار بزرگ‌تر انرژی  $E_>$ ،  $|\psi_>\rangle$  باشد.

(مشابهاً  $|\psi_<\rangle$  را برای ویژه مقدار کوچک‌تر انرژی  $E_<$  به کار می‌بریم.)

آنگاه چنانچه در پایه  $\{|\psi_>\rangle, |\psi_<\rangle\}$ ،  $|+\rangle$  را بسط دهیم داریم:

$$|+\rangle = \alpha_> |\psi_>\rangle + \alpha_< |\psi_<\rangle \quad (1)$$

تحول زمانی  $|+\rangle$  با عمل دادن  $e^{-iHt}$  به طرفین رابطه (۱) به دست می‌آید. پس چنانچه  $|\psi, t\rangle$  نشان‌گر تحول یافته حالت اولیه باشد داریم:

$$|\psi, t\rangle = \alpha_> e^{-iE_>t} |\psi_>\rangle + \alpha_< e^{-iE_<t} |\psi_<\rangle$$

$$|\langle \psi_> | \psi, t \rangle|^2 = |\alpha_>|^2 = |\langle \psi_> | + \rangle|^2$$

احتمال یافتن  $|\psi_>\rangle$  بعد از اندازه‌گیری انرژی در زمان  $t$  به صورت مقابل است:

پس کافی است  $|\psi_>\rangle$  را محاسبه کرده و در  $|+\rangle$  ضرب داخلی کنیم. فرض کنید به صورت برداری  $|+\rangle, |-\rangle$  به صورت زیر باشند:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{\delta} \\ i\sqrt{\delta} & -3 \end{pmatrix}$$

آنگاه با تعریف بالا  $\hat{H}$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

می‌دانیم که ویژه مقادیر هر ماتریس  $A$  به صورت مقابل به دست می‌آیند:

که در رابطه بالا I ماتریس واحد می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -i\sqrt{\Delta} \\ i\sqrt{\Delta} & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-3-\lambda) - \Delta = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ و } -4$$

پس ویژه مقدار بزرگ‌تر انرژی  $E_> = 2\hbar\omega$  می‌باشد؛ بنابراین کافی است حالت بهنجار متناظر با این ویژه مقدار را پیدا کنیم.

$$(A - \lambda I)|\psi\rangle = 0$$

برای یافتن ویژه مقدار متناظر با  $\lambda$  برای ماتریس A معادله مقابل را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -i\sqrt{\Delta} \\ i\sqrt{\Delta} & -3-(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و مؤلفه‌های  $|\psi\rangle$  (ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار بزرگ‌تر انرژی) را در شرایط بهنجار می‌یابیم. پس:

$$\Rightarrow -a - i\sqrt{\Delta}b = 0 \Rightarrow -i\sqrt{\Delta}b = a$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -i\sqrt{\Delta} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

دقت کنید در معادله بالا شکل در نظر گرفته شده برای  $|\psi\rangle$ ،  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  می‌باشد. بنابراین:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \Rightarrow |b|^2 (\Delta + 1) = 1 \Rightarrow |b|^2 = \frac{1}{\Delta + 1}$$

در  $(*)$  ضریب بهنجارش می‌باشد. برای محاسبه آن داریم:

$$\langle + | \psi \rangle = \Delta |b|^2 = \frac{\Delta}{\Delta + 1}$$

از طرفی:

پس گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۵- گزینه «۳» کافی است ابتدا با یک تبدیل مختصات مناسب هامیلتونی مسئله را به صورت غیر جفت شده بنویسیم. (تعریف می‌کنیم  $\frac{1}{2}m\omega^2 \equiv \alpha$ )

$$V(x, y) = \alpha(x^2 + y^2 + xy)$$

قسمت پتانسیل هامیلتونی را در نظر می‌گیریم:

به دنبال دورانی هستیم که در مختصات جدید دوران یافته پتانسیل بالا از حالت جفت شده خارج شود. از تقارن پیداست که این دوران یک دوران با

زاویه  $\frac{\pi}{4}$  یا  $45^\circ$  خواهد بود. (چون هیچ تفاوتی به لحاظ ضریب بین X و Y نیست پس تقارن داریم).

اما به لحاظ آموزشی مناسب است که به صورت ریاضی این زاویه را پیدا کنیم.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x' - \sin \theta y' \\ \sin \theta x' + \cos \theta y' \end{pmatrix}$$

فرض کنیم این زاویه  $\theta$  باشد. داریم:

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + xy = (\cos \theta x' - \sin \theta y')^2 + (\sin \theta x' + \cos \theta y')^2 + (\cos \theta x' - \sin \theta y')(\sin \theta x' + \cos \theta y') \Rightarrow x'^2 + y'^2 + xy$$

$$= x'^2 + y'^2 + \cos 2\theta x'x' - \sin 2\theta x'y' + \cos 2\theta x'y' + \sin 2\theta y'y' = (1 + \frac{\sin 2\theta}{2})x'^2 + (1 - \frac{\sin 2\theta}{2})y'^2 + \cos 2\theta x'y'$$

$$\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

برای اینکه در مختصات جدید، جفتی‌گی نداشته باشیم ضریب  $x'y'$  باید صفر باشد. پس:

$$V(x', y') = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2$$

پس در مختصات جدید پتانسیل به صورت مقابل در می‌آید: ( $\theta = \frac{\pi}{4}$  را انتخاب می‌کنیم).

$$\frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} = \frac{P_{x'}^2 + P_{y'}^2}{2m}$$

دقت کنید که در مختصات جدید همواره رابطه مقابل برقرار است:

این موضوع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

ابتدا دقت کنید که:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x + \sin \theta y \\ -\sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x'} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x'} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y'}$$

و مشابهاً داریم:

پس:

$$\begin{cases} P_x = \cos \theta P_{x'} - \sin \theta P_{y'} \\ P_y = \sin \theta P_{x'} + \cos \theta P_{y'} \end{cases} \Rightarrow P_x^2 + P_y^2 = P_{x'}^2 + P_{y'}^2$$



دقت کنید در به دست آوردن رابطه بالا از  $[P_y', P_x'] = 0$  استفاده کردیم. پس هامیلتونی در مختصات جدید به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \frac{P_x'^2 + P_y'^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left( \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} \right) = \frac{P_x'^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x'^2 x'^2 + \frac{P_y'^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_y'^2 y'^2$$

$$\omega_{x'} = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega, \quad \omega_{y'} = \sqrt{\frac{1}{2}} \omega \quad \text{که داریم:}$$

از طرفی می‌دانیم که انرژی هر نوسانگر مثل  $H = \frac{P_x'^2}{2m} + \frac{m \omega_x'^2 x'^2}{2}$  به صورت  $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$  داده می‌شود. پس انرژی کل سیستم به صورت زیر

$$E_{n_x, n_y} = \hbar \omega_x (n_x + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_y (n_y + \frac{1}{2}) = \hbar \omega \left( \sqrt{\frac{3}{2}} (n_x + \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{1}{2}} (n_y + \frac{1}{2}) \right) \quad \text{خواهد بود:}$$

با توجه به انرژی بالا اولین تراز برانگیخته به ازای  $n_y = 1$  و  $n_x = 0$  رخ خواهد داد.

$$E_1 = \hbar \omega \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \hbar \omega \left( \sqrt{\frac{3}{8}} + \frac{3}{\sqrt{8}} \right) = \sqrt{\frac{3}{8}} (1 + \sqrt{3}) \hbar \omega \quad \text{پس خواهیم داشت:}$$

۶- گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که چون ذره مقید است پس انرژی آن منفی است. ( $E < 0$ ) همچنین چون ذره مقید است (به عبارتی تابع ذره در بی‌نهایت صفر است.) می‌توان مختصات ذره را محدود به فاصله‌ای مثل  $a$  در نظر گرفت.

$$0 \leq |x| \leq a \quad (1)$$

در حالت کلی از تقریب WKB، انرژی ذره در یک بعد را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\oint p(x) dx = n\pi\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

$$\frac{p^2}{2m} = E - V(x) \Rightarrow p = \pm \sqrt{2m(E - V(x))} \quad \text{که در رابطه بالا:}$$

در اینجا  $V(x) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|}$  می‌باشد. برای تخمین  $a$  در رابطه (۱) کافی است قرار دهیم  $E = V(a)$  (جایی که تکانه ذره به صورت کلاسیکی صفر می‌شود).

$$E = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow a = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 E_0}; \quad E_0 < 0 \quad (3)$$

دقت کنید که در رابطه (۲) باید روی یک مسیر بسته که ذره در آن رفت و برگشت می‌کند (برای تکانه ذره هم جواب مثبت و هم جواب منفی داریم.) انتگرال‌گیری نماییم. به عبارتی اگر ذره محدود به فضای  $-a \leq x \leq a$  باشد، آنگاه هم روی مسیر از  $-a$  به  $a$  (تکانه با علامت مثبت) و هم از مسیر  $a$  به  $-a$  (تکانه با علامت منفی) باید انتگرال بگیریم. پس می‌نویسیم:

$$\oint p(x) dx = 2 \int_{-a}^a \sqrt{2m(E - V(x))} dx$$

بنابراین داریم:

$$2 \int_{-a}^a \sqrt{2m \left( E_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|} \right)} dx = n\pi\hbar \Rightarrow 2 \int_0^a \sqrt{2m \left( E_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x} \right)} dx = n\pi\hbar \Rightarrow 2 \sqrt{-2mE_0} \int_0^a \sqrt{\frac{a}{x} - 1} dx = n\pi\hbar$$

حال با استفاده از تغییر متغیر  $x = \frac{a}{r}$  داریم:

$$2 \sqrt{-2mE_0} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx = n\pi\hbar \quad (4)$$

با استفاده از راهنمایی سؤال می‌دانیم که:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۳ و ۴ خواهیم داشت:



$$\gamma a \sqrt{-\gamma m E_0} = \hbar \Rightarrow \frac{-\gamma e^2 \sqrt{\gamma m}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{-E_0}} = \hbar \Rightarrow E_0 = \frac{-\lambda m}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2$$

۷- گزینه «۳»

روش تستی: در حالت کلی هرگاه  $[T(\vec{\ell}), H] = 0$  که در آن  $T(\vec{\ell}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\ell} \cdot \vec{P}}$  عملگر انتقال می‌باشد، آنگاه می‌توان گفت که سیستم ما تحت انتقال ناوردا است. پس باید انتشارگر به  $X' - X''$  وابسته باشد و تنها گزینه ۳ درست است.  
روش تشریحی: برای بیان دقیق‌تر روش بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:  
یک مختصات ثابت از فضا مثل  $\vec{y}_0$  را در نظر بگیرید. به ازای هر  $\vec{x}$  انتشارگر زیر را می‌نویسیم.

$$K(\vec{x}, \vec{y}_0; t - t_0) = \langle \vec{x} | e^{-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}} | \vec{y}_0 \rangle$$

حال در رابطه بالا  $\psi = e^{+\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}}$  را وارد می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$K(\vec{x}, \vec{y}_0; t - t_0) = \langle \vec{x} | e^{-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}} | \vec{y}_0 \rangle$$

$$= \langle \vec{x} | e^{-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}} e^{+\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} | \vec{y}_0 \rangle \quad (*)$$

از طرفی چون  $[T(\pm \vec{y}_0), H] = 0$ ، با استفاده از نکته زیر می‌توان نتیجه گرفت که:

$$[T(\vec{y}_0), e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}}] = 0$$

نکته: در حالت کلی اگر  $[A, B] = 0$ ، آنگاه برای هر تابع دلخواه مثل  $f(x)$  همواره داریم:

$$[f(A), B] = 0$$

بنابراین (\*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K(\vec{x}, \vec{y}_0; t - t_0) = \langle \vec{x} | e^{+\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} e^{-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}} e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} | \vec{y}_0 \rangle$$

از طرفی با توجه به خاصیت عملگر انتقال می‌دانیم که:

$$e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} | \vec{y}_0 \rangle = | \vec{y}_0 - \vec{y}_0 \rangle = | 0 \rangle$$

$$\langle \vec{x} | e^{+\frac{i\vec{p} \cdot \vec{y}_0}{\hbar}} = \langle \vec{x} - \vec{y}_0 |$$

نکته: در حالت کلی همواره داریم:

$$e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{\ell}}{\hbar}} | \vec{x} \rangle = | \vec{x} - \vec{\ell} \rangle$$

پس خواهیم داشت:

$$K(\vec{x}, \vec{y}_0; t - t_0) = \langle \vec{x} - \vec{y}_0 | e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} | 0 \rangle$$

$$= K(\vec{x} - \vec{y}_0, 0; t - t_0) \equiv K(\vec{x} - \vec{y}_0; t - t_0)$$

چون بردار  $\vec{y}_0$  دلخواه بود می‌توان در حالت کلی آن را با  $\vec{x}'$  تعریف کرد و داریم:

$$K(\vec{x}, \vec{x}'; t - t_0) = K(\vec{x} - \vec{x}'; t - t_0)$$

که همان گزینه (۳) است.

۸- گزینه «۴» توجه: پاسخ اعلام شده توسط سازمان سنجش گزینه (۴) است اما هم گزینه (۴) و هم گزینه (۲) پاسخ صحیح مسئله هستند.

می‌دانیم که در حالت کلی عملگر دوران در سیستمی با تکانه زاویه‌ای کل  $\vec{J}$  حول محور با بردار  $\hat{n}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$D(\hat{n}, \phi) = \exp(-i\phi \frac{\hat{n} \cdot \vec{J}}{\hbar})$$

$$D(\hat{n}, \phi) = \exp(-i\phi \frac{\hat{n} \cdot \vec{S}}{\hbar})$$

در مسئله ما:  $\vec{J} = \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  می‌باشد. بنابراین:

حال به نکات زیر توجه می‌کنیم:

$$\exp(-i\phi \frac{\hat{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}) = \cos \frac{\phi}{2} I - i \sin \frac{\phi}{2} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})$$

نکته (۱): در حالت کلی داریم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 = 1$$

نکته (۲): چنانچه  $\hat{n}$  برداری یکه باشد همواره داریم:

برای نشان دادن نکته (۱) از نکته (۲) استفاده می‌کنیم:

ابتدا داریم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : ((\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2)^n = 1 = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^{2n}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^{2n} = 1 \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^{2n+1} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$e^{i\phi(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\phi(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}))^m}{m!}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\phi \hat{n} \cdot \vec{\sigma})^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (\phi \hat{n} \cdot \vec{\sigma})^{2q+1}}{(2q+1)!} = I \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \phi^{2p}}{(2p)!} + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \phi^{2q+1}}{(2q+1)!} = I \cos \phi + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \phi$$

با جایگزینی  $\phi \rightarrow -\frac{\phi}{2}$  نکته (۱) اثبات می‌شود.

قبل از بررسی گزینه (۴)، ابتدا گزینه (۲) را بررسی می‌کنیم. بردار  $\vec{a}$  داده شده در مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a} = \sin \beta (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) = \sin \beta \hat{a}$$

$$\cos \beta + i \vec{\sigma} \cdot \vec{a} = \cos \beta + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta = \exp(i\beta \hat{a} \cdot \vec{\sigma}) = \exp(i\beta \frac{\hat{a} \cdot \vec{S}}{\hbar})$$

که  $\hat{a}$  بردار یکه در جهت  $\vec{a}$  می‌باشد. پس داریم:

که نشان‌دهنده دورانی حول محور  $\hat{a}$  به اندازه زاویه  $2\beta$  می‌باشد. به وضوح دیده می‌شود که گزینه (۳) نمی‌تواند درست باشد چرا که:

$$\sin \beta - i \vec{\sigma} \cdot \vec{a} = \sin \beta - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta$$

$$\frac{\cos \beta + i \vec{\sigma} \cdot \vec{a}}{\cos \beta - i \vec{\sigma} \cdot \vec{a}} = \frac{\cos \beta + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta}{\cos \beta - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta}$$

و عبارت بالا را نمی‌توان به فرم عملگر دوران نوشت. حال به بررسی گزینه (۴) می‌پردازیم:

از نکته (۱) داریم:

$$\frac{\cos \beta + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta}{\cos \beta - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \sin \beta} = \frac{e^{i\beta \vec{\sigma} \cdot \hat{a}}}{e^{-i\beta \vec{\sigma} \cdot \hat{a}}} = e^{2i\beta \vec{\sigma} \cdot \hat{a}} = e^{i\beta \frac{(\vec{S} \cdot \hat{a})}{\hbar}}$$

که بیانگر دورانی به اندازه  $2\beta$  حول محور  $\hat{a}$  می‌باشد. دقت کنید که در اینجا:

$$\frac{1}{e^{-i\beta \vec{\sigma} \cdot \hat{a}}} \equiv e^{i\beta \vec{\sigma} \cdot \hat{a}}$$

به وضوح گزینه (۱) نیز صحیح نیست چرا که در مخرج کسر عبارت گزینه (۳) ظاهر شده است که نمی‌توان آن را به صورت ماتریس دوران نوشت.

۹- گزینه «۲» همان‌طور که در سؤال قبل بیان شد عملگر دوران حول محور  $\hat{n}$  با زاویه  $\phi$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$D^{(j=\frac{1}{2})}(\hat{n}, \phi) = \exp(-\frac{i\phi(\hat{n} \cdot \vec{S})}{\hbar}) = \exp(-\frac{i\phi}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}))$$

که در رابطه بالا از این موضوع استفاده کرده‌ایم که  $\vec{J} = \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ . حال در رابطه بالا قرار می‌دهیم  $\phi = \frac{\pi}{2}$  و داریم:

$$\exp\left(-\frac{i\pi}{\epsilon}(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\right) = \cos\frac{\pi}{\epsilon} - i \sin\frac{\pi}{\epsilon}(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) \quad (1)$$

که در رابطه (۱) از نتایج سوال قبل استفاده کردیم. بنابراین با قراردادن  $\hat{n} = \frac{i}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{j}$  در رابطه (۱) داریم:

$$\exp\left(-\frac{i\pi}{\epsilon}(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ +\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

حال کافی است رابطه ماتریسی (۳) را بر  $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (ویژه بردار ماتریس پاولی  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ) اثر دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3|+\rangle + (\sqrt{2} - i)|-\rangle)$$

که بردار فوق را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ دقت کنید که در رابطه بالا } |-\rangle \text{ می‌باشد.}$$

۱۰- گزینه «۱» ابتدا لازم است که ویژه حالات سیستم را که متناظر با  $S_z = 1$  هستند بیابیم. در حالت کلی می‌دانیم که اگر  $S_1, S_2$  اسپین‌های ذرات سیستم باشند، مقادیر ممکن برای اسپین کل سیستم به صورت زیر است:

$$|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$$

بنابراین مقادیر ممکن برای اسپین سیستم موردنظر ما به صورت زیر است:  $0 \leq S \leq 1+1 \Rightarrow S = 2, S = 1, S = 0$

حال برای به دست آوردن ویژه حالات سیستم از حالت  $S = 2$  شروع می‌کنیم. دقت کنید که مقادیر ممکن برای  $m_S$  (ویژه مقادیر  $S_z$ ) در حالتی که اسپین سیستم  $S$  باشد با  $S = 2, m_S = 2, 1, 0, -1, -2$  داده می‌شوند. حالت  $|S = 2, m_S = 2\rangle$  متناظر با حالتی است که اسپین هر دو ذره در راستای محور  $Z$  و برابر با ۱ باشد. پس داریم:

$$|2, 2\rangle = |S_1 = 1, m_{S_1} = 1\rangle \otimes |S_2 = 1, m_{S_2} = 1\rangle \equiv |1, 1; 1, 1\rangle \quad (1)$$

دقت کنید که  $|2, 2\rangle$  حالت کل سیستم است. حال برای به دست آوردن  $|2, 1\rangle$  عملگر پایین برنده  $J_- = J_{1-} \otimes I_2 + I_1 \otimes J_{2-}$  را بر طرفین رابطه (۱) اثر می‌دهیم. دقت کنید که  $J_{1-}$  صرفاً بر روی ذره (۱) و  $J_{2-}$  بر روی ذره (۲) اثر می‌کند.

می‌دانیم که اگر  $|j, m\rangle$  یک ویژه کت متناظر با ویژه کت  $J^2$  و  $J_z$  باشد داریم:

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

پس:

$$J_- |2, 2\rangle = \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)} |2, 1\rangle = 2 |2, 1\rangle \quad (2)$$

همچنین با اثر دادن  $I_1 \otimes J_{2-} + J_{1-} \otimes I_2$  بر  $|1, 1; 1, 1\rangle$  داریم:

$$(J_{1-} \otimes I_2 + I_1 \otimes J_{2-}) |1, 1; 1, 1\rangle = \sqrt{2}(|1, 1; 1, 0\rangle + |1, 1; 0, 1\rangle) \quad (3)$$

با برابر قراردادن رابطه (۲) و (۳) داریم:

$$|2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1; 1, 0\rangle + |1, 1; 0, 1\rangle) \quad (4)$$





سایر ویژه حالت‌های مربوط به  $S=2$  متناظر با  $S_z = 0, -1, -2$  برای سیستم هستند که چون مطلوب ما نیستند آن‌ها را به دست نمی‌آوریم. ویژه حالت بعد که دارای  $S_z = 1$  می‌باشد مربوط به حالتی است که  $S=1$  باشد. دقت کنید که  $|S=1, m_s=1\rangle$  باید بر  $|S=2, m_s=1\rangle$  عمود باشد و به راحتی از (۴) دیده می‌شود که:

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1;1,0\rangle - |1,1;0,1\rangle) \quad (5)$$

دقت کنید نیازی به به دست آوردن سایر ویژه حالات متناظر با  $S=1$  نیست، چرا که  $S_z \neq 1$  دارند. همچنین نیازی به به دست آوردن ویژه حالت  $S=0$  نیز نیست، چرا که در این حالت  $S_z = 0$  می‌باشد.

توجه: هر ترکیب خطی  $|2,1\rangle$  و  $|1,1\rangle$  که در روابط (۴) و (۵) داده شده‌اند متناظر با حالتی با  $S_z = 1$  است. برای دانستن احتمال بودن سیستم در  $|2,1\rangle$  یا  $|1,1\rangle$  نیاز به دانستن حالت سیستم است که در سوال داده نشده است. مثلاً  $\frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle$  یا  $\sqrt{\frac{2}{3}}|2,1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle$  و ... حالاتی از سیستم هستند که  $S_z = 1$  دارند ولی احتمال بودن آن‌ها در  $|1,1\rangle$  و  $|2,1\rangle$  متفاوت است. دقت کنید که چون لزوماً ذرات سیستم یکسان نیستند پس حالت (۵) می‌تواند به عنوان حالتی از سیستم انتخاب شود. یعنی پادمقارن بودن آن مهم نیست. به نظر می‌رسد سوال فرض کرده است که به صورت ساده یکی از ذرات در  $S_z = 0$  و یکی دیگر در  $S_z = 1$  به سر می‌برد و حالات سیستم به طور خیلی ساده با  $|1,1;1,0\rangle$  یا  $|1,1;0,1\rangle$  داده می‌شوند. با این فرض از رابطه (۴) و (۵) به سادگی داریم:

$$|1,1;0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle - |1,1\rangle) \quad (6)$$

$$|1,1;1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle + |1,1\rangle)$$

در این حالت‌ها به صورت ساده احتمال حضور سیستم در  $S=2$  یا  $S=1$  با  $P_{\pm} = \frac{1}{2}$  داده می‌شود. (مجذور ضرایب  $|2,1\rangle$  و  $|1,1\rangle$  در (۶) پس:

$$\frac{P_+}{P_-} = 1$$

که همان گزینه (۱) است.

۱۱- گزینه «۱» برای حل این سوال کافی است به نکات زیر توجه کنیم:

نکته (۱): عملگر  $\theta$  یا همان وارونی زمان عملگری پادیکانی است. به عبارتی برای  $C$  دلخواه و مختلط و یک حالت  $|\psi\rangle$  داریم:

$$\theta C |\psi\rangle = C^* \theta |\psi\rangle$$

$$\theta |j, m\rangle = (i)^m |j, -m\rangle$$

نکته (۲): در حالت کلی برای  $j$  دلخواه،  $j$  نیمه صحیح یا صحیح، داریم:

که  $j$  تکانه زاویه‌ای کل سیستم است.

$$\pi |\ell, m\rangle = (-1)^{\ell} |\ell, m\rangle$$

نکته (۳): اگر  $\pi$ ، عملگر پاریته باشد برای حالات  $|\ell, m\rangle$ ، هارمونیک‌های کروی، داریم:

حال با در نظر گرفتن سه نکته بالا عملگر  $\theta, \pi$  را بر روی  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$  اثر می‌دهیم.

$$\theta |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}}\rangle + \theta (i |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}}\rangle))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}}\rangle - i \theta |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((+i)^{\frac{3}{2}} |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}}\rangle - i (i)^{\frac{3}{2}} |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}}\rangle - i |\psi_{\ell}^{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}}\rangle)$$

پس دیده می‌شود که  $|\phi_1\rangle$  یک ویژه کت  $\theta$  نیست. در به دست آوردن رابطه بالا در دومین تساوی از نکته ۱ و در سومین تساوی از نکته ۲ استفاده کردیم.

پس یا گزینه (۱) یا گزینه (۴) درست است. حال در همین جا کافی است عملگر  $\theta$  را بر روی  $|\phi_2\rangle$  اثر دهیم.

$$\theta |\phi_2\rangle = \frac{\theta}{\sqrt{2}} (|\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, 2}\rangle - |\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, -2}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((i)^{2 \times 2} |\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, -2}\rangle - (i)^{-2 \times 2} |\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, 2}\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, 2}\rangle - |\psi_{\ell}^{\frac{3}{2}, -2}\rangle)$$

پس دیده می‌شود که  $|\phi_2\rangle$  ویژه حالت عملگر  $\theta$  با ویژه مقدار  $-1$  است. پس در همین جا گزینه (۴) رد شده و گزینه (۱) درست خواهد بود. اما به لحاظ آموزشی بهتر است اثر عملگر  $\pi$  را هم روی  $|\phi_1\rangle$  و  $|\phi_2\rangle$  بررسی کنیم. حال دقت کنید که  $|\psi_\ell^{j,m_j}\rangle$  را می‌توان برحسب ضرایب کلبش گوردون برحسب ضرب تانسوری  $|S, m_s\rangle |S, m_s\rangle$  اسپین سیستم) و  $|\ell, m\rangle$  نوشت. پس به راحتی دیده می‌شود که

$$\pi(|\psi_\ell^{j,m_j}\rangle) = (-1)^\ell |\psi_\ell^{j,m_j}\rangle$$

به راحتی دیده می‌شود که:

$$\pi|\phi_1\rangle = (-1)^2 |\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$$

$$\pi|\phi_2\rangle = (-1)^3 |\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle$$

پس هر دوی  $|\phi_1\rangle$  و  $|\phi_2\rangle$  ویژه حالت  $\pi$  هستند.

### ۱۲- گزینه «۳»

روش اول (تستی و کوتاه): با توجه به اینکه در صورت سوال فرض شده است که  $\lambda > 1$  با توجه به گزینه‌ها، تنها در گزینه (۳)،  $\lambda > 1$  است. در زیر کوچکتر بودن یا بزرگتر بودن ویژه مقادیر را نسبت به ۱ بررسی کرده‌ایم:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-1) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{6} < 3 \Leftrightarrow 6 < 9 \quad \times \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+1) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{6} < 3 \Leftrightarrow 6 < 9 \quad \times \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+1) > 1 \Leftrightarrow 6 > 1 \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-1) < 1 \Leftrightarrow 6 < 25 \quad \times \quad \text{گزینه (۴)}$$

روش دوم (حل تشریحی): در حالت کلی می‌دانیم که به ازای حالت  $|\psi\rangle$ ، انرژی سیستم همواره با رابطه مقابل داده می‌شود:

$$E = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$$

$$E = \int_{-a}^a \psi^*(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi(x) dx$$

با توجه به اینکه در  $|x| < a$  همواره مقدار پتانسیل صفر است. داریم:

حال دقت کنید که چون  $\psi(x)$  تابعی زوج است بنابراین  $\frac{d^2\psi}{dx^2}$  نیز تابعی زوج است. (همواره مشتق تابعی زوج، فرد است و مشتق تابع فرد زوج است. پس

$\frac{d\psi}{dx}$  تابعی فرد و بنابراین  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)$  تابعی زوج است.) بنابراین می‌توان نوشت:

$$E = -\frac{\hbar^2}{m} \int_0^a \psi^*(x) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) dx = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4\lambda^2 a^{2\lambda+1}} \int_0^a (a^\lambda - x^\lambda)(-\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}) dx$$

$$= \frac{\hbar^2}{m} \frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4\lambda a^{2\lambda+1}} \int_0^a (a^\lambda x^{\lambda-2} - x^{2\lambda-2}) dx = \frac{\hbar^2}{m} \frac{(2\lambda+1)(\lambda^2-1)}{4\lambda a^{2\lambda+1}} \left( \frac{a^{2\lambda-1}}{\lambda-1} - \frac{a^{2\lambda-1}}{2\lambda-1} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{m} \frac{(2\lambda+1)(\lambda^2-1)}{4a^{2\lambda}(\lambda-1)(2\lambda-1)} = \frac{\hbar^2(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4a^{2\lambda}m(2\lambda-1)} = \frac{\hbar^2(2\lambda^2+3\lambda+1)}{4a^{2\lambda}m(2\lambda-1)}$$

حال کافی است  $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0$  را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار دهیم تا  $\lambda$  متناظر با کمینه انرژی را بیابیم:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{(4\lambda+3)(2\lambda-1) - 2(2\lambda^2+3\lambda+1)}{(2\lambda-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

پاسخ‌های معادله بالا عبارتند از:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{96}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$$

که چون  $\lambda > 1$  است پس  $\lambda = \frac{1+\sqrt{6}}{2}$  جواب خواهد بود.

۱۳- گزینه «۲» می‌دانیم که احتمال گذار از حالت  $i$  به  $f$  در صورتی که پتانسیل اختلالی  $\hat{V}(t')$  به سیستم اعمال شود به صورت زیر داده می‌شود. (مرتبه

اول تقریب)

$$P_{if}(t) = \left| \frac{-i}{\hbar} \int_0^t \langle \psi_f | \hat{V}(t') | \psi_i \rangle e^{-i\omega_{fi}t'} dt' \right|^2 \quad (1)$$

$\hat{V}(t) = \hat{v} e^{i\omega t} + \hat{v}^\dagger e^{-i\omega t}$  می‌باشد. حال فرض کنید در حالت خاص پتانسیل هارمونیک مقابل به سیستم اعمال شود:  $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$

که  $\hat{V}$  عملگری مستقل از زمان است. با قرار دادن پتانسیل بالا در رابطه (۱) داریم:

$$P_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | \hat{v} | \psi_i \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'} dt' + \langle \psi_f | \hat{v}^\dagger | \psi_i \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} dt' \right|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | \hat{v} | \psi_i \rangle \right|^2 \left| \frac{e^{i(\omega_{fi}+\omega)t} - 1}{\omega_{fi} + \omega} \right|^2 + \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | \hat{v}^\dagger | \psi_i \rangle \right|^2 \times \left| \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1}{\omega_{fi} - \omega} \right|^2$$

دقت کنید که در به دست آوردن رابطه بالا از ضرب جملات اول و دوم در یکدیگر صرف نظر شده است. چرا که این جملات مرتبه دوم می باشند و منجر به

تحریک گذاری مانا نمی شوند. با استفاده از رابطه  $\left| e^{i\theta} - 1 \right|^2 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P_{if}(t) = \frac{r}{\hbar^2} \left( \left| \langle \psi_f | \hat{v} | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{fi} + \omega)t}{2}}{(\omega_{fi} + \omega)^2} + \left| \langle \psi_f | \hat{v}^\dagger | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{fi} - \omega)t}{2}}{(\omega_{fi} - \omega)^2} \right)$$

با توجه به شکل پتانسیل اختلالی در بازه زمانی  $0 \leq t \leq T$  داریم:

$$\hat{V}(t) = e \vec{E}_0 \cdot \hat{r} \sin \omega t = \frac{e \vec{E}_0 \cdot \hat{r}}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{e \vec{E}_0 \cdot \hat{r}}{2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\omega t} + \frac{e \vec{E}_0 \cdot \hat{r}}{2} e^{-\frac{i\pi}{2}} e^{-i\omega t} \Rightarrow \hat{v} = \frac{e \vec{E}_0 \cdot \hat{r}}{2} e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow P_{if}(t) = \frac{r}{\hbar^2} \left( \left| \langle \psi_f | \hat{v} | \psi_i \rangle \right|^2 \left( \frac{\sin^2(\omega + \omega_{fi})t}{(\omega_{fi} + \omega)^2} + \frac{\sin^2(\omega - \omega_{fi})t}{(\omega - \omega_{fi})^2} \right) \right)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{E}_0 \cdot \hat{r} = r(E_x \sin \theta \cos \phi + E_y \sin \theta \sin \phi + E_z \cos \theta) \quad (2)$$

حال می دانیم که:

$$\sin \theta \cos \phi = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1,1} - Y_{1,-1})$$

$$\sin \theta \sin \phi = i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1,1} + Y_{1,-1}) \quad (3)$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0} \Rightarrow \vec{E}_0 \cdot \hat{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r \left( \frac{-E_x + iE_y}{\sqrt{2}} Y_{1,1} + \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}} Y_{1,-1} + E_z Y_{1,0} \right)$$

پس با توجه به (۲) و (۳) می توان برای حالات  $|n_f \ell_f m_f\rangle$  و  $|n_i \ell_i m_i\rangle$  مربوط به اتم هیدروژن نوشت:

$$\langle n_f \ell_f m_f | \vec{E}_0 \cdot \hat{r} | n_i \ell_i m_i \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r^2 R_{n_f \ell_f}^*(r) R_{n_i \ell_i}(r) dr \\ \times \int Y_{\ell_f m_f}^*(\theta, \phi) \left( \frac{-E_x + iE_y}{\sqrt{2}} Y_{1,1} + \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}} Y_{1,-1} + E_z Y_{1,0} \right) Y_{\ell_i m_i}(\theta, \phi) d\Omega \quad (4)$$

از طرفی همواره داریم:

$$Y_{\ell_1 m_1}(\beta, \alpha) Y_{\ell_2 m_2}(\beta, \alpha) = \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{(\ell_1 + 1)(\ell_2 + 1)}{4\pi(\ell + 1)}} \times \langle \ell_1, \ell_2; 0, 0 | \ell, 0 \rangle \langle \ell_1, \ell_2; m_1, m_2 | \ell, m \rangle Y_{\ell m}(\beta, \alpha)$$

که از آن نتیجه می شود:

$$\int_0^\pi d\alpha \int_0^\pi Y_{\ell m}^*(\beta, \alpha) Y_{\ell_1 m_1}(\beta, \alpha) Y_{\ell_2 m_2}(\beta, \alpha) \sin \beta d\beta = \sqrt{\frac{(\ell_1 + 1)(\ell_2 + 1)}{4\pi(\ell + 1)}} \langle \ell_1, \ell_2; 0, 0 | \ell, 0 \rangle \times \langle \ell_1, \ell_2; m_1, m_2 | \ell, m \rangle \quad (5)$$

که  $\langle \ell_1, \ell_2; m_1, m_2 | \ell, 0 \rangle$  ضریب کلیش گوردون بسط  $|\ell, 0\rangle$  بر حسب  $|\ell_1, \ell_2; m_1, m_2\rangle$  می باشد.

با توجه به (۴) و (۵) دیده می شود که در (۴) حاصل انتگرال روی زاویه فضایی به رابطه زیر منجر می شود:

$$\int d\Omega Y_{\ell_f m_f}^* Y_{\ell_i m_i} = \sqrt{\frac{3(\ell_i + 1)}{4\pi(\ell_f + 1)}} \times \langle \ell_i, 1; 0, 0 | \ell_f, 0 \rangle \langle \ell_i, 1; m_i, m_i' | \ell_f, m_f \rangle$$

۱- حال دقت کنید در بسط  $|\ell_f, m_f\rangle$  بر حسب  $|\ell_i, 1; m_i, m_i'\rangle$  همواره باید  $m_f = m_i + m_i'$  باشد (دقت کنید که  $\hat{L}_z = \hat{L}_{z_1} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{L}_{z_2}$  و

بنابراین  $m_f = m_i + m_i'$  نتیجه می شود و از طرفی چون یکی از  $\ell$  ها در  $|\ell_i, 1; m_i, m_i'\rangle$  برابر ۱ است،  $0$  و  $m_i' = \pm 1$  می باشد و داریم:

$$m_f - m_i = \Delta m = \pm 1, 0$$



۲- مقدار  $l_f$  همواره باید بین  $l_i - 1 \leq l_f \leq l_i + 1$  باشد. (بسط  $|j, m\rangle$  بر حسب حالات  $|j_1, m_1\rangle$  و  $|j_2, m_2\rangle$  را به یاد آورید که در آن همواره داشتیم  $j_1 + j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$ ). پس همواره داریم:

$$l_f - l_i = -1, 0, 1$$

اما باید به ضرب داخلی  $\langle l_i, 1; 0, 0 | l_f, 0 \rangle$  هم توجه کنیم. دقت کنیم که چنانچه عملگر پاریته را بر  $|l_i, 1; 0, 0\rangle$  و  $|l_f, 0\rangle$  اعمال کنیم داریم:

$$\pi |l_f, 0\rangle = (-1)^{l_f} |l_f, 0\rangle$$

$$\pi |l_i, 1; 0, 0\rangle = (-1)^{l_i+1} |l_i, 1; 0, 0\rangle$$

اما  $|l_i, 1; 0, 0\rangle$  تنها زمانی در بسط  $|l_f, 0\rangle$  ظاهر می‌شود که هم پاریته با  $|l_f, 0\rangle$  باشد پس داریم:

$$(-1)^{l_i+1} = (-1)^{l_f} \Rightarrow (-1)^{l_f - l_i} = -1$$

$$\Delta m = \pm 1, 0 \quad \text{و} \quad \Delta l = \pm 1$$

بنابراین  $\Delta l = 0$  غیرممکن است و داریم  $\Delta l = \pm 1$  پس خواهیم داشت:

**نکته تستی:** همان‌طور که دیده می‌شود به‌دست آوردن قواعد گزینش برای دوقطبی الکتریکی ( $\vec{E} \cdot \hat{r}$ ) بسیار طولانی است لذا بهتر است  $\Delta l = \pm 1, 0$  و  $\Delta m = \pm 1, 0$  را برای قواعد گزینش دوقطبی الکتریکی به‌عنوان نکته‌ای تستی به خاطر بسپارید.

۱۴- گزینه «۳» کافی است از تعریف سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی در واحد اتم در واحد زاویه فضایی  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$  استفاده کنیم. در حالت کلی

$$dN = Nnt \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (1)$$

چنانچه  $dN$  تعداد ذرات پراکنده شده در زاویه فضایی  $d\Omega$  باشد، داریم:

در رابطه بالا  $N$  تعداد ذرات فرودی بر ماده،  $t$  ضخامت ماده هدف (در اینجا مس) و  $n$  چگالی تعداد اتم‌های ماده هدف در واحد حجم می‌باشد. چنانچه  $t$  تقسیم بر واحد طول بسیار کوچک‌تر از یک باشد می‌توان  $nt$  را با چگالی سطحی اتم‌های ماده هدف تقریب زد. (تعریف می‌کنیم  $\alpha \equiv nt$ ). رابطه (۱) را در

$$\frac{\Delta N}{\Delta T} = \frac{N\alpha}{\Delta T} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2)$$

واحد زمان می‌توان به صورت مقابل نوشت:

حال کافی است اطلاعات مسئله را وارد کنیم:

$$\frac{\Delta N}{\Delta T} = \frac{N\alpha}{s} \quad \text{Proton} \quad \frac{N}{\Delta T} = \frac{5 \times 10^{-9} \text{ A}}{1/6 \times 10^{-19} \text{ C}} = \frac{5 \times 10^{10}}{1/6} \frac{\text{Proton}}{s}$$

دقت کنید که در به‌دست آوردن  $\frac{N}{\Delta T}$ ، میزان جریان پرتون‌های فرودی به صفحه را بر بار هر پروتون تقسیم کرده‌ایم. همچنین:

$$\alpha = \frac{0.2 \times 10^{-6} \text{ kg}}{\text{cm}^2} \times \frac{1 \text{ c}}{1/0.5 \times 10^{-25} \text{ kg}} = \frac{2 \times 10^{18} \text{ atom}}{1/0.5 \text{ cm}^2}$$

دقت کنید در رابطه بالا برای  $\alpha$  از جرم هر اتم مس که با  $m_{\text{Cu}} = 1/0.5 \times 10^{-25} \text{ kg}$  داده می‌شود استفاده شده است. حال می‌بایست  $d\Omega$  را تقریب بزنیم. می‌دانیم که مساحت سطح مقطع متناظر با زاویه فضایی  $\Delta\Omega$  در فاصله  $R$  از یک نقطه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$R^2 \Delta\Omega = \Delta A \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2} = \frac{0.5 \text{ cm}^2}{(20 \text{ cm})^2} = \frac{0.5}{4} \times 10^{-2} \text{ steradian}$$

حال تمام اطلاعات لازم برای محاسبه  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  را داریم:

$$10 \left( \frac{\text{Proton}}{s} \right) = \frac{5 \times 10^{10}}{1/6} \left( \frac{\text{Proton}}{s} \right) \times \frac{d\sigma}{d\Omega} \times \frac{2 \times 10^{18} \text{ atom}}{1/0.5 \text{ cm}^2} \times \frac{0.5}{4} \times 10^{-2} \text{ steradian}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{5 \times 10^{26}}{6/72} \times \frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 1/3 \times 10^{-25} \frac{\text{cm}^2}{\text{atom.steradian}}$$



۲۹- حلقه جریانی به شعاع  $R$  حامل جریان پایایی  $I$  است. پتانسیل اسکالر مغناطیسی در نقطه‌ای بر روی محور حلقه به فاصله  $R$  از مرکز آن کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}I$  (۲)  $(\frac{2-\sqrt{2}}{4})I$  (۳)  $(\frac{\sqrt{2}-1}{2})I$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{4}I$

۳۰- در ماده‌ای با ضریب تراوایی  $\mu = 2\mu_0$  چگالی شار مغناطیسی  $\vec{B} = \frac{B_0}{a} x\hat{k}$  است که در آن  $B_0$  و  $a$  مقادیر ثابتی هستند. چگالی جریان در این ماده کدام است؟

(۱)  $\frac{2B_0}{a\mu_0}\hat{i}$  (۲)  $-\frac{2B_0}{a\mu_0}\hat{j}$  (۳)  $\frac{B_0}{2a\mu_0}\hat{i}$  (۴)  $-\frac{B_0}{2a\mu_0}\hat{j}$

**ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱**

۳۱- در گذار فاز از مایع به بخار در دمای  $100$  درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر کدام کمیت در حین گذار، پیوسته تغییر می‌کند؟

(۱) آنترپی (۲) انرژی داخلی (۳) انرژی آزاد گیبس (۴) حجم ویژه

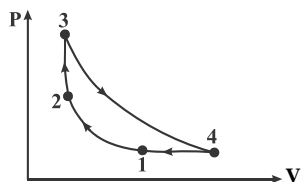
۳۲- ظرفی شامل گاز ایده‌آل، توسط دیواره‌ای به دو قسمت با حجم  $V_1$  و  $V_2$  و دمای  $T_1$  و  $T_2$  و فشار  $P_1$  و  $P_2$ ، تقسیم شده است. اگر دیواره برداشته شود، دمای تعادل این سیستم کدام است؟

(۱)  $(T_1 T_2)^{\frac{1}{2}}$  (۲)  $\frac{T_1 + T_2}{2}$  (۳)  $\frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}}$  (۴)  $\frac{P_1 T_1 + P_2 T_2}{P_1 + P_2}$

۳۳-  $10$  گرم یخ در دمای صفر درجه سلسیوس را به  $30$  گرم آب در دمای  $25$  درجه سلسیوس اضافه می‌کنیم. دمای این سیستم وقتی به تعادل گرمایی برسد، چند سلسیوس است؟ (گرمای نهان ذوب یخ  $L = 80 \frac{\text{cal}}{\text{gr}}$  و ظرفیت گرمایی آب  $C = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr}}$  است.)

(۱)  $-1/25$  (۲) صفر (۳)  $7/5$  (۴)  $12/5$

۳۴- یک گاز ایده‌آل چرخه نشان داده‌شده را طی می‌کند. فرایندهای  $1 \rightarrow 2$  و  $3 \rightarrow 4$  بی‌دررو هستند. فرایند  $2 \rightarrow 3$  هم حجم و فرایند  $1 \rightarrow 4$  هم فشار هستند. اگر  $T_1$  دمای نقطه  $i$  باشد، بیشترین دما کدام است؟



(۱)  $T_1$  (۲)  $T_2$  (۳)  $T_3$  (۴)  $T_4$

۳۵- یک پوسته کروی به شعاع  $a$  در دمای مطلق  $T$  قرار دارد. تابش جسم سیاه درون این پوسته را می‌توان مانند یک گاز ایده‌آل فوتونی در نظر گرفت. انرژی در واحد حجم این گاز فوتونی با توان چهارم دما متناسب است.  $u = \frac{U}{V} = \alpha T^4$ . فشار این گاز فوتونی  $P = \frac{1}{3}u$  است. اگر این پوسته در یک فرایند بی‌دررو انبساط یابد، رابطه بین دما و شعاع پوسته چگونه است؟

(۱)  $T \propto \frac{1}{a}$  (۲)  $T \propto \frac{1}{a^4}$  (۳)  $T \propto \frac{1}{a^3}$  (۴)  $T \propto \frac{1}{a^2}$

۳۶- ذره‌ای دو حالت انرژی با مقادیر  $-E$  و  $2E$  را می‌تواند اشغال کند. احتمال مشاهده این ذره در حالت  $2E$  در دمای  $T$  کدام است؟

(۱)  $\frac{-2E}{1 - e^{\frac{-2E}{k_B T}}}$  (۲)  $\frac{+2E}{(1 + e^{\frac{+2E}{k_B T}})^{-1}}$  (۳)  $\frac{-2E}{1 - e^{\frac{-2E}{k_B T}}}$  (۴)  $\frac{+2E}{(1 + e^{\frac{+2E}{k_B T}})^{-1}}$

۳۷- حالت انرژی یک نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی کوانتومی از اولین حالت برانگیخته به دومین حالت برانگیخته تغییر می‌کند. تغییر آنترپی این سیستم کدام است؟

(۱)  $0$  (۲)  $k_B \ln 6$  (۳)  $k_B \ln 3$  (۴)  $k_B \ln 2$

۳۸- تابع پارش یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی یک‌بعدی با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  و در دمای  $T$  کدام است؟

(۱)  $[\frac{2 \sinh(\frac{h\omega}{2k_B T})}{k_B T}]^{-1}$  (۲)  $[\frac{2 \cosh(\frac{h\omega}{2k_B T})}{k_B T}]^{-1}$  (۳)  $[\frac{2 \sinh(\frac{h\omega}{k_B T})}{k_B T}]^{-1}$  (۴)  $[\frac{2 \cosh(\frac{h\omega}{k_B T})}{k_B T}]^{-1}$



۳۹- گازی متشکل از ذراتی به جرم  $m$  در دمای  $T$  در نظر بگیرید. اگر توزیع سرعت این ذرات از توزیع ماکسول-بولتزمان پیروی کند، مقدار میانگین کمیت  $(\alpha v_x - \beta v_y)^2$  کدام است؟ ( $\alpha$  و  $\beta$  مقادیر ثابتی هستند.  $v_x$  و  $v_y$  مؤلفه‌های سرعت ذرات در راستای محورهای  $x$  و  $y$  هستند.)

(۱)  $(\alpha + \beta)^2 \frac{k_B T}{m}$  (۲)  $(\alpha - \beta)^2 \frac{k_B T}{m}$  (۳)  $(\alpha^2 - \beta^2) \frac{k_B T}{m}$  (۴)  $(\alpha^2 + \beta^2) \frac{k_B T}{m}$

۴۰- انرژی آزاد سیستمی به متغیر ترمودینامیکی  $x$  برابر با  $F = -ax^2 + bx^4$  است که  $a$  و  $b$  ثابت‌های مثبتی هستند. وقتی سیستم در تعادل است، مقدار  $x$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $\pm \left(\frac{a}{3b}\right)^{\frac{1}{4}}$  (۳)  $\pm \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$  (۴)  $\pm \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$

۴۱- انرژی داخلی سیستمی برحسب آنتروپی  $S$  و حجم  $V$  به شکل  $U = \frac{bS^2}{VN}$  می‌باشد ( $b$  و  $N$  ثابت هستند). دمای این سیستم کدام است؟

(۱)  $\frac{2bS^2}{VN}$  (۲)  $\frac{bS^2}{VN}$  (۳)  $\frac{2bS^2}{2VN}$  (۴)  $\frac{2bS^2}{VN}$

۴۲- ذره‌ای تحت پتانسیل  $V(x) = V_0 x$  در ناحیه  $x \geq 0$  حرکت می‌کند. متوسط مکان این ذره در دمای  $T$  کدام است؟ ( $V_0$  یک ثابت است.)

(۱)  $\frac{k_B T}{V_0}$  (۲)  $\frac{3k_B T}{2V_0}$  (۳)  $\frac{2k_B T}{3V_0}$  (۴)  $\frac{(k_B T)}{2V_0}$

۴۳- سیستمی در دمای  $T$  سه حالت با انرژی  $0$  و  $+\epsilon$  و  $-\epsilon$  را می‌تواند اشغال کند. اگر حالت با انرژی  $0$  تبهگن دوگانه داشته باشد و بقیه حالت‌ها

بدون تبهگنی، متوسط انرژی این سیستم کدام است؟ ( $\beta = \frac{1}{k_B T}$ )

(۱)  $-\epsilon \tanh(\beta\epsilon)$  (۲)  $-\epsilon \tanh\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)$  (۳)  $\epsilon \tanh\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)$  (۴)  $\epsilon \tanh(\beta\epsilon)$

۴۴- اگر  $P$  فشار و  $u$  انرژی درونی در واحد حجم برای گاز فرمی باشد، نسبت  $\frac{P}{u}$  در دمای صفر مطلق کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۴۵- در یک سیستم با انرژی درونی  $U$  و در حجم  $V$ ، آنتروپی به شکل  $S = cU^{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}$  داده شده است که  $c$  یک ثابت است. پتانسیل گیبس در این سیستم کدام است؟ ( $P$  و  $T$ ، دما و فشار این سیستم در تعادل هستند.)

(۱) صفر (۲)  $\frac{3PU}{4T}$  (۳)  $\frac{U}{c}$  (۴)  $\frac{US}{4V}$

**ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱**

۳۱- گزینه «۳» به راحتی می‌توان دید که سه گزینه دیگر در هنگام تبخیر تغییر می‌کنند. برای مثال آنتروپی به دلیل اینکه آزادی عمل ذرات بلافاصله پس از تبخیر افزایش پیدا می‌کند و حجم آن‌ها به دلیل تبخیر بیشتر می‌شود افزایش می‌یابد. همچنین برای انرژی داخلی توجه کنید که بخار برای آنکه به مایعی با همان درجه دما تبدیل شود نیاز دارد که گرما از دست دهد و یا مایع باید گرما بگیرد تا پیوند بین مولکول‌های آن شکسته و بخار شود؛ پس حجم ویژه (حجم در واحد جرم)، آنتروپی و انرژی داخلی در هنگام تبخیر افزایش می‌یابند.  
 اما توجه کنید که در نقطه تبخیر همواره  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 0$  و در این نقطه بخار و مایع در حالت تعادل هستند، بنابراین تغییرات انرژی آزاد گیبس صفر است. چنانچه  $T < T_{evap}$  آنگاه بخار به مایع و چنانچه  $T > T_{evap}$  آنگاه مایع به بخار تبدیل می‌شود و سیستم در تعادل نیست.

۳۲- گزینه «۳» به نظر می‌رسد منظور سؤال از گاز ایده‌آل، گاز ایده‌آل از یک نوع از لحاظ تعداد اتم بوده است. چنانچه انرژی درونی گاز با  $U = \alpha nRT$  داده شود بسته به تک اتمی یا دو اتمی بودن یا بالای دو اتمی بودن گاز می‌دانیم که  $\alpha = \frac{3}{2}$  یا  $\alpha = \frac{5}{2}$  و  $\alpha = \frac{7}{2}$  خواهد بود. پس از برداشتن دیواره

انرژی کل همچنان پایسته است و تغییر نمی‌کند پس داریم:  
 $U = \alpha nRT$   
 که  $n$  تعداد مول‌های گاز،  $T$  دما و  $R$  ثابت گازهاست. پس از برداشتن دیواره چنانچه  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب تعداد مول‌های گاز ۱ و ۲ باشد آنگاه  
 $P_1 V_1 = n_1 R T_1 \Rightarrow n_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1}$        $P_2 V_2 = n_2 R T_2 \Rightarrow n_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2}$       همچنین داریم:  $n = n_1 + n_2$

پس:  $n = \frac{P_1 V_1}{R T_1} + \frac{P_2 V_2}{R T_2}$ . از طرفی با توجه به قانون گازهای کامل و رابطه انرژی داریم:  
 $U_1 = \alpha n_1 R T_1 = \alpha P_1 V_1$  ,  $U_2 = \alpha n_2 R T_2 = \alpha P_2 V_2$   
 $U = \alpha (n_1 + n_2) R T = U_1 + U_2 = \alpha P_1 V_1 + \alpha P_2 V_2$   
 پس از پایستگی انرژی داریم:

$$T = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{(n_1 + n_2) R} = \frac{\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}}{\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}}$$

بنابراین داریم:

۳۳- گزینه «۲» ابتدا محاسبه می‌کنیم که چنانچه بخواهیم کل یخ صفر درجه را ذوب کنیم چه مقدار گرما نیاز داریم و همچنین آب برای رسیدن به دمای صفر درجه چه میزان گرما می‌تواند از دست دهد.

با استفاده از گرمای نهان ذوب یخ داریم:

$$Q \text{ یخ} \rightarrow \text{آب} = 80 \times 10 = 800 \text{ cal}$$

$$Q \text{ آب} \rightarrow \text{صفر درجه} = 30 \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} \times 25 = 750 \text{ cal}$$

توجه کنید که ظرفیت گرمایی داده شده در صورت سؤال می‌بایست برحسب  $\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$  باشد.

دیده می‌شود که برای ذوب کامل یخ به  $800 \text{ cal}$  گرما نیاز داریم که بیشتر از مقدار گرمایی است که آب می‌تواند در اختیار ما قرار دهد تا به صفر برسد. پس دمای تعادل صفر درجه سانتی‌گراد خواهد بود.

۳۴- گزینه «۳» توجه کنید که در فرایند بی‌دررو گرمایی مبادله نمی‌شود و بنابراین  $\Delta U = -W$  که کار انجام شده توسط گاز است. از طرفی چون گاز از ۳ به ۴ منبسط می‌شود پس کار انجام شده توسط گاز  $W > 0$  و بنابراین  $\Delta U_{34} < 0$  پس  $T_4 < T_3$  (توجه کنید که در گاز کامل  $\Delta U \propto \Delta T$ ). همچنین مطابق استدلال مشابه برای فرایند ۱ به ۲ برقرار است، با این تفاوت که کار انجام شده توسط گاز منفی است و بنابراین  $\Delta U_{12} > 0$  و  $T_2 > T_1$ . از طرفی در فرایند هم حجم ۲ به ۳ چون  $P_3 > P_2$  و  $V_3 = V_2$  از قانون گازهای کامل ( $PV = nRT$ ) نتیجه می‌شود:  $T_3 > T_2$ . پس نتیجه می‌شود:  $T_3 > T_4 > T_2 > T_1$  پس  $T_3$  از دمای همه نقاط بیشتر است.

۳۵- گزینه «۱» فرض کنید ضریب تناسب در  $T^4 \propto \frac{U}{V}$  برابر با  $C > 0$  باشد و داریم:

$$U = CVT^4 \Rightarrow P = \frac{1}{3}CT^4 \quad (1)$$

از طرفی از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$dU = dQ - PdV$$

در فرایند بی‌دررو  $dQ = 0$  پس داریم:

$$d(VT^4) = \frac{-1}{3}T^4 dV \Rightarrow dVT^4 + 4T^3 V dT = -\frac{1}{3}T^4 dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{1}{3} \frac{dV}{V}$$

و بنابراین از (۱) داریم:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a} \Rightarrow \ln T = -\ln a + \text{const}$$

و چون  $V \propto a^3$  پس داریم:

$$\ln Ta = \text{const} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a}$$

پس داریم:





۳۶- گزینه «۲» مطابق آمار ماکسول بولتزمن چنانچه انرژی‌های در دسترس ذره‌ای  $\epsilon_i$  باشد و  $n_i$  تعداد تبهگنی تراز با انرژی  $\epsilon_i$  باشد آنگاه احتمال اشغال تراز  $\epsilon_j$  در دمای متناهی  $T$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$P_j = \frac{n_j e^{-\frac{\epsilon_j}{k_B T}}}{\sum_i n_i e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}}}$$

$$P_\gamma = \frac{e^{-\frac{\gamma \epsilon}{k_B T}}}{e^{-\frac{\gamma \epsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}} = (1 + e^{\frac{\epsilon}{k_B T}})^{-1}$$

در اینجا  $\epsilon_1 = -\epsilon$  و  $\epsilon_\gamma = \gamma \epsilon$  و  $n_1 = n_\gamma = 1$  پس احتمال آنکه ذره در تراز  $\epsilon_\gamma$  باشد برابر است با:

۳۷- گزینه «۴» آنتروپی یک سیستم برابر با  $S = k_B \ln \Omega$  می‌باشد که  $\Omega$  تعداد حالت‌های در دسترس سیستم است، پس کافی است تعداد حالت‌های در

دسترس نوسانگر را در دو حالت محاسبه کنیم. انرژی نوسانگر هماهنگ کوانتومی سه بعدی با  $(\frac{3}{2})$   $\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = h\omega(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})$  داده می‌شود که  $n_1, n_2, n_3$  اعداد صحیح و غیرمنفی می‌باشند. اولین حالت برانگیخته حالتی است که یکی از  $n_i$  ها برابر ۱ و مابقی صفر باشند. این حالت سه تبهگنی دارد.  $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$  یا  $n_2 = 1, n_1 = n_3 = 0$  ,  $n_3 = 1$  ,  $n_1 = n_2 = 0$

پس آنتروپی نوسانگر در این حالت با  $S_1 = k_B \ln 3$  داده می‌شود. دومین حالت برانگیخته حالتی است که یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

$$n_1 = n_2 = 1, n_3 = 0 \quad n_1 = 2, n_2 = n_3 = 0$$

$$n_1 = n_3 = 1, n_2 = 0 \quad n_2 = 2, n_1 = n_3 = 0$$

$$n_2 = n_3 = 1, n_1 = 0 \quad n_3 = 2, n_1 = n_2 = 0$$

$$S_\gamma = k_B \ln 6 \Rightarrow S_\gamma - S_1 = k_B \ln 2$$

که ۶ حالت دارد. پس داریم:

۳۸- گزینه «۱» چنانچه ترازهای انرژی سیستم  $\epsilon_i$  با تبهگنی  $n_i$  باشند آنگاه مطابق تعریف تابع پارش داریم:

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} n_i e^{-\frac{\beta \epsilon_i}{k_B T}} \quad (\beta = \frac{1}{k_B T})$$

در نوسانگر هماهنگ کوانتومی یک بعدی  $n_i = 1$  و  $\epsilon_i = \hbar\omega(i + \frac{1}{2})$  و داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}; |q| < 1 \quad q = e^{-\beta \hbar \omega}$$

اما سری فوق یک سری هندسی یا قدر نسبت  $q = e^{-\beta \hbar \omega}$  می‌باشد و در حالت کلی داریم:

$$Z = \frac{e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{2}}} = \frac{1}{2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2}}$$

پس داریم:

۳۹- گزینه «۴» روش تشریحی: ابتدا کمیت داده شده در صورت سؤال را بسط می‌دهیم و داریم: (۱)  $(\alpha V_x - \beta V_y)^2 = \alpha^2 V_x^2 + \beta^2 V_y^2 - 2\alpha\beta V_x V_y$  از طرفی می‌دانیم که تابع توزیع سرعت از توزیع ماکسول - بولتزمن به صورت زیر است:

$$f(V_x, V_y, V_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)\right)$$

برای به دست آوردن میانگین (۱) می‌بایست میانگین هر کدام از جملات را جداگانه به دست آورد. با توجه به مستقل بودن متغیرهای  $V_x$  و  $V_y$  از یکدیگر و تقارن روی تابع توزیع به راحتی می‌توان دید که:

$$\langle V_x \rangle = \langle V_y \rangle = 0 \Rightarrow \langle V_x V_y \rangle = \langle V_x \rangle \langle V_y \rangle = 0$$

حال باید  $\langle V_x^2 \rangle, \langle V_y^2 \rangle$  را محاسبه کنیم. از تابع توزیع سرعت داریم:

$$\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} V_x^2 e^{-\frac{m}{2k_B T}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)} dV_x dV_y dV_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} V_x^2 e^{-\frac{m}{2k_B T} V_x^2} dV_x \quad (2)$$



که در رابطه بالا روی  $V_y$  و  $V_z$  جداگانه انتگرال گرفته شده و از رابطه (\*) استفاده شده است. برای محاسبه عبارت فوق قرار می‌دهیم  $\alpha = \frac{m}{\sqrt{2}k_B T}$  و

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (*) \quad \text{می‌دانیم که:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{-\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه فوق نسبت به  $\alpha$  داریم:

$$\langle v \rangle = \left( \frac{m}{\sqrt{2} \pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left( \frac{\sqrt{2} k_B T}{m} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{k_B T}{m}$$

پس داریم:

$$\langle (\alpha v_x - \beta v_y)^2 \rangle = (\alpha^2 + \beta^2) \frac{k_B T}{m}$$

از تقارن  $\langle v_y^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$  و بنابراین داریم:

$$\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2 = \frac{k_B T}{m}$$

توجه کنید که چنانچه واریانس سرعت را که در هر جهت مثل  $x$  با رابطه  $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2} = \frac{k_B T}{m}$  داده می‌شود حفظ باشیم با استفاده از  $\langle v_x \rangle = 0$

نیز به راحتی می‌توانیم  $\langle v_x^2 \rangle$  را بیابیم.

$$\langle (\alpha v_x - \beta v_y)^2 \rangle = \alpha^2 \langle v_x^2 \rangle + \beta^2 \langle v_y^2 \rangle$$

روش تستی: از رابطه (۱) و با استفاده از  $\langle v_x v_y \rangle = 0$  داریم:

تابع توزیع سرعت مستقل از  $\alpha$  و  $\beta$  است و  $\alpha^2$  و  $\beta^2$  در رابطه بالا تغییر نمی‌کنند. پس تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_c} = 0$$

۴۰- گزینه «۲» در حالت تعادل در نقطه‌ای مثل  $x = x_c$  می‌بایست  $F$  کمینه شود که باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = -2ax + 6bx^5$$

از طرفی در نقاط کمینه می‌بایست همواره  $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=x_c} \geq 0$  باشد. داریم:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2a + 30bx^4$$

پاسخ‌های معادله فوق  $x = \pm \left( \frac{a}{3b} \right)^{\frac{1}{4}}$  و  $x = 0$  هستند. اما در  $x = 0$  همواره  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2a$  و از طرفی داریم:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=\pm \left( \frac{a}{3b} \right)^{\frac{1}{4}}} = -2a + 30b \left( \frac{a}{3b} \right) = 8a > 0$$

پس دو نقطه داده شده نقاط تعادل سیستم هستند.

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T$$

۴۱- گزینه «۴» با استفاده از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \frac{\sqrt{2} b S^{\sqrt{2}}}{\sqrt{N}}$$

بنابراین با مشتق‌گیری از رابطه داده شده در حجم ثابت داریم:

$$H = \frac{P}{\sqrt{m}} + V_0 x$$

۴۲- گزینه «۱» چنانچه  $P$  تکانه این ذره و  $m$  جرم آن باشد انرژی آن با رابطه مقابل داده می‌شود:

$$Z = \frac{1}{h} \int e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} + V_0 x \right)} dp dx \quad \left( \beta = \frac{1}{k_B T} \right)$$

و از روی انرژی آن می‌توان تابع پارش را به صورت مقابل نوشت:

$$\langle f(x, p) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, p) e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} + V_0 x \right)} dp dx}{Z}$$

و با استفاده از تعریف متوسط یک کمیت مثل  $f(x, p)$  داریم:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\beta V_0 x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\beta V_0 x} dx} = \frac{\frac{1}{\beta^2 V_0^2}}{\frac{1}{\beta V_0}} = \frac{k_B T}{V_0}$$

توجه کنید که در اینجا  $f(x, p) = x$  و بنابراین چون انتگرال تکانه مستقل از مکان خواهد بود داریم:



۴۳- گزینه «۲» در حالت کلی متوسط انرژی سیستم با ترازهای انرژی  $\epsilon_i$  و تبهگن  $n_i$  به صورت مقابل داده می‌شود.

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}}{\sum_{i=1}^{\infty} n_i e^{-\beta \epsilon_i}}$$

توجه کنید که چنانچه  $Z = \sum_{i=1}^{\infty} n_i e^{-\beta \epsilon_i}$  تابع پارش سیستم باشد رابطه فوق معادل با  $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$  است. حال با جایگذاری مفروضات مسئله در

$$\langle E \rangle = \frac{\epsilon e^{-\beta \epsilon} - \epsilon e^{\beta \epsilon} + \gamma \times \circ e^{-\beta \circ}}{e^{-\beta \epsilon} + e^{\beta \epsilon} + \gamma} = \frac{-\gamma \epsilon \sinh \beta \epsilon}{\gamma \cosh \beta \epsilon + \gamma} = \frac{-\epsilon \sinh \beta \epsilon}{1 + \cosh \beta \epsilon}$$

رابطه فوق داریم:

$$\langle E \rangle = -\epsilon \tanh \frac{\beta \epsilon}{\gamma}$$

با استفاده از اینکه در حالت کلی برای  $x$  دلخواه  $\cosh \gamma x = \gamma \cosh^2 x - 1$  و  $\sinh \gamma x = \gamma \sinh x \cosh x$  داریم:

۴۴- گزینه «۳» در حالت کلی در دمای  $T$  برای پتانسیل شیمیایی  $\mu$  چنانچه  $z = e^{\frac{\mu}{k_B T}}$  باشد، داریم:

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{g}{\lambda^3} f_{\frac{5}{2}}(z) \quad \text{و} \quad U = \frac{\gamma}{2} k_B T \frac{gV}{\lambda^3} f_{\frac{5}{2}}(z)$$

که در روابط فوق،  $g$  عامل وزن نام دارد و به ساختار درونی سیستم مثل اسپین وابسته است و  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$  طول موج حرارتی سیستم برای ذراتی به جرم  $m$  نام دارد. همچنین  $f_{\nu}(z)$  توابع فرمی دیراک است و به صورت مقابل داده می‌شود.

$$f_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1} e^x + 1}$$

که  $\Gamma(x)$  تابع گاما می‌باشد.

$$P = \frac{\gamma}{3} \frac{U}{V} = \frac{\gamma}{3} u$$

از روابط فوق داریم:

توجه کنید برای گاز فرمیونی رابطه فوق در حالت کلی برقرار است و مستقل از دما می‌باشد.

۴۵- گزینه «۱» می‌دانیم که  $G = U + PV - TS$  (\*) از طرفی از رابطه داده شده در صورت سؤال داریم: (۱)

$$S = CU^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{S^{\frac{3}{2}}}{CV^{\frac{1}{2}}} = U$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T = \frac{2}{3} C \left(\frac{S}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

از رابطه  $dU = TdS - PdV$  و ثابت  $C$  باز تعریف شده است. می‌دانیم که:

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = +\frac{1}{3} C \left(\frac{S}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

همچنین داریم:

$$G = \frac{S^{\frac{3}{2}}}{CV^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3} C \frac{S^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{CV^{\frac{1}{2}}} = 0$$

از روابط (\*) و (۱) و (۲) و (۳) داریم: