فصل اول

«مبانی شمارش»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰\}$ مفروض است. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری۷۶)

a) به چند طریق مختلف می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود، به طوری که مجموع آنها عددی زوج باشد؟

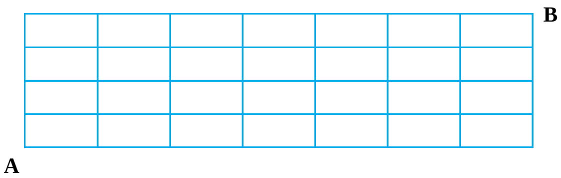
b) به چند طریق مختلف می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود، به طوری که مجموع آنها عددی فرد باشد؟

۱) a) ۲۵۰۰   b) ۲۵۰۰   ۲) a) ۲۵۰۰   b) ۲۴۵۰   ۳) a) ۲۴۵۰   b) ۲۴۵۰   ۴) a) ۲۴۵۰   b) ۲۵۰۰

۲ـ انواع ترتیب‌های مختلفی که با حروف موجود T A L L A H A S E E می‌توان نوشت برابر است با $\frac{۱۰!}{۳!۲!۲!۱!۱!۱!}$، یعنی ۱۵۱۲۰۰.
تعیین کنید در چند مورد از این ترتیب‌ها Aها کنار هم قرار ندارند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

۱) ۳۵۲۸۰   ۲) ۱۴۱۱۲۰   ۳) ۷۰۵۶۰   ۴) ۲۱۱۶۸۰

۳ـ تعداد مسیرهای متفاوت از A به B با طول حداقل، چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)



۱) ۲۸   ۲) $\binom{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۱!}{۴!۴!۳!}$ ۴) $\frac{۱۱!}{۴!۷!}$

۴ـ فرض کنید که می‌خواهیم در فضای XYZ از نقطه $(۰,۰,۰)$ به نقطه $(۳,۴,۵)$ برسیم، مشروط بر اینکه در هر مرحله یک واحد در جهت مثبت یکی از محورها حرکت کنیم. تعداد راه‌های متمایز برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱۱!}{۲!۳!۴!}$ ۲) $\frac{۱۲!}{۲!۳!۴!}$ ۳) $\frac{۱۲!}{۳!۴!۵!}$ ۴) $\frac{۱۱!}{۳!۴!۵!}$

۵ـ در بسط دوجمله‌ای $(x^۲ + \frac{۱}{x})^{۱۲}$ ضریب ثابت را به‌دست آورید. (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)

۱) ۴۱۲۵   ۲) ۴۹۵   ۳) ۱۹۸۰   ۴) ۹۹۰

۶ـ تعداد اعدادی از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰۰۰۰\}$ که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۷ باشد، برابر است با .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۴۶۲   ۲) ۳۳۰   ۳) ۴۰۰   ۴) ۳۰۰

۷ـ به چند طریق ۶ پسر و ۶ دختر می‌توانند دور یک میز دایره‌شکل با ۱۲ صندلی بنشینند، به طوری که یک در میان پسر و دختر نشسته باشند؟
(فرض بر این است که صندلی‌ها یکسانند و فقط موقعیت افراد نسبت به هم اهمیت دارد) (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $(۶!)^۲$ ۲) $۶!۵!$ ۳) $\frac{۱۲!}{(۶!)^۲}$ ۴) $\frac{۱۲!}{۶!}$

۸ـ فرض کنید ۱۰ نفر در مسابقه دو شرکت می‌کنند و به سه نفر جایزه داده می‌شود. دو شرکت‌کننده را در این مسابقه در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان جوایز را اعطا نمود، مشروط بر این که این دو نفر جزو ۳ نفر اول باشند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲۴   ۲) ۴۸   ۳) ۶۰   ۴) ۳۰

۹ـ با حروف کلمه MATHEMATIC چند کلمه می‌توان ساخت؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) ۴۵۳۶۰۰   ۲) ۲۲۶۸۰۰   ۳) ۱۱۳۴۰۰   ۴) ۹۰۷۲۰۰

۱۰ـ تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله $x_۱ + x_۲ + ... + x_۶ < ۱۵$ کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) $\binom{۱۴}{۷}$ ۲) $\binom{۲۰}{۵}$ ۳) $\binom{۱۴}{۶}$ ۴) $\binom{۲۰}{۶}$

۱۱ـ به ازای عدد صحیح و مثبت n، تعداد چهارتایی‌های (a,b,c,d) از اعداد صحیح را بیابید، به‌طوری‌که $0 \le a \le b \le c \le d \le n$.
(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) $\binom{n}{4}$ ۲) $4\binom{n}{4}$ ۳) $\binom{n+4}{4}$ ۴) $2\binom{n+1}{4}$

۱۲ـ در یک صفحه شطرنج ۲۰×۲۰ چند مربع دیده می‌شود؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲۲۴۰ ۲) ۲۸۷۰ ۳) ۲۹۸۰ ۴) ۲۳۶۰

۱۳ـ چند عدد ۴رقمی وجود دارد، به طوری‌که مجموع ارقام آن برابر ۹ شود؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\binom{12}{3}$ ۲) $\binom{11}{3}$ ۳) $\binom{13}{4}$ ۴) $\binom{12}{4}$

۱۴ـ تعداد ماتریس‌های ۶×۵ با درایه‌های صفر و یک که هر سطر آن شامل تعداد زوج درایه یک است، چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) 2^{29} ۲) 2^{28} ۳) 2^{25} ۴) 2^{24}

۱۵ـ چند زیرمجموعه اعداد $\{1,2,3,\ldots,12\}$ دارای این خاصیت است که جمع کوچکترین و بزرگ‌ترین عضو آن برابر ۱۳ است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۵)

۱) $\frac{1}{3}(4^6-1)$ ۲) $\frac{2}{3}(4^6-1)$ ۳) $3(4^4-1)$ ۴) $5(4^4-1)$

۱۶ـ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی اعداد $\{1,2,3,\ldots,9\}$ که حاصل‌ضرب عضوهای آن زیرمجموعه مضرب چهار نیست، چندتا است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۵)

۱) ۹۶ ۲) ۹۵ ۳) ۳۱۹ ۴) ۳۲۰

۱۷ـ می‌خواهیم جدولی ۵×۵ از حروف انگلیسی به جز حرف A به صورت زیر ایجاد کنیم. ابتدا یک کلمه معنادار یا بی‌معنا را که حروف تکرار آن وجود ندارد از چپ به راست، با شروع از ردیف اول این جدول می‌نویسیم (در صورتی‌که کلمه طولانی باشد، ممکن است در چند ردیف جدول نوشته شود)، سپس حروف باقی‌مانده را به ترتیب الفبای انگلیسی در خانه‌های جدول قرار می‌دهیم. تعداد جدول‌های ممکن را بیابید. (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۶)

۱) $25!$ ۲) $\sum_{i=1}^{25}\binom{25}{i}$ ۲) $24\times 25!$ ۴) $\sum_{i=1}^{26}\binom{26}{i}$

۱۸ـ مجموعه‌ای داریم از پنج کتاب متمایز کامپیوتر، سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز هنر، به چند صورت می‌توانیم این کتاب‌ها را در یک قفسه قرار دهیم، به طوری‌که دو کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار نگیرند؟ (علوم کامپیوتر ـ آزاد۸۶)

۱) $9!$ ۲) $8!\times 2!$ ۳) $10!-9!\times 2!$ ۴) $10!-8!\times 2!$

۱۹ـ به چند طریق ۵ نفر مالزیایی متمایز و هشت نفر ژاپنی متمایز می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، به شرطی که هیچ دو مالزیایی در کنار یکدیگر ننشینند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۶)

۱) $8!\times\frac{8!}{3!}$ ۲) $7!\times\frac{8!}{3!}$ ۳) $7!\times\frac{8!}{5!3!}$ ۴) $8!\times\frac{8!}{5!3!}$

۲۰ـ به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ مشابه (غیرمتمایز) را در ۱۲ جعبه قرار داد، به طوری‌که هر جعبه بتواند حداکثر ۱۰ توپ را در خود جای دهد؟
(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۶)

۱) $\frac{22!}{10!12!}$ ۲) 10^{12} ۳) $\frac{21!}{10!11!}$ ۴) 12^{10}

۲۱ـ تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ با شرایط $i=1,2,3,4$ و $x_i \ge 2$ مساوی است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۷)

۱) $\binom{14}{11}$ ۲) $\binom{15}{4}$ ۳) $\binom{19}{4}$ ۴) $\binom{18}{15}$

۲۲ـ تعداد آرایش‌های حروف کلمه DIDAR به طوری‌که در آن ترتیب حروف صدادار حفظ شود، چندتا است؟ (در اینجا حروف صدادار I و A هستند) (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۲۳ـ می‌خواهیم ۱۰۰ دوچرخه نامتمایز را در چهار انبار متمایز ذخیره کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۷)

۱) $\frac{103!}{100!3!}$ ۲) 4^{100} ۳) 100^4 ۴) $\frac{104!}{100!4!}$

۲۴ـ یک گل‌فروش ۶ نوع گل، از هر نوع ۷ شاخه در دست دارد. به چند طریق می‌توان ۶ شاخه گل از او خرید؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $\binom{11}{6}$ ۲) $\binom{12}{5}$ ۳) $\binom{42}{6}$ ۴) $\binom{12}{6}$

۲۵ـ مجموع تمام ضرایب در بسط عبارت $(3x-3y+2z+5w)^4$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) 7^4 ۳) $3^4+(-3)^4+2^4+5^4$ ۴) 2^4+5^4

۲۶ـ یک نماد θ برای زمان بدترین حالت در الگوریتم چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۸)

```
Procedure iskey (s,n,key)
  for i  :=1 to n – 1 do
    for j  :=i+1 to n do
    if si+sj=key then
    return(1)
   else
    return (0)
end iskey
```

۱) $\theta(n)$
۲) $\theta(1)$
۳) $\theta(n^2)$
۴) $\theta(\log n)$

۲۷ـ ضریب b^3 در عبارت $a^2b^2(a^{-1}+10b+2a)^7$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱۶۸۰ ۲) ۲۱۰۰ ۳) ۴۲۰۰ ۴) ۸۴۰۰

۲۸ـ سه کیسه داریم شامل توپ‌های غیرقابل تمایز قرمز، آبی و سبز (توپ‌های همرنگ قابل تمایز نیستند) و هر کیسه شامل حداقل ۱۰ توپ به یکی از سه رنگ می‌باشد. به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ انتخاب کرد، به طوری که دقیقاً یک توپ قرمز انتخاب شود؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۹ و ۹۰)

۱) ۵۵ ۲) 2^9 ۳) ۱۰ ۴) ۶۶

۲۹ـ ده دانش‌آموز می‌خواهند روی ۱۵ صندلی در یک ردیف بنشینند. آنها به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که هیچ دو صندلی مجاور خالی نماند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $252\times10!$ ۲) $462\times11!$ ۳) $462\times10!$ ۴) $3003\times15!$

۳۰ـ چند عدد چهاررقمی به شکل $\overline{abcd}$ وجود دارد، به طوری که $a<b<c<d$؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۷۵ ۴) ۲۰۵

۳۱ـ چند مثلث متمایز (دو به دو غیرقابل انطباق) وجود دارد که طول اضلاعشان متعلق به مجموعه {۳,۴,۵,۶} باشد؟ (ضلع‌های یک مثلث می‌توانند با هم مساوی باشند.) (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۱۹ ۳) ۳۰ ۴) ۶۴

۳۲ـ مطلوب است تعیین ضریب جمله xyz^2 در عبارت $(w+x+y+z)^4$. (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۹۰)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۴۸

۳۳ـ چند عدد صحیح چهاررقمی وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و ترتیب ارقام آن افزایشی (مانند ۱۳۴۷ و ۶۷۸۹) یا کاهشی (مانند ۶۴۲۱ و ۸۷۶۵) می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۹۰)

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۶۵۴ ۳) ۳۴۳ ۴) ۵۴۶

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ گزینه «۴» برای این که حاصل‌جمع دو عدد انتخابی زوج باشد، می‌بایست هر دوی آنها زوج یا هر دوی آنها فرد باشند. پس تعداد کل راه‌های انتخاب این دو عدد برابر است با: $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}=2450$

برای این که حاصل‌جمع دو عدد فرد باشد، می‌بایست یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد. پس تعداد حالات انتخاب دو عدد از مجموعه A به طوری که حاصل‌جمع‌شان فرد شود، برابر است با: $\binom{50}{1}\times\binom{50}{1}=2500$

۲ـ گزینه «۳» کافی است Aها را از مجموعه حروف داده شده جدا کنیم و حروف باقی‌مانده را به تعداد $\frac{7!}{2!\times 2!}$ طریق کنار هم قرار دهیم. حال ۸ جایگاه برای قرار دادن سه حرف A داریم. بنابراین می‌توانیم سه حرف A را به $\binom{8}{3}$ طریق بین حروف دیگر و اطرافشان قرار دهیم، به طوری که Aها کنار هم نباشند. پس تعداد کل راه‌های مطلوب برابر است با: $\binom{8}{3}\times\frac{7!}{2!\times 2!}=70560$

۳ـ گزینه «۴» تعداد مسیرهای مختلف با طول حداقل از نقطه $A=(0,0)$ به نقطه $B=(4,7)$ برابر تعداد راه‌های انتخاب ۴ قدم از بین ۱۱ قدم برای حرکت رو به بالا است. جواب برابر است با $\frac{11!}{4!7!}$.

۴ـ گزینه «۳» برای رسیدن از نقطه $(0,0,0)$ به $(3,4,5)$ می‌بایست ۳ حرکت در جهت محور xها، ۴ حرکت در جهت محور yها و ۵ حرکت در جهت محور zها انجام دهیم. تعداد این مسیرها برابر با تعداد رشته‌های شامل ۳ حرف x، ۴ حرف y و ۵ حرف z است که برابر است با $\frac{12!}{3!4!5!}$.

۵ـ گزینه «۲» اگر از قضیه دوجمله‌ای استفاده کنیم، با فرض اینکه i توان x^2 و j توان $\frac{1}{x}$ باشد، خواهیم داشت:

$$(x^2+\frac{1}{x})^{12}=\sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}(x^2)^i(\frac{1}{x})^{12-i}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}i+j=12\\2i-j=0\end{cases}$$

جمله ثابت توان‌های $\frac{1}{x}$ و x برابر هستند. در نتیجه: $2i=12-i\Rightarrow i=4$

بنابراین ضریب جمله ثابت برابر است با $\binom{12}{4}=495$.

۶ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه مجموع ارقام 100000 برابر ۷ نیست، می‌توانیم فقط مجموع ارقام اعداد ۱ تا ۵ رقمی را برای برابری با ۷ بررسی کنیم. اگر x_i را رقم iام عدد به ازای $1\le i\le 5$ در نظر بگیریم، جواب مسأله برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7;0\le x_i$$

یعنی: $\binom{7+5-1}{5-1}=330$

۷ـ گزینه «۲» کافی است ابتدا یکی از پسرها را ثابت در نظر گرفته و بقیه پسرها را به $5!$ حالت دور میز بنشانیم. سپس دخترها به $6!$ حالت در جایگاه‌ها، بین پسرها قرار خواهند گرفت. جواب مسأله برابر خواهد بود با $5!\times 6!$.

۸ـ گزینه «۲» در مجموع به $3!$ طریق می‌توان سه جایزه را به سه نفر داد. با توجه به اینکه دو نفر از برنده‌ها ثابت هستند، برای انتخاب سومین نفر ۸ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌ها برابر است با $3!\times 8=48$.

۹ـ گزینه «۱» در این کلمه ۲ حرف A، ۲ حرف T و ۲ حرف M و از هر کدام از ۴ حرف دیگر یکی وجود دارد. هر یک از این ۳ جفت به !۲ حالت قابلیت جابجایی دارند که این جابجایی تأثیری در ساخت رشته جدید ندارد. در نتیجه تعداد رشته‌های قابل تولید متمایز با این حروف برابر است با:

$$\frac{10!}{2!\times 2!\times 2!}=453600$$

۱۰ـ گزینه «۳» توجه کنید که در صورت سؤال ذکر شده است که مقادیر x_1 تا x_7 باید بزرگ‌تر مساوی ۱ باشد. با تغییر متغیر $y_i=x_i-1$ به‌ازای $1\le i\le 6$ خواهیم داشت: (متغیر کمکی y_7 باعث می‌شود نامعادله به معادله تبدیل شود.) $y_1+y_2+\ldots+y_6<9\Rightarrow y_1+y_2+\ldots+y_7=8$

در معادله فوق $y_7=8-y_1-y_2-\cdots-y_6$ فرض شده است. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله برابر است با: $\binom{14}{6}=\binom{7+8-1}{7-1}=$ تعداد جواب‌ها

۱۱ـ گزینه «۳» در نظر می‌گیریم:

$$y_1=a-0\ge 0 \qquad y_2=b-a\ge 0 \qquad y_3=c-b\ge 0 \qquad y_4=d-c\ge 0 \qquad y_5=n-d\ge 0$$

کافی است مقادیر مجاز y_i را محاسبه کنیم. برای این کار مقادیر $\sum_{i=1}^{5} y_i$ را محاسبه می‌کنیم. هر حالت مجاز از y_i ها هم‌ارز با یک حالت مجاز برای (a,b,c,d) است.

$$\sum_{i=1}^{5} y_i=(a-0)+(b-a)+(c-b)+(d-c)+(n-d)=n$$

در نتیجه تعداد حالات مجاز برابر است با $\binom{n+4}{4}$.

۱۲ـ گزینه «۲» مجموع تعداد کل مربع‌های یک صفحه 20×20 برابر است با حاصل‌جمع تعداد مربع‌های 1×1 بعلاوه تعداد مربع‌های 2×2 بعلاوه ... بعلاوه تعداد مربع‌های 20×20. برای اینکه یک مربع $k\times k$ داخل مربع 20×20 قرار گیرد می‌بایست رأسی از آن که کمترین مقدار مختصات را دارد در خانه (p,q) قرار گیرد که مقادیر مجاز برای p و q مستقل از هم و از مجموعه $\{0,1,\cdots,20-k\}$ خواهد بود. به عنوان مثال برای مربع‌های 5×5 که مقادیر مجاز رأس با کمترین مقدار مختصاتش در بازه $\{0,1,\cdots,15\}$ قرار دارد، یکی از جواب‌ها رأس $(7,10)$ است که مربع با رئوس $\{(7,10),(12,10),(7,15),(12,15)\}$ را تشکیل می‌دهد. در حالت کلی با توجه به اینکه مقادیر p و q مستقل از هم هستند، $(20-k+1)^2$ مربع $k\times k$ می‌توان تشکیل داد. در نتیجه تعداد کل مربع‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد کل مربع‌ها}=\sum_{k=1}^{20}(20-k+1)^2=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{20(20+1)(2\times 20+1)}{6}=2870$$

۱۳ـ گزینه «۲» فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4 ارقام عدد ۴ رقمی باشند. در این صورت تعداد اعداد ۴ رقمی با مجموع ارقام ۹ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر است که مقدار x_1 (رقم هزارگان) بزرگتر از صفر باشد. با تغییر متغیر $y_1=x_1-1$ و $y_i=x_i$ به ازای $2\le i\le 4$ این شرط برقرار خواهد بود. خواهیم داشت:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9 \quad , \quad x_1>0 \quad , \quad x_2,x_3,x_4\ge 0$$

$$(x_1-1)+x_2+x_3+x_4=8 \quad , \quad y_1'+y_2+y_3+y_4=8$$

در نتیجه جواب مسأله برابر است با: $\binom{11}{3}=\binom{8+4-1}{4-1}=$ تعداد جواب‌ها

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه سطرها مستقل از یکدیگر هستند، اگر تعداد راه‌های پر کردن یک سطر به طول ۶ با تعداد زوج درایه ۱ برابر k باشد، جواب مسأله برابر k^5 خواهد بود. برای پر کردن یک سطر، ۵ درایه اول به طور مستقل از یکدیگر هر یک ۲ حالت خواهند داشت. یعنی می‌توانند ۰ یا ۱ باشند. درایه ششم با توجه به ۵ درایه اول پر می‌شود. اگر در ۵ درایه اول تعداد فرد درایه ۱ داشتیم، این درایه باید ۰ باشد، در غیر این‌صورت ۱ می‌شود. در نتیجه درایه‌های اول تا پنجم هر یک ۲ حالت و درایه ششم ۱ حالت دارد. در این صورت تعداد راه‌های پر کردن یک سطر برابر 2^5 و تعداد راه‌های پر کردن ماتریس برابر $2^{5\times 5}=2^{25}$ خواهد بود.

۱۵ـ گزینه «۱» اگر قرار باشد حاصل‌جمع بزرگترین و کوچکترین عضو زیرمجموعه برابر ۱۳ باشد می‌بایست به ازای $k=\{1,2,\dots,6\}$ دو عضو k و $13-k$ در مجموعه قرار داشته باشند و $13-2k-1$ عضو بین دو عضو بتوانند در این زیرمجموعه‌ها حضور داشته باشند یا نداشته باشند. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{6} 2^{13-2k-1} = \sum_{k=1}^{6} 2^{12-2k} = \sum_{k=1}^{6} 4^{6-k} = \frac{1-4^6}{1-4} = \frac{4^6-1}{3}$$

۱۶ـ گزینه «۲» اعداد ۲، ۶ و ۱۰ هر کدام دو عامل ۲ و اعداد ۴ و ۸ به ترتیب دو و سه عامل ۲ دارند. در نتیجه در زیرمجموعه مطلوب، هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۸ نمی‌توانند حضور داشته باشند و تنها یکی از اعداد ۲ و ۶ می‌توانند حضور داشته باشند؛ یعنی از دو عضو $\{2,6\}$ حداکثر یکی حضور دارد یا هیچ‌یک حضور ندارند یا فقط ۲ حضور دارد و یا فقط ۶ حضور دارد. پس برای این دو عضو در مجموع ۳ حالت داریم. برای هر یک از اعداد فرد نیز دو حالت خواهیم داشت. مجموعه تهی نیز می‌بایست از این جمله‌ها کم شود. بنابراین:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب} = 3\times 2^5 - 1 = 96 - 1 = 95$$

۱۷ـ گزینه «۱» با نوشتن یک کلمه معنادار یا بی‌معنا بدون تکرار حرف و سپس ادامه دادن رشته به‌نحوی که حروف باقی‌مانده به‌ترتیب الفبایی مرتب شده باشند، یک کلمه ۲۵ حرفی (که به نظر بی‌معنا خواهد بود) تشکیل می‌شود. هر جایگشت از این ۲۵ حرف در جدول ذکر شده (با توجه به اینکه می‌توان آن‌را یک کلمه درنظر گرفت) مجاز است. در نتیجه $25!$ حالت خواهیم داشت. توجه کنید که در محاسبه تعداد این جدول‌ها اهمیتی ندارد که چه قسمتی از رشته را به‌عنوان کلمه اصلی درنظر بگیریم و بقیه حروف را به ترتیب الفبایی بدانیم. برای نمونه اهمیتی ندارد که در رشته BCD...YZ حرف B را به‌عنوان کلمه اصلی در نظر بگیریم یا کلمه BC را. زیرا در هر دو صورت، رشته تشکیل شده در جدول 5×5 مشابه خواهد بود.

۱۸ـ گزینه «۳» کافی است تعداد کل حالتی که ۱۰ کتاب متمایز کنار هم قرار می‌گیرند را منهای تعداد حالاتی که دو کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند نمائیم. جواب برابر خواهد بود:

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = 10! - 9!\times 2!$$

۱۹ـ گزینه «۲» کافی است ابتدا یک ژاپنی را ثابت در نظر گرفته و بقیه ژاپنی‌ها را به $7!$ حالت دور میز بچینیم. سپس از بین ۸ جایگاه میان ژاپنی‌ها به $\binom{8}{5}$ حالت، ۵ جایگاه برای مالزیایی‌ها انتخاب نمائیم و آنها را به $5!$ حالت در این جایگاه‌ها بنشانیم. پاسخ مسأله برابر است با:

$$\text{پاسخ} = 7!\times\binom{8}{5}\times 5! = \frac{7!\times 8!}{3!}$$

۲۰ـ گزینه «۳» با فرض اینکه x_iها به ازای $1\le i\le 12$ نشان‌دهنده تعداد توپ‌های قرار گرفته در جعبه iام هستند، تعداد راه‌های قرار دادن ۱۰ توپ در این ۱۲ جعبه برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر خواهد بود.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 10$$

جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{10+12-1}{12-1} = \frac{21!}{11!\,10!}$$

۲۱ـ گزینه «۱» کافی است متغیر $y_i = x_i - 2$ را جایگزین متغیرهای x_i نمائیم. در نتیجه تعداد جواب‌های قابل قبول مسأله برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله مقابل خواهد بود:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{14}{11}$$

۲۲ـ گزینه «۲» کافی است حروف صدادار را مشابه هم در نظر بگیریم و پس از مشخص شدن جایگاهشان آن‌ها را به ترتیب بچینیم. در این حالت برای حروف کلمه DIDAR دو جفت حرف مشابه داریم. پس تعداد کلمات برابر خواهد بود با: $\frac{5!}{(2!)^2} = 30$.

۲۳ـ گزینه «۱» با فرض اینکه x_i به ازای $1\le i\le 4$ برابر تعداد دوچرخه‌های انبار iام باشد، تعداد راه‌های قرار دادن این دوچرخه‌ها در انبار برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله مقابل خواهد بود:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

$$\text{جواب} = \binom{103}{3} = \frac{103!}{100!\,3!}$$

۲۴ـ گزینه «۱» اگر x_i به ازای $1 \le i \le 6$ را برابر تعداد گل‌های خریداری شده از نوع iام در نظر بگیریم، جواب مسأله برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله مقابل خواهد بود:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$

$$\text{جواب} = \binom{11}{6}$$

۲۵ـ گزینه «۲» برای محاسبه مجموع ضرایب کافی است مقادیر متغیرهای x، y، z و w را برابر ۱ در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$\text{مجموع ضرایب} = (3 - 3 + 2 + 5)^4 = 7^4$$

۲۶ـ گزینه «۳» بیشترین زمان اجرا مربوط به حالتی است که کلید یافت نشود. در این صورت زمان اجرا برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \in \theta(n^2)$$

۲۷ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن ضریب b^3 با توجه به آنکه a^2b^2 در پرانتز ضرب شده است، باید آنچه از به توان رساندن پرانتز به‌دست می‌آید $a^{-2}b$ باشد. اگر توان را به صورت روبرو در نظر بگیریم:

$$(a^{-1} + 10b + 2a)^7 = (a^{-1} + 10b + 2a) \times (a^{-1} + 10b + 2a) \times \ldots \times (a^{-1} + 10b + 2a)$$

باید از یکی از این پرانتزها ضریب b استخراج نمود. این کار به $\binom{7}{1} \times (10)^1$ طریق ممکن است. همچنین از چهار تا از این پرانتزها ضریب a^{-1} استخراج نمائیم. این کار به $\binom{6}{4} \times (1)^4$ حالت ممکن خواهد بود. در نهایت باید از دو پرانتز باقی‌مانده ضریب a استخراج شود که این کار به $\binom{2}{2} \times (2)^2$ حالت ممکن خواهد بود. با ضرب این حالات در هم عدد ۴۲۰۰ به‌دست می‌آید.

۲۸ـ گزینه «۳» جواب مسأله تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 = 9$ است که x_1 تعداد توپ‌های آبی و x_2 تعداد توپ‌های سبز است.

۲۹ـ گزینه «۳» می‌توان دانش‌آموزان را به صورت تعدادی یک (متمایز) و صندلی‌ها را به عنوان صفر (غیرمتمایز) در نظر گرفت. ابتدا یک‌ها را به !۱۰ حالت کنار هم قرار می‌دهیم، سپس از یازده فضایی که بین و خارج آن‌ها قرار داد ۵ فضا را انتخاب می‌کنیم و صفرها را درونشان قرار می‌دهیم (تا هیچ دو صندلی خالی کنار هم نباشند. بنابراین جواب مسأله برابر است با:

$$10! \times \binom{11}{5} = 462 \times 10!$$

۳۰ـ گزینه «۲» با توجه به صعودی بودن ارقام و اینکه رقم پرارزش نمی‌تواند ۰ شود، کافی است ۴ رقم از رقم‌های ۱ تا ۹ را انتخاب کنیم و به صورت صعودی مرتب کنیم. برای حالت نزولی باید ۴ رقم از رقم‌های ۰ تا ۹ انتخاب کنیم. طبق مطالب گفته شده تعداد اعداد ۴رقمی با رقم‌های صعودی برابر است با $\binom{9}{4}$.

۳۱ـ گزینه «۲» می‌توان تعداد راه‌های ترکیب با تکرار ۳ ضلع از ۴ ضلع را محاسبه کرد؛ یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی مسأله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ که x_iها تعداد انتخاب‌های ضلع iاُم هستند. از جواب مسأله باید مقدار ۱ کم شود؛ زیرا حالت $\{3,3,6\}$ قابل قبول نیست (مثلث تشکیل نمی‌دهد).

$$\text{جواب} = \binom{6}{3} - 1 = 19$$

۳۲ـ گزینه «۳» ضریب جمله xyz^2 برابر است با:

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = \frac{4!}{1!1!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۳۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای ساخت اعداد با ترتیب ارقام افزایشی کافی است چهار رقم از ارقام ۱ تا ۹ و برای ساخت اعداد با ترتیب ارقام کاهشی کافی است چهار رقم از ارقام ۰ تا ۹ را انتخاب کنیم؛ جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{9}{4} + \binom{10}{4} = 336$$

فصل دوم

«مبانی منطق»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ کدام‌یک از استنتاج‌های زیر درست می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۱)

۱) $R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$
۲) $S \to Q, S \vee R, \neg R \Leftrightarrow Q \Rightarrow P$
۳) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S), (Q \to P) \vee \neg R, R \Rightarrow P$
۴) $P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R \Rightarrow P$

۲ـ تقاضای استخدام شما در شرکت ایران خودرو پذیرفته شده است. شغل شما طراحی شبکه منطقی برای یک خودرو دنده اتوماتیک است. شبکه باید چنان طراحی شود که راننده تنها زمانی بتواند ماشین را روشن کند که دنده اتوماتیک در وضعیت خلاص یا پارک و کمربند ایمنی بسته باشد. در صورتی که خلاص $= x_1$ و پارک $= x_2$ و کمربند ایمنی $= x_3$ باشد، عبارت بولی شما برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۴)

۱) $(x_1x_2' + x_1'x_2)x_3$
۲) $(x_1 + x_2)x_3$
۳) $(x_1 + x_2')x_3$
۴) $(x_1x_2' + x_1'x_2')$

۳ـ برای فرمول گزاره‌ای $(p \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ مجموع مینترم‌ها (P.D.N.F) و حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها (P.C.N.F) را به دست آورید. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۵)

۱) $\prod(0,1,2,3)$ و P.D.N.F وجود ندارد.
۲) $\sum(0,1,2,3)$ و P.C.N.F وجود ندارد.
۳) $\sum(0,3)$ و $\prod(1,2)$
۴) $\sum(1,2)$ و $\prod(0,3)$

۴ـ کدام‌یک از DNF های زیر معادل عبارت بولی $(\overline{x+y}+\overline{\overline{x}+\overline{y}})(z+y)$ است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

۱) $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + xyz$
۲) $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz + \overline{x}\,\overline{y}z$
۳) $\overline{x}\,\overline{y}z + xyz + xy\overline{z}$
۴) $\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z}$

۵ـ گزاره $p(x,y): 2y - x = y + x^2$ را که در آن عالم برای هر یک از متغیرهای x و y مرکب از همه اعداد صحیح است، در نظر می‌گیریم. ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۸)

۱) $\forall x \forall y (p(x,y))$
۲) $\exists x \forall y (p(x,y))$
۳) $\exists x \exists y (p(x,y))$
۴) $\forall y \exists x (p(x,y))$

۶ـ در منطق گزاره‌ها ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) هر گزاره راستگو (tautology) یک قضیه نیست.
۲) هر قضیه یک گزاره راستگو (tautology) نیست.
۳) هر قضیه یک گزاره راستگو (tautology) است و بالعکس.
۴) در مورد راستگویی یک قضیه چیزی نمی‌توان گفت.

۷ـ فرض کنید $h: p \to \{0,1\}$ یک تابع ارزش باشد و A گزاره‌ای باشد که $h(A) = 1$. در این صورت: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) A همیشه صادق است.
۲) $\neg A$ همیشه صادق نیست.
۳) $\neg A$ همیشه صادق است.
۴) نمی‌توان چیزی درباره $\neg A$ گفت.

۸ـ گزاره $\neg(\varphi \to \neg\varphi)$ ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) همیشه صادق است.
۲) با φ معادل است.
۳) همیشه کاذب است.
۴) با $\neg\varphi$ معادل است.

۹ـ صورت نرمال عطفی (conjunctive normal form) $\neg(p \leftrightarrow q)$ عبارت است از ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\neg((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow p))$
۲) $\neg p \wedge \neg q$
۳) $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
۴) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

۱۰ـ مجموعه زیر از گزاره‌ها $\{P_0 \to P_1, P_1 \to P_2, P_2 \to P_3, P_3 \to \neg P_0\}$... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) سازگار نیست.
۲) بستگی به صدق یا کذب اتم‌های P_3, P_2, P_1 دارد.
۳) سازگار است.
۴) بستگی به صدق یا کذب اتم P_0 دارد.

۱۱ـ علامت $\varphi[x/t]$ یعنی در فرمول φ، در صورت امکان، ترم t را به جای متغیر x جانشین کنید. در این صورت $(\exists x(y<x))[y/x]$ عبارت است از:
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\exists x(y<x)$
۲) $\exists x(x<x)$
۳) $\forall y(x<y)$
۴) $\exists y(y<x)$

۱۲ـ گزاره‌های روبرو را در نظر بگیرید:

$a: \forall x(\varphi(x)\vee\psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x)\vee\forall x\psi(x)$

$b: \exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x)) \leftrightarrow \exists x\varphi(x)\wedge\exists x\psi(x)$

در این صورت:
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) a و b همیشه صادقند.
۲) هیچ‌کدام از a و b همیشه صادق نیستند.
۳) a همیشه صادق است.
۴) b همیشه صادق است.

۱۳ـ صورت نرمال پیشوندی (Prefix normal form) گزاره زیر عبارت است از ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

$\exists x\varphi(x) \to \exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))$

۱) $\forall z\forall x\exists y[\varphi(z)\to(\varphi(x)\wedge(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))]$
۲) $\exists x\exists y[\varphi(x)\to(\varphi(x)\wedge(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y))]$
۳) $\exists x\exists y\forall z[\varphi(z)\to(\varphi(x)\wedge(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))]$
۴) $\forall z\exists x\forall y[\varphi(z)\to(\varphi(x)\wedge(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))]$

۱۴ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر یک همانگویی (tautology) است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $A\vee B\to A$
۲) $(A\vee B)\vee(A\wedge B)$
۳) $(A\to\neg A)\to\neg A$
۴) $(A\to B)\vee B$

۱۵ـ فرض کنید $v: P\to\{0,1\}$ یک تابع ارزش و P مجموعه گزاره‌های اتمی باشد. در این صورت $v(A\vee B)$ عبارت است از ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\min\{v(A),v(B)\}$
۲) $v(A)+v(B)$
۳) $v(A)\cdot v(B)$
۴) $\max\{v(A),v(B)\}$

۱۶ـ اگر $A\leftrightarrow A\wedge B$ یک همانگویی (tautology) باشد، آنگاه ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $B\to A$ نیز یک همانگویی است.
۲) $A\to B$ نیز یک همانگویی است.
۳) $A\vee B$ نیز یک همانگویی است.
۴) $A\wedge B$ نیز یک همانگویی است.

۱۷ـ صورت نرمال فصلی (Disjunctive normal form) گزاره $\neg(p\wedge\neg q)$ عبارت است از ... (q , p گزاره‌های اتمی هستند).
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\neg p\vee q$
۲) $p\wedge\neg q$
۳) $\neg(q\to p)$
۴) $\neg p\wedge q$

۱۸ـ فرض کنید $P=\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$ مجموعه همه گزاره‌های اتمی باشد، آنگاه ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) P کامل است.
۲) P سازگار نیست.
۳) P سازگار و کامل است.
۴) P سازگار است.

۱۹ـ علامت $A[t/x]$ یعنی در فرمول A به جای متغیر x، ترم t را جانشین کنید (اگر جانشینی مجاز است). در این صورت $\forall x(x+z=0)[z/x]$ برابر است با ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\forall x(z+z=0)$
۲) $\forall z(z+z=0)$
۳) $\forall x(x+z=0)$
۴) $\forall x(x+z=x)$

۲۰ـ صورت نرمال پیشوندی (Prefix normal form) فرمول $\exists xA(x)\to B$ که x جزء متغیرهای آزاد B نیست، عبارت است از ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\forall x((A)x\vee B)$
۲) $\exists x(A(x)\to B)$
۳) $\exists x(A(x)\wedge B)$
۴) $\forall x(A(x)\to B)$

۲۱ـ جمله $\forall x\forall y\forall z((x=y)\wedge(y=z))$ ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) در هر مدل سه‌عضوی صادق است.
۲) در هر مدل یک‌عضوی صادق است.
۳) در هر مدلی با حداقل سه عضو صادق است.
۴) در هر مدل یک‌عضوی کاذب است.

۲۲ـ گزاره A را مستقل از مجموعه Γ از گزاره‌ها می‌گوییم اگر $\Gamma \nvdash A$ و $\Gamma \nvdash \neg A$. فرض کنید $\Gamma = \{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$، آنگاه گزاره .... مستقل از Γ است. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $p_1 \to p_2$
۲) $p_1 \vee p_2 \to p_0$
۳) $\neg p_2 \vee p_0$
۴) $p_2 \wedge \neg p_0$

۲۳ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر یک همانگویی (tautology) نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$
۲) $A \vee B \to A$
۳) $(A \to \neg B) \to (\neg A \vee \neg B)$
۴) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

۲۴ـ صورت نرمال عطفی (Conjunctive normal form) گزاره $p \vee q$ عبارت است از ....(p و q گزاره‌های اتمی هستند). (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $p \wedge q$
۲) $\neg p \vee \neg q$
۳) $p \vee q$
۴) $p \to q$

۲۵ـ صورت نرمال پیشوندی (prefix normal form) فرمول $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ عبارت است از .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\neg \exists x A(x) \to \exists x B(x)$
۲) $\forall x (A(x) \wedge B(x))$
۳) صورت نرمال پیشوندی ندارد.
۴) $\exists x (A(x) \vee B(x))$

۲۶ـ جمله $\exists x \exists y (x \neq y)$ ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) در هر مدل فقط با دو عضو راست است.
۲) در هر مدل یک عضوی راست است.
۳) در هر مدل با حداقل دو عضو راست است.
۴) در هیچ مدلی راست نیست.

۲۷ـ تعداد صورت‌های گزاره‌ای که می‌توان با n متغیر، گزاره‌ای (نماد جمله‌ای) ساخت، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) n
۲) 2^n
۳) 2^{2^n}
۴) نامتناهی

۲۸ـ کدام فرمول یک قضیه محمولات مرتبه اول نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $A(x) \to \forall y A(y)$
۲) $(\forall y A(y) \to \forall x B(x)) \to \forall x \exists y (A(y) \to B(x))$ جایی که x در A و y در B ظاهر نمی‌شود.
۳) $\exists x (\forall y A(y) \wedge \exists z B(z)) \to (\exists x \forall y A(y) \wedge \exists x \exists z B(z))$
۴) $\forall x \forall y (A(x) \leftrightarrow B(y)) \to (\forall x \forall y A(x) \leftrightarrow \forall x \forall y B(y))$

۲۹ـ کدام مجموعه از رابطه‌ها یک مجموعه تمام (کارساز) از رابطه‌ها نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\{|\}$
۲) $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$
۳) $\{\neg, \to\}$
۴) $\{\to, \perp\}$ (رابطه $\perp$ ◦ - موضعی تناقض است)

۳۰ـ کدام فرمول هم‌ارز منطقی صورت گزاره‌ای $((\neg P_1) \vee P_2) \to P_3$ می‌باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $(\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$
۲) $(P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$
۳) $(\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$
۴) $(P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

۳۱ـ کدام استنتاج معتبر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\{\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$
۲) $\{\exists x P(x), \exists x \forall y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$
۳) $\{\exists x P(x), \exists x \exists y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \exists y Q(y)$
۴) $\{\exists x P(x), \forall x \exists y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$

۳۲ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر با گزاره $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ هم‌ارز است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
۲) $((p \vee q) \wedge p) \to \neg q$
۳) $((p \vee q) \wedge \neg q) \to \neg q$
۴) $((p \vee \neg q) \wedge p) \to q$

۳۳ـ تعداد کل گزاره‌های ناهم‌ارزی که تنها شامل گزاره‌های اتمی P_1 و P_2 بوده و در آن‌ها تنها از نمادهای $\vee$ و $\wedge$ استفاده شده است، چیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۳۴ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر تاتولوژی است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\neg[(P \wedge Q) \to (Q \vee R \to S)] \vee [(P \wedge Q \to Q \vee R) \to (P \wedge Q) \to S]$

۲) $(P \to (Q \wedge R \to S \vee T)) \to (P \vee (Q \wedge R \to S))$

۳) $A \vee B \to A$

۴) $A \vee \neg A \to B \vee C$

۳۵ـ تعداد زیرفرمول‌های فرمول درست‌ساخت $((A_1 \to A_2) \to (\neg A_3))$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۶ـ روابط محمولی زیر را در نظر بگیرید: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

$S(x) \equiv$ x دانش‌آموز است. $P(x,y) \equiv$ x، y را دوست دارد. $Q(y) \equiv$ y استاد است.

در آن صورت کدام گزینه ترجمه صوری گزاره زیر می‌باشد؟

«اگر هر دانش‌آموزی تمام استادها را دوست داشته باشد، آنگاه خود را نیز دوست دارد.»

۱) $\forall x[[S(x) \wedge \forall y(Q(y) \to P(x,y))] \to P(x,x)]$

۲) $\forall x S(x) \to \forall y[(Q(y) \to P(x,y))] \to P(x,x)]$

۳) $\forall x \forall y[[S(x) \wedge (Q(y) \to P(x,y))] \to P(x,x)]$

۴) $\forall x \exists y[(S(x) \to Q(y)) \to (P(x,y) \to P(x,x))]$

۳۷ـ کدام گزینه به طور منطقی معتبر نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $A(x) \to \forall x A(x)$

۲) $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(y)) \to \forall y A(y)$

۳) $\forall y(\forall x A(x,y) \to A(x,y))$

۴) $\exists x \forall y D(x,y) \to \forall y \exists x D(x,y)$

۳۸ـ کدام گزینه استنتاج نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{A \to (B \vee C), (\neg B \wedge A), (A \to \neg C)\} \vdash \neg D$

۲) $A \to B \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$

۳) $A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$

۴) $\{R, R \to A, (A \vee B) \to C\} \vdash \neg C$

۳۹ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر به طور تابعی کامل نیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{\uparrow\}$ ۲) $\{\neg, \vee\}$ ۳) $\{\vee, \to\}$ ۴) $\{\neg, \to\}$

۴۰ـ گزاره $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ را در نظر بگیرید. برای تمام حالت‌های A، B و C (True, False) درباره گزاره فوق اظهارنظر کنید. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) عبارت فوق همواره نادرست است.

۲) عبارت فوق همواره درست است.

۳) عبارت فوق در بیشتر موارد صحیح است.

۴) عبارت فوق در بیشتر موارد غلط است.

۴۱ـ اگر دامنه متغیرهای x و y اعداد صحیح غیرمنفی باشد، مقادیر درستی عبارات a و b را تعیین کنید. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

$a = \forall x \quad \exists y \quad x > y \qquad b = \exists x \quad \forall y \quad x > y$

۱) $a = T$ و $b = T$ ۲) $a = F$ و $b = F$ ۳) $a = T$ و $b = F$ ۴) $a = F$ و $b = T$

۴۲ـ نتیجه استنتاج ذیل چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

$$\begin{array}{l} q \to p \\ p \to (s \wedge r) \\ \sim s \vee (\sim \omega \vee z) \\ q \wedge \omega \\ \hline \quad ? \end{array}$$

۱) $s \wedge \omega$

۲) ω

۳) s

۴) z

۴۳ــ عبارت $\sim(\forall x\in N\ \exists y\in Z, xy<4\wedge x+y<5)$ معادل است با: (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) $\exists x\in N\ \forall y\in Z\ ,\ xy\geq 4\vee x+y\geq 5$

۲) $\exists x\in N\ \exists y\in Z\ ,\ xy\geq 4\wedge x+y\geq 5$

۳) $\exists x\in N\ \forall y\in Z\ ,\ xy\geq 4\vee x-y\geq 5$

۴) $\exists x\in N\ \exists y\in Z\ ,\ xy\geq 4\wedge x-y\geq 5$

۴۴ــ اگر گزاره P فقط تابع x و گزارهٔ Q فقط تابع y باشد، عبارت زیر با کدام عبارت داده شده معادل است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

$$(\forall x:(P\Rightarrow\exists y:Q))\Rightarrow((\forall x:P)\Rightarrow(\exists y:Q))$$

۱) True

۲) $\forall x\exists y\ Q$

۳) $\exists y\forall x\ P$

۴) $\forall x\exists y\ P\wedge Q$

۴۵ــ اگر برای متغیرهای منطقی x_1، … ، x_n بدانیم $\bar{x}_1\wedge(x_1\vee\bar{x}_2)\wedge\cdots\wedge(x_{n-1}\vee\bar{x}_n)\equiv True$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n\equiv True$

۲) $(\bar{x}_1\wedge x_2)\vee(\bar{x}_2\wedge x_3)\vee\cdots\vee(\bar{x}_{n-1}\wedge x_n)\equiv True$

۳) $\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge\cdots\wedge\bar{x}_n\equiv True$

۴) $(x_1\vee x_2)\wedge(x_2\vee x_3)\wedge\cdots\wedge(x_{n-1}\vee x_n)\equiv True$

۴۶ــ در عبارت مقابل، x برابر چه گزاره‌ای است؟ $(\sim P\wedge(\sim Q\wedge R))\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow x$ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) P

۲) R

۳) Q

۴) $\sim P$

۴۷ــ گزاره $p\vee q\Rightarrow p\vee\bar{q}\vee r$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $p\vee\bar{q}\vee r$

۲) $(\bar{q}\vee p)\wedge\bar{r}$

۳) $(q\vee\bar{p})\wedge\bar{r}$

۴) $\bar{p}\vee q\vee r$

۴۸ــ برای دنباله حقیقی $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ اگر گزاره $(\exists N>0\ \ \forall n>N:\ \ |a_n-a_{n-1}|<7)$ نادرست باشد، کدام گزاره لزوماً صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\forall N\geq 5\ \ \exists n>N: a_n-a_{n-1}\geq 7$

۲) $\forall N\geq 5\ \ \forall n>N\ :\ a_n-a_{n-1}\geq 7$ یا $a_n-a_{n-1}\leq -7$

۳) $\forall N\geq 5\ \ \exists n>N: a_n-a_{n-1}\geq 7$ یا $a_{n-1}-a_n\geq 7$

۴) $\forall N\geq 5\ \ \exists n>N\ :\ (a_n-a_{n-1})(a_{n-1}-a_n)\geq 49$

۴۹ــ کدام استدلال زیر نامعتبر است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱)
$$\begin{array}{l} p\vee q\\ \neg p\vee r\\ \underline{\neg r}\\ \therefore q\end{array}$$

۲)
$$\begin{array}{l} p\to(q\to r)\\ \neg q\to\neg p\\ \underline{p}\\ \therefore r\end{array}$$

۳)
$$\begin{array}{l} p\wedge q\\ p\to(r\wedge q)\\ \underline{\neg s}\\ \therefore r\end{array}$$

۴)
$$\begin{array}{l} p\\ p\to r\\ p\to(q\vee\neg r)\\ \underline{\neg q\vee\neg s}\\ \therefore s\end{array}$$

۵۰ــ کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل با $\overline{\forall x\exists yP(x,y)}$ می‌باشد؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۵)

۱) $\exists x\forall y\overline{P(x,y)}$

۲) $\exists x\overline{\forall yP(x,y)}$

۳) $\exists x\overline{\exists yP(x,y)}$

۴) $\exists y\overline{\exists yP(x,y)}$

۵۱ــ فرض کنیم:

$P(x)\equiv$ x عدد اول است.

$Q(x)\equiv$ «x و $x-2$ عدد اول هستند» یا «x ، $x+2$ عدد اول هستند»

Q(x) را به این شکل بیان می‌کنند که x متعلق به یک جفت دوقلوی اول است. گزاره «هیچ عدد اول بزرگتر از 10^{60}، عضو یک جفت دوقلوی اول نیست» به کدام شکل قابل نمایش است؟ (توجه: $\urcorner Q$ یعنی نقیض گزاره Q) (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\forall x(P(x)\wedge x>10^{60}\to\urcorner Q(x))$

۲) $\exists x(P(x)\to x<10^{60}\wedge Q(x))$

۳) $\exists x(x>10^{60}\vee\urcorner Q(x)\to P(x)$

۴) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))\to x>10^{60})$

۵۲ـ از راست بودن گزاره‌های $p \wedge q$، $p \to r \wedge q$، $r \to s \vee t$ و $\sim s$ کدام گزاره نتیجه می‌شود؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) T ۲) F ۳) $q \wedge t$ ۴) $q \wedge \sim t$

۵۳ـ فرض کنید حوزه سخن مجموعه اعداد حقیقی است و تابع گزاره‌ای $P(x,y)$ به صورت $x+y=0$ تعریف شده است. ارزش درستی گزاره‌های $\forall x \exists y p(x,y)$ و $\exists y \forall x p(x,y)$ از راست به چپ چیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) نادرست و درست ۲) درست و نادرست ۳) درست و درست ۴) نادرست و نادرست

۵۴ـ فرض کنید $P(x,y)$ تابع گزاره‌ای اگر $x^2 < y^2$ آنگاه $x < y$ باشد. حوزه سخن مجموعه اعداد حقیقی است. ارزش درستی گزاره‌های $\forall x \forall y P(x,y)$، $\forall x \exists y P(x,y)$، $\forall y \exists x P(x,y)$ و $\exists x \exists y P(x,y)$ از راست به چپ چیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۶)

۱) نادرست، درست، درست و درست ۲) نادرست، نادرست، درست و درست

۳) نادرست، درست، نادرست و درست ۴) درست، نادرست، نادرست و نادرست

۵۵ـ گزاره $P(n)$ به ازای تمام اعداد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

* $P(0)$ درست است. * اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(2n)$ درست است.

* اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n-4)$ درست است.

چند گزاره از ۴ گزاره زیر درست است؟

A) $P(n)$ به ازای تمام اعداد مثبت زوج درست است. B) اگر $P(2)$ درست باشد، آنگاه $P(n)$ برای تمام اعداد مثبت زوج درست است.

C) $P(n)$ به ازای تمام اعداد منفی زوج درست است. D) اگر $P(10)$ درست باشد، آنگاه $P(n)$ برای تمام اعداد منفی زوج درست است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۶ـ کدام‌یک از استدلال‌های زیر نامعتبر است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۷)

۱) $$\begin{array}{l} \forall x[p(x)] \vee \forall y[q(y)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \vee q(x)] \end{array}$$

۲) $$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \neg r \to \neg t \end{array}$$

۳) $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$$

۴) $$\begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \vee \neg r) \\ \neg s \vee \neg q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

۵۷ـ کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز منطقی با $\overline{\forall x \exists y p(x,y)}$ می‌باشد؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۷)

۱) $\exists x \exists y \overline{p(x,y)}$ ۲) $\forall x \exists y\, \overline{p(x,y)}$ ۳) $\forall x \forall y\, \overline{p(x,y)}$ ۴) $\exists x \exists y\, \overline{p(x,y)}$

۵۸ـ جمله «بعضی اشیاء براق طلا هستند.» در منطق، مسند به چه صورت نمایش داده می‌شود؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۷)

۱) $\exists x\, Glitter(x) \Rightarrow Gold(x)$ ۲) $\exists x\, Glitter(x) \wedge Gold(x)$ ۳) $\forall x\, Glitter(x) \wedge Gold(x)$ ۴) $\forall X\, Glitter(x) \Rightarrow Gold(x)$

۵۹ـ کدام یک از گزینه‌های زیر با گزاره $p \Rightarrow q$ هم‌ارز منطقی نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۷)

۱) $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ۲) $\overline{\overline{p} \wedge q}$ ۳) $\overline{p} \vee q$ ۴) $\overline{p \wedge \overline{q}}$

۶۰ـ جمله «بعضی گربه‌ها سیاه هستند» در منطق، مسند به چه صورت نمایش داده می‌شود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۷)

۱) $\exists x\, C(x) \Rightarrow B(x)$ ۲) $\forall x\, C(x) \wedge B(x)$ ۳) $\exists x\, C(x) \wedge B(x)$ ۴) $\forall x\, C(x) \Rightarrow B(x)$

۶۱ـ فرض کنید $P(x,y)$ تابع گزاره‌ی $x \le y$ باشد. حوزه سخن مجموعه اعداد صحیح مثبت است. ارزش گزاره‌های $\forall x \forall y P(x,y)$، $\forall x \exists y P(x,y)$، $\exists x \forall y P(x,y)$ و $\exists x \exists y P(x,y)$ از راست به چپ چیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۸)

۱) نادرست، درست، نادرست، درست ۲) نادرست، نادرست، درست، درست

۳) نادرست، درست، درست، درست ۴) نادرست، نادرست، نادرست، درست

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۱ و ۴» برای گزینه (۱) فرض می‌کنیم P درست باشد ($\sim P$ نادرست باشد). در صورتی که بتوانیم مقادیری برای فرضیات استلزام پیدا کنیم تا همه مقادیر صحیح باشند، استلزام نادرست خواهد بود. $P \rightarrow Q$ باید درست باشد. در نتیجه Q می‌بایست درست باشد. $R \rightarrow \sim Q$ و $S \rightarrow \sim Q$ باید درست باشند. در نتیجه هر دو عبارت R و S باید نادرست باشند. در نتیجه $R \vee S$ نادرست است. با توجه به اینکه نتوانستیم به فرضیات صحیح برسیم، این استلزام صحیح است.

برای گزینه (۴) فرض می‌کنیم p نادرست است. سعی در پیدا نمودن مقادیری برای R, Q می‌کنیم تا هر سه عبارت شرط درست باشند. $P \vee Q$ باید درست باشد. با فرض نادرستی Q, P باید درست باشد. $\neg Q \vee R$ باید درست باشد و با فرض درستی P, Q باید درست باشد. در این صورت $\neg R$ نادرست است. پس فرض اولیه ما اشتباه خواهد بود و استنتاج گزینه (۴) درست است.

۲ـ گزینه «۲» کافیست «و» را به ضرب و «یا» را به جمع تبدیل نمائیم. با توجه به فرضیات خلاص $= x_۱$، پارک $= x_۲$ و کمربند $= x_۳$ عبارت بولی معادل به صورت $(x_۱ + x_۲)x_۳$ خواهد بود.

۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. مجموع مینترم‌ها و حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها به صورت $PDNF = \sum m(۱,۳)$ و $PCNF = \prod M(۰,۲)$ می‌باشد.

۴ـ گزینه «۳» عبارت معادل به شکل زیر خواهد بود:

$$A = (\overline{x+y} + \overline{x+\overline{y}})(z+y) = (\overline{x}\,\overline{y} + xy)(z+y) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,y + xyz + xyy$$

عبارت $\overline{x}\,\overline{y}\,y$ یک تناقض است و عبارت xyy با xy هم‌ارز است. با توجه به اینکه xyz حالت خاصی از xy است، عبارت A می‌تواند به صورت $A = \overline{x}\,\overline{y}\,z + xy$ بازنویسی شود. حال اگر عبارت xy را در $(z+\overline{z})$ ضرب نمائیم. حاصل عبارت تغییر نمی‌کند ولی به فرم زیر می‌رسیم:

$$A = \overline{x}\,\overline{y}z + xy = \overline{x}\,\overline{y}\,z + xy(z+\overline{z}) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + xyz + xy\overline{z}$$

۵ـ گزینه «۳» عبارت $p(x,y)$ به صورت $p(x,y): y = x(x+۱)$ قابل بازنویسی است در چنین تابعی همواره عبارت $\forall x \exists y P(x,y)$ صحیح است. عبارت $\exists x \exists y\, p(x,y)$ حالت خاصی از عبارت قبل است که همواره درست خواهد بود. شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت $\forall y \exists x\, p(x,y)$ این است که تابع مذکور پوشا باشد. با توجه به اینکه y مقادیر کوچکتر از $-\frac{۱}{۴}$ را نمی‌پذیرد، این تابع پوشا نیست و عبارت $\forall y \exists x\, p(x,y)$ نادرست خواهد بود.

۶ـ گزینه «۳» در منطق گزاره‌ها، هر قضیه یک گزاره راستگو (همیشه درست) است و بالعکس.

۷ـ گزینه «۱» مقدار تابع ارزش یک گزاره زمانی ۱ است که گزاره مربوطه همیشه درست (درست‌نما) باشد.

۸ـ گزینه «۲» با توجه به قواعد هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$\neg(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\varphi) \equiv \varphi$$

در نتیجه گزاره $\sim(\varphi \rightarrow \sim \varphi)$ با φ هم‌ارز است.

۹ـ گزینه «۴» جدول درستی عبارت $\sim(p \rightarrow q)$ به صورت مقابل است:

p	q	$\sim(p \leftrightarrow q)$
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰

صورت نرمال عطفی این عبارت به صورت ترکیب عطفی ماکسترم‌های با مقدار ۰ یعنی $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ خواهد بود.

۱۰ـ گزینه «۳» در صورتی که مقدار هر سه گزاره ساده p_0، p_1، p_2 و p_3 را برابر False بگیریم، تمام گزاره‌های مجموعه دارای ارزش True خواهند شد. در نتیجه این مجموعه سازگار است.

۱۱ـ گزینه «۲» با جایگزینی y با x به عبارت $\exists x(x<x)$ می‌رسیم.

۱۲ـ گزینه «۲» فرض کنید دامنه تعریف ψ,φ برابر $\{1,2,3,4\}$ باشد و داشته باشیم $\varphi(1)=\varphi(2)=\psi(3)=\psi(4)=true$. در این صورت در رابطه a عبارت سمت چپ صحیح و عبارت سمت راست غلط خواهد بود. در رابطه b نیز عبارت سمت راست صحیح و عبارت سمت چپ غلط خواهد بود.

۱۳ـ گزینه «۴» می‌بایست سورها را در سمت چپ عبارت بنویسیم. در عبارت $\exists x\varphi(x)\to\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))$ از متغیر x دو مرتبه استفاده شده است که ارتباطی با هم ندارند. به همین منظور متغیر اول را به z تغییر می‌دهیم. در نتیجه به عبارت $\exists z\varphi(z)\to\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\psi(x,y)\to\neg(\varphi(y)))$ خواهیم رسید.
با استفاده از قاعده هم‌ارزی $\exists xp(x)\to Q\equiv\sim(\exists xp(x))\vee Q$ به عبارت $\neg(\exists z\varphi(z)\vee\exists x(\varphi)(x)\wedge\forall y(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))$ و با استفاده از قاعده هم‌ارزی $\sim(\exists xp(x))\equiv\forall x(\sim p(x))$ به عبارت $\forall z(\neg\varphi(z)\vee\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))$ می‌رسیم که به صورت عبارت $\forall z\exists x\forall y(\varphi(z)\to(\varphi(x)\wedge(\psi(x,y)\to\neg\varphi(y)))$ قابل بازنویسی است.

۱۴ـ گزینه «۳» برای عبارت گزینه (۳) خواهیم داشت:
$$(A\to\neg A)\to\neg A\equiv(\neg A\vee\neg A)\to\neg A\equiv\sim A\to\neg A\equiv A\vee\neg A\equiv T$$

۱۵ـ گزینه «۴» مقادیر $v(A)$ و $v(B)$ مقدار ۰ یا ۱ دارند. مقدار $v(A\vee B)$ زمانی برابر ۰ است که $v(A)$ و $v(B)$ برابر ۰ باشند و در غیر این صورت برابر ۱ است. این رابطه را می‌توان به صورت $\max\{v(A),v(B)\}$ نوشت.

۱۶ـ گزینه «۲» با استفاده از قوانین هم‌ارزی خواهیم داشت:
$$A\wedge B\leftrightarrow A\equiv(A\wedge B\to A)\wedge(A\to A\wedge B)\equiv(\neg(A\wedge B)\vee A)\wedge(\neg A\vee(A\wedge B))$$
$$\equiv(\neg A\vee\neg B\vee A)\wedge((\neg A\vee A)\wedge(\neg A\vee B)\equiv T\wedge(\neg A\vee B)\equiv A\to B$$
در نتیجه $A\to B$ نیز همانگویی است.

۱۷ـ گزینه «۱» با استناد به قانون دمورگان داریم:
$$\neg(p\wedge\neg q)\equiv\neg p\vee q$$

۱۸ـ گزینه «۴» هر گزاره اتمی می‌تواند دارای دو ارزش درستی و نادرستی باشد. توجه به اینکه ارزش تمام گزاره‌های اتمی مجموعه p می‌تواند درست باشد، این مجموعه سازگار خواهد بود.

۱۹ـ گزینه «۲» کافی است متغیر z را جایگزین متغیر x نمائیم تا به عبارت $\forall z(z+z=0)$ برسیم.

۲۰ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه x جزء متغیرهای آزاد B نمی‌باشد، خواهیم داشت:
$$\exists xA(x)\to B\equiv\exists x(A(x)\to B)$$

۲۱ـ گزینه «۲» در یک مدل یک عضوی، حوزه سخن متغیرهای x، y و z تنها یک مقدار خواهد بود و این ۳ متغیر همواره با هم برابر هستند. در نتیجه عبارت $(x=y)\wedge(y=z)$ درست است.

۲۲ـ گزینه «۱» طبق قوانین هم‌ارزی که در این فصل مطرح شد، برای گزینه‌های (۳) و (۴) داریم:
$$P_2\to P_0\Leftrightarrow\neg P_2\vee P_0$$
$$\neg(P_2\to P_0)\Leftrightarrow P_2\wedge\neg P_0$$
برای عبارت گزینه (۲) نیز می‌توان نوشت:
$$P_1\vee P_2\to P_0\equiv\neg(P_1\vee P_2)\vee P_0\equiv(\neg P_1\wedge\neg P_2)\equiv(\neg P_1\wedge P_0)\wedge(\neg P_2\vee P_0)$$
که $(\neg P_2\vee P_0)$ از $P_2\to P_0$ و $(\neg P_1\vee P_0)$ از $P_1\leftrightarrow P_0\wedge\neg P_2$ قابل نتیجه‌گیری است.

۲۳ـ گزینه «۲» گزاره $A \vee B \to A$ به ازای $A = False$ و $B = True$ نادرست است، در نتیجه این عبارت یک همانگویی نیست.

۲۴ـ گزینه «۳» گزارهٔ $p \vee q$ در فرم صورت نرمال عطفی است.

۲۵ـ گزینه «۴» عبارت $\exists(x)A(x) \vee \exists(x)B(x)$ زمانی درست است که xی وجود داشته باشد که با قرار گرفتن در حداقل یکی از این دو گزاره‌نما بـه عبارت درست برسیم. این عبارت با $\exists(x)(A(x) \vee B(x))$ هم‌ارز است.

۲۶ـ گزینه «۳» جمله $\exists x \exists y(x \neq y)$ در هر مدل با حداقل دو عضو برقرار است، زیرا به ازای هر x می‌توان عضو مخالف x را برای y انتخاب نمود.

۲۷ـ گزینه «۴» در صورتی که متفاوت بودن ارزش گزاره‌ها اهمیت نداشته باشد، تعداد گزاره‌ها نامتناهی خواهد بود ولی از این بین به تعداد $۲^{۲^n}$ گـزاره بـا ارزش‌های متمایز می‌توانیم داشته باشیم.

۲۸ـ گزینه «۱» در حالت کلی از درستی $A(x)$ به ازای xی از حوزه سخن A نمی‌توان درستی $A(y)$ به ازای همه مقادیر حوزه سخن را نتیجه گرفت.

۲۹ـ گزینه «۲» مجموعه‌های $\{\uparrow\}$، $\{\neg, \to\}$ و $\{\to, \perp\}$ مجموعه‌هـای تمـام هسـتند ولی مجموعـه $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ بـه دلیـل عـدم وجـود "$\neg$" مجموعه‌ای تمام نیست.

۳۰ـ گزینه «۳» جدول صحت گزاره $((\neg P_۱) \vee P_۲) \to P_۳$ را رسم می‌کنیم. سپس حاصل‌ضرب ماکسترم‌هایی که برابر صفر شده‌اند را به دست می‌آوریـم تا مشابه گزینه‌های سؤال به فرم PCNF برسیم.

$P_۱$	$P_۲$	$P_۳$	$((\neg P_۱) \vee P_۲) \to P_۳$	
۰	۰	۰	۰	$\to P_۱ \vee P_۲ \vee P_۳$
۰	۰	۱	۱	
۰	۱	۰	۰	$\to P_۱ \vee \neg P_۲ \vee P_۳$
۰	۱	۱	۱	
۱	۰	۰	۱	
۱	۰	۱	۱	
۱	۱	۰	۰	$\to \neg P_۱ \vee \neg P_۲ \vee P_۳$
۱	۱	۱	۱	

۳۱ـ گزینه «۱» در عبارت ۱: $p(x)$ به ازای عضوی مانند $x_۰$ از حوزه سخنش درست است. با توجه به اینکه $p(x) \to Q(y)$ به ازای تمام مقـادیر حـوزه سخن p و Q درست هستند. $p(x_۰) \to Q(y)$ نیز می‌بایست به ازای تمام مقادیر حوزه سخن Q درست باشد. در نتیجه $\forall y \; Q(y)$ درست خواهد بود.

۳۲ـ گزینه «۱» گزارهٔ $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ راستگو است. زیرا:

$$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p \equiv (\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \to \neg p \equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \to \neg p \equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee False) \to \neg p$$
$$\equiv (\neg q \wedge \neg p) \to \neg p \equiv True$$

برای عبارت گزینه (۱) خواهیم داشت:

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q \equiv ((\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)) \to q \equiv (False \vee (\neg p \wedge q)) \to q \equiv (\neg p \wedge q) \to q \equiv True$$

۳۳ـ گزینه «۲» گزاره‌های ناهم‌ارز با استفاده از نمادهای مذکور عبارتند از: $P_۱, P_۲, P_۱ \wedge P_۲, P_۱ \vee P_۲$

۳۴ـ گزینه «۱» برای عبارت گزینه (۱) با تغییر متغیر $A:P\wedge Q$ و $B:Q\vee R$ خواهیم داشت:

$$\neg[(P\wedge Q)\to(Q\vee R\to S)]\vee[(p\wedge Q\to Q\vee R)\to(P\wedge Q)\to S]\equiv\neg(A\to(B\to S))\vee((A\to B)\to(B\to S))$$
$$\equiv(A\to(B\to S))\to((A\to B)\to(B\to S))$$

عبارت فوق یک گزاره همواره درست است. زیرا هر زمان که حکم شرط یعنی $((A\to B)\to(B\to S))$ نادرست است (یعنی در حالتی که $A\equiv B\equiv True$ و $S\equiv False$) فرض شرط یعنی $(A\to(B\to S))$ نیز نادرست خواهد بود.

۳۵ـ گزینه «۱» تعداد فرمول‌های درست‌ساخت هر عبارت برابر با تعداد پرانتزگذاری‌های آن عبارت می‌باشد و برای فرمول‌های n متغیره برابر جمله $n-1$ام از اعداد کاتالان است.

$$C_{3-1}=\frac{1}{1+2}\binom{4}{2}=2$$

۳۶ـ گزینه «۱» معادل این عبارت به شکل زیر است:

هر شخص (x)، که دانش‌آموز باشد $(S(x))$، اگر همه اشخاص (y) که استاد هستند $(Q(y))$ را دوست داشته باشد $(P(x,y))$، در آن صورت خودش را دوست خواهد داشت $(P(x,x))$. عبارت منطقی معادل به شکل زیر است:

$$\forall x[[S(x)\wedge\forall y(Q(y)\to P(x,y))]\to P(x,x)]$$

۳۷ـ گزینه «۱» از درستی $A(x)$ به ازای عضوی مانند x از حوزه سخن A نمی‌توان به درستی $A(x)$ به ازای همه مقادیر حوزه سخن A رسید. X سمت چپ شرط ارتباطی با x سمت راست شرط ندارد.

۳۸ـ گزینه «۴» در گزینه (۴) فرض می‌کنیم حکم استنتاج یعنی $\neg C$ نادرست باشد. در نتیجه C درست خواهد بود. در صورتی که بتوانیم مقادیر صحیحی برای سایر گزاره‌ها با مقداردهی به گزاره‌های ساده بیابیم، این استنتاج معتبر نخواهد بود. در صورتی که R و A درست باشند، از یک فرض درست به یک حکم نادرست خواهیم رسید و این استنتاج معتبر نیست.

۳۹ـ گزینه «۳» مجموعه‌های $\{\uparrow\}$، $\{\downarrow\}$ و $\{\neg,\to\}$ کامل تابعی هستند. ولی با مجموعه $\{\vee,\to\}$ نمی‌توان عملگر نقیض را بازسازی نمود.

۴۰ـ گزینه «۲» عبارت ذکر شده همواره درست می‌باشد. زیرا به ازای تمام مقادیری که حکم شرط نادرست است، (A و B درست و C نادرست) فرض شرط نیز نادرست خواهد بود.

۴۱ـ گزینه «۲» دو جمله a و b را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

a: عددی (عضو مجموعه اعداد صحیح نامنفی) وجود دارد که از تمام اعداد صحیح نامنفی بزرگتر باشد.

b: برای هر عدد صحیح نامنفی، عدد صحیح نامنفی وجود دارد که از آن کوچکتر باشد.

عبارت a نادرست است زیرا چنین عددی وجود ندارد. عبارت b نادرست است زیرا عدد صفر مثال نقضی برای این عبارت است.

۴۲ـ هر چهار گزینه صحیح هستند. با توجه به اینکه تمام فرضیات درست هستند. دنبال عبارتی هستیم که همواره درست باشد. $q\wedge\omega$ درست است. درنتیجه q و ω می‌بایست درست باشند. $p\to q$ درست است. در نتیجه p باید درست باشد. $p\to(s\wedge r)$ درست است. در نتیجه s و r می‌بایست درست باشند. $(\sim\omega\vee z)\vee s\sim$ درست است. در نتیجه z نیز باید درست باشد. تمام نتایج ذکر شده معتبر است.

۴۳ـ گزینه «۱» کاربرد عملگر نقیض به صورت $\sim(\forall x\, p(x))\equiv\exists x\sim p(x)$ است.

با توجه به اینکه $\sim(xy<4)\equiv xy\ge 4$ و $\sim(x+y<5)\equiv x+y\ge 5$ است پاسخ مسأله عبارت گزینه (۱) خواهد بود.

۴۴ـ گزینه «۱» دو عبارت $(\forall x:(P\Rightarrow\exists y:Q))$ و $((\forall x:P)\Rightarrow(\exists y:Q))$ در شرایط ذکر شده هم‌ارز هستند و ترکیب شرطی آنها هم‌ارز با True خواهد بود.

۴۵ـ گزینه «۳» با توجه به مسأله نتیجه می‌شود $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_n \equiv \text{False}$ در نتیجه عبارت گزینه (۳) ارزش درست خواهد داشت.

۴۶ـ گزینه «۲» با استفاده از قوانین هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$(\sim P \wedge (\sim Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \equiv (\sim (P \vee Q) \wedge R) \vee R \wedge (P \vee Q) \equiv R \wedge \sim (P \vee Q) \vee (P \vee Q) \equiv R \;\Rightarrow x \equiv R$$

۴۷ـ گزینه «۱» با استفاده از قوانین هم‌ارزی داریم:

$$(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \sim q \vee r) \equiv \sim (p \vee q) \vee p \vee \sim q \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee p \vee r \equiv p \vee \sim q \vee r$$

در رابطه فوق از قانون جذب $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \equiv \sim q$ استفاده شده است. در نهایت عبارت گزینه (۱) به دست آمده است.

۴۸ـ گزینه «۳» نقیض عبارت صورت سؤال همواره درست خواهد بود:

$$\sim (\exists N > 0 \;\; \forall n > N : |a_n - a_{n-1}| < 7) \equiv \forall N > 0 \; \exists n > N : |a_n - a_{n-1}| \geq 7$$

عبارت $|a_n - a_{n-1}| \geq 7$ معادل با عبارت « $a_{n-1} - a_n \geq 7$ یا $a_n - a_{n-1} \geq 7$ » است و شرط $\forall N \geq 5$ حالت خاصی از شرط $\forall N > 0$ است. در صورتی که حالت کلی برقرار باشد (که برقرار است) حالت خاص نیز برقرار خواهد بود.

۴۹ـ گزینه «۴» استدلال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. p باید درست باشد. از درستی $p \to r$ می‌توان نتیجه گرفت r نیز باید درست باشد. از درستی $p \to (q \vee \sim r)$ نیز می‌توان نتیجه گرفت q باید درست باشد و از صحت $\sim q \vee \sim s$ می‌توان نتیجه گرفت $\sim s$ می‌بایست درست و s باید نادرست باشد. در نتیجه، از فرضیات استدلال گزینه (۴) به حکم $\sim s$ خواهیم رسید.

۵۰ـ گزینه «۱» با توجه به قوانین هم‌ارزی‌ها خواهیم داشت: $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} = \exists x \forall y \overline{P(x,y)}$

۵۱ ـ گزینه «۱» عبارت «هر عدد x اگر عدد اول و بزرگتر از 10^{60} باشد، آنگاه x متعلق به یک جفت دوقلوی اول نیست» معادل گزاره گزینه (۱) می‌باشد که با عبارت خواسته شده در صورت سؤال هم‌ارز است.

۵۲ـ گزینه «۳» با توجه به صحت گزاره $p \wedge q$، هر دو گزاره p و q می‌بایست درست باشند و با توجه به صحت گزاره $p \to r \wedge q$، گزاره r نیز می‌بایست درست باشد. از صحت $\sim s$ به نادرستی s می‌رسیم و از صحت گزاره $r \to s \vee t$ به درستی t خواهیم رسید. در نتیجه در گزاره q و t و ترکیب عطفی آن‌ها درست خواهد بود.

۵۳ـ گزینه «۲» گزاره $\forall x \exists y p(x,y)$ با عبارت «برای هر عدد حقیقی x عدد حقیقی y وجود دارد که $x + y = 0$ باشد» گزاره $\exists y \forall x p(x,y)$ با عبارت «عددی حقیقی وجود دارد که قرینه همه اعداد حقیقی باشد» است. در نتیجه گزاره اول درست و گزاره دوم نادرست است.

۵۴ـ گزینه «۱» گزاره‌نمای $p(x,y)$ به صورت مقابل قابل تعریف است: $p(x,y): x^2 < y^2 \to x < y$

عبارت $\forall x \forall y P(x,y)$: نادرست است زیرا این رابطه $p(x,y)$ به ازای $x = 1$ و $y = -2$ برقرار نیست.

عبارت $\forall x \exists y P(x,y)$: درست است؛ زیرا به ازای هر x حداقل یک y یافت می‌شود که در معادله $p(x,y)$ صدق کند.

عبارت $\forall y \exists x P(x,y)$: درست است؛ زیرا به ازای هر y حداقل یک x یافت می‌شود که در معادله $p(x,y)$ صدق کند.

عبارت $\exists x \exists y P(x,y)$: درست است زیرا رابطه $p(x,y)$ به ازای $x = 0$ و $y = 1$ برقرار است.

۵۵ـ گزینه «۳» عبارت $p(x)$ به ازای x عضو مجموعه $\{0, -4, -8, -12, \ldots\}$ درست است و به ازای سایر مقادیر x نادرست است. در نتیجه عبارت‌های A و C نادرست هستند. عبارت‌های B و D فرم شرطی دارند و فرض شرط آنها نادرست است در نتیجه این دو عبارت درست خواهند بود.

۵۶ـ گزینه «۴» استدلال گزینه‌ی (۴) را بررسی می‌کنیم. p باید درست باشد. از درستی $p \to r$ می‌توان نتیجه گرفت r نیز باید درست باشد. از درستی $p \to (q \vee \sim r)$ نیز می‌توان نتیجه گرفت q باید درست باشد و از صحت $\sim q \vee \sim s$ می‌توان نتیجه گرفت $\sim s$ می‌بایست درست و s باید نادرست باشد. در نتیجه، از فرضیات استدلال گزینه (۴) به حکم $\sim s$ خواهیم رسید.

۵۷ـ گزینه «۱» با توجه به قوانین هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$\overline{\forall x\, \exists y\, p(x,y)} \equiv \exists x\, \forall y\, \overline{p(x,y)}$$

۵۸ـ گزینه «۲» جمله « بعضی اشیاء براق طلا هستند» با فرض اینکه منظور از $Glitter(x)$ براق بودن و منظور از $Gold(x)$ طلا بودن است به صورت: $\exists x\, Glitter(x) \wedge Gold(x)$ قابل تعریف است.

۵۹ـ گزینه «۲» با توجه به قوانین هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

۶۰ـ گزینه «۳» جمله «بعضی گربه‌ها سیاه هستند» با فرض اینکه $C(x)$ به معنی گربه بودن و $B(x)$ به معنی سیاه بودن باشد به صورت $\exists x\, C(x) \wedge B(x)$ قابل تعریف است.

۶۱ـ گزینه «۳» با توجه به گزاره $p(x,y): x \le y$:

گزاره $\forall x \forall y\, P(x,y)$ نادرست است؛ زیرا $p(x,y)$ به ازای $x=1$ و $y=0$ برقرار نیست.

گزاره $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ صحیح است؛ زیرا برای هر x می‌توان $y=x$ را مثال زد که در رابطه $p(x,y)$ صدق کند.

گزاره $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$ صحیح است؛ زیرا رابطه $p(x,y)$ به ازای $x=0$ و هر مقدار دلخواه برای y برقرار است.

گزاره $\exists x\, \exists y\, P(x,y)$ صحیح است. زیرا رابطه $p(x,y)$ به ازای $x=y=1$ برقرار است.

فصل سوم

«رابطه‌های بازگشتی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ــ می‌خواهیم تابعی بازگشتی برای بیان تابع زیر که روی اعداد صحیح تعریف می‌گردد، بنویسیم.

گزینه صحیح کدام است؟ $n \geq 0$ و $F(n) = 2n - 1 + 2^n$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $F(n) = 4F(n-1) - 3F(n-2) - 5$ ، $F(0) = 0$ ، $F(1) = 3$

۲) $F(n) = 3F(n-1) - 2F(n-2) - 5$ ، $F(1) = 3$ ، $F(2) = 7$

۳) $F(n) = 4F(n-1) - 5F(n-2) - 2F(n-3)$ ، $F(0) = 0$ ، $F(1) = 3$ ، $F(2) = 7$

۴) $F(n) = 4F(n-1) - 5F(n-2) - 5$ ، $F(0) = 0$ ، $F(1) = 3$

۲ــ دنباله اعداد فیبوناچی به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ , \ n \geq 2$$

حاصل عبارت $i \geq 2$ و $S_i = F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{i-1}F_i$ چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $S_i = \begin{cases} 3S_{i-1} - S_{i-2} + 1 & \text{زوج} \ , \quad i \ , i \geq 4 \\ 3S_{i-1} - S_{i-2} & \text{فرد} \ , \quad i \ , i \geq 3 \end{cases}$

۲) $S_i = F_{i+1}F_{i-1} - 1 \ , \quad i \geq 3$

۳) $S_i = (F_{i/2-1}F_{i/2} + F_{i/2}F_{i/2+1})^2$

۴) $S_i = \begin{cases} F_i^2 & \text{زوج} \ , \quad i \ , i \geq 2 \\ F_i^2 - 1 & \text{فرد} \ , \quad i \ , i \geq 3 \end{cases}$

۳ــ فرض کنید به ازای $n = 2^k$ داشته باشیم $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 3$ و در این صورت به ازای $n = 2^k$، $f(n)$ به‌صورت .... است.

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

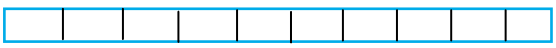
۱) $f(n) = an + b$ ۲) $f(n) = a2^n + b$ ۳) $f(n) = an + b\log_2 n$ ۴) $f(n) = a\log_2 n + b$

۴ــ فرض کنید $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ و در این صورت a_n به صورت .... است. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $a_n = b2^n + cn$ ۲) $a_n = b2^n + c2^n$ ۳) $a_n = b2^n + c(-1)^n$ ۴) $a_n = b3^n + c(-1)^n$

۵ــ نواری به طول ۱۰ مطابق شکل در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان برخی از خانه‌های نوار را سیاه کرد، به‌طوری که هیچ سه‌خانه سفیدی کنار همدیگر نباشند؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)



۱) ۱۰۰۲ ۲) ۲۷۴

۳) ۱۴۹ ۴) ۶۴

۶ــ اگر $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ و $a_0 = a_1 = 1$ باشد، در این صورت با α , β اعداد ثابت، a_n برابر است با ..... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $a_n = \alpha 3^n + \beta$ ۲) $a_n = \alpha 2^n + \beta$ ۳) $a_n = \alpha 3^n + \beta(-1)^n$ ۴) $a_n = \alpha(-1)2^n + \beta 3^n$

۷ـ دنباله فیبوناچی به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$۱)\ FIB(۰) = FIB(۱) = ۱$

$۲)\ FIB(n) = FIB(n-۱) + FIB(n-۲)\ ,\ n \geq ۲$

مقدار $FIB(۸)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) ۳۴ ۲) ۲۱ ۳) ۵۵ ۴) ۱۳

۸ـ فرض کنید $[a]$ نمایانگر بخش صحیح یک عدد حقیقی a باشد، یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از a بزرگتر نباشد. دنباله S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$۱)\ S(۰) = ۰\ ,\ S(۱) = ۱$

$۲)\ S(n) = S([n/۲]) + S([n/۵])\ ,\ n \geq ۲$

آنگاه مقدار $S(۷۳)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۹ـ دنباله $a(n) = ۳ \times ۲^n - n - ۳$ حل کدام رابطه بازگشتی می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $a_n = ۲a_{n-۱} - ۲a_{n-۲}$

۲) $a_n = ۵a_{n-۱} - ۸a_{n-۲} + ۴a_{n-۳} - ۱$

۳) $a_n = ۴a_{n-۱} - ۵a_{n-۲} + ۲a_{n-۳}$

۴) $a_n = ۴a_{n-۱} - ۵a_{n-۲} + a_{n-۳}$

۱۰ـ برای یک سیستم کامپیوتری یک رشته دهدهی، یک کلمه رمز معتبر است، اگر شامل تعداد زوج صفر باشد. یک رابطه بازگشتی برای تعداد کلمات رمز معتبر به طول n عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $a_n = ۸a_{n-۱} + ۱۰$ ، $a_۱ = ۹$

۲) $a_n = ۹a_{n-۱}$ ، $a_۱ = ۱۰$

۳) $a_n = ۱۰a_{n-۱} - ۸$ ، $a_۱ = ۹$

۴) $a_n = ۸a_{n-۱} + ۱۰^{n-۱}$ ، $a_۱ = ۹$

۱۱ـ جواب رابطه بازگشتی $۲a_{n+۲} = ۳a_n - a_{n+۱}$ کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $a_n = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}(-۱)^n$ ۲) $a_n = \frac{۳}{۵} + \frac{۲}{۵}(-\frac{۳}{۲})^n$ ۳) $a_n = \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵}(-\frac{۲}{۳})^n$ ۴) $a_n = ۱ + (-۱)^n n$

۱۲ـ رابطه بازگشتی برای $T(n)$، تعداد مقایسه‌های لازم برای اجرای جستجوی دوتایی (binary search) یک لیست مرتب شده با n عضو چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $T(n) = T(n-۱) + ۱$ ۲) $T(n) = T(\frac{n}{۲}) + ۱$ ۳) $T(n) = ۲T(\frac{n}{۲}) + ۱$ ۴) $T(n) = ۲T(n-۱) + ۱$

۱۳ـ فرض کنید a_n، تعداد رشته‌هایی است به طول n که از ۰، ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند و در ضمن شامل دو صفر یا دو یک پشت سر هم نیستند. رابطه بازگشتی برای a_n کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $a_۰ = ۱\ ,\ a_۱ = ۳\ ,\ ۲a_{n-۲} + a_{n-۱} + ۲$

۲) $a_۰ = ۱\ ,\ ۲a_{n-۱} + ۱$

۳) $a_۰ = ۱\ ,\ a_۱ = ۳\ ,\ ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$

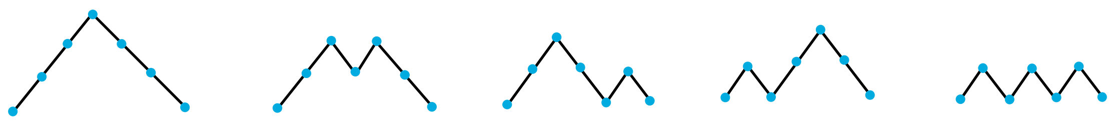
۴) $a_۰ = ۱\ ,\ a_۱ = ۳\ ,\ ۳a_{n-۲} + a_{n-۱} + ۱$

۱۴ـ پاسخ معادله بازگشتی $F(n) = nF(n-۱) + n!$ به ازای چه مقدار برای $F(۱)$ برابر است با $F(n) = (n+۱)!$؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

۱۵ـ مسیرهایی را در یک آرایه در نظر بگیرید که فقط به‌طور مورب حرکت می‌کنند. حرکت‌ها فقط قدم‌های قطری NE (شمال شرقی) و SE (جنوب شرقی) است و نقطه شروع و نقطه خاتمه هر دو در امتداد $y = ۰$ است (محور افقی). اگر تعداد چنین مسیرهایی به طول $۲n$ برابر $C(n)$ باشد، با استفاده از روش‌های بازگشتی رابطه $C(n)$ را پیدا کنید. مثلاً برای $n = ۳$ تعداد این مسیرها ۵ است:

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۴)



۱) $C(n+۱) = \sum_{k=۰}^{n} C(n-k)$ ۲) $C(n+۱) = \sum_{k=۰}^{n} C(k)C(n-k)$

۳) $C(n) = \sum_{k=۰}^{n} C(n-k) + C(k)$ ۴) $C(n) = \sum_{k=۰}^{n} C(n-k) + C(k+۱)$

۱۶ـ دنباله $a_1,a_2,...,a_n$ که $a_i \in \{-2,1,2\}$ ها را $k-$ تکه‌ای می‌نامیم، هرگاه $|a_1|+|a_2|+...+|a_n|=k$. فرض کنید b_k تعداد دنباله‌های $k-$ تکه‌ای متمایز باشد. مقدار b_5 چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۵)

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

۱۷ـ عدد $1, 2, \ldots, n$ را متوالیاً دور یک دایره (مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت) می‌چینیم.حال عدد ۲ را حذف می‌کنیم و سپس یک در میان، این کار را بین اعداد باقیمانده تکرار می‌کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند (مثلاً به ازای $n=5$ اعداد حذف شده به ترتیب ۲، ۴، ۱ و ۵ بوده و عدد ۳ باقی می‌ماند).
به ازای $n=37$، چه عددی باقی می‌ماند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۱۸ـ یک رمز یک رشته دهدهی است که: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)
شامل ۰ نباشد. شامل ۱۱، ۱۲، ۲۱ و ۲۲ نباشد.
اگر a_n تعداد رمزهای به طول n باشد، کدام رابطه درست است؟ (توضیح: رشته دهدهی رشته‌ای است که در آن فقط از ارقام ۰ تا ۹ استفاده شده باشد)

۱) $a_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2}$ ۲) $a_n = 77a_{n-2} + 8a_{n-3}$

۳) $a_n = 7a_{n-1} + 7a_{n-2}$ ۴) $a_n = 7a_{n-1} + 14a_{n-2}$

۱۹ـ رابطه بازگشتی $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ را با شرایط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ در نظر بگیرید. a_{15} کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) 2^{14} ۲) 2^{15}

۳) $2^{F_{15}}$ (که F_n دنباله فیبوناچی می‌باشد.) ۴) 2^{30}

۲۰ـ تعداد اعداد n رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ که در آنها هیچ‌گاه رقم ۵ در سمت راست ۴ قرار نگیرد را a_n می‌نامیم. در این صورت: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $a_n = 5a_{n-1} + a_{n-2}$ ۲) $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$ ۳) $a_n = 4a_{n-1} + 4^{n-1}$ ۴) $a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2}$

۲۱ـ دنباله $T: Z \geq 0 \to R$ با معادله بازگشتی زیر تعریف شده است. مرتبه پیچیدگی T به ساده‌ترین شکل ممکن (با استفاده از نماد θ) کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۶)

$$T(n) = \begin{cases} n & \text{if } n = 0 \text{ or } n = 1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}T^2(n-1) + \frac{1}{2}T^2(n-2) + n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

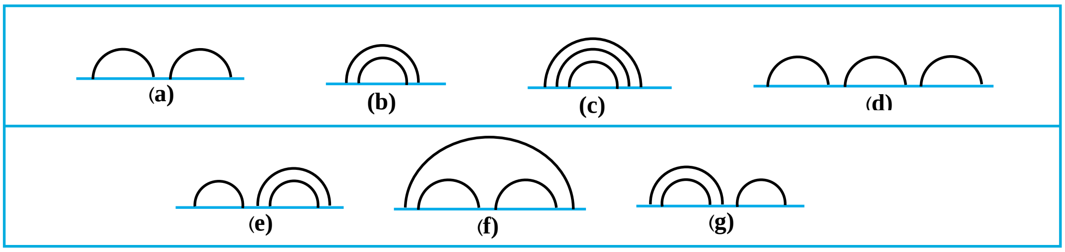
۱) $T(n) \in \theta(n)$

۲) $T(n) \in \theta(n^2)$

۳) $T(n) \in \theta(\log n)$

۴) $T(n) \in \theta(n \log n)$

۲۲ـ فرض کنید n نیم‌دایره را بر رو و بالای یک خط افقی رسم کنیم، به طوری‌که هیچ دو نیم‌دایره‌ای متقاطع نباشند. در شکل‌های (a) و (b) دو روش ممکن برای انجام این کار به ازای $n=2$ رسم شده است. نتایج برای $n=3$ در شکل‌های (c) تا (g) رسم شده است. تعداد روش‌های ممکن برای انجام این کار را به ازای $n=5$ بیابید. (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۶)



۱) ۱۱۰ ۲) ۶۴ ۳) ۵۶ ۴) ۴۲

۲۳ـ رابطه غیربازگشتی معادل رابطه بازگشتی $a_n = 2^n a_{n-1}$ ،$n > 0$ با شرط اولیه $a_0 = 1$ چیست؟ (علوم کامپیوتر ـ آزاد ۸۶)

۱) $a_n = 2^n$ ۲) $a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ۳) $a_n = 2^{\frac{n^2}{2}}$ ۴) $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

۲۴ـ جواب معادله بازگشتی $a_n = -2na_{n-1} + 3n(n-1)a_{n-2}$ با شرایط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ چیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۶)

۱) $a_n = \frac{n!}{4}[5-(-3)^n]$ ۲) $a_n = \frac{1}{4}[5-(-3)^n]$ ۳) $a_n = \frac{n!}{4}[3+5^n]$ ۴) $a_n = \frac{1}{4}[3+5^n]$

۲۵ـ تعداد راه‌های بالا رفتن از ۹ پله به شرط آنکه مجاز به بالا رفتن یک یا دو پله باشیم، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

۲۶ـ دترمینان ماتریس ۱۷×۱۷ زیر کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۷)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۱) 0
۲) 2^{16}
۳) 2^{17}
۴) $2^{16}(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$

۲۷ـ به چند روش می‌توان ۸ رخ را در صفحه شطرنج قرار داد، به طوری‌که نسبت به قطر اصلی صفحه متقارن قرار گرفته و هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری۸۷)

۱) ۹۸۲ ۲) ۷۶۴ ۳) ۵۶۴ ۴) ۲۳۲

۲۸ـ به چند روش می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را در دو ردیف ۵تایی زیر هم قرار داد به طوری‌که اعداد هر ستون و هر سطر به ترتیب صعودی مرتب باشند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری۸۷)

۱) ۱۶ ۲) ۲۱ ۳) ۳۲ ۴) ۴۲

۲۹ـ رشته‌های n بیتی را در نظر بگیرید که حاوی الگوی ۰۰۰ نیستند. کدام رابطه بازگشتی نشان‌دهنده تعداد این رشته‌ها می‌باشد؟ (شرایط اولیه دانسته فرض شده است). (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۷)

۱) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$ ۲) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$
۳) $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$ ۴) $S_n = S_{n-2} + S_{n-3} + S_{n-4}$

۳۰ـ رابطه بازگشتی برای تعداد مسیرهای موجود از گوشه پایین سمت چپ یک شبکه مربعی $n \times n$ به گوشه بالای سمت راست آن به شرطی‌که فقط به راست یا بالا بتوانیم حرکت کنیم و نتوانیم بالای خط قطری از گوشه چپ پایین به گوشه راست برویم، کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۷)

۱) $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-2}C_{n-k}$ ۲) $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-2} - C_{n-k-1}$
۳) $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$ ۴) $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k-1}$

۳۱ـ رشته‌های n بیتی را در نظر بگیرید که حاوی الگوی ۱۰ نیستند که هیچ صفر پیشروی ندارند (یعنی با ۱ شروع می‌شوند)، یک ۰ پیشرو دارند (یعنی با ۰۱ شروع می‌شوند)، دو ۰ پیشرو دارند و مانند آن. کدام رابطه بازگشتی نشان‌دهنده تعداد این رشته‌ها می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد۸۷)

۱) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} + \dots + S_1 + 3$ ۲) $S_n = S_{n-1} + S_{n-3} + S_{n-4} + S_{n-5} + \dots + S_1 + 3$
۳) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} + \dots + S_1 + 4$ ۴) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-4} + S_{n-5} + \dots + S_1 + 4$

۳۲ـ یک نماد θ برحسب n برای تعداد دفعاتی بیابید که $algor(l,n)$ فراخوانی می‌شود. (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد۸۷)

```
procedure algor(i,j)
   if  i=j  then
      return
 k := ⌊(i + j)/2⌋
 call algor (i,k)
 cal algor (k+1,j)
end algor
```

۱) $\theta(\lg n)$

۲) $\theta(n^2)$

۳) $\theta(n \lg n)$

۴) $\theta(n)$

۳۳ـ فرض کنیم $P(n,k)$ تعداد افرازهای n به دقیقاً k جمعوند (صحیح مثبت) باشد (جمعوند به هر یک از اعدادی گویند که حاصل‌جمع آنها برابر n شود). کدام رابطه بازگشتی در مورد $P(n,k)$ صحیح است؟ $(n,k \in z^+)$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $P(n,k) = P(n-k,k) + P(n-1,k)$

۲) $P(n,k) = P(n-k,k-1) + P(n-k,k)$

۳) $P(n,k) = P(n-k,k-1) + P(n-1,k-1)$

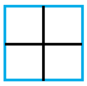
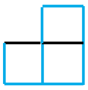
۴) $P(n,k) = P(n-k,k-1) + P(n-1,k)$

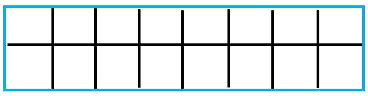
۳۴ـ تابع F به شکل زیر بر مجموعه اعداد طبیعی تعریف شده است:

$$F(n) = \begin{cases} n-10 & \text{اگر} \quad n > 100 \\ F(F(n+1)) & \text{اگر} \quad 0 < n \le 100 \end{cases}$$

مقدار $F(72)$ کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) ۷۲　۲) ۸۳　۳) ۹۱　۴) ۹۴

۳۵ـ تعداد حالات پوشاندن مستطیل 2×8 رو به رو با موزاییک‌های  و  برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)



۱) ۶　۲) ۸

۳) ۱۳　۴) ۱۰

۳۶ـ فرض کنید n یورو پول داریم و هر روز یا آب پرتقال (۱ یورو)، شیر (۲ یورو) یا شیر قهوه (۲ یورو) می‌خریم. اگر R_n تعداد راه‌های خرج کردن همه پول باشد، رابطه بازگشتی مربوطه کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۸)

۱) $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$

۲) $R_n = R_{n-1} + 2R_{n-2}$

۳) $R_n = 2R_{n-1} + R_{n-2}$

۴) $R_n = 2R_{n-1} + 2R_{n-2}$

۳۷ـ جواب رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{[\frac{n}{2}]} + n \;,\; n > 1$ با شرط اولیه $a_1 = 1$ در حالی که n توانی از دو عدد باشد، چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۸)

۱) $3 \times 3^{\log n} - 2n$

۲) $3 \times 2^{\log n} - 2n$

۳) $2n - 3 \times 2^{\log n}$

۴) $3^{\log n}$

۳۸ـ اگر $s(r,n)$ نمایش‌دهنده تعداد راه‌های توزیع r شیء متمایز در n جعبه نامتمایز باشد به‌طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، کدام رابطه صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $s(r,n) = s(r-1,n) + ns(r-1,n-1)$

۲) $s(r,n) = s(r-1,n-1) + ns(r-1,n)$

۳) $s(r,n) = s(r-1,n-1) + rs(r-1,n)$

۴) $s(r,n) = s(r-1,n) + rs(r-1,n-1)$

۳۹ـ مقدار a_3 در رابطه بازگشتی زیر کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۹)

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n \;, n \ge 0 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

۱) ۱۴　۲) ۱۶

۳) ۸　۴) ۲۰

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۳» معادله صریح رابطه به ازای $n \geq 0$ به صورت مقابل است:
$$F(n) = 2n(1)^n - 1(1)^n + 2^n$$

معادله $F(n)$ دارای دو ریشه با مقدار ۱ و یک ریشه با مقدار ۲ است. خواهیم داشت:

$$(r-1)^2(r-2) = 0 \Rightarrow r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0 \Rightarrow F(n) = 4F(n-1) - 5F(n-2) + 2F(n-3)$$

نیاز به محاسبه مقادیر اولیه نیز نخواهیم داشت. گزینه (۳) جواب مسأله خواهد بود.

۲ـ گزینه «۴» به جای عبارت F_iF_{i-1} می‌نویسیم $F_i(F_i - F_{i-2})$:

$$S_i = (F_1F_2 + F_2F_4 + \ldots + F_{i-2}F_{i-1}) + F_iF_{i-1} = (F_1F_2 + F_2F_4 + \ldots + F_{i-2}F_{i-1}) + F_i(F_i - F_{i-2})$$
$$\Rightarrow S_i = F_i^2 - F_iF_{i-2} + (F_{i-1}F_{i-2} + \ldots + F_2F_1) = F_i^2 - \cancel{F_{i-1}F_{i-2}} - F^2_{i-2} + (\cancel{F_{i-1}F_{i-2}} + \ldots + F_2F_1)$$

اگر همین روند را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$S_{2k} = F_{2k}^2 + F_2^2 + F_2F_1 = F_{2k}^2 - \cancel{F_2F_1} - F_2F_0 + \cancel{F_2F}_1 = F_{2k}^2 - 0 = F_i^2$$
$$\Rightarrow S_{2k+1} = F_{2k+1}^2 - F_3^2 + F_3F_2 + F_2F_1 = F_{2k+1}^2 - F_1^2 = F_{2k+1}^2 - 1$$

که برابر با عبارت گزینه (۴) است.

۳ـ گزینه «۴» متغیر $2^k = n$ را در معادله قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:
$$f(2^k) = f(2^{k-1}) + 3$$

از دنباله به فرم $g(k) = f(2^k)$ کمک می‌گیریم تا به فرم ساده‌تر برسیم. خواهیم داشت:
$$g(k) = g(k-1) + 3$$

فرم صریح دنباله $g(k)$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$g(k) = g(k-1) + 3 = (g(k-2) + 3) + 3 = \cdots = g(0) + 3k = 3k + d$$

که در رابطه فوق d یک مقدار ثابت است. حال مقدار f را از روی g محاسبه می‌کنیم:

$$f(n) = f(2^k) = g(k) = g(\log_2 n) = 3\log_2 n + d$$

که این رابطه معادله رابطه بازگشتی گزینه (۴) است.

۴ـ گزینه «۳» معادله مشخصه این رابطه بازگشتی به صورت مقابل است:
$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r-2)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -1$$

در نتیجه فرم کلی رابطه صریح به شکل $a_n = br_1^n + cr_2^n = b(2)^n + c(-1)^n$ خواهد بود.

۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. این مسأله را در حالت کلی حل می‌کنیم. فرض کنیم a_n تعداد حالاتی باشد که می‌توان برخی از خانه‌های یک نوار n خانه‌ای را سیاه کرد، به طوری که هیچ سه خانه سفیدی کنار هم نباشند. اگر اولین خانه را سیاه در نظر بگیریم، بقیه $n-1$ خانه را به a_{n-1} طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. حال اگر خانه اول را سفید در نظر بگیریم و خانه دوم را سیاه، بقیه $n-2$ خانه را می‌توان به a_{n-2} حالت رنگ‌آمیزی کرد و اگر دومین خانه را نیز سفید در نظر بگیریم، آنگاه سومین خانه حتماً باید سیاه باشد و بقیه $n-3$ خانه باقیمانده را به a_{n-3} طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد.

پس داریم:
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

جواب مسأله a_{10} است که با توجه به سه شرط اولیه می‌بایست مقادیر a_4 تا a_{10} را محاسبه نمائیم. خواهیم داشت:
$$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_3 = 7$$

$$a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 13 \qquad a_5 = 24 \qquad a_6 = 44 \qquad a_7 = 81 \qquad a_8 = 149 \qquad a_9 = 274 \qquad a_{10} = 504$$

۶ـ گزینه «۳» معادله مشخصه رابطه بازگشتی به صورت روبه‌رو می‌باشد:
$$r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 3$$

درنتیجه فرم کلی رابطه صریح این دنباله به صورت $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \alpha(3)^n + \beta(-1)^n$ خواهد بود.

۷ـ گزینه «۱» رابطه بازگشتی ارائه شده به شکل زیر است: (در دنباله فیبوناچی مقادیر اولیه به صورت $f_1 = f_2 = 1$ است و با این مثال متفاوت است)

$$FIB(n) = FIB(n-1) + FIB(n-2) \quad , \quad (n \ge 2)$$
$$FIB(0) = FIB(1) = 1$$

حال مقدار $FIB(8)$ را محاسبه می‌نمائیم:

$FIB(2) = 2 \quad FIB(3) = 3 \quad FIB(4) = 5 \quad FIB(5) = 8 \quad FIB(6) = 13 \quad FIB(7) = 21 \quad FIB(8) = 34$

۸ـ گزینه «۲» مقدار $S(73)$ به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$S(73) = S(36) + S(14) = (S(18) + S(7)) + (S(7) + S(2)) = (S(9) + S(3)) + 2(S(3) + S(1)) + (S(1) + S(0))$$
$$= (S(4) + S(1)) + (S(1) + S(0)) + 2(1+1) + 1 + 0 = (S(2) + S(0)) + 7 = S(1) + 7 = 8$$

۹ـ گزینه «۳» رابطه را به فرم مقابل می‌نویسیم: $a_n = 3(2)^n - 3(1)^n - 1(1)^n n$

در نتیجه با توجه به اینکه ریشه $r = 1$ دو مرتبه در رابطه صریح وجود دارد، معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$(r-2)(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$$

در نتیجه رابطه بازگشتی به صورت مقابل خواهد بود: $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$

۱۰ـ گزینه «۴» اگر a_n تعداد رشته‌های به طول n شامل تعداد زوج صفر و b_n تعداد رشته‌های به طول n شامل تعداد فرد صفر باشد، آنگاه داریم:

$$a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$$

طبق اصل جمع، حاصل‌جمع a_n و b_n برابر تعداد کل رشته‌های به طول n است یعنی: $a_n + b_n = 10^n$

حال مقدار a_n را مستقل از b_n محاسبه می‌کنیم.

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

۱۱ـ گزینه «۲» معادله مشخصه این رابطه بازگشتی به صورت مقابل است: $2r^2 + r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \ , \ r_2 = -\frac{3}{2}$

در نتیجه فرم کلی رابطه صریح به شکل مقابل خواهد بود. $a_n = c_1(1)^n + c_2(-\frac{3}{2})^n = c_1 + c_2(-\frac{3}{2})^n$

۱۲ـ گزینه «۲» در جستجوی دوتایی، هدف یافتن مکان یک کلید در یک آرایه مرتب با n عنصر است. اگر کلید با عنصر میانی آرایه برابر باشد، اندیس عنصر میانی بازمی‌گردد در غیر این‌صورت با توجه به بزرگتر یا کوچکتر بودن کلید از عنصر میانی، جستجو در یکی از دو زیر آرایه به اندازه $\frac{n}{2}$ انجام می‌گیرد. در واقع با هر مرتبه مقایسه، اندازه آرایه نصف می‌شود. خواهیم داشت:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$$

۱۳ـ گزینه «۳» حرف اول رشته یکی از سه حالت زیر است:

حالت اول: رشته با ۲ شروع گردد؛ در این حالت یک رشته با شرایط مسأله به طول $n-1$ در ادامه این حرف خواهد آمد. a_{n-1} حالت خواهیم داشت.

حالت دوم: رشته با ۱ شروع گردد؛ با توجه به اینکه دو حرف ۱ نمی‌توانند پشت سر هم ظاهر شوند، حرف دوم یکی از دو حالت زیر است:

۱ـ حرف دوم رشته ۲ باشد؛ رشته‌ای به طول $n-2$ با شرایط مسأله خواهیم داشت، یعنی a_{n-2} رشته.

۲ـ حرف دوم رشته ۰ باشد؛ در این حالت نیز مجدداً باید حرف بعدی بررسی گردد که می‌تواند ۱ یا ۲ باشد.

حالت ۱: حرف سوم رشته ۲ باشد، یعنی a_{n-3} حالت.

حالت ۲: حرف سوم رشته ۱ باشد؛ در این حالت نیز یک روند تکراری باید بررسی گردد.

حالت سوم: رشته با ۰ شروع گردد و مقدار این رشته‌ها با رشته‌هایی که با ۱ شروع می‌گردند، برابر است.

اگر روند تکراری رشته‌هایی را که با ۱ شروع می‌شوند، بررسی کنیم، تعداد این رشته‌ها برابر $a_{n-2}+a_{n-3}+\dots+a_0+1$ خواهد بود. در نتیجه تعداد کل رشته‌هایی که زیررشته ۰۰ و ۱۱ ندارند، برابر است با:

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2a_i + 2$$

برای حذف سیگما کافیست دو جمله پیاپی را از هم کم کنیم:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2a_i + 2 - a_{n-2} - \sum_{i=0}^{n-3} 2a_i - 2 \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \Rightarrow a_0 = 1\,,\ a_1 = 3$$

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مقدار $F(n)$ می‌بایست برابر $(n+1)!$ باشد خواهیم داشت:

$$F(n) = (n+1)! = nF(n-1) + n! = n(F(n-1) + (n-1)!) \Rightarrow F(n-1) + (n-1)! = (n+1)(n-1)! \Rightarrow F(n-1) = n! \Rightarrow F(1) = 2! = 2$$

۱۵ـ گزینه «۲» تعداد این مسیرها مطابق الگوی عدد کاتالان است. روش حل نیز مانند تعداد مسیرهای زیر قطر اصلی در صفحه مربعی با طول حداقل است.

۱۶ـ گزینه «۴» دنباله $k-$تکه‌ای به یکی از دو روش زیر ساخته می‌شود:

دنباله $(k-1)-$ تکه‌ای که به انتهای آن یک ۱ اضافه شده باشد، تعداد این دنباله‌ها برابر b_{k-1} است.

دنباله $(k-2)-$ تکه‌ای که به انتهای آن یک ۲ یا ۲− اضافه شده باشد. تعداد این دنباله‌ها برابر b_{k-2} است.

در نتیجه رابطه بازگشتی معادل b_k به صورت مقابل است: $b_k = b_{k-1} + 2b_{k-2} \quad , \quad b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = 3$

حال با تکرار مقادیر b_k به ازای $k \le 5$ را محاسبه می‌نمائیم: $b_3 = 5 \quad , \quad b_4 = 11 \quad , \quad b_5 = 21$

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به مسأله، رابطه بازگشتی، شماره باقیمانده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} T(2n) = 2T(n) - 1 \\ T(2n+1) = 2T(n) + 1 \\ T(1) = T(2) = 1 \end{cases}$$

بنابراین داریم: $T(37) = 2T(18) + 1 = 2(2T(9) - 1) + 1 = 2(2(2T(4) + 1) - 1) + 1 = 2(2(2(2T(2) - 1) + 1) - 1) + 1 = 11$

۱۸ـ گزینه «۴» حالات مختلف رشته‌ها به صورت زیر می‌باشد:

ـ رقم اول صفر باشد (غیرمجاز)

ـ رقم اول ۱ یا ۲ باشد. رقم دوم نباید ۱ یا ۲ باشد. ۷ حالت برای رقم دوم داریم و پس از آن a_{n-2} می‌آید. ($2 \times 7a_{n-2}$ حالت)

ـ رقم اول ۳، ۴، .. یا ۹ باشد. در ادامه یک رشته صحیح به طول $n-1$ یعنی a_{n-1} می‌آید. ($7a_{n-1}$ حالت)

بنابراین داریم: $a_n = 7a_{n-1} + 14a_{n-2}$

۱۹ـ گزینه «۲» از رابطه بازگشتی لگاریتم می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \Rightarrow \log_2 a_n = \log_2\left(\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}\right) = 2\log_2 a_{n-1} - \log_2 a_{n-2}$$

حال از تغییر متغیر $b_n = \log_2 a_n$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $a_n = 2^{b_n}$. رابطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\log_2 a_n = 2\log_2 a_{n-1} - \log_2 a_{n-2} \Rightarrow b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$$

ریشه‌های معادله مشخصه رابطه فوق را به دست می‌آوریم. $r^2 = 2r - 1 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

در نتیجه فرم کلی رابطه بازگشتی به صورت $b_n = c_1 + c_2 n$ خواهد بود. مقادیر اولیه دنباله b_n نیز از دنباله a_n قابل محاسبه است. فرم صریح b_n را محاسبه می‌کنیم.

$$b_0 = \log_2 a_0 = \log_2 1 = 0 \qquad b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$$

$$b_n = c_1 + c_2 n$$

$$\left.\begin{array}{l} b_0 = c_1 + c_2(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ b_1 = c_1 + c_2(1) = 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = c_1 + c_2 n = n$$

حال مقدار a_n را از b_n محاسبه می‌نمائیم: $a_n = 2^{b_n} = 2^n$

در نتیجه مقدار a_{15} برابر 2^{15} خواهد بود.

۲۰ـ گزینه «۳» در این دنباله در صورتی که رقم kام برابر ۵ باشد، هیچ‌کدام از ارقام سمت راست این رقم نمی‌توانند برابر ۵ باشد. ۲ حالت را برای رقم سمت چپ عدد n رقمی در نظر می‌گیریم:

ـ یکی از ارقام $\{1,2,3,4\}$ باشد. در این صورت در سمت راست این عدد، عددی مجاز با $n-1$ رقم قرار می‌گیرد. یعنی $4a_{n-1}$ حالت خواهیم داشت.

ـ رقم ۵ باشد. در این صورت تمام ارقام باقی مانده به صورت مستقل می‌توانند یکی از ارقام مجموعه $\{1,2,3,5\}$ باشند. یعنی 4^{n-1} حالت خواهیم داشت.

در نتیجه رابطه بازگشتی به صورت $a_n = 4a_{n-1} + 4^{n-1}$ خواهد بود.

۲۱ـ گزینه «۱» برای سادگی حل، از دنباله $a_n = T^2(n)$ استفاده می‌کنیم:

$$T^2(n) = \frac{1}{2}T^2(n-1) + \frac{1}{2}T^2(n-2) + n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2} + n$$

ریشه‌های معادله مشخصه بخش همگن رابطه بازگشتی را محاسبه می‌نمائیم. خواهیم داشت:

$$r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2}$$

جواب عمومی و خصوصی رابطه بازگشتی به فرم زیر خواهد بود:

$$a_n^{(h)} = c_1(1)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad a_n^{(p)} = n(d_1 n + d_2)$$

حال پیچیدگی T را از روی c_1 محاسبه می‌نمائیم:

$$\Rightarrow a_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + n(d_1 n + d_2) = \theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in \theta(n)$$

۲۲ـ گزینه «۴» تعداد راه‌های انجام این کار برای n نیم‌دایره برابر جمله nام از عدد کاتالان می‌باشد؛ بنابراین:

$$c_5 = \frac{1}{5+1}\binom{10}{5} = 42$$

۲۳ـ گزینه «۲» این رابطه با روش تکرار قابل حل است:

$$a_n = 2^n a_{n-1} = 2^n \times 2^{n-1} a_{n-2} = 2^{n+(n-1)+(n-2)} a_{n-3} = \dots = 2^{\sum_{i=1}^{n} i} a_0 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

۲۴ـ گزینه «۱» تعریف می‌کنیم $b_n = \frac{a_n}{n!}$. خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{-2n\,a_{n-1}}{n!} + \frac{3n(n-1)a_{n-2}}{n!} = -2\frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + 3\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\Rightarrow b_n = -2b_{n-1} + 3b_{n-2} \Rightarrow r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-1) = 0 \Rightarrow b_n = c_1(-3)^n + c_2(1)^n \Rightarrow a_n = n!b_n = n!(c_1(-3)^n + c_2)$$

می‌توان با مقداردهی برای a_0 ، a_1 مقادیر c_1 ، c_2 را نیز محاسبه نمود؛ ولی با توجه به اینکه فقط گزینه (۱) فرم کلی این عبارت را دارد، نیاز به این کار نیست.

۲۵ـ گزینه «۴» اگر a_n تعداد راه‌های رسیدن به پله nاُم باشد، به شرط آنکه در هر حرکت مجاز به بالا رفتن از یک یا دو پله باشیم، رابطه بازگشتی a_n به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \quad , \quad a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۲$$

منظور از $a_{n-۱}$ تعداد راه‌های بالا رفتن تا پله $n-۱$ و سپس حرکت یک‌پله‌ای و منظور از $a_{n-۲}$ تعداد راه‌های رسیدن تا پله $n-۲$ و سپس حرکت دوپله‌ای است.

با محاسبه مقادیر $a_۳$ به بعد، مقدار $a_۹$ را محاسبه می‌نمائیم:

$$a_۳ = ۱+۲ = ۳, a_۴ = ۳+۲ = ۵, a_۵ = ۵+۳ = ۸, a_۶ = ۸+۵ = ۱۳, a_۷ = ۱۳+۸ = ۲۱, a_۸ = ۲۱+۱۳ = ۳۴, a_۹ = ۳۴+۲۱ = ۵۵$$

۲۶ـ گزینه «۱» برای ماتریس A به فرم زیر مقدار دترمینان به صورت بازگشتی از رابطه $|A| = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i+۱} a_{۱i} |A_{۱,i}|$ محاسبه می‌گردد که $A_{۱,i}$ ماتریس تشکیل شده از حذف سطر اول و ستون iاُم ماتریس A است. به عنوان مثال، ماتریس $A_{۱,i}$ به فرم زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_{۱i} = \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲(i-۱)} & a_{۲(i+۱)} & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & \cdots & a_{۳(i-۱)} & a_{۳(i+۱)} & a_{۳n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{n(i-۱)} & a_{n(i+۱)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب فوق، رابطه بازگشت دترمینان ماتریس صورت سؤال برای حالت $n \times n$ از رابطه زیر محاسبه خواهد شد.

$$D_n = ۲D_{n-۱} - ۴D_{n-۲}, n \geq ۳ , D_۱ = ۲ , D_۲ = ۰ , D_۳ = -۸ , D_۴ = -۱۶ , D_۵ = ۰ , D_۶ = ۶۴ , D_۷ = ۱۲۸ , D_۸ = ۰$$

مقادیر $D_۲$، $D_۵$ و $D_۸$ برابر صفر شدند. با ادامه این روند مقادیر $D_{۱۱}$، $D_{۱۴}$ و $D_{۱۷}$ نیز برابر صفر خواهند بود.

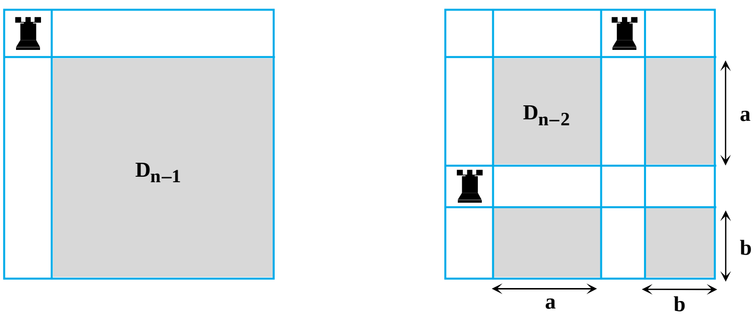
۲۷ـ گزینه «۲» تعداد راه‌هایی که می‌توان یک صفحه شطرنج $n \times n$ را به‌صورت گفته شده با n رخ پر کرد (D_n)، برابر است با مجموع اینکه:

الف: در سطر اول مهره در ستون اول قرار گیرد.

ب: در سطر اول مهره در یکی از $n-۱$ ستون به‌جز ستون اول قرار گیرد.

در حالت الف مهره روی قطر اصلی قرار دارد؛ بنابراین با حذف سطر و ستون اول می‌توان صفحه شطرنج $n-۱ \times n-۱$ باقی‌مانده را به $D_{n-۱}$ طریق پر کرد.

در حالت ب مهره روی قطر اصلی قرار ندارد؛ بنابراین بایستی مهره‌ای که با آن متقارن است نیز در جای خود قرار گیرد و با حذف این دو مهره و سطر و ستون‌های مربوط به آنها به یک صفحه شطرنج $n-۲ \times n-۲$ می‌رسیم که می‌توان آن را به $D_{n-۲}$ طریق پر نمود. شکل زیر این دو حالت را نشان می‌دهد:



بنابراین رابطه بازگشتی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_n = D_{n-۱} + (n-۱)D_{n-۲}$$

$$D_۱ = ۱ , D_۲ = ۲ , D_۳ = ۴ , D_۴ = ۱۰ , D_۵ = ۲۶ , D_۶ = ۷۶ , D_۷ = ۲۳۲ , D_۸ = ۷۶۴$$

۲۸ـ گزینه «۴» تعداد راه‌های انجام این کار از عدد کاتالان پیروی می‌کند و برابر است با:

$$C_۵ = \frac{۱}{۵+۱}\binom{۱۰}{۵} = ۴۲$$

۲۹ـ گزینه «۱» اگر S_n بیانگر تعداد رشته‌های n بیتی باشد که شامل رشته‌ی ۰۰۰ نیستند، آنگاه این رشته‌ها به یکی از سه روش زیر تشکیل می‌شود:

۱ـ رشته‌هایی که به ۱ ختم می‌شوند و قبل از آن‌ها رشته صحیحی به طول $n-1$ می‌آید.

۲ـ رشته‌هایی که به ۱۰ ختم می‌شوند و قبل از آن‌ها رشته صحیحی به طول $n-2$ می‌آید.

۳ـ رشته‌هایی که به ۱۰۰ ختم می‌شوند و قبل از آنها رشته صحیحی به طول $n-3$ می‌آید.

بنابراین داریم: $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$

۳۰ـ گزینه «۳» تعداد مسیرهای خواسته شده از الگوی عدد کاتالان پیروی می‌کند. رابطه گزینه (۳) معادله اعداد این دنباله است.

۳۱ـ گزینه «۲» زیررشته شروع این رشته‌ها یکی از موارد زیر است:

۱: ادامه این زیررشته، رشته‌ای صحیح به طول $n-1$ می‌آید (منظور از رشته صحیح، رشته‌ای است که شرایط صورت مسأله را دارد). تعداد = S_{n-1}

۰۱: ادامه این رشته ابتدا باید ۱ بیاید و سپس رشته‌ای صحیح به طول $n-3$. تعداد= s_{n-3}.

۰۰۱: ادامه این رشته ابتدا باید ۱ بیاید و سپس رشته‌ای صحیح به طول $n-4$. تعداد= s_{n-4}.

⋮

$\overbrace{000\ldots00}^{\text{تعداد صفرها}=n-3}1$: ادامه این رشته ابتدا باید ۱ بیاید و سپس رشته‌ای به طول ۱. تعداد= s_1.

$\overbrace{000\ldots00}^{\text{تعداد صفرها}=n-2}1$: ادامه این رشته فقط می‌تواند ۱ بیاید. تعداد =۱.

$\overbrace{0000\ldots0}^{\text{تعداد صفرها}=n-1}$: ادامه این رشته می‌تواند ۰ یا ۱ بیاید. تعداد =۲.

کل حالات برابر است با: $S_n = S_{n-1} + S_{n-3} + S_{n-4} + S_{n-5} + \cdots + S_1 + 3$

۳۲ـ گزینه «۴» پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم به روش زیر قابل محاسبه است:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \Rightarrow T(n) = \theta(n)$$

۳۳ـ گزینه «۲» افرازهای n به k جمعوند به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱ـ افرازهایی که حداقل شامل یک جمعوند یک باشند. برای به دست آوردن تعداد این افرازها می‌توانیم درون یکی از جمعوندها عدد یک قرار دهیم و آن را کنار بگذاریم و سپس عدد $n-1$ باقی‌مانده را بین $k-1$ جمعوند تقسیم کنیم $(P(n-1, k-1))$ حالت خواهیم داشت. در واقع به تمام افرازهای $k-1$ جمعوندی عدد $n-1$، یک جمعوند ۱ اضافه کنیم.

۲ـ افرازهایی که شامل هیچ جمعوند یک نباشند. برای به دست آوردن تعداد این افرازها ابتدا عدد k را طوری بین k جمعوند تقسیم می‌کنیم که به هر جمعوند عدد یک برسد و سپس عدد $n-k$ ی باقی‌مانده از عدد n را بین همین k جمعوند تقسیم می‌کنیم و با یک درون آنها جمع می‌کنیم $(P(n-k, k))$ حالت خواهیم داشت. در واقع به تمام جمعوندهای مربوط به افرازهای k جمعوندی عدد $n-k$، ۱ واحد اضافه می‌کنیم. در این صورت تمام جمعوندها مقداری بزرگتر از ۱ خواهند داشت.

رابطه بازگشتی معادل به صورت $p(n,k) = p(n-k, k-1) + p(n-k, k)$ خواهد بود.

۳۴ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به رابطه بازگشتی خواهیم داشت:

$$f(101) = 91\ ;\ f(100) = f(91)\ ;\ f(99) = f^{(2)}(91)\ ;\ \ldots\ ;\ f(91) = f^{(10)}(91)$$

از آنجایی که تابع f تابعی بر روی مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد، نقطه بازگشت آن به صورت مقابل خواهد بود: $f^{(9)}(91) = 91$

بنابراین داریم: $f^{18}(91) = f^{27}(91) = 91$

مقادیر $f^{18}(91)$ و $f^{27}(91)$ به ترتیب $f(82)$ و $f(73)$ می‌باشند. به نظر می‌رسد اشکالی در صورت سؤال وجود دارد. با توجه به اطلاعات مسأله قادر به محاسبه $f(72)$ نیستیم.

۳۵ـ گزینه «۳» اگر P_n تعداد راه‌های پوشاندن یک مستطیل $n \times ۲$ با قطعات داده شده باشد، در این صورت p_n در رابطه بازگشتی زیر صدق خواهد کرد:

$$P_n = P_{n-۲} + ۲P_{n-۳} \quad ; \quad P_۲ = ۱ \quad ; \quad P_۳ = ۲ \quad ; \quad P_۴ = ۱$$

بنابراین داریم:

$$P_۵ = P_۳ + ۲P_۲ = ۴ \quad ; \quad P_۶ = P_۴ + ۲P_۳ = ۵ \quad ; \quad P_۷ = P_۵ + ۲P_۴ = ۶ \quad ; \quad P_۸ = P_۶ + ۲P_۵ = ۱۳$$

۳۶ـ گزینه «۲» تعداد کل راه‌ها برابر با مجموع ۳ حالت زیر است:

حالت اول: روز اول آب پرتقال خریداری شود. $n-۱$ یورو باقی می‌ماند که می‌توان به $R_{n-۱}$ حالت خرج کرد.

حالت دوم: روز اول شیر خریداری شود. $n-۲$ یورو باقی می‌ماند که می‌توان به $R_{n-۲}$ حالت خرج کرد.

حالت سوم: روز اول شیرقهوه خریداری شود. $n-۲$ یورو باقی می‌ماند که می‌توان به $R_{n-۲}$ حالت خرج کرد.

در نتیجه تعداد کل حالات خرج کردن پول از رابطه $R_n = R_{n-۱} + ۲R_{n-۲}$ قابل محاسبه است.

۳۷ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $n = ۲^k$؛ در نتیجه $k = \log_۲^n$.

$$\Rightarrow a_{۲^k} = ۳a_{۲^{k-۱}} + ۲^k = ۳(۳a_{۲^{k-۲}} + ۲^{k-۱}) + ۲^k = \dots = \sum_{i=۰}^{k} ۲^k (\frac{۳}{۲})^i \Rightarrow a_{۲^k} = ۲^k \left(\frac{۱-(\frac{۳}{۲})^{k+۱}}{۱-\frac{۳}{۲}}\right) = ۲^{k+۱}\left((\frac{۳}{۲})^{k+۱} - ۱\right) = ۳^{k+۱} - ۲^{k+۱}$$

$$\Rightarrow a_{۲^k} = a_n = ۳^{\log_۲^{n}+۱} - ۲^{\log_۲^{n}+۱} = ۳ \times ۳^{\log_۲^n} - ۲n$$

۳۸ـ گزینه «۲» در این مسأله تعداد راه‌های قرار دادن r شیء متمایز در n جعبه مشابه مطلوب است. به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند. این مسأله، مسأله اعداد استرلینگ نوع دوم می‌باشد. تعداد راه‌های قرار دادن r شیء متمایز در n جعبه مشابه با فرض خالی نماندن جعبه‌ها $(s(r,n))$ به یکی از دو روش زیر انجام می‌گیرد:

۱ـ تعداد راه‌های قرار دادن $r-۱$ شیء در $n-۱$ ظرف و قرار دادن شیء rام در ظرف nام. $(s(r-۱,n-۱))$

۲ـ تعداد راه‌های قرار دادن $r-۱$ شیء در n ظرف و n انتخاب برای قرار دادن شیء r ام در هر یک از n ظرف. $(ns(r-۱,n))$

در نتیجه رابطه بازگشتی این مسأله به صورت مقابل خواهد بود: $s(r,n) = s(r-۱,n-۱) + ns(r-۱,n)$

۳۹ـ گزینه «۳» با جایگذاری مقدار $a_۳$ را محاسبه می‌نمائیم. برای محاسبه $a_۳$ نیاز به محاسبه $a_۲$ خواهیم داشت:

$$a_۲ - ۲a_۱ + a_۰ = ۲^۰ \Rightarrow a_۲ = ۴ \qquad , \qquad a_۳ - ۲a_۲ + a_۱ = ۲^۱ \Rightarrow a_۳ = ۸$$

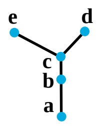
فصل چهارم

«نظریه مجموعه‌ها»

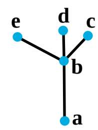
تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ یک رابطه با ترتیب جزئی (poset) تعریف شده بر مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ به وسیله ماتریس رابطه زیر تعریف شده است. نمودارهای هاسه (Hasse Diagram) مربوط به رابطه مزبور کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۱)

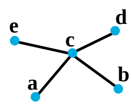
$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



(۱)



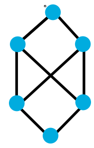
(۲)

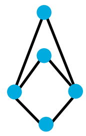


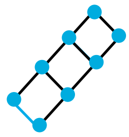
(۳)

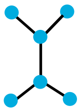
(۴) هیچ‌کدام

۲ـ چهار مجموعه با ترتیب جزئی (Partially-Ordered Set) به وسیله Hasse Diagramهای زیر نشان داده شده‌اند. کدام‌یک شبکه لاتیس (Lattice) می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۳)


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۳ـ فرض کنید A یک مجموعه متناهی و R و S دو رابطه هم‌ارزی تعریف شده در A باشند. کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۴)

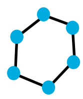
۱) $R\cap S$ یک رابطه هم‌ارزی است ولی $R\cup S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

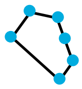
۲) $R\cup S$ یک رابطه هم‌ارزی است ولی $R\cap S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

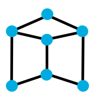
۳) هم $R\cup S$ و هم $R\cap S$ رابطه هم‌ارزی هستند.

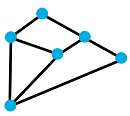
۴) هیچ‌یک از $R\cup S$ و $R\cap S$ الزاماً روابط هم‌ارزی نیستند.

۴ـ کدام‌یک از Hasse دیاگرام‌های زیر، یک لاتیس توزیع‌پذیر (Distributive) است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۵)


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۵ـ برای عدد صحیح و مثبت n، D_n عبارت است از مجموعه با ترتیب جزئی که عناصر آن مجموعه تمامی مقسوم‌علیه‌های عدد n و ترتیب جزئی هم، رابطه بخش‌پذیری است. با توجه به این تعریف کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۶)

۱) D_{42} جبر بول است ولی D_{45} جبر بول نیست.

۲) هیچ‌کدام از D_{42} و D_{45} جبر بول نیستند.

۳) D_{45} جبر بول است ولی D_{42} جبر بول نیست.

۴) هم D_{42} و هم D_{45} بول هستند.

۶ـ روی مجموعه X با n عضو متمایز، چند عمل دوتایی(Binary Operation) متمایز می‌توان تعریف کرد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۶)

۱) n^n

۲) $n\times n$

۳) $(n)^{n^2}$

۴) $2^{n\times n}$

۷ـ کدام‌یک از روابط زیر یک رابطه هم‌ارزی است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۶)

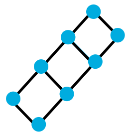
۱) اگر X مجموعه مردان تهرانی باشد، به ازای هر $xRy, x, y \in X$ نمایانگر نسبت «x برادر y است» می‌باشد.

۲) $\{<a,b>|a,b \in N$ و $\max(a,b)$ بر $\min(a,b)$ بخش‌پذیر باشد$\}$، $N = \{1,2,3,...\}$.

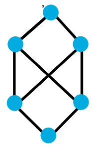
۳) $\{<<x_1,x_2>,<x_3,x_4>>|x_1,x_2,x_3,x_4 \in Z, x_1+x_3 = x_2+x_4\}$

۴) $\{<<x_1,x_2>,<x_3,x_4>>|x_1,x_2,x_3,x_4 \in Z, x_1+x_4 = x_2+x_3\}$

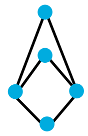
۸ـ چهار مجموعه با ترتیب جزئی (Partially Ordered Set) به وسیله Hasse Diagram زیر نشان داده شده‌اند. کدام‌یک شبکه (Lattice) می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)



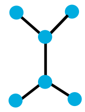
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۹ـ در هر گزینه A و یک رابطه R بر روی آن داده شده است. کدام‌یک از رابطه‌های داده شده یک رابطه ترتیب جزئی (Partial Order) می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) مجموعه A شامل تمام خطوط موجود در صفحه xRy اگر و فقط اگر x با y موازی و یا بر هم منطبق باشند.

۲) $A = \{1,2,3\}$ و $R = \{(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$

۳) $A = Z^+$ و xRy اگر و فقط اگر x، y را تقسیم کند.

۴) $A = Z^+$ و xRy اگر و فقط اگر $x \times y$ زوج باشد.

۱۰ـ فرض کنید $A = \{1,2,3,...,9\}$ و رابطه R روی $A \times A$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$(a,c)R(d,b)$، اگر و تنها اگر $a+b = c+d$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۸)

۱) R یک رابطه ترتیب جزئی است.

۲) R دارای خاصیت تراگذاری نیست.

۳) R یک رابطه هم‌ارزی است.

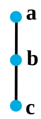
۴) هیچ‌کدام

۱۱ـ فرض کنید $A = \{1,2,3,...,9\}$ و رابطه هم‌ارزی ~ روی $A \times A$ به صورت زیر تعریف شده است:

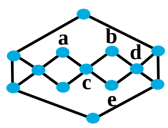
$(a,b) \sim (c,d)$، اگر و تنها اگر $a+d = b+c$. رده هم‌ارزی (۵ و ۲) دارای چند عنصر (عضو) می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۰

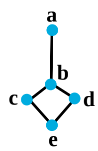
۱۲ـ از Hasse Diagram های داده شده کدام‌یک شبکه (Lattice) نمی‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)



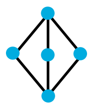
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۱) الف ۲) ب ۳) ج ۴) د

۱۳ـ روی مجموعه $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ رابطه R به وسیله ماتریس رابطه زیر داده شده است: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱) R یک رابطه غیربازتابی (irreflexive) می‌باشد.

۲) R یک رابطه نامتقارن (asymmetric) می‌باشد.

۳) R یک رابطه پادمتقارن (Antisymmetric) می‌باشد.

۴) R یک رابطه انتقالی (transitive) می‌باشد.

۱۴ـ فرض کنید $R,S=\{۱,۲,۳,...,۱۹,۲۰\}$ یک رابطه Equivalence روی این مجموعه تعریف شده با $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ ۵)$ یعنی xRy اگر ۵، $x-y$ را تقسیم کند. کدام گزینه Partition مجموعه S به وسیله رابطه R می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $[\{۱,۶,۱۱\},\{۲,۷,۱۲\},\{۳,۸,۱۳\},\{۴,۹,۱۴\},\{۵,۱۰,۱۵\}]$

۲) $[\{۶,۱۱,۱۶\},\{۷,۱۲,۱۷\},\{۸,۱۳,۱۸\},\{۹,۴,۱۹\},\{۱۰,۱۵,۲۰\}]$

۳) $[\{۱,۶,۱۱,۱۶\},\{۲,۷,۱۲,۱۷\},\{۳,۸,۱۳,۱۸\},\{۴,۹,۱۴,۱۹\},\{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}]$

۴) $[\{۲,۶,۱۱,۱۶\},\{۱,۷,۱۲,۱۷\},\{۴,۸,۱۳,۱۸\},\{۳,۹,۱۴,۱۹\},\{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}]$

۱۵ـ سه رابطه زیر را روی مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ در نظر بگیرید:

رابطه تهی = Q $\quad S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ $\quad R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

با در نظر گرفتن خاصیت‌های transitive ،antisymmetric، symmetric و reflexive کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) رابطه Q تمام خواص فوق‌الذکر را داراست.

۲) روابط R، S و Q همگی symmetric می‌باشند.

۳) هیچ‌کدام از روابط R، S و Q هر دو خاصیت reflexive و antisymmetric را با هم ندارند.

۴) هرکدام از روابط R، S و Q حداقل سه خاصیت از چهار خاصیت فوق‌الذکر را داراست.

۱۶ـ مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ مفروض است. چند رابطه روی A وجود دارد، به طوری که خواص پادمتقارن و بازتابی (هردو) را دارا باشد؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $۳^۵$ ۲) $۳^۶$ ۳) $۳^۷$ ۴) $۳^۸$

۱۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) اگر R و S روابط هم‌ارزی باشند، آنگاه $R\cup S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

۲) اگر R یک رابطه از A به B، S و T دو رابطه از B به C باشند، آنگاه $(S\cup T)OR=(SOR)\cup(TOR)$.

۳) اگر R یک رابطه از A به B، S و T دو رابطه از B به C باشند، آنگاه $(S\cap T)OR=(SOR)\cap(TOR)$.

۴) اگر R و S دو رابطه روی A باشند، به ازای هر $n\geq ۱$، $(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$.

۱۸ـ کدام‌یک از عبارات ذیل صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) $(hog)of=ho(gof)$

۲) $fog\neq gof$

۳) اگر $f:A\to B$، $g:B\to C$ و gof یک به یک باشد، آنگاه f نیز یک‌به‌یک می‌باشد.

۴) هر سه مورد

۱۹ـ فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه بازتابی و متقارن روی مجموعه A باشند. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

$(R_۱\Delta R_۲=(R_۱\cup R_۲)-(R_۱\cap R_۲))\quad,\quad R^۲=RoR\quad,\quad \bar{R}=(A\times A)-R)$

۱) $R_۱\subseteq R_۱^۲$ ۲) $R_۱\Delta R_۲$ متقارن است. ۳) $\bar{R}_۱$ متقارن است. ۴) $R_۱\Delta R_۲$ بازتابی است.

۲۰ـ فرض کنید A مجموعه اعداد گویای غیرصفر باشد. برای $a,b\in A$ رابطه R در A را تعریف می‌کنیم: $a\,R\,b\Leftrightarrow a/b$ عدد صحیح می‌باشد

کدام‌یک از عبارات ذیل صحیح نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

۱) R بازتابی است. ۲) R متعدی است. ۳) R نامتقارن است. ۴) R متقارن است.

۲۱ـ اگر R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A باشند، آنگاه رابطه $R\cap S$: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) هم‌ارزی است. ۲) پاره ترتیبی (جزئی مرتب) است.

۳) تنها ویژگی‌های تقارن و ترایایی را دارد. ۴) تنها ویژگی‌های پادتقارن و ترایایی را دارد.

۲۲ـ اگر A یک مجموعه متناهی و $|A|=n$ باشد، کدام‌یک از جملات زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطه متقارن روی A وجود دارد.
۲) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطه که بازتابی و متقارن است وجود دارد.
۳) $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطه که بازتابی و متقارن است وجود دارد.
۴) $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطه که بازتابی و پادمتقارن است وجود دارد.

۲۳ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
۲) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
۳) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$
۴) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$

۲۴ـ برای مجموعه مرجع X ($|X|\geq ۱۳۸۳$)، مجموعه F به صورت زیر تعریف شده است: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

$F=\{f\mid f:X\to\{0,1\}\}$

کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعه F با مجموعه توانی X (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X) تناظر یک به یک دارد.
۲) تعداد اعضای F برابر $2^{|X|}$ است.
۳) رابطه $f\leq g \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)\quad \forall x\in X$ یک رابطه ترتیب جزئی روی F است.
۴) رابطه $f\leq g \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)\quad \forall x\in X$ یک رابطه ترتیب کلی روی F است.

۲۵ـ سه مجموعه A، B و C هر یک دارای ۱۲ عضو هستند. از این اعضاء ۸ عضو به هر دو مجموعه A و B، ۹ عضو به هر دو مجموعه A و C، ۶ عضو به هر دو مجموعه B و C و ۵ عضو به هر سه مجموعه A، B و C تعلق دارند. در این صورت با Δ، معرف تفاضل متقارن مجموعه‌ای، تعداد اعضای مجموعه $A\Delta(B\Delta C)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۲۶ـ کدام گزاره نادرست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۴)

۱) اگر A که یک مجموعه مرتب با ترتیب کلی است، فقط یک عضو ماکزیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگ‌ترین عضو A است.
۲) اگر A که یک مجموعه مرتب با ترتیب جزئی است فقط یک عضو ماکزیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگ‌ترین عضو A است.
۳) مجموعه $A=\{x\mid x\in Q, 8<x^3<15\}$ که در آن Q مجموعه اعداد گویاست، بزرگ‌ترین کران پایین دارد ولی کوچک‌ترین کران بالا ندارد.
۴) اگر A که مجموعه‌ای متناهی و مرتب با ترتیب جزئی است فقط یک عضو ماکزیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگترین عضو A است.

۲۷ـ روابط S و R به صورت زیر تعریف شده‌اند: (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۴)

$aRb \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 6 \qquad aSb \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 9$

کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح هستند؟

۱) $a(R\cup S)b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 3$
۲) $a(R\cap S)b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 3$
۳) $a(R\cap S)^+b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 3$
۴) $a(R\circ S)b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 3$

۲۸ـ فرض کنید $X=\{1,2,3,\dots,15\}$ و $A,B\subseteq X$ به طوری که $|A|=5$, $|B|=7$ و $A\cap B=\varnothing$؛ چند زیرمجموعه از X مانند C می‌توان یافت به طوری که $C\cap A\neq\varnothing$ و $C\cap B=\varnothing$؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۹۳
۲) ۹۶
۳) ۲۴۸
۴) ۲۵۶

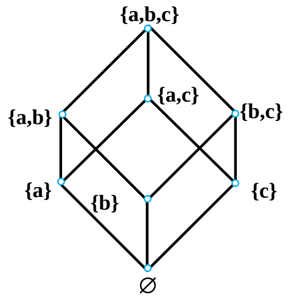
۲۹ـ یک رابطه ترتیب جزئی کدام‌یک از خواص زیر را ندارد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) خاصیت بازتابی
۲) خاصیت تقارن
۳) خاصیت عدم تقارن
۴) خاصیت متعدی

۳۰ـ اگر $A=\{a,b,c\}$، $P(A)$ مجموعه‌ی قوه‌ی A باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک زیرشبکه‌ی $<P(A),\subseteq>$ نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $<\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}\},\subseteq>$
۲) $<\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\subseteq>$
۳) $<\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\},\subseteq>$
۴) $<\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\},\subseteq>$

۳۱ـ در دیاگرام هاسه زیر، کوچک‌ترین کران بالا (LUB) مجموعه $\{\{b,c\},\{b\},\{c\}\}$ چیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۷)

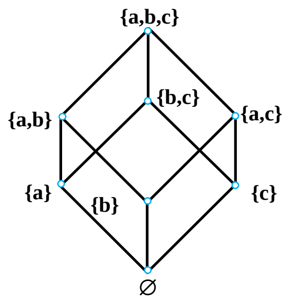


۱) $\{b\}$
۲) $\{c\}$
۳) $\{a,b,c\}$
۴) $\{b,c\}$

۳۲ـ اگر A ماتریس تابع f از X به Y باشد، چه شرطی باید داشته باشیم تا تابع f یک‌به‌یک و پوشا باشد؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۷)

۱) در هر ستون حداقل یک 1 وجود داشته باشد. ۲) در هر ستون حداکثر یک 1وجود داشته باشد.
۳) در هر ستون فقط یک 1وجود داشته باشد. ۴) در هر سطر حداقل یک 1وجود داشته باشد.

۳۳ـ در دیاگرام هاسه زیر بزرگ‌ترین کران پایین (GLB) مجموعه $\{\{b,c\},\{b\},\{c\}\}$ چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد۸۷)



۱) $\varnothing$
۲) $\{b\}$
۳) $\{c\}$
۴) $\{b,c\}$

۳۴ـ اگر A ماتریس تابع f از C به Y باشد، چه شرطی باید داشته باشید تا تابع f یک‌به‌یک باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد۸۷)

۱) در هر ستون فقط یک 1 وجود داشته باشد. ۲) در هر سطر فقط یک 1وجود داشته باشد.
۳) در هر سطر حداکثر یک 1 وجود داشته باشد. ۴) در هر ستون حداکثر یک 1 وجود داشته باشد.

۳۵ـ چه تعداد رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$وجود دارد که در آن ۱، ۲ و ۳ با یکدیگر هم‌ارز و ۴و۵ نیز با یکدیگر هم‌ارز باشند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

۳۶ـ فرض کنید $X=\{۲,۳,۶,۱۲,۲۴,۳۶\}$ و رابطه $\le$ به این صورت تعریف شده است: $x\le y$، اگر و فقط اگر x بشمارد y را. در نمودار هاسه مربوط اگر $A=\{۲,۳,۶\}$ باشد، آن‌گاه LUB(A) و GLB(A) از راست به چپ عبارتند از: (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۸)

۱) وجود ندارد و ۲ ۲) ۶ و $\{۲,۳\}$ ۳) ۲ و ۶ ۴) ۶ وجود ندارد.

۳۷ـ چند رابطه سازگاری روی یک مجموعه n عنصری وجود دارد؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۸)

۱) $2^n\cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$ ۲) $2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ ۳) $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ ۴) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

۳۸ـ فرض کنید رابطه R روی مجموعه $X=\{ball,bed,dog,let,egg\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: xRy. اگر و فقط اگر x و y شامل حروف مشترکی باشند، کدام گزینه درست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۸)

۱) R یک رابطه هم‌ارزی است ولی سازگاری و ترتیب جزئی نیست.
۲) R یک رابطه سازگاری است ولی هم‌ارزی و ترتیب جزئی نیست.
۳) R یک رابطه ترتیب جزئی است ولی هم‌ارزی نیست.
۴) R یک رابطه هم‌ارزی و ترتیب جزئی است.

۳۹ـ تعداد رابطه‌های غیرمتقارن روی $\{1,2,\ldots,2n\}$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند، برابر است با: $\forall x,y \in \{1,2,\ldots,n\} \quad (x,y)\in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+n,y+n)\in \mathbb{R}$

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $2^{\frac{3n^2+n}{2}}$ ۲) $2^{3n^2}-2^{\frac{3n^2+n}{2}}$ ۳) $2^{3n^2}-2^{\frac{3n^2-n+2}{2}}$ ۴) $2^{4n^2}-3(2^{\frac{3n^2+n}{2}})$

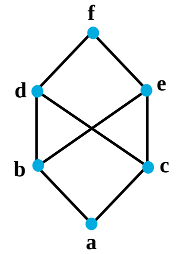
۴۰ـ اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+1$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۹)

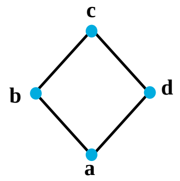
۱) $(fog)(x)=x^2+1$ ۲) $fog \neq gof$ ۳) $(fog)(x)=x^3+1$ ۴) $(gof)(x)=(x+1)^2$

۴۱ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر یک شبکه نیست؟

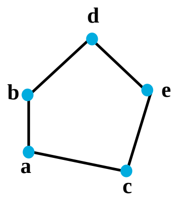
(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۹)



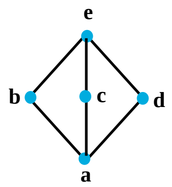
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۴۲ـ فرض کنید R بر روی Z^+ به صورت روبه‌رو تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow GCD(a,b)=1$

(منظور از GCD بزرگترین مقسوم علیه مشترک می‌باشد) رابطه R کدام خواص را دارد؟

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۹)

۱) بازتابی و تقارنی   ۲) تعدی و تقارنی   ۳) بازتابی و تعدی   ۴) تعدی و پادتقارنی

۴۳ـ برای هر عدد طبیعی n مجموعه جزئی مرتب (جم) D_n را به عنوان مجموعه مقسوم علیه‌های عدد n همراه با رابطه عاد کردن (شمارش) تعریف می‌کنیم. همچنین برای هر مجموعه متناهی دلخواه A مجموعه جم $P(A)$ را به عنوان مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های A همراه با رابطه زیرمجموعه بودن تعریف می‌کنیم. در مورد مجموعه جم D_{3030} کدام گزینه (به ترتیب از راست به چپ) سه گزاره زیر را به درستی کامل می‌کند:

الف) مجموعه جم D_{3030} با مجموعه جم $P(A)$ برای .... = A یکریخت است.

ب) تعداد توابع یکریختی f از D_{3030} به $P(A)$ تعریف شده در بالا که دو شرط $f(2)=\{a\}$ و $f(6)=\{a,b\}$ را ارضاء می‌کنند برابر .... است.

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\{a,b,c,d,e\}$، ۶، است.   ۲) $\{a,b,c,d,e,f\}$، !۶۴، نیست.

۳) $\{a,b,c,d,e,f\}$، ۲۴، است.   ۴) یک مجموعه حاوی ۳۲ کاراکتر مجزا، !۳۰، نیست.

۴۴ـ اگر A مجموعه‌ای با ۳۰ عضو و R رابطه‌ای هم‌ارزی روی A باشد که A را به سه کلاس هم‌ارزی A_1، A_2 و A_3 افراز نموده باشد و $|A_1|=|A_2|=|A_3|$، تعداد اعضای R کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\binom{30}{10}$ ۲) ۳۰۰   ۳) $3\times\binom{10}{2}$ ۴) 3×10

۴۵ـ چه تعداد رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $\{1,2,3,4,5\}$ داریم که ۱ و ۲ هم‌ارز باشند؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱۶   ۲) ۱۵   ۳) ۱۴   ۴) ۱۳

۴۶ـ تعداد ۱۳۸۹ عدد متمایز در بازه $[0,1)$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت حداقل تفاضل دو تا از این اعداد از:

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{1388}$ کمتر است.   ۲) $\frac{1}{1388}$ بیشتر است.   ۳) $\frac{1}{1389}$ کمتر است.   ۴) $\frac{1}{1389}$ بیشتر است.

۴۷ـ فرض کنید رابطه R بر روی Z^+ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow GCD(a,b)=1$

(منظور از GCD بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک می‌باشد). رابطه R کدام خواص را دارد؟

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۹۰)

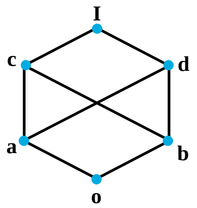
۱) بازتابی و تقارنی   ۲) تعدی و تقارنی   ۳) بازتابی و تعدی   ۴) تعدی و پادتقارنی

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۱» با توجه به M_R، از رأس a می‌توان به تمام رئوس رفت؛ بنابراین گزینه (۳) نادرست است. همچنین با توجه به M_R می‌توان از a بـه b و از c به d رفت که در نمودار Hasse گزینه (۲) امکان‌پذیر نمی‌باشد؛ بنابراین گزینه (۲) نیز نادرست می‌باشد.

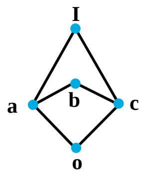
۲ـ گزینه «۳» شکل شماره ۱ را به صورت روبه‌رو در نظر بگیرید.

در این صورت $LUB(a,b)$ و $GLB(c,d)$ وجود نخواهد داشت.



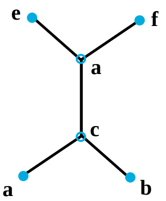
شکل شماره ۲ را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

در این صورت $LUB(a,c)$ و $GLB(o,b)$ وجود ندارد.



شکل شماره ۴ را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

در این صورت $LUB(e,f)$ و $GLB(a,b)$ وجود ندارد.



۳ـ گزینه «۱» دقت کنید که اشتراک روابط هم‌ارزی دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی است؛ ولی اجتماع آنها ممکن است شـرط تعـدی را نقـض کند. بنابراین اجتماع دو رابطه هم‌ارزی لزوماً هم‌ارزی نیست.

۴ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. لاتیس گزینه (۳) شبکه نمی‌باشد؛ زیرا به عنوان مثال، دو عضو a و b دارای LUB برای توزیع‌پـذیر بـودن شـبکه باید به ازای هر سه عضو دلخواه، توزیع‌پذیری GLB بر LUB و LUB بر GLB برقرار باشد. در گزینه (۴) مثلث دیده مـی‌شـود کـه طبـق رابطـه تعـدی اشتباه است. گزینه‌های (۱) و (۲) هم لاتیس‌های بخش‌پذیر نیستند؛ زیرا اعضای مکمل یکتا ندارند.

۵ـ گزینه «۱» D_n زمانی جبر بول است که n به اعداد اول متمایز تجزیه شود. در اینجا داریم: ۴۲ = ۲ × ۳ × ۷

۶ـ گزینه «۴» در این‌جا هر رابطه از X به X یک عمل دوتایی است. در حقیقت هر زیرمجموعه از $X\times X$ می‌تواند جواب باشد؛ پس تعداد کل عمـل‌هـای دوتایی (Binary operation) متمایز برابر ۲$^{n\times n}$ است.

۷ـ گزینه «۴» هر یک از گزینه‌های دیگر یکی از شرایط رابطه هم‌ارزی را نقض می‌کند.

در گزینه (۱) خاصیت بازتابی وجود ندارد؛ زیرا نمی‌توانیم بگوییم هر کس برادر خودش می‌باشد.

در گزینه (۲) خاصیت تعدی وجود ندارد؛ مثلاً داریم < ۳,۶ > و همچنین < ۶,۲ > ولی نمی‌توانیم داشته باشیم < ۳,۲ >.

در گزینه (۳) خاصیت بازتابی وجود ندارد؛ مثلاً بین < ۲,۱ > و < ۲,۱ > رابطه‌ای وجود ندارد.

۸ـ گزینه «۱» نمودار حاصل گزینه (۲) شبکه نیست. زیرا به عنوان مثال، دو عضو a و b دارای LUB نمی‌باشند. شکل‌های این گزینه‌ها که نامگذاری نیـز شده‌اند، در حل سؤال ۴ آورده شده‌اند.

نمودار حاصل گزینه (۳) نیز شبکه نمی‌باشد. زیرا به عنوان مثال، دو عضو a و c دارای GLB نیستند.

۹ـ گزینه «۳» رابطه‌ای را که دارای سه خاصیت بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد، ترتیب جزئی می‌گوییم. رابطه گزینه (۱) خاصیت پادتقارنی نـدارد. رابطه گزینه (۲) دارای خاصیت بازتابی است و رابطه گزینه (۴) هم خاصیت پادتقارنی ندارد.

۱۰ـ گزینه «۳» رابطه داده شده دارای سه خاصیت تقارنی، بازتابی و تعدی است ولی خاصیت پادتقارنی ندارد؛ بنابراین رابطه R یک رابطـه هـم‌ارزی است ولی یک رابطه ترتیب جزئی نیست.

۱۱ـ گزینه «۲» شش زوج مرتب زیر با (۵ و ۲) در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. $[(۲,۵)] = \{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۷),(۵,۸),(۶,۹)\}$

۱۲ـ گزینه «۲» نمودار هاسه گزینه (۲) شبکه نمی‌باشد. زیرا به عنوان مثال، دو عضو a و b دارای LUB نمی‌باشند.

۱۳ـ گزینه «۳» در صورتی می‌توانیم بگوییم رابطه غیربازتابی است که هیچ یکی روی قطر اصلی نداشته باشیم، در صورتی که این گونه نیست؛ پس گزینـه (۱) نادرست است. در صورتی می‌توانیم بگوییم رابطه نامتقارن است که هیچ تقارنی در ماتریس وجود نداشته باشد؛ پس گزینه (۲) نیز غلط اسـت. از طرفـی چون داریم $M_{۶۵} = ۱$ و $M_{۱۶} = ۱$ ولی $M_{۱۵} \neq ۱$ پس رابطه متعدی یا انتقالی نیست. بنابراین گزینه (۴) نیز نادرست است.

۱۴ـ گزینه «۳» در این جا در حقیقت ما کلاس‌های هم‌ارزی را که توسط رابطه R ایجاد می‌شوند، می‌خواهیم. گزینه‌های (۱) و (۲) به وضوح غلط می‌باشند؛ زیـرا تعداد عناصر آنها ۱۵ تا می‌باشد، در صورتی که در افراز یک مجموعه تمام عناصر مجموعه باید وجود داشته باشند و تعداد کل عناصر مجموعـه S در اینجـا ۲۰ تـا می‌باشد. در گزینه (۴)، دو عدد ۱ و ۷ به پیمانه ۵ هم‌نهشت نمی‌باشند.

۱۵ـ گزینه «۳» رابطه R خاصیت بازتابی (reflexive) ندارد؛ زیرا $(۲,۲) \notin R$.

رابطه R خاصیت تقارنی(symmetric) ندارد؛ زیرا $(۱,۲) \in R$ ولی $(۲,۱) \notin R$.

پس تا اینجا گزینه‌های (۴) و (۲) غلط می‌باشند و می‌دانیم رابطه تهی $(\varnothing)$ تنها خاصیت بازتابی (reflexive) را ندارد؛ بنابراین گزینه‌ی (۱) اشتباه است.

۱۶ـ گزینه «۲» می‌دانیم اگر A یک مجموعه باشد که $|A| = n$ آنگاه تعداد رابطه‌هایی که روی A دارای دو خاصیت بازتابی و پادتقارنی باشند، برابر است با $۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$. پس در اینجا با توجه به اینکه $n = ۴$، تعداد برابر $۳^۶$ می‌باشد. $۳^{\frac{۴(۳)}{۲}} = ۳^۶$

۱۷ـ گزینه «۳» همان‌گونه که در تست‌های قبل بررسی شد، گزینه (۱) درست می‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۴) نیز در حالت کلی برقرارند؛ ولی برای گزینـه (۳) می‌توان مثال نقض آورد.

۱۸ـ گزینه «۴»

گزینه (۱) همواره درست است.

گزینه (۲) نیز در حالت کلی درست است (در برخی مواقع $fog = gof$ ولی در حالت کلی $fog \neq gof$) و گزینه (۳) نیز درست است.

۱۹ـ گزینه «۴» چون $R_۱$ و $R_۲$ هر دو بازتابی می‌باشند، بنابراین داریم: $\forall x \in A : xR_۱x,\ xR_۲x \Rightarrow (x,x) \in R_۱, (x,x) \in R_۲$

بنابراین: $\forall x \in A : (x,x) \notin R_۱ \Delta R_۲$

۲۰ـ گزینه «۴» درستی سه گزینه اول واضح است. برای رد گزینه چهارم کافیست دو عدد $a = ۲$ و $b = ۴$ را در نظر بگیریم. در این حالت bRa ولی $a \not R b$.

۲۱ـ گزینه «۱» اگر S و R رابطه‌ی هم‌ارزی باشند، آنگاه $S \cap R$ دارای هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی است و بنابراین $S \cap R$ نیـز هـم‌ارزی است (دقت کنید که $S \cup R$ لزوماً هم‌ارزی نیست).

۲۲ـ گزینه «۲ و ۴» اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، می‌توانیم عبارات زیر را در مورد تعداد انواع رابطه‌های مختلف روی R بیان کنیم:

تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر $2^{n(n-1)}$ است. تعداد رابطه‌های متقارن روی A برابر $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ است.

تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی A برابر $2^n \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ است. تعداد رابطه‌های متقارن و بازتابی روی A برابر $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ است.

تعداد رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی A برابر $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ است.

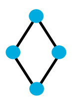
۲۳ـ گزینه «۳» در حالت کلی در رابطه با حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها داریم:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$
$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)\quad,\quad A\times(B-C)=(A\times C)-(A\times C)$$

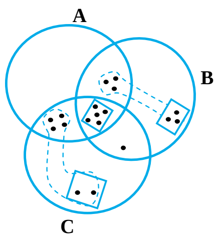
مقدار $A\times(B\times C)$ و $(A\times B)\times C$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت. با این فرض این گزینه می‌تواند گزینه صحیح باشد:

$$A\times(B\times C)=\{(a,(b,c))\mid a\in A\,,b\in B\,,c\in C\}\quad,\quad (A\times B)\times C=\{((a,b),c)\mid a\in A\,,b\in B\,,c\in C\}$$

۲۴ـ گزینه «۴» تابع F هر X را به یک جبر بول دو مقداری $\{0,1\}$ می‌برد؛ بنابراین تابع F دارای $2^{|X|}$ عضو خواهد بود؛ پس مجموعه F با مجموعه توانی X تناظر یک به یک دارد. همچنین هر جبر بول دومقداری دارای نمودار زنجیر می‌باشد؛ بنابراین رابطه $f\le g \Leftrightarrow f(x)\le g(x)$ یک رابطه ترتیب کلی روی F نمی‌باشد. به عنوان مثال، اگر جبر بولی دارای ۴ عضو باشد، نمودار Hasse آن به صورت روبرو خواهد بود.



۲۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به صورت سؤال می‌توان شکل زیر را برای ارتباط بین مجموعه‌ها در نظر گرفت.



با توجه به شکل داریم: $|B\Delta C|=|B\cup C|-|B\cap C|\Rightarrow|B\Delta C|=۱۸-۶=۱۲$

اعضای $B\Delta C$ در شکل با خط‌چین مشخص شده‌اند.

حال برای بدست آوردن جواب کافیست A را با قسمت مشخص شده اجتماع کنیم و قسمت مشترک آنها را از اجتماع حذف کنیم که حاصل برابر ۱۰ است که با مربع نمایش داده شده است.

۲۶ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف داده شده، نمودار Hasse مجموعه A در گزینه (۱) به صورت یک زنجیر می‌باشد؛ بنابراین عضو ماکزیمال آن بزرگترین عضو مجموعه A خواهد بود و گزینه (۱) صحیح می‌باشد. از آنجایی که کران پایین مجموعه ۲ است، پس گزینه (۳) نیز صحیح می‌باشد. ثابت می‌شود که اگر یک مجموعه با ترتیب جزئی متناهی باشد، در این صورت اگر A یک عضو ماکزیمال و یک عضو مینیمال داشته باشد، این اعضاء به ترتیب max و min نیز می‌باشند؛ بنابراین گزینه (۲) نادرست است.

۲۷ـ گزینه «۴» هر دو طرف رابطه داده شده در گزینه (۴) را اثبات می‌کنیم:

فرض کنیم: $a(R\,o\,S)b$

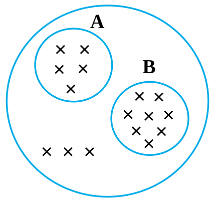
پس:

$$\exists_c : aSc, cRb \Rightarrow a\overset{۹}{\equiv}c, c\overset{۶}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a-c=۹k & ۱\\ c-b=۶k' & ۲\end{cases}$$

$$۱+۲\Rightarrow a-b=۹k+۶k'=۳(۳k+۲k')=۳k''\Rightarrow a\overset{۳}{\equiv}b$$

طرف دوم نیز با استدلالی مشابه قابل اثبات است.

۲۸ـ گزینه «۳» مجموعه X را می‌توان به صورت روبه‌رو در نظر گرفت:

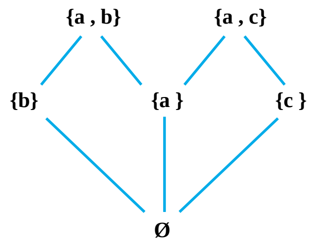


بنابراین کل مجموعه‌هایی که با B اشتراک ندارند، برابر $۲^۸=۲۵۶$ می‌باشد که از بین این مجموعه‌ها $۲^۳=۸$ زیرمجموعه هیچ اشتراکی با A ندارند؛ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر عبارت است از $۲۵۶-۸=۲۴۸$.

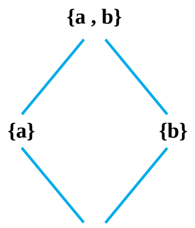
۲۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم یک رابطه ترتیب جزئی باید این سه خاصیت را داشته باشد: ۱ـ بازتابی ۲ـ پادتقارنی ۳ـ تعدی

۳۰ـ گزینه «۱» اگر نمودار هاسه متناظر با هر یک از گزینه‌ها را رسم کنیم، خواهیم داشت:

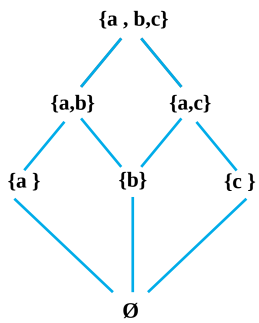
نمودار هاسه‌ی گزینه‌ی (۱):



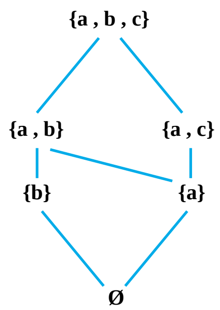
نمودار هاسه‌ی گزینه (۳):



نمودار هاسه‌ی گزینه (۲):



نمودار هاسه‌ی گزینه (۴):



واضح است که تنها گزینه (۱) شبکه نمی‌باشد؛ زیرا دو مجموعه‌ی $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ دارای LUB نیستند.

۳۱ـ گزینه «۴» اگر A یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد و $B \subseteq A$، عضو $Q \in A$ را کوچک‌ترین کران بالا (LUB) برای B گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ـ Q یک کران بالایی برای B باشد. ۲ـ اگر a' نیز یک کران بالا برای B باشد، آنگاه $Q \le a'$. ۳ـ کران بالا یا پایین برای B می‌تواند عضو B نباشد.

۳۲ـ گزینه «۳» شرط یک‌به‌یک بودن تابع این است که در هر ستون حداکثر یک ۱ ظاهر شده باشد؛ زیرا در غیر این صورت عضوی از Y موجود است که تصویر دو عضو از X می‌باشد و شرط پوشا بودن این است که هر عضو از Y تصویر حداقل یک عضو از X باشد.

۳۳ـ گزینه «۱»

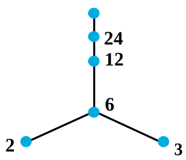
$$GLB\{\{b,c\},\{b\}\} = \varnothing$$

$$GLB\{\{b,c\},\{b\},\{c\}\} = GLB\{\phi,\{c\}\} = \varnothing$$

۳۴ـ گزینه «۴» از شرایط یک به یک بودن این است که در هر ستون، حداکثر یک مؤلفه ۱ موجود باشد؛ زیرا در غیر این صورت عضوی از مجموعه Y وجود دارد که تصویر دو عضو از مجموعه C می‌باشد.

۳۵ـ گزینه «۲» اگر $\{۱,۲,۳\}$ با هم هم‌ارز باشند و $\{۴,۵\}$ نیز هم‌ارز باشند، آنها را به عنوان یک عضو در نظر می‌گیریم؛ بنابراین می‌خواهیم تعداد روابط هم‌ارزی را روی مجموعه چهارعضوی $\{۱,۲,۳\}$،$\{۴,۵\}$،$\{۶\}$ و $\{۷\}$ را محاسبه نماییم که برابر با مجموع سطر چهارم اعداد استرلینگ نوع دوم است؛ یعنی ۱۵=۱+۶+۷+۱ . به بیان دیگر، تعداد روش‌های قرار دادن ۴ عضو در تعدادی کلاس هم‌ارزی برابر تعداد راه‌های قرار دادن ۴ شیء متمایز از ظروف مشابه است. ۱ حالت برای قرار دادن در یک ظرف داریم، $\binom{4}{1} + \frac{\binom{4}{2}}{2} = 7$ حالت برای قرار دادن در ظرف ۲ داریم، $\binom{4}{2} = 6$ حالت برای قرار دادن در ۳ ظرف و ۱ حالت برای قرار دادن در ۴ ظرف داریم.

۳۶ـ گزینه «۴» دیاگرام هاسه رابطه به صورت زیر می‌باشد:



بنابراین $LUB\{۲,۳,۶\} = ۶$ و $GLB\{۲,۳,۶\}$ وجود ندارد.

۳۷ـ گزینه «۴» به رابطه‌ای که هم بازتاب و هم متقارن باشد، رابطه سازگاری گفته می‌شود که تعداد آنها برابر $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ می‌باشد.

۳۸ـ گزینه «۲» این رابطه به وضوح بازتاب و متقارن است؛ زیرا هر کلمه با خودش دارای حروف مشترک است و همچنین اگر کلمه X با کلمه Y دارای حرف مشترک باشد، کلمه Y نیز با کلمه X دارای حرف مشترک خواهد بود. ولی این رابطه تراگذاری نیست. به عنوان مثال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ball } R \text{ bed} \\ \text{bed } R \text{ dog} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \text{ball } R \text{ dog}$$

بنابراین این رابطه سازگاری است ولی ترتیب و هم‌ارزی نمی‌باشد.

۳۹ـ گزینه «۲» تعداد رابطه‌های غیرمتقارن برابر تعداد کل رابطه‌ها منهای تعداد رابطه‌های متقارن می‌باشد. تعداد کل رابطه‌ها با شرط بیان شده برابر است با:

$$2^{n^2} \times 2^{n^2} \times 2^{n^2} = 2^{3n^2}$$

زیرا سه حالت امکان‌پذیر است:

۱ـ $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$ در این صورت طبق شرط بیان شده $(x+n, y+n) \in \mathbb{R}$؛ بنابراین 2^{n^2} حالت امکان‌پذیر است.

۲ـ $y \in \{n+1, \dots, 2n\}, x \in \{1, \dots, n\}$ که در این‌صورت نیز 2^{n^2} حالت رخ می‌دهد.

۳ـ $y \in \{n+1, \dots, 2n\}, x \in \{n+1, \dots, 2n\}$ که در این‌صورت نیز 2^{n^2} حالت رخ می‌دهد.

همچنین تعداد رابطه‌های متقارن برابر است با $2^{\frac{3n^2+n}{2}}$.

۴۰ـ گزینه «۲» مقادیر $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ عبارتند از:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

این دو عبارت با هم صحیح نیستند.

۴۱ـ گزینه «۱» زیرا در نمودار رسم شده برای گزینه ۱، $LUB(b,c)$ و $GLB(d,e)$ وجود ندارد.

۴۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. داریم:

$$GCD(a,a) = a$$

بنابراین R دارای خاصیت بازتابی نمی‌باشد. همچنین:

$$GCD(a,b) = 1 \Rightarrow GCD(b,a) = 1$$

بنابراین R تقارنی است. همچنین واضح است که این رابطه پادتقارنی نیست؛ زیرا اعدادی وجود دارند که GCD آنها یک است ولی برابر نیستند.

همچنین این رابطه متعدی نیز نمی‌باشد؛ زیرا به عنوان مثال:

$$GCD(2,3) = 1 \ , \ \ GCD(3,8) = 1$$

اما $GCD(2,8) \neq 1$؛ بنابراین هیچ‌یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۴۳ـ گزینه «۳» داریم:

$$3030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

بنابراین $(D_{3030}, |)$ جبر بولی با 2^6 عضو می‌باشد. اگر $f(2) = \{a\}$ باشد، ۲ متناظر با عضو a است. اگر $f(6) = f(2 \times 3) = \{a, b\}$ باشد، ۳ نیز متناظر با عضو b است. پس برای متناظر ۴ عدد و ۴ عضو باقی مانده، $4! = 24$ حالت خواهیم داشت.

۴۴ـ گزینه «۲» برای به‌دست آوردن رابطه هم‌ارزی از روی کلاس هم‌ارزی، کافیست هر کلاس را در خودش ضرب دکارتی کنیم. بنابراین تعداد اعضای R از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|R| = |A_1| \times |A_1| + |A_2| \times |A_2| + |A_3| \times |A_3| = 10 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 10 = 300$$

۴۵ـ گزینه «۲» سه عضو {۳,۴,۵} را می‌توان به حالت زیر افراز نمود:

{{۳,۴,۵}} {{۳}{۴,۵}} {{۳,۵}{۴}} {{۳,۴}{۵}} {{۳}{۴}{۵}}

حال از آنجایی‌که {۱,۲} با هم هم‌ارز هستند، می‌توان آنها را به صورت عضوی مانند {۱۲} در این افرازها وارد نمود یا آنکه به تنهایی یک کلاس هم‌ارزی باشند. به عنوان نمونه، با وارد شدن دسته {۱۲} به افراز اول فوق، چهار افراز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

{{۳}{۴}{۵}{۱۲}} {{۳}{۴}{۵,۱۲}} {{۳}{۴,۱۲}{۵}} {{۳,۱۲}{۴}{۵}}

بنابراین به طور کلی ۱۵ رابطه هم‌ارزی با شرط خواسته شده وجود دارد.

۴۶ـ گزینه «۱» برای استفاده از اصل لانه کبوتری بازه $[۰,۱)$ را به ۱۳۸۸ قسمت مساوی به طول $\frac{۱}{۱۳۸۸}$ تقسیم می‌کنیم. با انتخاب ۱۳۸۹ امین نقطه، دو تا از نقاط درون یک قسمت واقع خواهند شد و فاصله آنها کمتر از $\frac{۱}{۱۳۸۸}$ خواهد بود.

۴۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. رابطه‌ی داده شده بازتابی نمی‌باشد. این رابطه تقارنی است؛ زیرا $GCD(a,b) = GCD(b,a)$، اما متعدی نیست، زیرا به عنوان مثال: $۲ \not R ۴$ & $۳ R ۴$ & $۲ R ۳$.

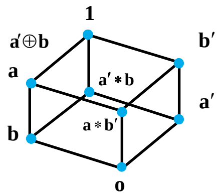
فصل پنجم

«دستگاه‌های جبری»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ جبر بولی به وسیله **Hasse Diagram** در شکل زیر نشان داده شده است. کدام‌یک از زیرمجموعه‌ها یک زیرجبر بول است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۱)



۱) $\{a\times b' \;,\; b' \;,\; a \;,۱\}$

۲) $\{b' \;,\; ab' \;,\; a' \;,o\}$

۳) $\{a'\oplus b \;,\; a*b' \;,\; o \;,۱\}$

۴) $\{a \;,\; b' \;,\; o \;,۱\}$

۲ـ فرض کنید $<۱ \text{ و } \circ \text{ و } \otimes \text{ و } * \text{ و } B>$ و $<B \text{ و } \alpha \text{ و } - \text{ و } + \text{ و } \circ \text{ و } S>$ دو جبر بول و $g: B\to S$ یک هومومورفیسم شبکه (لاتیس) باشد. اگر **g** عضوهای ∘ و ۱ را حفظ کند، آنگاه **g** یک هومومورفیسم بولی خواهد بود، اگر و فقط اگر:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۱)

۱) $\forall b\in B \Rightarrow g(b')=g(b)$

۲) $g(o)=\alpha \quad , \quad g(۱)=B$

۳) $\forall a,b\in B \Rightarrow g(a*b)=g(a)\cdot g(b)$

۴) $\forall a,b\in g \Rightarrow g(a\otimes b)=g(a)+g(b)$

۳ـ دو سیستم جبری $<G,*>$ و $<S,\Delta>$ به وسیله جدول‌های زیر تعریف شده‌اند. نسبت دو سیستم جبری را مشخص کنید.

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۵)

∗	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۱	۴	۳
۳	۳	۴	۱	۲
۴	۴	۳	۲	۱

Δ	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

۱) $<G,*>$ سایه هومومورفیک (Homomorphic Image) نیم‌گروه (Semigroup) $<S,\Delta>$ است.

۲) $<G,*>$ سایه منومورفیک (Monomorphic Image) $<S,\Delta>$ است.

۳) $<G,*>$ سایه ایزومورفیک (Isomorphic Image) گروه (Group) $<S,\Delta>$ است.

۴) $<G,*>$ سایه اپی‌مورفیک (Epimorphic Image) تکواره (Monoid) $<S,\Delta>$ است.

۴ـ فرض کنید **A** مجموعه اعداد صحیح مثبت بوده (Z^+) و رابطه $\preccurlyeq$ روی مجموعه **A** رابطه ترتیب جزئی **(Partial order)** باشد. همچنین فرض نمایید A' مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت بوده و رابطه $\preccurlyeq'$ نیز روی مجموعه A' یک رابطه ترتیب جزئی باشد. آنگاه:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

۱) تابع $f(a)=۲a$ از A به A' ایزومورفیسم از $(A,\preccurlyeq)$ به $(A',\preccurlyeq')$ است.

۲) تابع $f(a)=۲a$ از A' به A ایزومورفیسم از $(A',\preccurlyeq')$ به $(A,\preccurlyeq)$ است.

۳) تابع $f(a)=۲a$ از A' به A ایزومورفیسم از $(A,\preccurlyeq)$ به $(A',\preccurlyeq')$ نیست.

۴) تابع $f(a)=۲a$ از A' به A ایزومورفیسم از $(A',\preccurlyeq')$ به $(A,\preccurlyeq)$ نیست.

۵ـ درجه بولی $B_\circ=[B,+,*,\circ,۱]$، به ازای هر $a\in B$ ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $a+a=a \;,\; a*a=a$ ۲) $a+۱=۱ \;,\; a*\circ=۱$ ۳) $a+a=a \;,\; a*a=\circ$ ۴) $a+۱=۱ \;,\; a*\circ=a$

۶ـ مجموعه اعداد صحیح مثبت **N** و اپراتور * به معنی کوچکترین مضرب مشترک را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $۹*۱۸=۱۶۲$

۲) عنصر Identity مربوط به * برابر صفر می‌باشد.

۳) $(N,*)$ یک Semigroup بوده و Commutitive نیست.

۴) تنها عضوی از مجموعه N که Inverse دارد عدد ۱ است.

۷ـ در یک جبر بول به ازای هر a ، b و c کدام‌یک از روابط زیر برقرار نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = a$　　۲) $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = (b \wedge c)$

۳) $((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' = (a' \vee b) \wedge c'$　　۴) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

۸ـ فرض کنید $\subseteq$ نمایشگر زیرساخت باشد. کدام‌یک درست نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $(N,<) \subseteq (Z,<)$　　۲) $(N,+) \subseteq (Z,+)$　　۳) $(N,-) \subseteq (Z,-)$　　۴) $(N,1) \subseteq (Z,1)$

۹ـ اگر $f:(R,+,\circ) \to (S,\oplus,\odot)$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای پوشا باشد، آنگاه کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟ (علوم کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) اگر R دارای عنصر یکه u باشد، آنگاه f(u) عنصر یکه S است.

۲) اگر R تعویض‌پذیر باشد، آنگاه S تعویض‌پذیر است.

۳) اگر R دارای عنصر یکه u و a واحدی در R باشد، آنگاه f(a) واحدی در S است و $f(a^{-1}) \neq [f(a)]^{-1}$.

۴) اگر I ایده‌آل R باشد، آنگاه f(I) ایده‌آل S است.

۱۰ـ در یک کانال ارتباطی رمز رشته‌های ارسال‌شده چنین است که باید تعداد ۰های پشت سرهم زوج و تعداد ۱های پشت سرهم فرد باشد. مدار تشخیص‌دهنده اشکال در مقصد برای بیت‌های دریافت‌شده پس از تشخیص اشکال، بیت ۱ و در حالت عادی بیت ۰ ایجاد می‌کند. اگر رشته ورودی به کانال در مقصد ۰۰۱۰۱۱۱۰۰۰۱۰ باشد، رشته خروجی تولیدشده مدار تشخیص چه خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰۱۰　　۲) ۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰　　۳) ۰۰۱۰۰۱۰۰۰۰۰۱　　۴) ۰۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰

۱۱ـ عضو $C \in G$ مرکز گروه $(G,*)$ نامیده می‌شود. اگر برای هر $x \in G$ داشته باشیم $x*c = c*x$. یک مرکز گروه تقارن‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) دوران حول مرکز مثلث به اندازه ۶۰ درجه می‌باشد.

۲) دوران حول مرکز مثلث به اندازه ۹۰ درجه می‌باشد.

۳) دوران حول مرکز مثلث به اندازه ۱۲۰ درجه می‌باشد.

۴) دوران حول مرکز مثلث به اندازه ۱۸۰ درجه می‌باشد.

۱۲ـ می‌دانیم که مجموعه تمامی مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۱۰ که با D_{210} نمایش داده می‌شود، همراه با رابطه عاد کردن (شمردن) یک جبر بول است. تعداد زیرجبرهای حداقل دوعضوی آن کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۵　　۲) ۱۴　　۳) ۱۳　　۴) ۷

۱۳ـ کدام عبارت نادرست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) اگر (A,R) مجموعه‌ای تماماً مرتب باشد، آنگاه شبکه است.

۲) تابع یک به یک $f: Z^+ \to R$ وجود دارد که $f \in O(1)$.

۳) اگر تابع $g: R \to R$ و f اکیداً صعودی باشند، $fog: R \to R$ نیز اکیداً صعودی است.

۴) اگر رابطه هم‌ارزی R روی مجموعه $A = \{4,6,8,11,24,45,56,78\}$ افراز $\{\{4,8,11\},\{6,24\},\{45,56,78\}\}$ را القا کند، تعداد عناصر R برابر با ۱۸ است.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ گزینه «۳» مجموعه $\{a' \oplus b, a * b', \circ, ۱\}$ با توجه به تعاریف مسأله یک زیرجبر بولی است. در ضمن $\{a, a', \circ, ۱\}$ نیز یک زیرجبر بولی می‌باشد، ولی مجموعه $\{a, b', \circ, ۱\}$ یک مجموعه بولی نمی‌باشد.

۲ـ گزینه «۱» در شرایط گفته شده، g یک هomomorfism بولی خواهد بود، اگر و تنها اگر به ازای هر عضو مجموعه B داشته باشیم $g(b) = g(b')$.

۳ـ گزینه «۳» در سیستم‌های جبری $< G, * >$ و $< S, \Delta >$ تناظر زیر برقرار است:

$a \equiv ۳, b \equiv ۴, c \equiv ۱, d \equiv ۲$

حال اگر تابع f از G به S به صورت زیر تعریف گردد، آنگاه g یک همومورفیسم از G به S خواهد بود و از طرفی g تابعی پوشا و یک به یک است؛ بنابراین g یک تابع ایزومورفیک است.

$f(a) = ۳ \ , f(b) = ۴ \ , \ f(c) = ۱ \ , \ f(d) = ۲$

۴ـ گزینه «۱» تابع $f = A \to A'$ را ایزومورفیسم می‌گویند، هرگاه یک به یک و پوشا باشد. واضح است که تابع $f(a) = ۲a$ یک تابع یک به یک و پوشا می‌باشد. دلیل نادرست بودن گزینه (۲) این است که تابع $f(a) = ۲a$ از A' به A پوشا نیست. به عنوان مثال، $۳ \in A$ توسط هیچ عضوی از A' پوشانده نمی‌شود. پس گزینه (۴) نیز درست است.

۵ـ گزینه «۱» از آنجایی که $a + ۱ = ۱$ و $a * \circ = \circ$، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح نمی‌باشند و از آنجایی که $a * a = a$، گزینه (۳) نیز صحیح نمی‌باشد.

۶ـ گزینه «۴» عضو همانی عملگر ضرب $(*)$ یک می‌باشد. همچنین ک.م.م دو عدد ۹ و ۱۸، ۱۸ می‌باشد. دستگاه جبری $(N, *)$ دارای خاصیت انجمنی (شرکت‌پذیری) است؛ بنابراین $(N, *)$ یک نیم‌گروه می‌باشد و از آنجایی که جابه‌جایی در ک.م.م دو عدد اهمیتی ندارد، $(N, *)$ خاصیت جابه‌جایی دارد. عدد یک دارای معکوس می‌باشد؛ زیرا تنها عددی (در مجموعه N) که می‌تواند حاصل ک.م.م آن با عدد دیگر برابر یک شود، همان عدد یک است.

۷ـ گزینه «۱» گزینه (۲) طبق قانون جذب و گزینه (۴) طبق قانون شرکت‌پذیری صحیح است. برای اثبات برقراری گزینه (۳) از قوانین دمورگان نیز استفاده می‌شود.

۸ـ گزینه «۳» واضح است که مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته نمی‌باشد ولی نسبت به عمل جمع و عمل کوچکتری بسته می‌باشد؛ لذا $(N, -)$ زیرساختاری از $(Z, -)$ نمی‌باشد.

۹ـ گزینه «۳» قضیه: اگر $f : (R, +, \circ) \to (S, \oplus, \odot)$ هم‌ریختی از R روی S و به صورت پوشا باشد که در آن $|S| > ۱$، آنگاه:

الف ـ اگر R دارای عنصری که u_R باشد، $f(u_R)$ عنصری از S است.

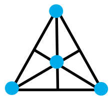
ب ـ اگر R دارای عنصری که u_R و a یکه‌ای از R باشد، $f(a)$ یکه‌ای از S است و $f(a^{-۱}) = [f(a)]^{-۱}$.

پ ـ اگر R تعویض‌پذیر باشد، S نیز تعویض‌پذیر است.

ت ـ اگر I ایده‌آلی از R باشد، f(I) نیز ایده‌آلی از S است.

۱۰ـ گزینه «۲» با خواندن رشته ورودی از سمت چپ با فرض آنکه اولین رقم رشته درست باشد، با رسیدن به اولین صفر خروجی صفر می‌گردد و سپس با دیدن یک خروجی ۱ می‌گردد (زیرا صفرهای متوالی زوج نیستند). حال با دیدن سه تا صفر در خروجی نیز سه تا صفر ظاهر می‌گردد و بعد از آن آنجایی که باز هم تعداد صفرهای متوالی زوج نیست با دیدن ۱، خروجی ۱ می‌گردد و به همین ترتیب می‌توان خطاهای دیگر را نیز یافت.

۱۱ـ گزینه «۳» مثلث متساوی‌الاضلاع زیر با سه رأس a، b و c را در نظر بگیرید.



یک دوران از رئوس این مثلث به اندازه 360° حول مرکز ثقل مثلث به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$P_1=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

همچنین دوران‌های ۱۲۰ درجه (P_2) و ۲۴۰ درجه (P_3) حول مرکز ثقل به صورت روبه‌رو می‌باشد.

$$P_2=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \quad , \quad P_3=\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

بنابراین انواع دوران‌های مثلث با هر مضربی از ۱۲۰ درجه به یکی از دوران‌های P_1, P_2, P_3 تبدیل می‌شود.

۱۲ـ گزینه «۱»

$$D_{210}=\{1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}$$

هرکدام از این‌ها به‌جز (۱)، زیرمجموعه‌ی حداقل دوعضوی دارند که در مجموع ۱۵ می‌باشند.

$$D_1=\{(1,1)\} \qquad D_3=\{(1,3),(3,3)\}$$

۱۳ـ گزینه «۴» در رابطه با گزینه (۴) باید بدانیم که تعداد عناصر رابطه R همان تعداد زوج مرتب‌های آن رابطه می‌باشد. برای به دست آوردن زوج مرتب‌های یک رابطه هم‌ارزی از روی افراز آن، کافیست هر افراز را در خودش ضرب کنیم. بنابراین داریم:

تعداد عناصر رابطه R $= 3\times 3 + 2\times 2 + 3\times 3 = 22$

فصل ششم

«مفاهیم پیشرفته در شمارش»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ تعداد اعداد طبیعی n و $n \leq ۱۰۰۰$ که n بر ۷ یا ۱۱ بخش‌پذیرند، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۰۵ ۳) ۲۲۰ ۴) ۲۱۰

۲ـ تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی ۲۰۰۰ که بر ۹ یا بر ۱۱ بخش‌پذیرند، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳۸۳ ۲) ۴۰۳ ۳) ۳۸۰ ۴) ۴۰۰

۳ـ چند عدد صحیح و مثبت کوچکتر یا مساوی با ۱۰۰۰ وجود دارد که نه توان دوم کامل، نه توان سوم کامل و نه توان چهارم کامل هستند؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۹۵۴ ۲) ۹۵۹ ۳) ۹۶۰ ۴) ۹۶۲

۴ـ به چند طریق می‌توان ۲۱ مهره غیرهمانند را در سه جعبه غیرهمانند توزیع کرد به‌طوری که در جعبه اول تعداد زوجی از مهره‌ها و در جعبه دوم تعداد فردی از مهره‌ها قرار گیرند؟

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{4}(3^{21}+1)$ ۲) $\frac{1}{2}(3^{21}+1)$ ۳) $\frac{1}{4}(3^{21}-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(3^{21}-1)$

۵ـ معادلات بازگشتی توأم زیر را در نظر می‌گیریم:

$a_0 = 1$، $a_1 = 0$، $b_0 = 0$، $b_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ ، $a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}$ و $b_n = a_{n-1} + b_{n-2}$. در صورتی‌که $A(x)$ و $B(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های مولد دنباله‌های $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ باشند، $\frac{A(x)}{B(x)}$ کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1-x^2}{x}$ ۲) $\frac{1+x^2}{x+1}$ ۳) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ۴) $\frac{1-x^2}{2x^2-1}$

۶ـ فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = f(x)$ تابع مولد دنباله (S_n) باشد. جمله عمومی S_n برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $2^{-n} - 3^{-n} - \frac{1}{6}$ ۲) $6^{-n-1} - 2^{-n} + 1$ ۳) $2^{-n-1} + 3^{-n-1} - 1$ ۴) $2^{-n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)3^{-n-1} - \frac{1}{2}$

۷ـ تاسی را ۱۳ بار می‌ریزیم. تعداد حالت‌هایی که مجموع شماره‌های ظاهر شده برابر ۴۰ باشد برابر با ضریب x^{27}، کدام تابع زیر است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $(1-x)^{-13}$ ۲) $(1-x^6)^{13}(1-x)^{-13}$ ۳) $(e^x-1)^{13}$ ۴) $\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{(x)^n}{(n+1)!}\right)$

۸ـ ۱۰ کارت و جعبه با شماره ۰ تا ۹ موجود است. به چند طریق می‌توان کارت‌ها را در جعبه‌ها قرار داد، به طوری‌که در هر جعبه دقیقاً یک کارت و هیچ کارت با شماره زوج در جعبه با شماره یکسان با خودش قرار نگیرد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{10}{i}(5-i)!$ ۲) $5!\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)!$ ۳) $\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}(10-i)!$ ۴) $\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(10-i)!$

۹ــ از مجموعه $\{1,2,3,\ldots,29\}$ به چند طریق می‌توان سه عدد انتخاب نمود که مجموعشان بر ۳ تقسیم‌پذیر باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۶)

۱) ۱۲۲۱ ۲) ۱۲۲۲ ۳) ۱۲۲۳ ۴) ۱۲۲۴

۱۰ــ ضریب x^8 در عبارت $x^2(2x^{-1}-x^2)^6$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری۸۶)

۱) ۱۵- ۲) ۱۵ ۳) ۶۰- ۴) ۶۰

۱۱ــ تابع مولد دنباله $\ldots,0,0,1,a,a^2,a^3$ که در آن $a \neq 0$، کدام است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{ax}{1+x}$ ۲) $\frac{x}{1+ax}$ ۳) $\frac{ax^2}{1-x}$ ۴) $\frac{x^2}{1-ax}$

۱۲ــ گروهی داریم متشکل از ۱۹۱ دانشجو که ۱۰ نفر دروس فرانسه، بازرگانی و موسیقی، ۳۶ نفر دروس فرانسه و بازرگانی، ۲۰ نفر دروس فرانسه و موسیقی، ۱۸ نفر دروس بازرگانی و موسیقی، ۶۵ نفر فرانسه، ۷۶ نفر بازرگانی و ۶۳ نفر موسیقی را اخذ کرده‌اند. چند نفر هیچ‌یک از این سه درس را اخذ نکرده‌اند؟ (علوم کامپیوتر ـ آزاد۸۶)

۱) ۷۷ ۲) ۵۴ ۳) ۳۴ ۴) ۵۱

۱۳ــ اگر $G(x)$ یک تابع مولد برای دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ باشد، آنگاه یک تابع مولد برای دنباله $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ عبارت است از: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $G'(x)$ ۲) $G(nx)$ ۳) $xG'(x)$ ۴) $G(x^n)$

۱۴ــ منظور از یک مربع لاتین آرایه‌ای $n\times n$ است، تشکیل شده از اعضای $1,2,3,\ldots,n$ به طوری‌که در هیچ سطر یا ستون تکرار وجود نداشته باشد. به چند طریق مربع لاتین جزئی زیر را می‌توان به یک مربع لاتین 4×4 گسترش داد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۲

۱) ۰
۲) ۱
۳) $2(3!)$
۴) $4!$

۱۵ــ کدام رابطه بازگشتی نشان‌دهنده تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۷)

۱) $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n,k)P_k$ ۲) $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n,k)P_k$ ۳) $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n-1,k)P_k$ ۴) $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n-1,k-1)P_k$

۱۶ــ در یک بازی برد و باخت شخصی با n تومان پول وارد بازی می‌شود. در هر دور با کشیدن یک کارت از میان کارت A و B (به طور کاملاً تصادفی) اگر A آمد، یک تومان به پول او اضافه می‌شود؛ در غیر این صورت یک تومان از دست می‌دهد. فرض کنید اگر پول این شخص به $m(m>n)$ برسد و یا تمام پولش را از دست بدهد، از بازی خارج می‌شود. اگر این شخص بخواهد پول او ۴ برابر شود، احتمال ورشکستگی او (از دست دادن تمام پولش) چقدر است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۷۵

۱۷ــ فرض کنید $A=\{1,2,3,\ldots,600\}$ حاوی تمام اعداد طبیعی بین یک تا ۶۰۰ باشد. تعداد اعضای A که بر ۳، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نیستند، چندتاست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) ۲۷۵ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۴۰۵

۱۸ــ فرض کنید $G(z)$ تابع مولد برای دنباله $\begin{cases}a_n=2a_{n-1}-1\\ a_0=4\end{cases}$ باشد. کدام رابطه صحیح است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۹)

۱) $G(z)(1-2z)=\frac{4-5z}{1-z}$ ۲) $G(z)(1-3z)=\frac{4-5z}{1-z}$ ۳) $G(z)(2z-1)=\frac{4-3z}{1-z}$ ۴) $G(z)(1-z)=\frac{4-3z}{1-2z}$

۱۹ــ حداکثر چند زیرمجموعه زوج‌عضوی از $\{1,\dots,20\}$ می‌توان انتخاب کرد، به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه تعداد زوجی عضو داشته باشد؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) 2^5 ۲) 2^8 ۳) 2^9 ۴) 2^{10}

۲۰ــ تعداد ماتریس‌های 5×8 با درایه‌های ۰ و ۱ را بیابید که در هر سطر دقیقاً یک درایه ۱ و در هر ستون حداقل یک درایه ۱ دارد؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) 5^8 ۲) 8^5 ۳) $\sum_{i=0}^{8}(-1)^i\binom{8}{i}(8-i)^5$ ۴) $\sum_{i=0}^{8}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^8$

۲۱ــ تعداد دنباله‌های ۴ رقمی که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخت به‌طوری که حاوی تعداد فردی ۱ باشد، برابر است با:

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۵۶

۲۲ــ چه تعداد از عناصر مجموعه $X=\{1,2,\dots,150\}$ دقیقاً بر یکی از اعداد ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۳۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۲۳ــ تعداد اعداد طبیعی که ارقام آن ۱، ۲ و ۴ باشد و مجموع ارقام برابر ۸ باشد، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ گزینه «۳» فرض کنید A و B زیرمجموعه‌ای از اعداد {۱,۲,...,۱۰۰۰} باشند که به ترتیب بر ۷ و ۱۱ بخش‌پذیرند. اندازه مجموعه شامل اجتماع این دو مجموعه برابر است با:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A| = [\frac{1000}{7}] = 142 \quad , \quad |B| = [\frac{1000}{11}] = 90 \quad , \quad |A\cap B| = [\frac{1000}{77}] = 12$$

در نتیجه تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ که بر ۷ یا ۱۱ بخش‌پذیرند برابر است با:

$$|A\cup B| = 142 + 90 - 12 = 220$$

۲ـ گزینه «۱» فرض کنید A و B زیرمجموعه‌ای از اعداد {۱,۲,...,۲۰۰۰} باشند که به ترتیب بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیرند. اندازه مجموعه شامل اجتماع این دو مجموعه برابر است با:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A| = [\frac{2000}{9}] = 222 \quad , \quad |B| = [\frac{2000}{11}] = 181 \quad , \quad |A\cap B| = [\frac{2000}{99}] = 20$$

در نتیجه جواب مسأله برابر است با:

$$|A\cup B| = 222 + 181 - 20 = 383$$

۳ـ گزینه «۴» اگر A و B و C را مجموعه شامل اعداد صحیح و مثبت کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ که توان ۲ کامل، توان ۳ کامل و توان ۴ کامل هستند در نظر بگیریم، پاسخ مسأله برابر خواهد بود با مقدار $|A\cup B\cup C| - 1000$ از اصل شمول و طرد برای محاسبه مقدار $|A\cup B\cup C|$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|A| = [\sqrt{1000}] = 31 \qquad |B| = [\sqrt[3]{1000}] = 10 \qquad |C| = [\sqrt[4]{1000}] = 5$$

$$|A\cap B| = \sqrt[6]{1000} = 3 \qquad |A\cap C| = \sqrt[4]{1000} = 5 \qquad |B\cap C| = \sqrt[12]{1000} = 1$$

$$|A\cap B\cap C| = \sqrt[12]{1000} = 1$$

طبق اصل شمول و طرد خواهیم داشت:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$$

$$\Rightarrow |A\cup B\cup C| = 31 + 10 + 5 - (3 + 5 + 1) + 1 = 38 \Rightarrow \text{جواب} = 1000 - |A\cup B\cup C| = 962$$

۴ـ گزینه«۲» از تابع مولد نمایی برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم. تابع مولد نمایی جعبه اول به شکل $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ برای جعبه دوم به شکل $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و برای جعبه سوم به شکل e^x است (با توجه به اینکه تعداد مهره‌های جعبه سوم باید زوج باشد، استفاده از تابع مولد نمایی $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ برای جعبه سوم مشکلی به وجود نمی‌آورد). حال توابع مولد نمایی این سه جعبه را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times e^x = \frac{e^{3x} - e^{-x}}{4}$$

ضریب جمله $\frac{x^{21}}{21!}$ که نشان‌دهنده تعداد راه‌های توزیع مهره‌ها در این سه جعبه است را محاسبه می‌نماییم. با توجه به اینکه ضریب x^k در e^{mx} برابر m^x است، جواب مسأله برابر است با $\frac{(3^{21}+1)}{4}$.

۵ـ گزینه «۱» تابع مولد دنباله‌های a_n و b_n را به دست می‌آوریم. برای این‌کار طرفین دو رابطه را در x^n ضرب می‌کنیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^n \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2b_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

با فرض $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} A(x)-a_1x-a_0=2x(B(x)-b_0)+x^2A(x) \Rightarrow A(x)-1=2xB(x)+x^2A(x) \\ B(x)-b_1x-b_0=x(A(x)-a_0)+x^2B(x) \Rightarrow B(x)-x=x(A(x)-1)+x^2B(x) \end{array}\right\} \Rightarrow B(x)=xA(x)+x^2B(x)$$

حاصل تقسیم این دو تابع برابر است با:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{1-x^2}{x}$$

۶ـ گزینه «۴» نیاز به تجزیه کسرها داریم:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1-\frac{x}{2}}+\frac{c}{1-\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{-\frac{1}{6}}{(1-x)(1-\frac{x}{2})(1-\frac{x}{3})}=\frac{a(1-\frac{x}{2})(1-\frac{x}{3})+b(1-x)(1-\frac{x}{3})+c(1-x)(1-\frac{x}{2})}{(1-x)(1-\frac{x}{2})(1-\frac{x}{3})}$$

$$\Rightarrow a+b+c+x(-\frac{a}{2}-\frac{a}{3}-b-\frac{b}{3}-c-\frac{c}{2})+x^2(\frac{a}{6}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2})=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b+c=-\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6}a-\frac{4}{3}b-\frac{3}{2}c=0 \Rightarrow 5a+8b+9c=0 \qquad \Rightarrow 5a+8b-6b-3a=0 \Rightarrow a=-b \\ \frac{a}{6}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}=0 \Rightarrow a+2b+3c=0 \Rightarrow 3c=-2b-a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=a+b+\frac{-2b}{3}-\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}=\frac{2}{3}(-b)+\frac{b}{3}=-\frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{b}{3}=-\frac{1}{6} \Rightarrow b=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow c=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}+\frac{-\frac{1}{6}}{1-\frac{x}{3}}=a\sum_{n=0}^{\infty}x^n+b\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n x^n+c\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n x^n$$

که هم‌ارز با گزینه (۴) است.

۷ـ گزینه «۲» تابع مولد معادل را محاسبه می‌نمائیم:

$$g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{13}=x^{13}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{13}=\frac{x^{13}(1-x^6)^{13}}{(1-x)^{13}}$$

کافیست ضریب x^{40} در $g(x)$ یا ضریب x^{27} را در تابع مولد $(1-x^6)^{13}(1-x)^{-13}$ محاسبه نمائیم.

۸ـ گزینه «۴» این مسأله را می‌توان با استفاده از اصل شمول و طرد حل نمود. فرض کنید c_i به ازای $i\in\{0,2,4,6,8\}$ مجموعه‌ای از حالات باشد که کارت i در مکان خودش قرار ندارد.

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}\,\overline{c_5})=N-[N(c_0)+N(c_2)+N(c_4)+N(c_6)+N(c_8)]+[N(c_0c_2)+N(c_0c_4)+\ldots+N(c_6c_8)]$$

$$-[N(c_0c_2c_4)+\ldots]+[N(c_0c_2c_4c_6)+\ldots]-N(c_0c_2c_4c_6c_8) \;=10-\binom{5}{1}9!+\binom{5}{2}8!-\binom{5}{3}7!+\binom{5}{4}6!-5!=\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(10-i)!$$

۹ـ گزینه «۴» اعداد مجموعه $\{1,2,\dots,29\}$ را با توجه به باقی‌مانده به ۳ آنها به ۳ کلاس $[0]=\{3,6,\dots,27\}$، $[1]=\{1,4,\dots,28\}$ و $[2]=\{2,5,\dots,29\}$ افراز می‌کنیم. اعضای زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{1,2,\dots,29\}$ که حاصل جمعشان بر ۳ بخش‌پذیر است یا هر سه عضو یکی از ۳ کلاس معرفی شده هستند یا دقیقاً از ۳ کلاس متمایز انتخاب شده‌اند. با توجه به اینکه ۲ کلاس، ۱۰ عضوی و یک کلاس ۹ عضوی است، تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی که همه اعضا مربوط به یک کلاس هستند برابر با $\binom{9}{3}+\binom{10}{3}+\binom{10}{3}$ و تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی که اعضایشان مربوط به هر سه کلاس هستند برابر با $\binom{9}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$ می‌باشد. در نتیجه تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی با شرایط مسأله برابر است با:

$$\text{جواب}=2\binom{10}{3}+\binom{9}{3}+\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{9}{1}=240+84+900=1224$$

۱۰ـ گزینه «۴» ضریب x^8 عبارت $x^2(2x^{-1}-x^2)^6$ برابر با ضریب x^6 در عبارت $(2x^{-1}-x^2)^6$ است. این جمله زمانی حاصل می‌شود که از ۴ پرانتز از ۶ پرانتز این بسط جمله $(-x^2)$ و از ۲ پرانتز دیگر جمله $2x^{-1}$ انتخاب شود. در نتیجه جواب مسأله برابر است با:

$$x^8 \text{ ضریب}=\binom{6}{4}(2)^2(-1)^4=15\times 4=60$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\dots$، با دوبار شیفت به چپ به تابع مولد صورت سؤال خواهیم رسید، تابع مولد دنباله بیان شده به صورت زیر خواهد بود:

$$0x^0+0x^1+1x^2+ax^3+a^2x^4+a^3x^5+\dots=\frac{x^2}{1-ax}$$

۱۲ـ گزینه «۴» اگر c_1، c_2 و c_3 را به ترتیب مجموعه‌های شامل افرادی که درس فرانسه، موسیقی و بازرگانی را اخذ کرده‌اند در نظر بگیریم با استفاده از اصل شمول و طرد تعداد افرادی که هیچیک از این دروس را اخذ نکرده‌اند برابر $N(\overline{c}_1,\overline{c}_2,\overline{c}_3)$ خواهد بود. خواهیم داشت:

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3})=N-(N(c_1)+N(c_2)+N(c_3))+(N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_2c_3))-N(c_1c_2c_3)$$

جواب مسأله برابر است با:

$$\Rightarrow N(\overline{c}_1,\overline{c}_2,\overline{c}_3)=191-(65+76+63)+(36+18+20)-10=51$$

۱۳ـ گزینه «۳» باید ابتدا از تابع مولد مشتق گرفته و سپس آن را در x ضرب کنیم تا به تابع مولد موردنظر برسیم.

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه در ستون آخر این جدول نمی‌توان جایگاه مجازی برای عدد ۱ پیدا کرد. این ماتریس قابل گسترش به یک مربع لاتین نخواهد بود.

۱۵ـ گزینه «۳» راه‌های افراز یک مجموعه n عضوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

۱- تعداد حالاتی که یک افراز n عضوی داشته باشیم که عضو شماره ۱ در آن قرار داشته باشد، $\binom{n}{n}P_0$ حالت خواهیم داشت.

۲- تعداد حالاتی که یک افراز $n-1$ عضوی داشته باشیم که عضو شماره ۱ در آن قرار داشته باشد و یک عضو باقی‌مانده را به P_1 حالت افراز کنیم، $\binom{n}{1}P_1$ حالت خواهیم داشت.

۳- تعداد حالاتی که یک افراز $n-2$ عضوی داشته باشیم که عضو شماره ۱ در آن قرار داشته باشد و دو عضو باقی‌مانده را به P_2 حالت افراز کنیم، $\binom{n}{2}P_2$ حالت خواهیم داشت.

...

kـ تعداد حالاتی که یک افراز $n-k$ عضوی داشته باشیم که عضو شماره ۱ در آن قرار داشته باشد و k عضو باقی‌مانده را به P_k حالت افراز کنیم، $\binom{n}{k}P_k$ حالت خواهیم داشت.

...

$n-1$ـ تعداد حالاتی که یک افراز ۱ عضوی داشته باشیم که عضو شماره ۱ در آن قرار داشته باشد و $n-1$ عضو باقی‌مانده را به P_{n-1} حالت افراز کنیم، $\binom{n}{n-1}P_{n-1}$ حالت خواهیم داشت. با جمع این حالت‌ها به گزینه (۳) می‌رسیم.

۱۶ـ گزینه «۴» احتمال رسیدن به $2n$ تومان پول قبل از ورشکستگی برابر $\frac{1}{2}$ است (احتمال موفقیت و شکست برابر است) و احتمال رسیدن به $4n$ تومان پول با فرض رسیدن به $2n$ تومان پول نیز برابر $\frac{1}{2}$ است؛ در نتیجه احتمال موفقیت برابر خواهد بود با: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0/25$

۱۷ـ گزینه «۱» بنابر اصل شمول و عدم شمول کافی است تعداد کل اعداد را منهای تعداد اعدادی که فقط بر ۳، ۵ یا ۷ بخش‌پذیرند سپس به علاوه تعداد اعدادی که بر 3×5، 3×7 و 5×7 بخش‌پذیرند و در آخر منهای تعداد اعدادی که بر $3\times5\times7$ بخش‌پذیرند نمائیم. خواهیم داشت:

$$=600-([\frac{600}{3}]+[\frac{600}{5}]+[\frac{600}{7}])+([\frac{600}{3\times5}]+[\frac{600}{5\times7}]+[\frac{600}{3\times7}])-\frac{600}{3\times5\times7}=275$$

۱۸ـ گزینه «۱» تابع مولد دنباله را محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$a_n=2a_{n-1}-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0=2x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}(G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)$$

فرض می‌کنیم $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$$\Rightarrow G(x)-a_0=2xG(x)-\frac{x}{1-x}\Rightarrow G(x)(1-2x)=a_0-\frac{x}{1-x}\Rightarrow\frac{a_0-(a_0+1)x}{1-x}=\frac{4-5x}{1-x}$$

۱۹ـ گزینه «۴» به طور کلی در مجموعهٔ $2k$ عضوی حداکثر می‌توان 2^k زیرمجموعه زوج‌عضوی انتخاب کرد که اشتراک هر جفت زیرمجموعه تعداد زوجی عضو داشته باشد. روش کار به این شکل است که باید اعضای مجموعه را دو تا دو تا جدا کنیم و هر دو تایی را به عنوان یک دسته در زیرمجموعه‌ها قرار دهیم، یعنی یک مجموعه n عضوی از عضوهای دوتایی. می‌توان از تقسیم‌بندی زیر استفاده نمود:

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},...,\{19,20\}\}$$

زیرمجموعه‌های نهایی از اجتماع تعدادی از این مجموعه‌های دوعضوی تشکیل می‌شوند.

۲۰ـ گزینه «۴» جواب مانند تعداد توابع پوشا از ۸ عضو به ۵ عضو است. طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$\text{جواب}=5^8-\binom{5}{1}4^8+\binom{5}{2}3^8-\binom{5}{3}2^8+\binom{5}{4}=\sum_{i=0}^{8}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^8$$

۲۱ـ گزینه «۳» **روش اول:** اگر a_n را دنباله‌های با تعداد فرد ۱ به‌طول n و b_n را دنباله‌های با تعداد زوج ۱ به‌طول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{matrix}a_1=1 & a_n=3a_{n-1}+b_{n-1}\\ b_1=3 & b_n=3b_{n-1}+a_{n-1}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a_2=6\\ b_2=10\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a_3=28\\ b_3=36\end{matrix}\Rightarrow a_4=84+36=120$$

روش دوم: می‌توان مسأله را به دو حالت تقسیم نمود:

حالت اول: دنباله دقیقاً یک عدد ۱ داشته باشد. در این حالت این عدد $\binom{4}{1}$ انتخاب برای جایگاهش دارد و ۳ جایگاه دیگر با 3^3 حالت پر می‌شوند.

حالت دوم: دنباله دقیقاً سه عدد ۱ داشته باشد. در این حالت اعداد ۱ به تعداد $\binom{4}{3}$ حالت انتخاب برای جایگاهشان دارند و جایگاه چهارم با 3^1 حالت پر می‌شود.

مجموع دو حالت فوق برابر است با: $\text{پاسخ} = \binom{4}{1}3^3 + \binom{4}{3}3^1 = 120$

۲۲ــ گزینه «۳» اگر c_1 را مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند و c_2 را مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیرند در نظر بگیریم که عضو مجموعه $\{1,2,\cdots,150\}$ هستند، خواهیم داشت:

$$\text{تعداد اعدادی که دقیقاً بر یکی از دو عدد ۳ و ۵ بخش‌پذیرند} = N(c_1)+N(c_2)-2N(c_1c_2) = \left\lfloor\frac{150}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{150}{5}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{150}{15}\right\rfloor = 50+30-20 = 60$$

۲۳ــ گزینه «۴» مجموعه ارقام قابل قبول و تعداد اعدادی که با این ارقام قابل تولید است، در جدول زیر آمده است. تعداد این اعداد برابر با ۵۵ محاسبه شده است.

ارقام	تعداد اعداد
۱۱۱۱۱۱۱۱	۱
۱۱۱۱۱۱۲	۷
۱۱۱۱۲۲	۱۵
۱۱۲۲۲	۱۰
۲۲۲۲	۱
۱۱۱۱۴	۵
۱۱۲۴	۱۲
۲۲۴	۳
۴۴	۱
	۵۵

فصل هفتم

«نظریه گراف»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ گراف بدون جهت $G(V, E)$ را می‌توان با K رنگ، رنگ کرد، اگر بتوان به هر رأس یکی از رنگ‌های ۱ تا K را نسبت داد، به طوری کـه هـیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟ (توضیح: گراف دوبخشی گرافی است که در آن V به دو مجموعه A و B افراز شده و هر یال گراف لزوماً یک سر در A و یک سر در B داشته باشد). (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) هر درخت را می‌توان با دو رنگ، رنگ کرد.

۲) هر گراف کامل را با $|V|$ رنگ می‌توان رنگ کرد.

۳) هر گراف دوبخشی را می‌توان با دو رنگ، رنگ کرد.

۴) هیچ گراف دارای دور (سیکل) را نمی‌توان با ۲ رنگ، رنگ کرد.

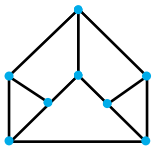
۲ـ گراف‌های زیر را در نظر بگیرید: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

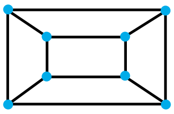
۱) G و H با هم ایزومورفیک (isomorphic) نیستند.

۲) G و H با هم ایزومورفیک هستند.

۳) تعداد رئوس با درجه ۳ در G کمتر از H است.

۴) تعداد رئوس با درجه ۳ در G بیشتر از H است.

H:


G:


۳ـ در یک سمینار علمی ۳۷ نفر حضور دارند که در ابتدا هر مدعو با تک‌تک بقیه مدعوین به طور دلخواه یا دست می‌دهد و یا دست نمی‌دهد. گزاره صحیح کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد زوج دست داده‌اند، زوج است.

۲) حداقل دو نفر در این جلسه هستند که به تعداد مساوی دست داده‌اند.

۳) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد فرد دست داده‌اند، فرد است.

۴) هیچ‌کدام

۴ـ از گراف کامل $K_۶$ حداکثر چند ضلع می‌توان حذف کرد، به طوری که حاصل همچنان پیوسته (همبند) باقی بماند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) ۷ ضلع ۲) ۸ ضلع ۳) ۹ ضلع ۴) ۱۰ضلع

۵ـ در گراف کامل $K_۸$ با شروع از یک رأس، چند سیکل (دور) هامیلتونی مختلف وجود دارد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) !۸ ۲) $\frac{۹!}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹!}{۸}$ ۴) $\frac{۹!}{۱۸}$

۶ـ اگر M ماتریس اتصال (adjacency) گراف G باشد، آنگاه $M^k = [x_{ij}]$ .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) x_{ij} تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j که از رأس k می‌گذرند.

۲) x_{ij} تعداد مسیرهای به طول k از رأس i به رأس j است.

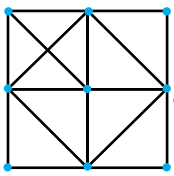
۳) x_{ij} تعداد راه‌های (walk) به طول k از رأس i به رأس j است.

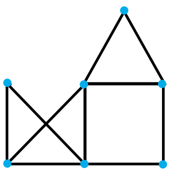
۴) x_{ij} تعداد راه‌های (walk) بین رئوس i و j است که از رأس k می‌گذرند.

۷ـ گراف .... هامیلتونی نیست. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) گراف کامل $K_{۱۰}$

۲) گراف دوبخشی کامل $K_{۷,۸}$

۳)


۴)


۸ـ فرض کنید G یک گراف n رأسی است، به طوری که G با مکملش یکریخت (ایزومورف) است. در این صورت n برابر کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱۹ ‏ ۲) ۳۱ ‏ ۳) ۳۰ ‏ ۴) ۲۱

۹ـ بیژن و همسرش سه زوج دیگر را به میهمانی دعوت کرده‌اند. در این میهمانی تعدادی سلام و علیک ردوبدل شده است. اما می‌دانیم که:

۱ـ فردی با خودش سلام و علیک نداشته است.

۲ـ فردی با همسرش سلام و علیک نداشته است.

۳ـ هر فرد با فرد دیگر حداکثر یک بار سلام و علیک داشته است.

قبل از رفتن میهمانان، بیژن از هر کدام از میهمانان و همسر خود می‌پرسد که چندبار سلام و علیک کرده‌اند و از هرکدام از ۷ نفر جواب‌های متمایز می‌شنود. بیژن و همسرش هر کدام به ترتیب چندبار سلام و علیک داشته‌اند؟

(مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)

۱) ۳ و ۲ ‏ ۲) ۲ و ۳ ‏ ۳) ۳ و ۳ ‏ ۴) ۲ و ۲

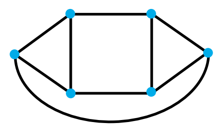
۱۰ـ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف همبند و غیرجهت‌دار با $|V|=8$ است. اگر G یکریخت (ایزومورف) با مکمل خودش یعنی $\bar{G}$ باشد، در این صورت تعداد یال‌های G برابر است با:

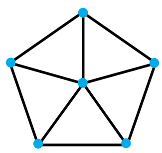
(مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)

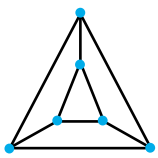
۱) ۱۸ ‏ ۲) ۱۶ ‏ ۳) ۱۴ ‏ ۴) ۱۲

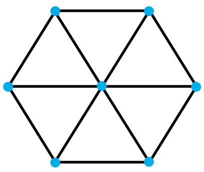
۱۱ـ کدام‌یک از گراف‌های زیر یکریخت (Isomorphic) می‌باشند؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

الف)


ب)


ج)


د)


۱) (ب) و (د) ‏ ۲) (الف) و (ب) ‏ ۳) (الف) و (د) ‏ ۴) (الف) و (ج)

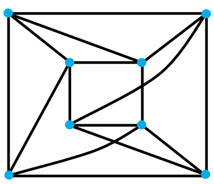
۱۲ـ کدام‌یک از دنباله‌های زیر دنباله درجات گرافی ساده است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

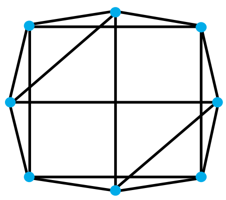
۱) ۵, ۴, ۴, ۳, ۳, ۲, ۲ ‏ ۲) ۵, ۴, ۴, ۴, ۲, ۱ ‏ ۳) ۴, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ ‏ ۴) ۷, ۵, ۴, ۴, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱

۱۳ـ گراف‌های G_1 و G_2 مطابق شکل زیر داده شده‌اند. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)



G_1



G_2

۱) G_1 و G_2 ایزومورف هستند.

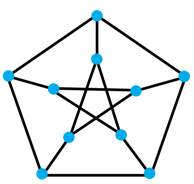
۲) G_1 مسطح است و G_2 اویلری است.

۳) G_1 اویلری است و G_2 مسطح است.

۴) G_1 هامیلتونی است و G_2 دوبخشی است.

۱۴ـ در مورد گراف پترسن گزاره صحیح را انتخاب کنید.

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)



۱) هامیلتونی است.

۲) عدد رنگی رأسی آن ۳ است و عدد رنگی یالی آن ۴ است.

۳) عدد رنگی یالی آن ۳ است.

۴) یال‌های آن را می‌توان به تطابق‌های کامل افراز نمود.

۱۵ـ تعداد تطابق‌های کامل گراف کامل هشت‌رأسی K_8 برابر است با .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۰۵ ۲) !۸ ۳) !۷ ۴) ۱۰۰

۱۶ـ اگر G گرافی ۱۶ رأسی فاقد مثلث باشد، آنگاه حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۶۳ ۲) ۶۲ ۳) ۶۴ ۴) ۶۰

۱۷ـ تعداد دورهای هامیلتونی در گراف دوبخشی کامل $K_{n,n}\ (n \geq 1)$ برابر است با... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{n!}{2}$ ۲) $n!(n-1)!$ ۳) $\frac{1}{2}(n-1)!n!$ ۴) $(n+1)!n!$

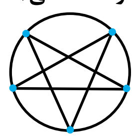
۱۸ـ فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف جهت‌دار با k مؤلفه $|V|=n$ ، $|E|=M$ باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

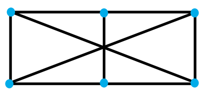
۱) $M=n-k$ ۲) $M \leq n-k$ ۳) $M \geq n-k$ ۴) هیچ‌کدام

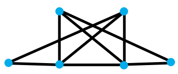
۱۹ـ گراف دوبخشی کامل $K_{7,7}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ۴ یال انتخاب کنیم که هیچ دوتایی به هم متصل نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

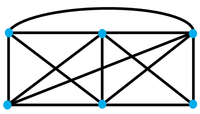
۱) $4\binom{14}{8}$ ۲) $4!\binom{14}{8}$ ۳) $4!^2\binom{7}{4}$ ۴) $4!\binom{7}{4}^2$

۲۰ـ کدام گراف هامنی(مسطح) است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۲۱ـ در کدام‌یک از n– ضلعی‌های منتظم، تعداد قطرها سه برابر تعداد اضلاع است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) شش‌ضلعی ۲) هفت‌ضلعی ۳) هشت‌ضلعی ۴) نه‌ضلعی

۲۲ـ فرض کنید رأس‌های گراف G نظیر زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $\{1,2,3,4,5\}$ باشند. دو رأس در این گراف با هم مجاور هستند، اگر و تنها اگر مجموعه‌های ۲- عضوی نظیر آن دو رأس اشتراکشان تهی باشد. کدام گزاره صحیح <u>نیست</u>؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) گراف G دوبخشی است. ۲) گراف G ۱۰ رأس دارد. ۳) گراف G شامل ۱۵ یال است. ۴) گراف G همبند است.

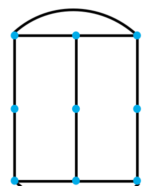
۲۳ـ فرض کنید گرافی ۲۱ رأسی داریم که ۱۹ رأس درجه ۴ و ۲ رأس درجه ۳ دارند. مینیمم تعداد رنگی که لازم است تا یال‌های گراف را رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هر دو یال متصل رنگ‌های متفاوت داشته باشند، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

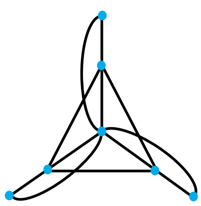
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

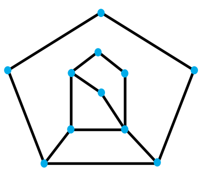
۲۴ـ nتایی مرتب $(d_1,d_2,\dots,d_n)$ از اعداد صحیح مثبت را گرافیکسال می‌گوییم، هرگاه گراف ساده‌ای با n رأس موجود باشد، به طوری که درجات رئوس آن برابر $d_1,d_2,\dots,d_n$ باشد. کدام‌یک از nتایی‌های زیر گرافیکسال هستند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

۱) $(4,3,2,1,1)$ ۲) $(3,3,3,1)$ ۳) $(6,6,5,3,3,3,1)$ ۴) $(7,6,5,3,3,3,1,1)$

۲۵ـ کدام‌یک از گراف‌های زیر دارای مدار هامیلتونی هستند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) هیچ‌کدام

۲۶ـ چند دور چهاررأسی (C_4) در گراف دوبخشی $K_{7,7}$ به عنوان زیرگراف ظاهر شده است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴۴۱ ۲) ۶۸۶ ۳) ۹۳۱ ۴) ۱۰۰۱

۲۷ـ فرض کنید گراف ساده n– رأسی G، دقیقاً n یال داشته باشد. کدام گزاره همیشه برقرار است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) G یک رأس با درجه ۲ دارد. ۲) G حداقل یک دور دارد. ۳) G همبند است. ۴) G دوبخشی است.

۲۸ـ فرض کنید زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1,2,...,n\}$ $(n \geq 1383)$ نظیر رئوس گراف G باشند و دو رأس در گراف G به یکدیگر متصل هستند. اگر اشتراک مجموعه‌های نظیر تهی باشد، کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) گراف همبند است. ۲) گراف هامیلتونی است. ۳) گراف دوبخشی است. ۴) گراف منظم است.

۲۹ـ گراف دارای ماتریس همسایگی(adjacency matrix) زیر: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱) یک گراف مسطح، غیرمتصل و با دور است.

۲) یک گراف مسطح، متصل و بدون دور است.

۳) یک گراف مسطح، غیرمتصل و بدون دور است.

۴) یک گراف مسطح، متصل و با دور است.

۳۰ـ کدام گزاره برای گراف همبند G با فقط یک دور همواره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) بین هر دو رأس G حداکثر یک مسیر وجود دارد. ۲) تعداد رئوس درجه یک G حداقل $\Delta(G)-2$ است.

۳) گراف G با دور n رأس C_n یکریخت است. ۴) تعداد یال‌های G اکیداً بیش از تعداد رأس‌های آن است.

۳۱ـ گراف ساده G را با ۱۰ رأس و ۱۵ یال داریم که ۵ رأس آن از درجه یک هستند. کدام گزینه صحیح <u>نیست</u>؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ماکزیمم درجه گراف بزرگ‌تر یا مساوی ۵ است. ۲) گراف G دوازده دور پنج‌تایی دارد.

۳) گراف G دارای ده دور سه‌تایی است. ۴) گراف G ۱۶ دور ۴تایی دارد.

۳۲ـ فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)=\{A \mid A \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}, |A|=2\}$ باشد. دو رأس A و B متصل هستند، اگر $A \cap B = \varnothing$. گراف G چند مثلث دارد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۳۳ـ کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) برای هر $n \geq 2$ گرافی n رأسی وجود دارد که هم هامیلتونی و هم اویلری است.

۲) هر گرافی که هم اویلری و هم هامیلتونی باشد، حتماً منظم است.

۳) هر گراف ۳- منتظم اویلری است.

۴) هر گراف ۳- منتظم هامیلتونی است.

۳۴ـ فرض کنید G_n یک گراف n– رأس $(n \geq 1384)$ با ماتریس مجاورت $A=(a_{ij})_{n\times n}$ است که در آن (پیمانه ۲) $a_{ij}=i+j$ باشد. کدام گزاره <u>نادرست</u> است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) G_n دوبخشی است. ۲) G_n مسطح است. ۳) G_n منظم است. ۴) G_n هامیلتونی است.

۳۵ـ در چه صورت گراف کامل k_n دارای مدار هامیلتونی است؟ (n تعداد رئوس است) (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد۸۷)

۱) $n \geq 2$ باشد. ۲) n زوج باشد. ۳) n فرد باشد. ۴) $n \geq 3$ باشد.

۳۶ـ در چه صورتی گراف کامل k_n دارای مدار اویلری است؟ (n تعداد رئوس است) (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد۸۷)

۱) n زوج باشد. ۲) n فرد باشد. ۳) $n \geq 2$ باشد. ۴) $n \leq 5$ باشد.

۳۷ـ گراف بدون جهت بی‌طوقه و n– بخشی کامل $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. اگر تعداد رأس‌های هر بخش i را با p_i نمایش دهیم، تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_i P_j$ و $\sum_{i=1}^{n}\binom{P_i}{2}$

۲) $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i \frac{P_j}{2}$

۳) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\binom{P_i}{2}\binom{P_j}{2}$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_i P_j$

۴) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i \frac{P_j}{2}$ و $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$

۳۸ـ گراف ساده G دارای عدد همبندی ۱۰ است. می‌دانیم یکی از مؤلفه‌های همبند این گراف یک پنج‌ضلعی است که هر رأس آن یک گـره اسـت. سایر مؤلفه‌های همبندی درخت هستند. اگر مجموع درجه رئوس این گراف ۱۰۰ باشد، تعداد رئوس آن کدام است؟

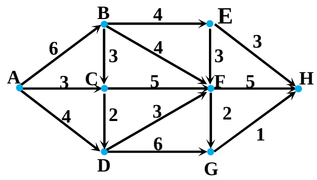
(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) ۵۹ ۲) ۵۴ ۳) ۵۱ ۴) ۴۵

۳۹ـ گراف جهت‌دار (digraph) شکل زیر را در نظر بگیرید. کوتاه‌ترین مسیر بین A و H دارای چه فاصله‌ای است؟

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

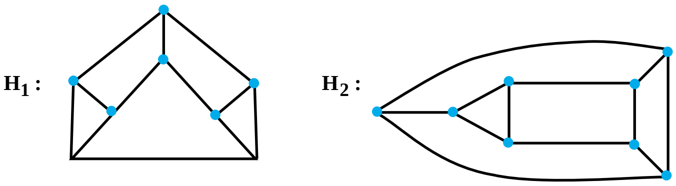
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱



۴۰ـ دو گراف زیر را در نظر بگیرید:

(مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰ و مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) H_1 و H_2 با هم ایزومورفیک (isomorphic) هستند.
۲) تعداد رئوس با درجه ۳ در H_2 بیشتر از H_1 است.
۳) تعداد رئوس با درجه ۳ در H_2 کمتر از H_1 است.
۴) H_1 و H_2 با هم ایزومورفیک (isomorphic) نیستند.



۴۱ـ فرض کنیم G گرافی ۱۳۸۷ رأسی و فاقد دور باشد و دقیقاً ۴۲۱ مؤلفه همبندی داشته باشد. در این صورت تعداد یال‌های آن برابر است با:

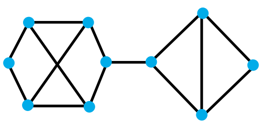
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۹۶۶ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۲۰۰۹ ۴) ۱۳۸۶

۴۲ـ فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف زیر باشد. در این صورت مجموع تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس A^2 برابر است با:

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۲۸
۴) ۱۴



۴۳ـ کدام گزینه صحیح است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) هر گراف ساده که در دنباله درجات آن دقیقاً دو عدد ظاهر شود، دوبخشی است.
۲) هر گراف ساده ۶ رأسی با ۱۰ یال همبند است.
۳) گراف ساده ۷ رأسی ۳−منتظم وجود دارد.
۴) دقیقاً ۶ گراف ۱۱ رأسی ۸−منتظم غیریکریخت وجود دارد.

۴۴ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر برای یک گراف ساده همبند صحیح است؟

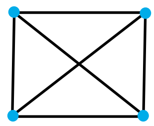
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

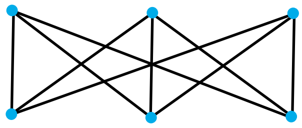
۱) هر گراف با دقیقاً دو دور، اویلری است.
۲) در هر گراف با دقیقاً دو دور، درجه هر رأس ۴ است.
۳) در هر گراف با دقیقاً دو دور، بین هر دو رأس متمایز حداکثر ۴ مسیر متمایز وجود دارد.
۴) یک گراف n رأسی دارای $n+1$ یال است، اگر و تنها اگر دقیقاً دو دور داشته باشد.

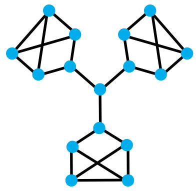
۴۵ـ مجموعه رئوس گراف G تمام زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $\{a,b,c,d,e\}$ است که رئوس A و B به هم وصلند، اگر و تنها اگر اشتراکشان تهی باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

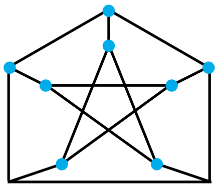
۱) G همبند است.
۲) G هامیلتونی است.
۳) G شامل دور به طول ۴ نمی‌باشد.
۴) G ۳ـ منتظم است.

۴۶ـ می‌خواهیم به هر یال از گراف G یکی از اعداد $\{-1,2\}$ را نسبت دهیم، به طوری که برای هر رأس v از G، مجموع اعداد نسبت داده شده به تمام یال‌های متصل به v برابر صفر باشد. برای کدام‌یک از گراف‌های زیر این امر امکان‌پذیر نمی‌باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۴۷ـ کدام‌یک از دنباله درجات زیر می‌تواند دنباله درجات رئوس یک گراف مسطح ساده باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۳و۳و۳و۳و۴و۴و۴و۴
۲) ۴و۴و۴و۴و۴و۴و۵و۵و۶
۳) ۶و۶و۶و۶و۶و۶و۷و۷و۸و۸
۴) ۲و۳و۳و۴و۶و۶و۶و۶و۶و۸

۴۸ـ فرض کنید P_{10} مسیر ۱۰ رأسی باشد. به چند طریق می‌توان ۴ یال از P_{10} انتخاب کرد، به طوری که هیچ‌یک از ۴ یال رأس مشترک نداشته باشند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $\binom{6}{4}$
۲) $\binom{7}{4}$
۳) $\binom{10}{4}$
۴) $\binom{9}{4}$

۴۹ـ به فرض A ماتریس مجاورت گراف G با n رأس باشد و $Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ باشد. اگر برخی از عناصر قطر فرعی در ماتریس Y صفر باشند، آنگاه گراف G: (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۸)

۱) متصل است و کامل است.
۲) متصل است ولی کامل نیست.
۳) نه متصل است و نه کامل.
۴) کامل است ولی متصل نیست.

۵۰ـ فرض کنید G گرافی ۵ رأسی و ۷ یالی باشد و دنباله‌ی درجات آن به‌صورت نزولی مرتب شده باشند. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

(۴,۴,۲,۲,x)

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) G اویلری است.
۲) G همبند است.
۳) G مسطح است.
۴) G هامیلتونی است.

۵۱ـ کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) گراف ۴ رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکریخت باشد.
۲) گراف ۵ رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکریخت باشد.
۳) دقیقاً دو گراف ۱۳۸۸ رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله ۱۳۸۷ است.
۴) دقیقاً یک گراف ۱۳۸۸ رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله ۱۳۸۷ است.

۵۲ـ عدد رنگی رأس کدام دسته از گراف‌ها با بقیه متفاوت است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) دورهای زوج
۲) درخت‌های با حداقل دو رأس
۳) گراف‌هایی که شامل مثلث نمی‌باشند.
۴) گراف‌های دوبخشی با حداقل دو رأس

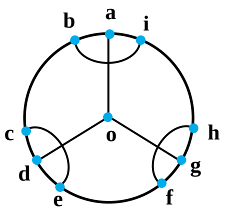
۵۳ـ فرض کنید G یک گراف باشد و تعداد همسایه‌های مشترک هر دو رأس G فرد باشد. در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) درجه‌ی هر رأس G زوج است.
۲) تعداد رئوس G مضرب ۳ است.
۳) تعداد رئوس G زوج است.
۴) گراف G تعداد فردی یال دارد.

۵۴ـ گراف بدون جهت $G=(V,E)$ دارای مدار اویلری است، اگر و فقط اگر (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۹)

۱) G همبند و دارای رأسی از درجه فرد نباشد.
۲) G همبند و دارای رأسی از درجه فرد باشد.
۳) G همبند و دارای رأسی از درجه زوج باشد.
۴) G همبند و دارای رأسی از درجه زوج نباشد.

۵۵ـ کدام جمله در مورد گراف زیر صحیح می‌باشد؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ آزاد ۸۹ و ۹۰)



۱) مدار هامیلتونی ندارد ولی مدار اویلری دارد.
۲) دارای مدار اویلری و هامیلتونی می‌باشد.
۳) مدار اویلری ندارد و مدار هامیلتونی نیز ندارد.
۴) مدار اویلری ندارد ولی مدار هامیلتونی دارد.

۵۶ـ برای گراف ساده (غیر چندگانه) و بی سوی G سه گزاره زیر را در نظر بگیرید: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

الف) G گرافی ۲- رنگ‌پذیر است.
ب) G گرافی دوبخشی است.
ج) طول هر دور در گراف G زوج است.

کدام‌یک از گزینه‌های زیر توصیف کاملی از رابطه سه گزاره بالا ارائه می‌کند؟

۱) (الف) و (ب) معادلند و هرکدام برقرار باشند آنگاه (ج) برقرار است ولی نه لزوماً برعکس.
۲) اگر (الف) آنگاه (ب) و اگر (ب) آنگاه (ج) ولی لزوماً عکس این قضایا برقرار نیست.
۳) (ب) و (ج) معادلند و هرکدام برقرار باشند آنگاه (الف) برقرار است ولی نه لزوماً برعکس.
۴) هر سه گزاره معادلند.

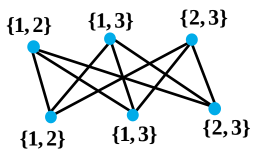
۵۷ـ گراف G دارای ۵ رأس و ۷ یال است و دنباله درجات آن که به صورت نزولی مرتب شده است، $(۴,۴,۲,۲,X)$ می‌باشد. کدام خاصیت در مورد گراف G درست نیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) اویلری است.
۲) مسطح است.
۳) همبند است.
۴) هامیلتونی است.

۵۸ـ چند گراف با مجموعه رئوس $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ وجود دارد که درجه تمام رئوس آنها زوج است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $۲^۵$
۲) $۲^۶$
۳) $۲^۷$
۴) $۲^۸$

۵۹ـ سه رنگ ۳، ۲ و ۱ موجود است. می‌خواهیم $K_{۳,۳}$ را به طور سره رنگ‌آمیزی کنیم، به نحوی که رنگ‌های هر رأس از مجموعه‌های دوعضوی نسبت داده شده به آن رأس مطابق شکل زیر انتخاب شود. به چند طریق این کار ممکن است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

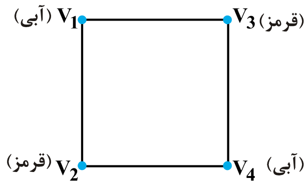


۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۶۰ـ گراف کامل $k_۶$ با حذف حداکثر چند یال همبند باقی خواهد ماند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۹۰)

۱) ۹
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۷

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم



۱ـ گزینه «۴» گزینه‌های (۱) و (۲) به صورت قضیه بیان می‌شوند و گزینه (۳) یک قضیه دوشرطی به صورت زیر است:

یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر بتوان آن را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و برای رد گزینه (۴) کافیست گراف روبه‌رو را در نظر بگیریم.

۲ـ گزینه «۱» هر دو گراف دارای ۸ رأس می‌باشند که تمام آنها از درجهٔ ۳ اند. در حقیقت هر دو گراف ۳- منتظم می‌باشند؛ پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. از طرف دیگر، با توجه به همسایگی رأس‌ها در دو گراف G و H نمی‌توان هیچ تابع یک به یک و پوشایی بین مجموعه رأس‌های H و G تعریف کرد؛ بنابراین دو گراف داده شده ایزومورف (یکریخت) نمی‌باشند (گراف H دارای دور با طول ۳ می‌باشد؛ اما گراف G چنین دوری ندارد).

۳ـ گزینه «۲» اگر هر نفر را به عنوان یک رأس گراف در نظر بگیریم و دست دادن دو نفر را با یک یال بین آنها مشخص کنیم، درجه هر رأس تعداد دست دادن‌های فرد متناظر را نشان می‌دهد و چون تعداد رأس‌های با درجه فرد در هر گراف زوج است و لازم نیست تعداد رأس‌های با درجه زوج، زوج باشد، پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند.

گراف رابطه دست دادن یک گراف ۳۷ رأسی است. درجه رئوس گراف یک مقدار بین ۰ تا ۳۶ است که رئوس این گراف مقادیر ۰ و ۳۶ را با هم نمی‌توانند بگیرند. در واقع، رئوس این گراف حداکثر یکی از مقادیر ۰ تا ۳۶ را برای درجه رئوسش خواهند داشت. با این توضیحات ۳۷ رأس گراف یکی از ۳۶ مقدار مجاز درجه رئوس را خواهند گرفت. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری دو رأس درجه برابر خواهند داشت.

۴ـ گزینه «۴» در حالت کلی می‌توان از یک گراف کامل K_n حداکثر تعداد $\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$ یال حذف کرد، طوری که گراف باز هم همبند باقی بماند.

۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تعداد دورهای هامیلتونی را می‌توان با ثابت در نظر گرفتن یک رأس و سپس تقسیم نمودن پاسخ بر ۲ محاسبه کرد. گراف $k_۸$ به تعداد $\frac{(۸-۱)!}{۲}$ دور هامیلتونی مختلف دارد.

۶ـ گزینه «۳» درایه‌های ماتریس M^k نشان‌دهنده تعداد راه‌های به طول k بین رئوس مختلف است.

۷ـ گزینه «۲» طبق قضیه مقابل گزینه (۲) جواب است: در گراف $K_{m,n}$ در صورتی که $m \neq n$ گراف دور هامیلتونی ندارد.

۸ـ گزینه «۴» وقتی گراف G با مکمل خود یعنی $\bar{G}$ ایزومورف باشد، پس هر دو دارای تعداد یال‌های برابر می‌باشند و می‌دانیم حاصل‌جمع یال‌های G و $\bar{G}$ برابر یال‌های k_n می‌شود (با فرض این که G دارای n رأس است)؛ پس k_n باید دارای تعداد زوجی یال باشد؛ بنابراین تنها $k_{۲۱}$ می‌تواند این خاصیت را داشته باشد و در مورد بقیه گزینه‌ها داریم:

$$\text{گزینه (۳)}: k_n \text{ تعداد یال‌های } = \frac{۳۰(۲۹)}{۲} = ۱۵\times۲۹ \to \text{ فرد}$$

$$\text{گزینه (۲)}: k_n \text{ تعداد یال‌های } = \frac{۳۱(۳۰)}{۲} = ۳۱\times۱۵ \to \text{ فرد}$$

$$\text{گزینه (۱)}: k_n \text{ تعداد یال‌های } = \frac{۱۹(۱۸)}{۲} = ۱۹\times۹ \to \text{ فرد}$$

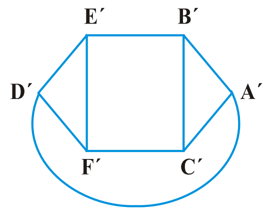
۹ـ گزینه «۳» در کل ۸ نفر در مهمانی حضور دارند و هر نفر با همسر خودش سلام و علیک نمی‌کند؛ بنابراین هر نفر حداکثر ۶ بار سلام و علیک می‌کند و چون هر هفت نفری که بیژن از آنها سؤال می‌کند، به تعداد متفاوتی سلام و علیک داشته‌اند؛ بنابراین تعداد سلام و علیک هرکدام از آنها یکی از اعداد ۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰ بوده است. حال اگر افراد را رأس‌های یک گراف و سلام و علیک کردن دو نفر را به عنوان یال بین آن دو نفر در نظر بگیریم، با توجه به اینکه که تعداد رئوس درجه فرد باید زوج باشد، پس تعداد سلام و علیک‌های بیژن باید فرد باشد و چون هیچ دلیلی بر این که تعداد سلام و علیک‌های بیژن کمتر از همسرش یا بیشتر از او باشد وجود ندارد، پس تعداد سلام دادن‌های آنها برابر و فرد است.

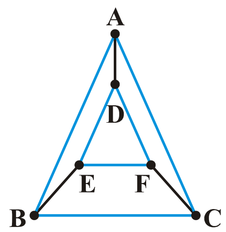
۱۰ـ گزینه «۳» می‌دانیم حاصل‌جمع تعداد یال‌های هر گراف n رأسی مثل G و گراف مکمل آن $\bar{G}$ برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است و چون در صورت تست گفته شده است که G با $\bar{G}$ ایزومورف است، پس تعداد یال‌های آنها با هم برابر است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} E_G + E_{\bar{G}} = \frac{۸(۸-۱)}{۲} \\ E_G = E_{\bar{G}} \end{array}\right\} \Rightarrow E_G = E_{\bar{G}} = ۱۴$$

۱۱ـ گزینه «۴» گراف (ب) دارای یک رأس از درجه پنج است و گراف (د) نیز دارای یک رأس از درجه ۶ است. در حالی که دو گراف دیگر ۳- منتظم می‌باشند، گراف‌های (ب) و (د) با هیچ‌یک از گراف‌های دیگر نمی‌توانند ایزومورف باشند؛ بنابراین گزینه‌های (الف) و (ج) ایزومورف می‌باشند.

رئوس گراف‌های (الف) و (ج) را می‌توان به شکل زیر نام‌گذاری نمود:



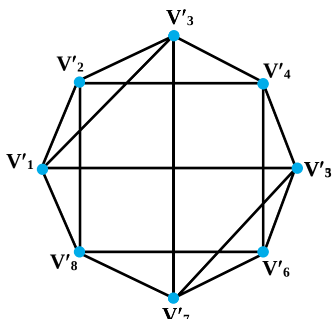


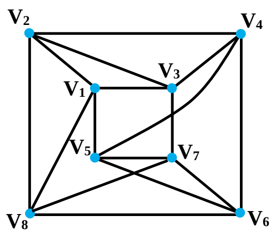
۱۲ـ گزینه «۳» قضیه Havel-Hakimi را روی گزینه سوم اعمال می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$۴,۳,۲,۱,۱,۱,۱,۱ \Rightarrow ۲,۱,۰,۰,۱,۱,۱ \xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}} ۲,۱,۱,۱,۱,۰,۰ \Rightarrow ۰,۰,۱,۱,۰,۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}} ۱,۱,۰,۰,۰,۰ \Rightarrow ۰,۰,۰,۰,۰ \Rightarrow \text{پس دنباله گرافیکی است}$$

۱۳ـ گزینه «۱» اگر دو گراف را به صورت زیر برچسب‌گذاری کنیم:





آنگاه دو گراف توسط ایزومورفیسم (یکریختی) $f(v_i) = v'_i$ با هم ایزومورف یا یکریخت خواهند بود.

۱۴ـ گزینه «۲» در مورد گراف پترسن به نکات زیر دقت کنید:

۱ـ عدد رنگی رأسی گراف پترسن برابر ۳ است.

۲ـ عدد رنگی یالی گراف پترسن برابر ۴ است.

۳ـ گراف پترسن دارای دور هامیلتونی نیست (گراف هامیلتونی نمی‌باشد).

۴ـ گراف پترسن دارای مسیر هامیلتونی است.

۵ـ نمی‌توان یال‌های این گراف را به تطابق‌های کامل افراز نمود. یعنی قادر نیستیم تمام ۱۵ یال این گراف ۱۰ رأسی را به ۳ دسته ۵ یالی افراز کنیم که هر افراز بیانگر یک تطابق ماکزیمال در گراف باشد. در این گراف قادر به پیدا کردن تطابق کامل هستیم.

۱۵ـ گزینه «۱» به قضیه زیر دقت کنید. گراف کامل K_n تنها در صورتی که n زوج باشد، دارای تطابق کامل است و تعداد تطابق‌های آن برابر است با:

$$(n-۱)\times(n-۳)\times(n-۵)\times...\times۱$$

پس گراف $K_۸$ دارای $۷\times۵\times۳\times۱=۱۰۵$ تطابق کامل است.

۱۶ـ گزینه «۳» در یک گراف دوبخشی کامل هیچ مثلثی وجود ندارد و حداکثر تعداد یال‌های ممکن، موجود است؛ بنابراین کافیست از گراف دوبخشی کامل $K_{۸,۸}$ استفاده کنیم که به وضوح دارای ۶۴ یال می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۳» به نکات زیر در مورد تعداد دورهای هامیلتونی دقت کنید:

۱ـ تعداد دورهای هامیلتونی در گراف K_n برابر $\frac{(n-۱)!}{۲}$ است.

۲ـ تعداد دورهای هامیلتونی در گراف $K_{n,n}$ برابر $\frac{n!(n-۱)!}{۲}$ است.

۱۸ـ گزینه «۳» می‌دانیم یک گراف همبند زمانی که درخت باشد کمترین یال را خواهد داشت، بنابراین:

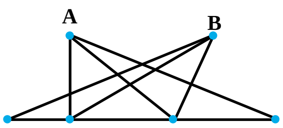
$$\min(M)=(n_۱-۱)+(n_۲-۱)+...+(n_k-۱)=n_۱+...+n_k-k=n-k$$

که n_i تعداد رئوس مؤلفه iام است، بنابراین: $M\geq n-k$.

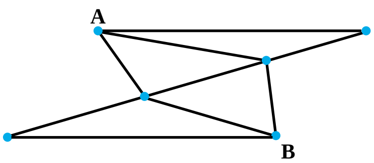
۱۹ـ گزینه «۴» برای انجام این کار ابتدا چهار رأس از بخش اول و چهار رأس از بخش دوم را به $\binom{۷}{۴}\times\binom{۷}{۴}$ حالت انتخاب می‌کنیم؛ سپس با توجه به آن‌که کدام رأس از بخش اول با کدام رأس از بخش دوم با هم تشکیل یال بدهند، حاصل را در !۴ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\text{حاصل}=\binom{۷}{۴}^۲\times۴!$$

۲۰ـ گزینه «۳» گراف گزینه (۳) را با برچسب‌گذاری به‌صورت شکل $G_۱$ در نظر می‌گیریم. با تغییر مکان رأس B در این گراف به گراف $G_۲$ خواهیم رسید که مسطح است. سه گراف دیگر نیز مسطح نیستند. زیرا گراف‌های گزینه‌های (۱) و (۲) گراف‌های $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ هستند که این گراف‌ها را به‌عنوان گراف‌های نامسطح پذیرفته‌ایم.



G_1



G_2

گراف گزینه (۴) نیز با اضافه نمودن چند یال به گراف $K_{۳,۳}$ ساخته شده است.

۲۱ـ گزینه «۴» برای محاسبه تعداد قطرهای یک n ضلعی کافیست ابتدا قطرهای عبوری از یک رأس را محاسبه کنیم. با توجه به اینکه قطرها بین دو رأس مجاور قرار نمی‌گیرند، از هر رأس $n-۳$ قطر می‌گذرد. n ضلعی n رأس دارد و هر قطر بین ۲ رأس قرار می‌گیرد؛ سپس تعداد قطرهای n ضلعی برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}=(n-۳)\times n\times\frac{۱}{۲}$. این تعداد قطر باید سه برابر تعداد اضلاع باشد؛ یعنی:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۳\times n\Rightarrow\frac{n-۳}{۲}=۳\Rightarrow n-۳=۶\Rightarrow n=۹$$

۲۲ـ گزینه «۱» طبق صورت تست تعداد رأس‌های گراف G برابر تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است، پس $|V|=\binom{۵}{۲}=۱۰$؛ لذا گزینه (۲) درست است و همچنین هر رأس به ۳ رأس دیگر متصل است و در حقیقت یک گراف ۳- منتظم داریم؛ پس گراف همبند است و دارای ۱۵ یال می‌باشد. پس گزینه‌های (۳) و (۴) نیز درست می‌باشند.

مسیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\{۱,۲\}\to\{۳,۴\}\to\{۱,۵\}\to\{۲,۴\}\to\{۳,۵\}\to\{۱,۲\}$$

این مسیر بیانگر یک دور به طول ۵ در گراف است. با توجه به اینکه گراف دوبخشی دور به طول فرد ندارد، نتیجه می‌گیریم این گراف دوبخشی نخواهد بود.

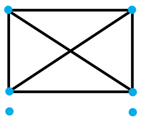
۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که رئوس درجه ۴ وجود دارند، یال‌هایی هستند که با یال‌های دیگر در ارتباط هستند؛ بنابراین حداقل به چهار رنگ نیاز است. اما با رسم گراف می‌توان دید که در رنگ‌آمیزی گراف مفروض حداقل به ۵ رنگ نیاز دارد.

۲۴ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از قضیه Havel-Hakimi می‌توان نتیجه گرفت هیچ کدام از دنباله‌ها متناظر با یک گراف نمی‌تواند باشد.

۲۵ـ گزینه «۴» هیچ‌کدام از گراف‌های داده شده دارای دور هامیلتونی نیست.

۲۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم که دور چهاررأسی در یک گراف دوبخشی از چهار رأس تشکیل شده است که دو تا از رأس‌ها از مجموعه اول رأس‌ها و دو تا از رأس‌ها از مجموعه دوم انتخاب می‌شوند. توجه کنید که تمام دورها مشابه هم هستند (تعداد دورهای هامیلتونی در گراف دوبخشی $k_{۲,۲}$ برابر $\frac{(۲-۱)\times ۲}{۲}=۱$ خواهد بود). بنابراین برای انتخاب این چهار رأس $\binom{۷}{۲}\binom{۷}{۲}=۴۴۱$ راه وجود دارد.

۲۷ـ گزینه «۲» اگر گراف زیر را در نظر بگیریم، همه گزینه‌ها به جز گزینه (۲) رد می‌شوند:



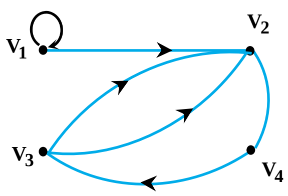
$v=۶$

$n=۶$

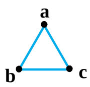
۲۸ـ گزینه «۱» چون رأسی که متناظر با مجموعه تهی است به تمام رئوس دیگر متصل است، گراف همبند خواهد بود. درجه رأس مجموعه $\{۱,۲,\dots,n\}$ برابر است. در نتیجه این گراف دوری ندارد که از این رأس عبور کند و هامیلتونی نخواهد بود. رئوس $\{۱\}$،$\{۲\}$و$\{۳\}$ با هم مجاورند و تشکیل یک دور به طول ۳ می‌دهند؛ در نتیجه گراف دوبخشی نخواهد بود. شرط منظم بودن گراف هم برابری درجه رئوس است که با توجه به تنوع درجات رئوس، این گراف منظم نخواهد بود.

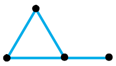
۲۹ـ گزینه «۲» برای اظهارنظر دقیق بهتر است ابتدا گراف را رسم نماییم. دقت کنید که چون ماتریس داده شده متقارن نیست، گراف متناظر با آن جهت‌دار خواهد بود.

تذکر: طوقه، خود دور محسوب می‌شود.



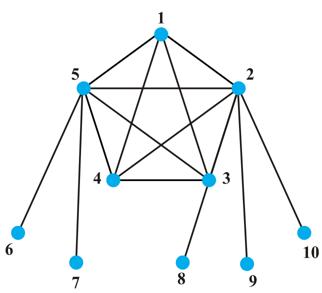
$$\begin{array}{c|cccc} & v_۱ & v_۲ & v_۳ & v_۴ \\ \hline v_۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ v_۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ v_۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ v_۴ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

۳۰ـ گزینه «۲» اگر گراف 

را در نظر بگیریم، گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند و اگر گراف  را در نظر بگیریم، گزینه (۳) نیز غلط خواهد بود.

گراف صورت سؤال از اضافه شدن یک یال به یک درخت با حداقل ۳ رأس حاصل شده است. اگر دنباله درجات رئوس این درخت به صورت $(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ باشد، تعداد رئوس با درجه ۱ این درخت حداقل برابر $a_۱$ خواهد بود. با اضافه شدن این یال به درخت در صورتی که یال اضافه شده به دو رأس از درجه ۱ متصل شود، تعداد رئوس با درجه ۱ این گراف حداقل $a_۱-۲$ خواهد بود. با توجه به برابری ماکزیمم درجه رئوس گراف و درخت، رابطه درست خواهد بود. در صورتی که یال اضافه شده به رأس با درجه بیشینه متصل گردد، حداکثر درجه رئوس یکی بالاتر خواهد رفت و حداکثر یکی از رئوس با درجه ۱، درجه ۲ خواهد شد و رابطه باز هم درست خواهد بود $(a_۱-۲\geq V(G)-۱)$.

۳۱ـ گزینه «۴» گراف حاصل شمای کلی زیر را دارد. رئوس ۱ تا ۵ تشکیل یک $K_۵$ را می‌دهند و رئوس ۶ تا ۱۰ به یکی از رئوس ۱ تا ۵ متصل هستند. با این اوصاف درجه یکی از رئوس ۱ تا ۵ بزرگتر مساوی ۵ خواهد بود (مجموع درجات این ۵ رأس برابر ۲۵ است و حداقل درجه هر یک از این رئوس برابر ۴ می‌باشد). تمام دورهای این گراف بین رئوس ۱ تا ۵ خواهند بود.

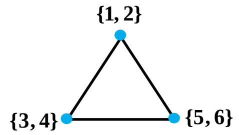


تعداد دورهای به‌طول ۵ = $\binom{۵}{۵}\times\frac{(۵-۱)!}{۲}=۱۲$

تعداد دورهای به‌طول ۴ = $\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}=۱۵$

تعداد دورهای به‌طول ۳ = $\binom{۵}{۳}\times\frac{(۳-۱)!}{۲}=۱۰$

۳۲ـ گزینه «۱» یکی از مثلث‌های ایجاد شده، به صورت زیر می‌باشد:



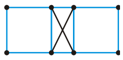
اگر بخواهیم یک مثلث تشکیل دهیم، آنگاه ابتدا دو عضو از مجموعه $\{۱,۲,...,۶\}$ انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را کنار می‌گذاریم ($\binom{۶}{۲}$ حالت)؛ سپس دو عضو از مجموعه چهارعضوی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را نیز کنار می‌گذاریم ($\binom{۴}{۲}$ حالت) و با دو عضو باقی‌مانده نیز یک رأس می‌سازیم.

از آنجایی‌که سه رأسی که بدین طریق ساخته می‌شوند، اشتراکی ندارند، تشکیل یک مثلث می‌دهند. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌های ۳ دسته دوعضوی} = \binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} = ۹۰$$

دقت کنید که رئوس انتخاب شده به $۳!$ حالت قابلیت جابه‌جایی و انتخاب مجدد دارند؛ در نتیجه باید پاسخ را بر $۳!$ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \frac{\text{تعداد حالات انتخاب ۳ مجموعه ۲ عضوی}}{۳!} = \frac{۹۰}{۶} = ۱۵$$

۳۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. گراف دورأسی هامیلتونی و یا اویلری نداریم. گراف  هامیلتونی و اویلری است ولی منظم نیست. گراف ۳ـ منتظم اویلری نداریم (گراف اویلری درجه رئوس زوج دارد). گراف ۳ـ منتظم لزوماً همبند نیست که هامیلتونی باشد.

۳۴ـ گزینه «۲» رئوس گراف G_n را می‌توان به سادگی به دو بخش تقسیم کرد؛ بدین گونه‌که رئوس فرد را در یک بخش و رئوس زوج را در بخش دیگر، در نظر می‌گیریم. بنابراین G_n یک گراف دوبخشی کامل می‌باشد که هر رأس شماره فرد آن به تمام رئوس شماره زوج آن متصل است و بالعکس هر رأس شماره زوج آن به همه رئوس درجه فرد آن متصل است. با این اوصاف داریم $G_n = k\left\lceil\frac{n}{۲}\right\rceil,\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$. با توجه به اینکه $\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor \geq ۶۹۲ > ۳$، این گراف مسطح نخواهد بود. البته گزینه‌های (۳) و (۴) در صورتی که n فرد باشد، نادرست خواهند بود.

۳۵ـ گزینه «۴» اگر n بزرگتر یا مساوی ۳ باشد، آنگاه k_n لزوماً دارای دور هامیلتونی می‌باشد.

۳۶ـ گزینه «۲» اگر n فرد باشد، درجه رئوس برابر $n-۱$ است که عددی زوج است. در این صورت واضح است که مدار اویلری وجود خواهد داشت.

۳۷ـ گزینه «۱»

$$\text{تعداد یال‌های } G = P_۱P_۲ + P_۱P_۳ + ... + P_۱P_n + P_۲P_۳ + P_۲P_۴ + ... + P_۲P_n + ... = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{i-۱} P_iP_j$$

$$\text{تعداد یال‌های } \overline{G} = \binom{P_۱}{۲} + \binom{P_۲}{۲} + ... + \binom{P_n}{۲} = \sum_{i=۱}^{n}\binom{P_i}{۲}$$

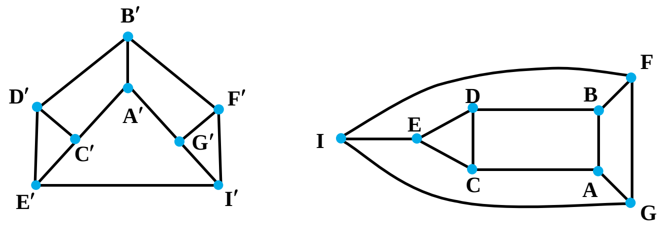
۳۸ـ گزینه «۱» در مؤلفه پنج ضلعی، تعداد یال‌ها با تعداد رئوس برابر است و هر دو برابر ۵ می‌باشند. با توجه به آن که مجموع درجات رئوس این گراف ناهمبند برابر ۱۰۰ می‌باشد، این گراف در مجموع دارای ۵۰ یال می‌باشد. ۹ مؤلفه درختی با هم تشکیل یک جنگل ۴۵ یاله می‌دهند که تعداد رئوس در آنها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

تعداد رئوس جنگل = تعداد یال‌ها + تعداد مؤلفه‌ها

بنابراین این جنگل ۹ درختی در مجموع $۴۵ + ۹ = ۵۴$ رأس خواهد داشت که با پنج رأس موجود در پنج‌ضلعی، در مجموع گراف داده شده دارای ۵۹ رأس خواهد بود.

۳۹ـ گزینه «۳» کوتاه‌ترین مسیر عبارت است از ADFGH که طول آن برابر ۱۰ می‌باشد.

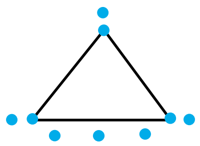
۴۰ــ گزینه «۱» گزینه‌های (۲) و (۳) که به وضوح نادرست هستند.
تعداد رئوس H_1 و H_2 هرکدام برابر ۸ می‌باشد و تمام رئوس آنها از درجه ۳ می‌باشند و با نام‌گذاری مقابل می‌توان ایزومورف بودن این دو گراف را نشان داد.



۴۱ــ گزینه «۱» با توجه به تعاریف مسأله واضح است که G یک جنگل با ۴۲۱ مؤلفه می‌باشد. در یک جنگل اگر p، q و c به ترتیب بیانگر تعداد یال‌ها، تعداد رئوس و تعداد مؤلفه‌های یک جنگل باشند، داریم:
$q = p - c \Rightarrow q = ۱۳۸۷ - ۴۲۱ = ۹۶۶$

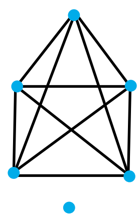
۴۲ــ گزینه «۳» عناصر روی قطر اصلی در ماتریس A^i بیانگر تعداد گشت‌هایی از آن رأس به خودش به طول i است. به ازای $i = ۲$ در گراف‌های ساده هر عنصر بیانگر تعداد گشت‌های به‌طول۲ از یک رأس به خودش است. با توجه به اینکه تمام این گشت‌ها از رفت و برگشت روی یک یال حاصل می‌گردند، هر عنصر روی قطر اصلی ماتریس $A^۲$ بیانگر درجه آن رأس است. با این تعاریف در یک گراف غیرجهت‌دار مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A^۲$ برابر مجموع درجات رئوس گراف (دو برابر تعداد یال‌های گراف) یعنی ۲۸ است.

۴۳ــ گزینه «۴» برای رد گزینه (۱) می‌توان مثال نقض زیر را در نظر گرفت:



دنباله درجات $= \langle ۲,۲,۲,۰,۰,۰ \rangle$

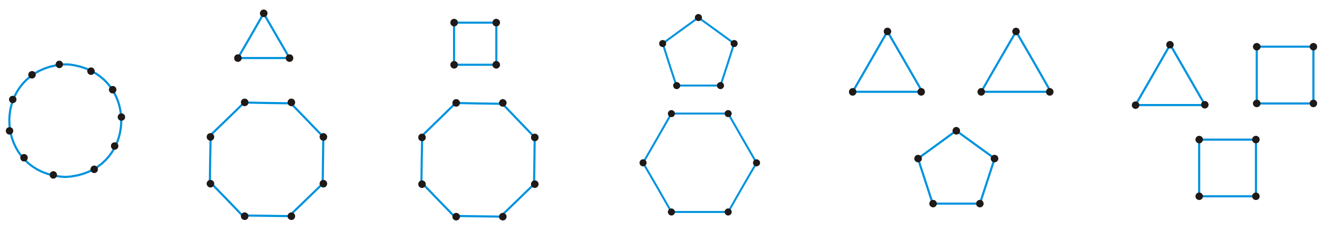
برای رد گزینه (۲) می‌توان مثال نقض روبه‌رو را در نظر گرفت.



برای رد گزینه (۳) باید توجه داشت که در گراف ۷ رأسی ۳- منتظم داریم:

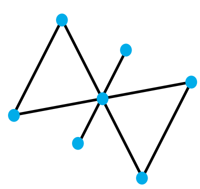
$$\left.\begin{array}{l} p = ۷ \\ r = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow rp = ۲q \Rightarrow ۲۱ = ۲q \Rightarrow q = \frac{۲۱}{۲}$$

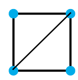
که غیرممکن است q یک عدد غیرصحیح شود؛ بنابراین چنین گرافی وجود ندارد.
مکمل‌های گراف گزینه (۴) را رسم می‌کنیم.



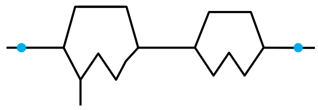
۶ گراف برای مکمل گراف‌های گزینه (۴) قابل رسم است؛ در نتیجه تعداد گراف‌های گزینه (۴) برابر ۶ خواهد بود و این گزینه درست است.

۴۴ــ گزینه «۳» برای رد گزینه‌های (۱) و (۲) گراف غیراویلری زیر را در نظر بگیرید:



برای رد گزینه (۴) نیز گراف  را در نظر بگیرید که دو دور با طول ۳ و یک دور با طول ۴ دارد.

شکل کلی گراف‌های با ۲ دور به‌صورت زیر است:



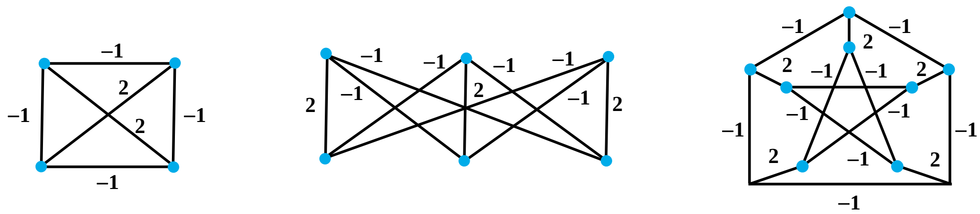
در صورتی که مبدأ و مقصد مسیر در دو طرف دو دور باشند، حداکثر تعداد مسیرها را خواهیم داشت که برابر ۴ خواهد بود.

۴۵ـ گزینه «۲» G دارای $\binom{۵}{۲}=۱۰$ رأس است. اگر هر زیرمجموعه دوعنصری چون $\{x,y\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان زیرمجموعه دوعنصری دیگری چون $\{z,t\}$ یافت، به طوری که $z \neq x,y$ و $t \neq x,y$؛ بنابراین این گراف همبند است. همچنین از آنجایی که هر زیرمجموعه دوعنصری با $\binom{۳}{۲}=۳$ زیرمجموعه دیگر هیچ اشتراکی ندارد، G گرافی ۳- منتظم است و واضح است که دارای دوری به طول چهار نیست؛ به عنوان مثال مسیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\{a,b\} \to \{c,d\} \to \{a,c\} \to \{b,d\}$$

این مسیر نمی‌تواند یک دور به طول چهار تشکیل دهد. گراف حاصل، مسیر هامیلتونی دارد ولی دور هامیلتونی ندارد. در نتیجه گزینه (۲) صحیح خواهد بود.

۴۶ـ گزینه «۳» گراف‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) را می‌توان به شکل زیر برچسب‌گذاری کرد.



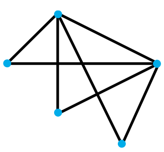
۴۷ـ گزینه «۲» در گزینه (۱) تعداد رئوس درجه فرد، فرد است؛ بنابراین نمی‌تواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد. با بررسی قضیه‌ی Havel - Hakimi روی سایر گزینه‌ها مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ای که می‌تواند دنباله‌ی درجه رئوس یک گراف باشد، گزینه‌ی (۲) است.

۴۸ـ گزینه «۱» مسیر $p_{۱۰}$ دارای ۹ یال می‌باشد. می‌خواهیم یال‌ها را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که هیچ دو یال متوالی انتخاب نشود. اگر یال‌های انتخاب شده را با یک و یال‌های انتخاب نشده را با صفر نشان دهیم، این مسأله برابر مسأله تعداد دنباله‌های به طول ۹ از صفر و یک است، به طوری که ۵ تا صفر و ۴ تا یک داشته باشیم و یک‌ها در کنار هم نباشند. برای این کار ابتدا صفرها را قرار می‌دهیم و سپس یک‌ها را در بین آنها قرار می‌دهیم. این کار به صورت زیر خواهد بود:

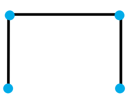
در شش مکانی که بین و خارج صفرها قرار دارند، یک قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{۶}{۴}$ طریق قابل انجام است. ○ ○ ○ ○ ○

۴۹ـ گزینه «۳» مؤلفه $[i,j]$ در ماتریس A^k نشان‌دهنده تعداد گشت‌های به طول k بین i و j است. از آنجایی‌که بلندترین مسیر غیردوری در یک گراف حداکثر دارای طول $n-۱$ است، بنابراین مؤلفه $[i,j]$ در Y بیانگر تعداد کل مسیرها به طول دلخواه بین i و j است. حال اگر یکی از مؤلفه‌های قطر فرعی برابر صفر باشد، گراف غیرمتصل خواهد بود و همچنین چنین گرافی نمی‌تواند کامل باشد.

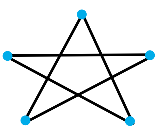
۵۰ـ گزینه «۴» با توجه به قضیه بیان شده در متن درس، x لزوماً برابر ۲ می‌باشد؛ بنابراین گراف G همبند و اویلری می‌باشد. این گراف می‌تواند به صورت مقابل باشد که مسطح است، ولی هامیلتونی نمی‌باشد.



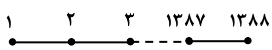
۵۱ـ گزینه «۴» گراف چهاررأسی زیر با مکملش یکریخت است، بنابراین گزینه (۱) نادرست است.



گراف پنج رأسی مقابل با مکملش یکریخت است؛ بنابراین گزینه (۲) نیز نادرست است.



اگر بخواهد فاصله دو رأس ۱۳۸۷ باشد، باید مسیری به همین طول بین آن‌ها وجود داشته باشد و هیچ مسیر کوتاه‌تری بین آن‌ها نباشد؛ بنابراین چنین گرافی به صورت زیر خواهد بود که تنها در این صورت فاصله بین رئوس ۱ و ۱۳۸۸ برابر ۱۳۸۷ خواهد بود.



۵۲ـ گزینه «۳» دور زوج یک گراف دورنگ‌پذیر است. درخت با حداقل دو رأس یک گراف دورنگ‌پذیر است. گرافی که شامل مثلث نباشد، می‌تواند یک گراف دوبخشی نباشد ولی لزوماً دوبخشی و دورنگ‌پذیر نیست، مثل دور به طول ۵ گراف دوبخشی نیز دورنگ‌پذیر خواهد بود.

۵۳ـ گزینه «۱» به عنوان مثال نقضی برای گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ گراف $k_۵$ را در نظر بگیرید.

۵۴ـ گزینه «۱» گراف همبند بدون جهت G اویلری است، هرگاه درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

۵۵ـ گزینه «۴» درجه رئوس گراف داده شده فرد است؛ بنابراین دارای دور اویلری نیست؛ ولی دور زیر یک دور هامیلتونی برای گراف داده شده می‌باشد:

o g f h i a b c e d o

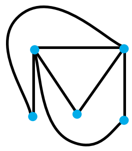
۵۶ـ گزینه «۴» طبق دو قضیه معروف داریم:

۱ـ گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر دو رنگ‌پذیر باشد.	۲ـ گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر دوری به طول فرد نداشته باشد.

۵۷ـ گزینه «۴» ابتدا x را به صورت مقابل به دست می‌آوریم:

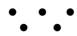
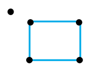
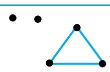
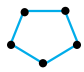
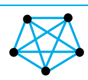
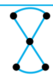
$$۴+۴+۲+۲+x=۲\times۷\Rightarrow \boxed{x=۲}$$

با توجه به این دنباله درجات می‌توان گراف را به فرم مقابل رسم نمود:



بنابراین این گراف همبند و مسطح است و از آنجایی که درجه هر رأس زوج است، اویلری نیز می‌باشد.

۵۸ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در شکل زیر توپولوژی‌های مختلف و تعداد حالات ممکن با توجه به برچسب‌دار بودن رئوس نشان داده شده است.

گراف	تعداد حالت‌ها
	۱
	۱۵
	۱۰
	۱۲
	۱
	۱۵

۵۹ـ گزینه «۱» با توجه به رنگ‌های داده شده، به هیچ طریقی نمی‌توان گراف را به صورت سره رنگ‌آمیزی نمود.

۶۰ـ گزینه «۳» یک گراف با شش رأس حداقل باید دارای پنج یال باشد تا همبند باقی بماند؛ بنابراین حداکثر تعداد یال‌های قابل حذف عبارت است از:

$$\frac{۶\times۵}{۲}-۵=۱۰$$

فصل هشتم

«درخت»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ـ هفت روستا (۱ الی ۷) قرار است تحت پوشش یک مولد برق G قرار بگیرند. ارتباط یک روستا با این مولد یا به‌طور غیرمستقیم از طریق روستاهای دیگر و یا به طور مستقیم (هرکدام در مجموع به هزینه کمتری منجر شود) صورت خواهد گرفت. هزینه کابل‌کشی بین روستاها و نیز بین روستاها و مولد را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید. مطلوب است هزینه کل کم‌هزینه‌ترین شبکه برق‌رسانی برای این ۷ روستا (در این‌جا هزینه کابل‌کشی بین دو روستای ۲ و ۵ برابر ۴ واحد است). (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

	2	3	4	5	6	7	G
1	2	99	99	1	99	99	3
2		2	99	4	99	99	1
3			3	99	1	99	3
4				99	2	99	2
5					3	2	99
6						1	99
7							99

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۲ـ در یک درخت دودویی T، برای هر برگ x که در عمق d قرار دارد، تعریف می‌کنیم $w(x)=۲^{-d}$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مجموعه $w(x)$ های هر درخت T را برای همه برگ‌های آن نشان می‌دهد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $\sum_{x} w(x) \le ۱$ برگ
۲) $\sum_{x} w(x) = ۱$ برگ
۳) $\sum_{x} w(x) < ۱$ برگ
۴) $\sum_{x} w(x) > ۱$ برگ

۳ـ تعداد برگ‌های یک درخت دودویی ۱۵۰ است. حداکثر ارتفاع این درخت چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۵۰
۴) ۷۵

۴ـ تعداد درخت‌های دودویی غیر هم‌ریخت (non-isomorphic binary tree) دارای سه رأس کدام‌یک از مقادیر زیر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۳

۵ـ یک درخت دودویی با ۹ گره به نام T وجود دارد. اگر پویش درخت به شکل Preorder و Inorder به شکل زیر باشد:

Preorder: G B Q A C P D E R
Inorder: Q B C A G P E D R

کدام گزینه پویش درخت به شکل Postorder خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

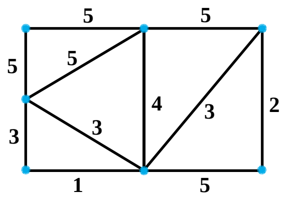
۱) Q C A B E R D P G
۲) C E R Q A D B P G
۳) G B P Q A D C E R
۴) R D E P G A C B Q

۶ـ تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف کامل ۱۰ رأسی $(k_{۱۰})$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $(۱۰-۸)^{n}$
۲) $۸^{۱۰}$
۳) $\binom{۱۰}{۸}$
۴) $۱۰^{۸}$

۷ـ گراف زیر را با وزن‌های یالی داده شده در نظر بگیرید: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

کمترین وزن یک درخت فراگیر گراف فوق برابر است با ....



۱) ۱۷

۲) ۱۹

۳) ۱۸

۴) ۲۰

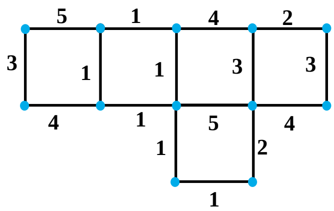
۸ـ با سه رنگ آبی، زرد و سبز به چند طریق می‌توان رئوس یک درخت ۲۰ رأسی را رنگ‌آمیزی نمود، به طوری‌که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳×۲^{۲۰} ۲) ۳×۲^{۱۹} ۳) ۲×۳^{۱۹} ۴) ۲×۳^{۲۰}

۹ـ درخت T دارای ۱۰ رأس است. تعداد مسیرهای موجود در T با طول حداقل یک چیست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۵۵ ۲) ۱۰۰ ۳) به نوع درخت بستگی دارد. ۴) ۴۵

۱۰ـ گراف وزن‌دار زیر را در نظر می‌گیریم. مجموع وزن‌های درخت مینیمال آن چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)



۱) ۲۲

۲) ۲۴

۳) ۲۵

۴) ۲۰

۱۱ـ گراف ساده، غیرجهت‌دار و بدون حلقه $G=(V,E)$ از ده مؤلفه همبند که هر کدام یک درخت است تشکیل شده است. اگر تعداد رئوس گراف G برابر ۶۰ باشد، مجموع درجه‌های رأس‌های این گراف کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۰

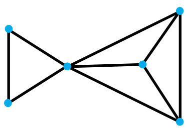
۱۲ـ تعداد درخت‌های پوشای گراف زیر چندتا است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱۶

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۴۸



۱۳ـ گرافی با ۱۰ رأس در نظر می‌گیریم که گرافی کامل می‌باشد و رأس‌های آن از یک تا ده شماره‌گذاری شده‌اند. اگر وزن هر یال از تابع زیر بدست آید، مجموع وزن‌های یال‌های درخت فراگیر مینیمال این گراف کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۷۶

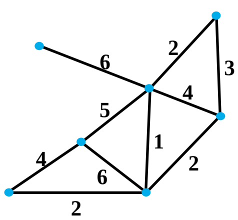
۲) ۷۵

۳) ۶۶

۴) ۶۵

$$W_{j,i}=W_{i,j}=\begin{cases} i+j & i+j\geq ۵ \\ i^{۲}+j^{۲} & i+j<۵ \end{cases}$$

۱۴ـ وزن مینیمم درخت فراگیر را در گراف زیر بیابید، به طوری که درجه هر رأس از درخت بیشتر از ۲ نباشد. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)



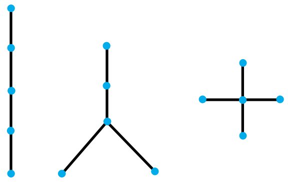
۱) ۱۶

۲) ۱۷

۳) ۱۹

۴) ۲۱

۱۵ـ تعداد درخت‌های برچسب‌دار با n گره چه تعداد می‌باشد؟ (فرمول مقدار T_n را پیدا کنید) برای مثال برای $n = 5$ تعداد درخت‌ها ۱۲۵ است که برخی از آن‌ها در شکل زیر نشان داده شده است. در ضمن مسیر تهی نیز وجود دارد ($T_0 = 1$). (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۳)



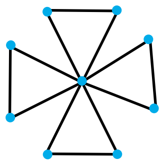
۱) $T_n = n^{n-2}$

۲) $T_n = (1-\frac{1}{n})^{n-2}$

۳) $T_n = 1 + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + n + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$

۴) $T_n = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix}, n \ge 2k$

۱۶ـ تعداد درخت‌های فراگیر شکل زیر کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)



۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۵۴

۴) ۸۱

۱۷ـ کد پیش‌ترتیب (prefixcode) یک درخت $\{01, 10, 111\}$ می‌باشد. طول بزرگترین مسیر اصلی در این درخت چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

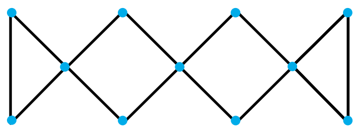
۱۸ـ یک درخت ۲۰ رأسی داده شده است که درجه هر رأس غیربرگ آن ۳ است. به چند طریق می‌توان رأس‌های این درخت را با ۴ رنگ به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو رأسی که فاصله آن‌ها از ۲ بیشتر نیست، همرنگ نباشند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $2^9 \times 3^9$　　۲) $2^9 \times 3$　　۳) $2^{11} \times 3$　　۴) $2^{19} \times 3$

۱۹ـ اگر G یک درخت با دنباله درجات $\{4, r, s, 2, t$ و $1, 1, 1, 1\}$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دنباله درجات به صورت غیرصعودی نوشته شده است) (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $r = s$　　۲) $t = s$　　۳) $r - s = 1$　　۴) $r + t = 4$

۲۰ـ تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف مقابل کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)



۱) ۳۶

۲) ۶۴

۳) ۸۱

۴) ۱۴۴

۲۱ـ فرض کنید $a \ge b \ge c$، $(a, b, b, b, c, c, c, c, c, c)$ دنباله درجات یک درخت باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) a، b و c هر سه متمایزند.

۲) فاصله بین هر دو رأس در درخت حداکثر ۴ است.

۳) $a \ge b + c$.

۴) درختی با دنباله درجات داده شده وجود ندارد.

۲۲ـ ۱۰۰ نقطه در صفحه داده شده‌اند که آن‌ها را با اعداد ۱، ۲، ...، ۱۰۰ برچسب‌گذاری کرده‌ایم. چند درخت ۱۰۰ رأسی برچسب‌گذاری شده وجود دارد، به طوری که رئوس آن این نقاط باشند و دقیقاً دو رأس درجه ۱ داشته باشند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $99!$　　۲) $100!$　　۳) 100^{96}　　۴) 100^{97}

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ـ گزینه «۲» کافیست درخت پوشای کمینه را در گراف متناظر با ماتریس داده شده به دست آوریم. یک گراف با ۸ رأس خواهیم داشت و یال‌های $\{(۱,۵),(۲,G),(۳,۶),(۶,۷),(۲,۱),(۲,۳),(۴,۶)\}$ می‌توانند تشکیل این درخت پوشای کمینه را بدهند. در این حالت وزن این درخت برابر ۱۰ می‌باشد.

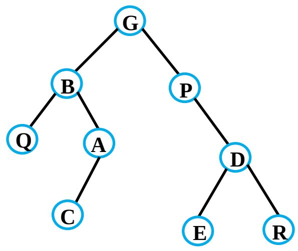
۲ـ گزینه «۱» در حالت کلی، تعداد برگ‌های درخت، کوچکتر مساوی ۲^{d} می‌باشد. اگر درخت کامل باشد و یا گره تک‌فرزندی نداشته باشد $\sum w(x)$ برابر یک و در غیر این صورت کمتر از یک خواهد شد.

۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. حداقل عمق این درخت برابر $۸ = \lceil \log_{۲}^{۱۵۰} \rceil$ است ولی با توجه به اینکه می‌توان یک درخت مورب رسم نمود، کران بالایی برای ارتفاع درخت نخواهیم داشت.

۴ـ گزینه «۱» تعداد درخت‌های دودویی متمایز با n رأس برابر با جمله nام از دنباله اعداد کاتالان است. خواهیم داشت:

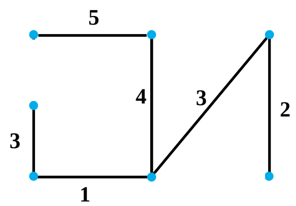
$$\text{تعداد درخت‌های دودویی متمایز با ۳ رأس} = C_{۳} = \frac{۱}{۴}\binom{۶}{۳} = ۵$$

۵ـ گزینه «۱» با استفاده از پیمایش‌های pre-order و in-order می‌توان درخت دودویی را به طور یکتا بازسازی نمود. درخت مقابل، با استفاده از این دو پیمایش بازسازی شده است. پیمایش post-order این درخت عبارت گزینه (۱) خواهد بود.



۶ـ گزینه «۴» تعداد درخت‌های پوشای گراف کامل n رأسی برابر $n^{n-۲}$ است.

۷ـ گزینه «۳» درخت مقابل یک درخت پوشای کمینه برای گراف صورت سؤال است. مجموعه وزن یال‌های این درخت برابر ۱۸ است.

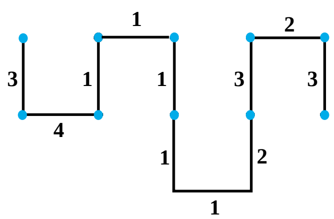


۸ـ گزینه «۲» یکی از رأس‌ها را انتخاب می‌کنیم $(v_{۱})$. این رأس را می‌توان با هر یک از سه رنگ دلخواه رنگ‌آمیزی کرد. حال هر یک از رئوس متصل به این رأس را می‌توان با دو رنگ رنگ‌آمیزی کرد و سپس هر یک از رأس‌های سطح بعدی نسبت به $v_{۱}$ را نیز می‌توان با دو رنگ رنگ‌آمیزی کرد و ... بنابراین بقیه رئوس را می‌توان با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. پس بنا به اصل ضرب تعداد کل راه‌ها عبارت است از ۳×۲^{۱۹}.

۹ـ گزینه «۴» در یک درخت بین هر دو رأس، یک مسیر یکتا وجود دارد؛ بنابراین تعداد کل مسیرها در یک درخت با n رأس با طول حداقل برابر با $\binom{n}{۲}$ می‌باشد که به ازای $n = ۱۰$ جواب مسأله برابر $\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$ خواهد بود. البته فرض بر این است که مبدأ و مقصد مسیر مهم نباشد.

۱۰ـ گزینه «۱» درخت پوشای کمینه این گراف به شکل روبرو خواهد بود:

وزن این درخت برابر ۲۲ است.



۱۱ـ گزینه «۴» تعداد یال‌های یک جنگل برابر با تعداد رئوس آن جنگل منهای تعداد مؤلفه‌هایش است. مجموع درجات رئوس هر گراف ساده نیز ۲ برابر تعداد یال‌هایش است. خواهیم داشت:

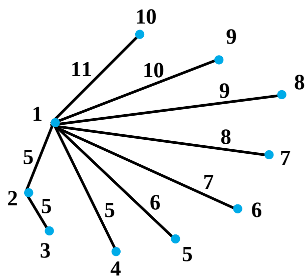
$$۲|E| = ۲(۶۰-۱۰) = ۱۰۰$$

۱۲ـ گزینه «۴» گراف به دو بخش $k_۳$ و $k_۴$ قابل تقسیم است. با توجه به اینکه تعداد درخت‌های پوشای گراف k_n برابر $n^{n-۲}$ می‌باشد و در صورت وجود رأس برشی در گراف، تعداد درخت‌های پوشای گراف برابر با حاصل‌ضرب بخش‌های جدا شدنی گراف است، تعداد درخت‌های فراگیر این گراف برابر است با:

$$\text{جواب} = ۴^{۴-۲} \times ۳^{۳-۲} = ۴۸$$

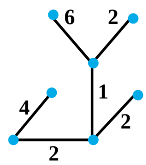
۱۳ـ گزینه «۳» درخت پوشای کمینه این گراف به صورت شکل مقابل است.

مجموع وزن یال‌های این گراف برابر ۶۶ خواهد بود.



۱۴ـ گزینه «۲» درخت مقابل، درخت پوشای کمینه گراف صورت سوال است

که مجموع وزن یال‌هایش برابر ۱۷ می‌باشد.



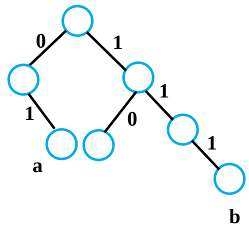
۱۵ـ گزینه «۱» تعداد این درختان با تعداد درختان پوشای گراف k_n برابر است. این عبارت معادل گزینه (۱) است.

۱۶ـ گزینه «۴» این گراف از ۴ بخش $k_۳$ تشکیل شده است که در یک رأس برشی با هم اشتراک دارند. با توجه به اینکه تعداد درخت‌های پوشای گراف $k_۳$ برابر $۳^{۳-۲}$ است خواهیم داشت:

$$\text{تعداد کل درخت‌های فراگیر} = ۳\times۳\times۳\times۳ = ۸۱$$

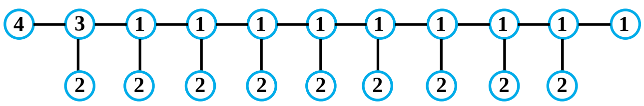
۱۷ـ گزینه «۳» درخت معادل با این که پیش‌ترتیب به صورت مقابل است.

بزرگترین مسیر در این درخت از گره a به گره b است که طول ۵ دارد.



۱۸ـ گزینه «۳» درخت مقابل، نمونه‌ای از درخت صورت سؤال است که اعداد روی هر رأس آن نشان‌دهنده تعداد حالت رنگ‌آمیزی آن رأس است. تعداد حالات رنگ‌آمیزی این درخت برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی} = ۴\times۳\times۲^{۹}\times۱^{۹} = ۳\times۲^{۱۱}$$

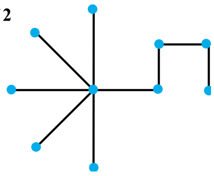


۱۹ـ گزینه «۴» مقادیر (r,s,t) می‌توانند به شکل $(۲,۲,۲)$ یا $(۳,۲,۱)$ باشند و حالت دیگری برای این مقادیر مجاز نمی‌باشد؛ بنابراین فقط گزینه ۴ درست خواهد بود.

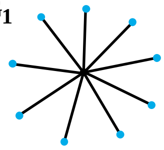
۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به رئوس برشی موجود، گراف به چهار بخش تقسیم می‌شود. کافیست تعداد درخت‌های فراگیر هر بخش را در هم ضرب کنیم. خواهیم داشت: $۳\times۴\times۴\times۳=۱۴۴$

۲۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. گراف $G_۱$ مثال نقض برای گزینه ۱ و گراف $G_۲$ مثال نقض برای گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) است.

G_2



G_1



۲۲ـ گزینه «۲» اگر این درخت تنها دو رأس درجه ۱ داشته باشد، آنگاه درخت مسیری به طول ۹۹ می‌باشد که تعداد این درخت برابر است با:

جواب $=۱۰۰\times۹۹\times۹۸\times...\times۱=۱۰۰!$

البته با توجه به اینکه این درخت خاصیت تقارنی دارد، پاسخ تقسیم بر ۲ خواهد شد. در واقع $\frac{۱۰۰!}{۲}$ درخت با این شرایط داریم.

فصل نهم

«نظریه اعداد»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ اگر ۸ عدد صحیح مثبت انتخاب کنیم، باقی‌مانده چند عدد از آنها بر عدد هفت با یکدیگر مساوی خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۸)

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۲

۲ـ فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر یک باشد. همچنین فرض کنید a و b هر دو عددی مثل c را تقسیم می‌نمایند. کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ab عدد c را تقسیم می‌کند.

۲) c عدد ab را تقسیم می‌کند.

۳) اعدادی مثل m و n وجود دارند به طوری که $na+mb=c$

۴) گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح است.

۳ـ حداقل چند عدد از هر M عدد صحیح متوالی بر M بخش‌پذیر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) ۴　　۴) ۰

۴ـ اگر هفت رنگ برای رنگ کردن ۵۰ دوچرخه به کار برده شود، در این صورت حداقل چند تا از آن‌ها همرنگ خواهند بود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

۱) ۸　　۲) ۶　　۳) ۹　　۴) ۵

۵ـ عدد گویای $\frac{a}{b}$ با خاصیت $(a,b)=1$ یک کسر تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر تحویل‌ناپذیر بوده و $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\in Z$، کدام رابطه لزوماً برقرار است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۴)

۱) $(b,d)=1$　　۲) $|b|=|d|$　　۳) $ad-bc=1$　　۴) $(b+d)\,|\,bd$

۶ـ عدد $1000!$ به چند صفر ختم می‌شود؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲۴۹　　۲) ۲۳۸　　۳) ۲۲۵　　۴) ۲۲۰

۷ـ به ازای کدام مقدار x رابطه بخش‌پذیری $Y\,|\,(x^{38}-3x^{36}-8x^{2}+3x^{7}-2)$ برقرار است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۸۸)

۱) $x=64$　　۲) $x=68$　　۳) $x=74$　　۴) $x=97$

۸ـ باقی‌مانده تقسیم عدد 3^{89} بر عدد ۷ چه عددی است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۹ـ از میان اعداد ۹۹,...,۱۲,۱۱,۱۰ چند عدد انتخاب کنیم تا حداقل یکی از آنها مضرب ۳ باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۹)

۱) ۳۰　　۲) ۳۱　　۳) ۶۰　　۴) ۶۱

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ گزینه «۴» در این حالت باقی‌مانده هفت عدد اول بر ۷ ممکن است یکی از اعداد ۶ ,...,۱ ,۰ باشد و باقی‌مانده عدد هشتم بر ۷ هرچه باشد، تکراری خواهد بود (در حقیقت از اصل لانه کبوتری استفاده کرده‌ایم).

۲ـ گزینه «۱ و ۳» با توجه به این‌که هر دو عدد a و b مقسوم‌علیه c هستند، $\text{lcm}(a,b)$ نیز مقسوم‌علیه c خواهد بود.
خواهیم داشت:

$$\text{lcm}(a,b)=\frac{a.b}{\gcd(a,b)}=\frac{a.b}{۱}=ab$$

در نتیجه ab عدد c را تقسیم می‌کند. برای گزینه (۳) اگر یکی از مقادیر m یا n را برابر صفر بگیریم، به رابطه بخش‌پذیری خواهیم رسید. این عبارت نیز صحیح خواهد بود.

۳ـ گزینه «۲» از هر M عدد صحیح متوالی دقیقاً یک عدد بر M بخش‌پذیر خواهد بود. فرض کنید مجموعه مورد نظرمان، مجموعه $\{k+۱,k+۲,\ldots,k+M\}$ باشد. در این صورت با فرض اینکه k+i بر M بخش‌پذیر باشد، اعداد k+i-M و k+i+M بر M بخش‌پذیر خواهد بود. این دو عدد در این مجموعه حضور ندارند.

۴ـ گزینه «۱» طبق اصل لانه کبوتری، اگر ۵۰ دوچرخه را ۵۰ کبوتر و ۷ رنگ را ۷ لانه کبوتر در نظر بگیریم، حداقل یک لانه یافت می‌شود که حداقل $۸=\left\lceil\frac{۵۰}{۷}\right\rceil$ کبوتر در خود جای دهد، در نتیجه حداقل ۸ دوچرخه همرنگ داریم.

۵ـ گزینه «۲» مقدار $\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{a}=\frac{\frac{ad}{\gcd(b,d)}+\frac{bc}{\gcd(b,d)}}{\frac{bd}{\gcd(b,d)}}$$

با توجه به این‌که دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تحویل‌ناپذیرند، تنها در صورتی که $\gcd(b,d)=|b|$ باشد، $(|b|=|d|)$ کسر به فرم زیر خواهد رسید:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{p_۱a+p_۲b}{b}$$

با فرض این‌که $p_۱$ و $p_۲$ ضرایب با مقدار ±۱ هستند، کسر فوق می‌تواند نشان‌دهنده یک عدد صحیح باشد.

۶ـ گزینه «۱» اگر $۱۰۰۰!$ را به اعداد اول تجزیه کنیم، آنگاه توان‌های ۲ و ۵ به ترتیب عبارتند از:

$$\text{توان ۲}=\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۴}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۸}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۱۶}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۳۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۶۴}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۵۱۲}\right\rfloor=۹۸۴$$

$$\text{توان ۵}=\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۲۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۱۲۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۱۰۰۰}{۶۲۵}\right\rfloor=۲۴۹$$

می‌دانیم که تعداد صفرهای یک عدد برابر $\min\{\text{توان ۲ و توان ۵}\}$ در تجزیه آن عدد می‌باشد؛ بنابراین عدد $۱۰۰۰!$ دارای ۲۴۹ صفر می‌باشد.

۷ـ گزینه «۳» باید مقدار x را محاسبه کنیم که به ازای آن رابطه $x^{۳۸} - ۳x^{۳۶} - ۸x^{۲} + ۳x^{۷} - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۰$ برقرار باشد. برای محاسبه باقی‌مانده این عدد به پیمانه ۷ می‌توان باقی‌مانده هر عدد به پیمانه ۷ را در معادله جایگزین نمود.

$$x = ۶۴ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow x^{۳۸} - ۳x^{۳۶} - ۸x^{۲} + ۳x^{۷} - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۱ - ۳ - ۸ + ۳ - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$x = ۶۸ \overset{۷}{\equiv} -۲ \Rightarrow x^{۳۸} - ۳x^{۳۶} - ۸x^{۲} + ۳x^{۷} - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۲^{۳۸} - ۳ \times ۲^{۳۶} - ۲^{۵} - ۳ \times ۲^{۷} - ۲$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۲^{۳\times۱۲}(۲^{۲} - ۳) - ۲^{۳}(۲^{۲}) + ۲^{۳\times۲}(۳ \times ۲) - ۲ \overset{۷}{\equiv} (۲^{۲} - ۳) - ۲^{۲} + ۳ \times ۲ - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$x = ۷۴ \overset{۷}{\equiv} -۳ \Rightarrow x^{۳۸} - ۳x^{۳۶} - ۸x^{۲} + ۳x^{۷} - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۳^{۳۸} - ۳^{۳۷} - ۸ \times ۳^{۲} + ۳^{۸} - ۲$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۳^{۳\times۱۲}(۳^{۲} - ۳) - ۸ \times ۳^{۲} + ۳^{۲\times۳}(۳^{۲}) - ۲ \overset{۷}{\equiv} (۳^{۲} - ۳) - ۷۲ + ۳^{۲} - ۲^{۷} \overset{۷}{\equiv} ۰$$

$$x = ۹۷ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow x^{۳۸} - ۳x^{۳۶} - ۸x^{۲} + ۳x^{۷} - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۱ - ۳ - ۸ - ۳ - ۲ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

۸ـ گزینه «۴»

$$۳^{۳} = ۲۷ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۳\times۲۹} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۹} = -۱ \Rightarrow ۳^{۳\times۲۹+۲} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۹} \times ۳^{۲} = -۹ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

۹ـ گزینه «۴» اگر x مضرب ۳ باشد؛ آنگاه می‌توان آن را به صورت $۳k$ نوشت؛ بنابراین برای به‌دست آورن تعداد اعداد مضرب ۳ که بین ۱۰ و ۹۹ باشند می‌توان از رابطه روبه‌رو استفاده کرد:

$$۱۰ \le ۳k \le ۹۹ \Rightarrow \lceil ۱۰/۳ \rceil = ۴ \le k \le ۳۳ \Rightarrow |k| = ۳۳ - ۴ + ۱ = ۳۰$$

بنابراین از ۹۰ عدد داده شده، ۳۰ تای آنها مضرب ۳ و مابقی غیرمضرب ۳ می‌باشند؛ بنابراین طبق اصل لانه کبوتری با انتخاب ۶۱ عدد مطمئن هستیم که لزوماً حداقل یکی از آنها مضرب ۳ می‌باشد.