مدرسان شریف

فصل اول

«بررسی معینی و نامعینی در سازه‌ها»

مقدمه

به‌طور کلی سازه‌ها یا معین هستند یا نامعین که در این فصل نحوه تعیین معینی و نامعینی در سازه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. درواقع فصل حاضر از فصل‌های پایه و مهم در درس تحلیل سازه‌ها برای کنکور می‌باشد که با ارائه دو درسنامه برای شما داوطلبان عزیز به طور کامل تشریح می‌گردد. این دو درسنامه به صورت زیر معرفی می‌شوند:

درسنامه (۱): بررسی معینی و نامعینی در قاب‌های دوبُعدی و سه‌بُعدی

درسنامه (۲): بررسی معینی و نامعینی در تیرها و خرپاها

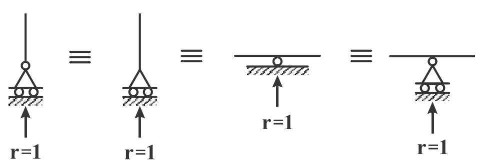
درسنامه (۱): بررسی معینی و نامعینی در قاب‌های دوبُعدی و سه‌بُعدی

معرفی انواع عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

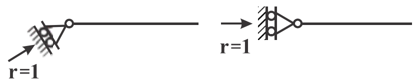
به‌طور کلی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی هنگامی ایجاد می‌شود که تکیه‌گاه در یک یا چند راستا از حرکت سازه جلوگیری نماید. در یک محیط دوبُعدی حرکت‌های سازه شامل حرکت‌های افقی، قائم و دورانی است. بنابراین انواع عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

۱ـ تکیه‌گاه غلتکی

در شکل‌های زیر انواع تکیه‌گاه‌های غلتکی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این نوع تکیه‌گاه از حرکت قائم سازه در محل تکیه‌گاه (عمود بر سطح تکیه‌گاه) جلوگیری می‌شود. بنابراین سازه اجازه حرکت‌های افقی و دورانی در محل تکیه‌گاه را دارد. پس می‌توان گفت این نوع تکیه‌گاه، دارای یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی در راستای قائم (عمود بر سطح تکیه‌گاه) است $(r = 1)$.

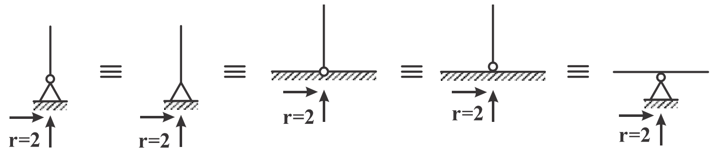


البته در سازه از تکیه‌گاه غلتکی در راستای افقی و مایل نیز استفاده می‌شود که در شکل‌های زیر ارائه شده‌اند:

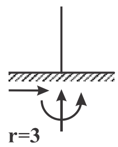


۲ـ تکیه‌گاه مفصلی

شکل‌های زیر انواع تکیه‌گاه‌های مفصلی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌گردد در این نوع تکیه‌گاه از حرکت‌های قائم و افقی سازه در محل تکیه‌گاه جلوگیری شده ولی سازه اجازه حرکت دورانی در محل تکیه‌گاه دارد. بنابراین می‌توان گفت که این نوع تکیه‌گاه دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی در راستاهای عمود بر سطح و موازی با سطح خود می‌باشد $(r = 2)$.

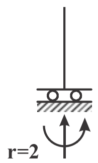


۳ــ تکیه‌گاه گیردار



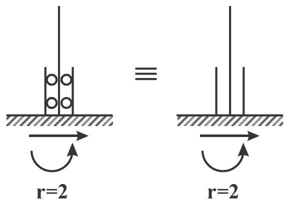
در شکل مقابل تکیه‌گاه گیردار نشان داده شده است. با توجه به شکل در این تکیه‌گاه از حرکت‌های افقی، قائم و دورانی در محل تکیه‌گاه جلوگیری شده است. بنابراین این تکیه‌گاه دارای سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی است $(r=3)$.

۴ــ تکیه‌گاه لغزنده گیردار

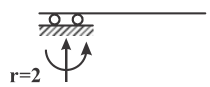


همان طور که در شکل مقابل نشان داده شده است در این تکیه‌گاه از حرکت‌های قائم و دورانی در محل تکیه‌گاه جلوگیری می‌شود ولی سازه مجاز به حرکت در راستای افقی است، بنابراین این نوع تکیه‌گاه دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی است $(r=2)$.

۵ــ تکیه‌گاه گیردار محوری (تلسکوپی)



در شکل‌های مقابل انواع تکیه‌گاه‌های گیردار محوری نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که از حرکت افقی و دورانی در محل تکیه‌گاه جلوگیری شده ولی سازه مجاز به حرکت در راستای قائم می‌باشد. بنابراین این نوع تکیه‌گاه دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی است $(r=2)$.

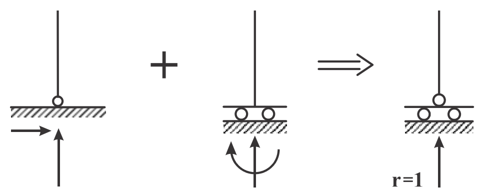


همچنین دقت شود که شکل مقابل نیز نوعی از تکیه‌گاه گیردار محوری است.

نکته۱: در برخی موارد می‌توان از ترکیب دو تکیه‌گاه، یک تکیه‌گاه جدید ایجاد نمود. به این نوع تکیه‌گاه‌ها، تکیه‌گاه‌های ترکیبی می‌گویند. در تکیه‌گاه‌های ترکیبی، به منظور تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، از اشتراک عکس‌العمل‌های دو تکیه‌گاه ترکیب‌شده استفاده می‌شود.

در ادامه این نکته دو نوع تکیه‌گاه ترکیبی معرفی می‌شوند.

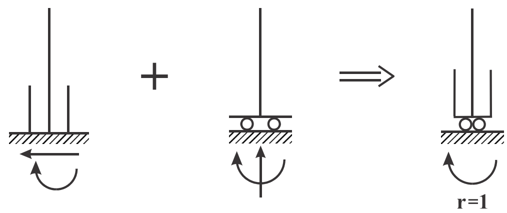
۶ــ تکیه‌گاه ترکیبی از تکیه‌گاه‌های لغزنده گیردار و مفصلی



(تکیه‌گاه مفصلی) (تکیه‌گاه لغزنده گیردار) (تکیه‌گاه ترکیبی)

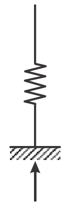
مطابق شکل مقابل از ترکیب دو تکیه‌گاه لغزنده گیردار و تکیه‌گاه مفصلی، این تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. در این حالت از اشتراک عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی این دو تکیه‌گاه، عکس‌العمل در راستای قائم حاصل می‌شود. بنابراین در این تکیه‌گاه از حرکت قائم جلوگیری می‌شود ولی حرکت سازه در محل تکیه‌گاه در راستای افقی و دورانی مجاز است. پس می‌توان گفت این نوع تکیه‌گاه ترکیبی دارای یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی در راستای قائم است $(r=1)$.

۷ــ تکیه‌گاه ترکیبی از تکیه‌گاه‌های لغزنده گیردار و گیردار محوری

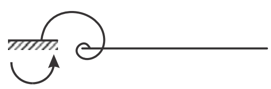


(تکیه‌گاه گیردار محوری) (تکیه‌گاه لغزنده گیردار) (تکیه‌گاه ترکیبی)

مطابق شکل مقابل از ترکیب دو تکیه‌گاه لغزنده گیردار و تکیه‌گاه گیردار محوری، این تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. در این حالت از اشتراک عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی این دو تکیه‌گاه، عکس‌العمل دورانی حاصل می‌شود. بنابراین در این تکیه‌گاه از حرکت دورانی جلوگیری شده ولی حرکات سازه در راستاهای افقی و قائم در محل تکیه‌گاه مجاز است. پس می‌توان گفت این نوع تکیه‌گاه ترکیبی دارای یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی دورانی است $(r=1)$.



(فنر انتقالی تکیه‌گاهی)



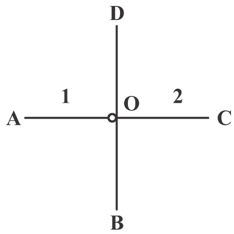
(فنر دورانی تکیه‌گاهی)

نکته۲: در صورتی که سازه به فنرهای انتقالی و دورانی تکیه‌گاهی مطابق شکل‌های مقابل متصل شده باشد، آنگاه دارای عکس‌العمل تکیه‌گاهی در راستای فنر برای فنر انتقالی و دورانی برای فنر دورانی می‌باشد.

معرفی انواع اتصالات مفصلی و داخلی سازه‌ها

به‌طور کلی در داخل سازه سه نوع اتصال مفصلی تعریف می‌شود. این سه نوع اتصال مفصلی عبارتند از: مفصل خمشی، مفصل برشی و مفصل محوری. می‌دانیم در محل یک عضو که به‌صورت پیوسته است، سه مؤلفه نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی وجود دارد. هنگامی‌که در محل اتصال اعضای سازه، هریک از مفاصل خمشی، برشی و محوری حضور داشته باشد، آنگاه یکی از سه مؤلفه نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی صفر شده و حذف می‌گردد. بنابراین به تعداد مؤلفه‌های داخلی صفر یا حذف شده در اتصالات مفصلی و داخلی سازه، معادلات شرط (c) می‌گویند.

نکته۳: درصورتی‌که چند عضو به‌صورت صلب به یکدیگر متصل شده باشند، یعنی اتصال آن‌ها بدون حضور مفصلی ایجاد شده باشد، آنگاه می‌توان این اعضا را به‌صورت یک عضو صلب در نظر گرفت. به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید:

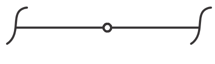


همان‌طور که مشاهده می‌شود اعضای OB، OC و OD بدون اینکه هرکدام جداگانه به مفصل خمشی O متصل شده باشند، هر سه به‌صورت یک عضو صلب به مفصل O متصل هستند. بنابراین مفصل خمشی O از اتصال دو عضو OA و OBCD تشکیل شده است.

در ادامه هریک از سه مفصل اشاره شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ـ مفصل خمشی

شکل مقابل را در نظر بگیرید. این شکل اتصال دو عضو توسط مفصل خمشی را نشان می‌دهد.

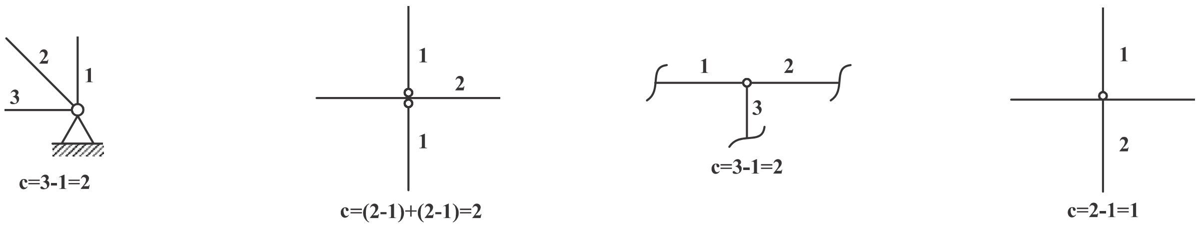

(مفصل خمشی)

در محل مفصل خمشی مقدار لنگر خمشی داخلی برابر صفر است $(M = ۰)$. بنابراین می‌توان گفت در محل مفصل خمشی از اتصال دو عضو، تعداد معادلات شرط برابر با یک می‌باشد $(c = ۱)$.

نکته۴: در محل یک مفصل خمشی تعداد معادلات شرط از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

۱ـ تعداد اعضای متصل به مفصل خمشی = تعداد معادلات شرط (c)

به منظور درک بهتر این نکته، نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید:

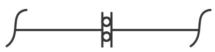


(الف) (ب) (ج) (د)

دقت شود در نمونه (الف)، مفصل خمشی از اتصال دو عضو تشکیل شده است و همچنین در نمونه (ج)، دو مفصل خمشی حضور دارد که عضو ۲ در هردو مفصل مشترک است، بنابراین در محاسبه تعداد معادلات شرط، باید تعداد معادلات شرط هر دو مفصل خمشی محاسبه و با هم جمع گردد.

۲ـ مفصل برشی

در شکل مقابل اتصال دو عضو توسط یک مفصل برشی نشان داده شده است.


(مفصل برشی)

در محل مفصل برشی، نیروی برشی داخلی برابر با صفر است $(V = ۰)$. بنابراین در محل مفصل برشی تعداد معادلات شرط برابر با یک است $(c = ۱)$.

۳ـ مفصل محوری

شکل‌های زیر اتصال دو عضو توسط یک مفصل محوری را نشان می‌دهند.

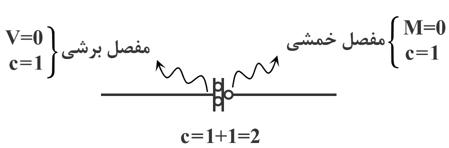
در محل مفصل محوری، نیروی محوری داخلی برابر صفر است $(N = ۰)$. بنابراین می‌توان گفت در محل مفصل محوری، تعداد معادلات شرط برابر با یک است $(c = ۱)$.

نکته۵: در برخی مواقع می‌توان از ترکیب مفصل‌های خمشی، برشی و محوری به منظور اتصال اعضای سازه استفاده نمود. در این حالت جهت تعیین تعداد معادلات شرط، کافی است معادلات شرط مربوط به هر مفصل را جداگانه محاسبه نموده و سپس با هم جمع نماییم تا تعداد معادلات شرط مفصل ترکیبی مورد نظر به‌دست آید.

در ادامه این نکته، سه نوع مفصل ترکیبی معرفی می‌گردد.

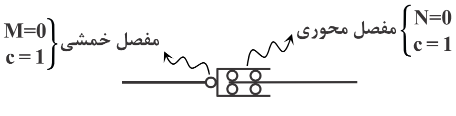
۴ـ مفصل ترکیبی خمشی ـ برشی

شکل مقابل ترکیب دو مفصل خمشی و برشی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در مفصل خمشی، لنگر خمشی برابر با صفر است $(M = ۰)$ و در مفصل برشی، نیروی برشی صفر می‌باشد $(V = ۰)$. بنابراین تعداد معادلات شرط (c) برای این مفصل ترکیبی برابر با ۲ است. $(c = ۲)$



(مفصل ترکیبی خمشی ـ برشی)

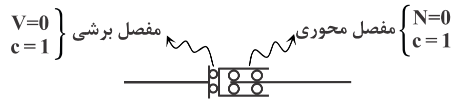
۵ـ مفصل ترکیبی خمشی ـ محوری



c=1+1=2
(مفصل ترکیبی خمشی ـ محوری)

شکل مقابل ترکیب دو مفصل خمشی و محوری را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در مفصل خمشی، لنگر خمشی برابر با صفر $(M=\circ)$ و در مفصل محوری، نیروی محوری برابر با صفر است $(N=\circ)$. بنابراین تعداد معادلات شرط (c) برای این مفصل ترکیبی برابر با ۲ است. $(c=۲)$

۶ـ مفصل ترکیبی برشی ـ محوری



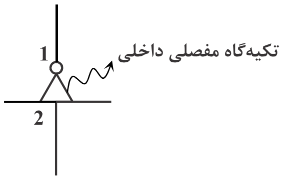
c=1+1=2
(مفصل ترکیبی برشی ـ محوری)

مطابق شکل مقابل یک مفصل ترکیبی از مفاصل برشی و محوری نشان داده شده است. می‌دانیم در مفصل برشی، مقدار نیروی برشی برابر با صفر است $(V=\circ)$ و در مفصل محوری، مقدار نیروی محوری برابر با صفر است $(N=\circ)$، بنابراین تعداد معادلات شرط برای این مفصل ترکیبی برابر با ۲ است. $(c=۲)$

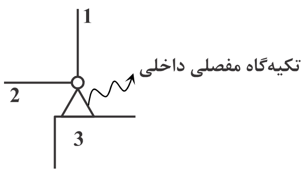
نکته۶: اگر در داخل سازه تکیه‌گاه مفصلی داخلی وجود داشته باشد، آنگاه تعداد معادلات شرط برای این تکیه‌گاه مفصلی داخلی در سازه به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

۱− تعداد اعضای متصل به تکیه‌گاه مفصلی داخلی = تعداد معادلات شرط (c)

به منظور درک بهتر این نکته شکل‌های مقابل را در نظر بگیرید:



الف) در این شکل تکیه‌گاه مفصلی داخلی به دو عضو متصل شده است. توجه شود که عضو دوم از اتصال دو عضو دیگر به صورت صلب ایجاد شده است. بنابراین تعداد معادلات شرط به این تکیه‌گاه مفصلی داخلی برابر است با: $c=۲-۱=۱$

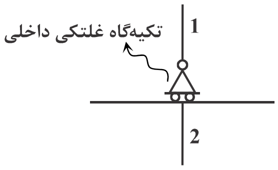


ب) در این شکل تکیه‌گاه مفصلی داخلی به سه عضو متصل شده است. دقت شود که عضو سوم از اتصال دو عضو دیگر به صورت صلب تشکیل شده است. بنابراین تعداد معادلات شرط برای این تکیه‌گاه مفصلی برابر است با: $c=۳-۱=۲$

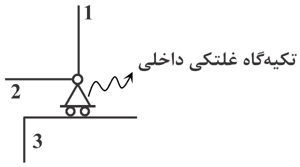
نکته۷: اگر در داخل سازه تکیه‌گاه غلتکی داخلی وجود داشته باشد، آنگاه تعداد معادلات شرط برای این تکیه‌گاه غلتکی داخلی در سازه به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

تعداد اعضای متصل به تکیه‌گاه غلتکی داخلی = تعداد معادلات شرط (c)

بنابراین به منظور درک بهتر نکته اشاره شده، به شکل‌های مقابل توجه کنید:



الف) در این شکل یک تکیه‌گاه غلتکی داخلی توسط دو عضو به یکدیگر متصل شده است. دقت شود که عضو دوم، از اتصال سه عضو به‌صورت صلب تشکیل شده است. بنابراین تعداد معادلات شرط برای تکیه‌گاه غلتکی داخلی برابر است با: $c=۲$



ب) در این شکل یک تکیه‌گاه غلتکی داخلی به سه عضو متصل شده است. مشاهده می‌شود که عضو سوم، از اتصال دو عضو دیگر به‌صورت صلب ایجاد شده است. بنابراین تعداد معادلات شرط برای تکیه‌گاه غلتکی داخلی برابر است با: $c=۳$


(غلتک داخلی)

نکته۸: شکل مقابل یک غلتک در اتصال دو عضو را نشان می‌دهد. در محل غلتک، نیروی محوری و لنگر خمشی هر دو صفر هستند $(M=N=\circ)$. بنابراین تعداد معادلات شرط در محل غلتک داخلی برابر با ۲ است $(c=۲)$.

بررسی معینی و نامعینی قاب‌های دوبُعدی فاقد فنر، کابل و عدم عبور اعضا از یکدیگر

به منظور محاسبه درجه نامعینی قاب‌های دوبُعدی، علاوه بر تعیین تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r) و معادلات شرط (c)، نیاز است تعداد فضاهای بسته موجود در سازه بدون در نظرگیری زمین (k) نیز تعیین گردد. بنابراین به منظور آشنایی با نحوه تعداد فضاهای بسته در سازه بدون در نظرگیری زمین شکل‌های صفحه بعد ارائه شده‌اند:

درسنامه (۳): بررسی استاتیک خرپاهای معین

در بررسی خرپاهای معین به طور معمول از دو روش می‌توان استفاده نمود: الف) روش مفصل ب) روش مقطع.
در ادامه ابتدا روش مفصل و سپس روش مقطع مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الف) بررسی خرپاهای معین با روش مفصل

همان‌طور که از عنوان این روش مشخص است، به منظور محاسبه نیروی عضو مورد نظر از خرپا، کافی است مفصل متصل به آن عضو را از خرپا جدا کرده و با استفاده از دو معادله تعادل نیروها در راستای قائم و افقی ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$) نیروی عضو مورد نظر از خرپا را تعیین نمود. در خرپاها اعضایی می‌تواند وجود داشته باشد که به آن‌ها صفر نیرویی می‌گویند. در ادامه شرایط ایجاد اعضای صفر نیرویی شرح داده می‌شود.

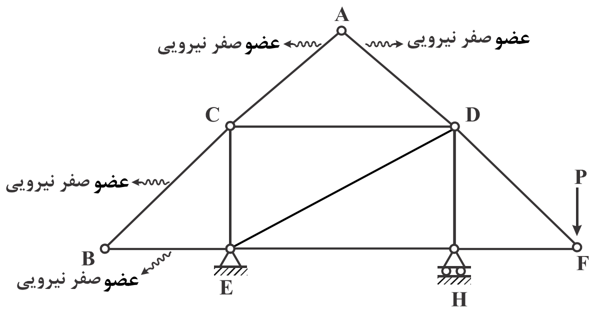
نکته۹: اگر به یک مفصل دو عضو متصل باشد که دو شرط زیر را داشته باشند نیروی هر دو عضو متصل به مفصل صفر می‌باشد. این دو شرط عبارتند از:

۱ـ فقط دو عضو غیر هم راستا به این مفصل متصل باشد.

۲ـ هیچ نیروی خارجی بر روی این مفصل وارد نشده باشد.

به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} F_{AC} = F_{AD} = 0 \\ F_{BC} = F_{BE} = 0 \end{cases}$$



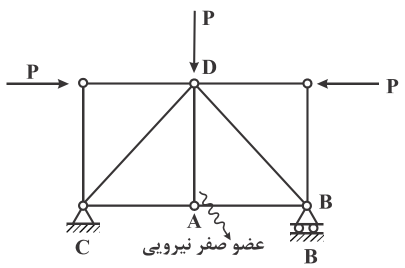
همان‌طور که مشاهده می‌شود مفصل‌های A و B دارای این دو شرط بوده و در نتیجه اعضا AD و AC در مفصل A و اعضای BE و BC در مفصل C صفر نیرویی هستند. البته توجه داشته باشید که در مفصل F، به علت بار وارد شده P، اعضا متصل به خود یعنی FD و FH صفر نیرویی نیستند.

نکته۱۰: اگر به یک مفصل سه عضو متصل شده باشد و دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه یک عضو از آن سه عضو حتماً صفر نیرویی است. این دو شرط عبارتند از:

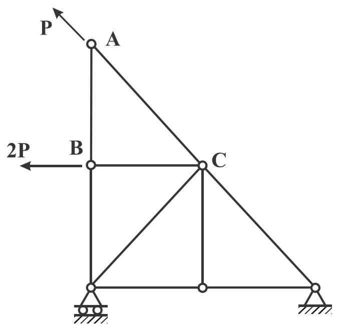
۱ـ دو عضو از آن سه عضو هم راستا باشند.

۲ـ به آن مفصل هیچ نیرویی خارجی وارد نشده باشد.

به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مفصل A از اتصال سه عضو تشکیل شده است که دو شرط اشاره شده را دارا می‌باشد، یعنی دو عضو از آن سه عضو (AB و AC) هم راستا بوده و هم‌چنین هیچ نیروی خارجی به مفصل A وارد نشده است، بنابراین می‌توان گفت عضو سوم یعنی AD صفر نیرویی است.



نکته۱۱: اگر به یک مفصل از خرپا که دو عضو به آن متصل شده است، نیروی خارجی اثر کند، در صورتی که این نیروی خارجی در راستای یکی از آن دو عضو به مفصل وارد شود، آنگاه نیروی آن عضو برابر با نیروی خارجی و نیروی عضو دیگر صفر است و می‌توان گفت صفر نیرویی است. حال به منظور درک بهتر این نکته به صورت مقابل داریم:

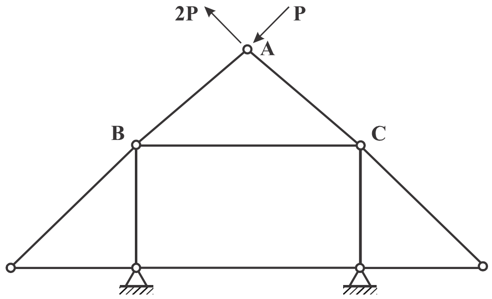
با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مفصل A دارای دو عضو است و نیروی خارجی P به آن وارد می‌شود. با توجه به اینکه نیروی خارجی P وارد به این مفصل در راستای عضو AC اعمال شده است، بنابراین نیروی عضو AC برابر با P و عضو AB صفر نیرویی است.

تذکر: توجه داشته باشید که اگر نیرو وارد شده به یک مفصل در یک خرپا به صورت فشاری باشد، نیروی منفی و اگر به صورت کششی باشد به‌صورت نیرویی مثبت است. یعنی داریم:

(نیروی کششی) $\xleftarrow{P} \circ \Rightarrow F = P$ (نیروی فشاری) $\xrightarrow{P} \circ \Rightarrow F = -P$

نکته۱۲: در صورتی که به یک مفصل از خرپا، دو عضو متصل شده باشد و دو نیروی خارجی هر کدام در راستای یکی از این دو عضو اعمال شود، آنگاه نیروی این دو عضو برابر با نیروی خارجی است که در راستای همان عضو وارد می‌شود.

یعنی مطابق شکل زیر داریم:

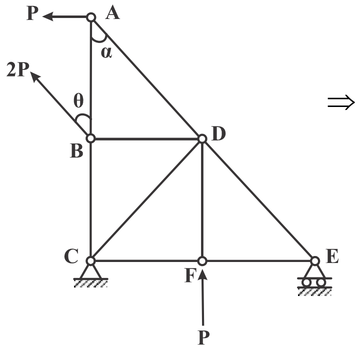


$$\begin{cases} F_{AC} = ۲P \\ F_{AB} = -P \end{cases}$$

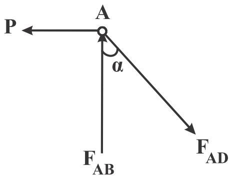
با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مفصل A از دو عضو AB و AC تشکیل شده که به این مفصل نیروی خارجی P به صورت فشاری و نیروی خارجی ۲P به صورت کششی در راستای هر یک از این دو عضو وارد می‌شود. بنابراین می‌توان گفت نیروی عضو AC برابر ۲P و نیروی عضو AB برابر P− است.

نکته۱۳: اگر یک مفصل از خرپا دارای دو عضو و یا سه عضو باشد و نیروی خارجی P در شرایطی به آن مفصل وارد شود که با هیچ یک از اعضای مفصل در یک راستا نباشد، آنگاه با استفاده از معادلات تعادل نیروها در راستای قائم و افقی می‌توان نیروی هر یک از اعضا متصل به مفصل را تعیین نمود.

به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید.



$\Rightarrow$

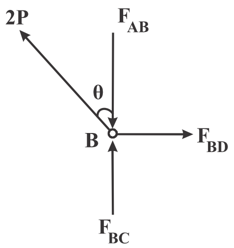


مفصل A:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow (F_{AD} \times \sin\alpha) - P = ۰ \Rightarrow F_{AD} = \frac{P}{\sin\alpha}$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow -(F_{AD} \times \cos\alpha) + F_{AB} = ۰$$

$$\Rightarrow F_{AB} = F_{AD} \times \cos\alpha \Rightarrow F_{AB} = \frac{P}{\tan\alpha}$$



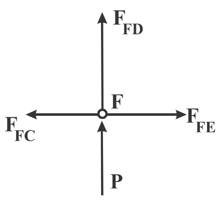
مفصل B:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BD} - (۲P \times \sin\theta) = ۰ \Rightarrow F_{BD} = ۲P \times \sin\theta$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{BC} - F_{AB} + (۲P \times \cos\theta) = ۰$$

$$\Rightarrow F_{BC} = F_{AB} - (۲P \times \cos\theta) \Rightarrow F_{BC} = \frac{P}{\tan\alpha} - (۲P \times \cos\theta)$$

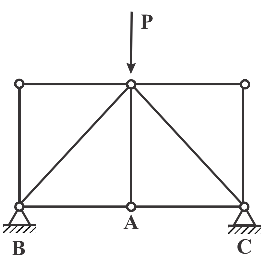
بنابراین می‌توان گفت در صورتی که در حالت سه عضو متصل به یک مفصل، نیروی خارجی اعمال شده به مفصل در راستای یکی از اعضا و دو عضو دیگر در یک راستا باشند آنگاه نیروی آن عضو که در راستای نیروی خارجی است، برابر با مقدار نیروی خارجی و نیروی دو عضو دیگر که در یک راستا هستند با یکدیگر برابر می‌باشد. پس مطابق شکل ارائه شده برای مفصل F داریم:



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{FE} - F_{FC} = ۰ \Rightarrow F_{FE} = F_{FC}$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{FD} + P = ۰ \Rightarrow F_{FD} = -P$$

نکته۱۴: اگر یک عضو از خرپا که هیچ بارگذاری مستقیمی به آن اعمال نمی‌شود در شرایطی باشد که دو انتهای آن عضو نسبت به یکدیگر تغییر مکان نداشته باشند آنگاه می‌توان گفت آن عضو صفر نیرویی است. به منظور درک بهتر این نکته مطابق شکل مقابل داریم:



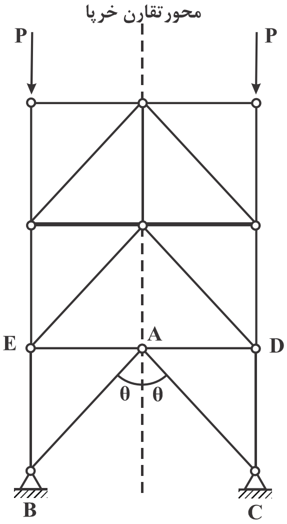
مطابق شکل مشاهده می‌شود که عضوهای AB و AC فاقد بارگذاری مستقیم هستند و توسط دو تکیه‌گاه مفصلی B و C نسبت به یکدیگر تغییرمکان نداشته پس این اعضا صفر نیرویی هستند:

$$F_{AB} = F_{AC} = ۰$$

نکته۱۵: اگر یک خرپا متقارن تحت اثر بارگذاری متقارن قرار گیرد، در صورتی که مفصلی بر روی محور تقارن خرپا وجود داشته باشد، آنگاه با مشاهده دو شرط زیر، اعضای مورب متصل به آن مفصل، صفر نیرویی هستند:

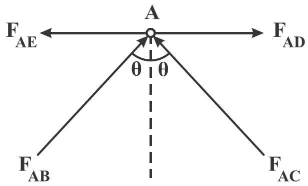
۱ــ مفصلی که روی محور تقارن خرپا قرار دارد، چهار عضو داشته باشد که دو عضو آن عمود بر محور تقارن و دو عضو دیگر با محور تقارن خرپا زاویه یکسان تشکیل دهد.

۲ــ به مفصل بار خارجی اعمال نشود.



پس به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:

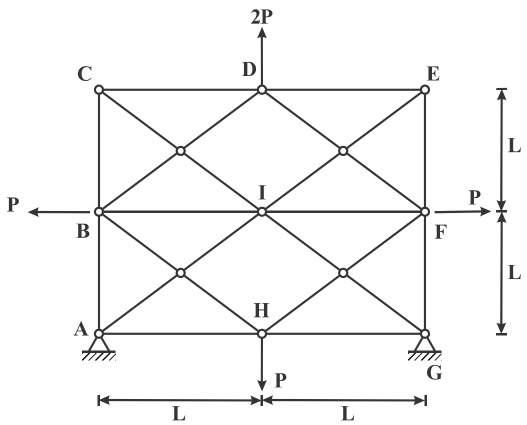
همان‌طور که مشاهده می‌شود خرپا متقارن است، از طرفی مفصل A روی محور تقارن خرپا قرار دارد و فاقد بارگذاری مستقیم می‌باشد، همچنین چهار عضو به آن متصل است که دو عضو آن عمود بر محور تقارن خرپا هستند (AE و AD) و دو عضو دیگر آن با محور تقارن خرپا زاویه یکسان θ ساخته‌اند (AB و AC)، پس با توجه به اینکه هر دو شرط را دارا می‌باشد، آنگاه اعضای AB و AC صفر نیرویی هستند و داریم:



$$\begin{cases} F_{AB} = F_{AC} = ۰ \\ F_{AD} = F_{AE} \end{cases}$$

حال به منظور درک بهتر مفاهیم ارائه‌شده، مثال‌های زیر را با هم بررسی می‌نماییم:

مثال۲۹: در خرپای شکل زیر اگه صلبیت محوری تمام اعضا EA باشد، نیروی میله BI کدام است؟ (مهندسی عمران ـ دکتری ۹۲)

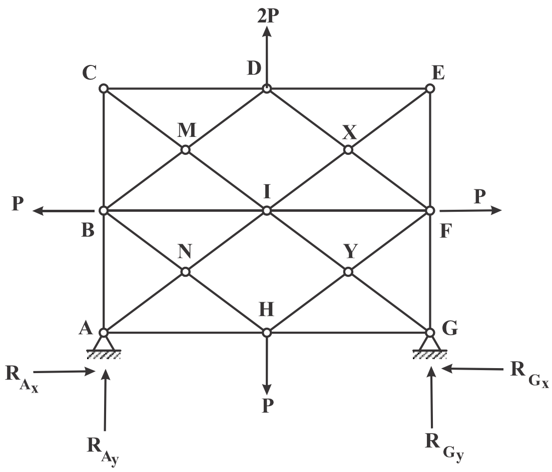


۱) صفر

۲) P

۳) $\frac{P}{۲}$

۴) $۲P$

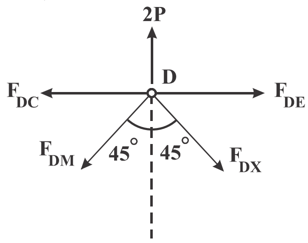


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به خرپا و بارگذاری وارد بر آن مشاهده می‌شود که این خرپا متقارن است، پس مقدار عکس‌العمل‌های قائم تکیه‌گاه‌های مفصل G و A برابر هستند و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{A_y} + R_{G_y} + ۲P - P = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{به علت تقارن}]{R_{A_y} = R_{G_y}} ۲R_{A_y} = -P \Rightarrow R_{A_y} = R_{G_y} = -\frac{P}{۲}$$

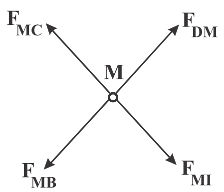
حال با استفاده از روش مفصل، ابتدا مفصل D را بررسی می‌کنیم:



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲P - F_{DX}\cos ۴۵^\circ - F_{DM}\cos ۴۵^\circ = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{به علت تقارن در مفصل D}]{F_{DX} = F_{DM}} ۲P = ۲F_{DM}\cos ۴۵^\circ$$

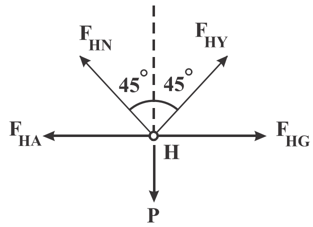
$$\Rightarrow F_{DM} = \frac{P}{\cos ۴۵^\circ} = \frac{P}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow F_{DM} = P\sqrt{۲}$$



از طرفی با توجه به تقارن در مفصل M، اعضای CM و MI در یک راستا و اعضا MD و MB نیز در یک راستا هستند، پس نیروی این اعضا برابر است با:

$$F_{DM} = F_{MB} = P\sqrt{۲}$$

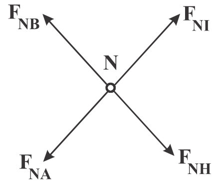
حال به سراغ مفصل H می‌رویم و به صورت زیر داریم:



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y=\circ \Rightarrow F_{HY}\cos ۴۵^\circ+F_{HN}\cos ۴۵^\circ-P=\circ$$

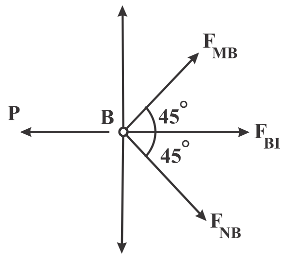
$$\xrightarrow[\text{به علت تقارن در مفصل H}]{F_{HY}=F_{HN}} ۲F_{HN}\cos ۴۵^\circ=P \Rightarrow F_{HN}=\frac{P}{۲\cos ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow F_{HN}=\frac{P}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$$



پس برای مفصل N مشابه مفصل M داریم:
$$F_{NB}=F_{NH}=\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین برای مفصل B می‌توان نوشت:

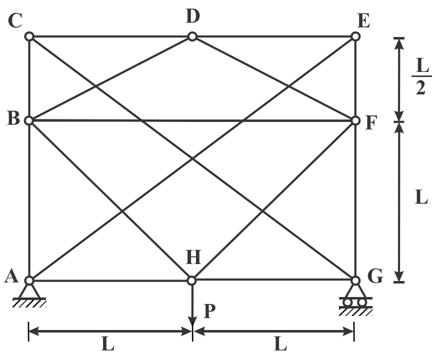


$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=\circ \Rightarrow F_{BI}+F_{MB}\cos ۴۵^\circ+F_{NB}\cos ۴۵^\circ-P=\circ$$

$$\Rightarrow F_{BI}+(P\sqrt{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}})+(\frac{P\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}})-P=\circ$$

$$\Rightarrow F_{BI}+P+\frac{P}{۲}-P=\circ \Rightarrow F_{BI}=-\frac{P}{۲}$$

مثال۳۰: در خرپای شکل زیر اگر EA برای تمام اعضا یکسان باشد، نیروی عضو BF چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۰)



۱) صفر

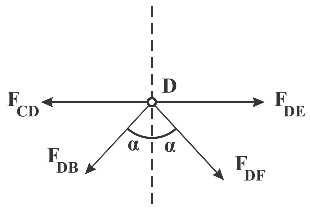
۲) $\frac{P}{۳}$

۳) $\frac{P}{۲}$

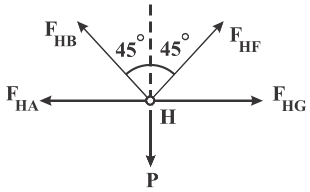
۴) P

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود نیرویی در راستای افقی به خرپا وارد نشده است، بنابراین می‌توان گفت عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه مفصلی A برابر صفر است، در نتیجه این خرپا متقارن می‌باشد. از طرفی مفصل D روی محور تقارن خرپا قرار دارد و این مفصل از چهار عضو تشکیل شده که دو عضو آن عمود بر محور تقارن (DC, DE) و دو عضو دیگر آن با محور تقارن خرپا زاویه یکسان α می‌سازد (DF و DB)، بنابراین نیروی اعضای DF و DB برابر صفر است: $\Rightarrow F_{DF}=F_{DB}=\circ$

محور تقارن خرپا



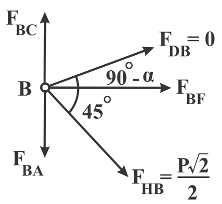
حال به سراغ مفصل H که نیروی خارجی P به آن اعمال می‌شود می‌رویم، پس داریم:



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y=\circ \Rightarrow F_{HF}\cos ۴۵^\circ+F_{HB}\cos ۴۵^\circ-P=\circ$$

$$\xrightarrow[\text{به علت تقارن در مفصل H}]{F_{HF}=F_{HB}} ۲F_{HB}\cos ۴۵^\circ=P$$

$$\Rightarrow F_{HB}=\frac{P}{۲\cos ۴۵^\circ} \Rightarrow F_{HB}=\frac{P}{۲\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$$



در نهایت با بررسی نیروهای وارد بر مفصل B به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=\circ \Rightarrow [F_{DB}\times\cos(۹\circ^\circ-\alpha)]+F_{HB}\cos ۴۵^\circ+F_{BF}=\circ$$

$$\Rightarrow \circ+(\frac{P\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}})+F_{BF}=\circ \Rightarrow F_{BF}=-\frac{P}{۲}$$

مدرسان شریف

فصل پنجم

«بررسی روش تیر مزدوج و روش‌های هندسی در محاسبه خیز و شیب تیرها»

مقدمه

در این فصل در مورد تعیین خیز و شیب تیرها به روش تیر مزدوج و روش‌های هندسی نظیر روش انتگرال‌گیری مستقیم و روش لنگر سطح بحث خواهد شد. دقت داشته باشید که این روش‌ها کمی طولانی بوده و به‌طور کلی بیشتر در مواقعی خاص نظیر محاسبه خیز حداکثر در تیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد.
بنابراین این فصل شامل سه درسنامه به صورت زیر می‌باشد:

درسنامه (۱): بررسی روش تیر مزدوج در محاسبه خیز و شیب تیرها

درسنامه (۲): بررسی روش انتگرال‌گیری مستقیم در محاسبه خیز و شیب تیرها

درسنامه (۳): بررسی روش لنگر سطح در محاسبه خیز و شیب تیرها

درسنامه (۱): بررسی روش تیر مزدوج در محاسبه خیز و شیب تیرها

در این روش ما تیر اصلی با بارگذاری‌ها و تکیه‌گاه‌هایی که دارد را به یک تیر جدید به نام تیر مزدوج تبدیل می‌کنیم. در تیر اصلی تکیه‌گاه‌ها دارای شرایط مرزی هندسی شامل خیز (تغییر مکان y) و شیب (دوران θ) هستند، حال با تغییر شرایط مرزی هندسی به شرایط مرزی استاتیکی برای این نقاط که شامل برش (V) و لنگر (M) می‌باشد، شرایط جدید تعریف کرده و متناسب با این شرایط جدید تکیه‌گاه‌ها نیز تغییر می‌کنند تا تیر حاصل تیر مزدوج نامیده شود.
پس به منظور تغییر شرایط مرزی هندسی به شرایط مرزی استاتیکی از دو تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

۱ـ شیب (دوران θ) نقطه A در تیر اصلی (شرایط هندسی) $\xrightarrow{\text{تغییر می‌کند به}}$ برش (V) نقطه A در تیر مزدوج (شرایط استاتیکی):

وجود یا عدم وجود $\theta_A \Leftarrow$ وجود یا عدم وجود V_A

۲ـ خیز (تغییر مکان قائم y) نقطه A در تیر اصلی (شرایط هندسی) $\xrightarrow{\text{تغییر می‌کند به}}$ لنگر (M) نقطه A در تیر مزدوج (شرایط استاتیکی):

وجود یا عدم وجود $y_A \Leftarrow$ وجود یا عدم وجود M_A

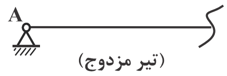
حال برای رسم تیر مزدوج باید برای تمامی نقاط تیر که با تکیه‌گاه‌ها اتصال دارند، شرایط مرزی هندسی در تیر اصلی که شامل خیز (تغییر مکان قائم) و شیب (دوران) است را تعیین نماییم و متناسب با همین شرایط، شرایط مرزی استاتیکی شامل برش (V) و لنگر (M) در تیر مزدوج تعریف شود. یعنی اگر نقطه‌ای از تیر اصلی خیز دارد باید نقطه متناظر آن در تیر مزدوج، لنگر داشته باشد و اگر شیب دارد باید نقطه متناظر آن در تیر مزدوج، برش داشته باشد. پس ما در تیر اصلی برای تمامی نقاط، شرایط مرزی هندسی را ابتدا تعیین کرده و با تبدیل شرایط مرزی هندسی به شرایط مرزی استاتیکی، برای همان نقطه در تیر مزدوج تکیه‌گاه جدید تعیین می‌کنیم.
بنابراین ابتدا نحوه بررسی نقاط ابتدایی و انتهایی و همچنین نقاط میانی تیر اصلی به تیر مزدوج را بررسی می‌کنیم تا چگونگی رسم تیر مزدوج برای شما داوطلبان عزیز به‌خوبی تفهیم گردد.

رسم تیر مزدوج برای نقاط ابتدایی و انتهایی تیر

به منظور درک بهتر رسم تیر مزدوج و تغییر شرایطی مرزی هندسی به شرایط مرزی استاتیکی، حالت‌های مختلف از نقاط ابتدایی و انتهایی تیر اصلی را در نظر گرفته و این نقاط را به نقاط ابتدایی و انتهایی تیر مزدوج تغییر می‌دهیم.

۱) 

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

۲) 

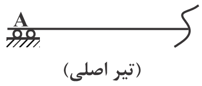
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

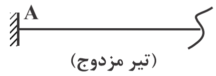
۳) 

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A \neq 0 \Rightarrow M_A \neq 0 \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

۴) 

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

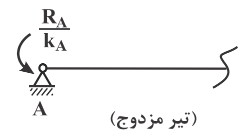


۵) 

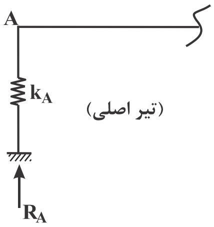
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A \neq 0 \Rightarrow M_A \neq 0 \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

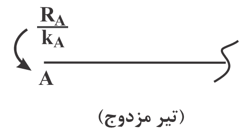
۶) 

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A \neq 0 \Rightarrow M_A \neq 0 \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

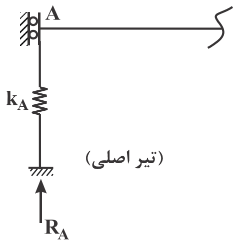
۷) 

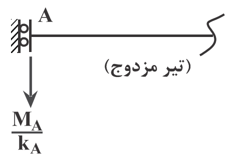
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_A} \Rightarrow M_A = \dfrac{R_A}{k_A} \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



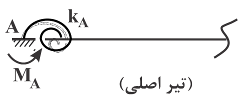
۸) 

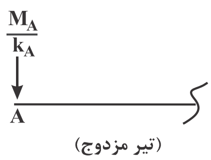
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_A} \Rightarrow M_A = \dfrac{R_A}{k_A} \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



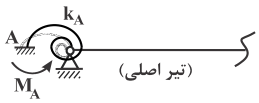
۹) 

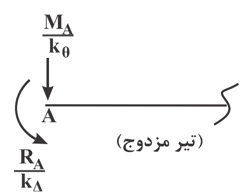
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A \neq 0 \Rightarrow M_A \neq 0 \\ \theta_A = \dfrac{M_A}{k_A} \Rightarrow V_A = \dfrac{M_A}{k_A} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



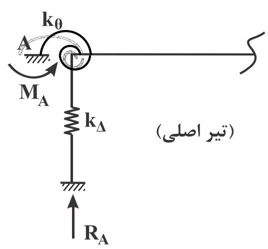
۱۰) 

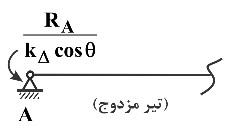
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A = \dfrac{M_A}{k_A} \Rightarrow V_A = \dfrac{M_A}{k_A} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



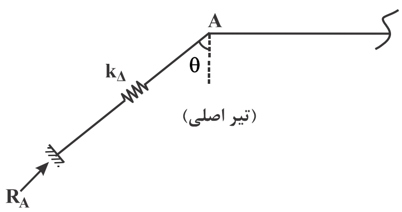
۱۱) 

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} \Rightarrow M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} \\ \theta_A = \dfrac{M_A}{k_\theta} \Rightarrow V_A = \dfrac{M_A}{k_\theta} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



۱۲) 

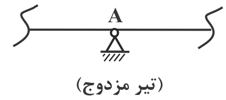
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta \cos\theta} \Rightarrow M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta \cos\theta} \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



رسم تیر مزدوج برای نقاط میانی تیر

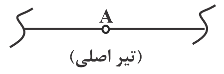
برای رسم تیر مزدوج در نقاط میانی از تیر اصلی، مشابه نقاط ابتدایی و انتهایی که شرایط مرزی هندسی از تیر اصلی را به شرایط مرزی استاتیکی مربوط به تیر مزدوج تغییر می‌دادیم، عمل می‌کنیم، با این تفاوت که باید شرایط مرزی هندسی را در طرفین نقاط میانی در نظر گرفته و سپس به شرایط مرزی استاتیکی طرفین نقطه میانی مورد نظر در تیر مزدوج تغییر دهیم. بنابراین مطابق رسم تیر مزدوج در نقاط ابتدایی و انتهایی تیر، برای نقاط میانی نیز حالت‌های مختلف را به صورت زیر شرح می‌دهیم:

۱)



شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_{L(A)} = y_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow \quad M_{L(A)} = M_{R(A)} \neq 0 \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \end{cases}$$

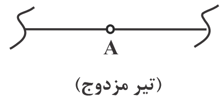


۲)

شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A = 0 & \Rightarrow \quad M_A = 0 \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \end{cases}$$

۳)



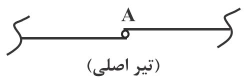
شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A = 0 & \Rightarrow \quad M_A = 0 \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} = V_{R(A)} \end{cases}$$

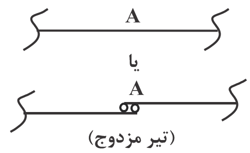
۴)

شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_{L(A)} = y_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow \quad M_{L(A)} = M_{R(A)} \neq 0 \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \end{cases}$$

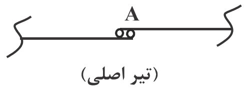


۵)

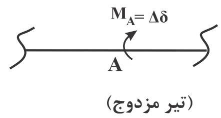


شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_{L(A)} = y_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow \quad M_{L(A)} = M_{R(A)} \neq 0 \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow \quad V_{L(A)} = V_{R(A)} \neq 0 \end{cases}$$

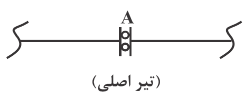


۶)

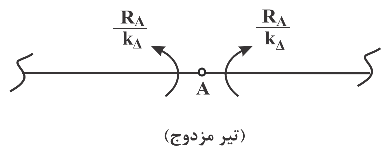


شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_{L(A)} \neq y_{R(A)} & \Rightarrow \quad M_{L(A)} \neq M_{R(A)} \\ |y_{L(A)} - y_{R(A)}| = \Delta\delta & \quad\;\; |M_{L(A)} - M_{R(A)}| = \Delta\delta \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow \quad V_{L(A)} = V_{R(A)} \neq 0 \end{cases}$$

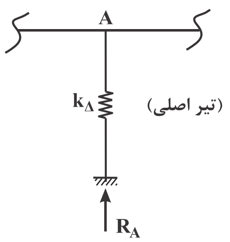


۷)

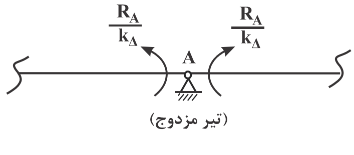


شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} & \Rightarrow \quad M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} = V_{R(A)} \end{cases}$$

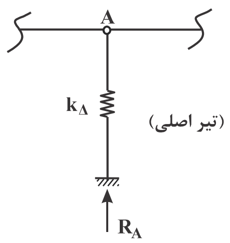


۸)

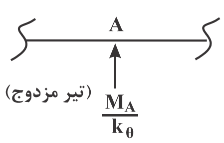


شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} & \Rightarrow \quad M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \end{cases}$$

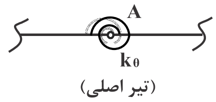


۹)

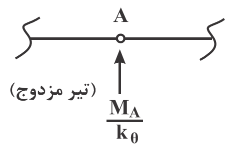


شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A \neq 0 & \Rightarrow \quad M_A \neq 0 \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow \quad V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \\ |\theta_{L(A)} - \theta_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} & \quad\;\; |V_{L(A)} - V_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} \end{cases}$$



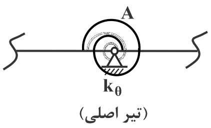
(۱۰)



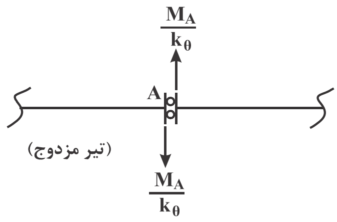
شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A = 0 & \Rightarrow & M_A = 0 \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow & V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \\ |\theta_{L(A)} - \theta_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} & & |V_{L(A)} - V_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی



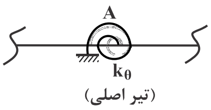
(۱۱)



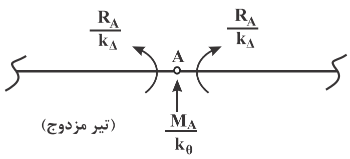
شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A \neq 0 & \Rightarrow & M_A \neq 0 \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} = \dfrac{M_A}{k_\theta} & \Rightarrow & V_{L(A)} = V_{R(A)} = \dfrac{M_A}{k_\theta} \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی



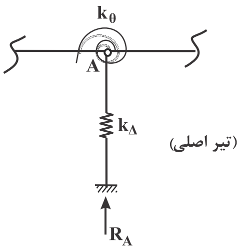
(۱۲)



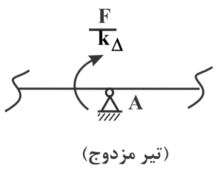
شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} & \Rightarrow & M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta} \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow & M_{L(A)} \neq M_{R(A)} \\ |\theta_{L(A)} - \theta_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} & & |V_{L(A)} - V_{R(A)}| = \dfrac{M_A}{k_\theta} \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی



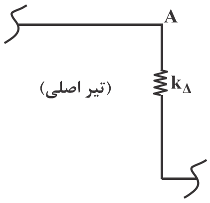
(۱۳)



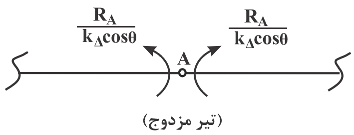
شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_{L(A)} \neq y_{R(A)} & & M_{L(A)} \neq M_{R(A)} \\ |y_{L(A)} - y_{R(A)}| = \dfrac{F_{\text{فنر}}}{k_\Delta} & \Rightarrow & |M_{L(A)} - M_{R(A)}| = \dfrac{F_{\text{فنر}}}{k_\Delta} \\ \theta_{L(A)} \neq \theta_{R(A)} & \Rightarrow & V_{L(A)} \neq V_{R(A)} \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی



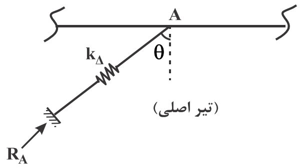
(۱۴)



شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta \cos\theta} & \Rightarrow & M_A = \dfrac{R_A}{k_\Delta \cos\theta} \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} & \Rightarrow & V_{L(A)} = V_{R(A)} \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی

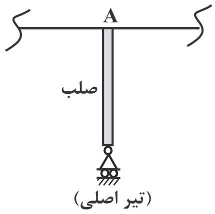


(۱۵)

شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A = 0 & \Rightarrow & M_A = 0 \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} \neq 0 & \Rightarrow & V_{L(A)} = V_{R(A)} \neq 0 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی

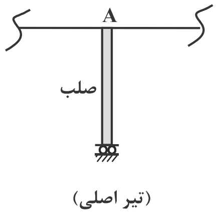


(۱۶)

شرایط مرزی استاتیکی

$$\begin{Bmatrix} y_A = 0 & \Rightarrow & M_A = 0 \\ \theta_{L(A)} = \theta_{R(A)} = 0 & \Rightarrow & V_{L(A)} = V_{R(A)} = 0 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی هندسی

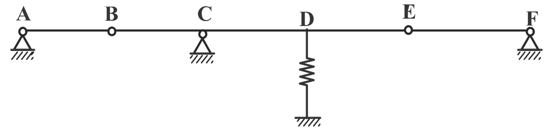


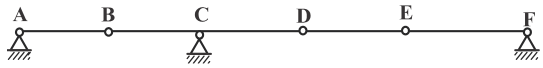
تذکر: داوطلبان عزیز توجه داشته باشید که تنها با یادگیری شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی استاتیکی به راحتی می‌توان تیر اصلی را به تیر مزدوج تغییر داد و در واقع نیاز به حفظ کلیه موارد اشاره شده نمی‌باشد.

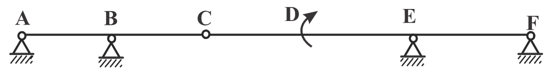
حال به منظور درک بهتر این مطالب مثال‌های بیان شده در ادامه را با هم بررسی می‌نماییم.

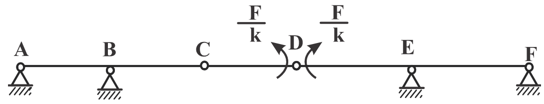
مثال۱: تیر مزدوج شکل مقابل کدام است؟

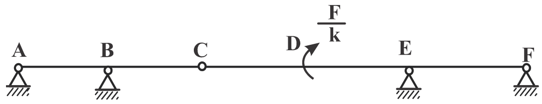
(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)



۱)


۲)


۳)


۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به منظور رسم تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج به صورت زیر تغییر دهیم:

نقطه A:

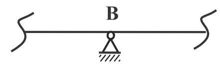
(تیر مزدوج)

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} M_A = 0 \Leftarrow y_A = 0 \\ V_A \neq 0 \Leftarrow \theta_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{cases}$$

(تیر اصلی)

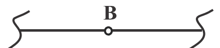
نقطه B:



(تیر مزدوج)

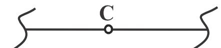
شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_B \neq 0 \Rightarrow M_B \neq 0 \\ \theta_{L(B)} \neq \theta_{R(B)} \Rightarrow V_{L(B)} \neq V_{R(B)} \end{cases}$$



(تیر اصلی)

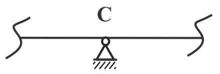
نقطه C:



(تیر مزدوج)

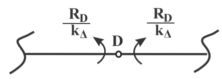
شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_C = 0 \Rightarrow M_C = 0 \\ \theta_{L(C)} = \theta_{R(C)} \Rightarrow V_{L(C)} = V_{R(C)} \end{cases}$$



(تیر اصلی)

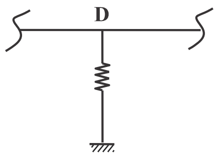
نقطه D:



(تیر مزدوج)

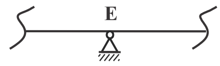
شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_D = \dfrac{R_D}{k_\Delta} \Rightarrow M_D = \dfrac{R_D}{k_\Delta} \\ \theta_{L(D)} = \theta_{R(D)} \Rightarrow V_{L(D)} = V_{R(D)} \end{cases}$$



(تیر اصلی)

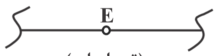
نقطه E:



(تیر مزدوج)

شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

$$\begin{cases} y_E \neq 0 \Rightarrow M_E \neq 0 \\ \theta_{L(E)} \neq \theta_{R(E)} \Rightarrow V_{L(E)} \neq V_{R(E)} \end{cases}$$



(تیر اصلی)

نقطه F:

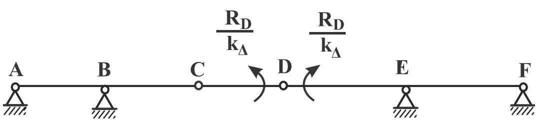
(تیر مزدوج)

شرایط مرزی استاتیکی — شرایط مرزی هندسی

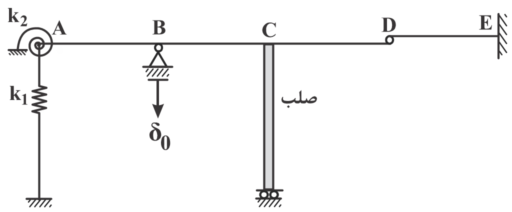
$$\begin{cases} y_F = 0 \Rightarrow M_F = 0 \\ \theta_F \neq 0 \Rightarrow V_F \neq 0 \end{cases}$$

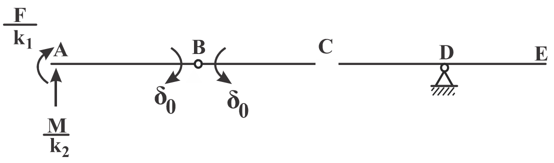
(تیر اصلی)

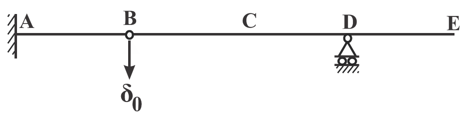
بنابراین تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌شود:

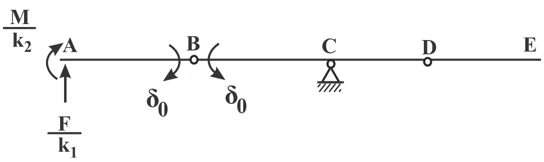


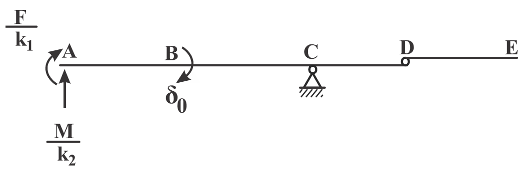
مثال۲: تیر مزدوج تیر شکل مقابل کدام است؟ (تکیه‌گاه B به مقدار δ_0 نشست کرده است.) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۹)



۱)


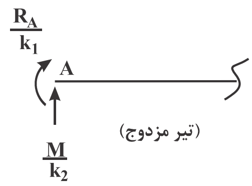
۲)


۳)


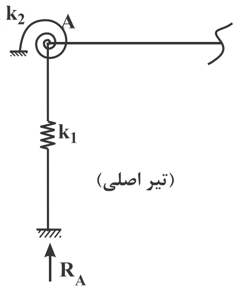
۴)


پاسخ: گزینه «۱» به منظور رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر با تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیر اصلی به تیر مـزدوج تغییـر دهیم. پس داریم:

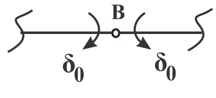
نقطه A:



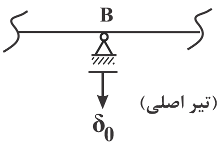
شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_A = \dfrac{R_A}{k_1} & \Rightarrow \quad M_A = \dfrac{R_A}{k_1} \\ \theta_A = \dfrac{M}{k_2} & \Rightarrow \quad V_A = \dfrac{M}{k_2} \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی



نقطه B:

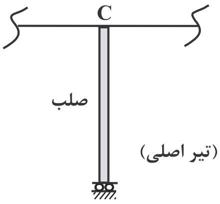


شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_B = \delta_0 & \Rightarrow \quad M_B = \delta_0 \\ \theta_{L(B)} = \theta_{R(B)} & \Rightarrow \quad V_{L(B)} = V_{R(B)} \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی

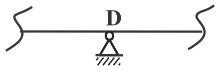


نقطه C:

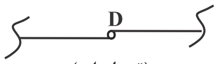
شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_C = 0 & \Rightarrow \quad M_C = 0 \\ \theta_{L(C)} = \theta_{R(C)} = 0 & \Rightarrow \quad V_{L(C)} = V_{R(C)} = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی



نقطه D:



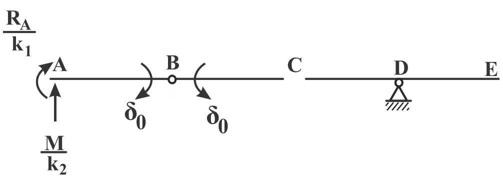
شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_{L(D)} = y_{R(D)} \neq 0 & \Rightarrow \quad M_{L(D)} = M_{R(D)} \neq 0 \\ \theta_{L(D)} \neq \theta_{R(D)} & \Rightarrow \quad V_{L(D)} \neq V_{R(D)} \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی



نقطه E:

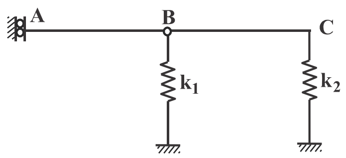
شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_E = 0 & \Rightarrow \quad M_E = 0 \\ \theta_E = 0 & \Rightarrow \quad V_E = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی

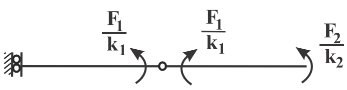
بنابراین تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌شود:

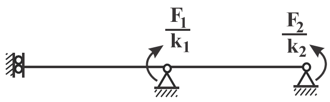


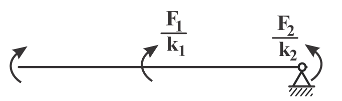
دقت داشته باشید به دلیل اینکه در نقطه B از تیر اصلی نشست تکیه‌گاهی δ_0 داریم، بنـابراین در تیر مزدوج متناظر نقطه B، لنگرهای مختلف‌الجهت به مقدار δ_0 اعمال شده است.

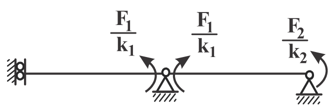
مثال ۳: تیر مزدوج سازه نشان داده شده کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۷)



۱)


۲)


۳)


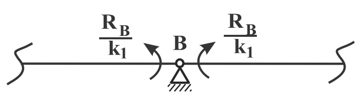
۴)


پاسخ: گزینه «۴» به منظور رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر با تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:

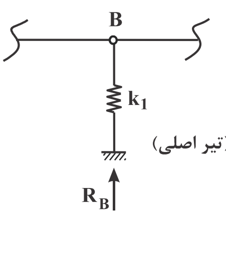
نقطه A:

شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_A \neq 0 & \Rightarrow \quad M_A \neq 0 \\ \theta_A = 0 & \Rightarrow \quad V_A = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی

نقطه B:

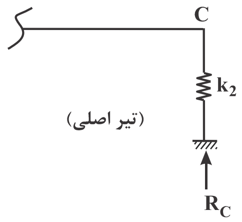


شرایط مرزی هندسی $\begin{cases} y_B = \dfrac{R_B}{k_1} & \Rightarrow \quad M_B = \dfrac{R_B}{k_1} \\ \theta_{L(B)} \neq \theta_{R(B)} & \Rightarrow \quad V_{L(B)} \neq V_{R(B)} \end{cases}$ شرایط مرزی استاتیکی

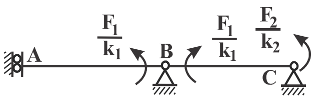


نقطه C:

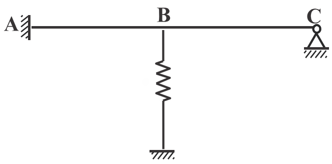
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} M_C = \frac{R_C}{k_۲} \\ V_C \neq ۰ \end{array}\right. \Leftarrow \left.\begin{array}{l} y_C = \frac{R_C}{k_۲} \\ \theta_C \neq ۰ \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

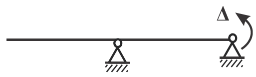


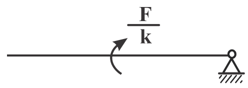
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌گردد:

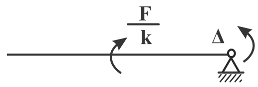


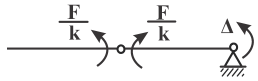
مثال۴: تیر مزدوج تیر داده شده ABC کدام است؟ سختی فنر B برابر k و نشست تکیه‌گاه C به سمت پایین Δ و عکس‌العمل فنر F می‌باشد.
(مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۱)



۱)


۲)


۳)


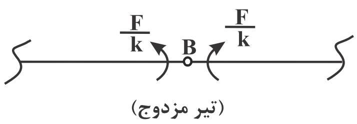
۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:

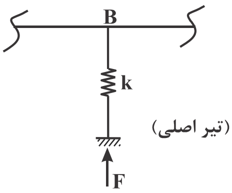
نقطه A:

شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} M_A = ۰ \\ V_A = ۰ \end{array}\right. \Leftarrow \left.\begin{array}{l} y_A = ۰ \\ \theta_A = ۰ \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

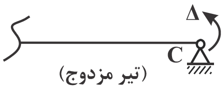
نقطه B:



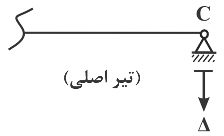
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} M_B = \frac{F}{k} \\ V_{L(B)} = V_{R(B)} \end{array}\right. \Leftarrow \left.\begin{array}{l} y_B = \frac{F}{k} \\ \theta_{L(B)} = \theta_{R(B)} \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی



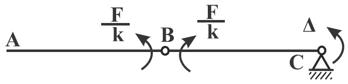
نقطه C:



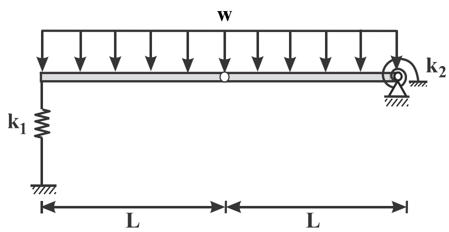
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} M_C = \Delta \\ V_C \neq ۰ \end{array}\right. \Leftarrow \left.\begin{array}{l} y_C = \Delta \\ \theta_C \neq ۰ \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

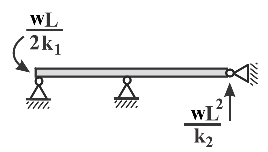


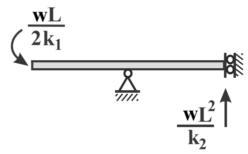
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌گردد:

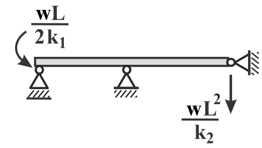


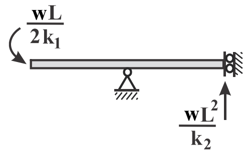
مثال۵: تیر مزدوج تیر شکل زیر کدام است؟
(مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۶)



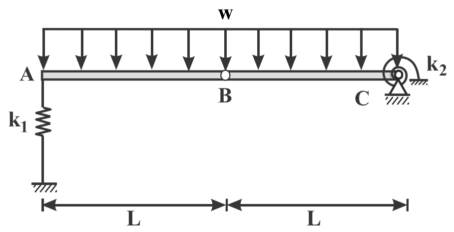
۱)


۲)


۳)


۴)


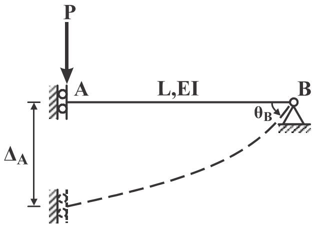
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در این سوال برخلاف سؤالات قبلی بارگذاری گسترده بـر روی تیـر قـرار دارد و با دقت در گزینه‌ها مشاهده می‌شود که مقادیر نیرو و لنگـر دارای مقـداری برحسـب w و L هستند. بنابراین ابتدا باید مقادیر لنگر فنر دورانی و نیروی فنر انتقالی در تیر اصلی را تعیـین کنیم و پس از آن به سراغ رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده برویم، پس داریم:



درسنامه (۳): روابط حفظی مربوط به تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار

هرگاه در یک سازه معین قسمتی به صورت تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار وجود داشته باشد که تحت اثر هر یک و یا ترکیبی از سه بارگذاری اصلی زیر قرار گیرد، آنگاه جهت محاسبه خیز در سر لغزنده گیردار و محاسبه شیب در سر مفصل می‌توان از روابط حفظی مربوط به تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار استفاده نمود. بنابراین این روابط برای سه بارگذاری اصلی وارد بر تیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

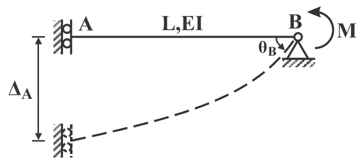
الف) تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری بار متمرکز P در سر لغزنده گیردار



خیز در سر لغزنده گیردار: (خیز به سمت پایین با علامت مثبت) $\Delta_A = \dfrac{PL^3}{3EI}$

شیب در سر مفصل: (شیب در جهت ساعتگرد با علامت مثبت) $\theta_B = \dfrac{PL^2}{2EI}$

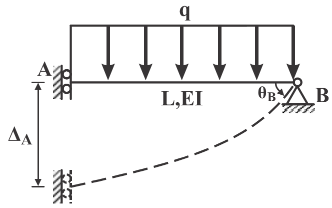
ب) تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری لنگر متمرکز M در سر مفصل



خیز در سر لغزنده گیردار: (خیز به سمت پایین با علامت مثبت) $\Delta_A = \dfrac{ML^2}{2EI}$

شیب در سر مفصل: (دوران در جهت ساعتگرد با علامت مثبت) $\theta_B = \dfrac{ML}{EI}$

ج) تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری بار گسترده q در طول تیر



خیز در سر لغزنده گیردار: (خیز به سمت پایین با علامت مثبت) $\Delta_A = \dfrac{5qL^4}{24EI}$

شیب در سر مفصل: (دوران در جهت ساعتگرد با علامت مثبت) $\theta_B = \dfrac{qL^3}{3EI}$

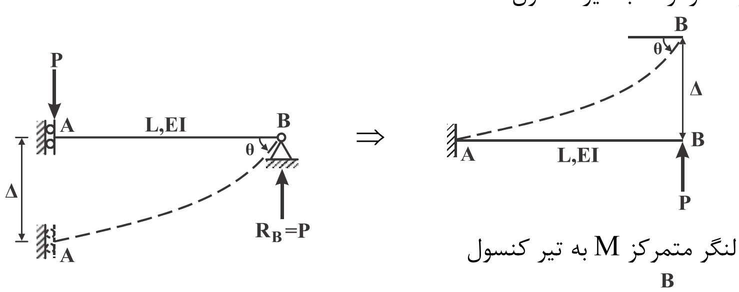
همان‌طور که برای تیرهای کنسول و تیرهای دو سر مفصل اشاره شد، برای تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار هم می‌توان مقادیر خیز و شیب را تحت اثر بارگذاری‌های ترکیبی از سه بارگذاری اصلی تعیین نمود فقط کافی است مقادیر خیز و شیب نقطه مورد نظر را در هر بارگذاری تعیین نموده و در انتها با یکدیگر جمع نماییم.

نکته۴: با کمی دقت در روابط مربوط به بارگذاری‌های نیروی متمرکز P و لنگر متمرکز M، می‌توان دریافت که این روابط مشابه همین بارگذاری‌ها برای تیرهای کنسولی است. پس متوجه می‌شویم که می‌توان روابط مربوط به تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار را با استفاده از روش تغییر مکان نسبی نقاط یک سازه نسبت به نقطه‌ی دیگر از آن سازه به‌دست آورد.

در این روش ابتدا تغییر شکل تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار را در نظر می‌گیریم. سپس یک تیر کنسول را به این صورت که سر گیردار آن در نقطه A (سر لغزنده گیردار) و سر آزاد آن در نقطه B (سر مفصل) قرار می‌دهیم. در ادامه تمام بارگذاری‌های وارد بر تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار را به تیر کنسول جدید اعمال می‌کنیم. دقت داشته باشید که شیب نقطه B (سر مفصل) و خیز نقطه A (سر لغزنده گیردار) به نقطه B در تیر کنسول انتقال می‌یابد.

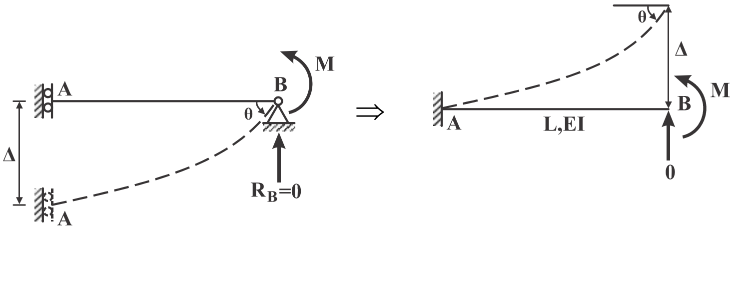
حال به منظور درک بهتر این روش شکل‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

۱ــ تبدیل تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری بار متمرکز P به تیر کنسول



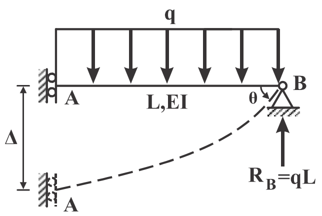
$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\ ,\ \theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

۲ــ تبدیل تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری با لنگر متمرکز M به تیر کنسول

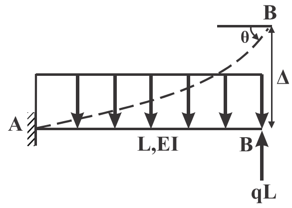


$$\Delta = \frac{ML^2}{2EI}\ ,\ \theta = \frac{ML}{EI}$$

۳ـ تبدیل تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار تحت بارگذاری با بار گسترده q به تیر کنسول



$\Rightarrow$

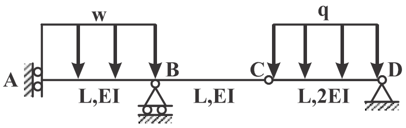


$$\Delta=\frac{(qL)\times L^{3}}{3EI}-\frac{qL^{4}}{8EI}\Rightarrow \Delta=\frac{5qL^{4}}{24EI}$$

$$\theta=\frac{(qL)\times L^{2}}{2EI}-\frac{qL^{3}}{6EI}\Rightarrow \theta=\frac{qL^{3}}{3EI}$$

حال به منظور درک بهتر مطالب ارائه شده به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

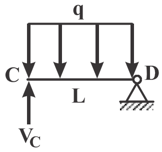
مثال۲۶: نسبت $\frac{w}{q}$ چقدر باشد تا تغییر مکان تکیه‌گاه A صفر گردد؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{6}{5}$

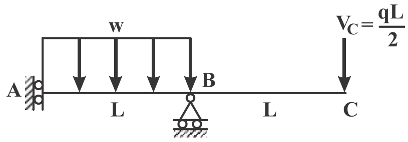
۳) $\frac{5}{24}$ ۴) $\frac{24}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه تغییر مکان نقطه A با توجه به اینکه این تیر تحت اثر بارگذاری‌های w و q قرار گرفته با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار برای تیر AB، مقدار تغییر مکان نقطه A را به‌دست آورده و برابر صفر قرار دهیم. برای این منظور ابتدا قسمت CD را به صورت زیر جدا کرده و داریم:

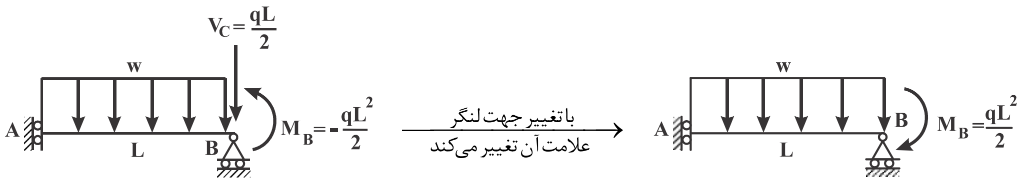


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_D=0\Rightarrow (V_C\times L)-(qL\times\frac{L}{2})=0\Rightarrow V_C\times L=\frac{qL^{2}}{2}\Rightarrow V_C=\frac{qL}{2}$$

حال برای تیر ABC خواهیم داشت:



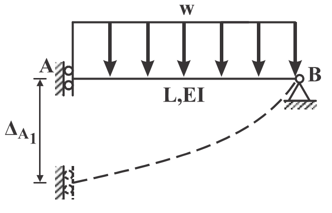
در ادامه با انتقال نیروی V_C به نقطه B می‌توان تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار AB را به صورت زیر در نظر گرفت:



بارگذاری دوم + بارگذاری اول =

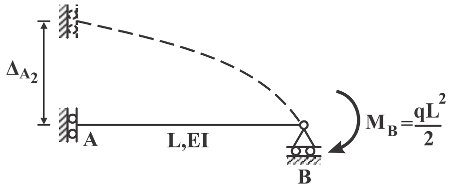
مشاهده می‌شود تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار AB تحت اثر دو بارگذاری M_B و w قرار گرفته است، پس با محاسبه تغییر مکان نقطه A برای هر یک از بارگذاری‌ها و جمع آنها در انتها، مقدار تغییر مکان نهایی برای A را برابر صفر قرار می‌دهیم:

بارگذاری اول:



$$\downarrow\Delta_{A_1}=\frac{5wL^{4}}{24EI}$$

بارگذاری دوم:

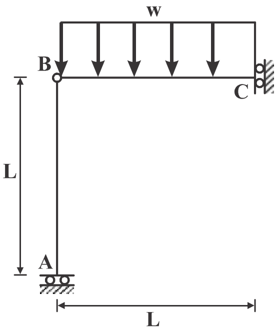


$$\uparrow\Delta_{A_2}=\frac{-M_BL^{2}}{2EI}\Rightarrow\uparrow\Delta_{A_2}=\frac{-(\frac{qL^{2}}{2})\times L^{2}}{2EI}\Rightarrow\uparrow\Delta_{A_2}=\frac{-qL^{4}}{4EI}$$

در نهایت داریم:

$$\Delta_A=\downarrow\Delta_{A_1}+\uparrow\Delta_{A_2}=\frac{5wL^{4}}{24EI}+(\frac{-qL^{4}}{4EI})\xrightarrow{\Delta_A=0}\frac{L^{4}}{4EI}(\frac{5w}{6}-q)=0\Rightarrow\frac{5w}{6}=q\Rightarrow\frac{w}{q}=\frac{6}{5}$$

مثال۲۷: در قاب شکل مقابل صلبیت خمشی اعضا EI است. دوران سمت راست مفصل B (مربوط به تیر BC) کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)



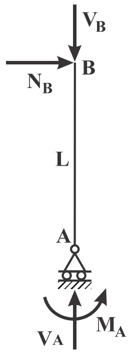
۱) $\frac{wL^{۳}}{۳EI}$

۲) $\frac{wL^{۳}}{۲EI}$

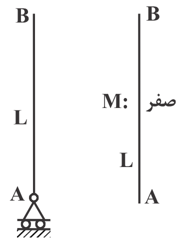
۳) $\frac{wL^{۳}}{۴EI}$

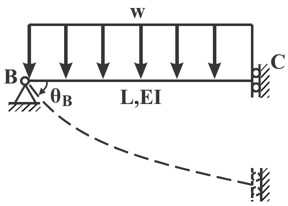
۴) $\frac{wL^{۳}}{۶EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا عضو AB را در نظر بگیرید. مشاهده می‌شود که لنگر خمشی در این عضو برابر صفر است، بنابراین می‌توان گفت که تیر BC به صورت تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار می‌باشد.



$$\begin{cases} \overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_B = ۰ \Rightarrow M_A = ۰ \\ \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \Rightarrow N_B = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

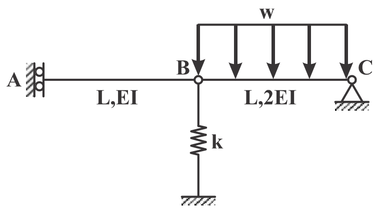




بنابراین با استفاده از روابط حفظی تیرهای یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار می‌توان دوران سمت راست نقطه B را تعیین نمود:

$$\theta_B = \frac{wL^{۳}}{۳EI}$$

مثال۲۸: مقدار تغییر مکان نقطه A تحت بارگذاری نشان داده شده در سازه شکل زیر چقدر است؟ $(k^{-۱} = \frac{L^{۳}}{EI})$ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۱)



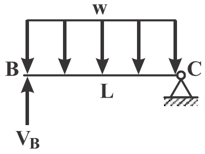
۱) $\frac{۲wL^{۴}}{EI}$

۲) $\frac{۳wL^{۴}}{۲EI}$

۳) $\frac{wL^{۴}}{EI}$

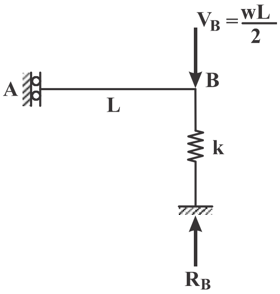
۴) $\frac{wL^{۴}}{۲EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که فنر انتقالی در نقطه B قرار دارد. بنابراین می‌توان قسمت AB را به صورت تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار در نظر گرفت. البته توجه دارید که تیر AB فاقد بارگذاری است و می‌توان دریافت که تغییر مکان نقطه A برابر با تغییر مکان نقطه B یعنی در اثر تغییر مکان فنر انتقالی است.



پس در واقع برای محاسبه تغییر مکان نقطه A کافی است تغییر مکان فنر انتقالی را تعیین کنیم. برای این منظور ابتدا قسمت BC را جدا کرده و داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow (V_B \times L) - (wL \times \frac{L}{۲}) = ۰ \Rightarrow V_B = \frac{wL}{۲}$$



بنابراین برای قسمت AB به صورت زیر داریم:

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_B - V_B = ۰ \Rightarrow R_B = V_B = \frac{wL}{۲}$$

$$\Delta_{\text{فنر}} = \Delta_B = \frac{R_B}{k_{\text{فنر}}} \Rightarrow \Delta_{\text{فنر}} = \Delta_B = \frac{\frac{wL}{۲}}{\frac{EI}{L^{۳}}} = \frac{wL^{۴}}{۲EI}$$

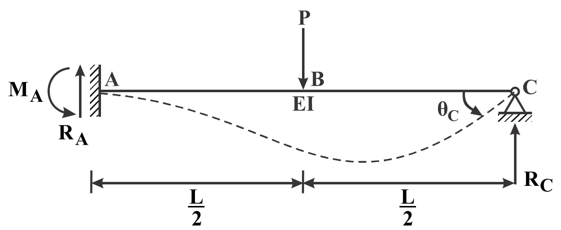
درسنامه (۲): استفاده از روابط حفظی در تحلیل سازه‌های نامعین

در این قسمت در مورد استفاده از روابط حفظی در تحلیل سازه نامعین بحث خواهد شد. بنابراین سه نوع تیر تحت اثر بارگذاری‌های مختلف را در نظر گرفته و مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و تغییر شکل‌های آن‌ها را به صورت روابطی حفظی معرفی می‌کنیم. توجه داشته باشید حفظ این روابط شما را در حل سریع مسائل مربوط به سازه‌های نامعین بسیار کمک می‌کند و توصیه می‌شود که حتماً حفظ کنید.

ابتدا روابط حفظی مربوط به تیرهایی که دارای یک درجه نامعینی هستند ارائه می‌گردد:

الف) تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار

۱ـ تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار تحت بارگذاری بار متمرکز P در وسط تیر:

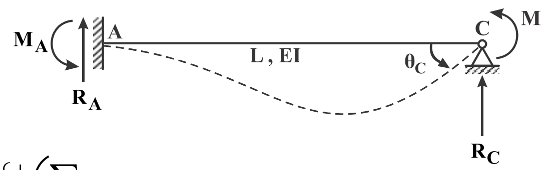


$$R_C = \frac{5P}{16}\ ,\ \theta_C = \frac{PL^2}{32EI}$$

در این تیر فقط این دو مورد را حفظ کنید و مقادیر R_A و M_A با استفاده از معادلات زیر به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \\ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \end{cases}$$

۲ـ تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار تحت بارگذاری لنگر متمرکز M در سر مفصل:

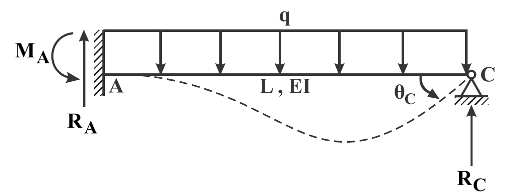


$$R_C = \frac{3M}{2L}\ ,\ \theta_C = \frac{ML}{4EI}$$

هم‌چنین برای محاسبه مقادیر R_A و M_A کافی است از معادلات مقابل استفاده کنید:

$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \end{cases}$$

۳ـ تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار تحت بارگذاری بار گسترده:



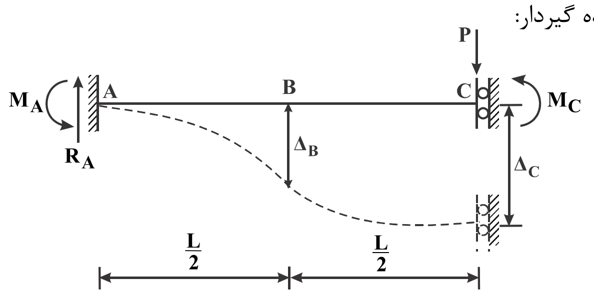
$$R_C = \frac{3qL}{8}\ ,\ \theta_C = \frac{qL^3}{48EI}$$

پس برای محاسبه مقادیر R_A و M_A کافی است از معادلات زیر استفاده نمایید:

$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \end{cases}$$

ب) تیر یک سر لغزنده گیردار و یک سر گیردار

۱ـ تیر یک سر لغزنده گیردار و یک سر گیردار تحت بارگذاری بار متمرکز P در سر لغزنده گیردار:

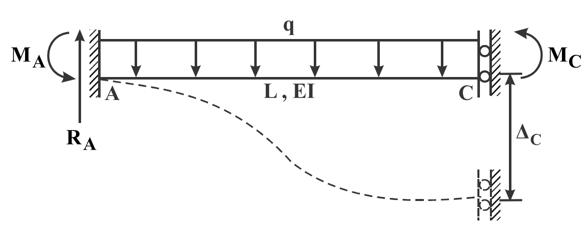


$$M_C = \frac{PL}{2}\ ,\ \Delta_C = \frac{PL^3}{12EI}\ ,\ \Delta_B = \frac{\Delta_C}{2}$$

در این تیر فقط سه مورد اشاره‌شده را حفظ کنید و برای محاسبه مقادیر R_A و M_A می‌توان از معادله‌های زیر استفاده نمود:

$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \end{cases}$$

۲ـ تیر یک سر لغزنده گیردار و یک سر گیردار تحت بارگذاری گسترده q:



$$M_C = \frac{qL^2}{6}\ ,\ \Delta_C = \frac{qL^4}{24EI}$$

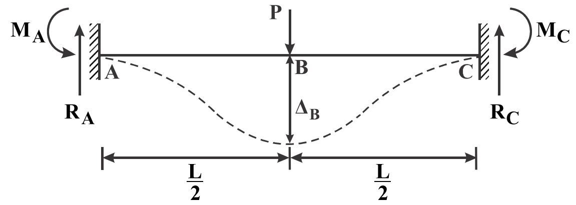
بنابراین مقادیر M_A و R_A را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \end{cases}$$

حال برای تیرهایی که دارای دو درجه نامعینی هستند، به صورت زیر روابط حفظی معرفی می‌شوند:

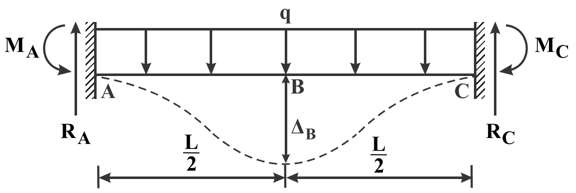
تیرهای دو سر گیردار

۱ــ تیر دو سر گیردار تحت بارگذاری با بار متمرکز P در وسط تیر:



$$M_A = M_B = M_C = \frac{PL}{۸}\ ,\ R_A = R_C = \frac{P}{۲}\ ,\ \Delta_B = \frac{PL^۳}{۱۹۲EI}$$

۲ــ تیر دو سر گیردار تحت بارگذاری بار گسترده q:

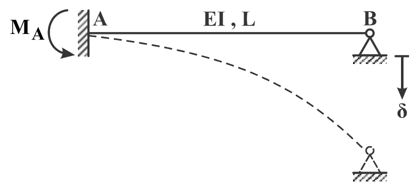


$$M_A = M_C = \frac{qL^۲}{۱۲}\ ,\ M_B = \frac{qL^۲}{۲۴}$$

$$R_A = R_C = \frac{qL}{۲}\ ,\ \Delta_B = \frac{qL^۴}{۳۸۴EI}$$

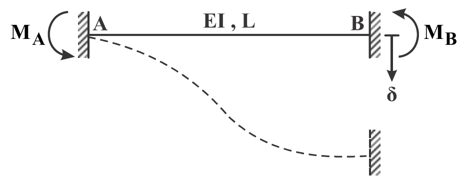
نکته۵: اگر تیرهای زیر تحت اثر نشست تکیه‌گاهی δ قرار گیرند، آنگاه مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌ها برابر هستند با:

الف) تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار



$$M_A = \frac{۳EI\delta}{L^۲}$$

ب) تیر دو سر گیردار



$$M_A = M_B = \frac{۶EI\delta}{L^۲}$$

نکته۶: اگر در یک سازه عضو صلبی داشته باشیم که دارای شرایط زیر باشد:

۱) مستقیم باشد ۲) توسط عکس‌العمل‌های مناسب به زمین متصل شده باشد ۳) اجازه هیچ‌گونه تغییر مکان افقی و قائم نداشته باشد.

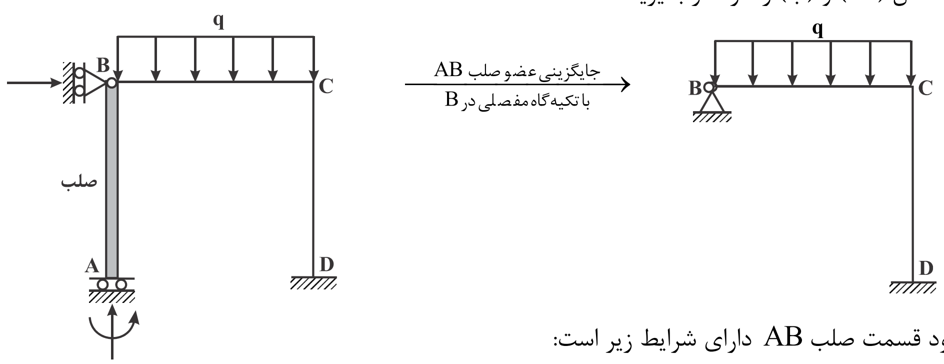
آنگاه می‌توان این عضو صلب را مانند زمین در نظر گرفت و آن را از سازه حذف نمود و به‌جای آن یک تکیه‌گاه گیردار یا تکیه‌گاه مفصلی قرار داد. یعنی:

- اگر عضو صلب امکان دوران نداشته باشد $\Leftarrow$ با تکیه‌گاه گیردار جایگزین می‌شود.

- اگر عضو صلب امکان دوران داشته باشد $\Leftarrow$ با تکیه‌گاه مفصلی جایگزین می‌شود.

برای درک بهتر این نکته دو شکل (الف) و (ب) را در نظر بگیرید:

شکل (الف):

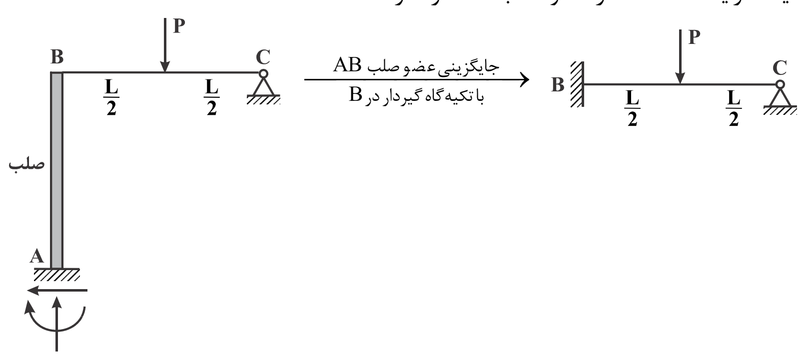


همان‌طور که مشاهده می‌شود قسمت صلب AB دارای شرایط زیر است:

۱) مستقیم است. ۲) با سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل است. ۳) امکان تغییر مکان قائم و افقی ندارد.

پس با توجه به اینکه نقطه B در راستای BC امکان دوران دارد، بنابراین عضو AB را با یک تکیه‌گاه مفصلی در نقطه B جایگزین می‌کنیم. دقت داشته باشید که تکیه‌گاه مفصلی B دقیقاً شرایط نقطه B در عضو صلب AB را دارد.

شکل (ب):

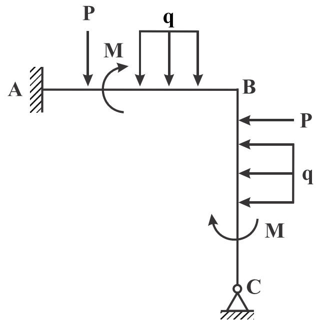


با کمی دقت مشاهده می‌شود که عضو صلب AB دارای شرایط زیر است:

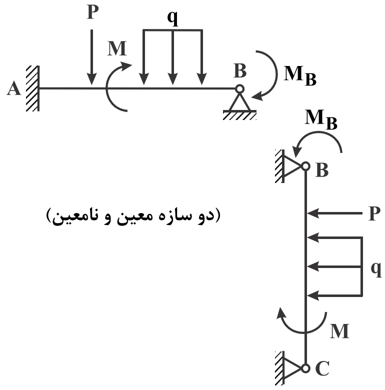
۱) مستقیم است. ۲) با سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل است. ۳) امکان تغییر مکان افقی و قائم ندارد.

بنابراین با توجه به اینکه نقطه B امکان دوران ندارد، پس عضو صلب AB را با یک تکیه‌گاه گیردار در نقطه B جایگزین می‌نماییم. دقت داشته باشید که تکیه‌گاه گیردار B دقیقاً شرایط نقطه B در عضو صلب AB را دارد.

نکته۷: اگر یک سازه نامعین از دو قسمت تشکیل شده باشد که محل اتصال این دو قسمت، امکان تغییر مکان افقی و قائم نداشته باشد (تغییر شکل محوری نداشته باشد)، آنگاه می‌توان دو قسمت را از محل اتصال جدا نمود و در محل اتصال برای هر دو قسمت یک تکیه‌گاه مفصلی قرار دارد و سپس یک لنگر خمشی برای هر قسمت تکیه‌گاه مفصلی در جهت مخالف یکدیگر اعمال کنیم. در نهایت معادله سازگاری آن به صورت برابری شیب‌ها در طرفین نقطه اتصال تعریف می‌شود. برای درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:



$\Rightarrow$



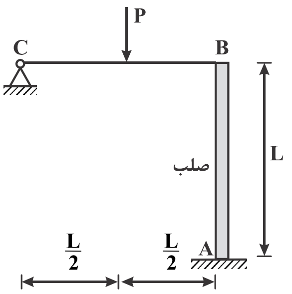
$+ \quad (\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)})$

(معادله سازگاری)

همان‌طور که مشاهده می‌شود محل اتصال دو قسمت AB و BC به علت اینکه تغییر شکل محوری ندارد (تغییر مکان قائم و افقی ندارد)، می‌تواند توسط تکیه‌گاه مفصلی جایگزین شده و برای طرفین B در دو قسمت AB و BC لنگرهای در خلاف جهت هم اعمال نمود و معادله سازگاری را برای نقطه B به صورت برابری شیب طرفین این نقطه در دو قسمت AB و BC تعریف نمود.

بنابراین به منظور درک بهتر مطالب ارائه شده در این درسنامه مثال‌های بعدی را با هم بررسی می‌نماییم:

مثال۲۱: در قابی مطابق شکل زیر نیروی محوری عضو صلب AB چه ضریبی از P می‌باشد؟ (مهندسی عمران ـ دکتری ۹۶)



۱) $\frac{۱۱}{۱۶}$

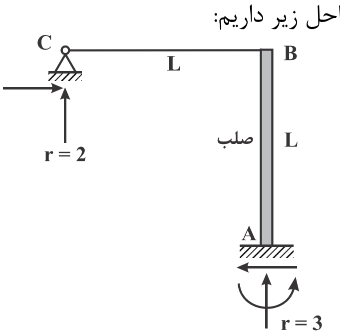
۲) $\frac{۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» با دقت در شکل صورت سؤال این سازه نامعین است. پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

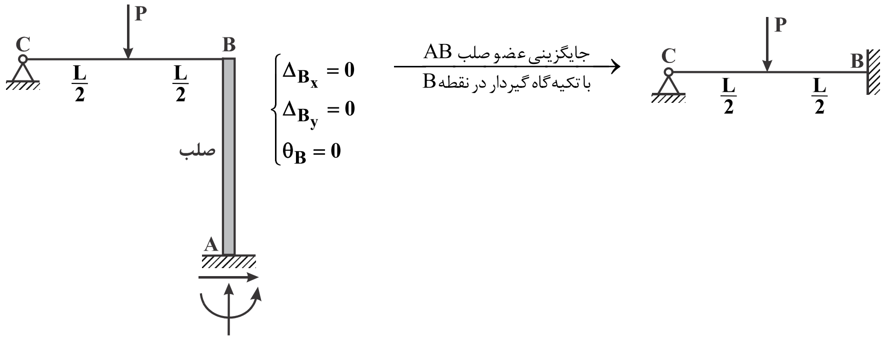


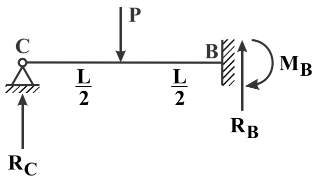
$$\begin{cases} c = ۰ \\ r = ۳ + ۲ = ۵ \\ k = ۰ \end{cases} \Rightarrow DI = (r + ۳k) - (c + ۳) \Rightarrow DI = (۵ + ۰) - (۰ + ۳) = ۲$$

بنابراین این سازه دو درجه نامعین است.

مرحله دوم: با توجه به اینکه این سازه بیش از یک درجه نامعین است، می‌توان این سازه را به یک سازه نامعینی تبدیل کرد که بتوان با استفاده از روابط حفظی در تیرهای معین تحلیل نمود. با کمی دقت در سازه متوجه می‌شویم که عضو صلب AB توسط تکیه‌گاه گیردار A به زمین متصل شده و دارای سه عکس‌العمل مناسب با زمین است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که نقطه B هیچ‌گونه تغییر مکان افقی و قائم نداشته و در ضمن امکان دوران هم ندارد.

بنابراین با توجه به شرایط نقطه B، می‌توان به‌جای عضو صلب AB، یک تکیه‌گاه گیردار در نقطه B مطابق شکل زیر در نظر گرفت:





مرحله سوم: مشاهده می‌شود که تیر یک درجه نامعین BC به صورت تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار است که تحت بارگذاری بار متمرکز P در وسط تیر قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار به صورت زیر داریم:

روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار : $R_C = \frac{۵P}{۱۶}$

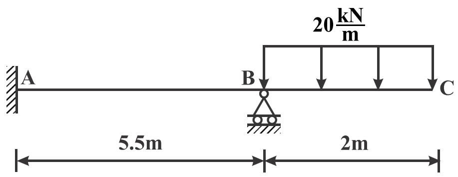
در نهایت مقدار نیروی عکس‌العمل R_B برابر است با:

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_B + R_C - P = ۰ \Rightarrow R_B + \frac{۵P}{۱۶} - P = ۰ \Rightarrow R_B = \frac{۱۱P}{۱۶}$$

بنابراین نیروی عضو صلب AB که برابر با عکس‌العمل R_B می‌باشد به صورت مقابل است:

$$F_{AB} = R_B = \frac{۱۱P}{۱۶}$$

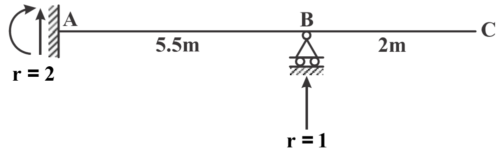
مثال۲۲: در شکل زیر عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B برحسب کیلو نیوتن چقدر است؟ (تیر منشوری است و EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ دکتری ۹۵)



۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۵۱

پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشخص است که تیر نامعین است. پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

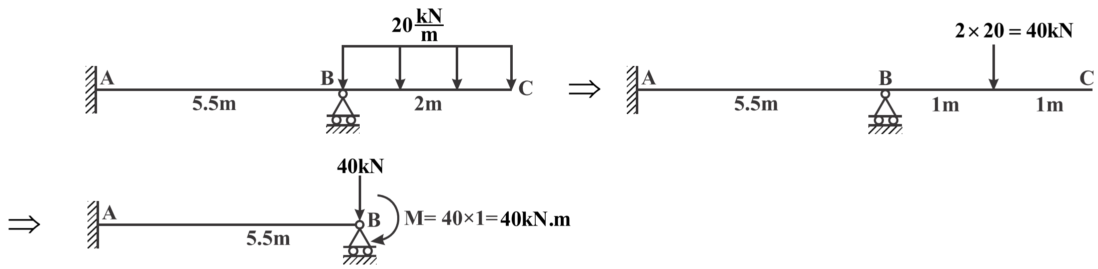
مرحله اول: درجه نامعینی تیر برابر است با:



$$\begin{cases} c = ۰ \\ r = ۲ + ۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + ۲) \Rightarrow DI = ۳ - (۰ + ۲) \Rightarrow DI = ۱$$

بنابراین این تیر یک درجه نامعین است.

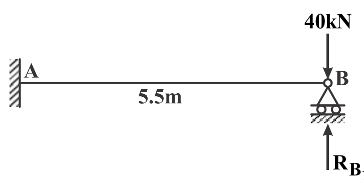
مرحله دوم: مشاهده می‌شود که تیر یک درجه نامعین را می‌توان به صورت تیر یک سر مفصل و یک سر گیردار که تحت اثر نیروی متمرکز و لنگر خمشی در نقطه B قرار دارد در نظر گرفت. پس با انتقال نیروی گسترده ۲۰ kN.m به نقطه B داریم:



مرحله سوم: بنابراین تیر یک سر گیردار و یک سر مفصل AB از تیرهای نامعینی است که دارای روابط حفظی می‌باشد. پس با استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین داریم:

بارگذاری دوم + بارگذاری اول =

بارگذاری اول:



$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{B_۱} - ۴۰ = ۰ \Rightarrow \uparrow R_{B_۱} = ۴۰ kN$$

دقت کنید که نیروی ۴۰ kN دقیقاً بر روی تکیه‌گاه غلتکی B اعمال شده و در این حالت تمام سهم این نیرو متعلق به عکس‌العمل تکیه‌گاه B یعنی $R_{B_۱}$ است و عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A در این حالت سهمی از نیروی ۴۰ kN ندارد.

درسنامه (۳): استفاده از روش کار مجازی در تحلیل سازه‌های نامعین

در تحلیل سازه‌های نامعین به روش نیرو در صورتی که نتوانیم معادله سازگاری را به راحتی و با استفاده از روابط حفظی ارائه‌شده حل نماییم، در این حالت می‌توان از روش کار مجازی استفاده کرد. برای این منظور در این درسنامه روش کار مجازی در تحلیل سازه‌های نامعین نظیر تیر، قاب و خرپا برای هرکدام به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش کار مجازی در تحلیل تیرهای نامعین

در تحلیل تیرهای نامعین به روش کار مجازی دو حالت ایجاد می‌شود:

۱ـ بارگذاری وارد بر تیر مشخص است.

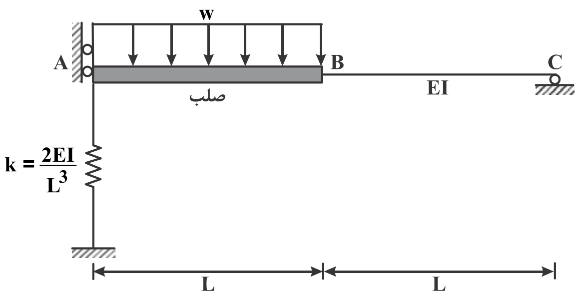
۲ـ بارگذاری وارد بر تیر مشخص نیست ولی نمودار لنگر خمشی در کل تیر و یا قسمتی از تیر مشخص است.

بنابراین در تحلیل تیرهای نامعین به روش کار مجازی، ابتدا معادله سازگاری تیر را تعریف می‌کنیم، سپس برای حل معادله سازگاری از روش کار مجازی استفاده می‌نماییم.

تذکر: دقت داشته باشید در تیرهای نامعینی که تحت اثر عامل غیرمستقیم نظیر تغییر دما قرار گیرند، می‌توان از روش کار مجازی در تحلیل تیرها استفاده نمود.

حال به‌منظور درک بهتر این مطالب مثال‌های زیر را باهم بررسی می‌کنیم:

مثال۴۹: در تیر شکل مقابل نیروی ایجاد شده در فنر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۸)



۱) $0/2wL$

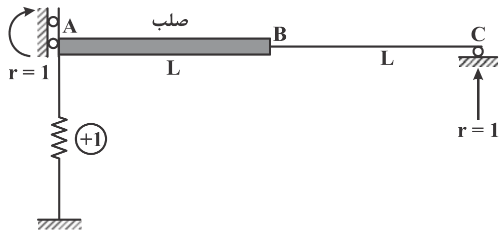
۲) $0/3wL$

۳) $0/4wL$

۴) $0/5wL$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل صورت سوال، تیرنامعین است، پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی تیر را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

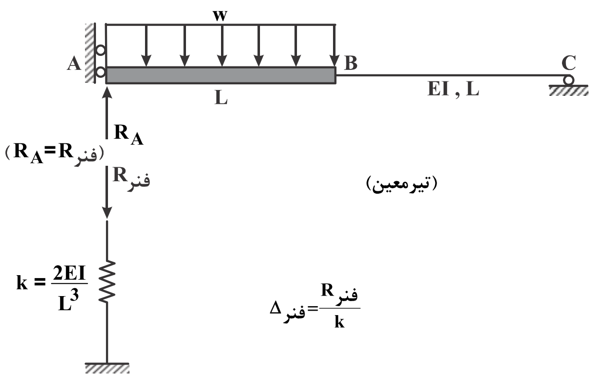


$$\begin{cases} r = 1 + 1 = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = [r - (c+2)] + 1$$

$$\Rightarrow DI = [2 - (0+2)] + 1 = 1$$

بنابراین تیر یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل تیر نامعین به یک تیر معین می‌توان فنر انتقالی را از سازه جدا نمود و معادله سازگاری آن را به‌صورت مقابل تعریف کرد:



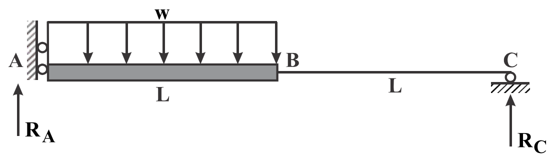
$+ \quad (\Delta_A = \Delta_{فنر})$

(معادله سازگاری)

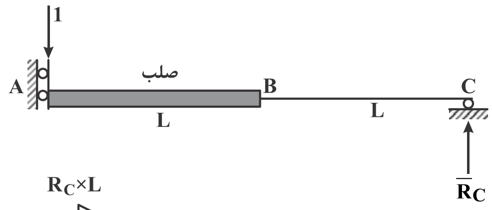
مرحله سوم: همان‌طورکه مشاهده می‌شود در حل معادله سازگاری $\Delta_{فنر} = \Delta_A$، برای بدست آوردن Δ_A در تیر با توجه به اینکه بارگذاری وارد بر تیر مشخص است می‌توان از روش‌کار مجازی به‌صورت زیر استفاده نمود:

۱) رسم نمودار M:

برای رسم نمودار لنگر خمشی تیر تحت اثر بارگذاری اصلی به‌صورت زیر داریم:



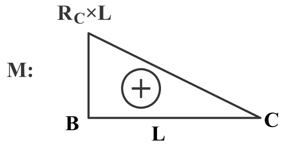
$$^{+}\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - (w \times L) + R_C = 0 \Rightarrow R_C = wL - R_A$$



۲) رسم نمودار $\bar{M}$:

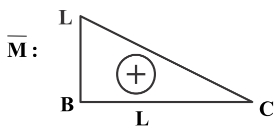
با توجه به اینکه می‌خواهیم تغییر مکان A را بدست آوریم، پس با اعمال بار واحد قائم در نقطه A به‌صورت زیر نمودار لنگر خمشی تحت بارگذاری واحد را رسم می‌نماییم:

$$^{+}\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow \bar{R}_C - ۱ = ۰ \Rightarrow \bar{R}_C = ۱$$



۳) محاسبه مقدار $\int M\bar{M}dx$:

با استفاده از روش ترسیمی مور به‌صورت زیر برای قسمت BC داریم:



$$\int_B^C M\bar{M}dx = \frac{(R_C \times L) \times L \times L}{۳} \Rightarrow \int_B^C M\bar{M}dx = \frac{R_C \times L^۳}{۳}$$

۴) محاسبه مقدار Δ_A:

در نهایت با استفاده از رابطه کار مجازی به‌صورت زیر مقدار Δ_A بدست می‌آید:

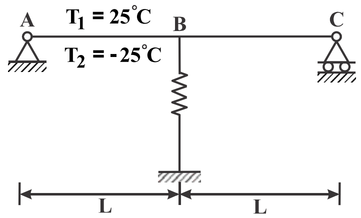
$$\Delta_A = \int \frac{M\bar{M}dx}{EI} \Rightarrow \Delta_A = \int_A^B \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI} \Rightarrow \Delta_A = ۰ + (\frac{R_C \times L^۳}{۳} \times \frac{۱}{EI}) \Rightarrow \Delta_A = \frac{R_C L^۳}{۳EI}$$

بنابراین با حل معادله سازگاری، نیروی فنر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Delta_A = \Delta_{فنر} \Rightarrow \frac{R_C L^۳}{۳EI} = \frac{R_{فنر}}{k} \xrightarrow{R_C = wL - R_A} \frac{(wL - R_A)L^۳}{۳EI} = \frac{R_{فنر}}{\frac{۲EI}{L^۳}} \xrightarrow{R_A = R_{فنر}} \frac{(wL - R_{فنر})L^۳}{۳EI} = \frac{R_{فنر}L^۳}{۲EI}$$

$$\Rightarrow \frac{wL - R_{فنر}}{۳} = \frac{R_{فنر}}{۲} \Rightarrow \frac{۵R_{فنر}}{۶} = \frac{wL}{۳} \Rightarrow R_{فنر} = \frac{۲wL}{۵}$$

مثال۵۰: درجه حرارت تار پایین و بالای قسمت AB از تیر ABC به ترتیب $-۲۵^\circ C$ و $۲۵^\circ C$ تغییر می‌کند. اگر ارتفاع مقطع تیر h و تغییر درجه حرارت خطی فرض شود، نیروی فنر B با سختی $k_B = \frac{۳EI}{L^۳}$ کدام است؟ (EI در سراسر تیر ثابت است) (مهندسی عمران ـ دکتری ۹۱)



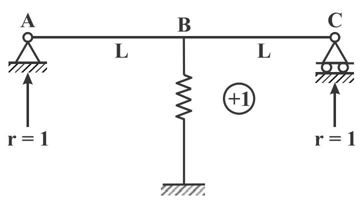
۱) $\frac{۲۵\alpha EI}{hL}$

۲) $\frac{۵۰\alpha EI}{hL}$

۳) $\frac{۷۵\alpha EI}{hL}$

۴) $\frac{۱۰۰\alpha EI}{hL}$

☑ **پاسخ:** گزینه«۱» باتوجه به شکل صورت سوال، تیر نامعین است. از طرفی تحت اثر عامل غیرمستقیم تغییر دما در تار بالا و پایین قرار گرفته است.



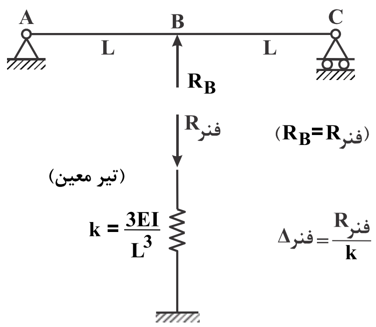
بنابراین با استفاده از روش نیرو به‌صورت زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی تیر را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} r = ۱ + ۱ = ۲ \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow DI = [r - (c + ۲)] + ۱ \Rightarrow DI = [۲ - (۰ + ۲)] + ۱ = ۱$$

بنابراین تیر یک درجه نامعین است.

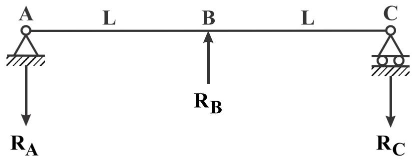
مرحله دوم: برای تبدیل تیر نامعین به یک تیر معین می‌توان فنر انتقالی را از تیر جدا کرده و معادله سازگاری آن را به‌صورت زیر تعریف نماییم:



$$+ \quad (\Delta_B = \Delta_{فنر})$$

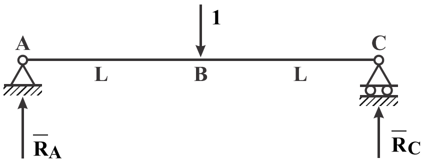
(معادله سازگاری)

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}$ به علت اینکه تیر تحت اثر عامل غیرمستقیم تغییر دما قرار گرفته و بارگذاری وارد بر آن مشخص است، بنابراین برای محاسبه Δ_B می‌توان از روش کار مجازی به‌صورت زیر استفاده کرد:



۱) رسم نمودار M: برای رسم نمودار لنگر خمشی تحت بارگذاری اصلی به صورت زیر داریم:

$$R_A = R_C = \frac{R_B}{۲} \quad \text{: به علت تقارن}$$

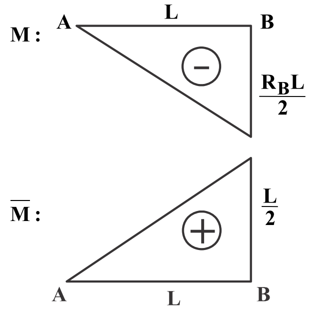


۲) رسم نمودار $\bar{M}$: به علت اینکه می‌خواهیم مقدار تغییر مکان نقطه B را بدست آوریم، بار واحد قائم را در نقطه B وارد می‌کنیم و به‌صورت زیر نمودار لنگر خمشی تیر تحت اثر بارگذاری واحد را رسم می‌کنیم:

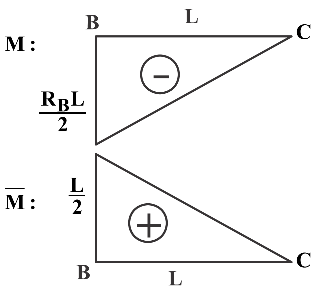
$$\bar{R}_A = \bar{R}_C = \frac{۱}{۲} \quad \text{: به علت‌تقارن}$$

۳) محاسبه مقدار $\int M\bar{M}dx$: با استفاده از روش ترسیمی مور مقادیر $\int M\bar{M}dx$ برای قسمت‌های AB و BC به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

قسمت AB:



قسمت BC:



$$\int_A^B M\bar{M}dx = \frac{(-\frac{R_BL}{۲}) \times \frac{L}{۲} \times L}{۳} = \frac{-R_BL^۳}{۱۲}$$

$$\int_B^C M\bar{M}dx = \frac{(-\frac{R_BL}{۲}) \times \frac{L}{۲} \times L}{۳} = \frac{-R_BL^۳}{۱۲}$$

۴) محاسبه مقدار Δ_A: در نهایت با استفاده از رابطه کار مجازی به‌صورت زیر داریم:

$$\Delta_A = \int \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int \frac{\alpha\bar{M}(T_b - T_t)}{h}dx \Rightarrow \Delta_A = \int_A^B \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_A^B \frac{\alpha\bar{M}(T_b - T_t)}{h}dx$$

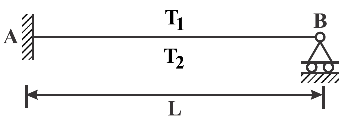
$$\Delta_A = (\frac{-R_BL^۳}{۱۲} \times \frac{۱}{EI}) + (\frac{-R_BL^۳}{۱۲} \times \frac{۱}{EI}) + \frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\int_A^B \bar{M}dx \Rightarrow \Delta_A = \frac{-R_BL^۳}{۶EI} + \frac{\alpha(-۲۵-۲۵)}{h}(\frac{L^۲}{۴}) = \frac{-R_BL^۳}{۶EI} - \frac{۵۰\alpha L^۲}{۴h}$$

بنابراین با حل معادله سازگاری، مقدار نیروی فنر برابر است با:

$$\Delta_A = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{-R_BL^۳}{۶EI} - \frac{۵۰\alpha L^۲}{۴h} = \frac{R_{\text{فنر}}}{k} \xrightarrow{R_B = R_{\text{فنر}}}$$

$$\frac{-R_{\text{فنر}}L^۳}{۶EI} - \frac{۵۰\alpha L^۲}{۴h} = \frac{R_{\text{فنر}}}{\frac{۳EI}{L^۳}} \Rightarrow \frac{-R_{\text{فنر}}L^۳}{۶EI} - \frac{R_{\text{فنر}}L^۳}{۳EI} = \frac{۵۰\alpha L^۲}{۴h} \Rightarrow \frac{-R_{\text{فنر}}L^۳}{۲EI} = \frac{۵۰\alpha L^۲}{۴h} \Rightarrow R_{\text{فنر}} = -\frac{۲۵\alpha EI}{hL}$$

مثال۵۱: تیر AB در تکیه‌گاه A گیردار می‌باشد و در تکیه‌گاه B بر روی غلتک قرار دارد. درجه حرارت در سطح فوقانی آن $T_۱$ و در سطح تحتانی آن $T_۲$ می‌باشد، واکنش R_B تیر برابر است با: (α ضریب انبساط حرارتی و h عمق تیر می‌باشد و $T_۲ > T_۱$ است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۲)



۱) $\frac{\alpha(T_۲ - T_۱)}{۲hL}$

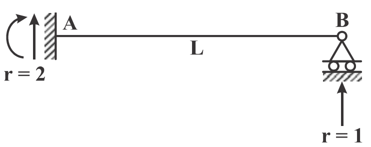
۲) $\frac{\alpha EI(T_۲ - T_۱)}{۲hL}$

۳) $\frac{۳\alpha T_۲^۲}{T_۲ - T_۱}$

۴) $\frac{۳\alpha EI(T_۲ - T_۱)}{۲hL}$

☑ **پاسخ:** گزینه«۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود تیر نامعین است. از طرفی سطح فوقانی و تحتانی تیر تحت دماهای مختلف قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

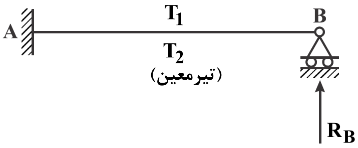
مرحله اول: درجه نامعینی تیر را بدست می‌آوریم:



$$\begin{cases} c = ۰ \\ r = ۲ + ۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + ۲) \Rightarrow DI = ۳ - (۰ + ۲) = ۱$$

بنابراین تیر یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل تیر نامعین به تیر معین کافی است تکیه‌گاه B را از سازه حذف و معادله سازگاری آن را به‌صورت زیر تعریف نماییم:

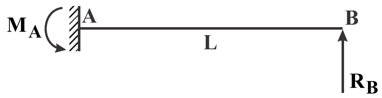


$$+\quad(\Delta_B=۰)$$

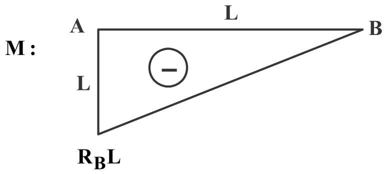
(معادله سازگاری)

مرحله سوم: با توجه به اینکه سطح فوقانی و تحتانی تیر تحت اثر دماهای مختلف قرار گرفته‌اند و بارگذاری وارد بر تیر مشخص است پس با استفاده از روش کار مجازی می‌توان مقدار Δ_B را به‌صورت زیر بدست آورد:

۱) رسم نمودار M: برای رسم نمودار لنگر خمشی تیر تحت اثر بارگذاری اصلی به‌صورت زیر داریم:

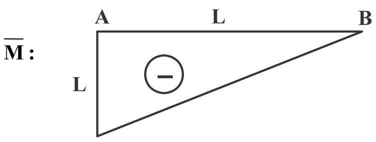


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=۰\ \Rightarrow M_A+(R_B\times L)=۰\Rightarrow M_A=-R_BL$$



۲) رسم نمودار $\bar{M}$:

به علت اینکه تغییر مکان قائم نقطه B مدنظر است، پس با اعمال بار واحد قائم در نقطه B به‌صورت زیر نمودار لنگر خمشی تیر تحت اثر بارگذاری واحد رسم می‌شود:

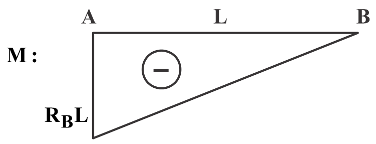


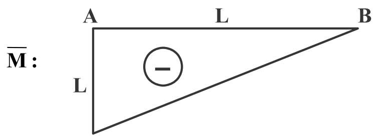
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=۰\ \Rightarrow \bar{M}_A+(۱\times L)=۰\Rightarrow \bar{M}_A=-L$$

$$\Rightarrow\int_A^B\bar{M}dx=S_{AB}\ \Rightarrow\int_A^B\bar{M}dx=\frac{-L\times L}{۲}=\frac{-L^۲}{۲}$$

۳) محاسبه مقدار $\int M\bar{M}dx$:

با استفاده از روش ترسیمی مور به‌صورت زیر داریم:





$$\int_A^B M\bar{M}dx=\frac{(-R_BL)(-L)\times L}{۳}\ \Rightarrow\int_A^B M\bar{M}dx=\frac{R_BL^۳}{۳}$$

۴) محاسبه مقدار Δ_A:

با استفاده از رابطه کار مجازی مقدار Δ_A برابر است با:

$$\Delta_A=\int\frac{M\bar{M}dx}{EI}+\int\frac{\alpha\bar{M}(T_b-T_t)}{h}dx\Rightarrow\Delta_A=\int_A^B\frac{M\bar{M}dx}{EI}+\int_A^B\frac{\alpha\bar{M}(T_b-T_t)}{h}dx$$

$$\Rightarrow\Delta_A=(\frac{R_BL^۳}{۳}\times\frac{۱}{EI})+\frac{\alpha(T_b-T_t)}{h}\int_A^B\bar{M}dx\ \Rightarrow\Delta_A=(\frac{R_BL^۳}{۳EI})+\frac{\alpha(T_۲-T_۱)}{h}(\frac{-L^۲}{۲})\ \Rightarrow\Delta_A=\frac{R_BL^۳}{۳EI}-\frac{\alpha(T_۲-T_۱)L^۲}{۲h}$$

در نهایت با حل معادله سازگاری مقدار عکس‌العمل R_B بدست می‌آید:

$$\Delta_A=۰\Rightarrow\frac{R_BL^۳}{۳EI}-\frac{\alpha(T_۲-T_۱)L^۲}{۲h}=۰\ \Rightarrow\frac{R_BL^۳}{۳EI}=\frac{\alpha(T_۲-T_۱)L^۲}{۲h}\Rightarrow R_B=\frac{۳\alpha(T_۲-T_۱)EI}{۲hL}$$

روش کار مجازی در تحلیل قاب‌های نامعین

برای تحلیل قاب‌های نامعین به روش کار مجازی، مشابه تیرهای نامعین دو حالت ایجاد می‌شود:

۱ـ بارگذاری وارد بر قاب مشخص باشد.

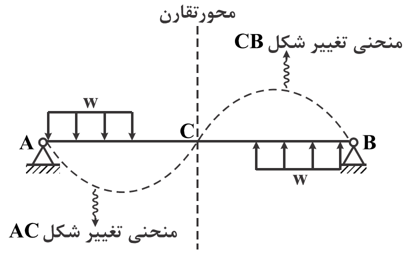
۲ـ بارگذاری وارد بر قاب مشخص نباشد ولی نمودار لنگر خمشی در کل قاب و یا قسمتی از آن مشخص باشد.

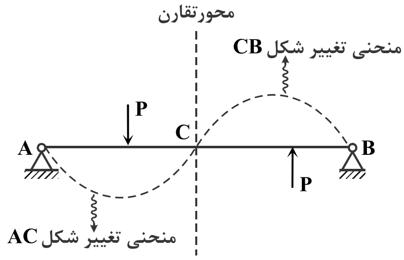
بنابراین در تحلیل قاب‌های نامعین با روش کار مجازی، ابتدا معادله سازگاری قاب را تعریف می‌کنیم و سپس برای حل معادله سازگاری از روش کار مجازی استفاده می‌شود.

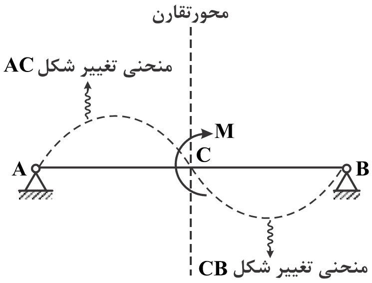
درسنامه (۲): بررسی خواص تقارن در سازه‌های متقارن با بارگذاری پادمتقارن

اگر بارگذاری وارد بر سازه متقارن به نحوی باشد که تحت اثر این بارگذاری، منحنی تغییرشکل سازه نسبت به محور تقارن، پادمتقارن (معکوس) باشد آنگاه می‌گوییم بارگذاری پادمتقارن است. به عنوان نمونه شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:

منحنی تغییر شکل سازه در قسمت‌های AC و CB نسبت به محور تقارن، پادمتقارن (معکوس) است.







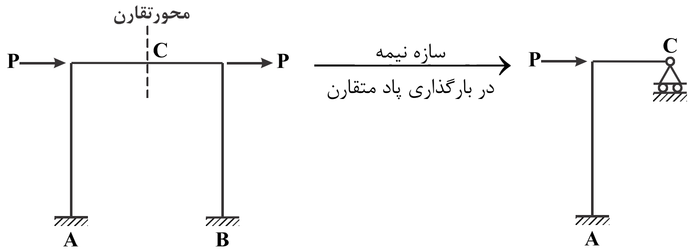
نکته۱۲: در سازه‌های متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن، در محل برخورد محور متقارن و سازه (مثلاً نقطه C) شرایطی ایجاد می‌شود که به صورت زیر ارائه می‌گردد:

۱) مقدار نیروی محوری در محل محور تقارن برابر صفر است: $N_C = 0$

۲) مقدار لنگر خمشی در محل محور تقارن برابر صفر است: $M_C = 0$

۳) مقدار تغییر مکان قائم در محل محور تقارن برابر صفر است: $\Delta y_C = 0$

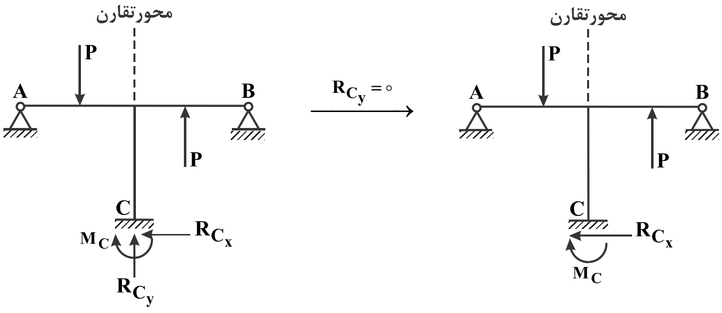
بنابراین با توجه به شرایط ارائه شده برای نقطه C، می‌توان نیمه سازه متقارن را حذف نمود و به جای آن در نقطه C یک تکیه‌گاه غلتکی در جهت محور تقارن جایگزین نماییم زیرا شرایط ارائه شده دقیقاً همان شرایط موجود در تکیه‌گاه غلتکی است. به عنوان نمونه سازه زیر را در نظر بگیرید:



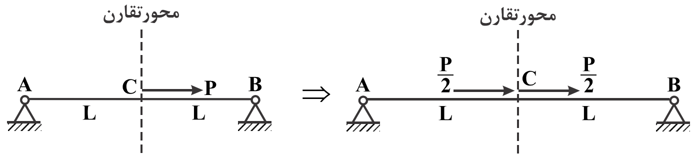
یعنی می‌توان جهت حل این سازه، سازه نیمه آن را در نظر گرفت و سؤال را براساس آن سازه نیمه مورد بررسی و حل قرار داد.

نکته۱۳: در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در سازه باید به نحوی باشد که حالت پادمتقارن در بارگذاری وارد به سازه به طور کامل ایجاد گردد و اگر عکس‌العملی بخواهد این پادمتقارن بودن را برهم بزند باید مقدار این عکس‌العمل برابر صفر گردد تا حالت پادمتقارن در بارگذاری برقرار باشد. به عبارت دیگر می‌توان گفت در سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن اگر تکیه‌گاهی روی محور تقارن قرار گرفته باشد و عکس‌العمل آن تکیه‌گاه در جهت محور تقارن اعمال شده باشد، آنگاه مقدارش برابر صفر است.

حال به منظور درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:

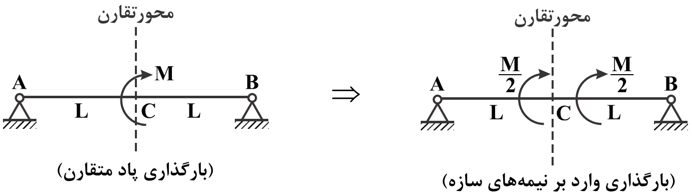


نکته۱۴: اگر سازه متقارن تحت اثر بار متمرکز افقی P و یا لنگر متمرکز M بر روی محور تقارن قرار گرفته باشد، آنگاه می‌توان بارگذاری وارد برسازه را برای نیمه سمت چپ و راست آن به صورت مقابل نمایش داد:



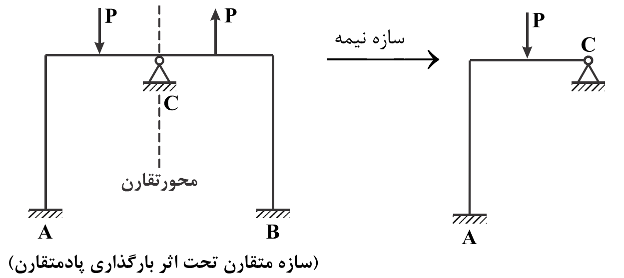
(بارگذاری پاد متقارن) (بارگذاری وارد به نیمه‌های سازه)

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر دو طرف محور تقارن به فاصله خیلی جزئی، بار افقی $\frac{P}{۲}$ اعمال می‌شود.



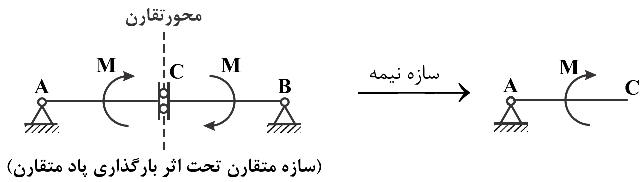
همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر دو طرف محور تقارن به فاصله خیلی جزئی، لنگر خمشی $\frac{M}{۲}$ اعمال می‌شود.

نکته۱۵: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن (معکوس)، در محل محور تقارن یک تکیه‌گاه مفصلی به طور پیوسته قرار داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و تکیه‌گاه مفصلی، برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه مفصلی در نظر می‌گیریم. برای درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید:



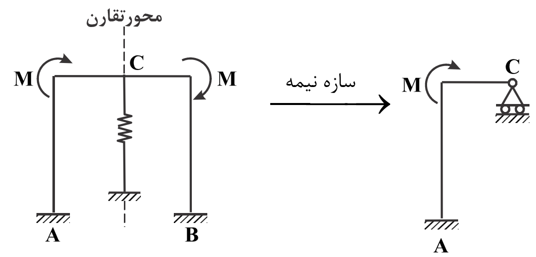
(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

نکته۱۶: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن (معکوس)، در محل محور تقارن مفصل برشی وجود داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و مفصل برشی، برای سازه نیمه هیچ تکیه‌گاهی قرار نداده و آن نقطه به صورت آزاد رسم می‌گردد. جهت درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پاد متقارن)

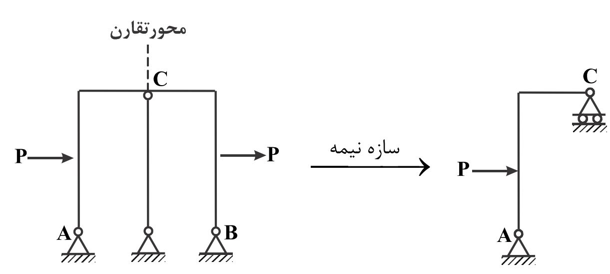
نکته۱۷: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن، در محل محور تقارن و روی آن یک فنر انتقالی قرار داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و فنر انتقالی، برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای محور تقارن قرار می‌دهیم. به منظور درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

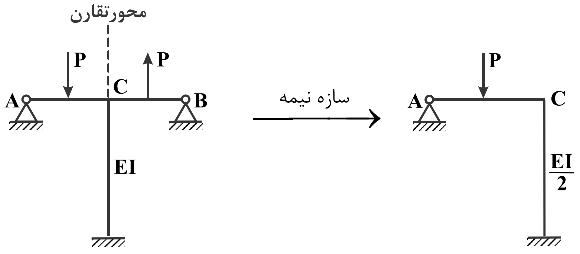
توجه داشته باشید در این حالت به علت اینکه نیروی فنر در راستای محور تقارن اعمال می‌شود و در واقع حالت پادمتقارن بودن بارگذاری را برهم می‌زند، بنابراین مقدار نیروی فنر نیز برابر صفر است.

نکته۱۸: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن (معکوس)، در محل محور تقارن، یک عضو دو سر مفصل وجود داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و عضو دو سر مفصل، برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای محور تقارن قرار داده و به علت اینکه حالت بارگذاری پادمتقارن حفظ گردد، مقدار نیرو در این عضو دو سر مفصل برابر با صفر خواهد بود. برای درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

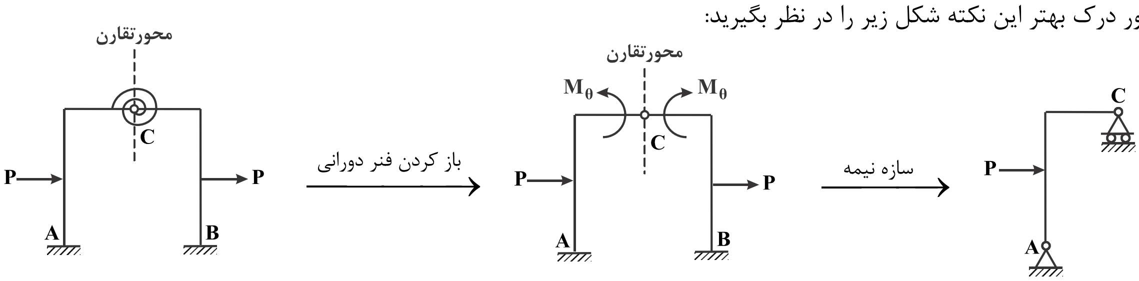
نکته۱۹: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن (معکوس)، در محل محور تقارن و به موازات آن یک عضو خمشی با صلبیت EI قرار داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و عضو خمشی، برای سازه نیمه هیچ تکیه‌گاهی قرار نگرفته و فقط کافی است صلبیت خمشی عضو نصف شود ($\frac{EI}{۲}$). به منظور درک بهتر این نکته شکل مقابل را در نظر بگیرید:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

نکته۲۰: اگر در یک سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن در محل محور تقارن، یک مفصل خمشی و یک فنر دورانی وجود داشته باشد، آنگاه در محل محور تقارن و فنر دورانی، برای سازه نیمه، فنر دورانی را حذف کرده و فقط یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای محور تقارن قرار می‌دهیم. در این حالت مقدار لنگر در فنر دورانی صفر خواهد بود زیرا در فنر دورانی می‌توان آن را به صورت دو لنگر دورانی مختلف‌الجهت نشان داد و به دلیل اینکه حالت بارگذاری پادمتقارن را بر هم می‌زنند، مقدار آن صفر در نظر گرفته می‌شود.

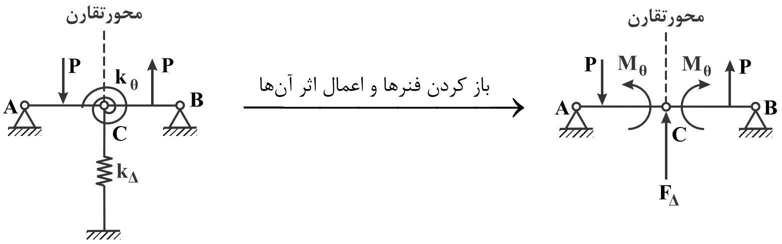
حال به منظور درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید:



همان‌طور که مشاهده می‌شود لنگرهای فنر دورانی که مختلف‌الجهت هستند پادمتقارن بودن بارگذاری را برهم می‌زنند، بنابراین مقدار آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم: $M_\theta = ۰$

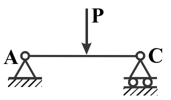
نکته۲۱: به طور کلی اگر در یک سازه متقارن برروی محور تقارن و به موازات آن یک فنر انتقالی و یا دورانی وجود داشته باشد، ابتدا فنر را از سازه جداکرده و اثر آن (یعنی اگر فنر انتقالی است یک نیرو و اگر فنر دورانی است دو لنگر مختلف‌الجهت) به محور برخورد با محور تقارن اعمال می‌کنیم. سپس باتوجه به شرایط بارگذاری که ممکن است متقارن و یا پادمتقارن باشد، به این نحو عمل می‌کنیم که وجود نیروی فنر انتقالی و یا لنگرهای فنر دورانی نباید شرایط بارگذاری را برهم بزنند و در صورتی که هرکدام شرایط مربوط به بارگذاری (متقارن یا پادمتقارن) را برهم بزند باید مقدار آن را برابر صفر در نظر گرفت.

به منظور درک بهتر این نکته شکل زیر را در نظر بگیرید. این سازه متقارن و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرار دارد:



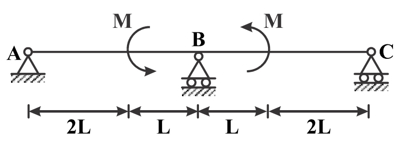
باتوجه به اینکه بارگذاری پادمتقارن است، بنابراین لنگر فنر دورانی و نیروی فنر انتقالی را برابر صفر در نظر می‌گیریم زیرا آنها حالت بارگذاری پادمتقارن را برهم می‌زنند: $M_\theta = ۰$ و $F_\Delta = ۰$

پس سازه نیمه آن به‌صورت مقابل ارائه می‌گردد:



حال به منظور درک بهتر مطالب ارائه شده در این درسنامه مثال‌های زیر را با هم مورد بررسی قرار می‌دهیم:

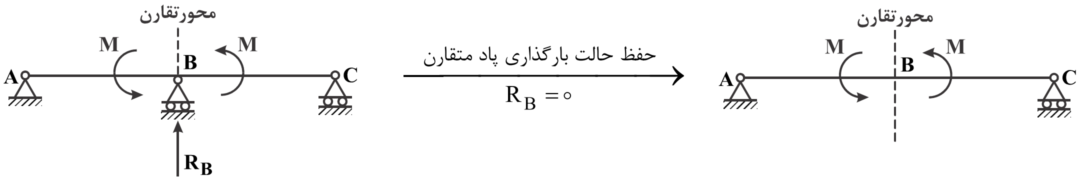
مثال ۲۱: در سازه شکل مقابل عکس‌العمل‌های C و B چقدر است؟ (EI ثابت)　　(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)



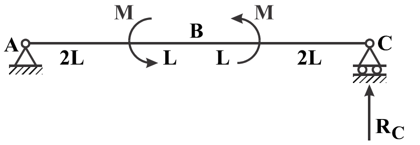
۱) $\frac{-۲M}{۳L}$ و صفر　　۲) $\frac{-M}{۳L}$ و صفر

۳) $\frac{M}{L}$ و $\frac{-M}{L}$　　۴) $\frac{M}{۳L}$ و $\frac{-M}{L}$

پاسخ: گزینه «۲» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که این تیر متقارن و بارگذاری وارد بر آن پادمتقارن است. پس می‌توان گفت عکس‌العمل تکیه‌گاه B که به صورت نیروی قائم بر روی محور تقارن قرار دارد، حالت پادمتقارن بودن بارگذاری را برهم زده و در واقع مقدار آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم. $(R_B = ۰)$

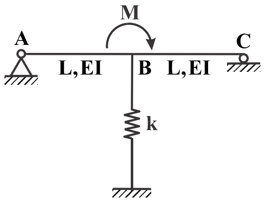


حال برای محاسبه مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه C به صورت زیر داریم:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A = 0 \Rightarrow (R_C \times 6L) + M + M = 0 \Rightarrow R_C \times 6L = -2M \Rightarrow R_C = \frac{-M}{3L}$$

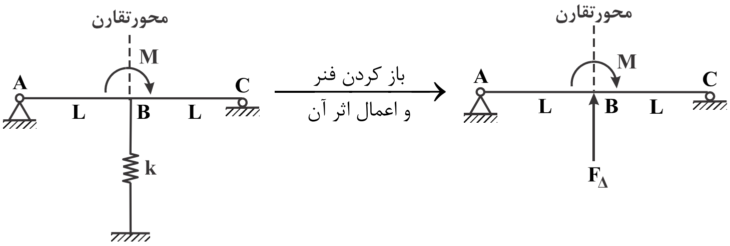
مثال ۲۲: در سازه مقابل نیرو در فنر چقدر است؟ ($(k = \frac{3EI}{L^3})$) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۶)



۱) صفر ۲) $\frac{M}{L}$

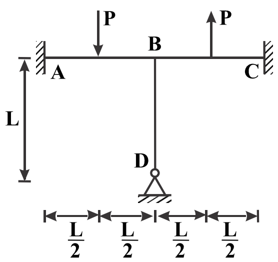
۳) $\frac{M}{3L}$ ۴) $\frac{M}{2L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌گردد، این سازه متقارن بوده و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرار گرفته است. بنابراین محور تقارن آن را رسم کرده و ملاحظه می‌شود که روی محور تقارن یک فنر انتقالی قرار گرفته است. بنابراین فنر را از سازه جداکرده و اثر آن یعنی نیروی F_Δ را در محل محور تقارن روی سازه اعمال می‌کنیم.



باتوجه به اینکه بارگذاری وارد بر سازه به صورت پادمتقارن است و نیروی فنر نیز روی محور تقارن قرار گرفته و این حالت پادمتقارن در بارگذاری را برهم می‌زند، بنابراین مقدار نیروی فنر برابر صفر در نظر گرفته می‌شود: $F_\Delta = 0$: به علت برهم زدن بارگذاری پادمتقارن در سازه

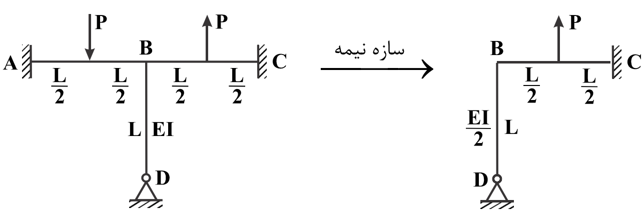
مثال ۲۳: در قاب مقابل لنگر تکیه‌گاه C کدام است؟ (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۸)



۱) $\frac{7PL}{88}$ ۲) $\frac{15PL}{88}$

۳) $\frac{PL}{8}$ ۴) $\frac{11PL}{88}$

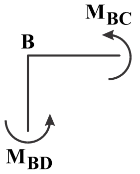
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با کمی دقت در شکل صورت سؤال، مشخص است که این قاب متقارن و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرارگرفته، پس با رسم محور تقارن آن مشاهده می‌شود که بر روی محور تقارن، عضو BD با صلبیت خمشی EI وجود دارد. پس در محل برخورد محور تقارن و عضو BD (نقطه B) برای سازه نیمه فقط مقدار صلبیت خمشی عضو BD نصف می‌شود $(\frac{EI}{2})$. یعنی داریم:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پاد متقارن)

بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه C کافی است سازه نیمه DBC را مورد بررسی قرار دهیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه C باتوجه به اینکه نقطه B پیوسته است، می‌توان از روش شیب افت استفاده نمود. پس به صورت زیر داریم:

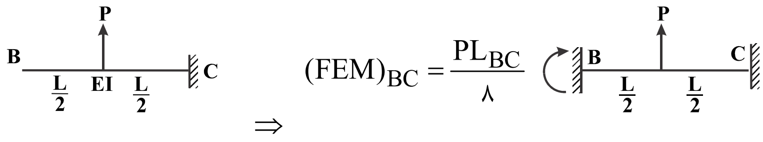
ابتدا معادله تعادل لنگر در نقطه B را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BD} = 0$$

حال برای قسمت‌های BC و BD مقدار لنگر را به دست می‌آوریم.

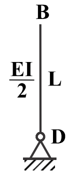
قسمت BC: باتوجه به اینکه نقطه انتهایی قسمت BC (نقطه C) به صورت تکیه‌گاه گیردار است، پس با استفاده از روش شیب افت داریم:



$$\begin{cases} \theta_C = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار } C) \\ \psi_{BC} = 0 & (\text{نقاط } B \text{ و } C \text{ تغییرمکان قائم ندارند}) \\ (FEM)_{BC} = \frac{PL_{BC}}{8} \Rightarrow (FEM)_{BC} = \frac{PL}{8} \\ (EI)_{BC} = EI \text{ و } L_{BC} = L \end{cases} \Rightarrow (FEM)_{BC} = \frac{PL_{BC}}{8}$$

$$M_{BC} = \frac{2(EI)_{BC}}{L_{BC}}(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}) + (FEM)_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + 0 - 0) + \frac{PL}{8} \Rightarrow M_{BC} = \frac{4EI\theta_B}{L} + \frac{PL}{8}$$

قسمت BD: باتوجه به اینکه نقطه انتهایی قسمت BD (نقطه D) به صورت تکیه‌گاه مفصلی است، پس با استفاده از حالت خاص اول در روش شیب افت داریم:



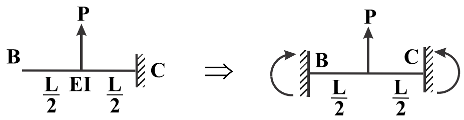
$$\begin{cases} \psi_{BD} = 0 & (\text{نقاط } B \text{ و } D \text{ تغییرمکان افقی ندارند } C) \\ (FEM)'_{BD} = 0 & (\text{قسمت } BD \text{ فاقد بارگذاری است}) \\ (EI)_{BD} = \frac{EI}{2} \text{ و } L_{BD} = L \end{cases}$$

$$M_{BD} = \frac{3(EI)_{BD}}{L_{BD}}(\theta_B - \psi_{BD}) + (FEM)'_{BD} \Rightarrow M_{BD} = \frac{3(\frac{EI}{2})}{L}(\theta_B - 0) + 0 \Rightarrow M_{BD} = \frac{3EI\theta_B}{2L}$$

بنابراین با حل معادله تعادل لنگر در نقطه B، مقدار دوران در نقطه B (θ_B) به دست می‌آید:

$$M_{BC} + M_{BD} = 0 \Rightarrow (\frac{4EI\theta_B}{L} + \frac{PL}{8}) + (\frac{3EI\theta_B}{2L}) = 0 \Rightarrow \frac{11EI\theta_B}{2L} + \frac{PL}{8} = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{-PL^2}{44EI}$$

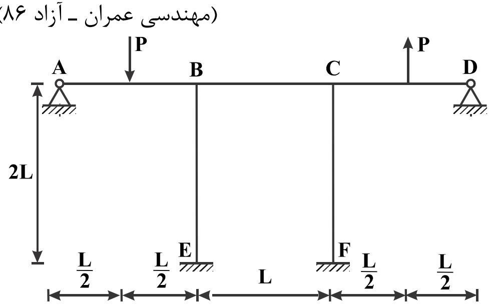
درنهایت برای محاسبه مقدار لنگر M_{CB} به صورت زیر با استفاده از روش شیب افت خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \theta_C = 0 \ (\text{تکیه‌گاه گیردار } C) \text{ و } \theta_B = \frac{-PL^2}{44EI} \\ \psi_{CB} = 0 & (\text{نقاط } B \text{ و } C \text{ تغییرمکان قائم ندارند}) \\ (FEM)'_{CB} = -\frac{PL_{CB}}{8} \Rightarrow (FEM)_{CB} = -\frac{PL}{8} \\ (EI)_{CB} = EI \text{ و } L_{CB} = L \end{cases} \Rightarrow (FEM)_{CB} = \frac{-PL_{CB}}{8}$$

$$M_{CB} = \frac{2(EI)_{CB}}{L_{CB}}(2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{CB}) + (FEM)_{CB} \Rightarrow M_{CB} = \frac{2EI}{L}(0 + (-\frac{PL^2}{44EI}) - 0) + (-\frac{PL}{8}) \Rightarrow M_{CB} = -\frac{15PL}{88}$$

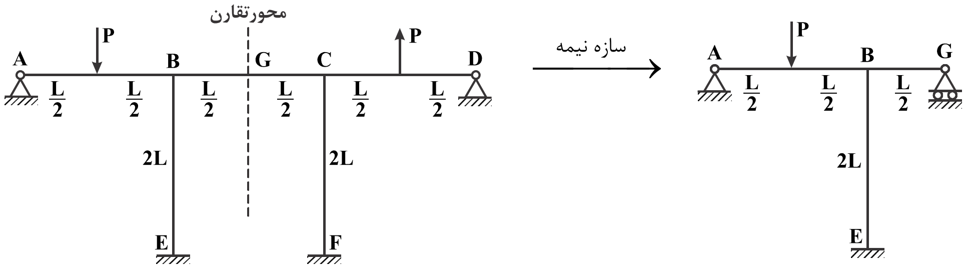
مثال ۲۴: در قاب مقابل M_{BA} کدام است؟ (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۶)



۱) $\frac{3PL}{22}$ ۲) $\frac{3PL}{11}$

۳) $\frac{PL}{8}$ ۴) $\frac{PL}{22}$

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که سازه مورد نظر متقارن است و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرار دارد. پس با رسم محور تقارن در محل برخورد محور تقارن و سازه (نقطه G) برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای محور تقارن در نظر گرفته می‌شود. پس داریم:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پاد متقارن)