www.modaresanesharif.ac.ir



## مثال‌های اضافی برای تمرین بیشتر

**مثال۱: جریان غیرلزج جریانی است که در آن .....**

۱) گرادیان فشار ناچیز باشد. ۲) گرادیان سرعت ناچیز باشد. ۳) لزجت سیال صفر باشد. ۴) ورتیسیته نداشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در سیال غیرلزج، لزجت سیال صفر است. ولی در جریان غیرلزج، با توجه به رابطه $\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$ باید گرادیان سرعت در امتداد عمود بر جریان سیال صفر باشد ( $\mu$ خاصیت سیال است و به چگونگی جریان بستگی ندارد).

---

**مثال۲: در مورد تنش برشی، گزینه نادرست کدام است؟** (مهندسی معدن- سراسری ۹۶)

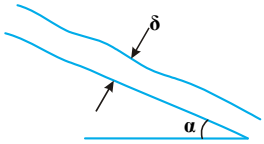
۱) در مایع ساکن ممکن است به علت جاذبه مولکولی ایجاد شود. ۲) هرگز در سیال غیرلزج ایجاد نمی‌شود.

۳) به تبادل مومنتم مولکولی بستگی دارد. ۴) به نیروی جاذبه مولکولی بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه (۱) صحیح نیست، زیرا طبق تنش برشی اگر سیال ساکن باشد در آن تنش به‌وجود نمی‌آید؛ گزینه (۲) صحیح است، چون در رابطه تنش برشی لزجت وجود دارد، گزینه(۳) صحیح است، چون در رابطه تنش برشی تغییرات سرعت و در نتیجه ممنتوم وجود دارد و گزینه (۴) نیز به این علت صحیح است که لزجت به نیروهای جاذبه بین مولکولی بستگی دارد.

---

**مثال۳: سیالی نیوتنی بر روی سطح شیب‌داری به طول $L$ و عرض $w$ با ضخامت $\delta$ و دبی حجمی $Q$ به سمت پایین حرکت می‌کند (مطابق شکل). نیروی وارده بر سطح شیب‌دار در راستای حرکت کدام‌یک از موارد زیر است؟** (مهندسی شیمی- سراسری ۹۵)




۱) $\rho g L \delta w \sin\alpha$

۲) $\rho Q g \sin\alpha$

۳) $\rho L w \delta g \cos\alpha$

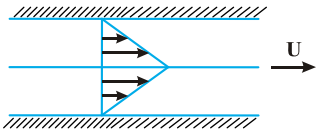
۴) $\rho Q g \cos\alpha$

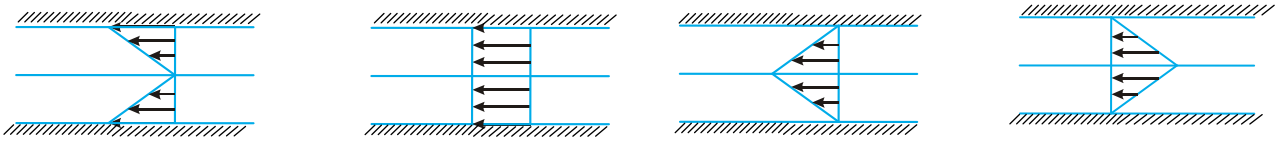
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی وارده بر سطح شیب‌دار در راستای حرکت عبارت است از:

$$F = W\sin\alpha = mg\sin\alpha = \rho V g \sin\alpha \Rightarrow F = \rho g L \delta w \sin\alpha$$

---

**مثال۴: صفحه نازکی در یک مجرا با سرعت ثابت $U$ در حرکت است. پروفیل سرعت مطابق شکل زیر است. کدام گزینه پروفیل تنش برشی بین صفحه و دیواره‌های مجرا را نشان می‌دهد؟** (مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۳)



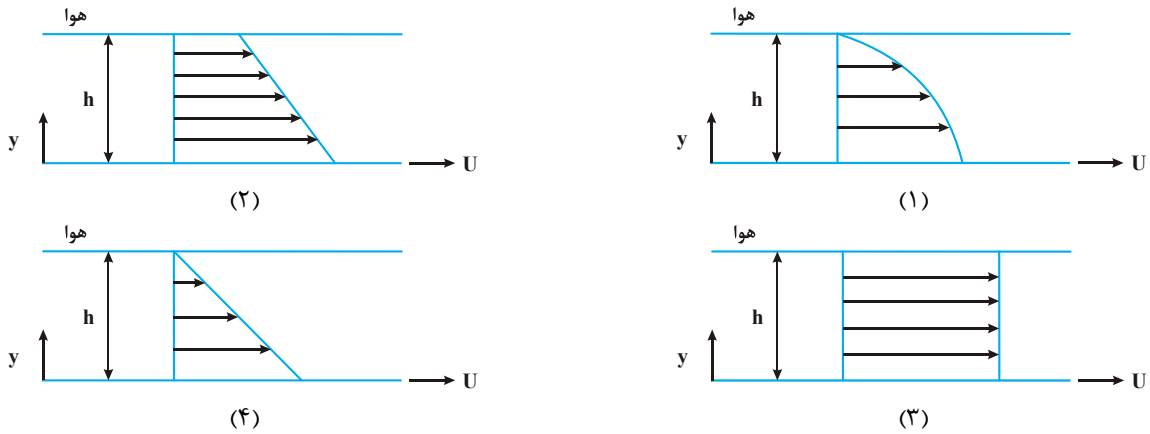
(۱) (۲) (۳) (۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به پروفیل سرعت داده شده که در کلیه نقاط بین دیواره‌های مجرا به صورت خطی است و قانون ویسکوزیته نیوتن $\tau = -\mu \frac{dV}{dy}$ که شامل مشتق معادله توزیع سرعت است، بنابراین تنش برشی بین صفحه و دیواره‌های مجرا در کلیه نقاط ثابت است.

www.modaresanesharif.ac.ir



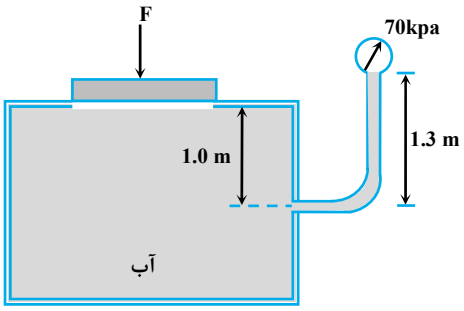
**مثال ۵:** صفحه‌ای در عمق مشخص از یک مایع نیوتنی به‌صورت موازی با افق با سرعت ثابت U حرکت می‌کند. توزیع سرعت بالای صفحه به کدام صورت زیر است؟ (نانو مواد و مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۵)




☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر صفحه در عمق مشخصی از یک مایع نیوتنی به‌صورت موازی با افق با سرعت ثابت U حرکت کند، توزیع سرعت بالای صفحه به‌صورت یکنواخت است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

---

**مثال ۶:** نیروی لازم اعمال‌شونده به درپوش دایره‌ای شکل به قطر $0/5\,m$ و به جرم $50/0\,kg$، در صورتی که وزن مخصوص آب برابر $9806\,\frac{N}{m^3}$ باشد برابر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۸)



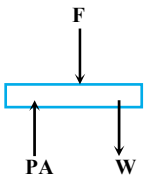

۱) ۷۲۹۴۲ N

۲) ۷۰۰۰۰N

۳) ۱۴۳۰۰N

۴) ۱۳۸۳۲ N

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»




تعادل نیروهای وارد بر درپوش دایره‌ای : $\sum F=0:\ PA-W-F=0$

فشار وارد از طرف سیال به زیر درپوش دایره‌ای: $P=70\times10^3+9806(1/3)-9806(1)\Rightarrow P=72941/8\ (pa)$

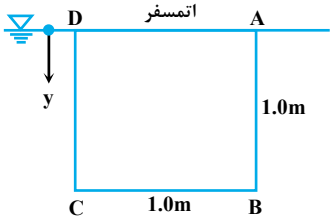
$$F=72941/8\times\frac{\pi}{4}(0/5)^2-50\times9/81\Rightarrow F=13831/6\ (N)$$

---

**مثال ۷:** در شکل نشان داده شده دریچه ABCD به ابعاد یک متر در یک متر به صورت قائم در درون مایعی به وزن مخصوص متغیر قرار دارد که وزن مخصوص مایع از رابطه مقابل تبعیت می‌کند:

$$\gamma(Y)=10000+1200Y\left(\frac{N}{m^3}\right)$$

لنگر ناشی از نیروی هیدرواستاتیک وارده بر یک طرف دریچه حول لولای AB چه مقدار می‌باشد؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)



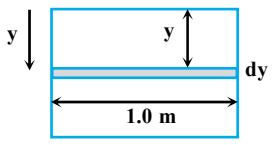

۱) ۵۴۰۰N.m

۲) ۵۳۰۰N.m

۳) ۲۷۰۰N.m

۴) ۲۶۰۰N.m

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با در نظر گرفتن المان مساحت زیر، برای محاسبه نیرو داریم:




$$dA=(1)dy=dy\ ,\ P=\gamma y$$

$$F_R=\int PdA=\int_0^1(\gamma y)(1dy)=\int_0^1(10000+1200y)ydy$$

www.modaresanesharif.ac.ir



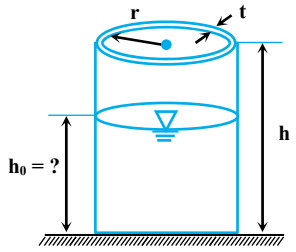
$$F_R = (۱۰۰۰۰\frac{y^۲}{۲} + ۱۲۰۰\frac{y^۳}{۳})\Big|_۰^۱ = ۵۰۰۰(۱)^۲ + ۴۰۰(۱)^۳ \Rightarrow F_R = ۵۴۰۰\,(N)$$

این نیرو بر روی محور تقارن مربع وارد شده و گشتاور آن حول لولای AB عبارت است از:

$$M = ۵۴۰۰ \times ۰/۵ \Rightarrow M = ۲۷۰۰\,(N.m)$$

---

**مثال ۸:** **یک استوانه دو سرباز به شعاع r، ضخامت نازک t، ارتفاع h و با وزن حجمی $\gamma_۰$، به طور قائم بر روی سطح صیقلی قرار دارد. اگر وزن حجمی سیال $۲\gamma_۰$ باشد، حداکثر عمق سیال برای این که از سطح صیقلی خارج نشود چقدر است؟** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۷)




۱) $\frac{ht}{۲r}$

۲) $\frac{h}{۲}$

۳) $\frac{h}{۳}$

۴) $\frac{ht}{r}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا فشار ناشی از وزن استوانه و وزن سیال را محاسبه می‌کنیم:

فشار ناشی از وزن استوانه : $P = \frac{W}{A} = \frac{۲\pi\gamma_۰ r\,th}{۲\pi r\,t} = \gamma_۰ h$

وزن استوانه : $W = \gamma v = \gamma_۰(۲\pi r\,t)(h) = ۲\pi\gamma_۰ r\,th$

فشار ناشی از وزن سیال : $P' = \frac{W'}{A'} = \frac{۲\pi\gamma_۰ r^۲ h_۰}{\pi r^۲} = ۲\gamma_۰ h_۰$

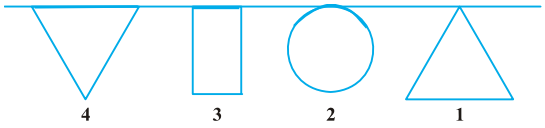
وزن سیال : $W' = \gamma' v' = ۲\gamma_۰(\pi r^۲)(h_۰) = ۲\pi\gamma_۰ r^۲ h_۰$

حداکثر عمق برای سیال زمانی اتفاق می‌افتد که فشار ناشی از وزن استوانه و فشار ناشی از وزن سیال وارد به کف یکسان باشند، لذا داریم:

$$P = P' \Rightarrow \gamma_۰ h = ۲\gamma_۰ h_۰ \Rightarrow h_۰ = \frac{h}{۲}$$

---

**مثال ۹:** **چهار سطح با مساحت یکسان به طور قائم در آب قرار گرفته‌اند به طوری که لبهٔ آن‌ها بر سطح آب منطبق است. نیروی هیدروستاتیک وارد بر کدام یک از سطوح از بقیه بیشتر است؟** (مهندسی معدن- سراسری ۹۴)




۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» نیروی هیدرواستاتیک وارده بر سطوح مسطح غوطه‌ور در سیال تراکم‌ناپذیر عبارت است از: $F_R = \gamma h_C A$

در رابطه فوق $h_C$ عبارت از فاصله قائم مرکز سطح تا سطح آزاد آب است.

همه شکل‌ها دارای سطح برابر بوده و در شکل ۱ مرکز سطح در فاصله $\frac{۲}{۳}h$ از رأس (سطح آب) قرار دارد که از بقیه بزرگ‌تر است.

---

**مثال ۱۰:** **صفحه‌ای دایره‌ای به قطر ۲ متر چنان در زیر آب نگه داشته شده است که لبه بالایی آن ۱ متر و لبه پایینی آن ۳ متر زیر سطح آب قرار دارند. مقدار نیروی وارد بر یک طرف صفحه بر حسب نیوتن کدام است؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰ و ۸۵)

۱) $۰/۵\pi\gamma_{H_۲O}$

۲) $\pi\gamma_{H_۲O}$

۳) $۲\pi\gamma_{H_۲O}$

۴) $۴\pi\gamma_{H_۲O}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» نیروی وارده عبارت است از:

$$F_R = \gamma_{H_۲O}(۱+۱) \times \frac{\pi}{۴}(۲)^۲ \Rightarrow F_R = ۲\pi\gamma_{H_۲O}$$

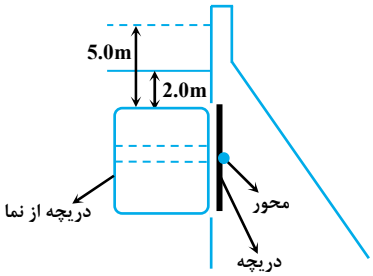
$F_R = \gamma h_c A$

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال۱۱:** دریچه مستطیل شکل نشان داده شده که بر روی وجه قائم بالادست سدی به کار رفته است، بر روی محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد لولا شده است. اگر عمق آب بر روی دریچه از ۲m به ۵m افزایش یابد، ممان پیچشی لازم وارد بر محور این دریچه جهت بسته نگه داشتن آن:

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)




۱) تفاوتی نمی‌کند.

۲) افزایش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد.

۴) هیچ‌گونه ممان پیچشی تولید نمی‌شود.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» نیروی وارده عبارت است از:

نیروی برآیند وارد بر دریچه : $F_R = \gamma h_c A$

فاصله محل اعمال نیروی برآیند تا مرکز در امتداد دریچه : $y' - y_c = \dfrac{\bar{I}}{y_c A}$

چون دریچه قائم است $\Rightarrow$ $h' - h_c = \dfrac{\bar{I}}{h_c A}$

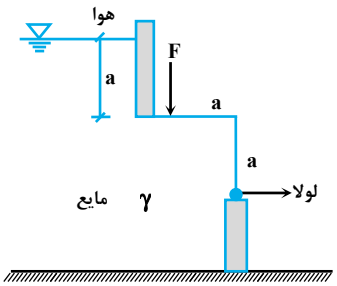
ممان پیچشی وارده بر محور جهت بسته نگه داشتن دریچه : $M = F_R (h' - h_c)$

$M = \gamma h_c A(\dfrac{\bar{I}}{h_c A}) = \gamma \bar{I} = \text{const.}$ (به عمق آب بستگی ندارد)

---

**مثال۱۲:** در مخزن نشان داده شده در شکل، نیروی لازم برای بسته نگاه داشتن دریچه با ابعاد داده شده، از کدام رابطه بـه دسـت می‌آیـد؟ عـرض دریچه واحد است.

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)




۱) $F = \gamma a^2$

۲) $F = \dfrac{7}{6}\gamma a^2$

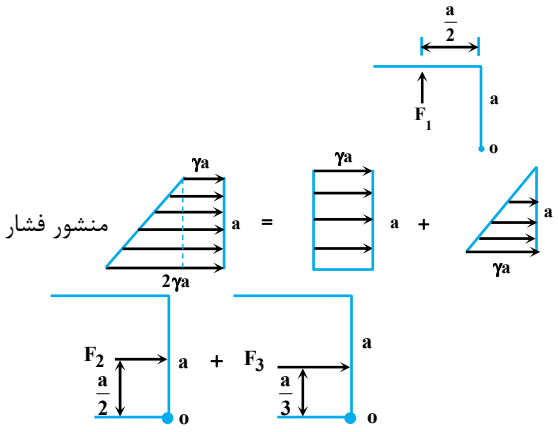
۳) $F = \dfrac{1}{2}\gamma a^2$

۴) $F = \dfrac{2}{3}\gamma a^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نیروهای وارده بر دریچه عبارت‌اند از:

نیروی وارد به قسمت افقی دریچه: $F_1 = \gamma V$ (وزن سیال مجازی تا سطح آزاد)

$F_1 = \gamma \times a \times 1 \times a = \gamma a^2$




نیروی وارد به قسمت عمودی دریچه :

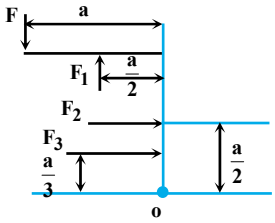
$F_2 = \gamma a \times a \times 1 = \gamma a^2$ ، $F_3 = \dfrac{\gamma a \times a}{2} \times 1 = \dfrac{\gamma a^2}{2}$

www.modaresanesharif.ac.ir



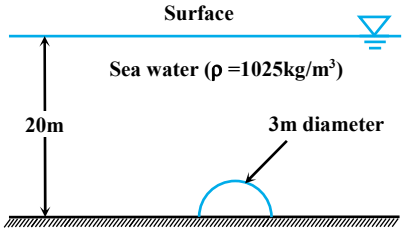
$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : F(a) - F_1(\frac{a}{2}) - F_2(\frac{a}{2}) - F_3(\frac{a}{3}) = 0$$

: دیاگرام نیروهای وارد بر دریچه




$$F = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2} + \frac{F_3}{3} = \frac{\gamma a^2}{2} + \frac{\gamma a^2}{2} + \frac{\gamma a^2}{6} = \frac{7}{6}\gamma a^2$$

**مثال ۱۳:** در شکل زیر یک اتاقک به شکل نیم‌کره برای اقیانوس‌شناسی در کف یک دریاچه قرار داده شده است. نیروی وارده از طرف آب دریاچه روی این اتاقک به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)




۱) ۱۳۴۰/۴۵kN　　۲) ۱۳۵۰/۴۵kN

۳) ۱۳۶۰/۴۵kN　　۴) ۲۳۵۰/۴۵kN

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به غوطه‌وری اتاقک در آب دریاچه داریم:

وزن سیال روی کره تا سطح آزاد　　$F_y = W = mg = \rho Vg$　　(به علت تقارن)　　$F_x = 0$

$$F_y = \rho g(\frac{\pi D^2}{4} \times h - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$F_y = 1025 \times 9/81(\frac{\pi}{4} \times 3^2 \times 20 - \frac{2\pi}{3} \times 1/5^3) \Rightarrow F_y = 1350/45\ (kN)$$

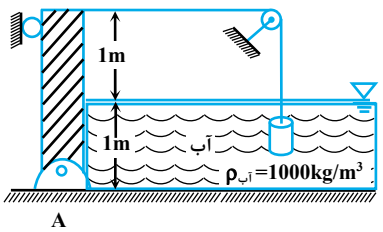
**مثال ۱۴:** در یک جسم شناور مرکز غوطه‌وری جسم ( **Buoyancy centre** ) ..... (مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۳)

۱) همان مرکز ثقل جسم است.　　۲) معادل مرکز حجم می‌باشد.

۳) همان مرکز حجم مستغرق می‌باشد.　　۴) در راستای مرکز ثقل جسم می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در یک جسم شناور، مرکز غوطه‌وری جسم (مرکز شناوری) همان مرکز حجم مستغرق (قسمت داخل مایع جسم) می‌باشد.

**مثال ۱۵:** در شکل زیر برای این که دریچه حول نقطه A بچرخد، حداقل دانسیته وزنه چند $\frac{kg}{m^3}$ است؟ (پهنای دریچه ۱m، قطر و ارتفاع وزنه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۲۰ میلی‌متر، دانسیته آب $\rho_{H_2O} = 1000\frac{kg}{m^3}$) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۷)



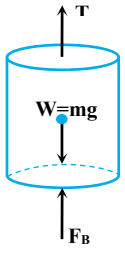

۱) ۴۳۰۰

۲) ۵۳۰۰

۳) ۶۳۰۰

۴) ۷۳۰۰

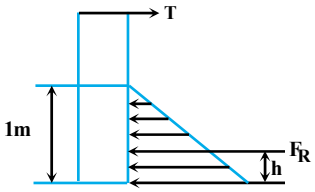
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از معادله تعادل داریم:




تعادل نیروهای وارد بر وزنه: $\sum F_y = 0 : \ T + F_B - w = 0 \Rightarrow T = mg - F_B$

برای آستانه چرخش دریچه حول A : $+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \ , B = 0$

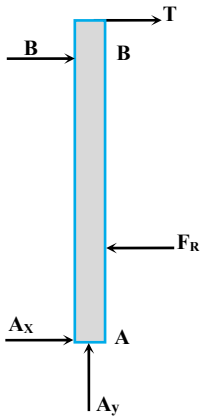
برای تعیین محل اثر نیروی $F_R$ از منشور فشار به شکل زیر استفاده می‌کنیم:




$$h = \text{مرکز سطح مثلث} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

www.modaresanesharif.ac.ir






$$F_R(\frac{۱}{۳}) - T(۲) = ۰ \Rightarrow T = \frac{F_R}{۶} \qquad mg - F_B = \frac{F_R}{۶}$$

$$\rho Vg = F_B + \frac{F_R}{۶} \qquad \rho = \frac{F_B + \frac{F_R}{۶}}{Vg}$$

حجم وزنه : $V = \frac{\pi d^۲}{۴} L = \frac{\pi}{۴}(۱)^۲(۰/۰۲) = ۱/۵۷۱\times۱۰^{-۲}\ (m^۳)$

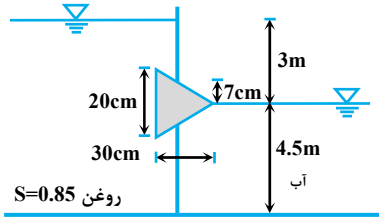
نیروی شناوری : $F_B = \gamma_w V = ۹۸۰۶\times۱/۵۷۱\times۱۰^{-۲} = ۱۵۴\ (N)$

نیروی افقی وارد بر دریچه : $F_R = P_c A = \gamma_w h_c A = ۹۸۰۶\times\frac{۱}{۲}\times(۱\times۱) = ۴۹۰۳\ (N)$

$$\rho = \frac{۱۵۴ + \frac{۴۹۰۳}{۶}}{۱/۵۷۱\times۱۰^{-۲}\times۹/۸۰۶} \qquad \rho = ۶۳۰۰\ (\frac{kg}{m^۳})$$

**مثال ۱۶:** مطلوب است تعیین مؤلفه قائم کل نیروهای وارد بر دریچه مخروطی شکل از طرف سیالات موجود در دو مخزن. (حجم مخروط $v = \frac{Ah}{۳}$)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۷۸)



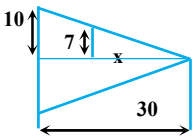

۱) ۱۶/۶ N

۲) ۱۹/۳ N

۳) ۲۲/۵ N

۴) ۲۶/۵ N

**پاسخ:** گزینه «۳» سمت چپ مخروط به طور کامل در روغن غوطه‌ور و نیمی از سمت راست مخروط در آب شناور است.




x : ارتفاع قسمتی از مخروط که در آب شناور است $\frac{x}{۳۰} = \frac{۷}{۱۰} \Rightarrow x = ۲۱\ (cm)$

حجم مخروط ناقص داخل روغن : $V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi(۰/۱)^۲(۰/۳) - \frac{۱}{۳}\pi(۰/۰۷)^۲(۰/۲۱) \Rightarrow V_۱ = ۰/۰۰۲۰۶۴\ (m^۳)$

$S_{oil} = ۰/۸۵$

نیروی غوطه‌وری سمت چپ : $F_۱ = \gamma_{oil} V_۱ = S_{oil}\gamma_w V_۱$

$F_۱ = ۰/۸۵\times۹۸۰۶\times۰/۰۰۲۰۶۴ \Rightarrow F_۱ = ۱۷/۲\ (N)$

حجم نیمی از مخروط سمت راست داخل آب : $V_۲ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\pi(۰/۰۷)^۲(۰/۲۱) \Rightarrow V_۲ = ۰/۰۰۰۵۴\ (m^۳)$

نیروی شناوری سمت راست : $F_۲ = \gamma_w V_۲$

$F_۲ = ۹۸۰۶\times۰/۰۰۰۵۴ \Rightarrow F_۲ = ۵/۳\ (N)$

کل نیروی قائم وارده بر مخروط : $F = F_۱ + F_۲ = ۱۷/۲ + ۵/۳ \Rightarrow F = ۲۲/۵\ (N)$

**مثال ۱۷:** قطعه‌ای مکعبی شکل اگر در آب شناور شود، ۱۰ cm آن بالاتر از سطح آب واقع می‌شود و اگر در مایعی دیگر با چگالی ویژه S=۱/۴ شناور گردد، ۱۵ cm آن بالاتر از سطح آزاد مایع قرار می‌گیرد. چگالی ویژه قطعه برابر کدام گزینه است؟

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰/۶۴ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۸۶ ۴) ۱/۲۱

**پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از حالت تعادل داریم:

در حالت تعادل : $W = F_B$ وزن جسم = وزن مایع جابه‌جا شده

www.modaresanesharif.ac.ir



اگر طول ضلع مکعب را $\alpha$ در نظر بگیریم، داریم:

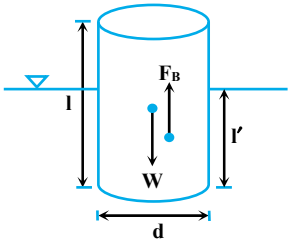
$$\begin{cases} \text{در آب}: \gamma\alpha^3 = \gamma_w\alpha^2(\alpha-10) \\ \text{در مایع}: \gamma\alpha^3 = \gamma_l\alpha^2(\alpha-15) \end{cases} \Rightarrow \gamma_w\alpha^2(\alpha-10) = 1/4\gamma_w\alpha^2(\alpha-15) \Rightarrow \quad \alpha = 27/5 \ (cm)$$

$$\gamma(27/5) = \gamma_w(27/5-10) \Rightarrow S = \frac{\gamma}{\gamma_w} = \frac{17/5}{27/5} = 0/64$$

**مثال ۱۸:** جسمی به شکل استوانه با قطر قاعده **d** و به ارتفاع **l** در امتداد طولی خود بر روی سطح آب شوری با چگالی نسبی $S_1 = 1/05$ شناور است. اگر چگالی نسبی جسم شناور $S_2 = 0/8$ باشد، عمق فرورفتگی جسم در مایع چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $0/21$ ۲) $0/761$ ۳) $0/81$ ۴) $0/841$

**پاسخ:** گزینه «۲» در حالت شناور داریم:



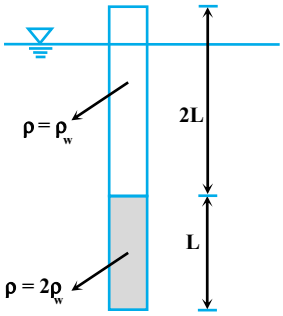

در حالت تعادل : $W = F_B$

وزن جسم : $W = \gamma_2 V = \rho_w S_2 g V \Rightarrow$

نیروی شناوری وارد بر جسم : $F_B = \gamma_1 V' = \rho_w S_1 g V' \Rightarrow S_2 V = S_1 V'$

$$(\pi r^2 l)S_2 = (\pi r^2 l')S_1 \Rightarrow l' = \frac{S_2}{S_1}l = \frac{0/8}{1/05}l = 0/761$$

**مثال ۱۹:** جرم مخصوص استوانه‌ای با سطح مقطع یکنواخت در یک طرف دو برابر جرم مخصوص آب ($\rho_w$)۲ و به طول **L** و در طرف دیگر برابر جرم مخصوص آب ($\rho_w$) و به طول **L** ۲ است. این استوانه مطابق شکل داخل یک سیال شناور است به نحوی که تمام قسمت هاشورخورده (با جرم مخصوص $2\rho_w$) و بخشی از قسمت با جرم مخصوص $\rho_w$، داخل سیال قرار گرفته است. کدام گزینه در خصوص جرم مخصوص سیال صحیح است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)




۱) جرم مخصوص سیال برابر با جرم مخصوص آب است.

۲) جرم مخصوص سیال بیشتر از جرم مخصوص آب است.

۳) جرم مخصوص سیال کمتر از جرم مخصوص آب است.

۴) اطلاعات مسأله برای پاسخ‌گویی کافی نیست.

**پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا جرم مخصوص متوسط استوانه را به دست آورده و سپس آن را با جرم مخصوص سیال مقایسه می‌کنیم.

$$\text{جرم مخصوص متوسط جسم} = \frac{\text{جرم کل}}{\text{حجم کل}}$$

$$\rho_{av} = \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}{L_1 + L_2} \qquad \rho_{av} = \frac{(2\rho_w)(L) + (\rho_w)(2L)}{(L) + (2L)} = \frac{4}{3}\rho_w$$

با توجه به شناور بودن استوانه داخل سیال نتیجه می‌شود:

$$\rho_{\text{سیال}} > \rho_{av} \Rightarrow \rho_{\text{سیال}} > \rho_w$$

**مثال ۲۰:** یک میدان جریان به صورت رابطه مقابل داده شده است: $\vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j} + ct\vec{k}$. معادلهٔ خطوط جریان در لحظه $t = 0$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = c_1 x^{-a/b}$ ۲) $y = c_1 x^{a/b}$ ۳) $y = c_1 x^{-b/a}$ ۴) $y = c_1 x^{b/a}$

**پاسخ:** گزینه «۴» میدان جریان در لحظه $t = 0$ عبارت است از:

$$t = 0: \ \vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j} \qquad \vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j} + ct\vec{k}$$

با توجه به معادلات دیفرانسیل خط جریان داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \frac{dy}{V_y} = \frac{dx}{V_x} \Rightarrow \frac{dy}{by} = \frac{dx}{ax} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{b}{a}\frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\ln y = \frac{b}{a}\ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{b}{a}} + \ln c_1 = \ln(c_1 x^{\frac{b}{a}}) \Rightarrow y = c_1 x^{\frac{b}{a}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۲۱:** در یک جریان بردار سرعت به صورت $\vec{V}=\frac{y}{2}\vec{i}+xy^2\vec{j}$ می‌باشد. معادله کلی خط جریان (Stream line) به صورت کدام یک از روابط زیر می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y=C\ln x$ ۲) $y=C\exp x$ ۳) $y=C\ln x^2$ ۴) $y=C\exp x^2$

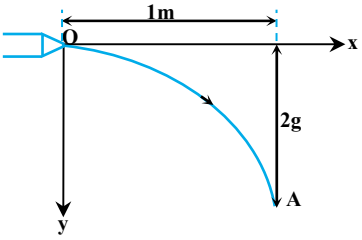
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از معادله دیفرانسیلی خط جریان داریم: $\vec{V}=\frac{y}{2}\vec{i}+xy^2\vec{j}\quad,\quad \vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}\Rightarrow V_x=\frac{y}{2},\ V_y=xy^2$

معادله دیفرانسیلی خط جریان: $\frac{dy}{dx}=\frac{V_y}{V_x}$ (سرعت همواره مماس بر خط جریان است) $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{xy^2}{\frac{y}{2}}=2xy$

$$\frac{dy}{y}=2xdx\Rightarrow \ln y=x^2+C_1 \qquad y=e^{(c_1+x^2)}=e^{c_1}.e^{x^2}\Rightarrow y=c.e^{x^2}=C\exp x^2$$

---

**مثال ۲۲:** یک جت آب به صورت افقی آب را به اتمسفر تخلیه می‌کند و مسیر آب به صورت OA و مختصات بر حسب متر به صورت $(1,2g)$ می‌باشد که در آن g شتاب ثقل است. دبی حجمی خروجی از جت با سطح $0/01m^2$ بر حسب لیتر در ثانیه کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)




۱) ۳

۲) ۱

۳) ۵

۴) ۲

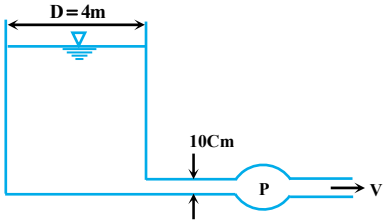
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این مسأله را می‌توان به صورت یک حرکت پرتابی با زاویه صفر درجه در نظر گرفت، بنابراین داریم:

معادله حرکت پرتابی: $y=\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha \xrightarrow[\alpha=0]{\text{پرتابه افقی}} y=\frac{gx^2}{2V_0^2}\Rightarrow x=1,\ y=2g\Rightarrow 2g=\frac{g(1)^2}{2V_0^2}\Rightarrow V_0=0/5\ (\frac{m}{s})$

$$Q=V_0A=0/5\times 0/01=0/005\ (\frac{m^3}{s})\Rightarrow Q=5\ (\frac{lit}{s})$$

---

**مثال ۲۳:** یک مخزن استوانه‌ای به قطر 4m شامل آب می‌باشد. آب از این مخزن توسط یک پمپ تخلیه می‌گردد، به طوری که سرعت جریان در لوله ثابت و برابر $3\,m/sec$ می‌باشد. اگر قطر داخلی لوله 10cm باشد، زمان لازم برای افت سطح آب در مخزن از 3m به 0/5m را محاسبه نمائید؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۲)




۱) ۱۶۷۰sec

۲) ۲۶۶۶sec

۳) ۱۳۳۳sec

۴) ۳۳۰۰sec

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از معادله پیوستگی در حالت غیردائمی داریم:

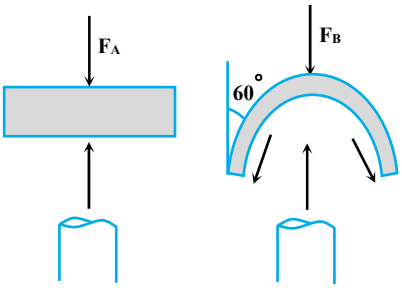
$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم آب تخلیه شده}: V=\frac{\pi d^2}{4}\Delta h=\frac{\pi(4)^2}{4}(2/5)=10\pi(m^3)\\ \text{مقدار دبی عبوری آب از لوله}: Q=AV=\frac{\pi\times(0/1)^2}{4}\times 3=0/0075\pi\ (\frac{m^3}{s})\end{array}\right\}\Rightarrow V=Qt\Rightarrow t=\frac{10\pi}{0/0075\pi}=1333\ (sec)$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۲۴:** دبی ثابت و مشخصی برابر $m$ بر دو نوع مانع مطابق شکل برخورد می‌کند، نسبت $F_A / F_B$ چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)




۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

**پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از معادله ممنتوم در راستای محور y ها داریم:

$$F_A = \dot{m}V \qquad -F_A = -\dot{m}V + ۰ \quad : \text{صفحه تخت}$$

$$F_B = \frac{۳}{۲}\dot{m}V \qquad -F_B = -\dot{m}V + \frac{\dot{m}}{۲}(-V\cos ۶۰^\circ)\times ۲ \quad : \text{صفحه منحنی}$$

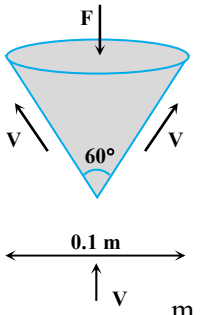
$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{۲}{۳}$$

---

**مثال ۲۵:** جت هوا با مقطع دایره‌ای به قطر ۰/۱ متر به جسم مخروطی شکل برخورد می‌کند. نیرویی برابر با $F = ۰/۱۵N$ لازم است تا جسم مخروطی شکل در جای خود باقی بماند. اگر سرعت جت $V = ۳۰ m/s$ ثابت بماند، جرم جسم مخروطی شکل چند کیلوگرم است؟

(چگالی هوا $\rho = ۱/۲۳ kg/m^۳$ و $g = ۹/۸۱ m/s^۲$)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)




۱) ۰/۱۸

۲) ۰/۱۰

۳) ۰/۴۳

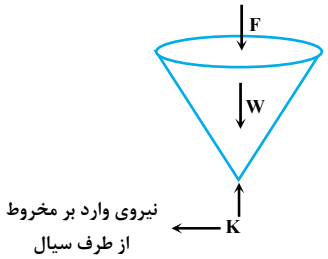
۴) ۰/۲۲

**پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از معادله پیوستگی داریم:

$$V = V_۱ = V_۲ = ۳۰(\frac{m}{s})$$

$$Q = Q_۱ + Q_۲ \qquad Q_۱ = Q_۲ = \frac{Q}{۲} \qquad Q = VA = ۳۰\times\frac{\pi}{۴}(۰/۱)^۲ \Rightarrow Q = ۰/۲۳۵۶\ (\frac{m^۳}{s})$$

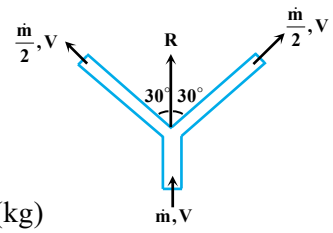
دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر جسم مخروطی در حال تعادل به صورت مقابل است:




در حالت تعادل: $K = F + w$

نیروی وارد به سیال از طرف مخروط: $R = -K = -F - W$

حجم کنترل سیال:



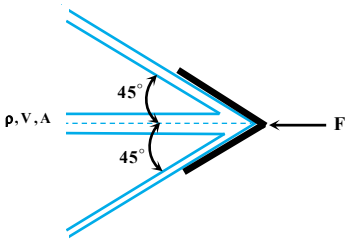

$$y - Mom.: \quad -W - F = -\rho QV + ۲(\rho\frac{Q}{۲}V\cos ۳۰^\circ)$$

$$-m\times ۹/۸۱ - ۰/۱۵ = ۱/۲۳\times ۰/۲۳۵۶\times ۳۰(-۱+\cos ۳۰^\circ) \Rightarrow m = ۰/۱۰۳۴\ (kg)$$

---

**مثال ۲۶:** جت دو بعدی مقابل در یک صفحه افقی به یک قطعه فلز زاویه‌دار برخورد می‌کند. نیروی وارد بر صفحه $F$ کدام یک از مقادیر زیر می‌باشد:

(مهندسی عمران ـ آزاد ۸۲)




۱) $۰/۷۱(\rho AV^۲)$

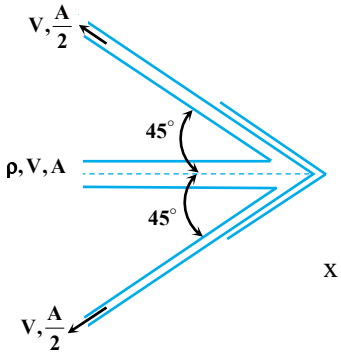
۲) $۱/۷۱(\rho AV^۲)$

۳) $(\rho AV^۲)$

۴) $۲(\rho AV^۲)$

www.modaresanesharif.ac.ir






☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به تقارن موجود در شکل و استفاده از معادله پیوستگی، دبی ورودی به دو قسمت مساوی در بالا و پایین تقسیم می‌شود. با استفاده از معادله ممنتوم در دو راستای x و y داریم:

$$x-Mom.: F_x=(V)(-m^\circ)+(-V\cos 45^\circ)(\frac{m^\circ}{2})(2) \Rightarrow k_x=-F_x=\rho V^2 A(1+\cos 45^\circ)$$

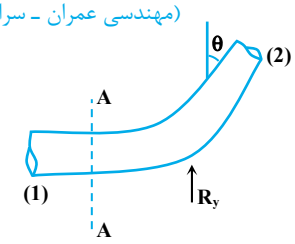
$$y-Mom.: F_y=0+(V\sin 45^\circ)(\frac{m^\circ}{2})+(-V\cos 45^\circ)(\frac{m^\circ}{2}) \Rightarrow k_y=-F_y=\rho V^2 A(1+\cos 45^\circ)$$

$$k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}=k_x=\rho V^2 A(1+\cos 45^\circ) \Rightarrow k=1/71(pAV^2)$$

---

**مثال ۲۷:** **لوله شکل زیر در صفحه افق قرار داشته و از مقطع A-A به بعد زاویه قرارگیری و قطر آن تغییر کرده است. فرض می‌شود که تلفات انرژی نداریم و نیروی قائم جهت حفظ تعادل را با $R_y$ نمایش می‌دهیم. اگر داشته باشیم $\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=H$، مقدار $\frac{R_y}{\gamma A_2 \cos\theta}$ برابر با کدام گزینه است؟**

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)




۱) $H-\frac{V_2^2}{g}$ ۲) $H-\frac{V_2^2}{2g}$

۳) $H+\frac{V_2^2}{g}$ ۴) $H+\frac{V_2^2}{2g}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از معادله برنولی داریم:

معادله برنولی بین ورودی ۱ و خروجی ۲: $\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$ ، $\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=H$

لوله افقی است $\Rightarrow Z_1=Z_2 \Rightarrow H=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$ $\qquad P_2=\gamma(H-\frac{V_2^2}{2g})$

$$y-Mom.: \quad R_y-P_2A_2\cos\theta=0+\rho V_2A_2(V_2\cos\theta)$$

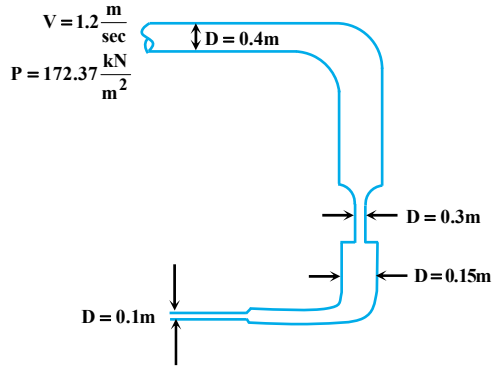
$$R_y=A_2\cos\theta(P_2+\rho V_2^2) \qquad R_y=A_2\cos\theta(\gamma H-\gamma\frac{V_2^2}{2g}+\frac{\gamma V_2^2}{g})$$

$$R_y=\gamma A_2\cos\theta(H+\frac{V_2^2}{2g}) \Rightarrow \frac{R_y}{\gamma A_2\cos\theta}=H+\frac{V_2^2}{2g}$$

---

**مثال ۲۸:** **در اتصال نشان داده شده در شکل زیر که شامل دو زانویی در یک صفحه افقی می‌باشد، نیروی لازم برای نگه‌داری آن در یک صفحه افقی چقدر می‌باشد؟ (از کلیه افت‌ها صرف‌نظر کنید.) (چگالی سیال $\rho=787 kg/m^3$ و $g=9/8\ N/kg$ می‌باشد.)**

(مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)




۱) ۶۲kN

۲) ۳۵kN

۳) ۴۲kN

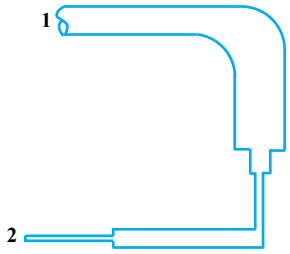
۴) ۲۴kN

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با انتخاب حجم کنترل داخل کل مجموعه و استفاده از معادله ممنتوم در جهت x داریم:

$$F_x + P_1A_1 = V_1(-m^\circ) + (-V_2)(m^\circ) \Rightarrow k_x = -F_x = P_1A_1 + m^\circ(V_1 + V_2)$$




از معادله پیوستگی : $A_1V_1 = A_2V_2$

$$\frac{V_2}{V_1} = (\frac{d_1}{d_2})^2 \Rightarrow V_2 = (\frac{0/4}{0/1})^2 \times 1/2 \Rightarrow V_2 = 19/2 \ (\frac{m}{s})$$

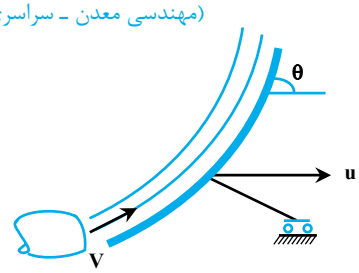
$$k_x = 172/37 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 0/4^2}{4} + 787 \times \frac{\pi \times 0/4^2}{4} \times 1/2(1/2 + 19/2)$$

$$k_x = 24082(N) \simeq -24(kN)$$

---

**مثال ۲۹:** جت آب با سرعت مطلق V مطابق شکل به پره‌ای برخورد می‌کند که خود با سرعت ثابت u به طرف راست حرکت می‌کند. با تغییر زاویه θ از ۶۰° به ۱۲۰°، نیروی افقی وارد بر پره چند برابر می‌شود؟

(مهندسی معدن ـ سراسری ۸۸)



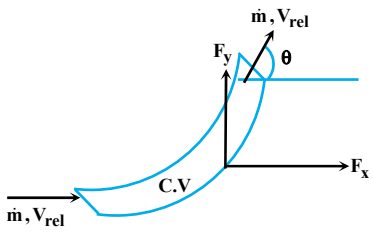

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از معادله ممنتوم در امتداد افقی برای حجم کنترل نشان داده شده داریم:




نیروی وارده بر پره : $\vec{K} = -\vec{F} = \dot{m}\vec{V}_{in} - \dot{m}\vec{V}_{out} = \rho Q(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$

$$K_x = \rho Q(V_{rel} - V_{rel}\cos\theta)$$

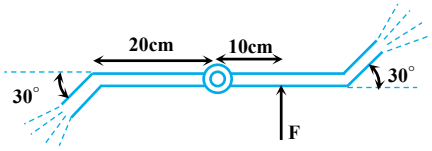
سرعت نسبی : $V_{rel} = V - u$ $\qquad K_x = \rho A_j (V-u)^2(1-\cos\theta)$

نسبت نیروی افقی وارده بر پره : $\frac{(K_x)_2}{(K_x)_1} = \frac{1-\cos 120^\circ}{1-\cos 60^\circ} = \frac{1-(-\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})} = 3$

---

**مثال ۳۰:** پلان یک آب‌پاش گردان که در آن آب از لوله قائم واقع در وسط آن وارد و از دهانه‌هایی که مساحت هر یک $20\,cm^2$ بوده و با سرعت $25\,m/sec$ با زاویه ۳۰° خارج می‌شود در شکل نشان داده شده است. نیروی لازم F را در شکل طوری تعیین کنید که از چرخش آب‌پاش جلوگیری نماید؟

(مهندسی عمران ـ آزاد ۸۲)




۱) $1250\,N$

۲) $2500\sqrt{3}\,N$

۳) $1250\sqrt{3}\,N$

۴) $2500\,N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از معادله لنگر ممنتوم داریم:

(لنگر ممنتوم ورودی = ۰) لنگر ممنتوم ورودی - لنگر ممنتوم دو خروجی = گشتاور نیرو نسبت به ورودی

$$Fd = [(\frac{m^\circ}{2} V \sin 30^\circ) \times r] \times 2 \qquad Fd = m^\circ Vr \sin 30^\circ = \rho A V^2 r \sin 30^\circ$$

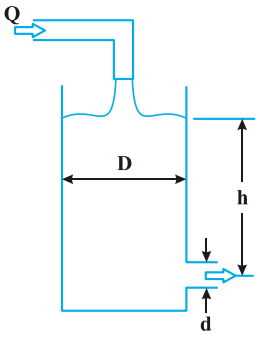
$$F(0/1) = 1000 \times (2 \times 20 \times 10^{-4}) \times (25)^2 \times 0/2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow F = 2500(N)$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۳۱:** مطابق شکل زیر، جریان از یک مخزن به قطر **D** توسط لوله‌ای به قطر **d** خارج می‌شود. برای ثابت ماندن تراز آب با عمق **h** روی خروجی، دبی ورودی **(Q)** برابر کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۴)




۱) $\frac{\pi d^2}{2}\sqrt{\frac{2gh}{1-(d/D)^4}}$

۲) $\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{gh}{1-(d/D)^4}}$

۳) $\frac{\pi d^2 D^2}{2}\sqrt{\frac{gh}{2(D^4-d^4)}}$

۴) $\pi d^2 D^2\sqrt{\frac{gh}{2(D^4-d^4)}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در حالت تعادل (ثابت بودن ارتفاع سیال) رابطه موازنه زیر برقرار است:

$$input - output = ACC \xrightarrow{S-S} input = output$$

$$input = Q \quad , \quad output = V_{out} \times A_{out}$$

جهت به دست آوردن سرعت در خروجی مخزن از رابطه برنولی بین نقطه ۱ و ۲ در سطح سیال و نقطه ۲ واقع در خروجی مخزن استفاده می‌شود.

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \quad , \quad P_1=P_2=0 \text{ (فشار اتمسفر)}$$

$$z_2=0 \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+h=\frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2^2=V_1^2+2gh \qquad (I)$$

حال بین مقاطع ۱ و ۲ معادله پیوستگی را می‌نویسیم:

$$V_1A_1=V_2A_2 \Rightarrow V_1\frac{\pi}{4}D^2=V_2\frac{\pi}{4}d^2 \Rightarrow V_1=V_2\frac{d^2}{D^2} \qquad (II)$$

از ادغام روابط I و II به روابط مقابل می‌رسیم:

$$V_2^2=(V_2\frac{d^2}{D^2})^2+2gh \Rightarrow V_2^2[1-(\frac{d}{D})^4]=2gh$$

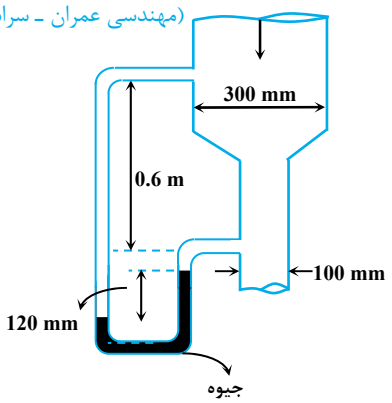
$$V_2=\sqrt{\frac{2gh}{1-(\frac{d}{D})^4}} \quad , \quad input=output \Rightarrow Q=V_2A_2$$

$$Q=\sqrt{\frac{2gh}{1-(\frac{d}{D})^4}}\times\frac{\pi}{4}d^2=\sqrt{\frac{2ghD^4}{D^4-d^4}}\times\frac{\pi}{4}d^2$$

$$Q=\frac{\pi d^2D^2}{2}\times\sqrt{\frac{2gh}{4(D^4-d^4)}} \Rightarrow Q=\frac{\pi d^2D^2}{2}\sqrt{\frac{gh}{2(D^4-d^4)}}$$

---

**مثال ۳۲:** روغن با $S_o=0/9$ در لوله قائم نشان داده شده در شکل، به طرف پایین در حرکت است. اگر اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه مانومتر **۱۲۰ mm** باشد، آن‌گاه با فرض چگالی نسبی ۱۳/۶ برای جیوه، جریان حجمی موجود در سیستم چند لیتر بر ثانیه خواهد بود؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)




۱) ۲۳

۲) ۳۵

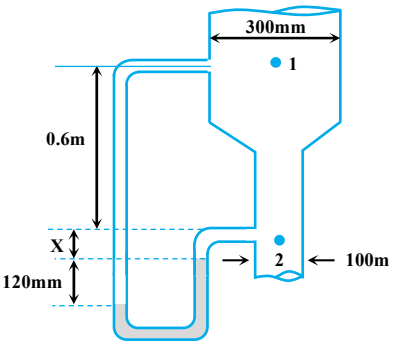
۳) ۴۶

۴) ۹۲

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نقاط ۱ و ۲ مشخص شده در شکل و با استفاده از معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲ داریم:




$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+\cancel{Z_2}^{\circ} \qquad V=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{16Q^2}{2\times 9/81\times\pi^2(0/3)^4}+0/6=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{16Q^2}{2\times 9/81\times\pi^2(0/1)^4}$$

$$\frac{P_1-P_2}{\gamma}=816/07Q^2-0/6$$

با استفاده از معادله مانومتری داریم:

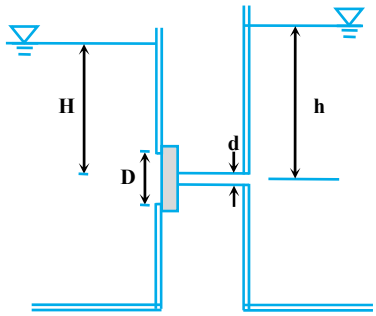
$$P_1+\gamma_o(0/6+x+0/12)-\gamma_{Hg}(0/12)-\gamma_o x=P_2 \Rightarrow \frac{P_1-P_2}{\gamma}=0/12(\frac{13/6}{0/9})-0/72=1/0933$$

$$816/07Q^2-0/6=1/0933 \Rightarrow Q=0/04555\ (\frac{m^3}{s})=45/55\ (\frac{lit}{s})$$

---

**مثال ۳۳:** **در وضعیت نشان داده شده، جت آب به قطر d با مانعی که دهانه مخزن به قطر D را مسدود کرده برخورد می‌کند. حداقل نسبت h / H کدام یک از گزینه‌های زیر است؟**

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)




۱) $2D^2/d^2$

۲) $\frac{1}{2}D^2/d^2$

۳) $\frac{4}{3}D^2/d^2$

۴) $\frac{3}{4}D^2/d^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از رابطه برنولی بین سطح آزاد مخزن سمت راست و خروجی آن داریم:

$$\cancel{\frac{P_a}{\gamma}}^{\circ}+\cancel{\frac{V_a^2}{2g}}^{\circ}+Z_a=\cancel{\frac{P}{\gamma}}^{\circ}+\frac{V^2}{2g}+\cancel{Z}^{\circ} \quad h=\frac{V^2}{2g}\Rightarrow V^2=2gh$$

با استفاده از معادله ممنتوم، نیروی وارد بر مانع به قطر D از طرف سیال خروجی از مخزن سمت راست برابر است با:

$$F_R=\rho V^2 A \Rightarrow F_R=\rho(2gh)\frac{\pi d^2}{4}$$

با استفاده از فشار هیدرواستاتیک در مخزن سمت چپ داریم:

$$P'=\rho gH$$

نیروی وارد بر مانع به قطر D از طرف سیال ساکن مخزن سمت چپ برابر است با:

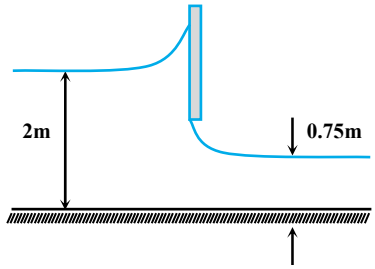
$$F_L=P'A'\Rightarrow F_L=(\rho gH)\frac{\pi D^2}{4} \qquad F_R=F_L \quad \text{(در حالت تعادل)}$$

$$\rho gh.\frac{\pi d^2}{2}=\rho gH.\frac{\pi D^2}{4}\Rightarrow \frac{h}{H}=\frac{D^2}{2d^2}$$

---

**مثال ۳۴:** **جریان دو بعدی در شکل نشان داده شده است. با فرض این که هیچ گونه تلفات در کانال نداشته باشیم و ضریب تصحیح انرژی کانال برابر با واحد باشد، دبی q جریان گذری بر حسب متر مکعب بر ثانیه بر متر برابر است با:**

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)




۱) ۳/۷۱

۲) ۴/۰۰

۳) ۵/۴۲

۴) ۱۲/۵۳

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون سوراخ بزرگ است، سرعت در بالادست صرف‌نظرکردنی نیست.

معادله پیوستگی بین ورودی و خروجی کانال : $V_1A_1 = V_2A_2 \Rightarrow V_1 \times 2 = V_2 \times 0/75 \Rightarrow V_1 = \frac{3}{8}V_2$

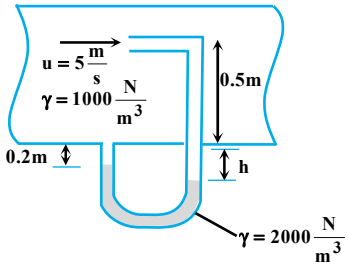
با استفاده از معادله برنولی بین سطح آزاد قبل و بعد از کانال می‌توان سرعت جریان بعد از کانال را محاسبه کرد. لذا داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma}^{\circ} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{P_2}{\gamma}^{\circ} + \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \quad ; \quad \frac{V_1^2}{2g} + 2 = \frac{V_2^2}{2g} + 0/75 \quad \frac{(\frac{9}{64} - 1)V_2^2}{2 \times 9/81} = -1/25 \Rightarrow V_2 = 5/34 \ (\frac{m}{s})$$

دبی حجمی: $q = V_2.A_2 \Rightarrow q = 5/34 \times 1 \times 0/75 = 4/00 \ (\frac{m^3}{s.m})$

---

**مثال ۳۵:** **با توجه به شکل مقدار h بر حسب متر چقدر است. از افت‌ها صرف‌نظر کنید.** $(g = 10 m/s^2)$ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)



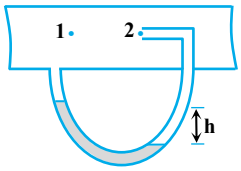

۱) ۱/۲۵

۲) ۱/۹۵

۳) ۰/۶۲

۴) ۰/۸۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از رابطهٔ برنولی بین نقاط ۱ و ۲ داریم:




$$\frac{P_1}{\gamma} + y + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} \quad (V_2 = 0) \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{1000} = \frac{V_1^2}{2g}$$

با استفاده از رابطه مانومتری داریم:

$$P_1 + 1000(0/5 + 0/2) + 2000h - 1000(0/5 + 0/2) = P_2 \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{1000} = h$$

با مقایسه روابط قبلی داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + h(1 - \frac{s}{s_0}) = \frac{P_1}{\gamma} \quad h = \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{5 \times 5}{2 \times 10} = 1/25 (\frac{m}{s})$$

---

**مثال ۳۶:** **اجزای سرعت برای یک جریان تراکم‌ناپذیر به صورت $w = b$ , مجهول ? $= v$ , $u = a(x^2 + y^2)$ داده شده است که a و b ثابت‌ها هستند. کدام گزینه شکل صحیح جزء سرعت v را نشان می‌دهد؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) $v = -2axy$

۲) $v = -4ay + C$

۳) $v = -2ayb + C$

۴) $v = -2axy + f(x,z,t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی داریم: معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر : $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{قرار دادن سرعت در معادله پیوستگی:} \ \frac{\partial}{\partial x}[a(x^2 + y^2)] + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(b) = 0$$

$$2ax + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2ax \Rightarrow v = -2axy + f(x,z,t)$$

---

**مثال ۳۷:** **برای یک جریان سه بعدی مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده‌اند. میزان تغییر حجم جرم معین سیال به ازای واحد حجم در واحد زمان چقدر است؟** $(\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \ , \ u = 2x + y \ , \ v = 2x - y \ , \ w = -z)$ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-1 s^{-1}$

۲) $1/2 s^{-1}$

۳) $3 s^{-1}$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

معادله پیوستگی به صورت دیفرانسیلی : $\vec{\nabla}.(\rho\vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

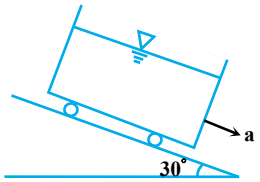
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \text{قرار دادن مؤلفه‌های سرعت در معادله پیوستگی} \Rightarrow \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} + \frac{\partial(2x - y)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

بنابراین تغییرات جرم حجمی نسبت به زمان صفر است.

www.modaresanesharif.ac.ir



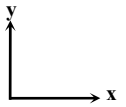
**مثال ۳۸:** در وضعیت نشان داده شده در شکل در صورتی که شیب سطح آزاد آب به موازات شیب سطح شیب‌دار باشد، مقدار شتاب a مساوی کدام یک از اعداد زیر است؟




۱) $۲/۴۵\frac{m}{s^۲}$
۲) $۴/۹\frac{m}{s^۲}$
۳) $۵/۷\frac{m}{s^۲}$
۴) $۹/۸\frac{m}{s^۲}$

**پاسخ:** گزینه «۲»

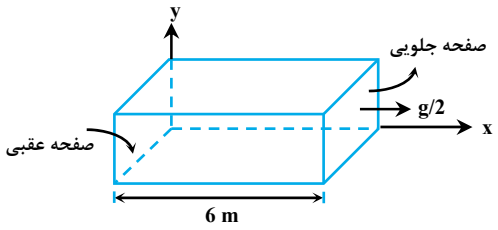
شیب سطح آزاد: $(\frac{dy}{dx})_{\text{سطح آزاد}} = -\frac{a_x}{g+a_y}$ $\quad \begin{cases} a_x = a\cos ۳۰ \\ a_y = -a\sin ۳۰ \end{cases}$ $\quad \tan(-۳۰^\circ) = -\frac{a\cos ۳۰^\circ}{g - a\sin ۳۰^\circ}$




$$\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{g - \frac{a}{۲}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}g - \frac{\sqrt{۳}}{۶}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}g = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a \Rightarrow a = \frac{g}{۲} = ۴/۹۰۵\ (\frac{m}{s^۲})$$

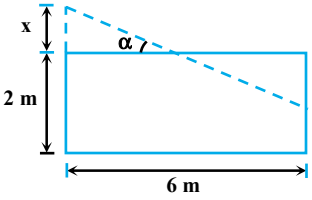
---

**مثال ۳۹:** مخزنی مکعب مستطیل شکل سربسته به ابعاد $۲^m \times ۲^m \times ۶^m$ از مایعی پر شده است و تحت شتاب خطی یکنواخت افقی $\frac{g}{۲}$ قرار می‌گیرد. نیروی وارد از سیال بر صفحه عقبی چند برابر نیروی وارد بر صفحه جلویی است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

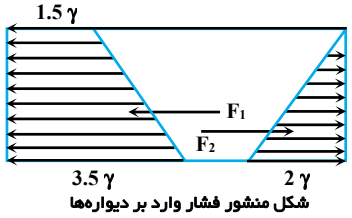



۱) ۱/۵
۲) ۲/۰
۳) ۲/۵
۴) ۳/۰

**پاسخ:** گزینه «۳» با فرض ظرف روباز و در سمت چپ داریم:




$$\begin{cases} \text{شیب سطح آزاد با استفاده از معادله اولر}: \tan\alpha = -\frac{a_x}{g+a_y} = \frac{-\frac{g}{۲}}{g+۰} = -\frac{۱}{۲} \\ \text{شیب سطح آزاد با توجه به شکل}: \tan\alpha = -\frac{x}{۳} \end{cases} \Rightarrow x = ۱/۵\ (m)$$



شکل منشور فشار وارد بر دیواره‌ها

بنابراین در حالت شتاب‌دار سیال به ارتفاع ۱/۵متر بالا می‌رود (به صورت مجازی) و برای تعیین نیروهای وارد بر صفحه عقبی و جلویی با استفاده از منشور فشار داریم:

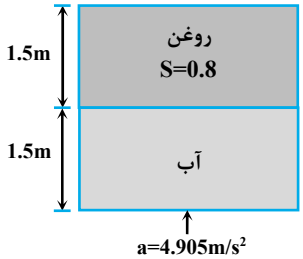
نیروی وارد بر دیواره عقب: $F_۱ = \frac{۱/۵\gamma + ۳/۵\gamma}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۱۰\gamma$

نیروی وارد بر دیواره جلو: $F_۲ = \frac{۲\gamma \times ۲}{۲} \times ۲ = ۴\gamma$

$$\Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲} = \frac{۱۰\gamma}{۴\gamma} = ۲/۵$$

---

**مثال ۴۰:** مخزن مکعبی شکل روبازی به ضلع ۳ متر که نصف آن آب و نصف دیگر با روغنی به چگالی نسبی ۰/۸ پر شده است، تحت تأثیر شتاب قائم $a = ۴/۹۰۵$ متر بر مجذور ثانیه به سمت بالا حرکت می‌کند. اختلاف فشار بین بالا و پایین مخزن چند کیلوگرم بر متر مربع است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)




۱) ۳۵۰۰
۲) ۴۰۵۰
۳) ۴۲۵۰
۴) ۴۵۰۰

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از معادله اولر داریم:

$$g = ۹/۸۱ \left(\frac{m}{s^۲}\right) \Rightarrow a_y = ۴/۹۰۵ \left(\frac{m}{s^۲}\right) = \frac{g}{۲}$$

توزیع فشار نسبی سیال : $P = C - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma(۱ + \frac{a_y}{g}) y$

$a_x = ۰$ ، $a_y = +\frac{g}{۲}$ ؛ توزیع فشار نسبی سیال : $P = C - \frac{۳}{۲}\gamma y$

ارتفاع آب معادل روغن عبارت است از:

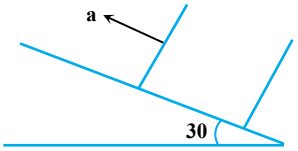
$$\gamma_w h_w = \gamma_{oil}\, h_{oil} \Rightarrow h_w = s_{oil}\, h_{oil} = ۰/۸ \times ۱/۵ = ۱/۲ \text{ (m)}$$

فشار در بالای مخزن : $P' = C - \frac{۳}{۲} \times ۱۰۰۰ g \times ۲/۷ \text{ (pa)}$ $\quad y = ۱/۵ + ۱/۲ = ۲/۷ \text{(m)}$ $\quad$ فشار در پایین مخزن: $y = ۰ \Rightarrow P = C$

اختلاف فشار در بالا و پایین مخزن : $P - P' = \frac{۳}{۲} \times ۱۰۰۰ g \times ۲/۷ = ۴۰۵۰ g \left(\frac{N}{m^۲}\right) \times \frac{۱(kg_f)}{g(N)} \Rightarrow P - P' = ۴۰۵۰ \left(\frac{kg_f}{m^۲}\right)$

---

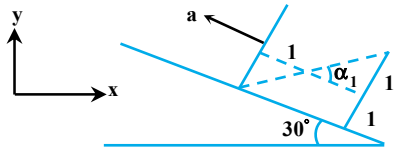
**مثال ۴۱:** **جعبه‌ای با ابعاد ۲ فوت تا نیمه از روغن پر شده است و بر روی یک سطح شیب‌دار با زاویه ۳۰° به سمت بالا کشیده می‌شود. شتاب ظرف چقدر باشد تا روغن از لبه ظرف شروع به بیرون ریختن نماید؟** (مهندسی شیمی ـ آزاد ۸۶)




۱) $۴۳/۶۸ \frac{ft}{s^۲}$ ۲) $۱۱/۷۹ \frac{ft}{s^۲}$

۳) $۳۲/۲ \frac{ft}{s^۲}$ ۴) $۱۶/۱ \frac{ft}{s^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل داریم: $\tan\alpha = \frac{۱}{۱} \Rightarrow \alpha = ۴۵°$




بنابراین هنگامی که سطح آزاد روغن از لبه ظرف می‌گذرد، زاویه آن با راستای افق عبارت است از:

$\theta = ۴۵° - ۳۰° = ۱۵°$

از طرفی با استفاده از معادله اولر برای محاسبه شیب سطح آزاد با راستای افق داریم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{f.s.} = \tan\theta = -\frac{a_x}{g + a_y} \qquad \tan ۱۵° = -\frac{-a\cos ۳۰°}{g + a\sin ۳۰°} \qquad g = ۳۲/۲ \left(\frac{ft}{s^۲}\right) \Rightarrow a = ۱۱/۷۹ \left(\frac{ft}{s^۲}\right)$$

---

**مثال ۴۲:** **واگن حامل مایعی به وزن مخصوص $\gamma$ از روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه $\alpha$ می‌سازد، بالا می‌رود. اگر توزیع فشار یکنواخت بر کف واگن مورد نظر باشد، در این صورت باید:** (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۷)

۱) رسیدن به چنین حالتی غیرممکن است.

۲) سرعت کامیون ثابت شود.

۳) شتاب کامیون ثابت و حرکت آن کندشونده باشد.

۴) شتاب کامیون ثابت و حرکت آن تندشونده باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای این که توزیع فشار بر کف واگن یکنواخت باشد، سطح مایع باید موازی با سطح شیب‌دار باشد. لذا باید شتاب کامیون ثابت و حرکت آن کندشونده باشد.

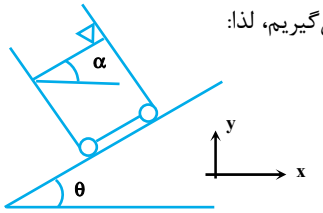
---

**مثال ۴۳:** **تانک استوانه‌ای روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که با افق زاویه $\theta$ می‌سازد می‌لغزد. زاویه سطح مایع درون تانک با سطح شیب‌دار چقدر است؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}\theta$

۳) $\theta$ ۴) $۲\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» زاویه سطح شیب‌دار با افق را $\theta$ و زاویه سطح آزاد مایع درون تانک با افق را $\alpha$ در نظر می‌گیریم، لذا:

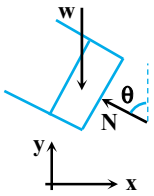



$$\tan\alpha = -\frac{a_x}{a_y + g}$$

www.modaresanesharif.ac.ir



حال برای به دست آوردن $a_x$ و $a_y$ با استفاده از دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر تانک داریم:




$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow -N\sin\theta = m a_x \Rightarrow a_x = \frac{-N\sin\theta}{m}$$

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow N\cos\theta - mg = m a_y \Rightarrow a_y = \frac{N\cos\theta}{m} - g$$

زاویه سطح آزاد با افق : $\tan\alpha = -\dfrac{-\frac{N\sin\theta}{m}}{(\frac{N\cos\theta}{m} - g) + g} = \tan\theta$

بنابراین سطح مایع درون تانک با سطح شیب‌دار موازی بوده و لذا زاویهٔ سطح آزاد مایع درون تانک با سطح شیب‌دار صفر است.

**مثال ۴۴:** **مخزنی داخل آسانسوری که با شتابی دو برابر شتاب ثقل به سمت پایین حرکت می‌کند، قرار دارد. داخل مخزن آب ریخته شده و مخزن با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد. تغییرات فشار داخل مخزن با ارتفاع چگونه است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) فشار نسبت به ارتفاع تغییر نمی‌کند.
۲) فشار تابع ارتفاع نیست و فقط تابع سرعت زاویه‌ای است.
۳) با افزایش ارتفاع، فشار زیاد می‌شود.
۴) با افزایش ارتفاع، فشار کم می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر حرکت مخزن فقط دورانی (با سرعت زاویه‌ای ثابت) بوده و در راستای قائم شتاب نداشته باشد، با افزایش ارتفاع آب مقدار فشار داخل مخزن افزایش می‌یابد.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\gamma \Rightarrow P = \rho g h = \gamma h$$

اگر آسانسور با شتاب ثابت در راستای قائم به سمت پایین حرکت کند، داریم:

$$a_y = -2g \Rightarrow P = -\gamma h \qquad P = \gamma(1 + \frac{a_y}{g})h$$

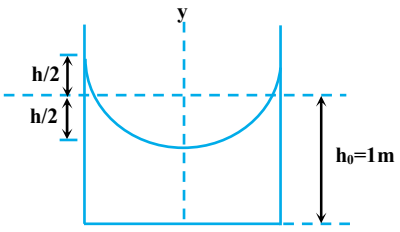
پس با افزایش ارتفاع، فشار کاهش پیدا می‌کند.

**مثال ۴۵:** **یک ظرف استوانه‌ای به قطر ۱/۲ متر و به ارتفاع ۲ متر، تا نصف محتوی آب به جرم مخصوص $1000\,kg/m^3$ است. اگر این ظرف با سرعت ۹۰ دور در دقیقه حول محور قائم خود حرکت دورانی انجام دهد، حداکثر فشار وارد بر کف ظرف چند کیلوپاسکال خواهد شد؟ (شتاب ثقل $g = 10\,m/s^2$)**

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۸ ۲) ۱/۸ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۲۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بیشترین فشار وارد بر کف ظرف بر روی جداره استوانه قرار دارد و داریم:

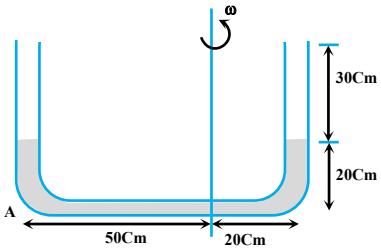



$$h = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \quad ; \quad P_{max} = \gamma(h_0 + \frac{h}{2}) \Rightarrow P_{max} = \rho g(h_0 + \frac{\omega^2 r_0^2}{4g})$$

$$\omega = 2\pi \times \frac{90}{60} = 3\pi\ (\frac{rad}{s})$$

$$P_{max} = 1000 \times 10[1 + \frac{(3\pi)^2 (0/6)^2}{4 \times 10}] = 17994/4\ (Pa) \Rightarrow P_{max} \simeq 18\ (kPa)$$

**مثال ۴۶:** **لوله U شکل که از دو سر باز می‌باشد در حالت سکون تا ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر آب دارد. $\omega$ بر حسب دور در دقیقه چقدر باشد تا فشار در نقطه A صفر شود؟** (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)



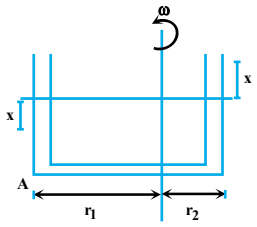

۱) ۷۶
۲) ۳۶
۳) ۱۷
۴) ۵۸

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون قطر لوله‌ها یکسان است، پس اگر آب در لوله نزدیک‌تر به اندازه x بالا برود در لوله دورتر به اندازه x پایین می‌آید.

بنابراین خواهیم داشت:



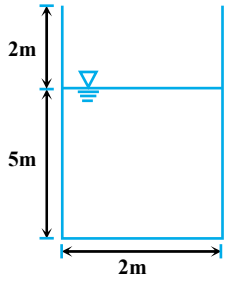

$$h_2-h_1=\frac{\omega^2}{2g}\times(r_2^2-r_1^2)$$

$$2x=\frac{\omega^2}{2g}\times(r_2^2-r_1^2) \qquad x=\frac{\omega^2}{4g}\times(r_2^2-r_1^2)$$

$$P_A=\gamma(H-x)=\gamma\times[H-\frac{\omega^2}{4g}(r_2^2-r_1^2)]\Rightarrow P_A=0=\gamma\times[0/2-\frac{\omega^2}{4g}\times(0/04-0/25)]\Rightarrow\omega=6/1\,(\frac{rad}{s})\;;\;\omega=6/1\times\frac{60}{2\pi}=58/4\,(\frac{دور}{دقیقه})$$

---

**مثال ۴۷:** **مخزن استوانه‌ای شکل مقابل به قطر ۲/۰ متر و ارتفاع ۷/۰ متر تا ۵/۰ متر از آب پر شده است. اگر این مخزن با سرعت دورانی $10\frac{rad}{s}$ حول مرکز قاعده دوران نماید، چه حجمی از آب از مخزن خارج می شود؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)



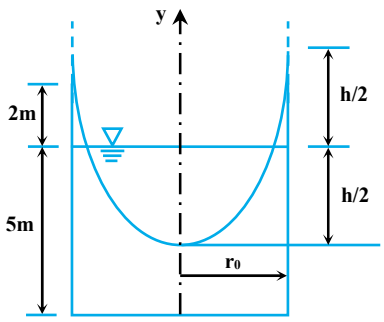

۱) $0/78m^3$

۲) $3/14m^3$

۳) $1/57m^3$

۴) آبی از مخزن به بیرون ریخته نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بعد از دوران مخزن استوانه‌ای، آب در روی جداره به اندازه $\frac{h}{2}$ بالا رفته و در مرکز دوران به اندازه $\frac{h}{2}$ پایین می‌آید، بنابراین داریم:




$$h=\frac{\omega^2r_0^2}{2g} \qquad h=\frac{(10)^2(1)^2}{2(10)}=5\,(m)$$

چون $\frac{h}{2}=2/5>2$ است، بنابراین آب از ظرف بیرون می‌ریزد.

معادله سطح آزاد : $\frac{\rho\omega^2}{2}r^2-\rho gy=-C$

حال با استفاده از نقطه معلوم سطح آزاد در لبه جداره، ثابت C به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{vmatrix}r=1(m)\\y=7(m)\end{vmatrix}:\frac{1000(10)^2}{2}(1)^2-1000(10)(7)=-C\Rightarrow\;C=20000$$

معادله سطح آزاد : $50000r^2-10000y=-20000\;\Rightarrow\;y=5r^2+2$

حجم اولیه آب داخل مخزن : $V_1=\pi r^2h=\pi(1)^2(5)=5\pi(m^3)$

حجم نهایی آب داخل مخزن : $V_2=\int_0^1(2\pi rdr)y=\int_0^1(2\pi rdr)(5r^2+2)$ $\qquad V_2=2\pi(\frac{5}{4}r^4+r^2)\Big|_0^1=4/5\pi(m^3)$

حجم آب خارج شده از مخزن : $\Delta V=V_1-V_2=0/5\pi\;\Rightarrow\;\Delta V=1/57(m^3)$

---

**مثال ۴۸:** **مدل تخلیه سیال از مخزن به فرم $v=k(\Delta P)^a(\rho)^b$ پیشنهاد می‌شود که در آن v سرعت، $\Delta P$ افت فشار، $\rho$ دانسیته سیال، k ضریب و نماهای a و b ثابت‌های مدل می‌باشند. کدام پاسخ زیر بیانگر رابطه سرعت با افت فشار است؟** (مهندسی نساجی- سراسری ۹۵)

۱) v تابعی از $(\frac{\Delta P}{\rho})$ است. ۲) v تابعی از $(\frac{\Delta P}{\rho})^2$ است. ۳) v تابعی از $(\frac{\rho}{\Delta P})^{0/5}$ است. ۴) v تابعی از $(\frac{\Delta P}{\rho})^{0/5}$ است.

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با بررسی واحد عبارت‌های داده شده داریم:

$$\frac{\Delta P}{\rho}:\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}}=\frac{N.m}{kg}=\frac{kg.\frac{m}{s^2}.m}{kg}=\frac{m^2}{s^2}\Rightarrow(\frac{\Delta P}{\rho})^2:\frac{m^4}{s^4}$$

بنابراین گزینه (۴) واحد سرعت را به‌دست می‌دهد.

$$(\frac{\rho}{\Delta P})^{0/5}:\frac{s}{m}\quad,\quad(\frac{\Delta P}{\rho})^{0/5}:\frac{m}{s}$$

---

**مثال ۴۹:** **مقدار دبی عبوری سیال از یک روزنه Q، به چگالی سیال ρ، قطر روزنه d و اختلاف فشار ΔP بستگی دارد. با استفاده از تحلیل ابعادی نشان دهید که معادله دبی با کدام گزینه برابر است؟ (k ضریب بدون بعد است).** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $Q=\frac{k}{d}\frac{\Delta P}{\rho}$ ۲) $Q=kd^2\frac{\Delta P}{\rho}$ ۳) $Q=kd\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ ۴) $Q=kd^2\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** با استفاده از روش بیان شده در متن درس، ابتدا معادله ابعادی هر یک از کمیت‌های موجود را در دستگاه MLTθ می‌نویسیم. لذا داریم:

$$[d]\equiv L\quad,\quad[\Delta P]\equiv\frac{M}{LT^2}\quad,\quad[\rho]\equiv\frac{M}{L^3}\quad,\quad[Q]\equiv\frac{L^3}{T}$$

حال باید بعدهای L و T مربوط به کمیت Q را بر حسب کمیت‌های ΔP، ρ و d به دست آوریم:

$$d=L\Rightarrow L=d\quad;\quad\rho=\frac{M}{L^3}\Rightarrow M=\rho d^3$$

$$\Delta P=\frac{M}{LT^2}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{M}{L\Delta P}}=\sqrt{\frac{\rho d^3}{d\Delta P}}=d\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}}$$

با قرار دادن در رابطه $[Q]\equiv\frac{L^3}{T}$ داریم:

$$Q=kd^3\times\frac{1}{d}\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}=kd^2\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

**روش دوم:** با توجه به متغیرهای معرفی شده داریم:

$$Q=k(d)^a(\Delta P)^b(\rho)^c$$

حال برای یافتن مجهولات a، b و c لازم است که هر یک از کمیت‌های بالا را بر حسب ابعاد اصلی در دستگاه MLTθ بنویسیم:

$$(\frac{L^3}{T})=(L)^a(\frac{M}{LT^2})^b(\frac{M}{L^3})^c\Rightarrow\begin{cases}M:c+b=0\\L:a-b-3c=3\\T:-2b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=\frac{1}{2}\\c=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow Q=kd^2\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

**روش سوم:** برای گزینه‌های داده شده، واحدها را تعیین می‌کنیم:

۱) $\frac{1}{m}.\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}}=\frac{N}{kg}=\frac{kg.m}{s^2.kg}=\frac{m}{s^2}$

۲) $m^2.\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}}=\frac{N.m^3}{kg}=\frac{kg.m.m^3}{s^2.kg}=\frac{m^4}{s^2}$

۳) $m.\sqrt{\frac{N/m^2}{kg/m^3}}=m.\sqrt{\frac{N.m}{kg}}=m.\sqrt{\frac{kg.m.m}{s^2.kg}}=\frac{m^2}{s}$

۴) $m^2.\sqrt{\frac{N/m^2}{kg/m^3}}=m^2.\sqrt{\frac{N.m}{kg}}=m^2.\sqrt{\frac{kg.m.m}{s^2.kg}}=\frac{m^3}{s}$

فقط واحد به دست آمده در گزینه ۴، معادل واحد دبی حجمی است.

---

**مثال ۵۰:** **با باز کردن دریچه در کف یک مخزن مدل، این مخزن در ۴ دقیقه تخلیه می‌شود. اگر $L_r=\frac{1}{225}$ باشد، مخزن اصلی در چند دقیقه تخلیه خواهد شد؟**

☑ **پاسخ:** زمان تخلیه شدن سیال: $t=\frac{v}{\sqrt{2ghA}}$ ⇒ دبی حجمی خروجی سیال: $Q=\frac{v}{t}=VA$ و سرعت تخلیه سیال: $V=\sqrt{2gh}$

v : حجم مخزن  V : سرعت خروجی از مخزن  h : ارتفاع سیال داخل مخزن

مقیاس هندسی: $L_r=\frac{L_M}{L_P}=\frac{1}{225}$

www.modaresanesharif.ac.ir



$$\frac{t_M}{t_P}=\frac{v_M}{v_P}.\frac{A_P}{A_M}.(\frac{h_P}{h_M})^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{t_M}{t_P}=(\frac{L_M}{L_P})^{3}(\frac{L_P}{L_M})^{2}(\frac{L_P}{L_M})^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{t_M}{t_P}=L_r^{3}.L_r^{-2}.L_r^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{L_r}$$

زمان تخلیه شدن سیال از مخزن اصلی: $t_P=\frac{t_M}{\sqrt{L_r}}=\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{225}}}=4\times15 \Rightarrow t_P=60\ (min)$

**مثال ۵۱:** **آب در لوله‌ای به قطر ۶۰۰ میلی‌متر و با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه در حال جریان است. مدلی با مقیاس ۱:۱۰ در آزمایشگاه ساخته می‌شود. در صورتی که سیال استفاده شده در آزمایشگاه آب باشد، برای برقراری تشابه دینامیکی، دبی لوله در آزمایشگاه بر حسب لیتر بر ثانیه کدام است؟** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۴ ۲) ۹/۲ ۳) ۷/۱ ۴) ۱۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در جریان داخل لوله‌ها عدد رینولدز مهم است. لذا از برابری عدد رینولدز برای مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(Re)_P=(Re)_M \qquad (\frac{\rho VD}{\mu})_P=(\frac{\rho VD}{\mu})_M \qquad \frac{V_P}{V_M}=\frac{D_M}{D_P}$$

دبی حجمی نمونه اصلی به مدل: $\frac{Q_P}{Q_M}=\frac{V_P}{V_M}.\frac{A_P}{A_M}=\frac{D_M}{D_P}.(\frac{D_P}{D_M})^{2}=\frac{D_P}{D_M}=10$

دبی حجمی نمونه اصلی: $Q_P=V_P.A_P=0/5\times\frac{\pi}{4}(0/6)^{2} \Rightarrow Q_P=0/1414\ (\frac{m^3}{s})$ , $Q_M=\frac{Q_P}{10} \Rightarrow Q_M=14/14\ (\frac{lit}{s})$

**مثال ۵۲:** **برای مطالعه سدی، سرریز آن را با مقیاس $\frac{1}{36}$ در آزمایشگاه ساخته‌ایم. دبی جریان در مدل ۰/۱۵ متر مکعب در ثانیه است. زمان مشاهده شده در مدل برای وقوع یک اتفاق خاص (مثلاً زمان حرکت آب بین دو نقطه مشخص) یک دقیقه است. شدت جریان و زمان معادل، در نمونه اصلی (طبیعت) برابر است با:** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $1166m^3/s$ و ۳۶۰s ۲) $1500m^3/s$ و ۳۰۰s ۳) $5400m^3/s$ و ۳۰۰s ۴) $6998m^3/s$ و ۳۶۰s

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اهمیت عدد فرود در سرریز سدها و برابری آن بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(Fr)_M=(Fr)_P \qquad (\frac{V^2}{Lg})_M=(\frac{V^2}{Lg})_P \Rightarrow \frac{V_P}{V_M}=(\frac{L_P}{L_M})^{\frac{1}{2}}$$

سپس برای حذف عبارت سرعت و ظاهر شدن عبارت زمان، با قرار دادن سرعت بر حسب ابعاد اصلی $([V]\equiv\frac{L}{T})$ داریم:

$$(\frac{L^2/T^2}{L})_M=(\frac{L^2/T^2}{L})_P \qquad (\frac{L}{T^2})_M=(\frac{L}{T^2})_P$$

زمان معادل در نمونه اصلی عبارت است از:

$$(\frac{T_P}{T_M})^{2}=\frac{L_P}{L_M} \qquad \frac{T_P}{60}=\sqrt{36} \Rightarrow T_p=360\ (s)$$

نسبت دبی حجمی نمونه اصلی به مدل: $\frac{Q_P}{Q_M}=\frac{V_PA_P}{V_MA_M}=(\frac{L_P}{L_M})^{\frac{1}{2}}(\frac{L_P}{L_M})^{2}=(\frac{L_P}{L_M})^{\frac{5}{2}} \Rightarrow Q_P=0/15(36)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow Q_P=1166/4\ (\frac{m^3}{s})$

**مثال ۵۳:** **اکتان که به عنوان سوخت در برخی موتورها استفاده می‌شود، از دهانه یک نازل به قطر ۰/۳cm و سرعت ۳۰/۵m/sec در هوا پخش می‌گردد. غلظت اکتان رها شده در هوا بسیار اندک می‌باشد به گونه‌ای که چگالی مخلوط رها شده با چگالی هوا برابر می‌باشد. این سیستم با یک اریفیس به قطر ۰/۶۲۵cm مدل می‌گردد که آب را به داخل هوا پخش می‌کند. سرعت متوسط مخلوط آب و هوا برای تشابه دینامیکی چه مقدار می‌باشد (کشش سطحی آب و اکتان به ترتیب $71/97\times10^{-3}$ N/m و $21/14\times10^{-3}$ N/m می‌باشد)؟** (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) ۴۹/۸ m/sec ۲) ۱۱/۴۵ m/sec ۳) ۳۹ m/sec ۴) ۸۱/۲ m/sec

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تأثیر نیروی کشش سطحی، از برابری عدد وبر بین مدل و نمونه اصلی استفاده می‌شود.

$$W_M=W_P \Rightarrow (\frac{\rho V^2D}{\sigma})_M=(\frac{\rho V^2D}{\sigma})_P \Rightarrow \frac{\rho_{air}\times V_M^{2}\times0/625}{71/97\times10^{-3}}=\frac{\rho_{air}\times(30/5)^{2}\times0/3}{21/14\times10^{-3}} \Rightarrow V_M=39\ (\frac{m}{s})$$

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۵۴:** **لوله پیتوت برای اندازه‌گیری کدام مورد به‌کار گرفته می‌شود؟** (مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۷)

۱) فشار دینامیکی سیال در نقطه موردنظر
۲) فشار سیال در نقطه موردنظر
۳) سرعت در یک نقطه مشخص
۴) دبی جریان

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» لوله پیتوت برای اندازه‌گیری سرعت در یک نقطه مشخص به‌کار می‌رود.

---

**مثال ۵۵:** **جریان آرام مایعی با شدت جریان $۰/۰۲۵\frac{m^۳}{s}$ در لوله‌ای به قطر ۱۰cm جریان دارد. مقدار سرعت سیال در فاصلهٔ ۲ cm از جداره لوله، چند متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳/۲ ۲) ۴/۱ ۳) ۵/۴ ۴) ۶/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از معادله توزیع سرعت در جریان آرام داریم:

(۱) توزیع سرعت در جریان آرام داخل لوله: $V = ۲\bar{V}[۱-(\frac{r}{R})^۲]$

$$\bar{V}=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{\pi R^۲}\overset{(۱)}{\Rightarrow} V=\frac{۲Q}{\pi R^۲}[۱-(\frac{r}{R})^۲]\xrightarrow{R=\frac{D}{۲}} V=\frac{۲Q\times ۴}{\pi D^۲}\times\frac{۴}{D^۲}(\frac{D^۲}{۴}-r^۲)\Rightarrow V=\frac{۳۲Q}{\pi D^۴}(\frac{D^۲}{۴}-r^۲)$$

$$r=\frac{D}{۲}-y=\frac{۱۰}{۲}-۲=۳\ (cm)$$

$$V=\frac{۳۲\times ۰/۰۲۵}{\pi(۰/۱)^۴}[\frac{(۰/۱)^۲}{۴}-(۰/۰۳)^۲]\Rightarrow\ V=۴/۰۷۴\ (\frac{m}{s})$$

---

**مثال ۵۶:** **اگر در جریان لایه‌ای در لوله‌ها فقط قطر دو برابر گردد (افت کل و طول لوله ثابت بمانند)، نسبت دبی جدید به دبی قدیم چقدر است؟** (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۸ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در جریان آرام داخل لوله‌ها داریم:

$$h_l=f\frac{L}{D}\frac{V^۲}{۲},\ f=\frac{۶۴}{Re}\Rightarrow h_l=\frac{۱۲۸\mu LQ}{\rho\pi D^۴}\quad \text{(رابطه پوازی)}$$

$$(h_l)_۱=(h_l)_۲\Rightarrow\frac{Q_۲}{Q_۱}=(\frac{D_۲}{D_۱})^۴\ ,\ D_۲=۲D_۱\Rightarrow\frac{Q_۲}{Q_۱}=۱۶$$

---

**مثال ۵۷:** **در یک آزمایشگاه سیالات، جت سیالی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ از لوله‌ای بسیار باریک با سطح مقطع $۲cm^۲$ خارج می‌شود. توان این جت سیال در صورتی‌که دانسیته سیال برابر $۷۰۰\frac{kg}{m^۳}$ باشد، چند وات است؟** (نانو فناوری- نانو مواد- سراسری ۹۷)

۱) ۴۶۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۶۶۰ ۴) ۷۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توان جت سیال عبارت است از:

$$P=\frac{۱}{۲}\rho AV^۳\qquad P=\frac{۱}{۲}\times ۷۰۰\times ۲\times ۱۰^{-۴}\times(۲۰)^۳\ \Rightarrow\ P=۵۶۰\ (w)$$

---

**مثال ۵۸:** **جریان هوا با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در لوله‌ای جریان دارد. چگالی هوا $۱/۲\frac{kg}{m^۳}$ است. در صورتی که ضریب اصطکاک مودی برای این جریان برابر ۰/۰۲ باشد، تنش برشی وارد بر جداره لوله چند نیوتن بر متر مربع $(\frac{N}{m^۲})$ می‌باشد؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۲/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از معادلهٔ تعادل، رابطهٔ بین تنش برشی با افت فشار به صورت زیر تعیین می‌شود:

(۱) در حالت تعادل: $\tau_w.A'=(\Delta P).A\qquad \tau_w(\pi DL)=(\Delta P)(\frac{\pi D^۲}{۴})$

افت فشار از معادلهٔ دارسی ـ ویسباخ عبارت است از:

$$\frac{\Delta P}{\rho}=h_l=f\frac{L}{D}\frac{V^۲}{۲}\Rightarrow\Delta P=f\frac{L}{D}(\frac{۱}{۲}\rho V^۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir



با قرار دادن افت فشار در معادلهٔ ۱ داریم:

$$\tau_w = \frac{f}{8}\rho V^2 \Rightarrow \tau_w = \frac{0/02}{8}\times 1/2\times(10)^2 \Rightarrow \tau_w = 0/3\ (\frac{N}{m^2})$$

**مثال ۵۹: توان موجود در یک جت آب که با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه از لوله‌ای با سطح مقطع ۰/۰۰۵ متر مربع خارج می‌شود، چند کیلووات می‌باشد؟**

**(دانسیته آب $1000\frac{kg}{m^3}$ است.)** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای تعیین ارتفاع اوج از معادلهٔ برنولی استفاده می‌شود:

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gy_1 = \frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gy_2 \Rightarrow \frac{V_1^2}{2} = gh \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

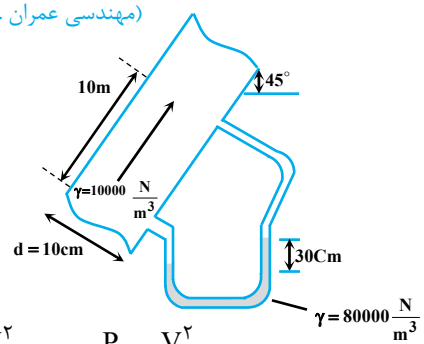
توان عبارت از کار انجام شده در واحد زمان است و کار انجام شده توسط جت آب برای ایجاد اختلاف ارتفاع استفاده می‌شود:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \dot{m}gh = (\rho VA)g(\frac{V^2}{2g}) = \frac{1}{2}\rho AV^3$$

$$P = \frac{1}{2}\times 1000\times(10)^3\times 0/005 = 2500\ (w) \Rightarrow\ P = 2/5\ (kw)$$

**مثال ۶۰: اگر افت بین دو نقطه‌ای که مانومتر نصب شده ۱/۵ برابر هد سرعت لوله باشد، در این صورت دبی بر حسب لیتر بر ثانیه در لوله چقدر است؟**

(مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)




۱) ۴۴
۲) ۵۲
۳) ۴۱
۴) ۵۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از معادله اصلاح شده برنولی در جهت جریان داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma_1}+\frac{V_1^2}{2g}+y_1 = \frac{P_2}{\gamma_1}+\frac{V_2^2}{2g}+y_2+H_l$$

با استفاده از معادله پیوستگی داریم:

$$D_1 = D_2 \Rightarrow V_1 = V_2 = V$$

$$\frac{P_1-P_2}{10000} = 10\sin 45 + 1/5\frac{V^2}{2g}\quad (*)$$

با استفاده از رابطه مانومتری داریم:

$$P_1+10000(0/3)-80000(0/3)-10000(10\sin 45) = P_2 \Rightarrow \frac{P_1-P_2}{10000} = 2/1+10\sin 45\quad (**)$$

از مقایسه روابط (*) و (**) داریم:

$$10\sin 45+1/5\frac{V^2}{2g} = 2/1+10\sin 45 \Rightarrow V = 5/24\ (\frac{m}{s})$$

$$Q = VA \Rightarrow Q = 5/24\times\frac{\pi}{4}(0/1)^2 \Rightarrow Q = 0/041\ (\frac{m^3}{s}) = 41\ (\frac{lit}{s})$$

**مثال ۶۱: لزجت گردابی (eddy viscosity):** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) مستقل از نوع جریان است.
۲) یک خاصیت فیزیکی سیال است.
۳) به آشفتگی جریان و جرم مخصوص سیال بستگی دارد.
۴) نسبت لزجت به جرم مخصوص سیال است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» لزجت گردابه‌ای به آشفتگی جریان و جرم مخصوص سیال بستگی دارد.

در مورد گزینهٔ ۴ باید توجه نمود که لزجت گردابی سینماتیک عبارت از نسبت لزجت گردابی به جرم مخصوص $(\varepsilon = \frac{\eta}{\rho})$ است که صرفاً خاصیت ماده است، و این تعریف برای لزجت گردابی صادق نیست.

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۶۲:** روغن در لوله‌ای به قطر داخلی $\frac{۱}{۲}$ اینچ با دبی حجمی ۶ gal/min در جریان است. اگر جریان آرام باشد، در چه شعاعی (بر حسب in) سرعت با سرعت متوسط برابر خواهد بود؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

$(\rho_{\text{روغن}} = ۶۰ lb_m/ft^۳ \ , \ \mu_{\text{روغن}} = ۰/۲۰۱۶ lb_m/ft.sec)$

۱) ۰/۱۷۷ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۲۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» رابطه سرعت در جریان آرام داخل لوله برابر است با:

$$V = V_{max}[۱-(\frac{r}{R})^۲] \quad (۱)$$

در جریان آرام، سرعت متوسط برابر با نصف سرعت ماکزیمم است:

$$V_{av} = \frac{۱}{۲}V_{max} \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}V_{max} = V_{max}[۱-(\frac{r}{R})^۲] \Rightarrow (\frac{r}{R})^۲ = \frac{۱}{۲} \qquad \frac{r}{۰/۲۵} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow r = ۰/۱۷۷ \ (in)$$

---

**مثال ۶۳:** هوا با ویسکوزیته سینماتیک $\nu = ۱/۰\times۱۰^{-۵} \ m^۲/s$ با سرعت ۲۵ m/s در یک کانال کولر که سطح مقطع آن مربعی به طول ضلع ۵۰ سانتی‌متر می‌باشد، عبور می‌نماید. در این حالت عدد رینولدز کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

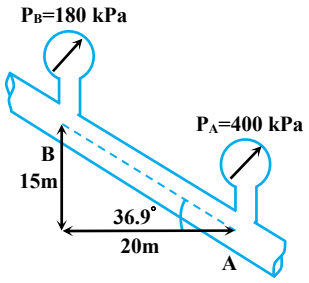
۱) ۳۱۲۵۰۰ ۲) ۱۲۵۰۰۰۰ ۳) ۲۲۵۰۰۰۰ ۴) ۶۰۰۰۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون مقطع لوله دایروی نیست، بنابراین برای محاسبهٔ عدد رینولدز باید شعاع هیدرولیکی مقطع محاسبه شود:

$$D_H = \frac{۴A}{P} = \frac{۴(۰/۵)^۲}{۴(۰/۵)} = ۰/۵ \ (m) \qquad Re = \frac{VD_H}{\nu} \qquad Re = \frac{۲۵\times۰/۵}{۱\times۱۰^{-۵}} \Rightarrow Re = ۱۲۵۰۰۰۰$$

---

**مثال ۶۴:** لوله‌ای به قطر ۳ سانتی‌متر، بر روی شیبی با زاویه $۳۶/۹^\circ$ مطابق شکل قرار گرفته است. با توجه به فشارهای اندازه‌گیری شده در نقاط A و B، کدام گزینه در خصوص جهت و سرعت جریان صحیح است؟ ( $f = ۰/۰۵$ ، $\gamma$ سیال مورد نظر $۹۰۰۰ N/m^۳$ و g برابر با $۹/۸۱ m/s^۲$ می‌باشد.) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)




۱) جهت جریان از B به طرف A و سرعت برابر با $۴/۲۲ \frac{m}{s}$ است.

۲) جهت جریان از B به طرف A و سرعت برابر با $۲/۱۱ \frac{m}{s}$ است.

۳) جهت جریان از A به طرف B و سرعت برابر با $۲/۱۱ \frac{m}{s}$ است.

۳) جهت جریان از A به طرف B و سرعت برابر با $۴/۲۲ \frac{m}{s}$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای تشخیص جهت جریان، هد کلی در نقاط A و B را محاسبه کرده، و هر کدام که هد کلی بیشتری داشته باشد جریان از آن نقطه شروع می‌شود:

$$H_A = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V^۲}{۲g} + \cancel{Z_A}^{۰} = \frac{۴۰۰\times۱۰^۳}{۹۰۰۰} + \frac{V^۲}{۲g} = ۴۴/۴۴ + \frac{V^۲}{۲g}$$

$$H_B = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V^۲}{۲g} + Z_B = \frac{۱۸۰\times۱۰^۳}{۹۰۰۰} + \frac{V^۲}{۲g} + ۱۵ = ۳۵ + \frac{V^۲}{۲g}$$

$\Rightarrow H_A > H_B \Rightarrow$ جریان از A به سمت B حرکت می‌کند

برای محاسبهٔ سرعت، با استفاده از معادلهٔ اصلاح شدهٔ برنولی بین نقاط A و B داریم: $H_A = H_B + f\frac{L}{D}\frac{V^۲}{۲g}$

$$L = (۱۵^۲ + ۲۰^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۲۵ \ (m)$$

$$۴۴/۴۴ + \cancel{\frac{V^۲}{۲g}} = ۳۵ + \cancel{\frac{V^۲}{۲g}} + ۰/۰۵\times\frac{۲۵}{۰/۰۳}\times\frac{V^۲}{۲\times۹/۸۱} \Rightarrow V = ۲/۱۱ \ (\frac{m}{s})$$

---

**مثال ۶۵:** اگر قطر لوله در یک سیستم انتقال تحت فشار تغییر کند، در حالی که شدت جریان در آن ثابت باشد: (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) شیب خطوط هیدرولیکی و انرژی تغییر می‌کند.

۲) فاصله بین خطوط شیب انرژی و هیدرولیکی تغییر می‌کند.

۳) هر دو مورد گزینه‌های ۱ و ۲ اتفاق می‌افتد.

۳) هیچ‌یک از موارد فوق تغییر نمی‌کند.

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خط تراز انرژی نشان‌دهنده $(\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z)$ ثابت است (هدکلی). مجموع هد ارتفاع و هد فشار $(\frac{P}{\gamma}+z)$ نشان‌دهنده خط تراز هیدرولیک است.

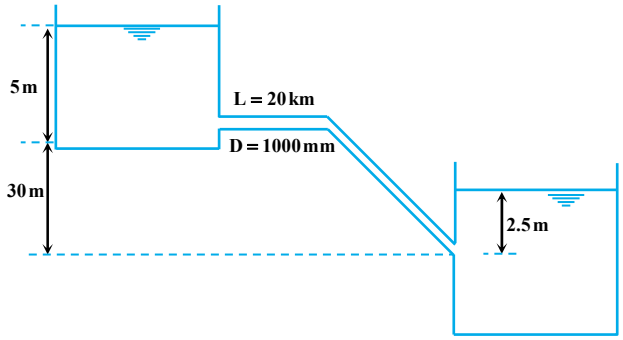
$$Q=AV$$

$$Q_1=Q_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{A_2}{A_1}$$

با تغییر قطر لوله، سرعت جریان در لوله تغییر کرده و در نتیجه خط تراز هیدرولیک جابه‌جا می‌شود.

---

**مثال ۶۶:** **برای انتقال آب از مخزن (A) به مخزن (B) دو لوله با جنس (۱) و (۲) و قطر و طول‌های برابر مدنظر می‌باشند. در صورتی‌که دبی عبوری برای لوله (۱) ۱/۵ برابر دبی عبوری از لوله (۲) باشد، نسبت ضریب اصطکاک لوله (۲) به لوله (۱):** (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)




۱) برابر $\frac{2}{3}$ می‌باشد.

۲) کمتر از $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

۳) برابر $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

۴) بیشتر از $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از معادلهٔ اصلاح شده برنولی بین سطح آزاد آب در دو مخزن داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+H_l \Rightarrow H_l=\Delta Z=\text{const.}$$

میزان افت انرژی رابطه دارسی ـ ویسباخ عبارت است از:

$$H_l=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{8fLQ^2}{g\pi^2D^5}$$

در لوله‌های موازی داریم:

$$(H_l)_1=(H_l)_2 \Rightarrow \frac{8f_1LQ_1^2}{g\pi^2D^5}=\frac{8f_2LQ_2^2}{g\pi^2D^5} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1}=(\frac{Q_1}{Q_2})^2=(1/5)^2 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1}=2/25>\frac{3}{2}$$

---

**مثال ۶۷:** **در خصوص تغییرات افت فشار در بسترهای ثابت (Static Bed) بر حسب سرعت ظاهری (Superficial Velocity) در مقیاس لگاریتمی، کدام یک از گزینه‌ها پاسخ صحیح است؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) ثابت می‌ماند.

۲) به صورت خطی تغییر می‌نماید.

۳) به صورت غیرخطی تغییر می‌نماید.

۴) به صورت توان ۲ تغییر می‌نماید.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تغییرات افت فشار در بسترهای ثابت بر حسب سرعت ظاهری در مقیاس لگاریتمی، به صورت خطی تغییر می‌کند.

---

**مثال ۶۸:** **ضریب تخلخل (Porosity) $\varepsilon$ یک بستر ثابت، ۰/۳ است. اگر سرعت گاز ورودی را افزایش داده تا بستر به حالت سیالیت برسد و ارتفاع آن دو برابر حالت ثابت شود، ضریب تخلخل در این حالت کدام است؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۱۵

۲) ۰/۴۵

۳) ۰/۶۰

۴) ۰/۶۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید حجم کل ذرات را در دو حالت یکسان قرار دهیم:

$$S=\text{سطح مقطع کل بستر} \rightarrow \cancel{S}\times L_1(1-\varepsilon_1)=\cancel{S}\times L_2(1-\varepsilon_2)$$

$$L_2=2L_1 \rightarrow \cancel{L_1}(1-\varepsilon_1)=2\cancel{L_1}(1-\varepsilon_2) \qquad (1-0/3)=2(1-\varepsilon_2) \rightarrow \varepsilon_2=0/65$$

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال۶۹:** دبی جریان عبوری از یک توربین ۰/۲۵ متر مکعب بر ثانیه و فشار مؤثر بر توربین معادل ۱۲۰ متر آب است. توان تولیدی توربین (توان در محور توربین) با راندمان ۰/۸ و با فرض وزن مخصوص آب به میزان $10^{\circ}\frac{kN}{m^3}$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) ۸۰kw ۲) ۳۰kw ۳) ۱۲۰kw ۴) ۲۴۰kw

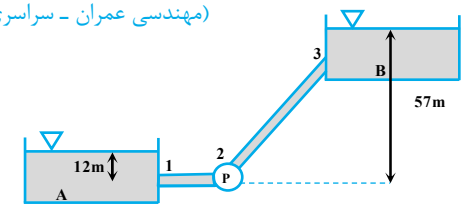
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه توان تولیدی توربین با توجه به تعریف راندمان توربین‌ها داریم:

$$\eta = \frac{P_{\text{تولیدی}}}{Q\gamma H_t} \Rightarrow \text{توان تولیدی توربین} : P_{\text{تولیدی}} = \eta Q\gamma H_t$$

$$P_{\text{تولیدی}} = 0/8 \times 0/25 \times 10^4 \times 120 = 240000(w) = 240(kw)$$

---

**مثال۷۰:** پمپ p مقدار ۱۵۰ لیتر بر ثانیه روغن با وزن مخصوص $7/6\frac{kN}{m^3}$ را از مخزن A به مخزن B منتقل می‌نماید. اگر ارتفاع نظیر انرژی تلف شده از مقطع ۱ تا ۲ برابر ۲/۵ متر و از مقطع ۲ تا ۳، برابر ۶/۵ متر باشد، مقدار توان پمپ با راندمان ۸۰% بر حسب کیلو وات چقدر است؟ (از افت انرژی صرف‌نظر کنید) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)




۱) ۴۶
۲) ۷۷
۳) ۶۲
۴) ۱۰۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای تعیین توان مصرفی پمپ با توجه به تعریف راندمان پمپ داریم:

$$\eta = \frac{Q\gamma H_p}{P_{\text{مصرفی}}} \Rightarrow P_{\text{مصرفی}} = \frac{Q\gamma H_p}{\eta}$$

برای تعیین هد واقعی پمپ، از معادله انرژی بین سطح آزاد دو مخزن A و B استفاده می‌کنیم، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{P_A}{\gamma}^{\circ} + \frac{V_A^2}{2g}^{\circ} + Z_A + H_p = \frac{P_B}{\gamma}^{\circ} + \frac{V_B^2}{2g}^{\circ} + Z_B + h_f \Rightarrow 12 + H_p = 57 + 2/5 + 6/5 \Rightarrow H_p = 54\ (m)$$

$$\text{توان مصرفی پمپ} : P_{\text{مصرفی}} = \frac{150\frac{lit}{s} \times \frac{1m^3}{1000lit} \times 7/6\frac{kN}{m^3} \times 54\ (m)}{0/8} = 76/95\ (kw)$$

---

**مثال۷۱:** آب بین دو منبع با اختلاف ارتفاع ۱۰ متر و دبی حجمی $360\frac{m^3}{hr}$ پمپ می‌شود. چنانچه افت سیستم $100Q^2$ و بازدهی پمپ ۷۰ درصد باشد، انرژی جذب شده توسط پمپ ..... کیلووات است. (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵/۴ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$Q = 360\frac{m^3}{hr} \times \frac{1hr}{3600s} = 0/1(\frac{m^3}{s}) \quad ; \quad h_f = 100Q^2 = 100(0/1)^2 = 1(m)$$

اختلاف ارتفاع دو منبع $10\ m$ است.

$$H_p = 10 - 1 = 9\ (m)$$

$$\text{انرژی جذب شده توسط پمپ} = \frac{\gamma Q H_p}{\eta_p} = \frac{10^4 \times 0/1 \times 9}{0/7} \simeq 12857(w) = 12/8(kw)$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir



**مثال ۷۲:** **کدام‌یک از بیانات زیر اشتباه است؟** (مهندسی مکانیک ـ ۷۱)

۱) در پمپ‌های گریز از مرکز (سانتریفوژ) با سرعت ثابت، ارتفاع آب‌دهی پمپ بستگی به چگالی سیال دارد.

۲) توربین‌های آبی پلتون برای ارتفاع زیاد آب مناسب‌تر از انواع دیگر توربین‌ها هستند.

۳) مزیت پمپ‌های پیستونی بر پمپ‌های گریز از مرکز، ارتفاع آب‌دهی زیاد آن‌ها است.

۴) برای یک اختلاف فشار معین، هر چه تعداد کمپرسور زیادتر باشد، سیستم با صرفه‌تر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که در متن درس اشاره شد، ارتفاع آب‌دهی پمپ‌های گریز از مرکز تابعی از دبی پمپ و قطر پروانه پمپ است.

حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۲» : توربین آبی پلتون یک توربین جریان محوری و از نوع توربین ضربه‌ای است، لذا برای حالتی که دبی کم و ارتفاع آب زیاد باشد مناسب خواهد بود.

گزینه «۳» : پمپ‌های پیستونی همان پمپ‌های جریان محوری هستند که برای دبی کم و ارتفاع آب‌دهی زیاد مناسب هستند، در حالی که پمپ‌های گریز از مرکز برای دبی زیاد و ارتفاع آب‌دهی پایین مناسب خواهند بود.

---

**مثال ۷۳:** **ضخامت لایه مرزی در یک جریان آرام روی صفحه تخت در فاصله ۱۰ سانتی‌متری از لبه صفحه ۵ mm می‌باشد. سرعت جریان خارج از لایه مرزی روی این صفحه در مکان ۲۰ سانتی‌متری از لبه صفحه چند متر بر ثانیه می‌باشد؟** $(\nu = ۱۰^{-۵}\ \frac{m^۲}{sec})$ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضخامت لایه مرزی در جریان آرام روی صفحهٔ تخت از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{۴/۹۶}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta = \frac{۴/۹۶x}{\sqrt{\frac{V_\circ x}{\nu}}} \Rightarrow \delta = ۴/۹۶\sqrt{\frac{\nu x}{V_\circ}} \quad ; \quad ۵\times۱۰^{-۳} = ۴/۹۶\sqrt{\frac{۱۰^{-۵}\times۱۰\times۱۰^{-۲}}{V_\circ}} \Rightarrow V_\circ = ۰/۹۸۴ \simeq ۱\ (\frac{m}{s})$$

از طرفی سرعت جریان خارج از لایه مرزی یکنواخت است و گرادیان سرعت صفر است، لذا سرعت در همه نقاط یکسان است.

---

**مثال ۷۴:** **کدام یک از پروفایل‌های زیر در نواحی نزدیک دیواره (لایه مرزی) معتبر می‌باشد؟** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۳)

۱) $V_x = A\sin y$ ۲) $V_x = A + By$ ۳) $V_x = A\exp(y^n)$ ۴) $V_x = By^n\ ,\ n \neq ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» گزینه‌ای درست است که شرایط مرزی را ارضا کند:

شرط مرزی در لایه مرزی : $\begin{cases} y = \circ \\ V_x = \circ \end{cases}$

پس گزینه‌های «۲» و «۳» نادرست هستند. در گزینه «۱» نیز، سرعت مجدداً در $y = \pi$ به صفر می‌رسد که صحیح نیست.

---

**مثال ۷۵:** **اگر پروفیل سرعت داخل لایهٔ مرزی در نقطه جدایی به صورت $u = Ay^۲ + By + C$ فرض شود، مقادیر A ، B و C عبارتند از:** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $A = -\frac{B}{۲}$ و $C = \circ$ ۲) $B = \circ$ ، $C = \circ$ و هر مقدار A ۳) $A = -\frac{B}{۲}$ و هر مقدار C ۴) $B = \circ$ و هر مقدار A و C

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{du}{dy} = ۲Ay + B \qquad u = Ay^۲ + By + C$$

نقطه جدایی نقطه‌ای است که $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=\circ} = \circ$ باشد. لذا شرایط مرزی که پروفیل سرعت باید ارضاء کند به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y = \circ \\ u = \circ \end{cases} \Rightarrow C = \circ \qquad \begin{cases} y = \circ \\ \frac{du}{dy} = \circ \end{cases} \Rightarrow B = \circ \Rightarrow u = Ay^۲$$

---

**مثال ۷۶:** **نیروی کشش (Drag) وارده بر یک دودکش استوانه‌ای به بلندی ۸۰m و به قطر ۱۰m، بر حسب نیوتن کدام است؟ سرعت باد در دمای** $T = ۱۵^\circ C$ ، $۳۳/۳\ \frac{m}{s}$ ، $\rho_{air} = ۱/۲۲۶\ kg/m^۳$ و $C_D = ۰/۳۴$ **می‌باشند.** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

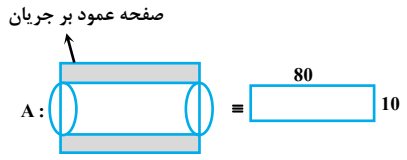
۱) ۱۸۴۸۹/۲ ۲) ۱۸۴۸/۹۲ ۳) ۹۲/۴۴۶ ۴) ۱۸۴۸۹۲

www.modaresanesharif.ac.ir



**پاسخ:** گزینه «۴» رابطه تعیین نیروی درگ عبارت است از: $F_D = C_D(\frac{1}{2}\rho V^2)A$

A : با توجه به درس، برای جسم دارای ضخامت در هر جهت عبارت از سطح تصویر شده در امتداد عمود بر جریان است.




$$F_D = 0/34 \times \frac{1}{2} \times 1/226 \times (33/3)^2 \times (80 \times 10) \Rightarrow F_D = 184892\ (N)$$

---

**مثال ۷۷: اگر در صفحهٔ مسطح و رویهٔ سیلندر زبری مناسب ایجاد شود، اثر زبری در ضریب نیروی پسا $C_D$(Drag) نسبت به حالت سطوح صاف چیست؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) در صفحه مسطح و سیلندر هر دو افزایش می‌یابد.
۲) در صفحه مسطح و سیلندر هر دو کاهش می‌یابد.
۳) در صفحه مسطح افزایش یافته و در سیلندر کاهش می‌یابد.
۴) در صفحه مسطح کاهش یافته و در سیلندر افزایش می‌یابد.

**پاسخ:** گزینه «۳» در صفحه مسطح، افزایش زبری باعث درهم شدن جریان و در نتیجه افزایش نیرو (ضریب) درگ می‌شود. در استوانه نیز افزایش زبری جریان را درهم کرده و جریان درهم باعث تأخیر جدایش می‌شود و لذا افت فشار در پشت استوانه نیز کمتر خواهد شد و ضریب درگ فشاری کاهش می‌یابد. چون در حرکت استوانه تأثیر درگ فشاری در درگ کل از درگ اصطکاکی که افزایش می‌یابد بیشتر است، در نتیجه با افزایش زبری روی استوانه نیروی درگ کل کاهش می‌یابد.

---

**مثال ۷۸: سرعت حد ذره‌ای کروی به قطر ۱۰ میکرون و چگالی $1200\frac{kg}{m^3}$ که در هوای $20^\circ C$ سقوط می‌کند چقدر است؟**

(ویسکوزیته هوا $1/8\times10^{-5}\ Pa.s$) (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) $3/6\frac{mm}{s}$ ۲) $1/8\frac{mm}{s}$ ۳) $3/6\frac{cm}{s}$ ۴) $1/8\frac{cm}{s}$

**پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از معادله حالت گاز کامل، جرم حجمی هوا را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{air} = \frac{P}{RT} = \frac{1/013\times10^5}{287\times(20+273)} = 1/205\ (\frac{kg}{m^3})$$

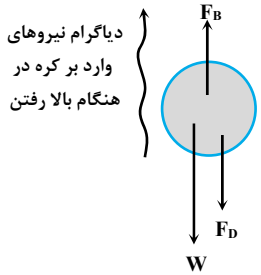
$$V = \frac{D^2}{18\mu}(\rho_{جسم} - \rho_{هوا})g \Rightarrow V = \frac{(10\times10^{-6})^2}{18\times1/8\times10^{-5}}(1200-1/205)\times9/81 \Rightarrow V = 3/63\times10^{-3}\ (\frac{m}{s}) = 3/6\ (\frac{mm}{s})$$

---

**مثال ۷۹: توپی به قطر ۳۸ میلی‌متر و وزن ۰/۲۵ نیوتن از عمق استخری رها می‌شود. سرعت بالا آمدن توپ تقریباً چند متر بر ثانیه است؟ فرض نمایید که توپ به سرعت حد رسیده و ضریب رانش (drag coefficient) آن ۰/۴ است. (چگالی آب $\rho = 1000\ kg/m^3$، شتاب ثقل $g = 9/81\ m/s^2$)** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱/۱ ۲) ۲/۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۱/۵

**پاسخ:** گزینه «۱»




در سرعت حد: $a = 0 \Rightarrow \sum F = 0 : F_B - F_D - W = 0$

نیروی شناوری: $F_B = \gamma_{توپ}.V$

نیروی درگ: $F_D = C_D(\frac{1}{2}\rho V^2)A$ → سطح عظیمه کره

$$1000\times9/81\times\frac{4}{3}\pi(\frac{0/038}{2})^3 = 0/4\times\frac{1}{2}\times1000\times V^2\times\frac{\pi}{4}(0/038)^2 + 0/025 \Rightarrow V = 1/064\ (\frac{m}{s})$$

---

**مثال ۸۰: در عبور از یک موج ضربه‌ای در جریان سیال تراکم‌پذیر، افزایش:** (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) فشار، عدد ماخ، آنتروپی وجود دارد.
۲) فشار، عدد ماخ و ثابت ماندن آنتروپی مطرح است.
۳) فشار، آنتروپی و کاهش ماخ وجود دارد.
۴) فشار، عدد ماخ و کاهش آنتروپی به وجود می‌آید.

**پاسخ:** گزینه «۳» فشار، چگالی، دما و آنتروپی در عرض یک موج ضربه‌ای افزایش و فشار سکون، عدد ماخ و سرعت کاهش می‌یابد.