سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۹۹

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ مکان هندسی تمام اعداد مختلطی مانند z که در شرط $\mathrm{Re}(z+\frac{1}{z}-\bar{z})=\mathrm{Im}(\frac{-1}{i}+\frac{1}{z})$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) نقاط روی یک دایره
۲) نقاط واقع روی یک خط
۳) نقاط روی یک دایره به استثنای یک نقطه از آن
۴) نقاط واقع بر یک خط به استثنای یک نقطه از آن

۲ـ فرض کنید $f(x)=x^2+ax+b$ که a و b اعدادی حقیقی‌اند. اگر $f(3+4i)=0$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۱

۳ـ بازه همگرایی سری توانی زیر کدام است؟

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x-2)^n}{5^n(n^2+n+1)}$$

۱) $(-1,\frac{7}{3}]$
۲) $[-1,\frac{7}{3}]$
۳) $(-\frac{7}{3},1]$
۴) $[-\frac{7}{3},1]$

۴ـ دو خودروی A و B از محل تقاطع دو جاده که عمود بر هم هستند شروع به حرکت می‌کنند. خودروی A با سرعت $1/5\frac{m}{s}$ به سمت شمال و خودروی B با سرعت $2\frac{m}{s}$ به سمت شرق حرکت می‌کند. بعد از گذشت یک دقیقه فاصله بین دو خودروی A و B با چه سرعتی (برحسب $\frac{m}{s}$) افزایش می‌یابد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

۵ـ فرض کنید $g(x)=\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}\frac{d}{dt}\sin(t^2)dt$ باشد، مقدار $g(\sqrt[4]{\pi})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) ۱-
۳) ۰
۴) $\sqrt{2}$

۶ـ مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^3 x\,dx$$

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{24}$

۷ـ فرض کنید $a_n=\frac{(1399)^n}{n!}$ و $b_n=\frac{1}{(1399+(-1))^n}$. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ چگونه هستند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا است.
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا است.
۳) هر دو همگرا هستند.
۴) هر دو واگرا هستند.

۸ـ مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) ۲
۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۹ـ ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=\frac{1}{x}$، $y=x$ و $x=2$ واقع در ربع اول صفحه مختصات را حول محورxها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{10\pi}{6}$
۲) $\frac{11\pi}{6}$
۳) 2π
۴) $\frac{13\pi}{6}$

۱۰ـ مساحت رویه استوانه‌ای $r=1+\cos\theta$ در بازه $\theta\in[0,\pi]$ و $1\le z\le 3$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) 4π
۴) 2π

۱۱ـ خط $y=۳x$ را در بازه $[۰,۲]$ حول محور xها دوران می‌دهیم، مساحت جانبی شکل حاصل کدام است؟

۱) $۶\pi\sqrt{۵}$ ۲) $۱۲\pi\sqrt{۵}$ ۳) $۶\pi\sqrt{۱۰}$ ۴) $۱۲\pi\sqrt{۱۰}$

۱۲ـ فرض کنید ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=\frac{۱}{۲x}$، $y=۰$، $x=۱$ و $x=۵$ را حول محور yها دوران داده‌ایم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) ۴π ۲) ۳π ۳) ۲π ۴) π

۱۳ـ مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(۴n+۳i)^{۷}}{n^{۸}}$$

۱) $\frac{۱}{۸}(۷^{۸}-۴^{۸})$ ۲) $\frac{۱}{۸}(۷^{۸}-۳^{۸})$ ۳) $\frac{۱}{۲۴}(۷^{۸}-۴^{۸})$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}(۷^{۸}-۳^{۸})$

۱۴ـ کدام گزینه در مورد $\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۱۳۹۹}}}$ و $\int_{۱}^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{x^{۲}}dx$ صحیح است؟

۱) هر دو واگرا هستند.
۲) هر دو همگرا هستند.
۳) اولی همگرا و دومی واگرا است.
۴) اولی واگرا و دومی همگرا است.

۱۵ـ اولین چهارجمله سری توانی $f(x)=e^{-x^{۲}}$ در همسایگی $x=۰$ کدام است؟

۱) $۱+x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۶}}{۶}$ ۲) $۱+x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۶}$ ۳) $۱-x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}-\frac{x^{۶}}{۶}$ ۴) $۱-x+\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۶}$

۱۶ـ اگر $A=\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{y^{۲}}{x-y}$ و $B=\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{(x+y)^{۲}}{۳|x|+|y|}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B=۰$ ۲) $A=۰$ و B وجود ندارد. ۳) A وجود ندارد و $B=۰$. ۴) A و B وجود ندارند.

۱۷ـ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۴}y}{x^{۴}+y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$، چنانچه $\vec{v}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ باشد، مقدار $D_{\vec{v}}f(۰,۰)$ (مشتق سویی تابع f در نقطه $(۰,۰)$ در جهت بردار $(\vec{v})$) کدام است؟

۱) ۰/۵۵ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۲۵

۱۸ـ خم حاصل از اشتراک رویه‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $z=x^{۲}-y^{۲}$ را در نظر بگیرید. انحنای این خم در نقطه $(۱,۰,۱)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۸}$

۱۹ـ کدامیک از صفحات زیر بر رویه $۲(x-۲)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(z-۳)^{۲}=۸$ در نقطه $(۲,۳,۵)$ مماس است؟

۱) $y+z=۸$ ۲) $x+y=۵$ ۳) $x+۵y-۴z=-۳$ ۴) $۵x+۵y-۴z=۵$

۲۰ـ طول منحنی $r=۱+\sin\theta$ در بازه $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۱ـ فرض کنید $x=x(u,v)$، $y=y(u,v)$، $xu^{۲}+yv^{۲}=۴$ و $ux-۲vy=۰$ باشند. حاصل $(۲u^{۲}+uv)\frac{\partial x}{\partial u}$ به ازای $v\neq۰$ کدام است؟

۱) $(u-۴v)y$ ۲) $(v-۴u)y$ ۳) $(u+۴v)x$ ۴) $(۴u-v)x$

۲۲ـ مقدار انتگرال دوگانه زیر کدام است؟

$$\int_{۰}^{۱}\int_{y}^{۱}\frac{\sin x}{x}dxdy$$

۱) $۱-\sin۱$ ۲) $۱-\cos۱$ ۳) $\sin۱+\cos۱$ ۴) ۰

۲۳ـ مقدار $\iint_A\sqrt{۱+x^{۲}+y^{۲}}dxdy$ روی ناحیه $A=\{(x,y)|۱\le x^{۲}+y^{۲}\le۴\,,\,x,y\ge۰\}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}(۵^{\frac{۳}{۲}}-۲^{\frac{۳}{۲}})$ ۲) $\frac{\pi}{۶}(۳^{\frac{۳}{۲}}-۱)$ ۳) $\frac{\pi}{۳}(۵^{\frac{۳}{۲}}-۲^{\frac{۳}{۲}})$ ۴) $\frac{\pi}{۳}(۳^{\frac{۳}{۲}}-۱)$

۲۴ـ مساحت ناحیه محصور به درون $r=۳\sin\theta$ و بیرون $r=۱+\sin\theta$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۵ـ فرض کنید $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(0,0)$ و $(1,1)$ نقاط مینیمم موضعی هستند.
۲) $(0,0)$ نقطه زینی و $(1,1)$ نقطه ماکسیمم موضعی است.
۳) $(0,0)$ نقطه مینیمم موضعی و $(1,1)$ نقطه زینی است.
۴) $(0,0)$ نقطه زینی و $(1,1)$ نقطه مینیمم موضعی است.

۲۶ـ کمترین و بیشترین مقدار $f(x,y,z)=xy+2z$ از بین نقاط مشترک صفحه $x+y+z=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=24$، به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۳- و ۱۴
۲) ۱۲- و ۱۴
۳) ۱۲- و ۱۳
۴) ۱۳- و ۱۲

۲۷ـ حجم ناحیه محصور به $z=0$ و $z=2-x^2-y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) 2π
۴) 4π

۲۸ـ فرض کنید C منحنی حاصل از تقاطع $z=3x-2y$ و $z=x^2+4y^2$ از نقطه $(0,0,0)$ به نقطه $(1,\frac{1}{2},2)$ باشد، مقدار $\int_C \left(y^2\vec{i}+(2xy+e^{3z})\vec{j}+3ye^{3z}\vec{k}\right).d\vec{r}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(1+e^6)$
۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+e^6)$
۳) $\frac{1}{2}(2+e^5)$
۴) $\frac{1}{2}(2+e^6)$

۲۹ـ حاصل $\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ هرگاه $\vec{F}(x,y,z)=(3x+z^2,y^2-\sin(x^2z),xz+ye^{x^3})$، S سطح رویه $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 3$ و $0\le z\le 2$ و $\vec{n}$ بردار قائم رو به بیرون بر رویه S باشد، کدام است؟

۱) ۰
۲) ۲۳
۳) ۳۹
۴) ۴۲

۳۰ـ فرض کنید سطح S به صورت $\rho=3+2\cos\varphi$ که $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\theta\le 2\pi$ باشد. اگر $\vec{n}$ بردار قائم یکه برونسوی سطح S و $\vec{F}(x,y,z)=\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$ باشند، آنگاه $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟

۱) ۰
۲) 2π
۳) 4π
۴) 8π

پاسخنامه رشته‌ی MBA

۱ـ گزینه «۳» در این‌گونه سؤالات، کافی است که $z=x+iy$ را در نظر گرفته و مسأله را حل کنید. یعنی داریم:

$$z+\frac{1}{z}-\bar{z}=(x+iy)+\frac{1}{x+iy}-(x-iy)=2iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Re}\{z+\frac{1}{z}-\bar{z}\}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{-1}{i}+\frac{1}{z}=i+\frac{1}{x+iy}=i+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Im}\{\frac{-1}{i}+\frac{1}{z}\}=1-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\{z+\frac{1}{z}-\bar{z}\}=\mathrm{Im}\{\frac{-1}{i}+\frac{1}{z}\}\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2-x+y^2-y=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

همان‌طور که می‌بینید، این مکان هندسی، مجموع نقاط روی یک دایره است؛ اما یک نکته مهم وجود دارد. در به‌دست آوردن این تساوی ما فرض کردیم که $x^2+y^2\neq 0$ است، یعنی مبدأ نباید جزء مکان هندسی ما باشد، در حالی‌که مبدأ در معادله این دایره صدق می‌کند؛ پس گزینه (۳) صحیح است.

۲ـ گزینه «۱» به راحتی با جایگذاری عدد مختلط در معادله داریم:

$$f(3+4i)=0\Rightarrow (3+4i)^2+a(3+4i)+b=0\Rightarrow (3a+b-7)+i(4a+24)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a+b-7=0\\4a+24=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=7-3a=7+18=25\\a=-6\end{cases}\Rightarrow a+b=19$$

روش دوم: با توجه به اینکه a و b (ضرایب معادله) حقیقی هستند، پس علاوه بر $3+4i$، مزدوج آن، یعنی $3-4i$ هم ریشه‌ی معادله است. می دانیم که $-a$ برابر با جمع ریشه‌ها و b برابر با حاصلضرب ریشه‌هاست. پس a برابر با -6 و b برابر با ۲۵ است، درنتیجه $a+b$ برابر با ۱۹ است.

۳ـ گزینه «۲»

روش اول: با استفاده از آزمون ریشه سری‌های توانی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(3x-2)^n}{5^n(n^2+n+1)}\right|}<1\Rightarrow\left|\frac{3x-2}{5}\right|<1\Rightarrow -5<3x-2<5\Rightarrow -3<3x<7\Rightarrow -1<x<\frac{7}{3}$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) و (۲) درست است. حال برای اینکه بفهمیم کدام صحیح است، کافی است فقط وضعیت سری در $x=-1$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3-2)^n}{5^n(n^2+n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$$

سری داده‌شده متناوب است که در آن دنباله $\frac{1}{n^2+n+1}$ نزولی و همگرا به صفر است. پس این سری همگراست و گزینه (۲) صحیح است.

روش دوم: با توجه به اینکه در مخرج عامل n^2 داریم، پس داریم:

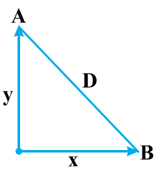
$$\begin{cases}\beta=2\\\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\quad \beta-\alpha=2>1$$

اختلاف درجه مخرج و صورت برابر با ۲ است پس با در نظر گرفتن قوانین مقایسه‌ی p سری‌ها دو سر بازه همگرایی باید بسته باشد، پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند. حال به ازای $x=\frac{7}{3}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n(n^2+n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$$

طبق سری p این سری چون $p=2>1$ می‌باشد، همگراست، پس گزینه (۲) صحیح است.

۴ـ گزینه «۴» ابتدا مسیر حرکت دو اتومبیل و داده‌های مسأله را در شکل پیاده می‌کنیم.



$$\frac{dy}{dt}=1/5\frac{m}{s}\quad,\quad\frac{dx}{dt}=2\frac{m}{s}$$

$$D^2=x^2+y^2\Rightarrow 2D\frac{dD}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$

حالا توجه کنید که ما مقادیر x و y و D را نداریم، اما می‌دانیم که بین سرعت و مسافت رابطه $x=V_B\Delta t$ و $y=V_A\Delta t$ برقرار است. پس داریم:

$$\begin{cases}x=2\times 60=120\,m\\y=1/5\times 60=90\,m\end{cases}\Rightarrow D=\sqrt{x^2+y^2}=150\,m$$

پس در نهایت داریم:

$$150\frac{dD}{dt}=120\times 2+90\times 1/5=240+135=375\Rightarrow\frac{dD}{dt}=\frac{375}{150}=2/5$$

۵ـ گزینه «۱» از شکل پیچیده انتگرال نترسید. در واقع در این تابع یک‌بار از آن مشتق گرفته و سپس دوباره انتگرال گرفته شده؛ پس حاصل انتگرال همان تابع اولیه است. یعنی داریم:

$$g(x)=\int_{\frac{x^۲}{۲}}^{x^۲}\frac{d}{dt}\sin(t^۲)dt=\sin(t^۲)\Big|_{\frac{x^۲}{۲}}^{x^۲}=\sin(x^۴)-\sin(\frac{x^۴}{۴})\Rightarrow g(\sqrt[۴]{\pi})=\sin(\pi)-\sin(\frac{\pi}{۴})=۰-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: آسان‌ترین راه برای حل این انتگرال کمک گرفتن از تابع بتا است. به این صورت که داریم:

$$۲m-۱=۵\Rightarrow m=۳\ ,\ ۲n-۱=۳\Rightarrow n=۲$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۵x\cos^۳x\,dx=\frac{۱}{۲}\beta(m\text{ و }n)=\frac{۱}{۲}\beta(۳\text{ و }۲)=\frac{۱}{۲}\frac{\Gamma(۳)\Gamma(۲)}{\Gamma(۳+۲)}=\frac{۱}{۲}\frac{۲!۱!}{۴!}=\frac{۱}{۲۴}$$

روش دوم: ابتدا در زیر انتگرال عامل $\cos^۳x$ را به‌صورت $\cos^۲x\cos x$ می‌نویسیم و سپس به جای $\cos^۲x$ قرار می‌دهیم $(۱-\sin^۲x)$ و داریم:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۵x\cos x(۱-\sin^۲x)dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\sin^۵x\cos x-\sin^۷x\cos x)dx$$

$$\xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x}(\frac{\sin^۶x}{۶}-\frac{\sin^۸x}{۸})\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}=\frac{۴-۳}{۲۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

۷ـ گزینه «۳» برای سری اول از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ کمک می‌گیریم، در این‌صورت داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۱۳۹۹)^n}{(\frac{n}{e})^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۱۳۹۹e)^n}{n^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\sim\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{۱۳۹۹e}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱۳۹۹e}{n}=۰<۱$$

پس این سری همگراست.

اما در مورد سری دوم، به نظر می‌رسد طراح محترم و یا تایپیست سؤال دچار یک اشتباه کوچک شده است. $۱۳۹۹+(-۱)$ همواره ۱۳۹۸ است و اصلاً شکل مبهم و پیچیده‌ای ندارد و سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۱۳۹۸)^n}$ یک سری هندسی همگراست. ولی اگر منظور طراح $۱۳۹۹+(-۱)^n$ بوده است آن‌وقت یک سری به‌صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱۳۹۹+(-۱)^n}$ داریم که با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱۳۹۹+(-۱)^n}$ مخالف صفر است، سری شرط لازم همگرایی را ندارد. ولی اگر در مخرج سری $(۱۳۹۹+(-۱)^n)^n$ بوده باشد، سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۱۳۹۹+(-۱)^n)^n}$ است که با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱}{(۱۳۹۹+(-۱)^n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱۳۹۹+(-۱)^n}<۱$$

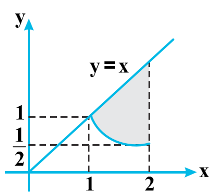
توجه کنید که حد فوق دو مقدار $\frac{۱}{۱۳۹۸}$ یا $\frac{۱}{۱۴۰۰}$ را خواهد داشت که در هر دو حالت از یک کوچک‌تر است، پس سری همگراست.

در این حالت که ممکن است غلط تایپی صورت گرفته باشد، بهتر است سؤال را به‌صورت داده‌شده حل کنید که یعنی هر دو سری همگراست و گزینه (۳) صحیح است.

۸ـ گزینه «۱» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $x^۲+۱=t^۲$ $(t>۰)$ کمک می‌گیریم:

$$x^۲+۱=t^۲\Rightarrow xdx=tdt\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow t=۱\\ x=\sqrt{۳}\Rightarrow t=۲\end{cases}\Rightarrow\int_۰^{\sqrt{۳}}\frac{x^۲\times xdx}{\sqrt{x^۲+۱}}=\int_۱^۲\frac{(t^۲-۱)tdt}{\sqrt{t^۲}}=\int_۱^۲(t^۲-۱)dt=(\frac{t^۳}{۳}-t)\Big|_۱^۲=(\frac{۸}{۳}-۲)-(\frac{۱}{۳}-۱)=\frac{۴}{۳}$$

۹ـ گزینه «۲» ناحیه موردنظر به‌صورت شکل مقابل است. با توجه به اینکه شکل توابع به‌صورت $y=f(x)$ و دوران حول محور x هاست، از روش قرصی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:



$$V=\pi\int_a^b[y_۲^۲-y_۱^۲]dx=\pi\int_۱^۲[x^۲-\frac{۱}{x^۲}]dx=\pi(\frac{x^۳}{۳}+\frac{۱}{x})\Big|_۱^۲$$

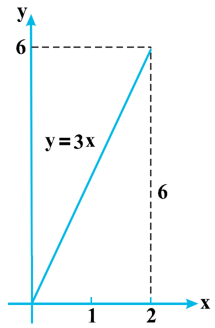
$$=\pi[(\frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۲})-(\frac{۱}{۳}+۱)]=\pi(\frac{۷}{۳}-\frac{۱}{۲})=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

۱۰ـ گزینه «۲» برای محاسبه مساحت جسم تشکیل‌شده روی یک منحنی که قاعده آن منحنی داده شده و ارتفاع هر نقطه آن $f(x,y)$ باشد، از رابطه $S=\int_C f(x,y)ds$ استفاده می‌کنیم که در این سؤال $f(x,y)=۳-۱=۲$ یک مقدار ثابت است و ds برای مختصات قطبی برابر است با $\sqrt{r^۲+(r'_\theta)^۲}\,d\theta$ پس داریم:

$$\begin{cases} r^۲=(۱+\cos\theta)^۲ \\ r'^۲_\theta=(-\sin\theta)^۲ \end{cases} \Rightarrow r^۲+r^۲_\theta=۲+۲\cos\theta=۴\cos^۲\frac{\theta}{۲}$$

$$S=\int_a^b ۲\sqrt{r^۲+r'^۲_\theta}\,d\theta=\int_۰^\pi ۲\left|۲\cos\frac{\theta}{۲}\right|d\theta=۴\int_۰^\pi\cos\frac{\theta}{۲}d\theta=[۸\sin\frac{\theta}{۲}]_۰^\pi=۸$$

۱۱ـ گزینه «۴» ابتدا شکل نمودار را در نظر بگیرید. واضح است که از دوران این خط حول محور x یک مخروط حاصل می‌شود و برای محاسبه مساحت جانبی این مخروط نیازی نیست از روش انتگرال استفاده کنیم. می‌دانیم مساحت جانبی یک مخروط با یال L برابر πrL است. در این سؤال داریم:



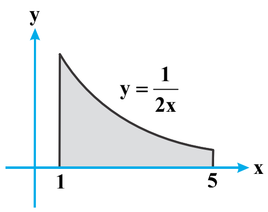
$$L=\sqrt{۲^۲+۶^۲}=۲\sqrt{۱۰}\Rightarrow S=\pi rL=\pi(۲\sqrt{۱۰})(۶)=۱۲\pi\sqrt{۱۰}$$

اما اگر این فرمول را به‌خاطر ندارید، با استفاده از رابطه مساحت سطح حاصل از دوران حور محور x ها داریم:

$$S=۲\pi\int_a^b y\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx$$

$$S=۲\pi\int_۰^۲ ۳x\sqrt{۱+(۳)^۲}\,dx=۶\pi\sqrt{۱۰}\int_۰^۲ xdx=۳\pi\sqrt{۱۰}x^۲)_۰^۲=۱۲\pi\sqrt{۱۰}$$

۱۲ـ گزینه «۱» ابتدا ناحیه موردنظر را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل تابع، از هر دو روش قرصی و پوسته استوانه‌ای می‌توان استفاده کرد. با روش دوم داریم:

$$v=۲\pi\int_a^b xf(x)dx=۲\pi\int_۱^۵ x\times\frac{۱}{۲x}dx=\pi(x)_۱^۵=\pi(۵-۱)=۴\pi$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(۴n+۳i)^۷}{n^۸}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n^۷(۴+\frac{۳i}{n})^۷}{n^۸}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(۴+\frac{۳i}{n})^۷$$

با فرض $f(\frac{i}{n})=(۴+\frac{۳i}{n})^۷$ این حد ریمان به انتگرال مقابل تبدیل می‌شود:

$$L=\int_۰^۱(۴+۳x)^۷dx=\frac{۱}{۳\times۸}(۴+۳x)^۸]_۰^۱=\frac{۱}{۲۴}(۷^۸-۴^۸)$$

۱۴ـ گزینه «۲» انتگرال اول در هر دو سر آن ناسره است. پس با تبدیل آن به انتگرال $I=\underbrace{\int_۰^۱\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۱۳۹۹}}}}_{I_۱}+\underbrace{\int_۱^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۱۳۹۹}}}}_{I_۲}$ داریم:

$x\to۰\Rightarrow I_۱\sim\int_۰^۱\frac{dx}{\sqrt{x}}=۲\Rightarrow$ همگرا است

$$x\to\infty\Rightarrow I_۲\sim\int_۱^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^{۱۳۹۹}}}$$

در این انتگرال $P=\frac{۱۳۹۹}{۲}>۱$ پس همگراست. در نتیجه انتگرال I در کل همگراست. برای انتگرال دوم از روش آزمون مقایسه داریم:

$$\left|\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{x^۲}\right|\le\frac{۲}{x^۲}$$

و چون انتگرال $\int_۱^\infty\frac{۲dx}{x^۲}$ $(P=۲>۱)$ همگراست، پس این انتگرال نیز همگرای مطلق (یعنی همیشه همگرا) است.

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن تابع e^u داریم:

$$e^{-x^۲}=۱+(-x^۲)+\frac{(-x^۲)^۲}{۲!}+\frac{(-x^۲)^۳}{۳!}+\cdots=۱-x^۲+\frac{x^۴}{۲}-\frac{x^۶}{۶}$$

۱۶ـ گزینه «۳» برای حد A، روی خط $y=x$ اصلاً حد تعریف نمی‌شود پس کلاً حد وجود ندارد. برای حد B نیز با فرض $y=mx$ داریم:

$$B=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{3|x|+|y|}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+mx)^2}{3|x|+|mx|}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^2(1+m)^2}{|x|(3+|m|)}=0$$

در واقع چون تنها ریشه مخرج همان مبدأ مختصات است و اختلاف درجه صورت و مخرج مثبت است، این حد روی هر مسیری صفر خواهد بود.

۱۷ـ گزینه «۲» با استفاده از تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_v f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h\frac{\sqrt{3}}{2},0+h\frac{1}{2})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{h^4\frac{9}{16}\times\frac{h}{2}}{\frac{9h^4}{16}+\frac{h^4}{16}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{9}{32}h^5}{\frac{10}{16}h^5}=\frac{9}{20}=0/45$$

۱۸ـ گزینه «۳» خم داده‌شده را می‌توان به‌صورت $\vec{R}(t)=(\cos t,\sin t,\overbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}^{\cos 2t})$ تعریف کرد. برای منحنی‌های پارامتری، انحنا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}$$

در این سؤال داریم:

$$\vec{R}(t)=(1,0,1)\Rightarrow t=0$$

$$\vec{R}'(t)=(-\sin t,\cos t,-2\sin 2t)\to\vec{R}'(0)=(0,1,0)$$

$$\vec{R}''(t)=(-\cos t,-\sin t,-4\cos 2t)\to\vec{R}''(0)=(-1,0,-4)$$

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&0\\-1&0&-4\end{vmatrix}=(-4,0,1)\Rightarrow\kappa=\frac{|(-4,0,1)|}{|(0,1,0)|^3}=\frac{\sqrt{16+1}}{1}=\sqrt{17}$$

۱۹ـ گزینه «۱» بردار عمود بر صفحه مماس یک رویه، موازی بردار گرادیان در نقطه تماس است. پس داریم:

$$f(x,y,z)=2(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2-8=0$$

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(4(x-2),2(y-1),2(z-3))\Rightarrow\vec{\nabla}f(2,3,5)=(0,4,4)\parallel(0,1,1)$$

$$\Rightarrow C:0(x-2)+1(y-3)+1(z-5)=0\Rightarrow y+z=8$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه طول منحنی‌های قطبی داریم:

$$L=\int_a^b\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,d\theta$$

در این سؤال خواهیم داشت:

$$r^2+r_\theta^2=(1+\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=2+2\sin\theta$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\sin\theta}\,d\theta$$

برای حل این انتگرال، از تغییر متغیر $\theta=\frac{\pi}{2}+t$ کمک می‌گیریم:

$$\theta=\frac{\pi}{2}+t\Rightarrow d\theta=dt\Rightarrow\begin{cases}\theta=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}\\\theta=\pi\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+2\sin(\frac{\pi}{2}+t)}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos t}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|2\cos\frac{t}{2}|\,dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\frac{t}{2}dt=4\sin\frac{t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=4\sqrt{2}$$

۲۱ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست» ابتدا معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم:

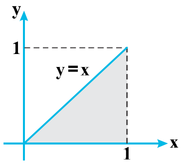
$$F = xu^2 + yv^2 - 4 = 0$$
$$G = ux - 2vy = 0$$

اکنون از مشتق‌گیری ضمنی برای دو عبارت F و G داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2xu & v^2 \\ x & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u & -2v \end{vmatrix}} = -\frac{-4xuv - xv^2}{-2vu^2 - uv^2} = -\frac{4xu + xv}{2u^2 + uv} \Rightarrow (2u^2 + uv)\frac{\partial x}{\partial u} = -(4xu + xv) = -x(4u + v)$$

توجه: این سؤال در کلید نهایی سازمان سنجش حذف شد.

۲۲ـ گزینه «۲» این انتگرال با روش‌های حقیقی به این صورت قابل حل نیست. پس با توجه به اینکه تابع درون انتگرال فقط تابعی از x است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

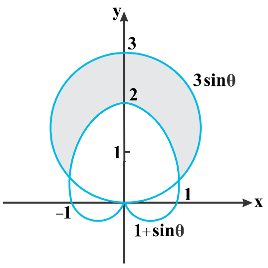


$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy\, dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}(x - 0)\, dx = \int_0^1 \sin x\, dx = -\cos x\Big)_0^1 = 1 - \cos 1$$

۲۳ـ گزینه «۱» با توجه به وجود عامل $x^2 + y^2$ از مختصات قطبی کمک می‌گیریم. در این‌صورت با توجه به $x, y \ge 0$ خواهیم داشت: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و نیز $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ معادل $1 \le r \le 2$ است. پس در کل داریم:

$$I = \iint_A \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_A \sqrt{1 + r^2}\, r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r\sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{\pi}{2}\Big[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

۲۴ـ گزینه «۱» ابتدا دو ناحیه را رسم می‌کنیم. با توجه به تقارن مسئله، کافی است مساحت در ناحیه اول را محاسبه کرده و پاسخ را دو برابر کنیم. حالا برای نقطه تقاطع در ربع اول داریم:



$$3\sin\theta = 1 + \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

حالا با توجه به فرمول مساحت در مختصات قطبی داریم:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (r_2^2 - r_1^2)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ((3\sin\theta)^2 - (1 + \sin\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ((8\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1 - \cos 2\theta) - 2\sin\theta - 1]\, d\theta$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-4\cos 2\theta - 2\sin\theta + 3)\, d\theta = \frac{1}{2}(-2\sin 2\theta + 2\cos\theta + 3\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}[(0 + 0 + 3\frac{\pi}{2}) - (-\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2}(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

این عدد مساحت ناحیه‌ی واقع در نیمه اول شکل است و برای به دست آوردن مساحت کل، باید آن را ضربدر ۲ کنیم و داریم: $S = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ کل

۲۵ـ گزینه «۴» با مشتق‌گیری جزئی و پیدا کردن نقاط بحرانی داریم:

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 6y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} A(0,0) \\ B(1,1) \end{cases}$$

حال با کمک مبین دلتا داریم:

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (12x)(6) - (-6)^2 = 72x - 36$$

$\Delta_{(0,0)} = 0 - 36 < 0 \Rightarrow$ نقطه زینی $(0,0)$

$\Delta_{(1,1)} = 72 - 36 > 0 \xrightarrow{f_{xx} = 12 > 0}$ نقطه مینیمم موضعی $(1,1)$

۲۶ـ گزینه «۴» برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع با دو شرط داده شده، در صورت ممکن بهتر است یک شرط را حذف کنیم. برای این کار از قید اول نتیجه می‌شود $z=-x-y$ که با جایگذاری در تابع و قید دوم داریم:

$$f(x,y)=xy+2(-x-y)=xy-2x-2y$$
$$g(x,y)=x^2+y^2+(-x-y)^2=24 \Rightarrow g(x,y)=x^2+y^2+xy=12$$

حالا مساله به پیدا کردن نقاط بحرانی یک تابع دو متغیره با یک قید تبدیل شده که با استفاده از روش ساده شده‌ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow \frac{y-2}{2x+y}=\frac{x-2}{2y+x}\Rightarrow 2y^2+yx-4y-2x=2x^2+yx-4x-2y$$

$$\Rightarrow y^2-y=x^2-x\Rightarrow (y-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{2})^2\Rightarrow \begin{cases} y-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}\Rightarrow y=x & (1)\\ y-\frac{1}{2}=-(x-\frac{1}{2})\Rightarrow y=1-x & (2)\end{cases}$$

حالا با جایگذاری پاسخ‌های بدست آمده در قید $g(x,y)$ خواهیم داشت:

$$(1)\Rightarrow g(x)=x^2+x^2+x^2=12\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \begin{cases} x=2\to y=2\Rightarrow f(x,y)=-4\\ x=-2\to y=-2\Rightarrow f(x,y)=12\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow g(x)=x^2+(1-x)^2+x(1-x)=12\Rightarrow x^2-x=x\underbrace{(x-1)}_{-y}=11\Rightarrow xy=-11$$

$$\Rightarrow f(x,y)=xy-2(x+y)=-11-2(1)=-13$$

با توجه به مقادیر بدست آمده واضح است که بیشترین مقدار ۱۲ و کمترین مقدار ۱۳- است.

۲۷ـ گزینه «۳» برای حل این سؤال از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم. تصویر ناحیه بر صفحه xoy، $2-x^2-y^2=0$ یا همان دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ است. پس $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le\sqrt{2}$ از طرفی با توجه به سؤال واضح است که $0\le z\le 2-r^2$، پس داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2r-r^3)\,dr=2\pi(r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{2}}=2\pi(2-1)=2\pi$$

۲۸ـ گزینه «۲» شکل نسبتاً طولانی تابع برداری، ما را به بررسی پایستار بودن آن سوق می‌دهد:

$$F(x,y,z)=(y^2,2xy+e^{3z},3ye^{3z})$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & 2xy+e^{3z} & 3ye^{3z}\end{vmatrix}=(3e^{3z}-3e^{3z},0,2y-2y)=\vec{0}$$

پس با توجه به مشتق‌پذیری تابع در تمام نقاط، میدان پایستار است و فقط کافیست تابع پتانسیل را محاسبه کنیم:

$$f(x,y,z)=\int y^2dx+\int e^{3z}dy+\int 0dz=y^2x+ye^{3z}+c$$

$$I=f(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e^6+c)-(0+0+c)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+e^6)$$

۲۹ـ گزینه «۳» با توجه به بسته بودن رویه، از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_D(\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_D(3+2y+x)\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^3\int_0^2(3+2y+x)\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^3(6+4y+2x)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1(6y+2y^2+2xy)_0^3\,dx=\int_0^1(18+18+6x)\,dx=[36x+3x^2]_0^1=36+3=39$$

۳۰ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش نکته‌ای و تشریحی جواب می‌دهیم:

روش اول: مطابق نکته متن کتاب داریم:

برای میدان برداری $\vec{F}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ سه نتیجه زیر را به خاطر بسپارید:

۱) دیورژانس $\vec{F}$ صفر است ($\operatorname{div}\vec{F}=0$)

۲) شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ بر روی هر سطح بسته مانندِ S، یعنی حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$، به شرط این که **مبدأ درون آن قرار <u>گرفته باشد</u>**، برابر با 4π است.

توجه کنید که چون مؤلفه‌های میدان $\vec{F}$ در مبدأ مختصات ناپیوسته هستند، بنابراین شرایط استفاده از قضیه دیورژانس را نداریم که مثلاً بگوییم؛ چون $\operatorname{div}\vec{F}=0$، پس شار عبوری از سطح بسته S برابر با صفر است!!

۳) شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ برای هر سطح بسته‌ای مانندِ S، یعنی حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma$ به شرط این که **مبدأ درون آن قرار <u>نگرفته باشد</u>**، برابر با **صفر** است (دقت کنید چون $\operatorname{div}\vec{F}=0$ و مبدأ درون این سطح قرار ندارد، پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و بگوییم حاصل این انتگرال صفر است.)

البته شرایط بالا در حالت کلی برای میدان برداری $\vec{F}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^{\frac{3}{2n}}}$ با فرض این که n عددی طبیعی باشد، برقرار است. یعنی اگر مبدأ درون S قرار نگرفته باشد، حاصل انتگرال صفر می‌شود و اگر مبدأ درون S باشد، حاصل انتگرال برابر است با $3V$ که V حجم درون رویه‌ی $x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=1$ است.

بنابراین حاصل انتگرال با توجه به مطابقت با بند (۲) برابر 4π و به دلیل ضریب (۲) داده شده در صورت سؤال برابر $2\times 4\pi=8\pi$ می‌شود.

روش دوم: اگر نکته را بلد نباشیم و بخواهیم از روش عادی مسئله را حل کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای میدان برداری داده شده $\operatorname{div}\vec{F}=0$ می‌باشد. اگرچه دیورژانس $\vec{F}$ صفر است و S یک سطح بسته است، اما نمی‌توان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال سطح داده شده صفر باشد، زیرا $\vec{F}$ در مبدأ پیوسته نیست و سطح S مبدأ مختصات را درون خود دارد، پس می‌توانیم از این مطلب که دیورژانس $\vec{F}$ صفر است، استفاده کرده و به جای S هر سطح بسته‌ای که مبدأ را درون خود داشته باشد، در نظر بگیریم. فرض کنید S' سطح کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ باشد. از معادله $S': x^2+y^2+z^2=a^2$ داریم:

$$\vec{n}ds=\frac{(2x,2y,2z)}{|2z|}dy\,dx=\quad(x,y,z)\times\frac{1}{|z|}=dy\,dx$$

$$\vec{F}.\vec{n}\,ds=2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{z}dy\,dx=2(a^2)^{-\frac{3}{2}}(a^2)\times\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\,dx=\frac{2}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\,dx$$

سطح S' از دو نیمکره $S'_1\ (z\geq 0)$, $S'_2\ (z\leq 0)$ تشکیل می‌شود که تصویر هرکدام از آنها بر صفحه xoy ناحیه درون دایره $x^2+y^2=a^2$ است و اگر این ناحیه را D بنامیم داریم:

$$I_1=\iint_D \vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_R\frac{2dy\,dx}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{r\,dr\,d\theta}{a\sqrt{a^2-r^2}}=2(\frac{1}{a})\int_0^{2\pi}(-\sqrt{a^2-r^2})_0^a\,d\theta=\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}a\,d\theta=4\pi$$

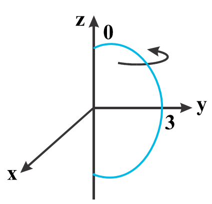
به همین صورت هم، روی نیم‌کره S' نیز داریم:

$$I_2=\iint_{S'_2}\vec{F}.\vec{n}\,ds=4\pi$$

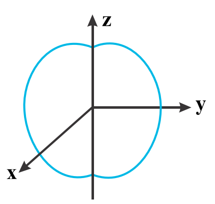
پس با جمع دو انتگرال بالا داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=4\pi+4\pi=8\pi$$

توجه داشته باشید که رویه $\rho=3+2\cos\varphi$ (برای $0\leq\varphi\leq\pi$) به‌صورت زیر می‌باشد که با $0\leq\theta\leq 2\pi$، این رویه مبدأ را در برمی‌گیرد.



$0\leq\theta\leq 2\pi$



سؤالات رشته‌ی عمران

۱ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2+\sqrt{1+x^4})^{\frac{1}{\mathrm{Ln}x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) e^2

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}+\frac{1}{2+\sqrt{2n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2}}\right)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) $2\mathrm{Ln}2$

۳ـ مساحت محصور به دو منحنی $y=\mathrm{Ln}x$ و $y=(\mathrm{Ln}x)^2$ کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $e-2$ ۳) $3-e$ ۴) $4-e$

۴ـ اگر z یک عدد مختلط باشد به طوری‌که $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$، آنگاه $z^{100}+\frac{1}{z^{100}}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -3^{50} ۳) 1 ۴) 3^{50}

۵ـ کدام مورد در ارتباط با سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$ درست است؟

۱) همگرا بوده و مقدار آن برابر $-\mathrm{Ln}3$ می‌باشد.

۲) همگرا بوده و مقدار آن برابر $-\mathrm{Ln}2$ می‌باشد.

۳) همگرا بوده و مقدار آن برابر -2 می‌باشد.

۴) واگرا است.

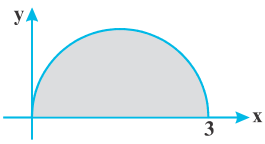
۶ـ کمترین فاصله بین کره $x^2+y^2+z^2+4y-6z+12=0$ و صفحه $2x-y+2z+1=0$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۷ـ فرض کنید $f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر برحسب x و y است به طوری‌که $f(x,2x)=1$ و $f_x(x,2x)=x$ در این صورت $f_y(1,2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸ـ حاصل $\iint_D\sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy$ که در آن D سطح نیم‌دایره نمایش داده شده در شکل زیر است، کدام است؟



۱) $3(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3})$ ۲) $3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

۳) $9(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3})$ ۴) $9(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

۹ـ اگر منحنی c نیم‌دایره $0\le t\le\pi$ ، $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ باشد، مقدار $\int_c e^y dx+xe^y dy$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۰ـ اگر D ناحیه محصور به بیضی‌گون $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ و بالای صفحه $z=0$ باشد و $\vec{F}=(x+4y^2)\vec{i}+(3y+2x^2)\vec{j}+(-2z+2y\cos x)\vec{k}$، حاصل $\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن S سطح محصورکننده D بوده و $\vec{n}$ بردار یکه قائم برون‌سو باشد، کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ۴) 12π

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱ـ گزینه «۴» حالت مبهم $(\infty)^{\circ}$ می‌باشد که باید عبارت را مساوی A قرار دهیم و از دو طرف تساوی Ln بگیریم و سپس رفع ابهام کنیم.

ابتدا در عبارت داخل پرانتز از هم‌ارزی بی‌نهایت استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{۲}+x^{۲})^{\frac{۱}{Lnx}}=\lim_{x\to+\infty}(۲x^{۲})^{\frac{۱}{Lnx}}$$

$$A=\lim_{x\to+\infty}(۲x^{۲})^{\frac{۱}{Lnx}}\Rightarrow LnA\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(۲x^{۲})}{Lnx}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}$$

$$LnA=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۴x}{۲x^{۲}}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^{۲}}{۲x^{۲}}=۲\Rightarrow LnA=۲\Rightarrow A=e^{۲}$$

۲ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول حد مجموع به کمک انتگرال معین، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i+\sqrt{in}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{i}{n}+\frac{\sqrt{in}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{i}{n}+\sqrt{\frac{in}{n^{۲}}}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{i}{n}+\sqrt{\frac{i}{n}}}=\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{x+\sqrt{x}}dx$$

$$\xrightarrow[۲udu=dx]{u=\sqrt{x}\ ,\ u^{۲}=x}\int\frac{۲udu}{u^{۲}+u}=۲\int\frac{u}{u(u+۱)}du=۲\int\frac{du}{۱+u}=۲Ln(۱+u)=۲Ln(۱+\sqrt{x}))\Big|_{\circ}^{۱}=۲Ln۲$$

۳ـ گزینه «۳» ابتدا باید محل تلاقی دو تابع را بیابیم.

$$(Lnx)^{۲}=Lnx\Rightarrow(Lnx)^{۲}-Lnx=\circ\Rightarrow Lnx(Lnx-۱)=\circ$$

$$\Rightarrow Lnx=\circ\Rightarrow x=e^{\circ}=۱\ ,\ Lnx-۱=\circ\Rightarrow Lnx=۱\Rightarrow x=e$$

پس سطح محصور بین دو تابع برابر است با:

$$S=\left|\int_{a}^{b}(y_{۲}-y_{۱})dx\right|=\int_{۱}^{e}Lnx-(Lnx)^{۲}dx=\int_{۱}^{e}Lnxdx-\int_{۱}^{e}(Lnx)^{۲}dx$$

برای محاسبه $\int_{۱}^{e}(Lnx)^{۲}dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases}u=(Lnx)^{۲}\Rightarrow du=۲(Lnx)(\frac{۱}{x})dx\\ dx=dv\Rightarrow x=v\end{cases}$$

$$S=\int_{۱}^{e}Lnx\,dx-((x(Lnx)^{۲})\Big|_{۱}^{e}-\int_{۱}^{e}۲Lnx\,dx)=-(e(Lne)^{۲}-\circ)+۳\int_{۱}^{e}Lnx\,dx=-e+۳(xLnx-x)\Big|_{۱}^{e}=-e+۳(\underbrace{eLne-e}_{\circ}-\circ+۱)=۳-e$$

روش دیگر برای محاسبه حل انتگرال:

با فرض $Lnx=t$ داریم:

$$x=e^{t}\Rightarrow dx=e^{t}dt\ ,\ \begin{cases}x=۱\to t=Lnt=\circ\\ x=e\to Lne=۱\end{cases}$$

اکنون داریم:

$$S=\int_{\circ}^{۱}(t-t^{۲})e^{t}dt$$

با استفاده از جزء به جزء به روش جدول داریم:

$t-t^{۲}$	e^{t}
$۱-۲t$	e^{t}
-۲	e^{t}
$\circ$	e^{t}

$$S=((t-t^{۲})e^{t}-(۱-۲t)e^{t}-۲e^{t})\Big|_{\circ}^{۱}=(\circ+e-۲e-\circ+۱+۲)=۳-e$$

۴ـ گزینه «۱» ابتدا از معادله‌ی داده شده z را به‌دست می‌آوریم و سپس حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}\xrightarrow{\times z}z^{2}-\sqrt{3}z+1=0$$

$$\Delta=b^{2}-4ac=(-\sqrt{3})^{2}-4(1)(1)=-1$$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\\[2mm]\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ داریم:

$$r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1\ ,\ tg\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\to\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z=e^{\frac{i\pi}{6}}$$

پس داریم:

$$z^{100}+z^{-100}=(e^{\frac{i\pi}{6}})^{100}+=(e^{\frac{i\pi}{6}})^{-100}=e^{\frac{i50\pi}{3}}+e^{-\frac{i50\pi}{3}}=2\cos\frac{50\pi}{3}=2\cos(17\pi-\frac{\pi}{3})=2(-\cos\frac{\pi}{3})=-2(\frac{1}{2})=-1$$

توجه داشته باشید که با $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ نیز به جواب -1 می‌رسیم.

۵ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد، جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}Ln(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})=\sum_{n=2}^{\infty}Ln(1-\frac{2}{n^{2}+n})=\sum_{n=2}^{\infty}Ln(\frac{n^{2}+n-2}{n^{2}+n})=\sum_{n=2}^{\infty}Ln(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)})$$

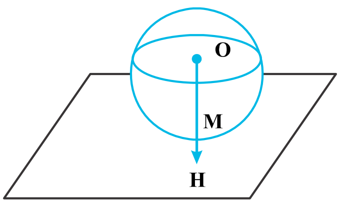
$$=\sum_{n=2}^{\infty}Ln(\frac{n-1}{n+1})+Ln(\frac{n+2}{n})=\sum_{n=2}^{\infty}Ln(\frac{n-1}{n+1})-Ln(\frac{n}{n+2})$$

اکنون با توجه به اینکه دو جمله جلوی سری پشت‌سرهم هستند از قاعده سری تلسکوپی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$Ln(\frac{2-1}{2+1})-\lim_{n\to+\infty}Ln(\frac{n}{n+2})=Ln(\frac{1}{3})-Ln(1)=-Ln3$$

پس سری داده شده همگرا به عدد $-Ln3$ می‌باشد.

۶ـ گزینه «۳» ابتدا معادله کره را به صورت استاندارد می‌نویسیم، تا بتوانیم با استفاده از فرمول فاصله نقطه تا صفحه، فاصله‌ی صفحه تا مرکز کره را به‌دست آوریم.



$$x^{2}+(y+2)^{2}+(z-3)^{2}-4-9+12=0$$

$$x^{2}+(y+2)^{2}+(z-3)^{2}=1$$

مرکز کره $O(0,-2,3)$ می‌باشد، حال داریم:

فاصله مرکز تا صفحه $OH=\frac{|2(0)-(-2)+2(3)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$

پس کمترین فاصله‌ی کره تا صفحه برابر است با:

کمترین فاصله $=MH=3-1=2$

۷ـ گزینه «۱» با استفاده از مشتق زنجیره‌ای توابع دو متغیره داریم:

$$f(x,\underbrace{2x}_{y})=1$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1})+(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{2})=0\xrightarrow[y=2]{x=1}f_x(1,2)+2f_y(1,2)=0\xrightarrow{f_x(x,2x)=x\Rightarrow f_x(1,2)=1}1+2f_y(1,2)=0\Rightarrow f_y(1,2)=-\frac{1}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» با توجه به وجود عامل $x^۲+y^۲$ در تابع زیر انتگرال و همچنین با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری که یک نیم‌دایره می‌باشد، از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$(x-\frac{۳}{۲})^۲+y^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow x^۲+y^۲-۳x=۰$$: معادله دایره

$$r^۲=۳r\cos\theta\Rightarrow r=۰\ ,\ r=۳\cos\theta\ ,\ ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$$ ربع اول

$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۳\cos\theta}\sqrt{۹-r^۲}\ r\,dr\,d\theta\xrightarrow[du=-۲r\,dr]{u=۹-r^۲}$$

$$-\frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int u^{\frac{۱}{۲}}du\,d\theta=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}u^{\frac{۳}{۲}}\ d\theta=-\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}((۹-r^۲)^{\frac{۳}{۲}})\Big|_۰^{۳\cos\theta}\ d\theta=-\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}((۹-۹\cos^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}-(۹)^{\frac{۳}{۲}})d\theta$$

$$=-\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۹(\sin^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}-۲۷)d\theta=-\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۲۷\sin^۳\theta-۲۷)\,d\theta=-۹(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta(۱-\cos^۲\theta)\,d\theta-(\theta)_۰^{\frac{\pi}{۲}})$$

$$=-۹((-\cos\theta)_۰^{\frac{\pi}{۲}}+\frac{\cos^۳\theta}{۳})_۰^{\frac{\pi}{۲}}-\frac{\pi}{۲})=-۹(۰+۱+۰-\frac{۱}{۳}-\frac{\pi}{۲})=-۹(\frac{۲}{۳}-\frac{\pi}{۲})=۹(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{۳})$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا پایستار بودن میدان برداری داده شده را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}P=e^y\\Q=xe^y\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$$

چون میدان برداری پایستار است، باید تابع پتانسیل این میدان را به‌دست آوریم.

$$\int Pdx+Qdy=\int e^y\,dx=xe^y$$

$$t=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\cos۰=۱\\y=\sin۰=۰\end{cases}\quad,\quad t=\pi\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\pi=-۱\\y=\sin\pi=۰\end{cases}$$

اکنون مقادیر به‌دست آمده x و y را در تابع پتانسیل قرار می‌دهیم.

$$f(x,y)=(xe^y)_{(۱,۰)}^{(-۱,۰)}=(-e^۰)-(e^۰)=-۲$$

۱۰ـ گزینه «۳» توجه داشته باشید که فضای داده شده بسته نیست، زیرا به صورت "بالای صفحه‌ی $z=۰$" به آن اشاره شده. پس خود این صفحه بخشی از ناحیه نیست. در نتیجه اگر این صفحه را به ناحیه اضافه کنیم سطح بسته بوده و می‌توان از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد. یعنی داریم:

$$\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds+\oiint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_D\operatorname{div}(\vec{F})dv$$

$$\oiint_S\operatorname{div}(\vec{F})dv=\iiint_D(۱+۳-۲)dv=۲\iiint_D dv$$

در واقع انتگرال اخیر حجم نیمه‌ی بالایی بیضی‌گون مورد اشاره است که برابر است با:

$$V=\frac{۲}{۳}\pi(۳)(۲)(۱)=۴\pi\Rightarrow I=۲V=۸\pi$$

حالا برای انتگرال صفحه ای که به ناحیه اضافه کردیم داریم:

$$\oiint_{z=۰}\vec{F}\vec{n}ds=\oiint_{z=۰}(x+۴y^۲,۳y+۲x^۲,-۲z+۲y\cos x).(۰,۰,-۱)ds=\oiint(-۲y\cos x)dxdy$$

توجه داشته باشید ناحیه‌ای که توسط بیضی‌گون روی این صفحه محدود می‌شود در واقع همان بیضی $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$ است. این ناحیه نسبت به متغیر y زوج است اما تابع زیر انتگرال نسبت به آن فرد است، پس حاصل انتگرال به دست آمده صفر خواهد بود و در کل داریم:

$$\oiint_s\vec{F}.\vec{n}ds=۸\pi-۰=۸\pi$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ــ اگر $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(\frac{۱+z}{۲-z})>۱\}$ باشد، آنگاه A با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟ ($\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط است.)

۱) $\{z\in\mathbb{C}:|z-۲-\frac{۳}{۲}i|<\frac{۳}{۲}\}$
۲) $\{z\in\mathbb{C}:|z-۲-\frac{۳}{۲}i|>\frac{۳}{۲}\}$
۳) $\{z\in\mathbb{C}:|z+۲+\frac{۳}{۲}i|<\frac{۳}{۲}\}$
۴) $\{z\in\mathbb{C}:|z+۲+\frac{۳}{۲}i|>\frac{۳}{۲}\}$

۲ــ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[\frac{۵}{۲}]+[(\frac{۵}{۲})^{۲}]+\cdots+[(\frac{۵}{۲})^{n}]}{(\frac{۵}{۲})^{n}}$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ∞
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

۳ــ اگر $A=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۹}}{\sqrt{۸+x}}dx$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}\le A\le\frac{۲}{۱۹}$
۲) $\frac{۱}{۲۰\sqrt{۲}}\le A\le\frac{۱}{۱۰}$
۳) $\frac{۱}{۳۰\sqrt{۲}}\le A\le\frac{۱}{۳۰}$
۴) $\frac{۱}{۳۰}\le A\le\frac{۱}{۲۰\sqrt{۲}}$

۴ــ حجم شکل حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $(۴,۰)$ حول محور yها، کدام است؟

۱) ۳۲π
۲) $۳۲\pi^{۲}$
۳) ۱۶π
۴) $۱۶\pi^{۲}$

۵ــ اگر $b\ge a>۰$ باشد، آنگاه فاصله همگرایی سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{(ax+b)^{n}}{a^{n}+b^{n}}$، کدام است؟

۱) $(\frac{-۱-b}{a},\frac{۱-b}{a})$
۲) $(\frac{-۱-۲b}{a},\frac{۱-b}{a})$
۳) $(\frac{-۲b}{a},۰)$
۴) $(۰,\frac{۲b}{a})$

۶ــ خط قائم بر بیضی‌گون $x^{۲}+y^{۲}+\frac{z^{۲}}{۴}=۱$ با محورهای مختصات زاویه مساوی می‌سازد. اگر (a,b,c) نقطه‌گذرای خط قائم از بیضی‌گون باشد، مقدار $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۷ــ اگر $F(t)=\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\le t^{۲}}\sin(x^{۲}+y^{۲})^{۲}dx\,dy\ (t>۰)$ باشد، $F'(t)$، کدام است؟

۱) $۲\pi\sin(t^{۲})$
۲) $۲\pi\sin(t^{۴})$
۳) $۲\pi t\sin(t^{۲})$
۴) $۲\pi t\sin(t^{۴})$

۸ــ فرض کنید $C_{۱}$ منحنی بسته $x^{۲}+y^{۲}=۲۵$ در جهت مثلثاتی و $C_{۲}$ منحنی بسته $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مقدار $\int_{C_{۱}\cup C_{۲}}xdy-ydx$، کدام است؟

۱) ۳۸π
۲) ۳۶π
۳) ۳۱π
۴) ۱۹π

۹ــ اگر S بخشی از رویه $z=۱-x^{۲}$، $۰\le x\le ۱$ و $-۲\le y\le ۲$ و C مرز این رویه در جهت مثبت و $\vec{F}(x,y,z)=(y,y,z)$ باشد، آنگاه مقدار $\oint_{C}\vec{F}\cdot\vec{dr}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$
۲) -۴
۳) $-\frac{۱۵}{۴}$
۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

۱۰ــ فرض کنید S سطح خارجی ناحیه‌ای باشد که توسط صفحه $z=۰$ و رویه $z=۴-x^{۲}-y^{۲}$، محصور شده است. اگر $\vec{F}(x,y,z)=(x^{۳}+\cos(y^{۳}+z^{۳}),y^{۳}+\sin(x^{۳}+z^{۳}),x^{۳}+y^{۳})$ باشد، شار گذرا از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

۱) ۱۶π
۲) ۱۷π
۳) ۳۲π
۴) ۳۴π

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱ـ گزینه «۱» با قراردادن $z=x+iy$ در مجموعه A و مشخص کردن قسمت IM این مجموعه داریم:

$$A=\frac{1+(x+iy)}{2-x-iy}\times\frac{(2-x)+iy}{(2-x)+iy}=\frac{2-x+2x-x^2+iy+iyx+2iy-iyx-y^2}{(2-x)^2-i^2y^2}$$

$$Im(A)=\frac{3y}{(2-x)^2+y^2}>1\Rightarrow(2-x)^2+y^2<3y\Rightarrow(2-x)^2+y^2-3y<0\Rightarrow(2-x)^2+(y-\frac{3}{2})^2<\frac{9}{4}$$

اکنون در گزینه (۱) با قراردادن $z=x+iy$ و به‌دست آوردن اندازه عبارت داده شده داریم:

$$|x+iy-2-\frac{3}{2}i|<\frac{3}{2}\Rightarrow|(x-2)+i(y-\frac{3}{2})|<\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2}<\frac{3}{2}\Rightarrow(x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2<\frac{9}{4}$$

پس مجموعه A دقیقاً همان مجموعه گزینه (۱) می‌باشد.

۲ـ گزینه «۴» با استفاده از خواص جزء صحیح، داریم:

$$x-1<[x]\le x\Rightarrow x^2-1<[x^2]\le x^2,\dots,x^n-1<[x^n]\le x^n$$

اکنون اگر طرفین نامساوی‌های فوق را با هم جمع کنیم، داریم:

$$(x+x^2+\dots+x^n)-n<[x]+[x^2]+\dots+[x^n]\le x+x^2+\dots+x^n$$

حال می‌دانیم $x+x^2+x^3+\dots+x^n$ مجموع جملات یک تصاعد هندسی و برابر $\frac{x(x^n-1)}{x-1}$ است، با تقسیم رابطه‌های فوق بر x^n داریم:

$$\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x^n-1}{x^n}-\frac{n}{x^n}<\frac{[x]+[x^2]+\dots+[x^n]}{x^n}\le\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x^n-1}{x^n}$$

اگر $x>1$ باشد، وقتی $x\to+\infty$، آنگاه $\frac{x^n-1}{x^n}\to1$ و $\frac{n}{x^n}\to0$، پس دو عبارت دو طرف نامساوی فوق به عدد $\frac{x}{x-1}$ میل می‌کنند و بنابر قضیه فشردگی، حاصل حد داده‌شده نیز برابر $\frac{x}{x-1}$ می‌باشد. در این مثال چون $x=\frac{5}{2}$ است، داریم:

$$\text{حاصل حد}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

۳ـ گزینه «۴» در بازه موردنظر داریم:

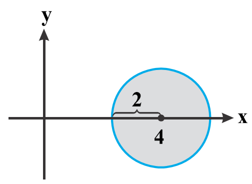
$$0\le x\le1\xrightarrow{\text{به طرفین عدد ۸ را اضافه می‌کنیم}}8\le8+x\le9\xrightarrow{\text{از طرفین رادیکال می‌گیریم}}\sqrt{8}\le\sqrt{8+x}\le3$$

$$\xrightarrow{\text{عکس می‌کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود}}\frac{1}{\sqrt{8}}\ge\frac{1}{\sqrt{8+x}}\ge\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^9}\frac{x^9}{3}\le\frac{x^9}{\sqrt{8+x}}\le\frac{x^9}{\sqrt{8}}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\int_0^1\frac{x^9}{3}dx\le\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{8+x}}dx\le\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{8}}dx$$

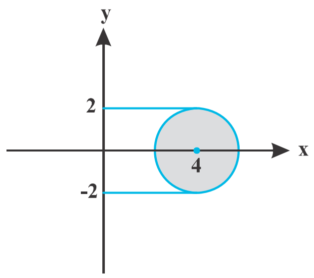
$$\frac{1}{3}[\frac{x^{10}}{10}]_0^1\le A\le\frac{1}{\sqrt{8}}[\frac{x^{10}}{10}]_0^1\Rightarrow\frac{1}{3}(\frac{1}{10}-0)\le A\le\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{10}-0)\Rightarrow\frac{1}{30}\le A\le\frac{1}{20\sqrt{2}}$$

۴ـ گزینه «۲»



روش اول: با توجه به این که محور دوران، یعنی محور y ها، با دایره مورد نظر برخوردی ندارد از قضیه گلدن پاپوس برای محاسبه‌ی حجم استفاده کنیم. اگر فاصله نقطه P (مرکز ثقل دایره) تا محور دوران را با d نشان دهیم و S مساحت دایره باشد، حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V=2\pi sd\Rightarrow V=2\pi(4\pi)4=32\pi^2$$



روش دوم: اما اگر استفاده از قضیه به ذهن ما نرسید روش زیر حل سخت‌تر سؤال است:

ابتدا معادله دایره را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از روش دیسک، حجم حاصل از دوران را به‌دست می‌آوریم:

$$(x-4)^2+y^2=4\Rightarrow(x-4)^2=4-y^2\Rightarrow x-4=\pm\sqrt{4-y^2}\Rightarrow x=4\pm\sqrt{4-y^2}$$

حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V=\pi\int_a^b (x_2^2-x_1^2)dy=\pi\int_{-2}^{2}((4+\sqrt{4-y^2})^2-(4-\sqrt{4-y^2})^2)dy=\pi\int_{-2}^{2}(16+8\sqrt{4-y^2}+4-y^2)-(16-8\sqrt{4-y^2}+4-y^2))\,dy$$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}16\sqrt{4-y^2}dy\xrightarrow{\text{تابع زوج است}}32\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}dy$$

$$y=2\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}y=0\rightarrow\theta=0\\ y=2\rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow dy=2\cos\theta\,d\theta$$

پس داریم:

$$V=2(32\pi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\underbrace{(1-\sin^2\theta)}_{\cos^2\theta}}\cos\theta\,d\theta=32\pi(4)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=32\pi(4)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos2\theta}{2})d\theta=32\pi(2)(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=32\pi^2$$

۵ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\frac{1}{R}$ باید شعاع همگرایی سری را به‌دست آوریم و سپس از روی آن، بازه همگرایی سری را بیابیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a(x+\frac{b}{a}))^n}{a^n+b^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(x+\frac{b}{a})^n}{a^n+b^n}$$

پس $u_n=\frac{a^n}{a^n+b^n}$ می‌باشد که با توجه به اینکه $b\ge a>0$ می‌باشد در مخرج کسر می‌توانیم از a^n در مقابل b^n صرف‌نظر کنیم و داریم:

$$u_n=\frac{a^n}{b^n}\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}\times\frac{b^n}{a^n}|=\frac{1}{R}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}|\frac{a^n\times a}{b^n\times b}\times\frac{b^n}{a^n}|=\frac{a}{b}=\frac{1}{R}\Rightarrow R=\frac{b}{a}$$

پس بازه همگرایی برابر است با:

$$|x+\frac{b}{a}|<R\Rightarrow|x+\frac{b}{a}|<\frac{b}{a}\Rightarrow-\frac{b}{a}<x+\frac{b}{a}<\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{-2b}{a}<x<0$$

اکنون باید دو سر بازه را بررسی کنیم، به ازای $x=0$ سری داده شده به صورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{a^n+b^n}$ در می‌آید که این سری حد جمله عمومی آن برابر یک و مخالف صفر است، پس یک سری واگراست، پس گزینه (۳) صحیح است.

۶ـ گزینه «۱» ابتدا باید بردار گرادیان رویه را به دست آوریم:

$$f:x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1=0$$

$$\vec{\nabla}f=(2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}+(\frac{z}{2})\vec{k}$$

با توجه به اینکه خط قائم بر رویه با محورهای مختصات زاویه‌های مساوی دارد، پس باید در بردار گرادیان مؤلفه‌های اول و دوم و سوم با هم برابر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}2x=2y\Rightarrow x=y\\ 2x=\dfrac{z}{2}\Rightarrow z=4x\end{cases}\Rightarrow x^2+x^2+\frac{16x^2}{4}=1\Rightarrow 6x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ z=\pm\frac{4}{\sqrt{6}}$$

پس داریم:

$$(a,b,c)=(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{4}{\sqrt{6}})$$

در نتیجه حاصل $a^2+b^2+c^2$ برابر است با:

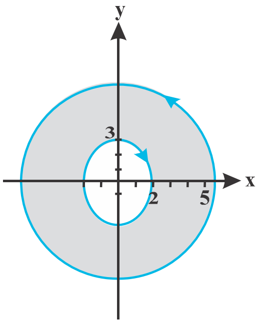
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{16}{6}=\frac{18}{6}=3$$

۷ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه ناحیه انتگرال‌گیری دایره‌ای به شعاع t می‌باشد، از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$F(t)=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{t}\sin(t^2)^2\,t\,dt\,d\theta \Rightarrow F(t)=2\pi\int_{0}^{t}t\sin(t^4)\,dt \Rightarrow F'(t)=2\pi t\sin(t^4)$$

توجه داشته باشید که اگر از حاصل انتگرال مشتق بگیریم دوباره به خود تابع زیر انتگرال می‌رسیم.

۸ـ گزینه «۱» دقیقاً سؤال متن کتاب ریاضی (۲) مدرسان شریف است.



با توجه به تعمیم قضیه گرین، چون دو مسیر داده شده خلاف جهت هم هستند و مسیر بیرونی در جهت مثلثاتی است، می‌توانیم از قضیه گرین برای فضای بین دو منحنی استفاده کنیم و داریم:

$$I=\oint_{C_1 \cup C_2}-y\,dx+x\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D(1-(-1))\,dA=2\iint_D dA$$

انتگرال به‌دست آمده، درواقع فضای بین دایره و بیضی می‌باشد، پس داریم:

$$I=2\times(\text{مساحت دایره}-\text{مساحت بیضی})=2\times(25\pi-\pi(2)(3))=2(25\pi-6\pi)=2(19\pi)=38\pi$$

توجه داشته باشید که مساحت بیضی برابر πab می‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» با استفاده از نتیجه قضیه استوکس، برای ساده‌تر شدن حل، انتگرال را روی صفحه $z=0$ که مرز مشترک بین ناحیـه‌ی داده شـده و ناحیـه S' که همان صفحه $z=0$ می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.

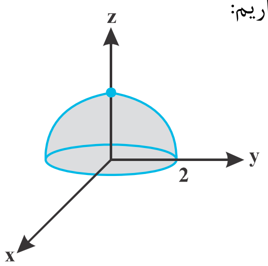
$$I=\iint_S \mathrm{Curl}\vec{F}.\vec{n}\,d\delta=\iint_{S'}\mathrm{curl}\vec{F}.\vec{n}\,ds$$

$$\mathrm{Curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & y & z\end{vmatrix}=+\vec{k}(0-1)=-\vec{k}$$

بردار قائم صفحه $z=0$ نیز برابر $n=\vec{k}$ می‌باشد، پس داریم:

$$I=\iint_{S'}(-\vec{k})(\vec{k})\,ds=\int_0^1\int_{-2}^{2}(-1)\,dy\,dx=-\int_0^1(y)_{-2}^{2}dx=-4(x)_0^1=-4$$

۱۰ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه S یک سطح بسته می‌باشد، برای محاسبه شار از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم و داریم:



$$\text{شار}=\iint \vec{F}.\vec{n}\,d\vec{s}=\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dv$$

$$\text{شار}=\iiint_V(3x^2+3y^2)\,dv$$

از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\text{شار}=3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2}r^2\times r\,dz\,dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(z)_0^{4-r^2}dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(4-r^2)\,dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^2(4r^3-r^5)\,dr\,d\theta$$

$$=3\times 2\pi\times\left(r^4-\frac{r^6}{6}\right)_0^2=6\pi\times\left(16-\frac{32}{3}\right)=96\pi-64\pi=32\pi$$

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱ـ اگر $a \in \mathbb{R}$ و $z = (\sin\frac{5\pi}{8} + i\cos\frac{5\pi}{8})^4$ ریشه معادله $z^3 + (a-2)z^2 + a^2z - 2a^2 - 1 = 0$ باشد، آنگاه کدام گزینه جواب دیگری از این معادله است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 3 ۴) $-1+i$

۲ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\cot^2 x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $e^{-\frac{1}{3}}$ ۳) $e^{-\frac{1}{6}}$ ۴) $e^{\frac{1}{3}}$

۳ـ تابع $f:[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \int_0^x \max\{\sin t, \cos t\}dt$ وارون‌پذیر است. مقدار $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) موجود نیست.

۴ـ فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_0 = 1$ و برای یک عدد حقیقی p جملات دنباله همگی در معادله $(n^2+2)a_{n+1} - (n^2+1)pa_n = 0$ صدق کنند. مجموعه همه مقادیر p که برای آن‌ها سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است، کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(\frac{-1}{4},\frac{1}{4})$

۵ـ سری مکلورن تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ کدام است؟

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^n$ ۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!^2}x^n$ ۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}n!}x^n$ ۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$

۶ـ مقدار $\int_1^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{e})$ ۲) $\mathrm{Ln}(1+e)$ ۳) $\mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{e})$ ۴) $\mathrm{Arc\,tg}(e^2)$

۷ـ حجم حاصل از دوران ناحیه بی‌کران واقع در ربع اول بین محور x ها و منحنی $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ حول محور y ها کدام است؟

۱) ∞ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۸ـ کدام گزینه درباره اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$ درست است؟

۱) مینیمم نسبی دارد، ولی ماکزیمم نسبی ندارد.
۲) ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد.
۳) ماکزیمم نسبی دارد، ولی مینیمم نسبی ندارد.
۴) اکسترمم نسبی ندارد.

۹ـ مقدار $I = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^3)dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{3}{2\pi}$ ۴) $\frac{2}{3\pi}$

۱۰ـ کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + (x^2+z)\vec{j} + y\vec{k}$ در جابه‌جایی یک ذره از نقطه $(1,0,2)$ به نقطه $(3,4,1)$ روی خم $C: \vec{r}(t) = (2-\cos^5 t, 4\sin^4\frac{t}{2}, 1+\cos^6\frac{t}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{109}{6}$ ۲) 40 ۳) $\frac{35}{3}$ ۴) 52

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱ـ گزینه «۳» ابتدا باید مقدار z را به‌دست بیاوریم و با استفاده از آن و جایگذاری در معادله داده شده مقدار a را بیابیم.

$$z=(e^{i\frac{5\pi}{8}})^4=e^{i\frac{5\pi}{2}}=\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}=i$$

$$z=i\Rightarrow i^3+(a-2)i^2+a^2i-2a^2-1=0\Rightarrow -i-a+2+a^2i-2a^2-1=0\Rightarrow i(a^2-1)-2a^2-a+1=0$$

برای آن‌که تساوی فوق برقرار شود باید ضریب i مساوی صفر شود، پس داریم:

$$a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=-1\end{cases}$$

به ازای $a=1$، قسمت دوم تساوی برقرار نمی‌باشد. پس $a=-1$ قابل قبول است.

$$z^3-3z^2+z-3=0\Rightarrow(z^2+1)(z-3)=0\Rightarrow z=3$$

۲ـ گزینه «۳» حالت مبهم $(1)^\infty$ می‌باشد، برای رفع ابهام از این حالت از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}(f)^g=\lim_{x\to a}e^{(f-1)\times g}$$

$$\text{حاصل}=\lim_{x\to 0}e^{(\frac{\sin x}{x}-1)\cot^2 x}=\lim_{x\to 0}e^{(\frac{\sin x-x}{x})\times\frac{1}{tg^2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{(x-\frac{x^3}{6})-x}{x(x^2)}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{-x^3}{6}}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

توجه داشته باشید که از هم‌ارزی‌های $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x-\frac{x^3}{3!}$ و $tg\,x\underset{x\to 0}{\sim}x$ استفاده کرده‌ایم.

۳ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $f(x)=\int_0^x\max\{\sin t,\cos t\}dt$ می‌باشد، باید $f(x)$ را در دو بازه $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ ، $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ به‌دست بیاوریم و داریم:

$$\text{اگر}\ x\in[0,\tfrac{\pi}{4}]\Rightarrow f(x)=\int_0^x\cos t\,dt=(\sin t)_0^x=\sin x$$

$$\text{اگر}\ x\in[\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{2}]\Rightarrow f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^x\sin t\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}-(\cos x)_{\frac{\pi}{4}}^x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-\cos x$$

پس $f(x)$ به‌صورت معادله دوضابطه‌ای زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x\ ; & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}-\cos x: & \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\cos x\ ; & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ \sin x\ ; & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f'_-(\tfrac{\pi}{4})=f'_+(\tfrac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس داریم:

$$(f^{-1})'_{(\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

۴ـ گزینه «۱»

$$(n^2+2)a_{n+1}-(n^2+1)pa_n=0\Rightarrow(n^2+2)a_{n+1}=(n^2+1)pa_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n^2+1}{n^2+2})p$$

اکنون طبق آزمون نسبت برای همگرایی سری‌ها که باید $\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ را بیابیم، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to+\infty}|\frac{n^2+1}{n^2+2}p|=|p|$$

برای همگرا بودن باید $|p|<1$ باشد، یعنی $-1<p<1$ باشد.

۵ـ گزینه «۴» ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ بازنویسی می‌کنیم و سپس با استفاده از بسط مک‌لورن

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots$$

تابع $f(x)$ را بسط می‌دهیم و سری معادل این بسط را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\cdots=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{15}{8\times 3!}x^3+\cdots$$

حال با توجه به گزینه‌های داده شده سری معادل با این جملات به‌دست آمده را می‌یابیم که گزینه (۴) صحیح می‌باشد و جملات تولید شده توسط این سری دقیقاً همان جملات به‌دست آمده از بسط مک‌لورن تابع می‌باشد.

۶ـ گزینه «۱» صورت و مخرج کسر را در e^{-x} ضرب می‌کنیم تا بتوانیم u و du را در انتگرال ایجاد کنیم.

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+۱}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\int_{۱}^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{۱+e^{-x}}\xrightarrow[-e^{-x}dx=du]{۱+e^{-x}=u}-\int\frac{du}{u}=-\operatorname{Ln}u=-(\operatorname{Ln}(۱+e^{-x}))\Big|_{۱}^{+\infty}$$

$$=-(\operatorname{Ln}(۱+e^{-\infty})-\operatorname{Ln}(۱+e^{-۱}))=-(۰-\operatorname{Ln}(۱+\frac{۱}{e}))=\operatorname{Ln}(۱+\frac{۱}{e})$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه تابع $f(x)$ را حول محور yها دوران داده‌ایم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، که به صورت زیر است: (روی محور yها $x=۰$ می‌باشد.)

$$V=۲\pi\int_{a}^{b}xf(x)dx=۲\pi\int_{۰}^{+\infty}x(\frac{۱}{x^{۴}+۱})dx=۲\pi\int\frac{xdx}{(x^{۲})^{۲}+۱}\xrightarrow[۲xdx=du]{x^{۲}=u}$$

$$\pi\int\frac{du}{u^{۲}+۱}=\pi\operatorname{Arctan}(u)=\pi(\operatorname{Arctan}(x^{۲}))\Big|_{۰}^{+\infty}=\pi(\operatorname{Arctan}(+\infty)-\operatorname{Arctan}(۰))=\pi(\frac{\pi}{۲}-۰)=\frac{\pi^{۲}}{۲}$$

۸ـ گزینه «۳» باید مشتق تابع را نسبت به متغیرهای x و y جداگانه مساوی صفر قرار دهیم.

$$f_x=\frac{-۱}{x^{۲}}+y=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{x^{۲}}$$

$$f_y=\frac{۶۴}{y^{۲}}+x=۰\xrightarrow{y=\frac{۱}{x^{۲}}}\frac{۶۴}{(\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}}+x=۰\Rightarrow ۶۴x^{۴}+x=۰\Rightarrow x(۶۴x^{۳}+۱)=۰\xrightarrow{x\neq ۰}x^{۳}=\frac{-۱}{۶۴}\Rightarrow x=\frac{-۱}{۴}$$

$$x=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow y=۱۶$$

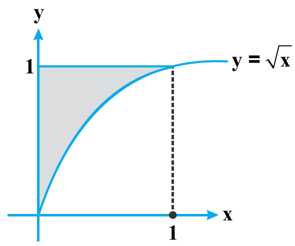
$$f_{xx}=\frac{۲}{x^{۳}}\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۴}}\frac{۲}{(-\frac{۱}{۴})^{۳}}=-۱۲۸\quad,\quad f_{xy}=۱\quad,\quad f_{yy}=\frac{-۱۲۸}{y^{۳}}\xrightarrow{y=۱۶}\frac{-۱۲۸}{(۱۶)^{۳}}=\frac{-۲^{۷}}{۲^{۱۲}}=-\frac{۱}{۳۲}$$

اکنون Δ را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^{۲}$$

$\Delta=(-۱۲۸)(\frac{-۱}{۳۲})-(۱)^{۲}>۰\xrightarrow{f_{xx}<۰}$ پس نقطه $(-\frac{۱}{۴}\,,\,۱۶)$ نقطه اکسترمم از نوع ماکزیمم نسبی است.

۹ـ گزینه «۴» با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و با استفاده از قضیه فوبینی، جای المان‌های x و y را عوض می‌کنیم تا بتوانیم از تابع زیر انتگرال به راحتی انتگرال بگیریم.



$$I=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{y^{۲}}\sin(\pi y^{۳})dx\,dy=\int_{۰}^{۱}\sin(\pi y^{۳})(x)\Big|_{۰}^{y^{۲}}dy=\int_{۰}^{۱}y^{۲}\sin(\pi y^{۳})dy$$

$$\xrightarrow[۳\pi y^{۲}dy=du]{\pi y^{۳}=u}\frac{۱}{۳\pi}\int\sin u\,du=\frac{-۱}{۳\pi}(\cos u)=\frac{-۱}{۳\pi}(\cos\pi y^{۳})\Big|_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{-۱}{۳\pi}(\cos\pi-\cos۰)=\frac{-۱}{۳\pi}(-۱-۱)=\frac{-۱}{۳\pi}(-۲)=\frac{۲}{۳\pi}$$

۱۰ـ گزینه «۲» ابتدا پایستار بودن میدان برداری را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=۲x\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=۰\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=۱$$

پس میدان داده شده پایستار است و باید تابع پتانسیل آن را به‌دست آوریم.

$$\int_C\vec{F}.\vec{dr}=\int ۲xy\,dx+\int zdy=(x^{۲}y+zy)\Big|_{(۱,۰,۲)}^{(۳,۴,۱)}=(۳۶+۴)-(۰+۰)=۴۰$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱ـ حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ ، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\cos x$ ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) $\frac{\text{tg}\, x}{x}$

۲ـ ربع دایرهٔ $x^2+y^2=9$ را در ربع اول صفحه مختصات در نظر بگیرید. مساحت حاصل از دوران این ربع دایره حول خط $x+y=3$ چند برابر 9π است؟

۱) $\pi+4$ ۲) $4-\pi$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi+4)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}(4-\pi)$

۳ـ طول قوس منحنی $9x^2=4y^3$ از نقطه $(0,0)$ تا $(2\sqrt{3},3)$، کدام است؟

۱) $\frac{13}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{17}{3}$

۴ـ اگر $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}\leq 1\}$ باشد، آنگاه حاصل $\iint_S (\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})ds$ کدام است؟

۱) 96π ۲) 72π ۳) 48π ۴) 24π

۵ـ مقدار حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=y$ که داخل استوانه $x^2+y^2=y$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۶ـ فرض کنید میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}-2y\vec{j}+\vec{k}$ از سطح بسته مخروطی شکل S با معادله $\phi=\frac{\pi}{4}$ در مختصات کروی و صفحه $z=2$ می‌گذرد. شار گذرا از سطح S کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $-\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{3}$

پاسخنامه رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱ـ گزینه «۳» این سؤال دقیقاً مثال متن کتاب ریاضی (۱) میکرو مدرسان شریف می‌باشد.

$$\cos\frac{x}{2^k}\cdot\sin\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2}\sin 2(\frac{x}{2^k})=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{k-1}}$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2^2}\times\cdots\times\cos\frac{x}{2^{k-1}}\times\overbrace{\cos\frac{x}{2^k}\times\sin\frac{x}{2^k}}}{\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2^2}\times\cdots\times(\cos\frac{x}{2^{k-1}}\sin\frac{x}{2^{k-1}})\times\frac{1}{2}}{\sin\frac{x}{2^k}}$$

به همین شکل اگر ادامه دهیم، به اندازه‌ی k تا $\frac{1}{2}$ ایجاد می‌شود و در نهایت به $\sin x$ می‌رسیم، لذا داریم:

$$\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{(\sin x)(\frac{1}{2})^k}{\sin\frac{x}{2^k}}$$

اگر $k\to+\infty$، آن‌گاه داریم:

$$\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin x}{2^k(\frac{x}{2^k})}=\frac{\mathbf{\sin x}}{\mathbf{x}}$$

۲ـ گزینه «۴» با توجه به این که محورهای دوران یعنی خط $x+y=3$ از درون منحنی داده شده عبور نمی‌کند، می‌توانیم از روش گلدن پاپوس استفاده کنیم. پس باید ابتدا مرکز ثقل ناحیه را به دست آوریم و با استفاده از فرمول فاصله نقطه تا خط فاصله مرکز ثقل تا محور دوران را بیابیم و آن را با d نمایش می‌دهیم. برای هر ربع دایره به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات مرکز ثقل به صورت $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{2a}{\pi},\frac{2a}{\pi})$ می‌باشد، پس مختصات مرکز ثقل برابر است با:

$$(\bar{x},\bar{y})=(\frac{6}{\pi},\frac{6}{\pi})$$

فاصله مرکز ثقل تا خط $x+y-3=0$ برابر است با:

$$d=\frac{\left|\frac{6}{\pi}+\frac{6}{\pi}-3\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\left|\frac{12}{\pi}-3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{12-3\pi}{\pi\sqrt{2}}=\frac{3(4-\pi)}{\pi\sqrt{2}}$$

با استفاده از قضیه گلدن ـ پاپوس، سطح حاصل از دوران برابر است با:

$$S=2\pi dL$$

L طول کمان یا همان طول ربع دایره است پس داریم:

$$S=2\pi(\frac{3(4-\pi)}{\pi\sqrt{2}})(\frac{3\pi}{2})=9\pi(\frac{4-\pi}{\sqrt{2}})$$

۳ـ گزینه «۲» این سؤال دقیقاً سؤال متن کتاب ریاضی (۱) میکرو مدرسان شریف می‌باشد.

به راحتی شکل تابع را به صورت $|x|=\sqrt{\frac{4}{9}y^3}$ می‌نویسیم که با توجه به دامنه نقاط سؤال، می‌توان آن را به صورت $x=\sqrt{\frac{4}{9}y^3}=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ در نظر گرفت.

حال با استفاده از رابطه طول منحنی به فرم $x=f(y)$ خواهیم داشت:

$$x'=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 1+x'^2=1+y\Rightarrow L=\int_0^3\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy=\int_0^3\sqrt{1+y}\,dy=\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

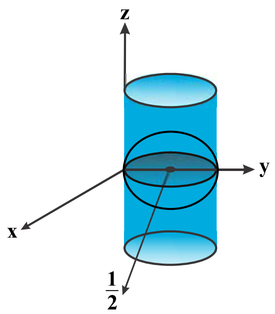
۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه S درون یک بیضی می‌باشد، از تغییر متغیر بیضوی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{x^2}{(6)^2}+\frac{y^2}{(4)^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=6r\cos\theta\\ y=4r\sin\theta\end{cases}\qquad \begin{matrix}dx\,dy=6\times4\times r\,dr\,d\theta\\ 0\le\theta\le2\pi\ ,\ 0\le r\le1\end{matrix}$$

پس داریم:

$$\iint_S(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1(\frac{36r^2\cos^2\theta}{9}+\frac{16r^2\sin^2\theta}{4})\times24r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}\times24r\,dr\,d\theta$$

$$=96\int_0^{2\pi}(\frac{r^4}{4})\Big|_0^1d\theta=96\times2\pi\times\frac{1}{4}=48\pi$$



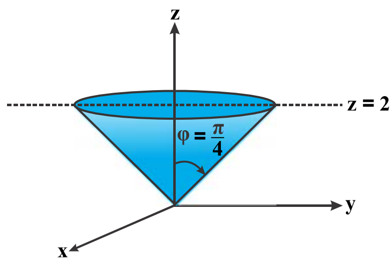
۵ـ گزینه «۱» اگر کره و استوانه داده شده را رسم کنیم، می‌بینیم که کل کره داخل استوانه قرار گرفته است و حجم قسمتی از کره که داخل استوانه قرار گرفته است، یعنی حجم کل کره.

$$\text{کره}:\ x^۲+y^۲-y+z^۲=۰ \Rightarrow x^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲+z^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\text{استوانه}:\ x^۲+y^۲-y=۰ \Rightarrow x^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

پس حجم کره برابر است با:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \xrightarrow{r=\frac{۱}{۲}} V=\frac{۴}{۳}\pi(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۴\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۶}$$



۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه‌ی داده شده یک ناحیه‌ی بسته می‌باشد، برای محاسبه شار عبوری از سطح S، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\text{شار}=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_v(۱-۲+۰)\,dv=-\iiint_v dv$$

اکنون با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۴}\ ,\ ۰\le\theta\le ۲\pi\ ,\ Z=۲\Rightarrow \rho\cos\varphi=۲\Rightarrow \rho=\frac{۲}{\cos\varphi}$$

پس داریم:

$$\text{شار}=-\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{\frac{۲}{\cos\varphi}}\rho^۲\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=-(۲\pi)\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(\frac{\rho^۳}{۳})\Big|_۰^{\frac{۲}{\cos\varphi}}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=-(۲\pi)(\frac{۸}{۳})\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\varphi}{\cos^۳\varphi}d\varphi=\frac{-۱۶\pi}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sin\varphi(\cos\varphi)^{-۳}\,d\varphi=\frac{۱۶\pi}{۳}(\frac{(\cos\varphi)^{-۲}}{-۲})\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{-۸\pi}{۳}(\frac{۱}{(\cos\varphi)^۲})\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{-۸\pi}{۳}(۲-۱)=\frac{-۸\pi}{۳}$$

روش دیگر برای محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه به دست آمده:

در واقع شار برابر با منفی حجم یک مخروط با شعاع و ارتفاع ۲ است. فرمول حجم مخروط برابر با $v=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ است، پس حجم این مخروط برابر با $\frac{۸\pi}{۳}$ است و شار گذرنده از سطح S برابر با $\frac{-۸\pi}{۳}$ است.

سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ چنانچه $i^{2}=-1$، حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ۳) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

۲ـ حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ مختلط $\bar{Z}^{2}-4\bar{Z}+2Z+2=0$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $2\sqrt{5}i$ ۳) $-2\sqrt{5}i$ ۴) -6

۳ـ مساحت تصویر متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ بر صفحهٔ $2x+y-2z=5$، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۴ـ فرض کنید $f(x)=\cosh(\sinh^{-1}x)$. مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۵ـ برد تابع $f(x)=2^{x}-\left[2^{x}+4/7\right]$ کدام است؟

۱) $[-4/7,-4]$ ۲) $[-4/7,-3/7)$ ۳) $(-5,-3/7]$ ۴) $(-4/7,-3/7)$

۶ـ تعداد مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{3x^{3}+500x^{2}}{x^{3}+500x^{2}+100x-2000}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷ـ مجانب منحنی $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}$ به ازای $x>0$ کدام است؟

۱) $y=0$ ۲) $y=1$ ۳) $y=ex$ ۴) $y=\frac{1}{e}x$

۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{Ln}(1+3^{x})}{\operatorname{Ln}(1+2^{x})}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\operatorname{Ln}2}{\operatorname{Ln}3}$ ۳) $\frac{\operatorname{Ln}3}{\operatorname{Ln}2}$ ۴) $+\infty$

۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^{2}+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) صفر ۴) $+\infty$

۱۰ـ تابع $f(x)=\begin{cases}e^{[ax]} & ; \; x<1\\ B & ; \; x=1\\ x^{\frac{1}{x-1}} & ; \; x>1\end{cases}$ پیوسته است. کدام مقدار برای انتخاب a مناسب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲/۱ ۴) ۳

۱۱ـ فرض کنید تابع هزینهٔ تولید x واحد از یک کالا به صورت $C(x)=10000+5x+0/01x^2$ باشد. هزینهٔ نهایی هنگامی‌که ۵۰۰ قطعه کالا تولید می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۲ـ مماس‌های گذرا بر نمودار درجهٔ سوم $y(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ در نقطه‌های $(-2,6)$ و $(2,0)$ افقی هستند. مقدار $4a+c$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳ـ معادلهٔ حرکت نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات به صورت $(0\le t\le 2\pi)$ $\begin{cases}x=4\sin t-3\cos t\\ y=3\sin t+4\cos t\end{cases}$ است. مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{27}$ ۲) $\frac{27}{25}$ ۳) $-\frac{25}{27}$ ۴) $-\frac{27}{25}$

۱۴ـ فرض کنید $f(x)=\frac{(2x+1)^5(x^3+1)^6}{\sqrt{4x\cos x+1}}$ مقدار $f''(0)$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) $26\sqrt{2}$ ۳) ۲۶ ۴) صفر

۱۵ـ نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $(1,4)$ از سهمی $y^2=2x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{15}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{5}$

۱۶ـ با استفاده از تقریب مرتبهٔ اول (تقریب خطی)، مقدار تقریبی $\frac{1/03^2}{\sqrt{3/98\times\sqrt[4]{1/02^3}}}$ را محاسبه می‌کنیم، کدام عدد حاصل می‌شود؟

۱) $0/5027$ ۲) $0/5052$ ۳) $0/5275$ ۴) $0/5527$

۱۷ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}x\frac{y^3-x^3}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) -1 ۴) وجود ندارد.

۱۸ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر هذلولی‌گون $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}-z^2=-1$ در نقطهٔ $(5,3,3)$ کدام است؟

۱) $3x+2y-6z-3=0$ ۲) $2x-2y-2z+2=0$ ۳) $x+y-2z-2=0$ ۴) $x+y-3z+1=0$

۱۹ـ اگر $u=x^2y$ و $x^3+y^3+2xy=-2$ باشد، حاصل $\frac{du}{dx}$ در نقطهٔ $(-1,1)$، کدام است؟

۱) -7 ۲) -3 ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) ۳

۲۰ـ اگر $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول باشد، حاصل $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطهٔ $(-1,2)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) صفر

۳) ۴ ۴) به مقدار مشتق تابع φ در نقطهٔ $(-1,2)$ بستگی دارد.

۲۱ـ درخصوص نقاط بحرانی غیرواقع بر محورهای مختصات تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$، کدام مورد درست است؟

۱) تابع دو نقطهٔ مینیمم موضعی و دو نقطه زینی دارد. ۲) تابع دو نقطهٔ ماکزیمم موضعی و دو نقطه زینی دارد.

۳) تابع چهار نقطهٔ ماکزیمم موضعی دارد. ۴) تابع چهار نقطهٔ مینیمم موضعی دارد.

۲۲ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}$ کدام است؟

۱) $0/2$ ۲) $0/5$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳ـ اگر $A=\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^3}\,dx$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

۱) $A\le 1$ ۲) $A\le 1/25$ ۳) $A\ge 1/5$ ۴) $A\ge 1/75$

۲۴ـ اگر به ازای تابع پیوستهٔ f، تساوی $\int_{0}^{x}f(t)dt = x\sin x+\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $f(\pi)$ کدام است؟

۱) $\pi+\frac{1}{\pi}$ ۲) $\pi-\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}-\pi$ ۴) $-(\pi+\frac{1}{\pi})$

۲۵ـ خط قائم بر سهمی $x^2=2y$ را چنان رسم می‌کنیم که مساحت ناحیهٔ محصور به سهمی و خط قائم، کمترین مقدار باشد. طول پاره‌خط ایجاد شدهٔ درون سهمی، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۶ـ اگر $\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, \sqrt{2}e^t)$ یک منحنی در فضا باشد، آنگاه بردار یکهٔ مماسی بر منحنی در $t=\frac{\pi}{3}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(1,1,\sqrt{2})$ ۲) $\frac{1}{4}(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},2\sqrt{2})$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

۲۷ـ حاصل $\iint_D \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}dx\,dy$ که در آن D ناحیهٔ درون ربع دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ به‌ازای $x\ge 0$ و $y\ge 0$ است، کدام است؟

۱) صفر ۲) a ۳) a^2 ۴) $-a^2$

۲۸ـ حجم ناحیهٔ محدود به صفحهٔ $z+2x=8$ و سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ ، کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}\pi$ ۲) 8π ۳) $\frac{81}{2}\pi$ ۴) 23π

۲۹ـ اگر منحنی جهت‌دار C با ضابطهٔ $9x^2+y^2=9$ پادساعتگرد باشد، مقدار $\oint_C (y+y\sin^2 y)\,dx+(y^2+xy\sin 2y+x\sin^2 y)\,dy$ ، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 3π

۳۰ـ فرض کنید D ناحیهٔ ربع دایره‌ای شکل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ واقع در ربع اول باشد. اگر $\iint_D xy(x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}dxdy=3/2$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخنامه رشته‌ی MBA

۱ـ گزینه «۳» ابتدا اعداد مختلط داده شده را به حالت قطبی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} r_۱ = \sqrt{۳+۱} = ۲ \\ tg\theta_۱ = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta_۱ = \dfrac{\pi}{۶} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r_۲ = \sqrt{۳+۱} = ۲ \\ tg\theta_۲ = -\dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta_۲ = -\dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\left(\frac{۲e^{i\frac{\pi}{۶}}}{۲e^{-i\frac{\pi}{۶}}}\right)^{۱۰} = (e^{i\frac{\pi}{۳}})^{۱۰} = e^{\frac{i۱۰\pi}{۳}} = \cos(\frac{۱۰\pi}{۳}) + i\sin(\frac{۱۰\pi}{۳}) = \cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳}) + i\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} - i\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}$$

۲ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که $z = x+iy$ و مزدوج آن $\bar{z} = x-iy$ می‌باشد، داریم:

$$z = x+iy \;\rightarrow \bar{z} = x-iy$$

$$(x-iy)^۲ - ۴(x-iy) + ۲(x+iy) + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ + i^۲y^۲ - ۲xyi - ۴x + ۴yi + ۲x + ۲yi + ۲ = ۰$$

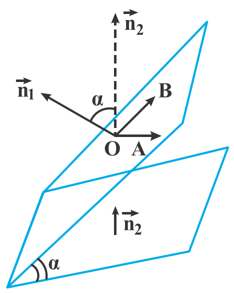
$$x^۲ - y^۲ - ۲x + ۲ + i(۶y - ۲xy) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۶y - ۲xy = ۰ \Rightarrow ۶y = ۲xy \xrightarrow{y\neq ۰} x = ۳ \\ ۹ - y^۲ - ۶ + ۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = ۵ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۵} \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $z = ۳ \pm i\sqrt{۵}$ است و لذا مجموع آن‌ها برابر ۶ می‌باشد.

۳ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ برابر مساحت ساخته‌شده توسط دو بردار است، باید حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را بیابیم و داریم:

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \vec{i} - ۴\vec{j} - ۳\vec{k}$$

$$S = |\overline{OA} \times \overline{OB}| = \sqrt{۱+۱۶+۹} = \sqrt{۲۶}$$



بردار نرمال صفحه شامل $\vec{n}_۲ = (۱,-۴,-۳) \rightarrow \overline{OA}, \overline{OB}$

بردار نرمال صفحه مفروض $\vec{n}_۱ = (۲,۱,-۲) \rightarrow$

اکنون با توجه به این‌که مساحت تصویر برابر است با مساحت ساخته‌شده توسط دو بردار در کسینوس زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه، باید ابتدا $\cos\alpha$ را از رابطه زیر بیابیم.

زاویه بین دو بردار نرمال $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_۱ . \vec{n}_۲}{|\vec{n}_۱||\vec{n}_۲|} = \dfrac{۲-۴+۶}{۳\sqrt{۲۶}} = \dfrac{۴}{۳\sqrt{۲۶}}$

مساحت تصویر = مساحت ساخته‌شده توسط دو بردار $\times \cos\alpha \Rightarrow S' = S \times \cos\alpha$

تصویر $S' = \sqrt{۲۶} \times \dfrac{۴}{۳\sqrt{۲۶}} = \dfrac{۴}{۳}$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که $\sin h^{-۱}(x) = Ln(x + \sqrt{x^۲+۱})$ می‌باشد، داریم:

$$\sin h^{-۱}(۱) = Ln(۱+\sqrt{۲})$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

$$\cosh(Ln(۱+\sqrt{۲})) = \frac{e^{Ln(۱+\sqrt{۲})} + e^{-Ln(۱+\sqrt{۲})}}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۲}+\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{\frac{(۱+\sqrt{۲})^۲+۱}{۱+\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{\frac{۱+۲\sqrt{۲}+۲+۱}{۱+\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲(۱+\sqrt{۲})} = \frac{۲(۲+\sqrt{۲})}{۲(۱+\sqrt{۲})}$$

$$= \frac{۲+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}} \times \frac{۱-\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} = \frac{\cancel{۲} - ۲\sqrt{۲} + \sqrt{۲} - \cancel{۲}}{۱-۲} = \frac{-\sqrt{۲}}{-۱} = \sqrt{۲}$$

۵ـ گزینه «۲» ۴/۷ را به عبارت کم و زیاد می‌کنیم.

$$y=۲^x+۴/۷-۴/۷-[۲^x+۴/۷] \Rightarrow y=\underbrace{۲^x+۴/۷}_{u}-[۲^x+۴/۷]-۴/۷ \Rightarrow y=u-[u]-۴/۷$$

$$۰\le u-[u]<۱ \Rightarrow -۴/۷\le u-[u]-۴/۷<-۳/۷ \Rightarrow R_f=[-۴/۷,-۳/۷)$$

۶ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن مجانب افقی تابع باید حد تابع را در بی‌نهایت به‌دست آوریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۳$

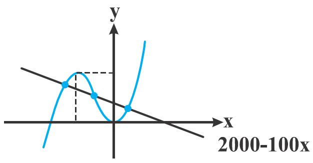
برای به‌دست آوردن مجانب قائم باید ریشه‌های مخرج را بیابیم و اگر به‌ازای این ریشه‌ها تابع $f(x)$ به سمت بی‌نهایت میل کند، آن ریشه‌ها مجانب قائم منحنی هستند.

$$x^۳+۵۰۰x^۲+۱۰۰x-۲۰۰۰=۰$$

برای پیدا کردن تعداد ریشه‌های این معادله، آن را به‌صورت $x^۳+۵۰۰x^۲=۲۰۰۰-۱۰۰x$ می‌نویسیم و دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و به تعداد نقاط برخورد دو تابع معادله درجه سوم مخرج ریشه خواهد داشت که همان مجانب‌های قائم تابع می‌باشند.

$$g: x^۳+۵۰۰x^۲ \Rightarrow g':۳x^۲+۱۰۰۰x=۰ \Rightarrow x(۳x+۱۰۰۰)=۰$$

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow g=۰ \\ x=-\dfrac{۱۰۰۰}{۳}\simeq -۳۳۳ \Rightarrow y\simeq ۱۸/۰۰۰ \end{cases}$$



۷ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ شیب مجانب مایل، تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۱+x}}{x(۱+x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{(۱+x)^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{۱+x}\right)^x=(۱)^\infty \Rightarrow e^{(\frac{x}{۱+x}-۱)\times x}=e^{\frac{\cancel{x}-۱-\cancel{x}}{x}\times x}=\frac{۱}{e}$$

پس مجانب منحنی $y=\dfrac{۱}{e}x$ می‌باشد.

۸ـ گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی $\underset{u\to ۰}{\mathrm{Ln}}\,(۱+u)\sim u$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{Ln}(۱+۳^x)}{\mathrm{Ln}(۱+۲^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳^x}{۲^x}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-\infty}=۰$$

۹ـ گزینه «۲» حالت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ است و با هوپیتال آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to(-۱)}\frac{۴x+۵}{۰-\dfrac{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{\frac{۱}{۴}}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

۱۰ـ گزینه «۲»

$$f(۱)=B \quad , \quad f(۱^-)=e^{[a(۱^-)]}$$

$$f(۱^+)=(۱)^\infty \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} e^{(x-۱)\times\frac{۱}{x-۱}}=e^۱=e$$

برای پیوسته بودن باید $f(۱^-)=e$ باشد. پس باید توان e در $f(۱^-)$ برابر ۱ شود. بنابراین باید $a=۲$ را انتخاب کنیم.

$$f(۱^-)=e^{[۲(۱^-)]}=e^{[۲^-]}=e^۱=e$$

۱۱ـ گزینه «۱» فقط کافی است از تابع هزینه، مشتق بگیریم:

$$c'(x)=۵+۲\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)x \Rightarrow c'(۵۰۰)=۵+۲\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)۵۰۰=۵+۱۰=۱۵$$

۱۲ـ گزینه «۱» نقطه وسط دو نقطه اکسترمم، دقیقاً نقطه عطف تابع درجه سوم می‌باشد و داریم:

$$(2,0)\ ,\ (-2,6) \to M(0,3)$$

$$(0,3) \in f(x) \Rightarrow f(0)=3 \Rightarrow d=3$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad , \quad y'' = 6ax + 2b = 0 \xrightarrow{x=0} b = 0$$

$$f(x) = ax^3 + cx + 3 \xrightarrow{(2,0)\in f} 8a + 2c + 3 = 0 \Rightarrow 4a + c = -\frac{3}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۳» با استفاده از مشتق توابع پارامتری داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t - 4\sin t}{4\cos t + 3\sin t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{3\cos t - 4\sin t}{4\cos t + 3\sin t}\right)}{dt}}{4\cos t + 3\sin t}$$

$$= \frac{\dfrac{(-3\sin t - 4\cos t)(4\cos t + 3\sin t) - (-4\sin t + 3\cos t)(3\cos t - 4\sin t)}{(4\cos t + 3\sin t)^2}}{4\cos t + 3\sin t} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{(-3)(3) - (-4)(-4)}{(3)^2}}{3} = \frac{-9-16}{27} = -\frac{25}{27}$$

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به شکل ظاهری تابع از دو طرف تساوی Ln می‌گیریم و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم.

$$y(0) = 1$$

$$\mathrm{Ln}y = 5\mathrm{Ln}(2x+1) + 6\mathrm{Ln}(x^3+1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(4x\cos x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{10}{2x+1} + 6\left(\frac{3x^2}{x^3+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\cos x - 4x\sin x}{4x\cos x + 1}\right)$$

$$x = 0 \to \frac{y'}{1} = 10 + 0 - \left(\frac{4}{2}\right) = 8$$

اکنون مشتق دوم تابع را می‌گیریم و قرار می‌دهیم $x=0$ (در قسمت دوم سمت راست تساوی به‌ازای $x=0$ مشتق دوم صفر می‌شود) و داریم:

$$\frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{-20}{(2x+1)^2} + 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{(-4\sin x - 4\sin x - 4x\cos x)(4x\cos x + 1) - (4\cos x - 4x\sin x)(4\cos x - 4x\sin x)}{(4x\cos x + 1)^2}\right.$$

$$y = 1\ ,\ y' = 8 \Rightarrow \frac{y'' - 64}{1} = -20 + 8 \Rightarrow y'' = -12 + 64 = 52$$

۱۵ـ گزینه «۴» فاصله نقطه تا منحنی را می‌نویسیم:

$$y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{مشتق} = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)y + 2(y-4) = 0 \Rightarrow y^3 - 2y + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$d_{(\min)} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

۱۶ـ گزینه «۳» یک تابع سه متغیره داریم و با استفاده از فرمول تقریب خطی برای توابع چندمتغیره داریم:

$$f=\frac{x^{۲}}{\sqrt{y\sqrt[۴]{z^{۳}}}}$$

$$\begin{cases} x=۱/۰۳ \Rightarrow x_{۰}=۱\ ,\ \Delta x=\frac{۳}{۱۰۰} \\ y=۳/۹۸ \Rightarrow y_{۰}=۴\ ,\ \Delta y=-\frac{۲}{۱۰۰} \\ z=۱/۰۲ \Rightarrow z_{۰}=۱\ ,\ \Delta z=\frac{۲}{۱۰۰} \end{cases} \quad , \quad f(x_{۰}+\Delta x, y_{۰}+\Delta y, z_{۰}+\Delta z)\simeq f(x_{۰},y_{۰},z_{۰})+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

$$f=\frac{x^{۲}}{\sqrt[۸]{y^{۴}z^{۳}}}=x^{۲}(y^{۴}z^{۳})^{-\frac{۱}{۸}}=x^{۲}y^{-\frac{۱}{۲}}z^{-\frac{۳}{۸}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲xy^{-\frac{۱}{۲}}z^{-\frac{۳}{۸}}\xrightarrow{(۱,۴,۱)}۲\times\frac{۱}{۲}=۱ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{۱}{۲}x^{۲}y^{-\frac{۳}{۲}}z^{-\frac{۳}{۸}}\xrightarrow{(۱,۴,۱)}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸}=-\frac{۱}{۱۶}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{۳}{۸}x^{۲}y^{-\frac{۱}{۲}}z^{-\frac{۱۱}{۸}}\xrightarrow{(۱,۴,۱)}-\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۱۶}$$

$$\text{مقدار تقریبی}\simeq\frac{۱}{\sqrt{۴}}+۱\times(\frac{۳}{۱۰۰})-\frac{۱}{۱۶}(-\frac{۲}{۱۰۰})-\frac{۳}{۱۶}(\frac{۲}{۱۰۰})=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۱}{۸۰۰}-\frac{۳}{۸۰۰}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۰۰}-\frac{۲}{۸۰۰}=۰/۵+۰/۰۳-۰/۰۰۲۵=۰/۵۲۷۵$$

۱۷ـ گزینه «۳»

$$f(x,y)=x\frac{y^{۳}-x^{۳}}{x^{۳}+y^{۲}}$$

با استفاده از تعریف مشتق جزئی داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h\frac{۰-h^{۳}}{h^{۳}+۰}-۰}{h}=-\frac{h^{۴}}{h^{۴}}=-۱$$

۱۸ـ گزینه «۴» معادله صفحه مماس بر رویه $f(x,y,z)=۰$ در نقطه $(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$ برابر است با: $a(x-x_{۰})+b(y-y_{۰})+c(z-z_{۰})=۰$ که بردار (a,b,c) برابر بردار گرادیان رویه در این نقطه است. پس داریم:

$$f:\frac{x^{۲}}{۵}+\frac{y^{۲}}{۳}-z^{۲}+۱=۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} f_x=\frac{۲x}{۵}\xrightarrow{x=۵}a=۲ \\ f_y=\frac{۲y}{۳}\xrightarrow{y=۳}b=۲ \\ f_z=-۲z\xrightarrow{z=۳}c=-۶ \end{cases}$$

پس معادله صفحه برابر است با:

$$۲(x-۵)+۲(y-۳)-۶(z-۳)=۰\xrightarrow{\div ۲}x-۵+y-۳-۳z+۹=۰ \Rightarrow x+y-۳z+۱=۰$$

۱۹ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه سه متغیر x، y و u و دو رابطه داریم و سؤال $\frac{du}{dx}$ را از ما می‌خواهد، پس x مستقل و u و y تابع می‌باشند.

$$F:u-x^{۲}y=۰ \quad , \quad G:x^{۳}+y^{۳}+۲xy+۲=۰$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-۲xy & -x^{۲}\\ ۳x^{۲}+۲y & ۳y^{۲}+۲x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & -x^{۲}\\ ۰ & ۳y^{۲}+۲x\end{vmatrix}}\xrightarrow{(-۱,۱)}=-\frac{\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۵ & ۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix}}=-(\frac{۲+۵}{۱-۰})=-۷$$

۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که φ تابعی برحسب دو متغیر x و y می‌باشد و مشتق تابع z را برحسب هر دو متغیر x و y می‌خواهیم بیابیم، باید از مشتق توابع زنجیره‌ای استفاده کنیم و در رابطه خواسته شده جایگذاری کنیم.

$$\cancel{x^۲}\left(\frac{-۳y^۲}{۹\cancel{x^۲}}+y\varphi'(xy)\right)-\cancel{x}y\left(\frac{۲y}{۳\cancel{x}}+x\varphi'(xy)\right)=-\frac{y^۲}{۳}+x^۲y\varphi'(xy)-\frac{۲y^۲}{۳}-x^۲y\varphi'(xy)=\frac{-y^۲}{۳}-\frac{۲y^۲}{۳}=-y^۲\xrightarrow{(-۱,۲)}-۴$$

۲۱ـ گزینه «۴» ابتدا باید مشتق $f(x,y)$ را نسبت به متغیرهای x و y جداگانه مساوی صفر قرار دهیم تا طول و عرض نقطه بحرانی به‌دست بیاید.

$$z=x^۲+y^۲+\frac{۱}{x^۲y^۲}$$

$$z_x=۲x-\frac{۲xy^۲}{(x^۲y^۲)^۲}=۰\Rightarrow ۲x-\frac{۲xy^۲}{x^۴y^۴}=۰\Rightarrow ۲x-\frac{۲}{x^۳y^۲}=۰\Rightarrow ۲x=\frac{۲}{x^۳y^۲}\Rightarrow x^۴y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۱}{x^۴}$$

$$z_y=۲y-\frac{۲x^۲y}{x^۴y^۴}=۰\Rightarrow ۲y=\frac{۲}{x^۲y^۳}\Rightarrow x^۲y^۴=۱\xrightarrow{y^۲=\frac{۱}{x^۴}}x^۲\times\frac{۱}{x^۸}=۱\Rightarrow\frac{۱}{x^۶}=۱\Rightarrow x^۶=۱\Rightarrow x=\pm۱\ ,\ y=\pm۱$$

$$z_{xx}=۲-\left(\frac{-۶x^۲y^۲}{x^۶y^۴}\right)=۲+\frac{۶}{x^۴y^۲}\quad,\quad z_{yy}=۲-\left(\frac{-۶x^۲y^۲}{x^۴y^۶}\right)=۲+\frac{۶}{x^۲y^۴}\quad,\quad z_{xy}=۰-\left(\frac{-۴x^۳y}{x^۶y^۴}\right)=\frac{۴}{x^۳y^۳}$$

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^۲$$

$(۱,۱)\Rightarrow\Delta=۸\times۸-(۴)^۲=۶۴-۱۶>۰\xrightarrow{z_{xx}>۰}$ min نسبی

$(-۱,۱)\Rightarrow\Delta=۸\times۸-(-۴)^۲=۶۴-۱۶>۰\xrightarrow{z_{xx}>۰}$ min نسبی

$(۱,-۱)\Rightarrow\Delta=۸\times۸-(-۴)^۲=۶۴-۱۶>۰\xrightarrow{z_{xx}>۰}$ min نسبی

$(-۱,-۱)\Rightarrow\Delta=۸\times۸-(-۴)^۲=۶۴-۱۶>۰\xrightarrow{z_{xx}>۰}$ min نسبی

پس تابع ۴ نقطه مینیمم موضعی دارد.

۲۲ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\int_۰^۱ f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}f(\frac{i}{n})$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(\frac{k}{n})^۴=\int_۰^۱x^۴\,dx=\frac{x^۵}{۵}\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

۲۳ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که حدود x را داریم از روی حدود x، تابع $f(x)$ را می‌سازیم.

$$۰<x<۱\Rightarrow ۰<x^۳<۱\Rightarrow ۱<x^۳+۱<۲\Rightarrow ۱<\sqrt{x^۳+۱}<\sqrt{۲}\Rightarrow\int_۰^۱dx<\int_۰^۱\sqrt{x^۳+۱}\,dx<\int_۰^۱\sqrt{۲}\,dx$$

$$(x)_۰^۱<A<\sqrt{۲}(x)_۰^۱\Rightarrow ۱<A<\sqrt{۲}$$

۲۴ـ گزینه «۴»

$$\int_۰^x f(t)\,dt=x\sin x+\int_۰^x\frac{f(t)}{۱+t^۲}dt$$

از دو طرف تساوی مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sin x+x\cos x+\frac{f(x)}{۱+x^۲}$$

اکنون $x=\pi$ را قرار می‌دهیم:

$$f(\pi)=\underbrace{\sin\pi}_{۰}+\underbrace{\pi\cos\pi}_{-\pi}+\frac{f(\pi)}{۱+\pi^۲}\Rightarrow f(\pi)=-\pi+\frac{f(\pi)}{۱+\pi^۲}$$

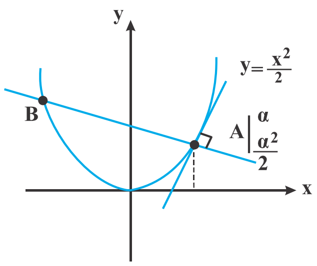
$$f(\pi)-\frac{f(\pi)}{۱+\pi^۲}=-\pi\Rightarrow f(\pi)(۱-\frac{۱}{۱+\pi^۲})=-\pi\Rightarrow f(\pi)\left(\frac{\cancel{۱}+\pi^۲\cancel{-۱}}{۱+\pi^۲}\right)=-\pi\Rightarrow f(\pi)=\frac{-\cancel{\pi}(۱+\pi^۲)}{\cancel{\pi^۲}}\Rightarrow f(\pi)=\frac{-۱-\pi^۲}{\pi}=-(\frac{۱}{\pi}+\pi)$$

۲۵ـ گزینه «۲» یک نقطه بر روی منحنی تابع $y=\frac{x^2}{2}$ به طول α در نظر می‌گیریم و عرض این نقطه $\frac{\alpha^2}{2}$ می‌باشد. اکنون باید معادله خط قائم بر منحنی در این نقطه را به‌دست آوریم.

$$y=\frac{x^2}{2}\Rightarrow y'=x\Rightarrow m_{AB}=-\frac{1}{\alpha}$$

معادله خط قائم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{\alpha^2}{2}=-\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Rightarrow y=-\frac{1}{\alpha}x+\frac{\alpha^2}{2}+1$$



اکنون خط قائم و منحنی را با هم قطع می‌دهیم تا طول دیگر محل تلاقی دو تابع را بیابیم.

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{\alpha}x+\frac{\alpha^2}{2}+1 \\ y=\frac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{x^2}{2}=\frac{-x}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{2}+1\Rightarrow x^2+\frac{2}{\alpha}x-\alpha^2-2=0$$

یک ریشه $x_A=\alpha$ است. پس داریم:

$$x^2+\frac{2}{\alpha}x-\alpha^2-2 \;\Big|\; x-\alpha$$
$$x+(\alpha+\frac{2}{\alpha})\Rightarrow x_B=-\alpha-\frac{2}{\alpha}$$

اکنون باید مساحت بین منحنی و خط قائم را بیابیم و آن را مینیمم کنیم:

$$S=\int_{-\alpha-\frac{2}{\alpha}}^{\alpha}(-\frac{1}{\alpha}x+\frac{\alpha^2}{2}+1-\frac{x^2}{2})dx=(-\frac{1}{2\alpha}x^2+\frac{\alpha^2}{2}x+x-\frac{x^3}{6})\Big|_{-\alpha-\frac{2}{\alpha}}^{\alpha}$$

$$=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{2}+\alpha-\frac{\alpha^3}{6}-(\frac{-(-\alpha-\frac{2}{\alpha})^2}{2\alpha}+\frac{\alpha^2}{2}(-\alpha-\frac{2}{\alpha})+(-\alpha-\frac{2}{\alpha})-\frac{(-\alpha-\frac{2}{\alpha})^3}{6})=\frac{5}{6}\alpha^3+\frac{2}{\alpha^3}+3\alpha+\frac{4}{\alpha}-\frac{1}{6}(\alpha+\frac{2}{\alpha})^3$$

اکنون باید مشتق مساحت نسبت به α را مساوی صفر قرار دهیم.

$$S'_\alpha=\frac{5}{2}\alpha^2-\frac{6}{\alpha^4}+3-\frac{4}{\alpha^2}-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{\alpha^2})(\alpha+\frac{2}{\alpha})^2=0\Rightarrow \alpha^6+\alpha^4-\alpha^2-1=0\Rightarrow \alpha^4(\alpha^2+1)-(\alpha^2+1)=0\Rightarrow(\alpha^2+1)(\alpha^4-1)=0$$

$$\Rightarrow \alpha^4-1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=+1\rightarrow \text{قابل‌قبول}\rightarrow A(1,\frac{1}{2}),B(-3,\frac{9}{2})\\ \alpha=-1\;\times\end{cases}$$

$$AB=\sqrt{(\frac{9}{2}-\frac{1}{2})^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$$

۲۶ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه بردار یکه مماس که به‌صورت زیر می‌باشد، داریم:

$$\vec{T}=\frac{\overrightarrow{r'(t)}}{|\overrightarrow{r'(t)}|}$$

$$\vec{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,\sqrt{2}e^t)$$

$$\vec{r}'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,e^t\sin t+e^t\cos t,\sqrt{2}e^t)$$

$$|r'(t)|=\sqrt{e^{2t}\cos^2t+e^{2t}\sin^2t-2e^{2t}\cos t\sin t+e^{2t}\sin^2t+e^{2t}\cos^2t+2e^{2t}\sin t\cos t+2e^{2t}}=\sqrt{e^{2t}+e^{2t}+2e^{2t}}=\sqrt{4e^{2t}}=2e^t$$

$$\vec{T}=(\frac{\cos t-\sin t}{2},\frac{\sin t+\cos t}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\xrightarrow{t=\frac{\pi}{3}}(\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2},\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{1-\sqrt{3}}{4},\frac{1+\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

۲۷ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با استفاده از مختصات قطبی در انتگرال دوگانه داریم: $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,\,0\le r\le a)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{r\cos\theta-r\sin\theta}{\sqrt{r\cos\theta+r\sin\theta}}\times rdrd\theta \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{\frac{3}{2}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta+\sin\theta}}drd\theta \xrightarrow[(\cos\theta-\sin\theta)d\theta=du]{\cos\theta+\sin\theta=u}\frac{2}{5}(r^{\frac{5}{2}})_0^a\int\frac{u}{\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{2}{5}\times\sqrt{a^5}\times\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{5}\times a^2\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\sqrt{u^3}=\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}\sqrt{(\cos\theta+\sin\theta)^3}\Big)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}\times(1-1)=0$$

روش دوم: با توجه به این‌که ناحیه انتگرال‌گیری یعنی $x^2+y^2=a^2$ نسبت به x و y متقارن است، پس می‌توانیم در تابع زیر انتگرال جای x و y را عوض کنیم و حاصل انتگرال تغییری نکند. پس داریم:

$$\begin{cases} I=\iint_D\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}dxdy \\ I=\iint\frac{y-x}{\sqrt{y+x}}dxdy\end{cases}\Rightarrow I+I=\iint\frac{x-y+y-x}{\sqrt{x+y}}dxdy\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$$

پس حاصل انتگرال خواسته‌شده برابر صفر است.

۲۸ـ گزینه «۳» ابتدا تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} z=8-2x \\ z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=8-2x\Rightarrow x^2+2x+y^2-8=0\Rightarrow (x+1)^2+y^2=9$$

معادله دایره به مرکز $(-1,0)$ و شعاع ۳ می‌باشد. با استفاده از تغییر متغیر زیر داریم:

$$\begin{cases} x+1=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$V=\iint(z_2-z_1)dydx\Rightarrow V=\iint(9-(x+1)^2-y^2)dydx\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\int_0^{2\pi}\int_0^3(9-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3[9r-r^3\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}]drd\theta=(2\pi)(\frac{9}{2}r^2-\frac{r^4}{4})_0^3=2\pi(\frac{81}{2}-\frac{81}{4})=2\pi(\frac{81}{4})=\frac{81\pi}{2}$$

۲۹ـ گزینه «۴»

مسیر C معادله بیضی است $\to x^2+\frac{y^2}{9}=1$

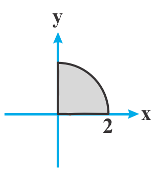
مسیر بسته است و از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dydx\Rightarrow\iint(y\sin 2y+\sin^2y)-(1+\sin^2y+\overbrace{2y\sin y\cos y}^{y\sin 2y})dydx$$

$$=\iint_D -1\times dydx=-\iint_D dydx=-(\text{مساحت بیضی})=-(\pi ab)=-(\pi\times1\times3)=-3\pi$$

توجه مهم: اگر صورت سؤال می‌گفت ساعتگرد، جواب درست گزینه (۴) بود.

۳۰ـ گزینه «۲» با مختصات قطبی داریم:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(r\cos\theta)(r\sin\theta)(r^2)^{\frac{a}{2}}rdrd\theta=3/2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^3\times r^a\sin\theta\cos\theta\,drd\theta=3/2$$

$$\Rightarrow\int_0^2(r^{3+a})dr\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=3/2$$

$$(\frac{r^{4+a}}{4+a})_0^2\times(\frac{\sin^2\theta}{2})_0^{\frac{\pi}{2}}=3/2\Rightarrow\frac{2^{4+a}}{4+a}\times\frac{1}{2}=3/2\Rightarrow 2^{4+a}=6/4\times(4+a)\Rightarrow a=1$$

سؤالات رشته‌ی عمران و نقشه‌برداری

برای رشته مهندسی نقشه‌برداری مجموعاً ۱۵ سؤال ریاضی عمومی طرح شده بود که سؤالات ۱ تا ۱۰ مشترک با رشته عمران می‌باشد.

۱ـ در تابع $f(x,y)=3x^2y^2+6xy^2-4y^3+18y$، نقطه $(-1,-\frac{3}{2})$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم است. ۲) مینیمم است. ۳) نقطه زینی است. ۴) نقطه بحرانی نیست.

۲ـ فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,x)-f(x,-x)}{x}=2$، در این صورت $f_y(0,0)$، کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۳ـ مقدار انتگرال $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}}\sqrt{1-x^3}\,dxdy$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۴ـ مقدار $\int_e^{e^4}\sqrt{Ln\,x}\,dx+\int_1^2 e^{x^2}dx$، کدام است؟

۱) $2e^4-e$ ۲) $4e^4+e$ ۳) $4e^4-e$ ۴) $2e^4+e$

۵ـ بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{x^n}dx$، همگرا باشد؟

۱) $n<m$ ۲) $m<n+1$ ۳) $n<m+1$ ۴) $m<n$

۶ـ در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(2+x^2)^{\frac{5}{2}}$، ضریب x^4 کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ ۲) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$ ۳) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

۷ـ اندازه مشتق سویی تابع $W=x^2y-yz+2z$ در نقطه $(1,-2,0)$ در امتداد بردار $2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$، کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۸ـ اگر $h(x)=e^{xf(2x)}$، مقدار $h'(1)$ با توجه به جدول زیر کدام است؟

x	f(x)	f'(x)
۱	۱۰	۱
۲	۸	۴

۱) $16e^8$ ۲) $8e^8$ ۳) $10e^8$ ۴) $12e^8$

۹ـ تعداد جواب‌های معادلهٔ $z^2+4\bar{z}-2=0$ در مجموعه اعداد مختلط کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۰ـ حاصل $\oint_C 3ydx+2xdy$ هنگامی که C قوسی از سهمی $y=x^2$ از مبدأ به نقطهٔ $A(1,1)$ و پاره‌خط واصل نقطه A تا مبدأ مختصات باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۱ـ تعداد جواب‌های معادله $\frac{z^2-1}{z\bar{z}}=1$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + ax^2)^{\frac{1}{x-\sin x}} = A$ و A عددی کراندار باشد، مقدار $a + A$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳ـ اگر $z = x^n e^{\frac{y^2}{x}}$ باشد، برای کدام مقدار n، تساوی $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})$، برقرار است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۱۴ـ اگر $y > 0$ و $x^2 - xy + y^2 = 1$ باشد، مقدار $y''(0)$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۵ـ فرض کنید S سطح بیرونی مخروط $x^2 + y^2 = z^2 (0 \le z \le h)$ باشد. مقدار $\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) صفر

پاسخنامه رشته‌ی عمران و نقشه‌برداری

۱ـ گزینه «۲» ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا نقطه داده شده بحرانی است یا خیر:

$$f(x,y)=3x^2y^2+6xy^2-4y^3+18y$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x=6xy^2+6y^2 \\ f_y=6x^2y+12xy-12y^2+18 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-1,-\frac{3}{2})} \left\{\begin{array}{l} f_x=6xy^2+6y^2=-6(\frac{9}{4})+6(\frac{9}{4})=0\ \checkmark \\ f_y=6(-\frac{3}{2})-12(-\frac{3}{2})-12(\frac{9}{4})+18=0\ \checkmark \end{array}\right.$$

پس نقطه داده شده بحرانی است. حالا مبین دلتا را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}=6y^2 \\ f_{yy}=6x^2+12x-24y \\ f_{xy}=12xy+12y \end{array}\right\} \xrightarrow{(-1,-\frac{3}{2})} \Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=[6(\frac{9}{4})][6-12-24(-\frac{3}{2})]-[-12(-\frac{3}{2})+12(-\frac{3}{2})]^2=\frac{27}{2}\times 30>0$$

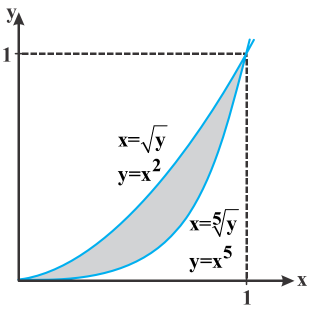
پس نقطه مورد نظر مینیمم است.

۲ـ گزینه «۳» حد داده شده، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و با توجه به این که تابع دو متغیره $f(x,y)$ در عامل اول صورت کسر داده شده $f(x,x)$ و در عامل دوم $f(x,-x)$ می‌باشد، پس در عامل اول $y=x$ و در عامل دوم $y=-x$ می‌باشد و داریم:

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{1\times f_y(x,x)-(-1)f_y(x,-x)}{1}=2$$

$$\Rightarrow f_y(0,0)+f_y(0,0)=2 \Rightarrow 2f_y(0,0)=2 \Rightarrow f_y(0,0)=1$$

۳ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که تابع زیر انتگرال فقط تابعی از متغیر x است و به این صورت قابل حل نیست، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده و با توجه به شکل ناحیه انتگرال‌گیری داریم:



$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}}\sqrt{1-x^3}\,dxdy=\int_0^1\int_{x^5}^{x^2}\sqrt{1-x^3}\,dydx$$

$$=\int_0^1(x^2-x^5)\sqrt{1-x^3}\,dx=\int_0^1 x^2(1-x^3)\sqrt{1-x^3}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}(1-x^3)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=-\frac{2}{15}(0-1)=\frac{2}{15}$$

۴ـ گزینه «۱» برای حل این انتگرال، از یک نکته خیلی ساده کمک می‌گیریم. اینکه اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و اکیداً یکنوا باشد و $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=b\beta-a\alpha$$

در این سوال با فرض $f(x)=e^{x^2}$ داریم:

$$y=e^{x^2}>0 \Rightarrow Ln\,y=x^2 \xrightarrow{x>0} x=\sqrt{Ln\,y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{Ln\,x}$$

بنابراین از رابطه بالا حاصل عبارت موجود در سؤال برابر است با: $2e^4-e$

۵ـ گزینه «۳» انتگرال مورد نظر در $x=۰$ ناسره است. در این نقطه با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^m x}{x^n}dx \sim \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{x^m}{x^n}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{x^{n-m}}$$

می‌دانیم انتگرال فوق به ازای $n-m<۱$ همگراست یعنی $n<m+۱$

۶ـ گزینه «۲» برای نوشتن بسط مک‌لورن این تابع، ابتدا آن را به‌صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=۲^{\frac{۵}{۲}}(۱+\frac{x^۲}{۲})^{\frac{۵}{۲}}$$

حالا با کمک بسط مک‌لورن داریم:

$$f(x)=۲^{\frac{۵}{۲}}[۱+\frac{۵}{۲}\frac{x^۲}{۲}+\frac{\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{۲!}\times(\frac{x^۲}{۲})^۲+\cdots]=۴\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}(\frac{۵}{۴}x^۲)+۴\sqrt{۲}(\frac{۱۵}{۸}\times\frac{x^۴}{۴})+\cdots\Rightarrow ۴\sqrt{۲}(\frac{۱۵}{۸}\times\frac{۱}{۴})=\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۸}$$

۷ـ گزینه «۳» با کمک گرادیان تابع مورد نظر در نقطه مورد اشاره و همچنین رابطه مشتق سوئی داریم:

$$w=f(x,y,z)=x^۲y-yz+۲z$$
$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(۲xy,x^۲-z,-y+۲)\Rightarrow\vec{\nabla}f(۱,-۲,۰)=(-۴,۱,۴)$$
$$D_{\vec{u}}f(x,y,z)=\vec{\nabla}f(۱,-۲,۰).\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-۴,۱,۴).\frac{(۲,-۱,۲)}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{-۸-۱+۸}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید پاسخ صحیح گزینه (۳) است اما سازمان سنجش گزینه (۴) را صحیح اعلام کرده است!

۸ـ گزینه «۱» به سادگی با کمک رابطه مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$h(x)=e^{xf(۲x)}\Rightarrow h'(x)=[f(۲x)+۲xf'(۲x)]e^{xf(۲x)}\Rightarrow h'(۱)=[f(۲)+۲f'(۲)]e^{f(۲)}=(۸+۸)e^۸=۱۶e^۸$$

۹ـ گزینه «۲» برای حل این معادله با استفاده از فرم دکارتی اعداد مختلط داریم:

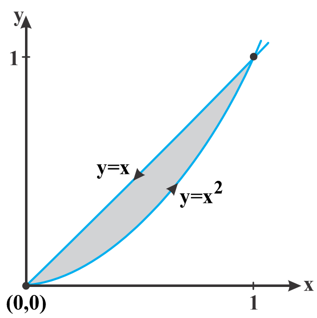
$$z=x+iy$$

$$z^۲+۴\bar{z}-۲=(x^۲-y^۲+i۲xy)+۴(x-iy)-۲=(x^۲+۴x-y^۲-۲)+iy(۲x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+۴x-y^۲-۲=۰\\ y(۲x-۴)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}y=۰\\ x^۲+۴x-۰-۲=۰\Rightarrow x=-۲\pm\sqrt{۶}\end{cases}\\ \begin{cases}x=۲\\ ۴+۸-y^۲-۲=۰\Rightarrow y=\pm\sqrt{۱۰}\end{cases}\end{cases}$$

پس در کل ۴ نقطه داریم.

۱۰ـ گزینه «۳» تابع برداری زیر انتگرال همواره مشتق‌پذیر است. از طرفی با توجه به شکل واضح است که ناحیه بسته است. در نتیجه به راحتی با استفاده از قضیه گرین داریم:



$$I=\oint_C ۳ydx+۲xdy=\iint_D(۲-۳)dA=-\iint_D dA$$
$$=-\int_{۰}^{۱}\int_{x^۲}^{x}dydx=-\int_{۰}^{۱}(x-x^۲)dx=-(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=-(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۶}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با تبدیل $z=x+iy$ داریم:

$$\frac{z^2-1}{z\bar{z}}=1\Rightarrow\frac{(x+iy)^2-1}{(x+iy)(x-iy)}=1\Rightarrow(x^2-y^2-1)+i2xy=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2-1=x^2+y^2\Rightarrow 2y^2=-1\rightarrow \text{امکانپذیر نیست پس مسئله پاسخ ندارد.}\\ xy=0\end{cases}$$

۱۲ـ گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه کافیست به صورت زیر عمل کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0}(\cos x+ax^2)^{\frac{1}{x-\sin x}}=1^\infty\Rightarrow A=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\sin x}(\cos x+ax^2-1)}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\sin x}(\cos x+ax^2-1)\sim\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-(x-\frac{x^3}{3!})}(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+ax^2-1)=\lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+ax^2)}{\frac{x^3}{3!}}$$

برای اینکه حد فوق کراندار باشد، باید ضریب x^2 در صورت برابر صفر باشد. در نتیجه باید $a=\frac{1}{2}$ باشد و خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2}x^2)}{\frac{x^3}{3!}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=0\Rightarrow A=e^L=1\Rightarrow a+A=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۴» با استفاده از مشتق جزئی طرفین معادله داده شده را تشکیل داده و بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^n\frac{2y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\Rightarrow -y^3\frac{\partial z}{\partial y}=-x^{n-1}2y^4e^{\frac{y^2}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}e^{\frac{y^2}{x}}-x^{n-2}y^2e^{\frac{y^2}{x}}=x^{n-2}e^{\frac{y^2}{x}}(nx-y^2)$$

حالا تساوی صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})=-\frac{x^{n-1}}{4y^3}(8y^3e^{\frac{y^2}{x}}+\frac{4y^5}{x}e^{\frac{y^2}{x}})=x^{n-2}e^{\frac{y^2}{x}}(-2x-y^2)$$

$$\frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow n=-2$$

۱۴ـ گزینه «۲»

با جایگذاری $x=0$ مقدار $y(0)$ به دست می‌آید: $0-0+y^2(0)=1\Rightarrow y(0)=\pm 1\xrightarrow{y>0}y(0)=1$

از معادله مشتق می‌گیریم: $2x-y-xy'+2yy'=0$

جایگذاری $x=0$: $0-y(0)-0+2y(0)y'(0)=0\xrightarrow{y(0)=1}y'(0)=\frac{1}{2}$

مجدداً از معادله مشتق می‌گیریم: $2-y'-y''x-y'+2(y')^2+2yy''=0$

جایگذاری $x=0$: $2-\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+2(1)y''=0\Rightarrow y''(0)=\frac{-3}{4}$

۱۵ـ گزینه «۴» برای میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ داریم:

$$I=\iint Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$$

پس در این مثال $P=y-z$ و $Q=z-x$ و $R=x-y$ می‌باشد.

با توجه به این که سطح داده شده فقط شامل بدنه‌ی مخروط است، بنابراین ناحیه داده شده یک ناحیه بسته نیست.

اگر بخشی از صفحه $z=h$ که با مخروط تلاقی دارد را S' بنامیم و به سطح S اضافه کنیم، $S\cup S'$ یک ناحیه‌ی بسته می‌شود و می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و در انتها انتگرال روی S' را از انتگرال روی $S\cup S'$ کم کنیم. پس داریم:

$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint(0+0+0)dv=0$$

اکنون باید انتگرال روی S را حساب کنیم.

معادلهٔ S' به صورت $z=h$ می‌باشد که بردار قائم یکّه‌ی رو به خارج آن به صورت مقابل می‌باشد. $\vec{n}=(0,0,1)$

پس داریم: $\vec{F}.\vec{n}=(x-y)$

از $z=h$ داریم: $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dydx=dydx$

حال داریم: (تصویر محل برخورد $z=h$ با مخروط دایره $x^2+y^2=h^2$ می‌باشد.)

$$I=\iint_D (x-y)dydx$$

با توجه به این که ناحیه D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع زیر انتگرال نیز نسبت به x و y فرد می‌باشد، پس حاصل این انتگرال نیز صفر است و در نتیجه حاصل انتگرال کل نیز صفر می‌باشد.

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ـ تعداد جواب‌های معادلهٔ $e^z = 2i$ که درون دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{Ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$، کدام است؟

۱) $e^{-\frac{1}{6}}$ ۲) $e^{\frac{1}{6}}$ ۳) $e^{\frac{1}{2}}$ ۴) ۱

۳ـ حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}, x>0$، کدام است؟

۱) x^2 ۲) $x+\frac{1}{2}$ ۳) $x+1$ ۴) $2x+1$

۴ـ مقدار مینیمم تابع $z = x^2 + y^2$ مقید به معادلهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a,b\neq 0)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{ab(a+b)}{(a^2+b^2)^2}$ ۲) $\dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$ ۳) $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$ ۴) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

۵ـ اگر $u(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ باشد، حاصل $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ در نقطهٔ $(2,0)$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ـ مختصات مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید $\begin{cases}x=3(1-\cos t)\\ y=3(t-\sin t)\end{cases}$، $0\le t\le 2\pi$، کدام است؟

۱) $(3,4\pi)$ ۲) $(4,3\pi)$ ۳) $(2,3\pi)$ ۴) $(3,2\pi)$

۷ـ میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ بر سطح نیم‌کرهٔ فوقانی با معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ جریان دارد. شار گذرا توسط نیروی $\vec{F}$ از سطح مورد نظر، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۸ـ فرض کنید چگالی سطحی هر نقطه از پوستهٔ سهمی‌گون با ضابطهٔ $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ که زیر صفحهٔ $z=1$ واقع است، برابر ارتفاع آن نقطه باشد. جرم پوسته، کدام است؟

۱) $\dfrac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$ ۲) $\dfrac{\pi(12\sqrt{3}+1)}{15}$ ۳) $\dfrac{2\pi(3\sqrt{3}+1)}{15}$ ۴) $\dfrac{\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$

۹ـ فرض کنید C مسیر بستهٔ واقع بر منحنی به معادلهٔ $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=4\sin t\cos t\\ z=2\cos^2 t\end{cases}$ در دامنهٔ $[0,\pi]$ باشد. مقدار $\oint_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) صفر

۱۰ـ اگر سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-2})$ واگرا باشد، مقدار α، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱ـ گزینه «۲» با فرض عدد مختلط $z=x+iy\ ;\ x,y\in\mathbb{R}$ و جایگذاری در معادله داریم:

$$e^{x+iy}=2i=2e^{i(2k\pi+\frac{\pi}{2})}\Rightarrow e^xe^{iy}=2e^{i(2k\pi+\frac{\pi}{2})}\Rightarrow\begin{cases}x=\mathrm{Ln}2\\ y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ \ ;\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

از مجموعه جواب‌های فوق فقط کافی است مقادیری از y که درون دایره مورد نظر قرار دارند مشخص کنیم. با توجه به اینکه شعاع دایره ۵ است باید مقادیری از k را بدست آوریم که $-5<y<5$ باشد. پس داریم:

$$x=\mathrm{Ln}2\approx 0/69\ \ ;\ \ \pi\approx 3/14$$

$$-5<2k\pi+\frac{\pi}{2}<5\Rightarrow -5-1/57<6/28k<5-1/57\Rightarrow -6/57<6/28k<3/43\Rightarrow\frac{-6/57}{6/28}<k<\frac{3/43}{6/28}\Rightarrow k=-1,0$$

۲ـ گزینه «۱» برای حل این حد ابتدا حاصل حد تابع درون پرانتز را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{1}=1$$

پس حد کلی داده شده به فرم 1^∞ مبهم است، در نتیجه با استفاده از این نکته که $\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})=\sinh^{-1}x$ است داریم:

$$L=e^A$$

$$A=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{x}-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\sinh^{-1}x-x}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sinh^{-1}x-x}{x^3}\right)\sim\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}\Rightarrow L=e^{-\frac{1}{6}}$$

۳ـ گزینه «۲» برای حل این حد ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}=\sqrt{n^2(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}=n\sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}n\sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}$$

در حد اخیر وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{k}{n}\approx\frac{k+1}{n}$ در نتیجه حد اخیر به $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x+\frac{k}{n})$ تبدیل می‌شود که با فرض $f(\frac{k}{n})=x+\frac{k}{n}$ داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x+\frac{k}{n})=\int_0^1(x+t)dt=x+\frac{1}{2}$$

۴ـ گزینه «۴» به راحتی با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$f(x,y)=x^2+y^2\ \ ;\ \ g(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow\frac{2x}{\frac{1}{a}}=\frac{2y}{\frac{1}{b}}\Rightarrow y=\frac{a}{b}x\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{\frac{a}{b}x}{b}=1\Rightarrow x(\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2})=1$$

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}\Rightarrow y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}\Rightarrow z=x^2+y^2=(\frac{ab^2}{a^2+b^2})^2+(\frac{a^2b}{a^2+b^2})^2=\frac{a^2b^4+a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2(b^2+a^2)}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

۵ـ گزینه «۳» برای محاسبه مشتقات جزئی خواسته شده، کافی است در محاسبه مشتق نسبت به هر متغیر، تابع را نسبت به آن متغیر به صورت هموگرافیک نوشته و از مشتق مراتب بالاتر توابع هموگرافیک کمک بگیریم. با توجه به اینکه برای تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ مشتق مرتبه nام به صورت $y^{(n)}=n!(-c)^{n-۱}\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+۱}}$ است، داریم:

$$\begin{cases} u=\frac{x+y}{x-y}\Rightarrow\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}=۴!(-۱)^{۴-۱}\frac{-y-y}{(x-y)^{۴+۱}}=\frac{۴۸y}{(x-y)^{۴+۱}}\xrightarrow{(۲,۰)}=۰ \\ u=\frac{y+x}{-y+x}\Rightarrow\frac{\partial^۴ u}{\partial y^۴}=۴!(۱)^{۴-۱}\frac{x+x}{(x-y)^{۴+۱}}=\frac{۴۸x}{(x-y)^{۴+۱}}\xrightarrow{(۲,۰)}=\frac{۹۶}{۳۲}=۳ \end{cases}\Rightarrow\frac{\partial^۴ u}{\partial y^۴}-\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}=۳$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به روابط مختصات مرکز ثقل منحنی‌های پارامتری داریم:

$$\bar{x}=\frac{۱}{L}\int_a^b x\sqrt{(x'_t)^۲+(y'_t)^۲}\,dt\quad;\quad\bar{y}=\frac{۱}{L}\int_a^b y\sqrt{(x'_t)^۲+(y'_t)^۲}\,dt\quad;\quad L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^۲+(y'_t)^۲}\,dt$$

$$\sqrt{(x'_t)^۲+(y'_t)^۲}=\sqrt{۹\sin^۲ t+۹(۱-\cos t)^۲}=۳\sqrt{\sin^۲ t+\cos^۲ t-۲\cos t+۱}=۳\sqrt{۲-۲\cos t}=۳\sqrt{۴\sin^۲\frac{t}{۲}}=۶|\sin\frac{t}{۲}|$$

$$L=\int_۰^{۲\pi}۶|\sin\frac{t}{۲}|\,dt=\int_۰^{۲\pi}۶\sin\frac{t}{۲}dt=-۱۲\cos\frac{t}{۲})_۰^{۲\pi}=-۱۲(-۱-۱)=۲۴$$

$$\bar{x}=\frac{۱}{۲۴}\int_۰^{۲\pi}۳(۱-\cos t)۶\sin\frac{t}{۲}dt=\frac{۳}{۲}\int_۰^{۲\pi}(\sin^۲\frac{t}{۲})\sin\frac{t}{۲}dt=\frac{۳}{۲}\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos^۲\frac{t}{۲})\sin\frac{t}{۲}dt=\frac{۳}{۲}[-۲\cos(\frac{t}{۲})+\frac{۲}{۳}\cos^۳(\frac{t}{۲})]_۰^{۲\pi}=۴$$

$$\bar{y}=\frac{۱}{۲۴}\int_۰^{۲\pi}۳(t-\sin t)۶\sin\frac{t}{۲}dt=\frac{۳}{۴}\int_۰^{۲\pi}(t\sin\frac{t}{۲}-\sin t\sin^۲\frac{t}{۲})dt=\frac{۳}{۴}\int_۰^{۲\pi}(t\sin\frac{t}{۲}-۲\cos\frac{t}{۲}\sin^۳\frac{t}{۲})dt=\frac{۳}{۴}\underbrace{\int_۰^{۲\pi}t\sin\frac{t}{۲}dt}_{I_۱}-\underbrace{\frac{۳}{۴}(\sin^۴\frac{t}{۲})_۰^{۲\pi}}_{=۰}$$

برای حل انتگرال $I_۱$ نیز با استفاده از روش جدول جزء به جزء داریم:

+	t	$\sin\frac{t}{۲}$
−	۱	$-۲\cos\frac{t}{۲}$
	۰	$-۴\sin\frac{t}{۲}$

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi}t\sin\frac{t}{۲}dt=-۲t\cos\frac{t}{۲})_۰^{۲\pi}+۴\sin\frac{t}{۲})_۰^{۲\pi}=-۴\pi(-۱)-۰+۰=۴\pi\Rightarrow\bar{y}=\frac{۳}{۴}I_۱=۳\pi$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه سطح مورد نظر بسته نیست نمی‌توان بلافاصله از قضیه دیورژانس استفاده کرد. ولی به راحتی با اضافه کردن S' یعنی بخشی از صفحه‌ی $z=۰$ که درون دایره $x^۲+y^۲=۱$ قرار دارد، می‌توان یک ناحیه بسته تولید کرده و از قضیه دیورژانس استفاده کرد، پس داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\underbrace{\iiint_D(\operatorname{div}\vec{F})dv}_{I_۱}-\underbrace{\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_۲}$$

$$I_۱=\iiint_D(۲x+۲y+۲z)dv$$

ناحیه مورد اشاره نسبت به متغیرهای x و y متقارن و تابع زیر انتگرال نسبت به آن‌ها فرد است، پس حاصل این قسمت‌ها صفر است. در نتیجه با استفاده از مختصات کروی خواهیم داشت:

$$I_۱=\iiint_D(۲z)dv=۲\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۱}(\rho\cos\varphi)\rho^۲\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=۲(\int_۰^{۲\pi}d\theta)(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi)(\int_۰^{۱}\rho^۳d\rho)=۲(۲\pi)(\frac{\sin^۲\varphi}{۲})_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\rho^۴}{۴})_۰^{۱}=\frac{\pi}{۲}$$

برای محاسبه انتگرال $I_۲$ نیز با روش مستقیم و با توجه به اینکه $\vec{n}=-\vec{k}$ است داریم:

$$I_۲=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=-\iint_{S'}z^۲d\sigma=-\iint_{S'}(۰)^۲d\sigma=۰\Rightarrow I=I_۱-I_۲=\frac{\pi}{۲}$$

۸ـ گزینه «۱» به راحتی با استفاده از رابطه‌ی جرم یک سطح داریم:

$$M=\iint_S \delta d\sigma=\iint_S z d\sigma=\iint_S \frac{1}{2}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=1\Rightarrow x^2+y^2=2\Rightarrow \begin{cases}0\le r\le\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$M=\iint_S\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\sqrt{1+r^2}\,rdrd\theta=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^3\sqrt{1+r^2}\,dr=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,rdr$$

$$1+r^2=t\Rightarrow 2rdr=dt$$

$$M=\pi\int_1^3(t-1)t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2}=\frac{\pi}{2}\int_1^3(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{\pi}{2}(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})\Big|_1^3$$

$$=\frac{\pi}{2}[(\frac{2}{5}9\sqrt{3}-\frac{2}{3}3\sqrt{3})-(\frac{2}{5}-\frac{2}{3})]=\frac{\pi}{2}(\frac{54\sqrt{3}-30\sqrt{3}}{15}+\frac{4}{15})=2\pi(\frac{6\sqrt{3}+1}{15})$$

۹ـ گزینه «۴» ابتدا کرل تابع برداری در انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y+z&z+x&x+y\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}=\vec{O}$$

پس تابع مورد نظر پایستار و همواره پیوسته بوده و انتگرال آن روی یک مسیر بسته صفر خواهد بود.

۱۰ـ گزینه «۱» برای بررسی همگرایی این سری، ابتدا سعی می‌کنیم آن را به فرم p- سری تبدیل کنیم. برای این کار کافی است صورت و مخرج را در مزدوج عبارت درون پرانتز ضرب کرده و سپس با کمک هم‌ارزی داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{\alpha}\frac{(n^3+2-n^3+2)}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-2}}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n^{\alpha}}{2n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$$

می‌دانیم این سری در صورتی همگراست که $\frac{3}{2}-\alpha>1$ باشد. یعنی $\alpha<\frac{1}{2}$. پس به ازای گزینه (۱) واگرا خواهد بود.

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱ـ تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x(x-1)(x-2)=1$ ، کدام است؟

۱) تنها یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ دارد.
۲) تنها یک ریشه در بازهٔ $[2,3]$ دارد.
۳) یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ و دو ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد.
۴) سه ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد.

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})...(1+\frac{1}{n})}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) e
۳) 1
۴) $+\infty$

۳ـ فاصلهٔ همگرایی سری تابعی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{4n}+x^{-4n}+3}{1+x^{2n}+x^{-2n}}$ کدام است؟

۱) $|x|>1$
۲) $0<|x|<1$
۳) همواره واگرا است.
۴) به‌جز $x=0$ همواره همگرا است.

۴ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه با معادلات پارامتری $z=\sin u$ و $y=\cos u\sin v$ ، $x=\cos u\cos v$ به‌ازای $u=\frac{\pi}{4}$ و $v=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $2x+2y+\sqrt{2}z=3$
۲) $x+y+\sqrt{2}z=2$
۳) $2x+2y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=\frac{5}{2}$
۴) $x+y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=2$

۵ـ حاصل $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\ln 2$
۲) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$
۳) $\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$
۴) ∞

۶ـ فرض کنید f یک تابع پیوسته و به‌ازای مقادیر ثابت و مثبت a و b و هر $x\in[0,1]$ در $[a,b]$ قرارگیرد. اگر $A=\int_0^1\frac{dx}{f(x)}$ باشد، آن‌گاه کدام رابطه درست است؟

۱) $A\geq\frac{2}{b}-\frac{1}{a}\int_0^1 f(x)dx$
۲) $A\geq\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\int_0^1 f(x)dx$
۳) $A\leq\frac{2}{b}-\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx$
۴) $A\leq\frac{2}{a}-\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx$

۷ـ حاصل انتگرال $\iint\limits_D (x+1)^2y^2dxdy$ در ناحیهٔ D درون مثلثی با رأس‌های $(0,0)$ و $(1,-1)$ و $(1,1)$ ، کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{49}{90}$
۳) 1
۴) $\frac{23}{18}$

۸ـ انحنای منحنی $r=3+2\cos\theta$ در نقطهٔ $(3,\frac{\pi}{2})$ در مختصات قطبی، کدام است؟

۱) $\frac{17}{13\sqrt{13}}$
۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
۳) $\frac{13}{17}$
۴) $\frac{17}{13}$

۹ـ حاصل $\iint\limits_S (yzdydz+zxdzdx+xydxdy)$ که در آن S سطح کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات به شعاع واحد است، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{8}{3}$

۱۰ـ فرض کنید V حجم ناحیه‌ای باشد که از اطراف به استوانهٔ $r=\cos\theta$ ، از بالا به مخروط $z=16-\sqrt{x^2+y^2}$ و از پایین به صفحه xy محدود است. مقدار V کدام است؟

۱) $2\pi-\frac{2}{9}$
۲) $2\pi-\frac{4}{9}$
۳) $4\pi-\frac{2}{9}$
۴) $4\pi-\frac{4}{9}$

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱ــ گزینه «۲» قرار می‌دهیم:

$$f(x)=x(x-1)(x-2)-1=x^3-3x^2+2x-1$$

داریم:

$$\begin{cases} f(2)=2(2-1)(2-2)-1=-1<0 \\ f(3)=3(3-1)(3-2)-1=5>0 \end{cases}$$

$f(2)f(3)<0$ پس طبق قضیه‌ی بولتزانو f در بازه‌ی $[2,3]$ ریشه دارد چون $f'(x)=3x^2-6x+2$ در بازه‌ی $[2,3]$ اکیداً صعودی است، در این بازه f فقط یک ریشه دارد. اما به ازای $x<2$، تابع f همواره منفی و به ازای $x>3$، تابع f همواره مثبت است پس f ریشه‌ی دیگری ندارد.

۲ــ گزینه «۳» برای حل این حد ابتدا آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k})}$$

حال به‌راحتی با استفاده از قاعده ادغام برای حاصل‌ضرب (نماد پای) خواهیم داشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{1}}=1$$

۳ــ گزینه «۳» ابتدا وضعیت حد جمله‌ی سری را در بی‌نهایت بررسی می‌کنیم. برای اینکار با توجه به اینکه $x=0$ نمی‌تواند باشد، ۳ حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$0<|x|<1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{4n}+x^{-4n}+3}{1+x^{2n}+x^{-2n}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-4n}}{x^{-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=\infty$$

$$|x|>1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{4n}+x^{-4n}+3}{1+x^{2n}+x^{-2n}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{4n}}{x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2x^{2n}=\infty$$

$$|x|=1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{4n}+x^{-4n}+3}{1+x^{2n}+x^{-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1+3}{1+1+1}=3$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هیچ حالتی سری داده شده حتی شرط لازم همگرایی را ندارد، پس همواره واگراست.

۴ــ گزینه «۲» به‌ازای $(u,v)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ داریم $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. از طرفی برای نوشتن معادله صفحه مماس، نیاز به بردار گرادیان داریم. برای محاسبه بردار گرادیان نیز از ضرب خارجی بردارهای $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ که مماس بر رویه هستند کمک می‌گیریم و داریم:

$$\vec{r}_u=(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u)\xrightarrow{(u,v)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}\vec{r}_u=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{r}_v=(-\cos u\sin v,\cos u\cos v,0)\xrightarrow{(u,v)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}\vec{r}_u=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$$

$$\vec{\nabla}f=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}=(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{1}{2})\parallel(1,1,\sqrt{2})$$

$$P:1(x-\frac{1}{2})+1(y-\frac{1}{2})+\sqrt{2}(z-\frac{\sqrt{2}}{2})=0\Rightarrow x+y+\sqrt{2}z=2$$

۵ـ گزینه «۳» برای حل این انتگرال، از روش جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$u=\arctan x \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{x^2}=dv \Rightarrow -\frac{1}{x}=v$$

$$I=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{\infty}-\int_1^{\infty}-\frac{dx}{x(1+x^2)}=0+\frac{\pi}{4}+\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{4}+\left[\mathrm{Ln}\,x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)\right]_1^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\mathrm{Ln}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{\infty}=\frac{\pi}{4}+\mathrm{Ln}1-\mathrm{Ln}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\mathrm{Ln}\sqrt{2}$$

۶ـ گزینه «۴» به راحتی با استفاده از داده‌های مسئله و خواص انتگرال داریم:

$$\forall x\in[0,1]\rightarrow a\le f(x)\le b \Rightarrow \int_0^1 a\,dx\le\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1 b\,dx \Rightarrow a\le\int_0^1 f(x)dx\le b \xrightarrow{\div ab}\frac{1}{b}\le\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1}{a} \qquad (1)$$

$$\forall x\in[0,1]\rightarrow a\le f(x)\le b \Rightarrow \frac{1}{b}\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{1}{a} \Rightarrow \int_0^1\frac{1}{b}dx\le\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\int_0^1\frac{1}{a}dx \Rightarrow \frac{1}{b}\le A\le\frac{1}{a} \qquad (2)$$

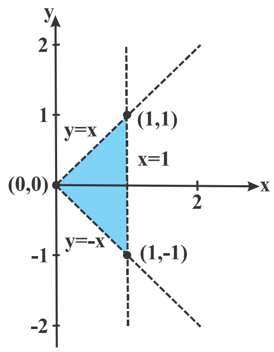
$$(1)+(2)\Rightarrow\frac{2}{b}\le A+\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx\le\frac{2}{a}\Rightarrow\begin{cases}A\le\frac{2}{a}-\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx\\ A\ge\frac{2}{b}-\frac{1}{ab}\int_0^1 f(x)dx\end{cases}$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به شکل ناحیه و اینکه تابع در راستای محور عرض‌ها مرتب است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$I=\iint_D (x+1)^2y^2dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}(x+1)^2y^2dydx=\int_0^1(x+1)^2\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_{-x}^{x}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1(x+1)^2(2x^3)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^5+4x^4+2x^3)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^6}{3}+\frac{4x^5}{5}+\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{10+24+15}{30}\right)=\frac{49}{90}$$

۸ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه‌ی انحنا برای منحنی‌های قطبی خواهیم داشت:



$$r=3+2\cos\theta$$

$$r'=-2\sin\theta \xrightarrow{(r,\theta)=(3,\frac{\pi}{2})} r'=-2$$

$$r''=-2\cos\theta \xrightarrow{(r,\theta)=(3,\frac{\pi}{2})} r''=0$$

$$\kappa=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|9+2(4)-0\right|}{(9+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{17}{13\sqrt{13}}$$

۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اینکه سطح داده شده بسته است، به راحتی با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\vec{F}=(yz,zx,xy)$$

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D(\mathrm{div}\vec{F})dv=\iiint_D(0)dv=0$$

پس جواب صحیح صفر است اما در بین گزینه‌ها وجود ندارد و سازمان سنجش گزینه (۱) را صحیح اعلام کرده است!

۱۰ـ گزینه «۴» واضح است که باید از مختصات استوانه‌ای کمک بگیریم. با توجه به اینکه تصویر ناحیه بر صفحه xy همان دایره $r=\cos\theta$ است، داریم:

$$\begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

از طرفی برای حدود z نیز با توجه به صورت سؤال $0 \le z \le 16-r$ است. پس در کل داریم:

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos\theta}\int_{0}^{16-r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos\theta}(16r-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8r^2-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{0}^{\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8\cos^2\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{3}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4+4\cos 2\theta-\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{3}\cos\theta\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=4\theta+2\sin 2\theta-\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{9}\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi+0-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\left(-2\pi+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=4\pi-\frac{4}{9}$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+ax^2)^{\frac{1}{x-\sin x}}=A$ و A عددی کراندار باشد، مقدار $a+A$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$　۲) ۱　۳) $\frac{3}{4}$　۴) $\frac{1}{2}$

۲ـ اگر $z=x^n e^{\frac{y^2}{x}}$ باشد، برای کدام مقدار n، تساوی $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})$، برقرار است؟

۱) ۲　۲) $\frac{1}{2}$　۳) $-\frac{1}{2}$　۴) -2

۳ـ مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x,y)=x^2+e^{xy}-3xy^2$، در نقطهٔ $(1,0)$ و در جهت بردار یکه‌ای که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ مـی‌سـازد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۲) $\sqrt{2}$　۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　۴) $2\sqrt{2}$

۴ـ مقدار $\int_1^{\infty}\frac{6^x}{9^x-4^x}dx$، کدام است؟

۱) $\frac{Ln5}{Ln3/5}$　۲) $\frac{Ln3}{Ln2/5}$　۳) $\frac{Ln5}{Ln2/25}$　۴) $\frac{Ln3}{Ln1/75}$

۵ـ فرض کنید منحنی C اضلاع مثلث به رئوس $(0,0)$، $(2,0)$ و $(2,2)$ در صفحهٔ مختصات است، که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. مقدار $\oint_C \sin(x^3)dx+2ye^{x^2}dy$، کدام است؟

۱) $3e^4+1$　۲) $3e^4-1$　۳) e^4+3　۴) e^4-3

۶ـ فرض کنید S سطح بیرونی مخروط $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$ باشد. مقدار $\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$ کدام است؟

۱) π　۲) 2π　۳) 4π　۴) صفر

۷ـ ضریب $ab^2c^3d^4$ در بسط $(4a-3b+2c-d)^{10}$، کدام است؟

۱) !۱۰　۲) !۹　۳) !۸　۴) !۷

پاسخنامه رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱ـ گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه کافیست به صورت زیر عمل کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0}(\cos x+ax^2)^{\frac{1}{x-\sin x}}=1^\infty \Rightarrow A=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-\sin x}(\cos x+ax^2-1)}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\sin x}(\cos x+ax^2-1)\sim\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-(x-\frac{x^3}{3!})}(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+ax^2-1)=\lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+ax^2)}{\frac{x^3}{3!}}$$

برای اینکه حد فوق کراندار باشد، باید ضریب x^2 در صورت برابر صفر باشد. در نتیجه باید $a=\frac{1}{2}$ باشد و خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2}x^2)}{\frac{x^3}{3!}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=0\Rightarrow A=e^L=1\Rightarrow a+A=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

۲ـ گزینه «۴» با استفاده از مشتق جزئی طرفین معادله داده شده را تشکیل داده و بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^n\frac{2y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\Rightarrow -y^3\frac{\partial z}{\partial y}=-x^{n-1}2y^4e^{\frac{y^2}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}e^{\frac{y^2}{x}}-x^{n-2}y^2e^{\frac{y^2}{x}}=x^{n-2}e^{\frac{y^2}{x}}(nx-y^2)$$

حالا تساوی صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})=-\frac{x^{n-1}}{4y^3}(8y^3e^{\frac{y^2}{x}}+\frac{4y^5}{x}e^{\frac{y^2}{x}})=x^{n-2}e^{\frac{y^2}{x}}(-2x-y^2)$$

$$\frac{1}{4y^3}\frac{\partial}{\partial y}(-y^3\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow n=-2$$

۳ـ گزینه «۳» بردار یکه‌ی موردنظر از رابطه $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$ به‌راحتی قابل استخراج و برابر $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ است. حالا با استفاده از گرادیان تابع و فرمول مشتق سوئی داریم:

$$f(x,y)=x^2+e^{xy}-3xy^2$$

$$\vec{\nabla}f(x,y)=(2x+ye^{xy}-3y^2\ ,\ xe^{xy}-6xy)\ \Rightarrow \vec{\nabla}f(1,0)=(2,1)$$

$$D_{\vec{u}}f(1,0)=\vec{\nabla}f(1,0).\vec{u}=(2,1).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2+1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴ـ گزینه «۳» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int_1^\infty\frac{6^x}{9^x-4^x}dx=\int_1^\infty\frac{1}{(\frac{9}{6})^x-(\frac{4}{6})^x}dx=\int_1^\infty\frac{1}{(\frac{3}{2})^x-(\frac{2}{3})^x}dx=\int_1^\infty\frac{1}{(\frac{3}{2})^x-(\frac{3}{2})^{-x}}dx$$

حالا با تغییر متغیر $(\frac{3}{2})^x=u$ خواهیم داشت:

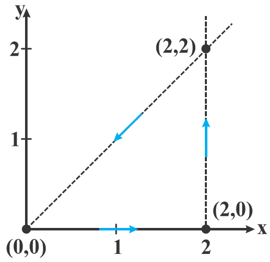
$$\begin{cases}(\frac{3}{2})^x\operatorname{Ln}\frac{3}{2}dx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{u\operatorname{Ln}1/5}\\ x=1\Rightarrow u=\frac{3}{2}\\ x=\infty\ \Rightarrow u\to\infty\end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{3}{2}}^\infty\frac{1}{u-\frac{1}{u}}\frac{du}{u\operatorname{Ln}1/5}=\frac{1}{\operatorname{Ln}1/5}\int_{\frac{3}{2}}^\infty\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2\operatorname{Ln}1/5}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|_{\frac{3}{2}}^\infty=\frac{1}{2\operatorname{Ln}1/5}(\operatorname{Ln}1-\operatorname{Ln}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}})=\frac{\operatorname{Ln}5}{2\operatorname{Ln}1/5}=\frac{\operatorname{Ln}5}{\operatorname{Ln}(1/5)^2}=\frac{\operatorname{Ln}5}{\operatorname{Ln}2/25}$$

۵ــ گزینه «۱» با توجه به بسته بودن ناحیه و هموار بودن تابع زیر انتگرال، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$I=\oint_C(\sin x^۳dx+۲ye^{x^۲}dy)=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(۲ye^{x^۲})-\frac{\partial}{\partial y}(\sin x^۳)]dxdy=\iint_D ۴xye^{x^۲}dxdy$$

و با توجه به ناحیه داده شده داریم:



$$I=\iint_D ۴xye^{x^۲}dxdy=\iint_D ۴xye^{x^۲}dydx=\int_۰^۲\int_۰^x ۴xye^{x^۲}dydx=\int_۰^۲ ۴xe^{x^۲}\frac{y^۲}{۲}\Big)_۰^x dx=\int_۰^۲ ۲x^۳e^{x^۲}dx$$

$$x^۲=u\Rightarrow ۲xdx=du$$

$$۲xe^{x^۲}dx=dv\Rightarrow e^{x^۲}=v$$

$$I=[x^۲e^{x^۲}]_۰^۲-\int_۰^۲ ۲xe^{x^۲}dx=۴e^۴-e^{x^۲}\Big)_۰^۲=۴e^۴-(e^۴-۱)=۳e^۴+۱$$

۶ــ گزینه «۴» برای میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ داریم:

$$I=\iint Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$$

پس در این مثال $P=y-z$ و $Q=z-x$ و $R=x-y$ می‌باشد.

با توجه به این که سطح داده شده فقط شامل بدنه‌ی مخروط است، بنابراین ناحیه داده شده یک ناحیه بسته نیست.

اگر بخشی از صفحه $z=h$ که با مخروط تلاقی دارد را S' بنامیم و به سطح S اضافه کنیم، $S\cup S'$ یک ناحیه‌ی بسته می‌شود و می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و در انتها انتگرال روی S' را از انتگرال روی $S\cup S'$ کم کنیم. پس داریم:

$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint(۰+۰+۰)dv=۰$$

اکنون باید انتگرال روی S را حساب کنیم.

معادلهٔ S' به صورت $z=h$ می‌باشد که بردار قائم یکّه‌ی رو به خارج آن به صورت مقابل می‌باشد. $\vec{n}=(۰,۰,۱)$

پس داریم: $\vec{F}.\vec{n}=(x-y)$

از $z=h$ داریم: $ds=\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}dydx=dydx$

حال داریم: (تصویر محل برخورد $z=h$ با مخروط دایره $x^۲+y^۲=h^۲$ می‌باشد.)

$$I=\iint_D(x-y)dydx$$

با توجه به این که ناحیه D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع زیر انتگرال نیز نسبت به x و y فرد می‌باشد، پس حاصل این انتگرال نیز صفر است و در نتیجه حاصل انتگرال کل نیز صفر می‌باشد.

۷ــ گزینه «۱» در عبارت $(a_۱x_۱+a_۲x_۲+\ldots+a_kx_k)^n$، ضریب جمله $x_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}\ldots x_k^{n_k}$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\ldots n_k!}a_۱^{n_۱}a_۲^{n_۲}\ldots a_k^{n_k}$$

در اینجا عبارت داده‌شده به صورت $(۴a-۳b+۲c-d)^{۱۰}$ است پس داریم:

$n=۱۰\,,\,a_۱=۴\,,\,a_۲=-۳\,,\,a_۳=۲\,\,,\,a_۴=-۱$ و چون ضریب جمله $ab^۲c^۳d^۴$ خواسته شده لذا داریم:

$$n_۱=۱\,,\,n_۲=۲\,,\,n_۳=۳\,\,,\,n_۴=۴$$

در نتیجه ضریب عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{۱۰!}{۱!۲!۳!۴!}(۴)^۱(-۳)^۲(۲)^۳(-۱)^۴=۱۰\times۹\times۴\times۷\times۵\times۴\times۹\times۸=۱۰!$$

سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ فرض کنید قسمت حقیقی عبارت‌های $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$ و $\sqrt{\sqrt{3}-i}$ به‌ترتیب a و b باشند. مقدار a^2-b^2، کدام است؟ $(i^2=-1)$

۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۲) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{-2}$

۲ـ حاصل عبارت $(-1)\,\mathrm{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}}+e^{\frac{i\pi}{3}}+e^{\frac{i\pi}{2}}+e^{\frac{2\pi i}{3}}+e^{\frac{5\pi i}{6}}$، کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) صفر

۳ـ فرض کنید $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\frac{4}{\pi}\}$ و $B=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 3\}$، مساحت ناحیه‌ای که نقاط واقع در مجموعه $B-(A\cap B)$ تولید می‌کنند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۴ـ پنج گرم فلز A و پنج گرم فلز B را در یک ظرف به‌طور همگن ذوب می‌کنیم تا بتوانیم یک سکه ده گرمی بسازیم. از مقدار مذاب x گرم حذف می‌کنیم و به همان مقدار فلز A اضافه می‌کنیم تا در ساخت سکه جدید، فلز A به ٪۸۰ برسد. مقدار x به گرم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۶

۵ـ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\mathrm{Ln}(\frac{x-3}{-x+1})}$، کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $(1,2]$ ۴) $[2,\infty)$

۶ـ فاصلهٔ نقطهٔ $(1,\sqrt{2},3)$ از صفحهٔ $4x+2\sqrt{2}\,y+5z=a$ برابر ۷ است. ماکزیمم مقدار a کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۳۰ ۴) ۶۸

۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to -2^-}(-[\frac{x}{2}]+[-\frac{2}{x}])$، کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) 1

۸ـ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(e^{2ax}-1)[\frac{1}{x}] & x\neq 0\\ -a+1 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۹ـ مقدار مشتق مرتبهٔ ۱۲ تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{-11!}{2^{13}}$ ۲) $\frac{11!}{2^{13}}$ ۳) $\frac{-12!}{2^{14}}$ ۴) $\frac{12!}{2^{14}}$

۱۰ـ فرض کنید تابع $f(x)=\begin{cases}be^{\cos x}+1 & x>0\\ e^x-ax & x\le 0\end{cases}$، در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) 1

۱۱ـ تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}})^2$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۲

۱۲ـ فاصلهٔ نقاط عطف منحنی $y=e^{-x^2}$، کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i+n}{n^2}\sin(\frac{i-n}{n})$، کدام است؟

۱) $-\sin 1-\cos 1-2$ ۲) $-\sin 1+\cos 1-2$ ۳) $\sin 1+\cos 1-2$ ۴) $\sin 1-\cos 1-2$

۱۴ـ مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x\,dx}{۴\sin^{۲} x-\cos^{۲} x}$، کدام است؟

۱) $\frac{Ln۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲Ln۳}{۹}$ ۳) $\frac{Ln۳}{۳}$ ۴) $\frac{Ln۳}{۸}$

۱۵ـ حجم حاصل از دوران یک دایره (قرص) به شعاع a حول یکی از خطوط مماس بر آن کدام است؟

۱) $۲\pi^{۲}a^{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}$ ۳) $۲\pi^{۳}a^{۲}$ ۴) $۴\pi^{۲}a^{۳}$

۱۶ـ سطح محصور به منحنی $x^{\frac{۱}{۳}}+y^{\frac{۱}{۳}}=۱$ و محورهای مختصات را، واقع در ربع اول صفحهٔ مختصات، حول محور yها دوران دهیم، حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۸۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۷}$ ۴) $\frac{\pi}{۴۲}$

۱۷ـ اگر ماتریس مربع $A=\begin{bmatrix} a-۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ دارای یک مقدار ویژه مکرر از مرتبه دوم $\lambda=۲$ باشد، مقدار ویژه دیگر آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۸ـ فاصله نقطه $(۱,۱,۰)$ از رویهٔ $z=x^{۲}+y^{۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۳\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۹ـ اگر $f(x)=\int_{۰}^{\sinh x}\sqrt{۴+t^{۴}}\,dt$ باشد، آنگاه مشتق وارون $(f^{-۱})'$ در نقطه $x=۰$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۰ـ طول منحنی نمودار تابع $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$، وقتی $۰\le t\le ۲\pi$ کدام است؟

۱) $\pi^{۲}$ ۲) ۲π ۳) $۲\pi^{۲}$ ۴) ۴π

۲۱ـ انحنای منحنی $\vec{r}(t)=۳\sin t\hat{i}-(۱+۲t)\hat{j}+۳\cos t\hat{k}$ در لحظهٔ $t=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۲۲ـ کوتاه‌ترین فاصله نقطه $(\sqrt{۳},۳,-۱)$ از سطح $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲y+۴z-۱$، چقدر است؟

۱) $\sqrt{۷}-۲$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}-۱$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۳ـ بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=xe^{yz^{۲}}+yz^{۲}$، در نقطه $(۱,۰,-۱)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۴ـ تعداد نقاط زینی تابع $f(x,y)=x^{۳}-۲y^{۳}-۳xy^{۲}-۳x$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۲۵ـ حاصل $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\arccos y}\cos^{۲}(\sin x)dxdy$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲$ ۲) $\frac{\sin ۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin(۲\sin ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲$ ۴) $\frac{\sin ۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin(۲\sin ۱)$

۲۶ـ حاصل $\int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱}e^{-\frac{x}{y}}dydx$، کدام است؟

۱) $\frac{e^{۲}-۱}{۲e}$ ۲) $\frac{e^{۲}-۱}{۲}$ ۳) $\frac{e-۱}{۲e}$ ۴) $\frac{e-۱}{۲}$

۲۷ـ مساحت سطح سهمیگون باز $z=x^{۲}+y^{۲}$ محدود به صفحات $z=۱$ و $z=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}(۱۷^{\frac{۳}{۲}}-۵^{\frac{۳}{۲}})$ ۲) $\frac{\pi}{۶}(۵^{\frac{۳}{۲}}-۱)$ ۳) $\frac{\pi}{۳}(۵^{\frac{۳}{۲}}-۱)$ ۴) $\frac{\pi}{۶}(۱۷^{\frac{۳}{۲}}-۵^{\frac{۳}{۲}})$

۲۸ـ اگر C مرز بسته ناحیه $x^{۲}+y^{۲}\le\frac{\pi^{۲}}{۴}$ و $y\ge ۰$ باشد، حاصل $\oint_C(e^y\sin x+۳y^{۲})dx+(۲x-e^y\cos x)dy$، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi^{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\pi^{۳}}{۸}$ ۳) $-\frac{\pi^{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{\pi^{۳}}{۴}$

۲۹ـ فرض کنید نیروی $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\hat{i}+(y+z)\hat{j}+(x+z)\hat{k}$ جسمی را که بر مرز منحنی شکل حاصل از برخورد سهمیگون $z=x^{۲}+y^{۲}$ و نیم‌کرهٔ فوقانی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲$ قرار دارد، در جهت عقربه‌های ساعت به حرکت درمی‌آورد. کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

۱) ۳π ۲) ۲π ۳) صفر ۴) π

۳۰ـ شار گذرا از سطح باز استوانه‌ای شکل با ضابطهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۴$، محدود به صفحات $z=۰$ و $z=۱$ توسط نیروی $\vec{F}(x,y,z)=y\hat{i}+(۲x+y)\hat{j}+z\hat{k}$، کدام است؟

۱) ۸π ۲) صفر ۳) ۴π ۴) ۱۲π

پاسخنامه رشته‌ی MBA

۱ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌باشد، داریم:

$$\sqrt{۱+i\sqrt{۳}}=(۱+i\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}}=(۲e^{i\frac{\pi}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۶}}\to a=\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۶}$$

$$\sqrt{\sqrt{۳}-i}=(\sqrt{۳}-i)^{\frac{۱}{۲}}=(۲e^{\frac{-i\pi}{۶}})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}\to b=\sqrt{۲}\cos(-\frac{\pi}{۱۲})$$

پس $a^{۲}-b^{۲}$ برابر است با:

$$a^{۲}-b^{۲}=(\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۶})^{۲}-(\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۱۲})^{۲}=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}-۲(\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲})$$

با استفاده از رابطه $\cos^{۲}\theta=\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}$ داریم:

$$=\frac{۳}{۲}-۲(\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۶}}{۲})=\frac{۳}{۲}-۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌باشد و با توجه به اینکه فقط قسمت‌های حقیقی عبارت را از ما می‌خواهد، داریم:

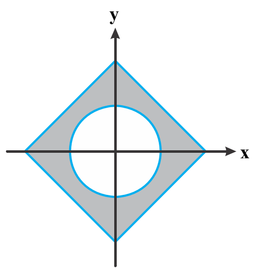
$$\cos\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۳}+\cos\frac{\pi}{۲}+\cos\frac{۲\pi}{۳}+\cos\frac{۵\pi}{۶}-۱$$

زوایای مکمل، کسینوس آنها قرینه هم می‌باشند و داریم:

$$\cos\frac{\pi}{۶}=-\cos\frac{۵\pi}{۶}\ ,\ \cos\frac{\pi}{۳}=-\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

پس حاصل عبارت برابر ۱- می‌باشد.

۳ـ گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌های مورد اشاره را رسم می‌کنیم:



A یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{۲}{\sqrt{\pi}}$ و B یک لوزی به مرکز مبدأ و به شکل مقابل است.

$$B-(A\cap B)=B-A$$

در واقع چون A کاملاً درون ناحیه B قرار دارد، اشتراک آنها برابر ناحیه کوچک‌تر بوده و مساحت ناحیه موردنظر برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}d^{۲}-\pi r^{۲}=\frac{۱}{۲}(۶)^{۲}-\pi(\frac{۴}{\pi})=۱۸-۴=۱۴$$

۴ـ گزینه «۴» با توجه به همگن بودن سکه قبل از حذف، نسبت فلز A و B در همه جا ۱ به ۱ است. در نتیجه با حذف x گرم، مقدار $\frac{x}{۲}$ گرم فلز A و $\frac{x}{۲}$ فلز B حذف می‌شود. حالا با اضافه کردن x گرم فلز A، جرم فلز دوباره ۱۰ گرم است اما جرم فلز A در آن $۵-\frac{x}{۲}+x$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{۵+\frac{x}{۲}}{۱۰}=\%۸۰\Rightarrow ۵+\frac{x}{۲}=۸\Rightarrow x=۶$$

۵ـ گزینه «۳» راه حل تشریحی: ابتدا باید داشته باشیم $\frac{x-3}{-x+1}>0$ ، یعنی $1<x<3$ (A) از طرفی باید $\mathrm{Ln}(\frac{x-3}{-x+1})\geq 0$ باشد یعنی $\frac{x-3}{-x+1}\geq 1$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{-x+1}-1=\frac{2x-4}{-x+1}=\frac{2(x-2)}{-x+1}\geq 0 \Rightarrow -1<x\leq 2 \quad (B)$$

با توجه به اشتراک A و B، دامنه تابع همان $1<x\leq 2$ است.

راه‌حل تستی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{Ln}(\frac{x-3}{-x+1})=\mathrm{Ln}(-1) \quad \times$$

پس تابع به هیچ نوع بی‌نهایتی نمی‌تواند میل کند. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۶ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه فاصله نقطه از صفحه داریم:

$$d=\frac{|4(1)+2\sqrt{2}(\sqrt{2})+5(3)-a|}{\sqrt{16+8+25}}=7 \Rightarrow |4+4+15-a|=7\sqrt{49}=49 \Rightarrow |23-a|=49 \Rightarrow \begin{cases}23-a=49 \Rightarrow a=-26\\ 23-a=-49 \Rightarrow \boxed{a=72}\end{cases}$$

۷ـ گزینه «۲» برای تشخیص اینکه در حالتهای مختلف منفی یا مثبت میل به سمت چپ عدد ۲- بهتر است یک عدد فرضی (مثلا ۲.۱-) را در نظر گرفته و با توجه به آن مقادیر جزء صحیح را تعیین کنید. در این صورت واضح است که داریم:

$$\lim_{x\to -2^-}\left(-\left[\frac{x}{2}\right]+\left[-\frac{2}{x}\right]\right)=-\left[\frac{(-2)^-}{2}\right]+\left[-\frac{2}{(-2)^-}\right]=-\left[(-1)^-\right]+\left[\frac{2}{2^+}\right]=-(-2)+0=2$$

۸ـ گزینه «۴» باید حد تابع در $x=0$ با مقدار آن در این نقطه برابر باشد؛ یعنی داریم: $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

با توجه به اینکه به ازای $x\to 0$ ، $\frac{1}{x}\to\infty$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}f(x)\sim\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{2ae^{2ax}}{1}=2a \Rightarrow 2a=-a+1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

۹ـ گزینه «۳» قبل از محاسبه مشتق موردنظر ابتدا تابع را به فرم مقابل ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right]$$

حالا با استفاده از مشتق مرتبه nام تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ که به صورت $y^{(n)}=n!(-c)^{n-1}\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}$ است داریم:

$$f^{(12)}(x)=\frac{1}{4}\left[12!(-1)^{11}\frac{-1}{(x-2)^{13}}-12!(-1)^{11}\frac{-1}{(x+2)^{13}}\right]$$

$$f^{(12)}(0)=\frac{12!}{4}\left[\frac{1}{(-2)^{13}}-\frac{1}{2^{13}}\right]=\frac{12!}{2^2}\left[\frac{-2}{2^{13}}\right]=\frac{-12!}{2^{14}}$$

۱۰ـ گزینه «۴» برای مشتق‌پذیر بودن تابع در $x=0$ باید ابتدا در $x=0$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases}f(0^+)=be^{\cos(0)}+1=be+1\\ f(0^-)=f(0)=e^0-a(0)=1\end{cases}\xrightarrow{\text{باید}} be+1=1 \Rightarrow b=0$$

اکنون باید مشتق چپ و راست را مساوی یکدیگر قرار دهیم:

$$\begin{cases}f'(0^+)=-b\sin xe^{\cos x}\xrightarrow{b=0}0\\ f'(0^-)=e^x-a\xrightarrow{x=0}e^0-a=0\end{cases}\to 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

پس $a-b=1$ می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $\cot gh\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ می‌باشد، داریم:

$$y=(\cot gh\,x)^2 \Rightarrow y'=2\cot gh\,x(1-\cot^2 gh\,x)=0$$

$$\cot gh\,x=0\ ,\ \cot^2 gh\,x-1=0 \Rightarrow \cot gh\,x=\pm 1$$

اگر: $\cot gh\,x=1 \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1 \Rightarrow e^x+e^{-x}=e^x-e^{-x} \Rightarrow 2e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=0$

مقدار e^{-x} هیچوقت برابر صفر نمی‌شود در نتیجه این معادله جواب ندارد.

اگر: $\cot gh\,x=-1 \Rightarrow \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=-1 \Rightarrow e^x+e^{-x}=-e^x+e^{-x} \Rightarrow 2e^x=0 \Rightarrow e^x=0$

مقدار e^x هیچوقت برابر صفر نمی‌شود در نتیجه این معادله جواب ندارد. این یعنی تابع داده شده فاقد نقطه بحرانی است.

۱۲ـ گزینه «۲» فقط کافی است دوبار از تابع داده‌شده مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم و ریشه‌های ساده مشتق دوم را بیابیم.

$$y=e^{-x^2}$$

$$y'=-2xe^{-x^2} \Rightarrow y''=-2e^{-x^2}-2x(-2xe^{-x^2})=0 \Rightarrow e^{-x^2}(-2+4x^2)=0 \Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

از آنجایی که مقدار عرض دو نقطه با هم برابر است، پس فاصله آنها برابر اختلاف مقدار طول آنها خواهد بود. یعنی داریم:

$$\text{فاصله}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$$

۱۳ـ گزینه «۳» با بازنویسی حد داده شده به صورت زیر آن را به یک حد مجموع ریمان تبدیل کرده و داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}+1\right)\sin\left(\frac{i}{n}-1\right)=\int_0^1 (x+1)\sin(x-1)\,dx$$

برای حل انتگرال فوق از جدول جزء‌به‌جزء داریم:

+	$x+1$	$\sin(x-1)$
−	1	$-\cos(x-1)$
	0	$-\sin(x-1)$

$$L=-(x+1)\cos(x-1)+\sin(x-1)\Big|_0^1$$
$$=\left[-(2)\cos(0)+\sin(0)\right]-\left[-(1)\cos(-1)+\sin(-1)\right]$$
$$=-2+0+\cos 1+\sin 1=\sin 1+\cos 1-2$$

۱۴ـ گزینه «۴» سؤال غلط است، اما راه‌حل مدنظر طراح (که البته از یک نکته غافل شده) به شرح مقابل می‌باشد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\,dx}{4\sin^2 x-\cos^2 x}$$

از مخرج کسر $\cos^2 x$ را فاکتور می‌گیریم و با توجه به اینکه $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ می‌باشد، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\,dx}{\cos^2 x\left(4\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 x)\tan x\,dx}{(4\tan^2 x-1)}$$

$$u=\tan x \to du=(1+\tan^2 x)dx \ , \ \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{u\,du}{4u^2-1}=\frac{u}{4u^2-1}=\frac{A}{2u-1}+\frac{B}{2u+1}=\frac{2u(A+B)+A-B}{4u^2-1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=\dfrac{1}{2} \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{4}$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2u-1}+\frac{1}{2u+1}\right)du$$

نکته: به ازای $u=\frac{1}{2}$ مخرج کسر اول صفر می‌شود و با توجه به این که توان u برابر ۱ می‌باشد، طبق نکته انتگرال‌های ناسره برای توان $p=1$ این انتگرال واگراست پس در کل این انتگرال واگراست و طراح از این موضوع غافل شده است!

۱۵ـ گزینه «۱» برای حل این سوال از قضیه گلدن پاپوس استفاده کرده و داریم:

$$V=2\pi dS=2\pi a(\pi a^2)=2\pi^2 a^3$$

در واقع d همان فاصله مرکز ثقل قرص (در اینجا همان مرکز دایره) از مماس بر دایره است که برابر همان شعاع دایره است. S نیز مساحت قرص به شعاع a خواهد بود.

۱۶ـ گزینه «۲» برای حل این سؤال ابتدا نقاط تقاطع آن با محورهای مختصات (حدود انتگرال) را به‌دست می‌آوریم:

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}=1\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow y=1\\ y=0\rightarrow x=1\end{cases}$$

حالا با بازنویسی معادله منحنی به فرم $y=(1-x^{\frac{1}{2}})^3$ و استفاده از رابطه حجم حاصل از دوران حول محور yها داریم:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx=\int_0^1 2\pi x(1-x^{\frac{1}{2}})^3dx=\int_0^1 2\pi x(1-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{2}}-x)dx$$

$$=2\pi\int_0^1(x-3x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{5}{3}}-x^2)dx=2\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{\frac{7}{3}}x^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{\frac{8}{3}}x^{\frac{8}{3}}-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{7}+\frac{9}{8}-\frac{1}{3}\right)=2\pi\left[\frac{1}{6}-9\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\right]=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{9}{28}\right)$$

$$\Rightarrow V=\pi\left(\frac{28-27}{3\times 28}\right)=\frac{\pi}{84}$$

۱۷ـ گزینه «۴» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a-1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(a-1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda))-(2-\lambda)=0=(2-\lambda)\left[(a-1-\lambda)(3-\lambda)-1\right]=0$$

چون $\lambda=2$ ریشه مضاعف این معادله می‌باشد پس علاوه بر عامل $(2-\lambda)$ که در خارج از کروشه است، عبارت داخل کروشه هم باید در $\lambda=2$ صفر شود، پس داریم:

$$\lambda=2\Rightarrow(a-3)(3-2)-1=0$$
$$a-3-1=0\Rightarrow a=4$$

پس ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$ می‌باشد.

جمع مقادیر ویژه ماتریس برابر است با جمع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، یعنی:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3+2+3\xrightarrow{\lambda_1=\lambda_2=2}2+2+\lambda_3=8\Rightarrow\lambda_3=4$$

۱۸ـ گزینه «۱» در واقع خواسته سؤال پیدا کردن مینیمم مقدار $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$ با شرط $z=x^2+y^2$ است. برای راحتی کار فقط عبارت زیر رادیکال را در نظر گرفته و با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2(x-1)}{2x}=\frac{2(y-1)}{2y}=\frac{2z}{-1}\Rightarrow x=y\ ,\ y=\frac{1}{1+2z}$$

با جایگذاری روابط بالا در شرط داده شده داریم:

$$z=x^2+y^2=2y^2=\frac{2}{(1+2z)^2}\Rightarrow(1+2z)^2z=2$$

$$4z^3+4z^2+z^2-2=0\Rightarrow(2z-1)\underbrace{(2z^2+3z+2)}_{>0}=0\Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=x\Rightarrow d=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه مشتق وارون، ابتدا نقطه متناظر $x=0$ از تابع معکوس را روی تابع اصلی پیدا می‌کنیم. برای این کار باید قرار دهیم $f(x)=0$ یعنی $\int_0^{\sinh x}\sqrt{4+t^2}dt=0$ با توجه به اینکه $\sinh x\geq 0$ و $\sqrt{4+t^2}>0$ فقط به ازای $\sinh x=0$ این انتگرال صفر می‌شود. پس داریم:

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x)=\cosh x\sqrt{4+\sinh^2 x}\Rightarrow f'(0)=1\sqrt{4+0}=2\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{1}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه طول قوس منحنی‌های پارامتری داریم:

$$L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}t\,dt=\frac{1}{2}t^2\Big)_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{2}=2\pi^2$$

۲۱ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه انحنای منحنی‌های پارامتری داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec r'(t)\times\vec r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

حال با توجه به معادله پارامتری منحنی، مشتق اول و دوم را استخراج و مقدار آن در نقطه مورد نظر را محاسبه می‌کنیم و با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\vec r(t)=(3\sin t,-(1+2t),3\cos t)$$

$$\vec r'(t)=(3\cos t,-2,-3\sin t)\ \Rightarrow \vec r'(\frac{\pi}{2})=(0,-2,-3)\qquad,\qquad \vec r''(t)=(-3\sin t,0,-3\cos t)\ \Rightarrow \vec r''(\frac{\pi}{2})=(-3,0,0)$$

$$\vec r'(t)\times\vec r''(t)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & -2 & -3\\ -3 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,9,-6)$$

$$\kappa=\frac{|(0,9,-6)|}{|(0,-2,-3)|^3}=\frac{\sqrt{81+36}}{(\sqrt{4+9})^3}=\frac{3\sqrt{13}}{13\sqrt{13}}=\frac{3}{13}$$

۲۲ـ گزینه «۲» با بازنویسی معادله سطح به صورت $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ واضح است که خواسته سؤال پیدا کردن کمترین فاصله نقطه $(\sqrt{3},3,-1)$ از کره موردنظر است. با قراردادن نقطه در معادله کره داریم: $(\sqrt{3})^2+(2)^2+(-3)^2=16>4$

پس نقطه موردنظر بیرون کره قرار دارد که در این حالت کمترین فاصله از کره برابر $d-R$ است که d فاصله نقطه از مرکز کره و R شعاع کره است. پس داریم:

$$d=\sqrt{16}=4\quad,\quad R=2\ \Rightarrow d-R=2$$

۲۳ـ گزینه «۴» بیشترین مقدار مشتق جهتی در هر نقطه در راستای بردار گرادیان تابع در آن نقطه حاصل می‌شود و مقدار آن همان مقدار بردار گرادیان در آن نقطه است؛ یعنی داریم:

$$\vec\nabla f(x,y,z)=(e^{yz^2},xz^2e^{yz^2}+z^2,2xyze^{yz^2}+2yz)$$

$$\vec\nabla f(1,0,-1)=(1,1+1,0)=(1,2,0)\ \Rightarrow D_{\vec u}f(1,0,-1)=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲۴ـ گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:

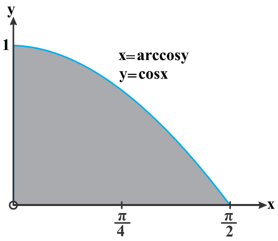
$$\left.\begin{aligned}f_x&=3x^2-3y^2-3=0\\ f_y&=-6y^2-6xy=-6y(y+x)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}y=0\ \Rightarrow x=\pm1 & \checkmark\\ y=-x\ \Rightarrow -3=0 & \times\end{cases}$$

حالا وضعیت دو نقطه $(-1,0),(1,0)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}f_{xx}&=6x\\ f_{yy}&=-12y-6x\\ f_{xy}&=-6y\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\Delta(1,0)=(6)(-6)-0^2=-36<0\\ &\Delta(-1,0)=(-6)(6)-0^2=-36<0\end{aligned}$$

پس هر دو نقطه زینی هستند.

۲۵ـ گزینه «۱» برای حل این انتگرال از تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم کرده و داریم:



با توجه به شکل واضح است که داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le y\le\cos x\\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

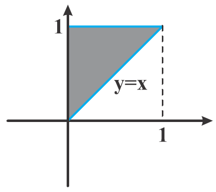
حالا در انتگرال اولیه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos x}\cos^2(\sin x)\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^2(\sin x)\,dx$$

با تغییر متغیر $\sin x=v$ آنگاه $\cos x dx=dv$ و لذا داریم:

$$\Rightarrow I=\int_0^1\cos^2u\,du=\int_0^1(\frac{1+\cos 2u}{2})du=\frac{1}{2}+(\frac{\sin 2u}{4})_0^1=\frac{1}{2}+(\frac{\sin 2}{4})$$

۲۶ـ گزینه «۳» برای حل این انتگرال با توجه به وجود y در مخرج توان عبارت نمایی باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم. در این صورت شکل زیر را داریم:



$$\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\int_x^1 e^{-\frac{x}{y}}dydx=\int_0^1\int_0^y e^{-\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1(-y)e^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^y dy=-\int_0^1 y(e^{-1}-1)dy=\frac{e-1}{e}\int_0^1 ydy=\frac{e-1}{2e}$$

۲۷ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه z به طور صریح برحسب x و y تعریف شده، $d\sigma$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

از طرفی تصویر ناحیه به صفحه xoy به صورت $1 \le x^2+y^2 \le 4$ است که فضای بین دو دایره به شعاع ۱و۲ و مرکزیت مبدأ مختصات است. پس با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$S=\iint d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta=2\pi\frac{2}{8\times 3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}}]$$

۲۸ـ گزینه «۱» با توجه به بسته بودن منحنی C، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(2+e^y\sin x-e^y\sin x-6y)dA=\iint_D(2-6y)dxdy$$

با توجه به اینکه ناحیه انتگرال سطح داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{\pi}{2}$ و بالای محور xهاست با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-6r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2r-6r^2\sin\theta)drd\theta=\int_0^{\pi}(r^2-2r^3\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\int_0^{\pi}(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^3}{4}\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi^3}{4}+(\frac{\pi^3}{4}\cos\theta)_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi^3}{4}(-1-1)=-\frac{\pi^3}{4}$$

۲۹ـ گزینه «۴» مقدار کار انجام شده $-\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ است. علامت منفی به خاطر حرکت در جهت عقربه‌های ساعت است. برای حل این انتگرال ابتدا فرم پارامتری منحنی C را به دست می‌آوریم. برای این کار داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow (z-1)(z+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=1 & \checkmark \\ z=-2 & \times \end{cases}$$

پس منحنی موردنظر به فرم $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ است. برای یک دور کامل این منحنی به صورت پارامتری داریم:

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=1 \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

حالا با جایگذاری داریم:

$$\vec{F}(t)=(\cos t+\sin t,\sin t+1,\cos t+1)$$

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,1) \Rightarrow d\vec{r}(t)=(-\sin t,\cos t,0)dt$$

$$\Rightarrow \vec{F}.d\vec{r}=(-\sin t\cos t-\sin^2 t+\sin t\cos t+\cos t)\,dt=(\cos t-\frac{1-\cos 2t}{2})\,dt$$

$$\Rightarrow W=\int_0^{2\pi}-(\cos t-\frac{1-\cos 2t}{2})\,dt=-(\sin t-\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})_0^{2\pi}=+\pi$$

۳۰ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه طبق گفته سؤال سطح مورد اشاره باز است، برای استفاده از قضیه دیورژانس ابتدا دو سطح $z=0$ و $z=1$ را به آن اضافه کرده و داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\underbrace{\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_1}-\underbrace{\iint_{z=1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_2}$$

$$I'=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D(\text{div}\vec{F})\,dv=\iiint(0+1+1)dv=2V_D$$

که D حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۱ است که برابر $\pi(4)(1)$ است. یعنی:

$$I'=2(4\pi)=8\pi$$

حالا برای دو سطح $z=0$ و $z=1$ داریم:

$$z=0\Rightarrow \vec{n}d\sigma=(0,0,-1)\,dA$$

$$x^2+y^2=4\Rightarrow\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(y,2x+y,0).(0,0,-1)\,dA=0\Rightarrow I_1=0$$

$$z=1\Rightarrow \vec{n}d\sigma=(0,0,1)\,dA$$

$$x^2+y^2=4\Rightarrow\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 3\pi\end{cases}$$

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(y,2x+y,1).(0,0,1)\,dA=1dA$$

$$I_2=\iint_{z=1}1dA=A=\pi(2)^2=4\pi\Rightarrow I=I'-I_1-I_2=8\pi-0-4\pi=4\pi$$

سؤالات رشته‌ی عمران

۱ـ حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ، کدام است؟

۱) $e^{\frac{1}{6}}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) ۱ ۴) $e^{\frac{1}{3}}$

۲ـ شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^2(1-x)^n$ ، کدام است؟

۱) $R=1,(0,2)$ ۲) $R=\frac{1}{2},(0,1]$ ۳) $R=1,(0,2]$ ۴) $R=1,(-2,0)$

۳ـ حاصل انتگرال $\int_1^2\frac{(x^2-1)}{x^3+x}dx$ ، کدام است؟

۱) $\text{Ln}\frac{5}{4}$ ۲) $\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۳) $\text{Ln}\frac{4}{5}$ ۴) $\text{Ln}\frac{25}{16}$

۴ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}\right)\text{Ln}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ ، کدام است؟

۱) $2\text{Ln}2+\frac{1}{4}$ ۲) $2\text{Ln}2-\frac{3}{4}$ ۳) واگراست. ۴) $2\text{Ln}2-\frac{5}{4}$

۵ـ مساحت بین دو نمودار $8y=x^2$ و $x=y^2$ ، کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{8}{3}$

۶ـ در تابع دو متغیره $z=x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ، حاصل xz_x+yz_y به‌ازای $x=\sqrt{3}$ و $y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۷ـ کدام گزینه درباره نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-x^2y^2$ ، درست است؟

۱) فقط یک نقطه زینی دارد. ۲) فقط یک مینیمم نسبی دارد. ۳) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد. ۴) نقطه بحرانی ندارد.

۸ـ حاصل $\int_0^1\int_0^{\sin x}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dydx$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۹ـ حجم ناحیه بالای صفحه xy محصور شده بین $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2=4$ ، کدام است؟

۱) 4π ۲) 16π ۳) 2π ۴) 8π

۱۰ـ حاصل انتگرال $\iint(x+1)^2y^2dxdy$ ، که در آن D ناحیه محدود به خطوط $y=x$ ، $y=-x$ و $x=1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{41}{90}$ ۲) $\frac{49}{90}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱- گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^{∞} مبهم است. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin^{-1}x-x}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{6}-x}{x^3}} = e^{\frac{1}{6}}$$

۲- گزینه «۳» بازه همگرایی در سری‌های توانی به فرم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n$ یک بازه متقارن به مرکز $x=c$ است، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. حالا کافیست وضعیت همگرایی سری در $x=2$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right](-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times 2n}{(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2}\right](-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right](-1)^n$$

با توجه به اینکه سری حاصل متناوب است، شروط همگرایی آن را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right]^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}2\pi n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi n}} = 0$$

از طرفی از هم‌ارزی فوق می‌توان فهمید که دنباله مورد نظر نزولی نیز هست، پس سری به ازای $x=2$ متناوب همگراست و گزینه (۳) صحیح است.

۳- گزینه «۱» برای حل این انتگرال به صورت زیر کسر داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$I=\int_1^2\frac{(x^2-1)}{x^3+x}dx=\int_1^2\frac{(x^2-1)}{x(x^2+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx=\int_1^2\left[\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\right]dx \Rightarrow \begin{cases}A=-1\\ C=0\\ B=2\end{cases}$$

$$I=\int_1^2\left(\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left[-\mathrm{Ln}x+\mathrm{Ln}(x^2+1)\right]_1^2=\mathrm{Ln}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)_1^2=\mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{1}}\right)=\mathrm{Ln}\frac{5}{4}$$

۴- گزینه «۲» حد داده شده را به فرم روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

این حد یک مجموع ریمان است که به‌صورت انتگرال روبه‌رو قابل حل است:

$$S=\int_0^1(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)\,dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases}u=\mathrm{Ln}(1+x)\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x}\\ (1+x)dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{2}(1+x)^2\end{cases}\Rightarrow S=uv-\int v\,du$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}(1+x)^2\mathrm{Ln}(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}(1+x)dx=\frac{1}{2}4\mathrm{Ln}2-\frac{1}{4}(1+x)^2\Big|_0^1=2\mathrm{Ln}2-\frac{1}{4}(4-1)=2\mathrm{Ln}2-\frac{3}{4}$$

۵- گزینه «۴» ابتدا دو نمودار را با هم تقاطع می‌دهیم تا بازه انتگرال را به‌دست آوریم:

$$x=y^2=\left(\frac{1}{8}x^2\right)^2=\frac{1}{64}x^4\Rightarrow\frac{1}{64}x^4-x=0\Rightarrow x\left(\frac{x^3}{64}-1\right)=0\Rightarrow x=0,4$$

مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=\int_a^b(y_2-y_1)dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}x^2\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{24}x^3\Big)_0^4=\frac{2}{3}(8)-\frac{1}{24}(64)=\frac{8}{3}$$

۶- گزینه «۲» تابع z همگن از درجه ۲ است، در نتیجه با استفاده از قضیه اویلر داریم:

$$xz_x + yz_y = 2z = 2x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} = 2(3)\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 6(\frac{\pi}{6}) = \pi$$

۷- گزینه «۱» با محاسبه مشتقات جزئی و نقاط بحرانی تابع داریم:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 2xy^2 = 0 \\ f_y = -2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = x(3x - 2y^2) = 0 \\ f_y = -2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

حالا مبین دلتا را در تنها نقطه بحرانی تابع بررسی می‌کنیم:

$$f_{xx} = 6x - 2y^2$$
$$f_{xy} = -4xy$$
$$f_{yy} = -2x^2$$
$$\Delta = (6x - 2y^2)(-2x^2) - (-4xy)^2 = -2x^2(6x - 2y^2) - 16x^2y^2 = -2x^2(6x - 10y^2)$$

با توجه به اینکه مبین دلتا در مبدأ صفر است، نمی‌توان نوع نقطه را به صورت مستقیم مشخص کرد. در نزدیکی مبدأ f_{yy} همواره نامثبت است، اما f_{xx} تغییر علامت می‌دهد؛ مثلاً در $(2\varepsilon,0)$ (ε یک عدد فوق‌العاده کوچک مثبت است) داریم $f_{xx} > 0$ و در $(-2\varepsilon,0)$ داریم $f_{xx} < 0$. پس مبدأ مختصات یک نقطه زینی این تابع است.

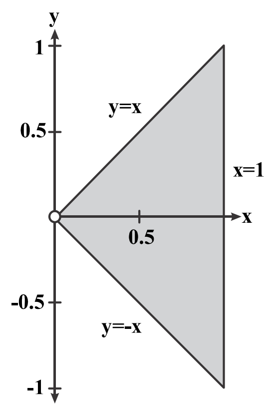
۸- گزینه «۳» انتگرال داده شده به راحتی با استفاده از روابط اصلی انتگرال قابل حل است و داریم:

$$I = \int_0^1\int_0^{\sin x}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dydx = \int_0^1 x\mathrm{Arcsin}\, y)_0^{\sin x}dx = \int_0^1 x(\underbrace{\mathrm{Arcsin}(\sin x)}_{=x} - 0)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3)_0^1 = \frac{1}{3}$$

۹- گزینه «۴» برای محاسبه این حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. تصویر ناحیه بر صفحه xoy، دایره $x^2 + y^2 = 4$ است. پس داریم:

$$V = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} rdzdrd\theta = (2\pi)\int_0^2 r^3dr = \frac{2\pi}{4}r^4)_0^2 = 8\pi$$

۱۰- گزینه «۲» ابتدا ناحیه مورد اشاره را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل واضح است که ناحیه و تابع زیر انتگرال هر دو نسبت به متغیر y متقارن هستند، پس کافی است مقدار انتگرال را فقط برای نیمه واقع در ربع اول محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم. پس داریم:

$$I = \iint_D (x+1)^2y^2dxdy = 2\iint_{D^+} y^2(x+1)^2dydx = 2\int_0^1\int_0^x y^2(x+1)^2dydx = 2\int_0^1\frac{1}{3}x^3(x+1)^2dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3(x^2+2x+1)dx = \frac{2}{3}\int_0^1(x^5+2x^4+x^3)dx$$
$$= \frac{2}{3}(\frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4})_0^1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}(\frac{49}{60}) = \frac{49}{90}$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ـ اگر A مجموعه جواب‌های معادله $z^{1401}+\frac{1}{z^{1401}}=2\cos(1401\pi)$ باشد، آنگاه مجموعه $\left\{z+\frac{1}{z}: z\in A\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۷۰۱ ۲) ۲۸۰۲ ۳) ۷۰۰ ۴) ۱۴۰۱

۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$، کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) -1 ۴) 1

۳ـ به‌ازای کدام بازه از مقادیر θ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}\theta}{n}$، همگرای مطلق است؟

۱) $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ۲) $\left[\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$ ۳) $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ ۴) $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$

۴ـ ضریب x^{20} در سری مک‌لورن تابع $y=\sqrt{1+x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2^{20}}\frac{19!}{(10!)^2}$ ۲) $-\frac{1}{2^{19}}\frac{18!}{9!\times 10!}$ ۳) $\frac{1}{2^{19}}\frac{19!}{9!\times 10!}$ ۴) $-\frac{1}{2^{19}}\frac{19!}{(10!)^2}$

۵ـ حاصل $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(\ln x)dx$، کدام است؟

۱) $e^{\frac{\pi}{2}}-1$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ ۴) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

۶ـ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه از محل تقاطع رویه‌های $x-y+2z=\frac{3}{8}$, $z=2x^2+2y^2$ به مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{3\sqrt{7}}{16}$

۷ـ مساحت رویهٔ حاصل از دوران بخشی از منحنی $r^2=a^2\cos 2\theta\,;(a>0)$ که در ربع اول صفحه مختصات قرار دارد، حول محور y ها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۲) $2\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) πa^2 ۴) $2\pi a^2$

۸ـ صفحهٔ مماس بر رویهٔ S به معادلهٔ $xy^2z^3=4$ در نقطهٔ $(1,2,1)$ کدام است؟

۱) $x+3y+z=8$ ۲) $3x+y+3z=8$ ۳) $x+y+3z=6$ ۴) $3x+y+z=6$

۹ـ حاصل $\iint_R(x^2-xy+y^2)dA$ که در آن R در ناحیه اول محصور به بیضی $x^2-xy+y^2=2$ است، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

۱۰ـ حاصل $\iint_S \operatorname{curl}(\vec{F})\cdot\vec{n}d\sigma$ که در آن S رویه $(x\geq 0)$; $x^2+y^2+2(z-1)^2=6$ و $\vec{n}$ بردار نرمال رویهٔ S است و $\vec{F}(x,y,z)=(xz-y^3\cos z)\,\vec{i}+x^3e^z\vec{j}+xyze^{x^2+y^2+z^2}\vec{k}$، کدام است؟

۱) 8π ۲) 24π ۳) 4π ۴) 16π

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱- گزینه «۱» با توجه به این‌که $\cos(1401\pi)=\cos(\underbrace{1400\pi}_{0}+\pi)=-1$ می‌باشد، داریم:

$$z^{1401}+\frac{1}{z^{1401}}=-2\xrightarrow{z^{1401}=t}t+\frac{1}{t}=-2\Rightarrow t^2+2t+1=0\Rightarrow(t+1)^2=0\Rightarrow t=-1$$

پس داریم:

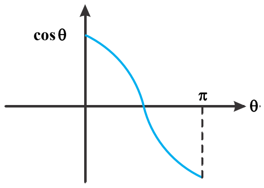
$$z^{1401}=-1=e^{i\pi}=e^{i(\pi+2k\pi)}\Rightarrow e^{1401\theta i}=e^{i(\pi+2k\pi)}=\theta=\frac{(2k+1)\pi}{1401}$$

اکنون $z+\frac{1}{z}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$$

برای آن‌که معادله جواب‌های تکراری نداشته باشد، باید بازه‌ایی را برای $\cos\theta$ انتخاب کنیم که $\cos\theta$ در آن بازه یک به یک باشد، یعنی:

$$0 \le \theta \le \pi$$



پس داریم:

$$0 \le (2k+1)\frac{\pi}{1401} \le \pi \Rightarrow 0 \le 2k+1 \le 1401$$

$$\Rightarrow -1 \le 2k \le 1400 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le k \le 700 \Rightarrow k = 0,1,2,\dots,700$$

که این مجموعه با احتساب عدد صفر ۷۰۱ عضو دارد.

۲ـ گزینه «۴» حد داده شده به فرم 1^{∞} مبهم است؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$L = \lim_{n\to\infty} (\cos\frac{\pi}{n})^n = 1^{\infty} = e^{\lim_{n\to\infty} n(\cos\frac{\pi}{n}-1)}$$

حالا حد $\lim_{n\to\infty} n(\cos\frac{\pi}{n}-1)$ که به فرم $0\times\infty$ مبهم است به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} n(\cos\frac{\pi}{n}-1) \sim \lim_{n\to\infty} n(1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2-1) = \lim_{n\to\infty} -\frac{\pi^2}{2n} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

۳ـ گزینه «۳» برای شرط همگرایی مطلق تابع توانی داده شده باید $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1}\frac{2^n \sin^{2n}\theta}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \sin^{2n}\theta}{n}$ همگرا باشد. برای بررسی همگرایی این سری با کمک آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(\theta,n)|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}\sin^{2n}\theta} = \lim_{n\to\infty} 2\sin^2\theta < 1 \Rightarrow \sin^2\theta < \frac{1}{2} \Rightarrow |\sin\theta| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. برای تشخیص گزینه صحیح فقط کافی است یکی از نقاط سر بازه را که در گزینه‌ها یکسان نیست، بررسی کنیم:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \sin^{2n}\theta}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

می‌دانیم که سری هارمونیک بدست آمده واگراست، پس گزینه (۳) صحیح است.

۴ـ گزینه «۲» با استفاده از بسط مک‌لورن تابع $(1+u)^k$ داریم:

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(x^2)^n$$

$$x^{20} \Rightarrow n = 10 \Rightarrow a_{10} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)(\frac{1}{2}-5)(\frac{1}{2}-6)(\frac{1}{2}-7)(\frac{1}{2}-8)(\frac{1}{2}-9)}{10!}$$

$$a_{10} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(-\frac{11}{2})(-\frac{13}{2})(-\frac{15}{2})(-\frac{17}{2})}{10!} = \frac{-1\times3\times5\times\cdots\times17}{2^{10}(10!)} = -\frac{\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\times17\times18}{2\times4\times6\times\cdots\times18}}{2^{10}(10!)}$$

$$a_{10} = -\frac{\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\times17\times18}{2^9(1\times2\times3\times\cdots\times9)}}{2^{10}(10!)} = -\frac{1}{2^{19}}\frac{18!}{9!\times10!}$$

۵ـ گزینه «۳» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $Lnx = u$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(Lnx)dx$$

$$Lnx = u \Rightarrow \begin{cases} x = e^u \Rightarrow dx = e^u du \\ x = 1 \Rightarrow u = 0 \;,\; x = e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس انتگرال برحسب متغیر u به صورت مقابل خواهد بود:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)(e^u du)$$

برای حل انتگرال حاصل نیز کافی است دو بار از روش جزءبه‌جزء استفاده کنیم یا از این نکته زیر کمک بگیریم که:

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

پس به راحتی داریم:

$$I = \frac{e^u}{1+1}(\cos u + \sin u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

البته در صورتی که رابطه انتگرال فوق را به خاطر نداشته باشید، می‌توانید از جدول جزء به جزء به صورت زیر استفاده نمایید:

+	e^u	$\cos u$
−	e^u	$\sin u$
+	e^u	$-\cos u$

$$I = e^u \sin u + e^u \cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^u \cos u du \Rightarrow I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + (-I) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

۶ـ گزینه «۱» اگر دقت کنید، با فرض اینکه هر نقطه از منحنی تقاطع دو رویه به‌صورت (x,y,z) باشد، خواسته سؤال پیدا کردن مینیمم مقدار $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ با شروط $x - y + 2z = \frac{3}{8}$ و $z = 2x^2 + 2y^2$ است. برای سادگی کار ابتدا دو شرط را با هم ادغام می‌کنیم و همچنین فقط عبارت زیر رادیکال را مینیمم می‌کنیم و خود رادیکال را در محاسبات دخالت نمی‌دهیم:

$$C: x - y + 2(2x^2+2y^2) = \frac{3}{8}$$

$$D = x^2 + y^2 + (2x^2+2y^2)^2$$

حالا برای تابع دو متغیره D و شرط حاصل از روش ساده شده لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{C_x}{D_x} = \frac{C_y}{D_y} \Rightarrow \frac{1+8x}{2x+8x(2x^2+2y^2)} = \frac{-1+8y}{2y+8y(2x^2+2y^2)} \Rightarrow 2y = -2x \Rightarrow y = -x$$

$$C: x-(-x)+2(2x^2+2(-x)^2) = \frac{3}{8} \Rightarrow 8x^2 + 2x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{8}, -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right) \;,\; B\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}\right)$$

از بین دو نقطه حاصل واضح است که نقطه A به مبدأ نزدیک‌تر است. فاصله موردنظر برابر است با:

$$d = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}} = \sqrt{\frac{9}{256}} = \frac{3}{16}$$

۷ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور yها داریم:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r\cos\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \Rightarrow r = a\sqrt{|\cos 2\theta|}$$

از آنجایی که $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ است، $0 \le \cos 2\theta \le 1$ خواهد بود و نیازی با قدرمطلق ندارد. در نتیجه داریم:

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \Rightarrow r' = \frac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \Rightarrow r^2 + r'^2 = a^2\cos 2\theta + \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{a^2\cos^2 2\theta + a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{|\cos 2\theta|}\cos\theta \sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\theta}}\, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos\theta\, d\theta = 2\pi a^2 \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi a^2$$

۸ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه مماس، در راستای بردار گرادیان در نقطه تماس است. در نتیجه داریم:

$$f(x,y,z)=xy^2z^3-4=0$$
$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)\xrightarrow{(1,2,1)}\vec{\nabla}f(1,2,1)=(4,4,12)\parallel(1,1,3)$$

واضح است که گزینه (۳) صحیح است.

۹ـ گزینه «۴» ابتدا با تغییر متغیر $x=u+v$ و $y=u-v$ معادله مرزهای ناحیه جدید D در صفحه uov را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-xy+y^2=2\Rightarrow(u+v)^2-(u+v)(u-v)+(u-v)^2=2u^2+2v^2-(u^2-v^2)=u^2+3v^2=2$$

با توجه به اینکه x و y را برحسب u و y داریم، مستقیماً J_{uv} را محاسبه کرده و داریم:

$$J_{uv}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\ \Rightarrow dA=|-2|\,dudv$$
$$x,y\geq 0\ \Rightarrow -v\leq u\leq v$$
$$I=\iint_R(x^2-xy+y^2)\,dA=\iint_D(u^2+3v^2)2dudv$$

حالا ناحیه انتگرال‌گیری محدود به بیضی $\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{\frac{2}{3}}=1$ در ناحیه اول است. با تغییر متغیر $\begin{cases}X=\frac{u}{\sqrt{2}}\\ Y=\frac{v}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\end{cases}$ معادله بیضی به $X^2+Y^2=1$ تبدیل می‌شود که قوس آن محدود به زوایای $-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ است (D').

$$J_{XY}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(X,Y)}=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow dudv=\frac{2}{\sqrt{3}}dXdY$$
$$-v\leq u\leq v\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}Y\leq\sqrt{2}X\leq\sqrt{\frac{2}{3}}Y\ \Rightarrow -\frac{Y}{\sqrt{3}}\leq X\leq\frac{Y}{\sqrt{3}}$$
$$I=\iint_D(u^2+3v^2)2dudv=\iint_{D'}(2X^2+2Y^2)2(\frac{2}{\sqrt{3}})\,dXdY$$

برای حل این انتگرال با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1(r^2)rdrd\theta=\frac{8}{\sqrt{3}}(\frac{2\pi}{3})(\frac{r^4}{4})_0^1=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$

۱۰ـ گزینه «۲» بهتر است از نتیجه‌ی قضیه استوکس کمک بگیریم. یعنی به جای اینکه روی سطح S انتگرال سطح را حساب کنیم، روی سطح $z=0$ که دارای مرز مشترک با این رویه است، انتگرال سطح را حساب کنیم.

اولاً توجه کنید که بر روی سطح $z=0$ بردار قائم یکه $\vec{n}=\pm\vec{k}$ است و چون در نتیجه‌ی قضیه استوکس جهت بردار قائم یکه بر سطح جدید، با جهت بردار قائم یکه سطح اصلی یکسان است، پس $\vec{n}=+\vec{k}$ است. حالا باید $\text{curl}\vec{F}$ را حساب کنیم؛ اما قبل از آن توجه کنید که چون $\text{curl}\vec{F}$ قرار است در $\vec{n}=\vec{k}$ ضرب شود، پس مؤلفه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ آن به درد ما نمی‌خورد و در محاسبه‌ی $\text{curl}\vec{F}$ فقط مؤلفه‌ی سوم را حساب می‌کنیم. (این‌کار، برای کاهش حجم محاسبات و ذخیره زمان در روز آزمون صورت می‌گیرد!)

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz-y^3\cos z & x^3e^z & xyze^{x^2+y^2+z^2}\end{vmatrix}=(\text{هر چی})\vec{i}+(\text{هر چی})\vec{j}+3(x^2e^z+y^2\cos z)\vec{k}\xrightarrow{z=0}\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=3(x^2+y^2)\,dA$$

حالا باید مقدار $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را در انتگرال جایگذاری کنیم و روی ناحیه D انتگرال را حساب کنیم، اما قبل از آن بهتر است تکلیف ناحیه D را معلوم کنیم که کار راحتی است. کافی است در معادله‌ی S به جای z، عدد صفر را قرار دهیم: $x^2+y^2+2(0-1)^2=6\Rightarrow x^2+y^2=4$

پس D دایره‌ای به شعاع ۲ است.

$$\iint_S\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D3(x^2+y^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2(rdrd\theta)=\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^3dr=2\pi[\frac{3r^4}{4}]_0^2=24\pi$$

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱ـ دامنه تابع $f(x)=\log\frac{2-x}{x\sqrt{x^2-2x+2}}$، کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-\infty,2)$

۲ـ مساحت رویه دوار حاصل از دوران منحنی $y=\sin^3 t$ و $x=2\cos^3 t$، حول محور xها کدام است؟

۱) 6π ۲) $\frac{24\pi}{5}$ ۳) 12π ۴) $\frac{48\pi}{5}$

۳ـ مساحت کل ناحیه بسته درون منحنی قطبی $r=\cos 2\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴ـ حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور به محور yها و یک طاق از منحنی $x=1-\cos t$ و $y=t-\sin t$، حول محور yها، کدام است؟

۱) $4\pi^2$ ۲) $5\pi^2$ ۳) $6\pi^2$ ۴) $7\pi^2$

۵ـ در کدام بازه سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{3^n \operatorname{Ln} n}$، همگرای مطلق است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $[-1,2)$ ۳) $(-1,2]$ ۴) $[-1,2]$

۶ـ اگر $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1-2x)\operatorname{Ln}(1-x^3)}{(1-\cos 3x)^n}=a$ باشد، مقدار $\frac{a}{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{-16\sqrt{2}}{5\times 3^5}$ ۲) $\frac{8\sqrt{2}}{5\times 3^5}$ ۳) $\frac{16\sqrt{2}}{3^5}$ ۴) $\frac{-8\sqrt{2}}{5\times 3^5}$

۷ـ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$، مقدار $f_{yx}(0,0)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) وجود ندارد.

۸ـ مقدار مشتق سویی مرتبه دوم تابع $f(x,y)=x^2e^{(xy)}$، در نقطه $(1,0)$ در سویی که با جهت مثبت محور xها زاویه ۴۵ درجه می‌سازد، کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{2}$

۹ـ فرض کنید $A=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^k}$، به ازای کوچک‌ترین مقدار صحیح ممکن برای k همگرا باشد، مقدار A کدام است؟ ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است.)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{2\pi}{2}$

۱۰ـ فرض کنید S سطح واقع بر کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ باشد، که در بالای صفحه xy قرار گرفته است. اگر میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=y^2\cos(xz)\hat{i}+x^3e^{(yz)}\hat{j}-e^{-(xyz)}\hat{k}$، از سطح S گذر کند، مقدار $\iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}.\hat{n}dS$ کدام است؟ ($\hat{n}$ بردار قائم یکه برونسو بر سطح S است.)

۱) 8π ۲) 10π ۳) 12π ۴) 16π

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» برای تعیین دامنه این تابع به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$y=\log\frac{2-x}{x-\sqrt{x^2-2x+2}}=\log\frac{2-x}{x-\sqrt{(x-1)^2+1}}$$

$$\frac{2-x}{x-\sqrt{x^2-2x+2}}>0\Rightarrow\frac{(2-x)(x+\sqrt{x^2-2x+2})}{x^2-(x^2-2x+2)}=\frac{(2-x)(x+\sqrt{x^2-2x+2})}{2(x-1)}>0$$

درخصوص عبارت $\sqrt{x^2-2x+2}$ توجه داشته باشید که عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است. پس فقط باید نامساوی اخیر را تعیین علامت کنیم. با توجه به اینکه عبارت $x+\sqrt{x^2-2x+1}$ را می‌توان به‌صورت $(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+1}+1$ نوشت، واضح است این عبارت همواره مثبت است. پس فقط داریم:

$$\frac{(2-x)}{2(x-1)}>0\Rightarrow x\in(1,2)$$

۲- گزینه «۴» با استفاده از رابطه مساحت حاصل از دوران منحنی‌های پارامتری حول محور xها داریم:

$$S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

برای تعیین حدود انتگرال، توجه داشته باشید که چون معادله منحنی را می‌توان به‌صورت $(\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{2})^{\frac{2}{3}}=1$ نوشت و در این معادله تغییر x به $-x$ و y به $-y$ معادله را تغییر نمی‌دهد، پس منحنی نسبت به همه محورهای متقارن است و مساحت رویه حاصل از دوران نیمه بالایی منحنی بر مساحت حاصل از نیمه پایینی منطبق می‌شود و کافی است فقط نیمه بالایی که به‌ازای $0\le t\le\pi$ به‌دست می‌آید را تعیین کنیم.

از طرفی مساحت قسمت مربوط به $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ نیز با مساحت متناظر با قسمت $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$ برابر خواهد بود، در نتیجه کافی است مساحت حاصل از دوران منحنی در ربع اول را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم:

$$S=2\times2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3t\sqrt{(-6\sin t\cos^2t)^2+(6\cos t\sin^2t)^2}dt=48\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\sqrt{(\sin t\cos t)^2(\underbrace{\cos^2t+\sin^2t}_{=1})}dt$$

$$=48\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t(\sin t\cos t)dt=48\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t(\cos t dt)=\frac{48\pi}{5}\sin^5t)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{48\pi}{5}$$

۳- گزینه «۳» منحنی مورد اشاره یک رز ۴ برگ است که با توجه به تقارن شکل کافی است مساحت محصور به وسیله منحنی در فاصله $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل انتگرال را در ۸ ضرب کنیم.

$$S=8\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos4\theta}{2}d\theta=2(\theta+\frac{1}{4}\sin4\theta)_0^{\frac{\pi}{4}}=2(\frac{\pi}{4}+0)=\frac{\pi}{2}$$

۴- گزینه «۲» با توجه به رابطه حجم حاصل از دوران یک منحنی پارامتری حول محور yها داریم:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$

ابتدا باید حدود انتگرال را تعیین کنیم. برای این‌کار با توجه به اینکه از تقاطع با محور yها به $x=0$ یا به عبارتی به $t=0,2\pi$ می‌رسیم. در نتیجه داریم:

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(1-\cos t)dt=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)dt$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}[1-3\cos t+3(\frac{1+\cos2t}{2})-(\frac{\cos3t+3\cos t}{4})]dt=\pi\int_0^{2\pi}[\frac{5}{2}-3\cos t+\frac{3\cos2t}{2}-(\frac{\cos3t+3\cos t}{4})]dt=\pi\times\frac{5}{2}\times2\pi=5\pi^2$$

۵- گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه بازی همگرایی نیست و فقط کافی است وضعیت همگرایی سری در دو سر بازه را بررسی کنیم:

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\operatorname{Ln}n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{Ln}n}$$

$$x=2\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(3)^n}{3^n\operatorname{Ln}n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{Ln}n}$$

با توجه به اینکه قدرمطلق عبارت درون سری به‌صورت $\frac{1}{\operatorname{Ln}n}$ بوده و این سری همواره واگراست، پس دو سر بازه باید باز باشد و گزینه (۱) صحیح است.

۶- گزینه «۱» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. برای اینکه این حد را رفع ابهام کنیم، ابتدا به صورت زیر بسط توابع صورت و مخرج را می‌نویسیم:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\cdots-1-2x)(-x^3-\frac{x^6}{2}-\cdots)}{(1-1+\frac{(3x)^2}{2}-\cdots)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{(2x)^2}{2}+\cdots)(-x^3-\frac{x^6}{2}-\cdots)}{(\frac{(3x)^2}{2}-\cdots)^n}$$

با توجه به هم‌ارزی توابع چندجمله‌ای در همسایگی $x=0$، حد فوق به‌صورت $\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2)(-x^3)}{(\frac{9x^2}{2})^n}$ خواهد بود. برای همگرایی این حد به عددی حقیقی غیر از صفر، باید توان x در صورت و مخرج برابر باشد. یعنی $5=2n \Rightarrow n=\frac{5}{2}$ پس حد نهایی به‌صورت زیر است و داریم:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^5}{(\frac{9}{2})^{\frac{5}{2}}x^5}=\frac{-2\times 2^{\frac{5}{2}}}{(3^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-2\times 4\sqrt{2}}{3^5}=\frac{-8\sqrt{2}}{3^5}\Rightarrow \frac{a}{n}=\frac{\frac{-8\sqrt{2}}{3^5}}{\frac{5}{2}}=\frac{-16\sqrt{2}}{5\times 3^5}$$

۷- گزینه «۲» ابتدا f_y را در همه نقاط به دست می‌آوریم، توجه کنید که برای محاسبه این مقادیر در مبدأ باید از تعریف استفاده کنیم چون ضابطه تابع f در مبدأ تغییر می‌کند. ولی برای محاسبه f_y در سایر نقاط فقط کافی است از ضابطه داده شده مشتق بگیریم:

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y=\begin{cases}\dfrac{2x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حال اگر f_y به دست آمده در بالا را به‌عنوان یک تابع بر x و y در نظر بگیریم، می‌توانیم مشتق جزئی آن را نسبت به x در مبدأ محاسبه کنیم.

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-0}{h}=2$$

۸- گزینه «۴» ابتدا مشتق سویی مرتبه اول f را در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ به‌دست می‌آوریم. یکه شده بردار جهت مورد اشاره به‌صورت $\vec{u}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ است، بنابراین داریم:

$$D_{\vec{u}}f(p)=\vec{\nabla}f.\vec{u}=((2x+yx^2)e^{xy},x^3e^{xy})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x+yx^2+x^3)e^{xy}$$

قرار می‌دهیم $g=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x+yx^2+x^3)e^{xy}$ در این صورت برای به‌دست اوردن مشتق سویی مرتبه دوم f کافی است $D_{\vec{u}}g(p)$ را به‌دست آوریم:

$$D_{\vec{u}}g(p)=\vec{\nabla}g.\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}((2+4xy+3x^2+y^2x^2+yx^3)e^{xy},(3x^2+yx^3+x^4)e^{xy}).\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=\frac{1}{2}(2+4xy+6x^2+y^2x^2+2yx^3+x^4)e^{xy}$$

که در نقطه $(1,0)$ مقدار مشتق سویی فوق برابر $\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(2+0+6+0+0+1)e^0$ است.

۹- گزینه «۳» ابتدا انتگرال داده شده را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^k}drd\theta=2\pi\int_0^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^k}dr$$

باید وضعیت ناسرگی انتگرال در دو سر بازه انتگرال را بررسی کنیم. برای این‌کار ابتدا آن را به‌صورت $\underbrace{\int_0^1\frac{r}{(r^2+1)^k}dr}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^k}dr}_{I_2}$ می‌نویسیم. در همسایگی $x=0$ انتگرال I_1 هم‌ارز $\int_0^1\frac{r}{(1)^k}dr$ است که همگرا خواهد بود. در مورد انتگرال I_2 نیز با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت داریم:

$$\int_1^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^k}dr\sim\int_1^{\infty}\frac{r}{r^{2k}}dr=\int_1^{\infty}\frac{dr}{r^{2k-1}}$$

انتگرال فوق به ازای $2k-1>1\Rightarrow k>1$ همگرا خواهد بود. کوچک‌ترین مقدار صحیح برای k مقدار ۲ خواهد بود که در نهایت داریم:

$$A=2\pi\int_0^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^2}dr=2\pi(-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2+1})\Big|_0^{\infty}=2\pi(0+\frac{1}{2})=\pi$$

۱۰-گزینه «۳» برای حل این انتگرال از نتیجه قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا سطح S' را که از تقاطع صفحه xoy با ضابطه کره به‌دست می‌آید، مشخص می‌کنیم. برای این‌کار با قرار دادن $z=0$، داریم $x^2+y^2=4$ که ناحیه داخل یک دایره به شعاع ۲ است و چون $\vec{n}$ بردار رو به خارج برای سطح S است، بردار قائم سطح جدید را می‌توان $\vec{k}$ در نظر گرفت و لذا داریم:

$$I=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}dS=\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{k}dS=\iint_{S'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dS=\iint_{z=0}(3x^2e^{yz}-2y\cos xz)dS=\iint_{S'}(3x^2-2y)\,dA$$

درون ناحیه $x^2+y^2=4$ نسبت به متغیر y متقارن است، در نتیجه در انتگرال فوق حاصل انتگرال عبارت $-2y$ که نسبت به این متغیر فرد است برابر صفر خواهد بود. در ادامه برای محاسبه انتگرال با کمک مختصات قطبی داریم:

$$I=\iint_{S'}3x^2dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cos^2\theta\, rdrd\theta=\int_0^2 3r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\left(\frac{3}{4}r^4\right)_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=12\pi$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی نقشه‌برداری و مهندسی کامپیوتر

۱ـ به‌ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \le 1001$، تساوی $\sin(n\theta)+i\cos(n\theta)=(\sin\theta+i\cos\theta)^n$، برقرار است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۵۱ ۳) ۵۰۰ ۴) ۵۰۱

۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\sin^n\frac{\pi}{3}+\sin^n\frac{3\pi}{4}+\sin^n\frac{5\pi}{6}}{3}}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ـ کدام مورد، درباره تابع $F(x)=\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt$ بر $\mathbb{R}$ درست است؟

۱) تابع F در نقاط $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ دارای اکسترمم نسبی است، ولی کران‌دار نیست.
۲) تابع F کران‌دار است و در نقاط $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ دارای اکسترمم مطلق است.
۳) تابع F کران‌دار است، ولی اکسترمم ندارد.
۴) تابع F اکسترمم نسبی ندارد و کران‌دار نیست.

۴ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2x}\sin 3x\,dx$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{13}(e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$ ۲) $\frac{2}{13}(e^{\frac{3\pi}{2}}-1)$ ۳) $\frac{3}{13}(e^{\frac{2\pi}{3}}-1)$ ۴) $\frac{3}{13}(e^{\frac{2\pi}{3}}+1)$

۵ـ اگر $f(x)=x^3-\frac{1}{3!}x^5+\frac{1}{5!}x^7-\frac{1}{7!}x^9+\cdots$، آنگاه $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) π

۶ـ طول قوس منحنی $y=\mathrm{Ln}(\frac{e^x+1}{e^x-1})$، از نقطه $x=1$ تا نقطه $x=2$، کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}(e+\frac{1}{e})$ ۲) $\mathrm{Ln}(e-\frac{1}{e})$ ۳) $\mathrm{Ln}(e^2+\frac{1}{e^2})$ ۴) $\mathrm{Ln}(e^2-\frac{1}{e^2})$

۷ـ انحنای منحنی فصل مشترک دو رویه $y\sqrt{3}+z=1$ و $x^2+4y^2=4$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸ـ مینیمم تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ با شرط $x-2y-z=4$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۹ـ مشتق سویی تابع زیر در نقطه $(0,0)$ در جهت کدام بردار موجود است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-y} & ; x\neq y\\ 0 & ; x=y\end{cases}$$

۱) j و $i-j$ ۲) i و $i+j$
۳) i و $i-j$ ۴) j و $i+j$

۱۰ـ حاصل $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ که در آن D محدود به منحنی $y=\sqrt{x}$ محور yها و خط $y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۱ـ مساحت بریده شده از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ توسط استوانه $x^2+y^2=ax$ کدام است؟

۱) $(\pi-1)a^2$ ۲) $2(\pi-2)a^2$ ۳) $(\pi-2)a^2$ ۴) $2(\pi-1)a^2$

۱۲ـ مقدار $\iint\limits_S F.nd\sigma$ به‌ازای میدان برداری $F(x,y,z)=xz\vec{i}$ و رویه S به معادله $z=4-x^2-y^2$ بالای صفحه $z=0$ و بردار $\vec{n}$ قائم یکه برون‌سوی رویه S کدام است؟

۱) $\frac{128}{3}\pi$ ۲) $\frac{64}{3}\pi$ ۳) $\frac{32}{3}\pi$ ۴) $\frac{16}{3}\pi$

توجه: برای رشته مهندسی کامپیوتر مجموعاً ۶ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات (۱، ۳، ۵، ۶، ۹ و ۱۳) طراحی شده است، که سؤالات (۱، ۳، ۵ و ۶) با رشته مهندسی نقشه‌برداری مشترک می‌باشد.

۱۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ ، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) حد وجود ندارد.

پاسخنامه رشته‌ی مهندسی نقشه‌برداری

۱ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

حالا با توجه به تفکیک مقدار i^n به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$i^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)=\begin{cases} i\cos n\theta+\sin n\theta & ; \quad n=4k+1\\ -\cos n\theta+i\sin n\theta & ; \quad n=4k+2\\ -i\cos n\theta-\sin n\theta & ; \quad n=4k+3\\ \cos n\theta-i\sin n\theta & ; \quad n=4k\end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به صورت $4k+1$، که در آن k یک عدد صحیح نامنفی است، تساوی مورد نظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

$$1\le 4k+1\le 1001 \Rightarrow 0\le 4k\le 1000 \Rightarrow 0\le k\le 250$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به صورت $250-0+1=251$ محاسبه می‌شود.

۲ـ گزینه «۴» با توجه به مقادیر هریک از توابع مثلثاتی زیر رادیکال و سرعت رشد توابع نمایی در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n\frac{\pi}{3}+\sin^n\frac{3\pi}{4}+\sin^n\frac{5\pi}{6}}{3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^n+(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+(\frac{1}{2})^n}{3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^n}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt[n]{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ـ گزینه «۳» با استفاده از مشتق‌گیری از انتگرال و بررسی نقاط بحرانی تابع داریم:

$$F(x)=\int_0^x\frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{\sin^2 x}{1+x^2}=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \quad , \ k\in\mathbb{Z}$$

به ازای مقادیر x به فرم فوق مشتق تابع صفر می‌شود، اما چون توان $\sin x$ زوج است و $1+x^2$ همواره مثبت است، مقدار مشتق در دو طرف این نقاط تغییر علامت نمی‌دهد، در نتیجه این نقاط اکسترمم نیستند. از طرفی داریم:

$$\begin{cases}1<1+t^2<\infty\\ 0\le\sin^2 t\le 1\end{cases}\Rightarrow 0\le\frac{\sin^2 t}{1+t^2}<1$$

با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال محدود است، به ازای مقایر محدود x این انتگرال همگرا و در نتیجه تابع کران‌دار است. فقط باید به ازای $x\to\infty$ وضعیت تابع را بررسی کنیم. در این حالت داریم:

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_0^\infty\frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt\le\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt=\tan^{-1}t)_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

پس تابع مورد اشاره همواره کران‌دار است.

۴ـ گزینه «۴» **روش اول:** برای حل این انتگرال از رابطه $\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]+c$ کمک گرفته و داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^{2x}\sin 3x dx=\frac{e^{2x}}{4+9}(2\sin 3x-3\cos 3x)\Big)_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{13}[e^{\frac{2\pi}{3}}(0+3)-e^0(0-3)]=\frac{3}{13}[e^{\frac{2\pi}{3}}+1]$$

روش دوم: برای حل این‌گونه انتگرال‌ها که حاصلضرب یک تابع مثلثاتی در تابع نمایی است، می‌توان از روش جزء به جزء به صورت زیر کمک گرفت:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^{2x}\sin 3x dx$$

$$\sin 3x=u\Rightarrow 3\cos 3x=du \quad , \quad e^{2x}dx=dv\Rightarrow\frac{1}{2}e^{2x}=v$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x\Big)_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x dx=0-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x dx}_{I'}$$

حالا برای حل انتگرال I' دوباره از روش جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x\,dx$$

$$\cos 3x=u\Rightarrow -3\sin 3x=du \quad , \quad \frac{3}{2}e^{2x}dx=dv\Rightarrow \frac{3}{4}e^{2x}=v$$

$$I'=\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x)_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{9}{4}e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{3}{4}(-e^{\frac{2\pi}{3}}-1)+\frac{9}{4}I$$

$$\Rightarrow I=-I'=\frac{3}{4}(e^{\frac{2\pi}{3}}+1)-\frac{9}{4}I\Rightarrow \frac{13}{4}I=\frac{3}{4}(e^{\frac{2\pi}{3}}+1)\Rightarrow I=\frac{3}{13}(e^{\frac{2\pi}{3}}+1)$$

۵ـ گزینه «۴» با توجه به بسط مک‌لورن $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$ در تابع داده شده داریم:

$$f(x)=x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\frac{x^9}{7!}+\cdots=x^2(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)=x^2\sin x$$

$$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x \;\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\pi\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}=\pi$$

۶ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه طول قوس منحنی داریم:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

برای محاسبه عبارت مقابل انتگرال داریم:

$$y=\text{Ln}(\frac{e^x+1}{e^x-1})=\text{Ln}(e^x+1)-\text{Ln}(e^x-1)$$

$$y'=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}\Rightarrow y'^2=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}\Rightarrow 1+y'^2=1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

حالا با جایگذاری در انتگرال اولیه خواهیم داشت:

$$L=\int_1^2\left|\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right|dx=\int_1^2\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int_1^2\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\text{Ln}(e^x-e^{-x})_1^2=\text{Ln}(\frac{e^2-e^{-2}}{e^1-e^{-1}})=\text{Ln}[\frac{(e^1-e^{-1})(e^1+e^{-1})}{e^1-e^{-1}})=\text{Ln}(e+\frac{1}{e})$$

۷ـ گزینه «۲» منحنی R فصل مشترک رویه‌های داده شده است. با استفاده از این دو معادله منحنی R را به شکل پارامتری می‌نویسیم:

$$x=2\cos t\,,\; y=\sin t\;;\; 0\le t\le 2\pi$$

$$z=1-\sqrt{3}y=1-\sqrt{3}\sin t \quad , \quad R(t)=(2\cos t,\sin t,1-\sqrt{3}\sin t)\;;\;0\le t\le 2\pi$$

حالا با استفاده از رابطه انحنای منحنی‌های پارامتری داریم:

$$\kappa=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$$

$$R'(t)=(-2\sin t,\cos t,-\sqrt{3}\cos t) \quad , \quad R''(t)=(-2\cos t,-\sin t,\sqrt{3}\sin t)$$

$$R'(t)\times R''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\sin t & \cos t & -\sqrt{3}\cos t\\ -2\cos t & -\sin t & \sqrt{3}\sin t\end{vmatrix}=(0,-2\sqrt{3}\sin^2 t-2\sqrt{3}\cos^2 t,2\sin^2 t+2\cos^2 t)=(0,-2\sqrt{3},2)$$

$$|R'(t)|=\sqrt{4\sin^2 t+\cos^2 t+3\cos^2 t}=\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}=2 \quad , \quad \kappa=\frac{|(0,-2\sqrt{3},2)|}{2^3}=\frac{\sqrt{0+12+4}}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه باید مینیمم تابع را به صورت مشروط محاسبه کنیم و مشتقات جزئی هر دو تابع ساده هستند، از روش ساده شده لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$g(x,y,z)=x-2y-z=4$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2x}{1}=\frac{2y}{-2}=\frac{2z}{-1}\Rightarrow 2x=-y=-2z$$

حالا روابط به دست آمده را در تابع g جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر متغیرها به دست آیند و سپس با جایگذاری آنها در تابع اولیه مقدار مینیمم محاسبه می‌شود:

$$x-2(-2x)-(-x)=4\Rightarrow 6x=4\;\Rightarrow x=\frac{2}{3}\;,\; y=-\frac{4}{3}\;,\; z=-\frac{2}{3}$$

$$f(x,y,z)=\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

۹ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه اصلی مشتق سویی در راستای بردار یکه دلخواه به صورت $\vec{u}=(u_1,u_2)$ داریم:

$$D_{\vec{u}}f=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+hu_1,0+hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{hu_1}{hu_1-hu_2}-0}{h}=\frac{u_1}{u_1-u_2}$$

مشتق سویی تابع $f(x,y)$ در نقطه $p(x_0,y_0)$ در جهت بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$ برابر است با:

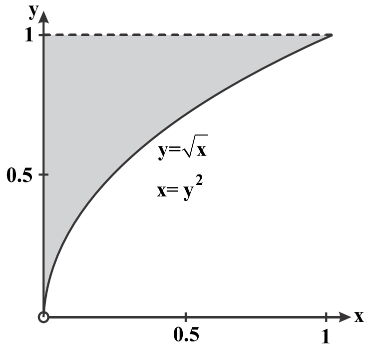
$$D_{\vec{u}}f(p)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

پس داریم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+hu_1,0+hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(hu_1,hu_2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{hu_1}{hu_1-hu_2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{u_1}{(u_1-u_2)h}$$

برای آنکه این حد موجود باشد و مشتق سویی وجود داشته باشد، باید $u_1=0$ باشد. پس باید برداری را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه اول یعنی ضریب i مساوی صفر باشد. پس در جهت بردار $\vec{j}$ می‌تواند مشتق سویی وجود داشته باشد.

۱۰ـ گزینه «۱» با رسم ناحیه مورد نظر داریم:



$$I=\int_0^1\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 y(e^y-1)dy$$

$$=\int_0^1(ye^y-y)dy=(ye^y-e^y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=(e-e-\frac{1}{2})-(0-1-0)=\frac{1}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به تقارن کره نسبت به صفحه xoy، کافی است مساحت قسمت بالایی را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم. صفحه تصویر را xoy در نظر گرفته و در این صورت ناحیه درون دایره $x^2+y^2=ax$ قرار می‌گیرد که در مختصات قطبی به صورت $r=a\cos\theta$، $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ درمی‌آید.

می‌دانیم برای کره به شعاع a، $d\sigma=\frac{adA}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ است. پس مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=2\iint_S d\sigma=2\iint_D\frac{adA}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-(\sqrt{a^2-r^2})\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a-a|\sin\theta|)d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)=2a^2(\pi-2)$$

۱۲ـ گزینه «۳» ناحیه داده شده بسته نیست؛ برای اینکه بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، ابتدا صفحه $z=0$ را به عنوان رویه S' به رویه S اضافه کرده و داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_D(z)dv$$

برای حل انتگرال اخیر از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم. برای تعیین حدود r و θ ابتدا رویه S را با S' تقاطع داده و داریم:

$$4-x^2-y^2=0\ \Rightarrow x^2+y^2=4\ \Rightarrow 0\le r\le 2\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$$

پس حاصل انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\iiint_D(z)dv=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2}zrdzdrd\theta=(2\pi)\int_0^2\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{4-r^2}rdr=\pi\int_0^2(16r-8r^3+r^5)dr=\pi(8r^2-2r^4+\frac{r^6}{6})\Big|_0^2=\pi(32-32+\frac{64}{6})=\frac{32}{3}\pi$$

حالا برای انتگرال $\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ داریم:

$$\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{z=0}(xz\vec{i}).(-\vec{k})d\sigma=0$$

پس حاصل انتگرال اولیه نیز همان $\frac{32}{3}\pi$ است.

۱۳ـ گزینه «۱» برای حل این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}[2\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})]=\lim_{x\to\infty}[2\sin(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})]$$

با توجه به اینکه در بی‌نهایت $\sin(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})$ هم‌ارز $\sin(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بوده و به صفر میل می‌کند و همچنین $\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})$ کراندار و بین ۱ـ و ۱ است، پس با استفاده از قضیه فشردگی، حاصل حد کلی برابر صفر خواهد بود.

سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ فرض کنید $\vec{a}=(\frac{۱}{۲},-۲,۰)$، $\vec{b}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,۳,۲)$. زاویهٔ بین بردارهای $\vec{c}+۲\vec{a}$ و $۲\vec{b}-\vec{c}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲ـ رتبهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \alpha \\ -۲ & ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بستگی به مقدار α دارد.

۳ـ به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \le ۱۲۰۱$، تساوی $\sin(n\theta)+i\cos(n\theta)=(\sin\theta+i\cos\theta)^n$، برقرار است؟

۱) ۱۲۰۱ ۲) ۵۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۳۰۰

۴ـ دامنهٔ تابع $f(x)=(x+\frac{۱}{|x-۱|})^x$، کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)-\{۱\}$

۲) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۰,۱\}$

۳) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})-\{۱\}$

۴) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},۱)\cup(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۰\}$

۵ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\tanh x-۰/۵=۰$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

۶ـ معکوس تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۴\arcsin\sqrt{۱-x^۲}$ در فاصلهٔ $[۰,۱]$، کدام است؟

۱) $y=\arccos ۴x$ ۲) $y=\cos ۴x$ ۳) $y=\cos\frac{x}{۴}$ ۴) $y=\arccos\frac{x}{۴}$

۷ـ به‌ازای $c \ge ۰$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به صورت $a_{n+۱}=\sqrt{c+a_n}, n\in\mathbb{N}$ و $a_۱=۰$ در نظر بگیرید. کدام مورد برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ درست است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) واگرا ۴) نه صعودی و نه نزولی

۸ـ تابع $f(x)=\frac{[x^۲]-x^۲}{|x|+[x]+۲}$ مفروض است. مقدار $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)-\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۹ـ فرض کنید $(a>۰)$، $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{\cosh ax}{\cos ax}\right)^{\frac{۱}{x^۲}}=۲$، مقدار a کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\sqrt{\ln ۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۰ـ ارتفاع یک کوه از سطح دریا از رابطهٔ $z=۱۰۰۰-۰/۳x^۲-۰/۲y^۲$ برحسب متر به‌دست می‌آید که در آن، جهت مثبت محورهای x و y، به ترتیب، به سمت شرق و شمال اشاره دارند. کوهنوردی در نقطه‌ای با مختصات $(۵,-۱۰,۹۷۲/۵)$ قرار دارد. او در چه جهتی حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

۱) شمال ۲) جنوب ۳) شمال غرب ۴) جنوب غرب

۱۱ـ طول، عرض و ارتفاع یک جعبهٔ مستطیلی به‌ترتیب ۱۵، ۱۰ و ۸ سانتی‌متر است. اگر سرعت تغییرات آن‌ها برحسب $\frac{cm}{s}$ به ترتیب ۳ افزایش، ۰/۵ کاهش و ۲ افزایش یابد، سرعت تغییرات حجم برحسب $\frac{cm^۳}{s}$ و مساحت کل آن برحسب $\frac{cm^۲}{s}$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) ۲۴۰ و ۲۵۸ ۲) ۴۸۰ و ۲۵۸ ۳) ۴۸۰ و ۱۸۵ ۴) ۲۴۰ و ۱۸۵

۱۲ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $x^۳+۳xy^۲+xy-y^۳=۱$ در نقطهٔ $(۰,-۱)$، کدام است؟

۱) $۲x+۳y=-۳$
۲) $۲x-۳y=۳$
۳) $۳x-۲y=۲$
۴) $۳x+۲y=-۲$

۱۳ـ نقطهٔ M بر منحنی قطبی $r=\cos ۲\theta$، از $\theta=۰$ حرکت کرده و با سرعت ثابت $\frac{dx}{dt}=۰/۲۵$ بر محوری که در قطب به محور قطبی عمود است، نزدیک می‌شود. نقطهٔ M با کدام سرعت در $\theta=\frac{\pi}{۶}$، به قطب نزدیک می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۷}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۱۴ـ ماکزیمم تابع $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۳)}}{۳x^۲+۴}$، چه ضریبی از $\sqrt[۳]{۱۶۰}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵ـ تعداد نقاطی که تابع $f(x)=\left||x|-۱\right|$ در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است، کدام‌اند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۶ـ اگر تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲f(۳)-۹f(x)}{x-۳}$، کدام است؟

۱) $۳f(۳)-۹f'(۹)$
۲) $۹f(۳)-۶f'(۳)$
۳) $۶f(۳)-۹f'(۳)$
۴) $۹f(۹)-۳f'(۳)$

۱۷ـ فرض کنید $I=\sum\limits_{n=۱}^{+\infty}\int_۰^{\frac{۱}{n^۲}}\sqrt{x^۴+\cos x^۴+۲}\,dx$ و $J=\sum\limits_{n=۱}^{+\infty}\int_۰^{\frac{۱}{n}}\sqrt{x^{۱۰}+x+۴}\,dx$. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها، کدام مورد برای همگرایی یا واگرایی I و J درست است؟

۱) I و J همگرا
۲) I و J واگرا
۳) I واگرا و J همگرا
۴) I همگرا و J واگرا

۱۸ـ مختصات نزدیک‌ترین نقطهٔ واقع بر فصل مشترک رویه‌های $x-y+۲z=۵$ و $z^۲=۲x^۲+۲y^۲$، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $(\frac{۵}{۶},-\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۳})$
۲) $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲},۵)$
۳) $(\frac{۵}{۲},-\frac{۵}{۲},۵)$
۴) $(-\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۳})$

۱۹ـ با استفاده از حد مجموع ریمان، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=۱}^{n}\frac{k^۲}{n^۳+k^۳}$، کدام است؟

۱) $\frac{\ln ۲}{۳}$
۲) $\frac{\ln ۳}{۲}$
۳) $\ln ۲$
۴) $\ln ۳$

۲۰ـ مساحت ناحیهٔ بیرون منحنی $x^۲+y^۲=۲y$ و درون منحنی $r=۳-\sin\theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵\pi-۱۶}{۸}$
۲) $\frac{۱۵\pi-۲۴}{۸}$
۳) $۲\pi-۳$
۴) $۲(\pi-۱)$

۲۱ـ مقدار $\int_۰^{\infty}\frac{e^{-۲x}-e^{-۵x}}{x}dx$، کدام است؟

۱) $-\ln ۱۰$
۲) $-\ln ۵$
۳) $\ln\frac{۲}{۵}$
۴) $\ln\frac{۵}{۲}$

۲۲ـ طول منحنی $f(x)=\int_۰^x\sqrt{\sin t}\,dt$ در بازهٔ $[۰,\pi]$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۴

۲۳ـ مقدار $\int_۰^۱\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}}\frac{e^y\,dy\,dx}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}(e-۱)$
۲) $\frac{\pi e}{۳}$
۳) $\pi(e-۱)$
۴) πe

۲۴ـ حجم ناحیهٔ محصور به رویهٔ $r=۲\cos\theta$ و داخل کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲، کدام است؟

۱) $\frac{۱۶\pi}{۹}$
۲) $\frac{۱۶(۳\pi-۴)}{۹}$
۳) $\frac{۱۶\pi}{۳}$
۴) $\frac{۱۶(۳\pi-۴)}{۳}$

۲۵ـ مساحت سطح غیرمسطح $\phi = \frac{\pi}{4}$ محدود به صفحهٔ $z=1$، در مختصات کروی، کدام است؟

۱) π ۲) $\sqrt{2}\pi$ ۳) 2π ۴) $2\sqrt{2}\pi$

۲۶ـ مقدار $\iint_D \tan^{-1}(\frac{y}{x})\,dx\,dy$ که در آن، $D=\left\{(x,y): 0 < a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{48}(b^2-a^2)$ ۲) $\frac{\pi^2}{48}(b-a)^2$ ۳) $\frac{\pi^2}{12}(b^2-a^2)$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}(b-a)^2$

۲۷ـ مقدار $\iint_S e^z dS$ که در آن، S بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که بین صفحات $z=a$ و $z=b$ $(0 < a < b)$ قرار گرفته، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}\pi(be^b - ae^a)$ ۲) $2\sqrt{2}\pi(ae^b + be^a)$

۳) $2\sqrt{2}\pi\left((a+1)e^b - (b+1)e^a\right)$ ۴) $2\sqrt{2}\pi\left((b-1)e^b - (a-1)e^a\right)$

۲۸ـ فرض کنید C منحنی حاصل از برخورد صفحهٔ $y+z=2$ با استوانهٔ $x^2+y^2=1$ در جهت مثلثاتی باشد. اگر $\vec{F}(x,y,z)=(-\alpha y^2, \alpha x, z^2\cos z)$ و $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 2\pi$، آنگاه مقدار α، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۹ـ اگر S، سطح کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ باشد، مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

$$\iint_S \left(x(2x+3e^{z^2}) - y(e^{x^2}+y) + z(2z+\cos 2y)\right) d\sigma$$

۱) صفر ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

۳۰ـ برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n}(x)}{n}$، کدام مورد درست است؟

۱) در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$، همگرای مطلق است.

۲) در بازهٔ $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$، همگرای مطلق و در $x=-\frac{\pi}{4}$، همگرای مشروط است.

۳) در بازهٔ $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$، همگرای مطلق و در $x=\pm\frac{\pi}{4}$، همگرای مشروط است.

۴) در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$، همگرای مطلق و در $x=\frac{\pi}{4}$، همگرای مشروط است.

پاسخنامه رشتهٔ MBA

۱ـ گزینه «۱» ابتدا بردارهای مورد اشاره را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{c}+2\vec{a}=(2,-1,2) \qquad 2\vec{b}-\vec{c}=(1,-1,0)$$

حالا با توجه به رابطه زاویه بین دو بردار خواهیم داشت:

$$\cos\hat{\theta} = \frac{(\vec{c}+2\vec{a}).(2\vec{b}-\vec{c})}{|\vec{c}+2\vec{a}||2\vec{b}-\vec{c}|} = \frac{(2+1+0)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۲ـ گزینه «۲» یک ماتریس 5×4 داریم که حداکثر مرتبه ماتریس ۴ می‌باشد. حال چون (سطر چهارم $=(-2)\times$ سطر اول) می‌باشد پس سطر چهارم وابسته خطی است و یکی از حداکثر رتبه ماتریس کم می‌شود، پس تا اینجا رتبه ماتریس حداکثر ۳ است.

اکنون زیر ماتریس 3×3 روبه‌رو را انتخاب می‌کنیم و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(5-0) + 1\times(0-0) = 5 \ne 0$$

چون دترمینان این ماتریس مخالف صفر است پس دیگر از رتبه ماتریس کم نمی‌شود و رتبه ماتریس همان ۳ می‌باشد.

۳ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.»

روش اول: ابتدا توجه کنید که سمت راست را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\text{عبارت سمت راست} = (\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left[i(\cos\theta - i\sin\theta)\right]^n = i^n\left[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right]$$

و عبارت سمت چپ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin(n\theta) + i\cos(n\theta) = i\left[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right]$$

پس تساوی صورت سؤال به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:

$$i\left[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right] = i^n\left[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right]$$

رابطه‌ی فوق وقتی برقرار است که $i = i^n$ باشد.

برای اینکه این رابطه برقرار باشد، n چه مقداری می‌تواند داشته باشد!؟ واضح است مثلاً $n = ۱$ می‌تواند جواب باشد، اما $n = ۲$، $n = ۳$ یا $n = ۴$ و یا حتی $n = ۴$ نمی‌توانند تساوی را ایجاد کنند، اما $n = ۵$ چطور؟ واضح است n می‌تواند برابر ۵ باشد و اساساً هر n به صورت $n = ۴k + ۱$ می‌تواند مشکل ما را حل کند.

پس داریم:

$$۱ \le n \le ۱۲۰۱ \Rightarrow ۱ \le ۴k + ۱ \le ۱۲۰۱ \Rightarrow ۰ \le ۴k \le ۱۲۰۰ \Rightarrow ۰ \le k \le ۳۰۰$$

در نامساوی فوق $۳۰۰ - ۰ + ۱ = ۳۰۱$ عدد صحیح وجود دارد و این یعنی **جواب صحیح در گزینه‌ها نیست، اگر در صورت سؤال $n < ۱۲۰۱$ داده می شد، در نهایت $k = ۳۰۰$ به‌دست می‌آمد و دقیقاً به جواب سازمان سنجش می‌رسیدیم.**

روش دوم: این روش هم تقریباً مشابه روش اول است؛ عبارت سمت چپ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sin(n\theta) + i\cos(n\theta) = i[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)] = i[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] = ie^{-i(n\theta)}$$

و به همین ترتیب عبارت سمت راست برابر $(ie^{-i\theta})^n$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$ie^{-i(n\theta)} = (ie^{-i\theta})^n \Rightarrow ie^{-i(n\theta)} = i^n e^{-i(n\theta)} \Rightarrow i = i^n$$

از اینجا به بعد با همان استدلال مربوط به روش اول به جواب می‌رسیم.

روش سوم: به دلیل ذهنیت خودمان از فرمول $\cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ = اویلر سعی می‌کنیم پشت کسینوس **i** نباشد و اتفاقاً پشت سینوس **i** باشد، لذا داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - n\theta) + i\sin(\frac{\pi}{۲} - n\theta) = [\cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)]^n \Rightarrow \sqrt[n]{\cos(\frac{\pi}{۲} - n\theta) + i\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{e^{i(\frac{\pi}{۲} - n\theta)}} = e^{i(\frac{\pi}{۲} - \theta)} \Rightarrow e^{\frac{i[(\frac{\pi}{۲} - n\theta) + ۲k\pi]}{n}} = e^{i(\frac{\pi}{۲} - \theta)} \Rightarrow \frac{i[(\frac{\pi}{۲} - n\theta) + ۲k\pi]}{n} = i(\frac{\pi}{۲} - \theta) \Rightarrow \frac{۱}{n}(\frac{\pi}{۲}) + \frac{۲k\pi}{n} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } n \text{ تقسیم بر } \frac{\pi}{۲}} ۱ + ۴k = n$$

در این راه‌حل هم $n = ۴k + ۱$ به‌دست آمد و لذا ادامه‌ی راه‌حل مانند روش‌های قبل است.

۴ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.»

با توجه به وجود قدرمطلق، تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x + \frac{۱}{x - ۱})^x \ ; & x > ۱ \\ (x - \frac{۱}{x - ۱})^x \ ; & x < ۱ \end{cases}$$

واضح است به‌ازای $x = ۱$ تابع تعریف نشده است.

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{x^۲ - x + ۱}{x - ۱})^x \ ; & x > ۱ \\ (\frac{x^۲ - x - ۱}{x - ۱})^x \ ; & x < ۱ \end{cases}$$

برای اینکه تابع به‌دست آمده تعریف‌شده باشد، باید پایه مثبت باشد؛ بنابراین هر دو ضابطه باید مثبت باشد.

$$\frac{x^۲ - x + ۱}{x - ۱} > ۰ \xrightarrow{x > ۱} x^۲ - x + ۱ > ۰$$

$$\frac{x^۲ - x - ۱}{x - ۱} > ۰$$

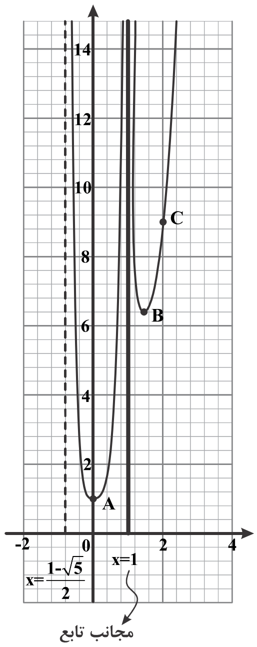
نامساوی اخیر همواره برقرار است؛ چون دلتا منفی و ضریب $x^۲$ مثبت است. حالا سراغ ضابطه دوم می‌رویم:

با توجه به اینکه در ضابطه دوم $x < ۱$ است، پس مخرج در هر صورت علامتش منفی است و این یعنی برای برقراری نامساوی فوق،عبارت صورت کسر یعنی $x^۲ - x - ۱$ باید منفی باشد. ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - x - ۱ = ۰$ را به‌دست می‌آوریم و می‌دانید بین دو ریشه علامت عبارت مخالف ضریب $x^۲$ خواهد بود. یعنی بین دو ریشه علامت صورت کسر منفی خواهد بود.

$$x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۴}}{۲} = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} < x < \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{x < ۱} \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} < x < ۱$$

بنابراین دامنه تابع به شکل مقابل است:

$$D_f=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۱\}$$



دقت کنید که تابع $(f(x))^{g(x)}$ را می‌توان به‌صورت مقابل تعریف کرد: $(f(x))^{g(x)}=e^{\operatorname{Ln}f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\operatorname{Ln}f(x)}$

در اینجا تنها شرط $f(x)>۰$ است و اساساً طراح کمی به لحاظ علمی در این مبحث متزلزل بوده و فکر کرده باید شرط $f(x)\neq ۱$ هم در مسئله برقرار باشد و برای همین گزینه (۲) را به عنوان جواب منظور کرده است و این تعریف دبیرستانی و غیردقیق از توابعی به شکل مقابل است!!

همان‌طورکه می‌بینید با قرار دادن $x=۰$ در ضابطه‌ی تابع مقدار تابع برابر با $۱=(۰+۱)^{۰}$ به‌دست می‌آید و کاملاً مشخص است که $x=۰$ جزو دامنه تابع می‌باشد. رسم نمودار برای عزیزانی که بیشتر علاقه‌مند به مباحث ریاضی هستند به‌صورت مقابل است.

$$x=۰\Rightarrow y=۱\Rightarrow A\Big|_{۱}^{۰}$$

$$B=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y\simeq ۶/۵\Rightarrow B\Big|_{۶/۵}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$C=۲\Rightarrow y=۹\Rightarrow C\Big|_{۹}^{۲}$$

۵ـ گزینه «۲» با کمک رابطه اصلی $\tanh x$ داریم:

$$\tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=۰/۵\Rightarrow e^{x}-e^{-x}=۰/۵e^{x}+۰/۵e^{-x}\Rightarrow ۰/۵e^{x}=۱/۵e^{-x}\Rightarrow e^{۲x}=۳\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\operatorname{Ln}۳$$

۶ـ گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم؛ به راحتی با روش مستقیم داریم:

$$y=۴\arcsin\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$\frac{y}{۴}=\arcsin\sqrt{۱-x^{۲}}\Rightarrow \sin\frac{y}{۴}=\sqrt{۱-x^{۲}}\Rightarrow \sin^{۲}\frac{y}{۴}=۱-x^{۲}$$

$$x^{۲}=۱-\sin^{۲}\frac{y}{۴}=\cos^{۲}\frac{y}{۴}\Rightarrow x=\cos\frac{y}{۴}\xrightarrow{\text{نقش x و y را عوض می‌کنیم}}y=\cos\frac{x}{۴}$$

روش تستی: می‌دانیم اگر نقطه‌ی (a,b) روی تابع $f(x)$ باشد، نقطه‌ی (b,a) روی تابع $f^{-۱}(x)$ خواهد بود. اگر نقطه‌ی $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\pi)$ روی تابع امتحان شود، فقط گزینه (۳) می‌تواند جواب باشد.

۷ـ گزینه «۱» با نوشتن چند جمله اول داریم:

$$a_{۱}=۰,a_{۲}=\sqrt{c+a_{۱}}=\sqrt{c}\ ,a_{۳}=\sqrt{c+a_{۲}}=\sqrt{c+\sqrt{c}}\geq\sqrt{c}$$

واضح است که $a_{n+۱}\geq a_{n}$ و علامت مساوی به این علت است که مقدار c می‌تواند صفر باشد. پس دنباله مورد نظر صعودی است.

۸ـ گزینه «۳» به راحتی با محاسبه مقادیر حدی توابع جزء صحیح خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۳^{+}}f(x)=\dfrac{\left[((-۳)^{+})^{۲}\right]-(-۳)^{۲}}{|-۳|+\left[(-۳^{+})\right]+۲}=\dfrac{\left[۹^{-}\right]-۹}{۳-۳+۲}=\dfrac{۸-۹}{۲}=-\dfrac{۱}{۲}\\ \lim\limits_{x\to -۳^{-}}f(x)=\dfrac{\left[((-۳)^{-})^{۲}\right]-(-۳)^{۲}}{|-۳|+\left[(-۳)^{-}\right]+۲}=\dfrac{\left[۹^{+}\right]-۹}{۳-۴+۲}=\dfrac{۹-۹}{۱}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}-۰=-\frac{۱}{۲}$$

۹ـ گزینه «۲» حد داده شده به فرم ۱^{∞} مبهم است. پس داریم:

$$L=\lim_{x\to ۰}(\frac{\cos hax}{\cos ax})^{\frac{۱}{x^{۲}}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}(\frac{\cos hax}{\cos ax}-۱)}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}(\frac{\cos hax-\cos x}{\cos ax})}$$

با توجه به اینکه عامل صفرکننده در مخرج از توان ۲ است، هم‌ارزی توابع صورت کسر را نیز تا توان ۲ ادامه داده و داریم:

$$L=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}(\frac{۱+\frac{۱}{۲}(ax)^{۲}-(۱-\frac{۱}{۲}(ax)^{۲})}{\cos ax})}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}(\frac{a^{۲}x^{۲}}{\cos ax})}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a^{۲}}{\cos ax}}=e^{a^{۲}}=۲\Rightarrow a^{۲}=\operatorname{Ln}۲\xrightarrow{a>۰}a=\sqrt{\operatorname{Ln}۲}$$

۱۰ــ گزینه «۴»

روش اول:

$$z = 1000 - 0.3x^2 - 0.2y^2$$

$$z = f(x,y) \Rightarrow dz = f_x.dx + fy.dy \qquad (1)$$

$$f_x = -0.6x \xrightarrow{\text{درنقطه } x=5} -3$$

$$fy = -0.4y \xrightarrow{\text{درنقطه } y=-10} 4$$

برای اینکه ارتفاع ثابت باشد، لازم است $dz = 0$ باشد، لذا داریم:

$$dz = 0 \Rightarrow -3\,dx + 4dy = 0$$

حال برای آنکه این معادله برقرار باشد باید x و y هر دو هم‌جهت باشند و این اتفاق در مسیر شمال شرقی (هر دو x و y دارای تغییرات مثبت هستند) یا جنوب غربی (هر دو x و y دارای تغییرات منفی هستند) رخ می‌دهد، پس گزینه (۴) پاسخ صحیح است.

روش دوم: با توجه به اینکه ارتفاع کوهنورد یعنی z تابعی از x و y اوست، کافی است جهتی را پیدا کنیم که مشتق سویی در نقطه مورد اشاره در آن جهت صفر باشد. با فرض اینکه جهت بردار یکه حرکت (α,β) باشد، داریم:

$$f(x,y) = z = 1000 - 0.3x^2 - 0.2y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = (-0.6x, -0.4y) \Rightarrow \vec{\nabla} f(5,-10) = (-3,4)$$

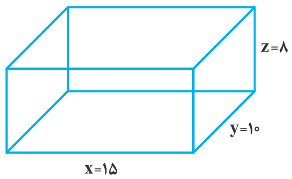
$$D_{\vec{u}} f(5,-10) = \vec{\nabla} f(5,-10).(\alpha,\beta) = (-3,4).(\alpha,\beta) = -3\alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{4}\alpha$$

از طرفی بردار جهت یکه است، پس داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2(1 + \frac{9}{16}) = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \beta = \pm\frac{3}{5}$$

پس جهت مورد نظر به‌صورت $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ یعنی شمال شرقی یا $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ یعنی جنوب‌غربی خواهد بود

۱۱ــ گزینه «۳» شکل یک مکعب را داریم که $x'_t = 3(\frac{cm}{s})$ ، $y'_t = -0.5(\frac{cm}{s})$ و $z'_t = 2(\frac{cm}{s})$ داده شده است.



$$V = xyz \Rightarrow V'_t = x'yz + y'_t xz + z'_t xy = 3(10)(8) + (-0.5)(15)(8) + 2(15)(10)$$
$$= 240 - 60 + 300 = 480$$

سرعت تغییرات حجم به دست آمد، اما دو گزینه با این عدد داریم و لازم است سرعت تغییرات مساحت حساب شود. مساحت کل برابر است با:

$$S = 2(yz + xy + xz) \Rightarrow S'_t = 2(y'z + z'y + x'y + y'x + x'z + z'x) \Rightarrow S'_t = 2(-\frac{1}{2}(8)) + 2(10) + (3)(10) + (-\frac{1}{2})$$

$$(15) + 3(8) + 2(15)) = 2(-4 + 20 + 30 - \frac{15}{2} + 24 + 30) = 2(100 - \frac{15}{2}) = 200 - 15 = 185$$

۱۲ــ گزینه «۲» به راحتی با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$x^3 + 3xy^2 + xy - y^3 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 + 3y^2 + y}{6xy + x - 3y^2}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(0,-1)} = -\frac{0 + 3 - 1}{0 + 0 - 3} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 2x - 3y = 3$$

۱۳ــ گزینه «۳» با توجه به اینکه مقدار $\frac{dx}{dt} = 0.25$ را داریم و با توجه به رابطه $r = \cos 2\theta$ داریم:

$$x = r\cos\theta \xrightarrow{r = \cos 2\theta} x = \cos 2\theta \cos\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta$$

با استفاده از مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{25}{100} = (6\cos^2\theta(-\sin\theta) + \sin\theta) \times \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{6}} \frac{1}{4} = (6(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{7}$$

اکنون از $r = \cos 2\theta$ داریم:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = (-2\sin 2\theta)(-\frac{1}{7}) \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{6}} -2(\sin\frac{\pi}{3})(-\frac{1}{7}) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2}{7}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

توجه داشته باشید که قطب‌همان مبدأ مختصات است و محور قطبی در واقع همان محور x هاست. محوری که بر محور قطبی عمود است هم محور y ها می باشد و صورت سؤال مسیر حرکت نقطه M بر روی منحنی را فقط مشخص کرده است.

۱۴ـ گزینه «۱» برای کاهش حجم ظاهری محاسبات فرض می‌کنیم $x^2+1=A$ باشد:

$$y=\frac{\sqrt[3]{A^2(A+2)}}{3A+1}=\frac{\sqrt[3]{A^3+2A^2}}{3A+1}$$

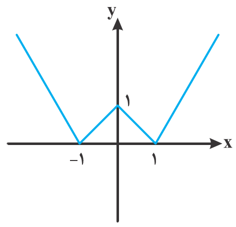
$$y'=\frac{\frac{(3A^2+4A)A'}{3\sqrt[3]{(A^3+2A^2)^2}}(3A+1)-3A'\sqrt[3]{(A^3+2A^2)}}{(3A+1)^2}=\frac{(9A^3+3A^2+12A^2+4A-9(A^3+2A^2))A'}{3\sqrt[3]{(A^3+2A^2)^2}\,(3A+1)^2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A'=2x=0\Rightarrow x=0\\ -3A^2+4A=0\ \Rightarrow\ \underset{A=0}{\underset{\downarrow}{A}}\ (-3A+\underset{A=\frac{4}{3}}{\underset{\downarrow}{4}})=0\end{cases}$$

$$x^2+1=\frac{4}{3}\ \Rightarrow x^2=\frac{1}{3}$$

$$f(x^2=\frac{1}{3})=\frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+1)^2(\frac{1}{3}+3)}}{3(\frac{1}{3})+4}=\frac{\sqrt[3]{\frac{16}{9}\times\frac{10}{3}}}{5}=\frac{1}{15}\sqrt[3]{160}$$

۱۵ـ گزینه «۴» به راحتی با رسم نمودار تابع داریم:



واضح است که تابع ۳ نقطه زاویه‌ای دارد.

حل به روش جبری: با توجه به اینکه در توابع قدرمطلق ریشه از مرتبه فرد عبارت داخل قدرمطلق نقطه زاویه‌ای و مشتق‌ناپذیر است، داریم: $|x|-1=0\ \Rightarrow |x|=1\ \Rightarrow x=\pm 1$

از طرفی خود $|x|=0$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$|x|-1=0\ \Rightarrow |x|=1\ \Rightarrow x=\pm 1$$

پس در مجموع ۳ نقطه مشتق‌ناپذیر داریم.

۱۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است، با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 f(3)-9f(x)}{x-3}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 3}\frac{2xf(3)-9f'(x)}{1}=6f(3)-9f'(3)$$

۱۷ـ گزینه «۴» مطابق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها داریم:

$$A=\int_a^b f(x)dx\ \Rightarrow \exists C\in[a,b]: f(c)(b-a)=A$$

در هر جمله از سری I و J داریم:

$$I=\int_0^{\frac{1}{n^2}}\sqrt{x^4+\cos x^4+2}\,dx=\frac{\sqrt{c_n^4+\cos c_n^4+2}}{n^2},c_n\in(0,\frac{1}{n^2})$$

$$J=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x^{10}+x+4}\,dx=\frac{\sqrt{d_n^{10}+d_n+2}}{n},d_n\in(0,\frac{1}{n})$$

پس داریم:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{c_n^4+\cos c_n^4+2}}{n^2}\ ,\ c_n\in(0,\frac{1}{n^2})$$

اما چون $\cos c_n^4\le 1$ و $c_n^4\le 1$ پس داریم:

$$\sqrt{c_n^4+\cos c_n^4+2}\le\sqrt{1+1+2}=2\ \Rightarrow 0<I\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$$

با استفاده از روش تست انتگرال برای همگرایی سری‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که $\sum\frac{2}{n^2}$ همگراست پس I نیز همگرا خواهد بود.

از طرفی داریم:

$$\sqrt{d_n^{10}+d_n+4}\ge\sqrt{4}=2$$

$$J\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$$

پس؛ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ به سری همساز معروف است که واگراست پس J نیز واگراست.

۱۸ـ گزینه «۱»

روش اول: با توجه به اینکه تابع فاصله از مبدأ $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است، خواسته سؤال مینیمم کردن این تابع با دو قید $x-y+2z=5$ و $z^2=2x^2+2y^2$ است. برای راحتی کار تابع $f=x^2+y^2+z^2$ را مینیمم می‌کنیم که نتیجتاً f نیز مینیمم می‌شود. همچنین سعی می‌کنیم با حذف z از این دو قید به مسئله‌ای برسیم که یک قید داشته باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$z=\frac{5-x+y}{2}$$

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2+y^2+2x^2+2y^2=3x^2+3y^2 \\ g(x,y)=2x^2+2y^2-\left(\frac{5-x+y}{2}\right)^2=0 \end{cases}$$

حالا با روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow \frac{6x}{4x-2(-\frac{1}{2})(\frac{5-x+y}{2})}=\frac{6y}{4y-2(\frac{1}{2})(\frac{5-x+y}{2})}$$

$$\frac{x}{\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}y-\frac{5}{2}}\Rightarrow x^2+7xy-5x=7xy+y^2+5y\Rightarrow x^2-5x=y^2+5y\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2=(y+\frac{5}{2})^2\Rightarrow \left|x-\frac{5}{2}\right|=\left|y+\frac{5}{2}\right|$$

$$(1)\quad x-\frac{5}{2}=y+\frac{5}{2}\Rightarrow x-y-5=0\Rightarrow z=\frac{5-x+y}{2}=0$$

$$2x^2+2y^2=z^2=0\Rightarrow x=y=0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$(2)\quad x-\frac{5}{2}=-(y+\frac{5}{2})\Rightarrow x=-y\Rightarrow z=\frac{5-x+y}{2}=\frac{5-x-x}{2}=\frac{5}{2}-x$$

$$z^2=2(x^2+y^2)=2(x^2+x^2)=4x^2=(\frac{5}{2}-x)^2\Rightarrow 2x=\pm(\frac{5}{2}-x)^1\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{6},y=-\frac{5}{6},z=\frac{5}{3} \\ x=-\frac{5}{2},y=\frac{5}{2},z=5 \end{cases}$$

$$f(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3})=\frac{25}{36}+\frac{25}{36}+\frac{25}{9}=\frac{25}{6}$$

$$f(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},5)=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}+25=\frac{75}{2}$$

واضح است که $(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3})$ نزدیک‌ترین و $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},5)$ دورترین نقطه روی منحنی مورد نظر از مبدأ مختصات هستند.

روش دوم (تستی): گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه داده شده صدق نمی‌کنند. از بین گزینه‌های ۱ و ۲ فاصله گزینه (۱) کمتر است. صورت‌ها همه ۵ هستند، بنابراین داریم:

$$(1)\ \text{گزینه}\rightarrow d=5\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}}=5\sqrt{\frac{2}{36}+\frac{1}{9}}=5\sqrt{\frac{2+4}{36}}=5\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(2)\ \text{گزینه}\rightarrow 5\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=5\sqrt{1+\frac{1}{2}}=5\sqrt{\frac{3}{2}}=5\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۱» حد سری داده شده را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم (در واقع دنبال تولید $\frac{k}{n}$ها هستیم):

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+\frac{k^3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$$

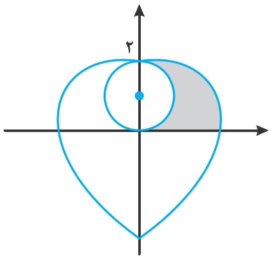
حالا با فرض $f(\frac{k}{n})=\frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$ داریم:

$$L=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}(1+x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}(\frac{1+1}{1+0})=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}2$$

۲۰ـ گزینه «۲»

روش اول: ابتدا دایره داده شده را در مختصات قطبی بازنویسی می‌کنیم: $x^2+y^2=2y \Rightarrow r^2=2r\sin\theta \Rightarrow r=2\sin\theta$

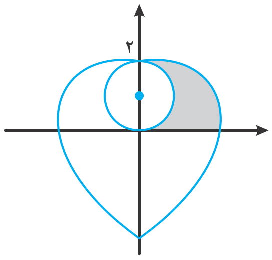
پس مساحت ناحیه مشخص شده در شکل مورد نظر است. برای محاسبه این مساحت کافی است که مساحت درون منحنی $r=3-\sin\theta$ در ربع اول را محاسبه کرده و مساحت یک نیم دایره به شعاع ۱ را از آن کم می‌کنیم. با توجه به ناحیه بین دایره و منحنی در ربع اول باید حدود θ را از صفر (محور xها) تا $\frac{\pi}{2}$ (محور yها) در نظر بگیریم.



$$S'=\frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3-\sin\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9-6\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9-6\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{19}{2}-6\sin\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}(\frac{19}{2}\theta+6\cos\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{19}{2}\times\frac{\pi}{2}-6-0)=\frac{1}{2}(\frac{19\pi}{4}-6)\Rightarrow S=S'-\frac{\pi(1)^2}{2}=\frac{19\pi}{8}-3-\frac{\pi}{2}=\frac{15\pi}{8}-3=\frac{15\pi-24}{8}$$



روش دوم: پس از اینکه معادله $x^2+y^2=2y$ را به صورت $r=2\sin\theta$ نوشتیم به روش کلاسیک می‌توان مساحت را نیز حساب کرد. نقطه‌ی تلاقی دو منحنی را حساب می‌کنیم: $3-\sin\theta=2\sin\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

از طرفی چون مساحت ناحیه مورد اشاره به ربع اول مختصات محدود شده است حد پایین انتگرال به ازای $\theta=0$ خواهد بود.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(3-\sin\theta)^2-(2\sin\theta)^2]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9+\sin^2\theta-6\sin\theta-4\sin^2\theta)d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3\sin^2\theta-6\sin\theta+9)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3(\frac{1-\cos 2\theta}{2})-6\sin\theta+9)d\theta=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta)+6\cos\theta+9\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+\frac{9\pi}{2}-6)=\frac{1}{2}(-\frac{3\pi}{4}+\frac{9\pi}{2}-6)=\frac{1}{2}(\frac{-3\pi+18\pi}{4})-3=\frac{1}{2}(\frac{15\pi}{4})-3=\frac{15\pi}{8}-3\Rightarrow S=\frac{15\pi-24}{8}$$

۲۱ـ گزینه «۴»

روش اول: برای حل این انتگرال از روابط انتگرال‌های فرولانی کمک می‌گیریم، داریم: $f(x)=e^{-ax}$ و $f(0)=e^0=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

لذا با توجه به قضیه مقابل داریم: $\int_0^\infty\frac{e^{-2x}-e^{-5x}}{x}dx=[1-0]\text{Ln}\frac{5}{2}$

یادآوری: اگر تابع $f(x)$ به ازای $x\geq 0$ پیوسته بوده و حد $f(x)$ وقتی $x\to\infty$ موجود باشد و همچنین a و b بزرگ‌تر از صفر باشد، همواره رابطه زیر را داریم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\text{Ln}\frac{b}{a}$$

روش دوم: برای تبدیل انتگرال یگانه به انتگرال دوگانه یک قاعده کمکی به صورت مقابل وجود دارد: $\int_c^d\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx=\int_c^d\int_a^b f'(xy)dydx$

در این سؤال با توجه به تابع زیر انتگرال $f(x)=e^{-x}$ است و $f'(x)=-e^{-x}$ خواهد بود. پس داریم: $\int_0^\infty\frac{e^{-2x}-e^{-5x}}{x}dx=\int_0^\infty\int_5^2 -e^{-xy}dydx$

حالا در این انتگرال کافی است ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

$$\int_0^\infty\int_5^2 -e^{-xy}dydx=\int_5^2\int_0^\infty -e^{-xy}dydx=\int_5^2[\frac{1}{x}e^{-xy}]_0^\infty dx=\int_5^2\frac{1}{x}[0-1]dx=\int_2^5\frac{dx}{x}=\ln x]_2^5=\ln\frac{5}{2}$$

۲۲ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ ابتدا مؤلفه طول را تشکیل می‌دهیم. با استفاده از مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

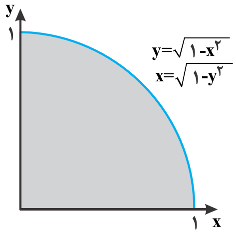
$$f'(x)=\sqrt{\sin x}\Rightarrow 1+[f'(x)]^2=1+\sin x$$

حال داریم:

$$L=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,dx=\int_0^\pi\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^\pi(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})_0^\pi=(2+2)=4$$

۲۳ـ گزینه «۱» برای حل این انتگرال ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}&0\le y\le\sqrt{1-x^2}\\&0\le x\le 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



با توجه به اینکه متغیر y هم در صورت و هم در مخرج وجود دارد و محاسبه این انتگرال به صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم و داریم:

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{e^y\,dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^1 e^y\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{1-y^2-x^2}}\right)dy$$

با تغییر متغیر $x=\sqrt{1-y^2}\sin t$ داریم $dx=\sqrt{1-y^2}\cos t\,dt$ و چون $0\le x\le\sqrt{1-y^2}$ پس $0\le\sin t\le 1$، بنابراین $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ و داریم:

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{1-y^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-y^2}\cos t\,dt}{\sqrt{(1-y^2)(1-\sin^2 t)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t}dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 e^y\frac{\pi}{2}dy=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^y dy=\frac{\pi}{2}e^y)_0^1=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

۲۴ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه رویه $r=2\cos\theta$ یک استوانه است، برخورد آن با کره مورد اشاره را در دستگاه استوانه‌ای راحت‌تر می‌توان نوشت. تصویر استوانه در صفحه xoy دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع ۱ است. یعنی $0\le r\le 2\cos\theta$ و $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. از کره $x^2+y^2+z^2=4$ نیز $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$ به دست می‌آید که به صورت $-\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}$ است. با توجه به تقارن ناحیه، حجم ناحیه $z\ge 0$ را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر می‌کنیم:

$$V=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}}r\,dzdrd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}r\sqrt{4-r^2}\,drd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=-\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(8|\sin^3\theta|-8)d\theta$$

$$=-\frac{16}{3}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta=\frac{-32}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right]=-\frac{32}{3}\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}-\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{32}{3}\left(-\frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{16(3\pi-4)}{9}$$

۲۵ـ گزینه «۲» سؤال را به سه روش حل می‌کنیم.

روش اول: ناحیه به صورت مقابل است:

$$\left.\begin{aligned}&z=\sqrt{x^2+y^2}\\&z=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1$$

پس تصویر ناحیه روی صفحه xoy دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد است.

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dA=\sqrt{2}\,dA$$

$$\sigma=\iint_S d\sigma=\iint_D\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\iint_D dA=\sqrt{2}\pi(1)^2=\sqrt{2}\pi$$

روش دوم:

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\quad,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$S=\iint ds=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,drd\theta$$

$$\sqrt{2}\times 2\pi\times\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^1=\sqrt{2}\times\cancel{2}\pi\times\frac{1}{\cancel{2}}=\pi\sqrt{2}$$

روش تستی: خواسته سؤال مساحت جانبی یک مخروط به شعاع ۱ و ارتفاع ۱ است که با توجه به رابطه $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ برابر $\pi(1)\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\pi$ است.

۲۶ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با توجه به حد داده شده و وجود عامل x^2+y^2 در ناحیه مورد نظر،انتگرال را در مختصات قطبی حل می‌کنیم. ابتدا حدود انتگرال را مشخص می‌کنیم:

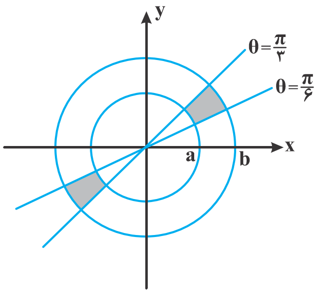
$$a^2\le x^2+y^2\le b^2 \Rightarrow a^2\le r^2\le b^2 \Rightarrow a\le r\le b$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{y}{x}\le\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan\theta\le\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

بنابراین داریم:

$$I=\iint \overbrace{\tan^{-1}(\frac{y}{x})}^{\theta}dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_a^b\theta rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\theta(\frac{r^2}{2})_a^b d\theta=\frac{1}{2}(b^2-a^2)(\frac{\theta^2}{2})_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=(b^2-a^2)\times\frac{1}{4}\times(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36})$$

$$=(b^2-a^2)(\frac{1}{4})(\frac{4\pi^2-\pi^2}{36})=(b^2-a^2)\frac{\pi^2}{48}$$



با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری، این ناحیه‌ها هم در ناحیه اول وجود دارند و هم در ناحیه سوم (با تبدیل x به $-x$ و همچنین y به $-y$ معادله ناحیه‌ها تغییر نمی‌کنند.) باید انتگرال به دست آمده را در ۲ ضرب کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{حاصل}=2\times(b^2-a^2)\times\frac{\pi^2}{48}$$

روش دوم: با توجه به تابع زیر انتگرال و حدود آن، از تغییر متغیر $\begin{cases}u=\frac{y}{x}\\ v=x^2+y^2\end{cases}$ کمک می‌گیریم، در این حالت باید توجه داشته باشید که چون با تبدیل توأمان x به $-x$ و y به $-y$، معادلات u و v تغییری نمی‌کنند، پس ناحیه D نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و برای رعایت شرط یک‌به‌یک بودن تبدیل باید حاصل انتگرال را روی ناحیه‌ای که در ربع اول قرار دارد حساب کرده و آن را ۲ برابر کنیم. پس با شرط $x>0$ و $y>0$ تغییر متغیر را انجام می‌دهیم:

$$\partial_{uv}=\frac{1}{\partial_{xy}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ 2x & 2y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{-2y^2}{x^2}-2}=\frac{-1}{2(1+(\frac{y}{x})^4)}$$

$$dxdy=|\partial_{uv}|dudv=\frac{dudv}{2(1+u^2)}$$

$$I=\iint_D\tan^{-1}(\frac{y}{x})dxdy=2\iint_{D'}\tan^{-1}u\frac{dudv}{2(1+u^2)}$$

$$D=\{(x,y):a^2\le x^2+y^2\le b^2,\frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{y}{x}\le\sqrt{3}\}\Rightarrow D'\{(u,v):u,v>0,\frac{1}{\sqrt{3}}\le u\le\sqrt{3},a^2\le v\le b^2\}$$

$$I=2\int_{a^2}^{b^2}dv\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\tan^{-1}u\frac{du}{1+u^2}=2(b^2-a^2)\frac{1}{4}(\tan^{-1}u)^2\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36})=\frac{\pi^2}{24}(b^2-a^2)$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود، جواب صحیح بین گزینه‌ها وجود ندارد؛ به نظر می‌رسد طراح محترم بدون توجه به شرط یک‌به‌یک بودن تبدیل، تغییر متغیر را انجام داده‌اند که در این صورت یک ضرب ۲ کم شده و گزینه (۱) جواب خواهد بود.

۲۷ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه z به‌صورت صریح برحسب x و y بیان شده است، ناحیه را بر صفحه xoy تصویر کرده و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=a\\ z=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\le\sqrt{x^2+y^2}\le b$$

یعنی تصویر نوار بین دو دایره به شعاع‌های a و b و مرکز مبدأ است.

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dA=\sqrt{2}dA$$

$$I=\iint_S e^z d\sigma=\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_a^b e^r\sqrt{2}rdrd\theta=2\sqrt{2}\pi(re^r-e^r)_a^b=2\sqrt{2}\pi\,[(b-1)e^b-(a-1)e^a]$$

۲۸ـ گزینه «۲» چون منحنی C بسته است، از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا $\vec{n}ds$ را حساب می‌کنیم. قرار می‌دهیم $g: y+z-2=0$، در این صورت داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(0,1,1)}{1}dA=(0,1,1)\,dA$$

$$\vec{F}=(-\alpha y^2,\alpha x,z^2\cos z)\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\alpha y^2&\alpha x&z^2\cos z\end{vmatrix}=(0,0,\alpha+2\alpha y)$$

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D(\alpha+2\alpha y)dA=\iint_D\alpha dA+\iint_D 2\alpha y dA=\alpha\pi\Rightarrow\alpha=2$$

توجه کنید که $2\alpha y$ تابع فرد است و تصویر ناحیه روی صفحه xoy دایره $x^2+y^2=1$ است که متقارن است. پس داریم: $\iint 2\alpha y dA=0$

۲۹ـ گزینه «۴» حل عادی سؤال بسیار زمان‌بر است. اما چون سطح S بسته است به فکر استفاده از قضیه دیورژانس می‌افتیم. اما برای این کار باید تابع اسکالر زیر انتگرال را به صورت حاصل‌ضرب یک تابع برداری $\vec{F}$ در بردار قائم $\vec{n}$ بنویسیم. پس ابتدا $\vec{n}$ را حساب می‌کنیم:

$$S: x^2+y^2+z^2=1$$

$$\vec{n}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}}=(x,y,z)$$

حالا فرض کنید $\vec{F}$ به‌صورت $\vec{F}=(P,Q,R)$ باشد. با این حساب داریم:

$$\vec{F}.\vec{n}=(P,Q,R).(x,y,z)=Px+Qy+R$$

این تابع باید با تابع درون انتگرال برابر باشد؛ یعنی داریم:

$$Px+Qy+Rz=x(2x+3e^{z})-y(e^{x^2}+y)+z(2z+\cos 2y)$$

و ساده‌ترین انتخاب $P=2x+3e^{z^2}$, $Q=-(e^{x^2}+y)$, $R=2z+\cos 2y$ است. حالا با توجه به $\vec{F}=(2x+3e^{z^2},-y-e^{x^2},2z+\cos 2y)$ و استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=(2-1+2)=3$$

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint 3dv=3v=3\times\frac{4}{3}\pi(1)^3=4\pi$$

۳۰ـ گزینه «۳» ابتدا وضعیت همگرایی مطلق سری را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}(x)}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2(x)}{1}<1\Rightarrow\sin^2(x)<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$$

پس سری در این بازه همگرای مطلق است. حالا وضعیت سری را در دو سر بازه $(-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4})$ بررسی کنیم: (توجه کنید که با توجه به گزینه‌ها، محاسبات فوق نیاز نبود فقط کافی است وضعیت همگرایی و یا واگرایی سری در نقاط مرزی بررسی شود.)

$$x=\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}(\pm\frac{\pi}{4})}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(\frac{1}{2})^n}{n}(-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

سری به‌دست آمده یک‌سری متناوب همگراست، با توجه به اینکه در سری متناوب حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ است که واگراست.

پس سری اولیه در این نقاط همگرای مشروط است.

سؤالات رشته‌ی عمران

۱ـ به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \le ۳۵۰۰$، تساوی $\sin(n\theta)+i\cos(n\theta)=(\sin\theta+i\cos\theta)^n$، برقرار است؟

۱) ۸۷۴ ۲) ۸۷۵ ۳) ۱۷۴۹ ۴) ۱۷۵۰

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$، کدام است؟

۱) $e^{-۲}$ ۲) $e^{-۱}$ ۳) e ۴) $e^{۲}$

۳ـ حجم حاصل از دوران منحنی $x^۲+۴y^۲=۱$ واقع در ربع اول صفحهٔ مختصات حول خط $x=-۱$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۵\pi+\pi^۲}{۶}$ ۲) $\dfrac{۵\pi-\pi^۲}{۶}$ ۳) $\dfrac{۲۰\pi+۳\pi^۲}{۲۴}$ ۴) $\dfrac{۱۰\pi+۳\pi^۲}{۱۲}$

۴ـ اگر $f(x)=\sum\limits_{k=۰}^{\infty}\dfrac{(-۱)^k}{(۲k+۱)!}x^{۲k+۲}$، آنگاه $f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\dfrac{\pi}{۲}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۲}$ ۴) π

۵ـ مقدار $\int_۱^۲\dfrac{۱}{x^۳+x}dx$، کدام است؟

۱) $\ln(۲\sqrt{۱۰})$ ۲) $\ln\sqrt{\dfrac{۸}{۵}}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}(۲)$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}(۲)+\ln ۲$

۶ـ بیشترین انحنای تابع $y=\cosh x$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۷ـ اگر θ زاویهٔ بین خم $\vec{r}(t)=(t,t^۲,t^۳)$ و رویهٔ $xz^۲-۲yz+x^۲y=۰$ در نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۳۹}}$ ۲) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴۰}}$ ۳) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴۱}}$ ۴) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴۲}}$

۸ـ طول قوس منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $z=۱-\sqrt{۲}x$ و $۳x^۲+y^۲=۳$، کدام مضرب ۲π است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹ـ مقدار $\int_۰^۱\int_y^۱\dfrac{۱}{x^۴+۱}dxdy$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۸}$ ۲) $\dfrac{\pi}{۶}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۵}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۴}$

۱۰ـ فرض کنید C مرز مربع A باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده و $\oint_C(xy^۲+x^۳\sin^۳x)dx+(x^۲y+۲x)dy=۶$. مساحت مربع A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = i^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = i^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

حالا با توجه به تفکیک مقدار i^n به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$i^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) = \begin{cases} i\cos n\theta + \sin n\theta \; ; \; n = ۴k+۱ \\ -\cos n\theta + i\sin n\theta \; ; \; n = ۴k+۲ \\ -i\cos n\theta - \sin n\theta \; ; \; n = ۴k+۳ \\ \cos n\theta + i\sin n\theta \; ; \; n = ۴k+۴ \end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به صورت $۴k+۱$، که در آن k یک عدد حسابی است، تساوی مورد نظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

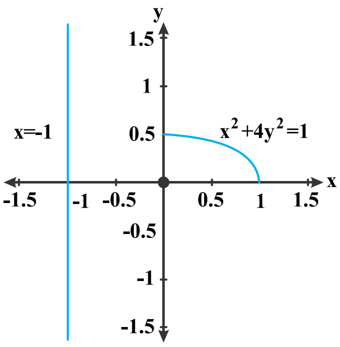
$$۱ \le ۴k+۱ \le ۳۵۰۰ \Rightarrow ۰ \le k \le ۸۷۴$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به صورت $۸۷۴ - ۰ + ۱ = ۸۷۵$ محاسبه می‌شود.

۲ـ گزینه «۲» برای محاسبه این حد به راحتی با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{۱}{n}}}{n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n} = e^{-۱}$$

۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای حل این سؤال از روش پوسته‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم:



$$V = ۲\pi\int_a^b |x-k|\, y\,dx$$

$$x^۲ + ۴y^۲ = ۱ \xrightarrow{x,y>۰} y = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱-x^۲}$$

$$V = ۲\pi\int_۰^۱ |x+۱|\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-x^۲}\,dx = \pi\int_۰^۱ (x+۱)\sqrt{۱-x^۲}\,dx$$

$$= \pi\int_۰^۱ (x\sqrt{۱-x^۲} + \sqrt{۱-x^۲})\,dx$$

$$= \pi[-\frac{۱}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۲}(x\sqrt{۱-x^۲} + \sin^{-۱}x)]_۰^۱$$

$$= \pi[(۰+۰+\frac{\pi}{۴}) - (-\frac{۱}{۳}+۰+۰)] = \pi(\frac{۳\pi+۴}{۱۲}) = \frac{۴\pi+۳\pi^۲}{۱۲}$$

سنجش گزینه (۴) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۴ـ گزینه «۱» برای حل این‌گونه سؤالات باید ببینیم سری داده شده شبیه به بسط مک‌لورن کدام‌یک از توابع شناخته شده است. با کمی دقت واضح است که با تابعی شبیه $\sin x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)!}x^{۲k+۱}$ سر و کار داریم. با ضرب دو طرف این تساوی در x داریم:

$$x\sin x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)!}x^{۲k+۲} = f(x) \Rightarrow f'(x) = \sin x + x\cos x \to f'(\pi) = ۰ + \pi(-۱) = -\pi$$

۵ـ گزینه «۲» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی کرده و داریم:

$$\int_۱^۲ \frac{dx}{x^۳+x} = \int_۱^۲ \frac{dx}{x(x^۲+۱)} = \int_۱^۲ (\frac{۱}{x} - \frac{x}{x^۲+۱})\,dx = [\mathrm{Ln}\,x - \frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}(x^۲+۱)]_۱^۲ =$$

$$[(\mathrm{Ln}۲ - \frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۵) - (\mathrm{Ln}۱ - \frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۲)] = \frac{۱}{۲}(۳\mathrm{Ln}۲ - \mathrm{Ln}۵) = \frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}\frac{۲^۳}{۵} = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{۸}{۵}}$$

۶ـ گزینه «۳» ابتدا تابع انحنای منحنی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y=\cosh x\Rightarrow y'=\sinh x\Rightarrow y''=\cosh x$$

$$\kappa=\frac{|\cosh x|}{[1+(\sinh x)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh x}{[1+(\sinh x)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh x}{[\cosh^2 x]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\cosh^2 x}$$

توجه داشته باشید برای پیدا کردن ماکزیمم این تابع نیازی به پیدا کردن نقاط بحرانی به کمک مشتق نیست؛ فقط کافیست به خاطر داشته باشید که مینیمم مقدار تابع $\cosh x$ به ازای $x=0$ حاصل می‌شود که در این نقطه تابع انحنا ماکزیمم خواهد بود. پس داریم: $\kappa_{max}=\frac{1}{1}=1$

۷ـ گزینه «۲» زاویه بین دو منحنی در نقطه تماس آنها با زاویه بین بردار گرادیان (یا سرعت) در آن نقطه برابر است. بنابراین داریم:

$$\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3)\Rightarrow\vec{r}'(t)=(1,2t,3t^2)\xrightarrow{(1,1,1)}\vec{r}'(t)=(1,2,3)$$

$$f(x,y,z)=xz^2-2yz+x^2y=0\ \Rightarrow\vec{\nabla}f(x,y,z)=(z^2+2xy,-2z+x^2,2xz-2y)\xrightarrow{(1,1,1)}\vec{\nabla}f=(3,-1,0)$$

$$\cos\theta=\frac{(1,2,3).(3,-1,0)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{9+1}}=\frac{3-2}{\sqrt{14}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{140}}$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا منحنی داده را به صورت پارامتری می‌نویسیم. برای این کار داریم:

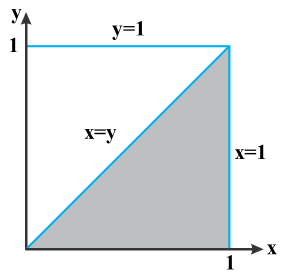
$$x^2+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sqrt{3}\sin t\end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi\qquad ,\ z=1-\sqrt{2}x=1-\sqrt{2}\cos t$$

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sqrt{3}\sin t,1-\sqrt{2}\cos t)$$

حالا با استفاده از رابطه طول قوس منحنی‌های پارامتری داریم:

$$L=\int_a^b\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2+(\sqrt{2}\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{3(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{3}dt=2\sqrt{3}\pi$$

۹ـ گزینه «۱» چون تابع درون انتگرال فقط تابعی از x است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به شکل حدود انتگرال به صورت زیر تعیین خواهد شد:



$$I=\int_0^1\int_y^1\frac{1}{x^4+1}dxdy=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{x^4+1}dydx=\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{x}{(x^2)^2+1}dx$$

$$\xrightarrow{x^2=u\Rightarrow 2xdx=du}I=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}u\,|_0^1=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\pi}{8}$$

۱۰ـ گزینه «۲» در این‌گونه مسائل که با انتگرال روی منحنی سر و کار داریم ولی در صورت سؤال صحبت از مساحت شده است، مطمئن باشید طراح محترم شما را به سمت قضیه گرین راهنمایی می‌کند. در این سؤال داریم:

$$\oint_C\underbrace{(xy^2+x^3\sin^3 x)}_{P}dx+\underbrace{(x^2y+2x)}_{Q}dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(2xy+2-2xy)dA=2\iint_D dA=2A_D=6\ \Rightarrow A_D=3$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ـ فرض کنید به‌ازای عدد حقیقی $\alpha > ۰$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(۲+i)z^۲ - ۲\sqrt{۲}\alpha z - i + ۲ = ۰$ حقیقی باشد. مقدار α، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲ـ اگر $\lim\limits_{x\to ۰^+}\left(\frac{۲^x+۲^{-x}+e^x-۳}{x}\right)^{\frac{۱}{x}} = e^A$، آنگاه مقدار A کدام است؟

۱) صفر ۲) $(\ln ۲)^۲ + \frac{۱}{۲}$ ۳) $(\ln ۲) + \frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\ln ۲) + ۱$

۳ـ فرض کنید $f_{n+۲} = f_{n+۱} + f_n (n \in \mathbb{N})$، $f_۱ = ۱, f_۲ = ۲$. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_{n+۱}}{f_n}$، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۴ـ مقدار تقریب خطی $\sqrt{۳(۱/۱)^۳ - ۲e^{-۰/۱}}$، کدام است؟

۱) $۱/۰۳$ ۲) $۱/۰۵$ ۳) $۱/۳۵$ ۴) $۱/۵۵$

۵ـ فرض کنید $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ در دستگاه $\begin{cases} e^{۲u-۱} - ۴vx = y \\ \cos(\pi u) - y\sin(\pi v) = x^۲ \end{cases}$ به‌ازای $u \geq ۰$ و $۱ < v \leq ۲$ صادق باشند. مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}(۰,۱)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) -۴

۶ـ فرض کنید $f(x+y, x-y) = \int_{۴x^۲}^{۴y^۲}\frac{\ln t}{t}dt$. مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}(e,۰)$، کدام است؟

۱) $\frac{-۸}{e}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۴}{e}$ ۴) $\frac{۴}{e}(۱+\ln ۲)$

۷ـ فرض کنید C منحنی بسته با ضابطهٔ $r = \cos\theta$ در مختصات قطبی در جهت مثبت باشد. مقدار $\oint_C (xy^۲dy - x^۲ydx)$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۳۲}\pi$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}\pi$ ۳) صفر ۴) $-\frac{۳}{۱۶}\pi$

۸ـ فرض کنید S یک تور به شکل سطح خارجی استوانهٔ $x^۲ + z^۲ = ۴$ و صفحات $y = -۱$ و $y = ۱$ باشد و در رودی قرار داشته باشد که میدان بردارهای سرعت جریان آب در آن $\vec{F} = (x,x,y)$ است. شار عبوری از تور، کدام است؟

۱) ۵π ۲) ۶π ۳) ۸π ۴) ۱۰π

۹ـ مقدار $\iiint_R (۳ - x^۳ + \sin z)dV$، که R ناحیهٔ محصور به داخل کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ می‌باشد، کدام است؟

۱) ۴π ۲) ۸π ۳) ۱۶π ۴) ۳۲π

۱۰ـ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۱,۰)$ از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه اصلی ریشه‌های معادله درجه ۲ داریم:

$$z = \frac{\sqrt{۲}\alpha \pm \sqrt{۲\alpha^۲ - (۲+i)(۲-i)}}{۲+i} = \frac{\sqrt{۲}\alpha \pm \sqrt{۲\alpha^۲ - ۵}}{۲+i} = \frac{(\sqrt{۲}\alpha \pm \sqrt{۲\alpha^۲ - ۵})(۲-i)}{۴+۱}$$

با توجه به وجود عدد مختلط $۲-i$ در صورت، فقط در حالتی مقدار این کسر یک عدد حقیقی خواهد شد که در صورت کسر ضریبی از مزدوج این عدد مختلط را داشته باشیم. با توجه به اینکه $\sqrt{۲}\alpha$ همواره حقیقی است، پس فقط عبارت $\sqrt{۲\alpha^۲ - ۵}$ می‌تواند جزء مختلط عدد مزدوج را بسازد. بدین منظور باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}\alpha \pm \sqrt{۲\alpha^۲ - ۵} = k(۲-i) \xrightarrow{۲\alpha^۲ - ۵ < ۰} \sqrt{۲}\alpha \pm i\sqrt{۵ - ۲\alpha^۲} = k(۲-i) \overset{\alpha > ۰}{\Rightarrow} \sqrt{۲}\alpha - i\sqrt{۵ - ۲\alpha^۲} = k(۲-i)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}\alpha}{۲} = \frac{\sqrt{۵ - ۲\alpha^۲}}{۱} = k \Rightarrow ۲\alpha^۲ = ۴(۵ - ۲\alpha^۲) \Rightarrow ۱۰\alpha^۲ = ۲۰ \xrightarrow{\alpha > ۰} \alpha = \sqrt{۲}$$

۲ـ گزینه «۲» حد داده شده ابتدا به فرم $\frac{0}{0}$ درون پرانتز مبهم است. برای حل این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3}{x}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x\,Ln2-2^{-x}\,Ln2+e^x}{1}=1$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، اکنون مشخص شده که حد در واقع به صورت 1^∞ مبهم است. پس در کل باید به صورت زیر حل شود:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3}{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3-x}{x}\right)}=e^A$$

$$A=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x+2^{-x}+e^x-3-x}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x\,Ln2-2^{-x}\,Ln2+e^x-1}{2x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x(Ln2)^2+2^{-x}(Ln2)^2+e^x}{2}=\frac{2(Ln2)^2+1}{2}$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به معادله بازگشتی دنباله، جمله عمومی آن را به دست آورده و حد آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0\Rightarrow\lambda^2-\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow f_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

توجه داشته باشید که نیازی به محاسبه ضرایب مجهول این دنباله نیست؛ زیرا به ازای $n\to\infty$ جمله $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ به سمت صفر میل می‌کند و فقط عبارت $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ باقی می‌ماند. حالا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۴ـ گزینه «۴» ابتدا تابع $f(x,y)=\sqrt{3x^3-2e^y}$ را تعریف می‌کنیم. حالا کافیست تقریب مرتبه اول این تابع را در نقطه $(x_0,y_0)=(1,0)$ و به ازای $\Delta x=0/1$ و $\Delta y=-0/1$ محاسبه کنیم:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

$$f(1/1,-0/1)=f(1,0)+0/1\,f_x(1,0)-0/1\,f_y(1,0)$$

$$f_x=\frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3-2e^y}}\quad,\quad f_y=\frac{-2e^y}{2\sqrt{3x^3-2e^y}}$$

$$f(1/1,-0/1)=\sqrt{3-2}+0/1\times\frac{9}{2\sqrt{3-2}}-0/1\times\frac{-2}{2\sqrt{3-2}}=1+0/45+0/1=1/55$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا به ازای $(x,y)=(0,1)$ مقادیر u و v را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x,y,u,v)=e^{2u-1}-4vx-y=0\\ g(x,y,u,v)=\cos(\pi u)-y\sin(\pi v)-x^2=0\end{cases}\xrightarrow{(x,y)=(0,1)}\begin{cases}e^{2u-1}-1=0\\ g(x,y,u,v)=\cos(\pi u)-\sin(\pi v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\ v=2\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطه مشتق جزئی در توابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_x & f_v\\ g_x & g_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_u & f_v\\ g_u & g_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-4v & -4x\\ -2x & -y\pi\cos(\pi v)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2e^{2u-1} & -4x\\ -\pi\sin(\pi u) & -y\pi\cos(\pi v)\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-8 & 0\\ 0 & -\pi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 0\\ -\pi & -\pi\end{vmatrix}}=-\frac{8\pi}{-2\pi}=4$$

۶ـ گزینه «۱»

$$\begin{matrix} x+y=v \\ x-y=u \end{matrix} \Rightarrow f(v,u)=\int_{(v+u)^{۲}}^{(v-u)^{۲}} \frac{Lnt}{t}dt \xrightarrow[\text{با تغییر اسم}]{} f(x,y)=\int_{(x+y)^{۲}}^{(x-y)^{۲}} \frac{Lnt}{t}dt \Rightarrow x=\frac{v+u}{۲} \quad , \quad y=\frac{v-u}{۲}$$

حال x و y مستقل‌اند و می‌شود مشتق پاره‌ای گرفت:

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{Ln(x-y)^{۲}}{(x-y)^{۲}}\times ۲(x-y)(-۱)-\frac{Ln((x+y)^{۲})}{(x+y)^{۲}}\times ۲(x+y)$$

$$\begin{matrix} x=e \\ y=\circ \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(e,\circ)=\frac{Ln(e^{۲})}{e^{۲}}\times ۲e(-۱)-\frac{Ln(e^{۲})}{e^{۲}}\times ۲e=\boxed{\frac{-۸}{e}}$$

$$Ln(e^{۲})=۲Ln(e)=۲$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به بسته بودن منحنی، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C(\underbrace{-x^{۲}y}_{P}dx+\underbrace{xy^{۲}}_{Q}dy)=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(y^{۲}+x^{۲})dA$$

با توجه به شکل قطبی منحنی و وجود عامل $x^{۲}+y^{۲}$ در انتگرال، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. برای دایره $r=\cos\theta$، داریم:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲} \\ \circ\le r\le\cos\theta \end{cases}$$

پس انتگرال برابر است با:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\circ}^{\cos\theta}(r^{۲})rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۴}r^{۴}]_{\circ}^{\cos\theta}d\theta=\frac{۱}{۴}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۴}\theta d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲})^{۲}d\theta=\frac{۱}{۸}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+۲\cos ۲\theta+\cos^{۲}۲\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۸}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+۲\cos ۲\theta+\frac{۱+\cos ۴\theta}{۲})d\theta=\frac{۱}{۸}(\frac{۳}{۲}\theta+\sin ۲\theta+\frac{۱}{۸}\sin ۴\theta)_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳\pi}{۳۲}$$

۸ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه سطح S بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده کرده و داریم:

$$\varphi=\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_D(\text{div}\vec{F})dv=\iiint_D(۱+\circ+\circ)dv=V_D=\pi(۴)(۲)=۸\pi$$

توجه داشته باشید در پایان مقدار انتگرال برابر حجم داخل استوانه مورد اشاره است که به صورت حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع محاسبه شده است.

۹ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه ناحیه درون کره نسبت به متغیرهای x و z زوج بوده و توابع $x^{۳}$ و $\sin z$ نسبت به این متغیرها فرد هستند، مقدار این بخش از انتگرال‌ها صفر خواهد بود. پس داریم:

$$\iiint_R(۳-x^{۳}+\sin z)dV=\iiint_R ۳dV=۳V_R=۳\times\frac{۴}{۳}\pi(۲)^{۳}=۳۲\pi$$

۱۰ـ گزینه «۳» فاصله نقطه مورد نظر از هر نقطه (x,y,z) از سهمی‌گون مورد اشاره برابر است با $d=\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}+z^{۲}}$. برای اینکه این تـابع را مینیمم سازیم، کافیست تابع درون انتگرال را با روش ساده شده لاگرانژ مینیمم کنیم. یعنی داریم:

$$f(x,y,z)=(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}+z^{۲} \quad , \quad g(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}-z=\circ$$

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{۲(x-۱)}{۲x}=\frac{۲(y-۱)}{۲y}=\frac{۲z}{-۱}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{x}=۱-\frac{۱}{y}=-۲z\Rightarrow x=y=\frac{۱}{۱+۲z}$$

$$(\frac{۱}{۱+۲z})^{۲}+(\frac{۱}{۱+۲z})^{۲}-z=\frac{۲-z(۱+۲z)^{۲}}{(۱+۲z)^{۲}}=\circ\Rightarrow ۲-z-۴z^{۲}-۴z^{۳}=\circ\Rightarrow z=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=y=\frac{۱}{۲}$$

$$d=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

سؤالات رشته‌ی ریاضی

۱ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ ، در صورت وجود کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) حد وجود ندارد.

۲ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{201} - x + 7 = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) حداقل ۴

۳ـ کدام مورد برای سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ ، درست است؟

۱) همگرا به $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ است. ۲) همگرا به ۱ است. ۳) همگرا به $\sqrt{2}$ است. ۴) واگراست.

۴ـ کدام مورد برای مقادیر سری‌های $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$ و $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$ درست است؟

۱) I و J موجود و متناهی‌اند. ۲) J موجود و متناهی و I بی‌نهایت است.

۳) I موجود و متناهی و J بی‌نهایت است. ۴) I و J بی‌نهایت هستند.

۵ـ مقدار متوسط تابع $f(x,y) = x$ بر قطعه‌ای از قرص $x^2 + y^2 \le 4$ که در سمت راست خط $x = 1$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$ ۲) $\dfrac{6\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$ ۳) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$ ۴) $\dfrac{6\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$

۶ـ فرض کنید D ناحیهٔ محصور به منحنی‌های $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ بوده و داشته باشیم: $I = \iint\limits_D f(xy)dxdy = A\int_1^2 f(u)du$. مقدار A کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{4}\ln 2$ ۲) $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ۳) $\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

۷ـ جرم کل چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 1$ واقع در $\dfrac{1}{8}$ اول فضا و تابع چگالی $\rho(x,y,z) = \dfrac{16}{(1+x+y+z)^3}$، کدام است؟

۱) $4\ln 2 - 5$ ۲) $8\ln 2 - 5$ ۳) $4\ln 2 + 5$ ۴) $8\ln 2 + 5$

۸ـ فرض کنید $z = z(x,y)$، $u = e^y \cos x + xe^z$ و $x^2 z + y\ln x = x\cos y$. مقدار $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0)$، کدام است؟

۱) $-\sin(1)$ ۲) صفر ۳) $\sin(1)$ ۴) $2e$

۹ـ فرض کنید C منحنی قطبی $r = 2\sqrt[3]{\cos\theta}$ به‌ازای $\dfrac{-\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ واقع در صفحهٔ مختصات xy باشد. مقدار $\int_C 2xdx + dz$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\dfrac{2\pi}{3}$

۱۰ـ فرض کنید S آن قسمت از رویهٔ استوانه‌ای $y = e^x$ واقع در $\dfrac{1}{8}$ اول فضا باشد که تصویر قائم آن بر صفحهٔ yz به‌صورت $R = \{1 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}$ است. شار میدان $\vec{F} = 2x\,\vec{i} - 3xy\,\vec{j} + \ln z\,\vec{k}$ بر S، کدام است؟

۱) $5 - 10\ln 2$ ۲) $3 - 2\ln 2$ ۳) $10\ln 2 - 5$ ۴) $10\ln 2 - \dfrac{15}{4}$

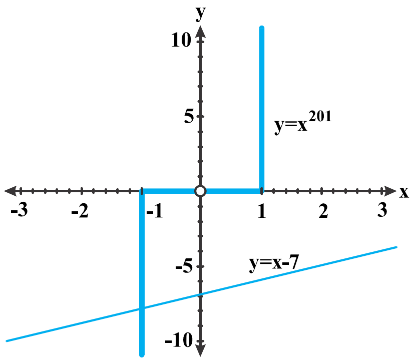
پاسخنامه رشته‌ی ریاضی

۱ـ گزینه «۲» حد داده شده به فرم $\frac{۰}{۰}$ مبهم است. ابتدا با تغییر متغیر $\cos^{-۱}(۱-x)=t$ حد داده شده را بازنویسی کرده و داریم:

$$\cos^{-۱}(۱-x)=t \Rightarrow ۱-x=\cos t \Rightarrow x=۱-\cos t$$

$$L=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos^{-۱}(۱-x)}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{\sqrt{۱-\cos t}}=\frac{۰}{۰}\sim \lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{\sqrt{\frac{۱}{۲}t^۲}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}t}{t}=\sqrt{۲}$$

۲ـ گزینه «۱» برای حل این معادله کافیست آن را به صورت $x^{۲۰۱}=x-۷$ نوشته و دستگاه حاصل را در یک صفحه مختصات رسم کنیم:



توجه داشته باشید که در بازه $-۱<x<۱$، مقدار تابع $x^{۲۰۱}$ بسیار ناچیز است و به سمت صفر میل می‌کند؛ به همین خاطر در نمودار این تابع اینطور به نظر می‌رسد که در این بازه تابع یک خط راست است. همچنین بعد از این بازه از هر دو طرف تابع به سرعت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و سرعت حرکت آن به مراتب از تابع خطی $x-۷$ بیشتر است. بنابراین این ۲ تابع فقط در یک نقطه در بازه $-۲<x<-۱$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۳ـ گزینه «۲» ابتدا دنباله درون سری را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n\sqrt{n+۱}+(n+۱)\sqrt{n}}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n+۱}\sqrt{n}(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}\sqrt{n}(n+۱-n)}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}-\frac{۱}{\sqrt{n+۱}}\right)$$

واضح است که سری به‌دست آمده تلسکوپی است و برای حاصل آن داریم:

$$S=a_۱-\lim_{n\to\infty}a_{n+۱}=۱-۰=۱$$

۴ـ گزینه «۳» برای بررسی همگرایی سری‌های داده شده، ابتدا هم‌ارز عبارت $\sqrt[n]{۲}$ در بی‌نهایت را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{۲}=۲^{\frac{۱}{n}}=e^{\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}۲}\overset{n\to\infty}{\sim}۱+\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}۲$$

حالا با جایگذاری این حد در سری‌های داده شده داریم:

$$I=\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt[n]{۲}-۱)^n\sim\sum_{n=۱}^{\infty}(۱+\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}۲-۱)^n=\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\mathrm{Ln}۲}{n})^n<\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n})^n<\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$$

پس طبق آزمون مقایسه، این سری همگراست.

$$J=\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt[n]{۲}-۱)\sim\sum_{n=۱}^{\infty}(۱+\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}۲-۱)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}۲}{n}$$

می‌دانیم این یک سری هارمونیک واگراست.

۵ـ گزینه «۴» در واقع خواسته سؤال مقدار متوسط تابع در بازه $۱\le x\le ۲$ و $-\sqrt{۴-x^۲}\le y\le\sqrt{۴-x^۲}$ است که به سادگی داریم:

$$\bar{f}(x,y)=\frac{\int_۱^۲\int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}}x\,dy\,dx}{\int_۱^۲\int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}}dy\,dx}=\frac{\int_۱^۲ ۲x\sqrt{۴-x^۲}\,dx}{\int_۱^۲ ۲\sqrt{۴-x^۲}\,dx}=\frac{-\frac{۲}{۳}(۴-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۱^۲}{x\sqrt{۴-x^۲}+۴\sin^{-۱}\frac{x}{۲}\Big|_۱^۲}=\frac{-\frac{۲}{۳}(۰-۳\sqrt{۳})}{[۰+۴(\frac{\pi}{۲})-۱\sqrt{۳}-۴(\frac{\pi}{۶})]}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۴\pi}{۳}-\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴\pi-۳\sqrt{۳}}$$

۶ـ گزینه «۳» اگر فرض کنیم $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ آنگاه D از صفحه xoy به ناحیه مستطیل $1 \le u \le 2$ و $1 \le v \le 4$ تبدیل می‌شود. اما حواستان باشد چون با تبدیل همزمان x به x- و y به y- معادلات u و v توأمان بدون تغییرات باقی می‌ماند، لذا حاصل انتگرال را در ربع اول حساب کرده و آن را ۲ برابر می‌کنیم. ابتدا ژاکوبین را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}$$

بنابراین داریم:

$$I = \iint_D f(xy)dxdy = 2\int_1^2\int_1^4 f(u)\frac{1}{2v}dvdu = \int_1^2 f(u)\mathrm{Ln}\, v|_1^4\, du = \int_1^2 f(u)(\mathrm{Ln}4-\mathrm{Ln}2)du = \mathrm{Ln}2\int_1^2 f(u)du$$

تذکر: اگر به یک به یک نبودن تبدیل استفاده شده توجه نداشته باشید، ضریب ۲ را نداشته و به اشتباه گزینه (۲) را انتخاب خواهید کرد!

۷ـ گزینه «۲» به راحتی با استفاده از مختصات دکارتی داریم:

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)dv = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}\frac{16}{(1+x+y+z)^3}dzdydx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{-8}{(1+x+y+z)^2}\Big]_0^{1-x-y}dydx = -8\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dydx$$

$$= -8\int_0^1\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{(1+x+y)}\right)_0^{1-x}dx = -8\int_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-0-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= -8\int_0^1\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{4}-\frac{1}{1+x}\right)dx = -8\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}x^2-\mathrm{Ln}(1+x)\right)_0^1 = -8\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\mathrm{Ln}2\right) = -8\left(\frac{5}{8}-\mathrm{Ln}2\right) = 8\mathrm{Ln}2-5$$

۸ـ گزینه «۱» با فرض $\begin{cases} F(x,y,z,u) = e^y\cos x + xe^z - u = 0 \\ G(x,y,z,u) = x^2z + y\ln x - x\cos y = 0 \end{cases}$ و استفاده از روابط مشتق جزئی داریم:

$$\xrightarrow{(x,y)=(1,0)} \begin{cases} \cos 1 + e^z - u = 0 \\ z + 0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1, u = \cos 1 + e^z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_z \\ G_u & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -e^y\sin x + e^z & xe^z \\ 2xz+\frac{y}{x}-\cos y & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & xe^z \\ 0 & x^2 \end{vmatrix}}$$

$$\xrightarrow{(x,y,z,u)=(1,0,1,\cos 1+e^z)} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -\sin 1 + e & e \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & e \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-\sin 1 + e - e}{-1} = -\sin 1$$

۹ـ گزینه «۱» سؤال ایراد تایپی دارد که می‌تواند ایراد علمی هم محسوب شود. به نظر می‌رسد در صورت سؤال یک ایراد تایپی وجود دارد و منظور طراح $\int_C 2xdx + dy$ بوده است. در این صورت با توجه به بسته بودن مسیر از قضیه گرین استفاده کرده و داریم:

$$\int_C 2xdx + dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_D(0-0)dA = 0$$

۱۰ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که طبق گفته سؤال، تصویر رویه S، مستطیل R روی صفحه yoz است. حالا با فرض $g: e^x - y = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla}g = (e^x,-1,0) \Rightarrow \vec{\nabla}g.\vec{i} = e^x$$

و بنابراین داریم:

$$\vec{n}d\sigma = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA = \frac{(e^x,-1,0)}{e^x}dA = (1,-e^{-x},0)dA$$

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma = (2x,-3xy,\mathrm{Ln}\, z).(1,-e^{-x},0)dA = (2x+3xye^{-x})dA = (2x+3x(e^x)e^{-x})dA = (2x+3x)dA = 5xdA$$

پس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = \iint_D 5xdA = \iint_D 5\mathrm{Ln}\, ydzdy = 5\int_1^2\int_0^1 \mathrm{Ln}\, ydzdy = 5\int_1^2 \mathrm{Ln}\, ydy = 5(y\mathrm{Ln}\, y - y)_1^2 = 5[(2\mathrm{Ln}2-2)-(1\mathrm{Ln}1-1)] = 5(2\mathrm{Ln}2-1)$$

سؤالات رشتهٔ مهندسی کامپیوتر

۱ـ به‌ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \leq ۳۵۰۰$، تساوی $\sin(n\theta) + i\cos(n\theta) = (\sin\theta + i\cos\theta)^n$، برقرار است؟

۱) ۸۷۴   ۲) ۸۷۵   ۳) ۱۷۴۹   ۴) ۱۷۵۰

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$، کدام است؟

۱) e^{-2} ۲) e^{-1} ۳) e ۴) e^2

۳ـ مقدار $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$، کدام است؟

۱) $\ln(2\sqrt{10})$ ۲) $\ln\sqrt{\frac{8}{5}}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2)$ ۴) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2) + \ln 2$

۴ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $x + z^2 - \frac{1}{8} = xy + yz + xz$ که موازی صفحهٔ $x - 2y + 3z = 4$ باشد، کدام است؟

۱) $x - 2y + 3z = 2$ ۲) $x - 2y + 3z = -3$ ۳) $x - 2y + 3z = -2$ ۴) $x - 2y + 3z = 3$

۵ـ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از رویهٔ $xyz^2 = 2$، کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۶ـ مقدار $\int_0^1\int_y^1 \frac{1}{x^4+1}dxdy$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۷ـ فرض کنید C مرز مربع A باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته‌شده و $\oint_C (xy^2 + x^3\sin^3 x)dx + (x^2y + 2x)dy = 6$. مساحت مربع A، کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

پاسخنامه رشتهٔ مهندسی کامپیوتر

۱ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = i^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = i^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

حالا با توجه به تفکیک مقدار i^n به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$i^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) = \begin{cases} i\cos n\theta + \sin n\theta & ; \; n = 4k+1 \\ -\cos n\theta + i\sin n\theta & ; \; n = 4k+2 \\ -i\cos n\theta - \sin n\theta & ; \; n = 4k+3 \\ \cos n\theta + i\sin n\theta & ; \; n = 4k+4 \end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به‌صورت $4k+1$، که در آن k یک عدد حسابی است، تساوی موردنظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

$$1 \leq 4k+1 \leq 3500 \Rightarrow 0 \leq k \leq 874$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به‌صورت $874 - 0 + 1 = 875$ محاسبه می‌شود.

۲ـ گزینه «۲» برای محاسبه این حد به راحتی با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n} = e^{-1}$$

۳ـ گزینه «۲» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی کرده و داریم:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = [\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^2 = [(\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5) - (\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2)]$$

$$= \frac{1}{2}(3\ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{2^3}{5} = \ln\sqrt{\frac{8}{5}}$$

۴ـ گزینه «۲» ابتدا باید بردار نرمال صفحه را به‌دست آوریم. با توجه به اینکه صفحه‌ای موازی صفحه مورد نظر داده شده است، بردار نرمال آن‌ها نیز موازی خواهد بود. پس $\vec{n} \parallel (1,-2,3)$. از طرفی این بردار نرمال بر رویه مورد نظر عمود است پس در راستای بردار گرادیان آن در نقطه تماس خواهد بود.

در نتیجه داریم:

$$f(x,y,z) = x + z^2 - \frac{1}{8} - xy - yz - xz = 0$$

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{n} \Rightarrow \frac{f_x}{1} = \frac{f_y}{-2} = \frac{f_z}{3} \Rightarrow \frac{1-y-z}{1} = \frac{-x-z}{-2} = \frac{2z-y-x}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+2y+2z = -x-z \\ 3-3y-3z = 2z-y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ x-2y-5z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2z = -1 \\ 4y+8z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - \frac{1}{2} \\ y = -2z + \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$f(z) = z - \frac{1}{2} + z^2 - \frac{1}{8} - (z-\frac{1}{2})(-2z+\frac{5}{4}) - (-2z+\frac{5}{4})z - (z-\frac{1}{2})z = 0$$

$$\Rightarrow z - \frac{5}{8} + z^2 - (-2z^2 + \frac{9}{4}z - \frac{5}{8}) - (-2z^2 + \frac{5}{4}z) - (z^2 - \frac{1}{2}z) = 4z^2 - 2z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{4}, z = 0 & (1) \\ x = 0, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x - 2y + 3z = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 0 = -3$$

$$(2) \Rightarrow x - 2y + 3z = 0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید یکی از این صفحات در گزینه (۲) آمده است.

۵ـ گزینه «۲» فاصله مبدأ مختصات از هر نقطه (x,y,z) رویه مورد اشاره برابر است با $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. برای اینکه این تابع را مینیمم سازیم، کافی است تابع درون رادیکال را با روش ساده شده لاگرانژ مینیمم کنیم. یعنی داریم:

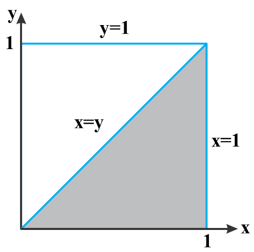
$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad , \quad g(x,y,z) = xyz^2 - 2 = 0$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{2x}{yz^2} = \frac{2y}{xz^2} = \frac{2z}{2xyz} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2z^2 = 2y^2z^2 \\ 4x^2yz = 2yz^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm y = \pm\frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$xyz^2 - 2 = x(\pm x)(2x^2) - 2 = \pm 2x^4 - 2 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1 , z = \pm\sqrt{2}$$

$$d = \sqrt{1+1+2} = 2$$

۶ـ گزینه «۱»



چون تابع درون انتگرال فقط تابعی از x است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به شکل حدود انتگرال به‌صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x^4+1} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x^4+1} dy dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2+1} dx$$

$$\xrightarrow{x^2=u \Rightarrow 2xdx=du} I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{8}$$

۷ـ گزینه «۲» در این‌گونه مسائل که با انتگرال روی منحنی سروکار داریم ولی در صورت سؤال صحبت از مساحت شده است، مطمئن باشید طراح محترم شما را به سمت قضیه گرین راهنمایی می‌کند. در این سؤال داریم:

$$\oint_C \underbrace{(xy^2 + x^3\sin^3 x)}_{P} dx + \underbrace{(x^2y + 2x)}_{Q} dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \iint_D (2xy + 2 - 2xy) dA = 2\iint_D dA = 2A_D = 6 \Rightarrow A_D = 3$$