مدرسان شریف

فصل اول

«مقدمات منطق ریاضی»

مقدمه

به مجموعه‌ای از قواعد و روش‌هایی که به کمک آن‌ها می‌توانیم درستی یا نادرستی یک استدلال یا بحث را تعیین کرده و آن‌ها را از یکدیگر جدا کنیم، **منطق** می‌گوییم. منطق ریاضی، شاخه‌ای از ریاضیات است که به ارتباط بین ریاضی و منطق می‌پردازد. نظریه منطق در فرهنگ‌های بسیاری در طول تاریخ، از جمله چین، هند، یونان و جهان اسلام توسعه یافت. در قرن هجده در اروپا، تلاش بسیاری برای ارائه عملیات منطق ریاضی از طریق نمادین یا جبری توسط ریاضیدانان فلسفی از جمله لایب نیتز و لامبرت انجام شد. بنابراین ریشه‌های پیدایش منطق ریاضی، به کارهای آن‌ها می‌رسد. بعد از آن‌ها ریاضیدان بسیاری ازجمله، جوزپه پئانو، آگوستوس دمورگان، جرج بول، گوتلوب فرگه، برتراند راسل، داوید هیلبرت و دیگران در جهت پیشبرد این علم گام برداشتند. پژوهش و بررسی علمی درباره منطق ریاضی در پی پرسش‌های جدیدی بود که در ریاضیات مطرح شد. به عنوان نمونه، فرگه می‌کوشید تا ریاضیات را بر پایه‌ی اصول برآمده از منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها قرار دهد. از روش‌ها و نتایج به دست آمده در منطق برای اثبات قضایا استفاده می‌شود. این روش‌ها در بسیاری از شاخه‌های ریاضی مانند جبر، هندسه و توپولوژی نیز کاربرد دارد. در این فصل، ابتدا به تعریف گزاره و انواع آن‌ها، رابطهای گزاره‌ای بین گزاره‌ها، بیان قضایای گزاره‌ای و سورهای منطقی می‌پردازیم و سپس روش‌های مختلف اثبات یک گزاره را بیان می‌کنیم.

گزاره

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم و ابزار شروع کار در منطق ریاضی، **گزاره** است. گزاره جمله‌ای خبری است که باید دقیقاً درست یا نادرست باشد. به عبارتی نمی‌تواند هر دو حالت را داشته باشد و حتی ممکن است درستی یا نادرستی گزاره، برای ما واضح و مشخص نباشد. بنابراین لازم نیست درستی یا نادرستی گزاره را بدانیم، بلکه تنها دانستن این که گزاره فقط یکی از این دو حالت را دارد، کافی است. اما منظور از درستی یا نادرستی گزاره چیست؟ منظور از درستی گزاره، مطابقت گزاره با واقعیت و منظور از نادرستی گزاره، عدم مطابقت آن با واقعیت است. به درستی یا نادرستی یک گزاره، **ارزش** آن گزاره می‌گوییم. هر گزاره‌ی درست را با «T» (حرف اول کلمه True، به معنی درست است) و هر گزاره غلط را با «F» (حرف اول کلمه False ، به معنی نادرست است) نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که جملات عاطفی، امری و پرسشی، نمی‌توانند یک گزاره باشند، چرا که نمی‌توان بر روی آن‌ها ارزش درستی یا نادرستی قرار داد و بررسی ارزش آن‌ها نیز بی‌معنا است.

مثال ۱: جمله‌ی «انتخابات ریاست جمهوری ایران در سال ۱۳۹۲ برگزار شد.» گزاره‌ای درست و جمله‌ی «کلمه‌ی انگلیسی dog از چهار حرف تشکیل شده است.» گزاره‌ای نادرست است. حال دو جمله‌ی «اولین روز سال ۱۳۹۲ هجری شمسی، شنبه بود.» و «بیست و ششمین رقم اعشاری $\sqrt{7}$، صفر است.» در نظر بگیرید. تعیین درستی یا نادرستی این جمله‌ها، نیاز به محاسباتی دارد، اما این گزاره‌ها یا درست هستند یا نادرست، پس از یکی، از این دو حالت خارج نیستند.

در جمله‌ی «عدد $2^9 + 2$ یک عدد اول است.» نمی‌دانیم که این عدد اول است یا نه، اما می‌دانیم که هر عدد کامل بزرگتر از ۱ یا اول است یا نه، پس این جمله، یک گزاره است که دارای ارزش درستی یا نادرستی است (نه هر دو) که با انجام محاسبات ارزش آن تعیین می‌شود. اما در برخی از گزاره‌ها تعیین ارزش آن‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد. جمله‌ی «زکریای رازی، الکل را در ۱۲۸امین روز از سال ۲۷۵ هجری قمری کشف کرد.» گزاره‌ای درست یا نادرست است اما ارزش آن، برای ما معلوم نیست و مشخص کردن ارزش آن، غیرممکن است.

توجه: در منطق فقط از جمله‌ی خبری استفاده می‌شود اما باید دقت داشته باشیم که تمام جملات خبری نمی‌توانند گزاره باشند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲: جمله‌های «۷ عددی اول است» و «اگر باران بر زمین ببارد، زمین خیس می‌شود.» جملات خبری و گزاره می‌باشند (این جملات یا درست یا نادرست)، ولی جمله‌ی «شهریار شاعر خوبی است.» یا «علی و رضا دانشجویان باهوشی هستند.» جملات خبری هستند ولی نمی‌توانند گزاره باشند، زیرا درستی یا نادرستی آن‌ها، دقیقاً مشخص نیست و ممکن است بر حسب سلیقه تغییر کند و برخی با این جملات موافق و برخی مخالف باشند.

مثال ۳: بررسی ارزش جمله‌ی عاطفی «ان‌شاء ا... تو امتحان قبول میشی!»، جمله‌ی امری «لطفاً برو و یک روزنامه بگیر.» و جمله‌ی پرسشی «آیا امروز امتحان داریم؟» بی‌معنا است، زیرا نمی‌توان ارزش درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین کرد و همچنین مطرح کردن این سوال که آیا این جملات درست هستند یا نادرست بی‌مفهوم است.

مثال ۴: کدام‌یک از عبارت‌های زیر یک گزاره نیست؟

۱) جمعیت جهان، ۷ میلیارد نفر است.

۲) سلام!

۳) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

۴) ۲ تنها عدد زوج اول است.

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌های دیگر گزاره هستند، چرا که این عبارات جملات خبری بوده و دارای ارزش درست یا نادرست هستند، در صورتی که گزینه ۲ جمله خبری نیست، پس گزاره نیست.

انواع گزاره

در منطق ریاضی، گزاره‌ها را به دو دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

گزاره‌ی ساده: گزاره‌ی ساده، گزاره‌ای است که نتوانیم آن را به گزاره‌های کوچکتر تجزیه کنیم. معمولاً این نوع گزاره را با حروف کوچک انگلیسی هم‌چون، $p, q, r, ...$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵: گزاره‌ی «۲ یک عدد گویا است.» گزاره‌ای ساده می‌باشد.

گزاره‌ی مرکب: گزاره مرکب، گزاره‌ای است که از دو یا چند گزاره‌ی ساده تشکیل شده باشد. این گزاره‌ها را معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی چون $P, Q, R, ...$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶: گزاره‌ی «۴ عددی زوج است و ۷ عددی اول است.» یک گزاره‌ی مرکب است که از دو گزاره‌ی ساده «۴ عددی زوج است.» و «۷ عددی اول است.» ساخته شده است.

ترکیب گزاره‌های ساده و تشکیل گزاره‌های مرکب با استفاده از رابط‌های منطقی یا گزاره‌ای صورت می‌گیرد. چنانچه از اصطلاح رابط مشخص است، **رابط منطقی** یا **گزاره‌ای**، بین دو گزاره ارتباط ایجاد می‌کند. مهمترین رابط‌های گزاره‌ای که در ادامه هریک را توضیح خواهیم داد، عبارتند از:

۱. « نقیض»
۲. «و» یا «عاطف»
۳. «یا» یا «فاصل»
۴. « یای مانع جمع»
۵. «فاصل ضمنی»
۶. «اگر ... آنگاه ...»
۷. «... اگر و تنها اگر...»

گزاره‌نما

گزاره‌نما، جمله‌ای است که در آن از متغیر استفاده می‌کنیم. این جملات، به ازای بعضی مقادیر متغیر، ارزش درست و به ازای بعضی دیگر، ارزش نادرست دارند. زمانی که مقدار متغیر مشخص می‌شود، گزاره‌نما به گزاره تبدیل می‌شود و همان طور که گفته شد، این گزاره، ممکن است درست باشد یا نادرست. معمولاً گزاره‌نما را با $p(x)$ نمایش می‌دهیم و این نماد نشان‌دهنده‌ی آن است که x دارای خاصیت p است.

مثال ۷: به جمله‌ی «عدد حقیقی x، عددی زوج است.» دقت کنید. در این جمله، خاصیت مورد بررسی برای x، زوج بودن است. این جمله یک گزاره به نظر می‌رسد اما چون x مجهول است، نه درست است و نه نادرست. وقتی به جای x عدد ۲۰ را جایگذاری کنیم، یک گزاره می‌سازیم که این گزاره یعنی، «۲۰ عددی زوج است.» گزاره‌ای درست است و وقتی به جای x عدد ۱۷ را جایگذاری کنیم، گزاره‌ی «۱۷ عددی زوج است.» گزاره‌ای نادرست است. بنابراین تا زمانی که متغیر موجود در گزاره مقدار نگیرد، درستی و نادرستی گزاره‌نما مشخص نمی‌شود.

قضیه ۱۰: فرض کنید که $f: A \to B$ یک تابع و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A باشد به طوری که $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ آنگاه تابع f یک به یک است.

اثبات: x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع f یعنی A را به طوری که $f(x_1) = f(x_2)$ در نظر می‌گیریم. چون $f(x_1) = f(x_2)$ است، پس خواهیم داشت $\{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$، در نتیجه $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$، بنابراین $f(\{x_1\}) \bigcap f(\{x_2\}) \neq \varnothing$. اکنون با توجه به فرض قضیه می‌توان نوشت $f(\{x_1\} \bigcap \{x_2\}) \neq \varnothing$. حال ادعا می‌کنیم $\{x_1\} \bigcap \{x_2\} \neq \varnothing$. زیرا در غیر این صورت اگر $\{x_1\} \bigcap \{x_2\} = \varnothing$، آنگاه $f(\{x_1\} \bigcap \{x_2\}) = \varnothing$ که با $f(\{x_1\} \bigcap \{x_2\}) \neq \varnothing$ در تناقض است. پس $\{x_1\} \bigcap \{x_2\} \neq \varnothing$، در نتیجه $\{x_1\} = \{x_2\}$ و از آن خواهیم داشت $x_1 = x_2$، یعنی تابع f یک به یک است.

۲. تابع پوشا (سورژکسیون)

❖ **تعریف۲:** فرض کنید $f: A \to B$ یک تابع باشد، آنگاه تابع f را تابع **پوشا** گوییم، هرگاه برای هر y در B، حداقل یک x در A موجود باشد به طوری که $f(x) = y$. به عبارت دیگر، برد تابع f برابر با مجموعه‌ی B باشد.

پس برای اثبات این که تابع f پوشا است، عضو دلخواه y از هم دامنه‌ی تابع یعنی B را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که عبارت $f(x) = y$ برای حداقل یک x جواب دارد.

مثال ۱۸: نشان دهید $\underset{x \to [x]}{f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}}$ **تابعی پوشا است.**

☑ **پاسخ:** اگر $y \in \mathbb{Z}$، آنگاه عدد $x \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که $y \le x \le y+1$، بنابراین $f(x) = [x] = y$.

◆ ◆ ◆ ◆

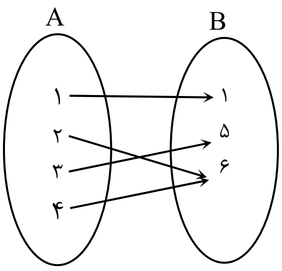
مثال ۱۹: دو تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از آنها پوشا است؟

$$g(x) = |x| \qquad f(x) = |x|$$

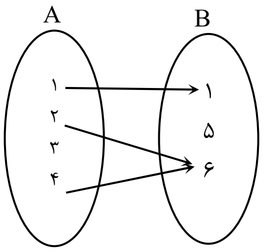
☑ **پاسخ:** تابع f، یک تابع پوشاست، زیرا اگر $y \in \mathbb{R}^+$ دلخواه در نظر بگیریم، عبارت $|x| = y$ دارای جواب $x = y$ و $x = -y$ است. ولی تابع g علی‌رغم این که ضابطه‌ی آن با تابع f یکسان است، پوشا نیست. زیرا به عنوان مثال، برای عضو ۱- از اعداد حقیقی، عضوی در دامنه‌ی g یعنی $\mathbb{R}$ وجود ندارد که به آن تصویر شده باشد یا عبارت $g(x) = |x| = -1$ جواب ندارد. بنابراین، همانطور که در این مثال مشاهده کردید، پوشا بودن توابع علاوه بر ضابطه‌ی تابع به هم‌دامنه‌ی تابع نیز بستگی دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

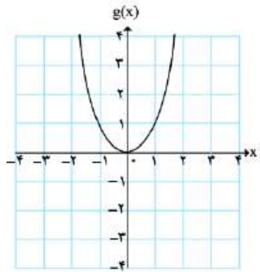
نمودار ون تابع $f: A \to B$، نشان‌دهنده یک تابع پوشا است، هرگاه به هر عضو از مجموعه‌ی B حداقل یک فلش وارد شده باشد. برای مثال، در نمودار ون داده شده، توابع $f: A \to B$ تابعی پوشا است. چون به هر عضو B یک فلش وارد شده است.



اما تابع $g: A \to B$ تابعی پوشا نیست چون به عضو $5 \in B$ هیچ فلشی وارد نشده است.



نمودار تابع f در صفحه‌ی مختصات دکارتی نشان‌دهنده یک تابع پوشا است، هرگاه هر خط $y = a$ (که a متعلق به B است) در صفحه‌ی مختصات دکارتی، نمودار f را حداقل در یک نقطه قطع کند و در غیر این صورت تابع پوشا نیست. با توجه به این نکته، تابع $g(x) = x^2$ با هم دامنه‌ی $\mathbb{R}$، پوشا نیست. زیرا خط $y = -1$ نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند. اما تابع $g(x) = x^2$ با هم دامنه‌ی $\mathbb{R}^+$، پوشاست.



مثال ۲۰: کدام یک از توابع زیر پوشا است؟

۱) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$، $f(x)=\sin x$
۲) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$، $f(x)=\cos x$
۳) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $f(x)=x^2$
۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه «۲» گزینه (۱) پوشا نیست، زیرا

$$0\le x\le\pi \Rightarrow 0\le \sin x\le 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f=[0,1]\ne[-1,1]$$

گزینه (۲) پوشا است، زیرا:

$$0\le x\le\pi \Rightarrow -1\le \cos x\le 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f=[-1,1]=[-1,1]$$

گزینه (۳) پوشا نیست، زیرا: $x^2\ge 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}^+\ne\mathbb{R}$.

قضیه ۱۱: فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد، $X\subseteq A$ و $Y\subseteq B$. در این صورت:

الف) f یک به یک است اگر و فقط اگر $f^{-1}(f(X))=X$ ، ب) f پوشا است اگر و فقط اگر $f(f^{-1}(Y))=Y$.

اثبات الف: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر f تابع یک به یک باشد، آنگاه $f^{-1}(f(X))=X$. $\alpha\in f^{-1}(f(X))$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $\alpha\in X$. اگر $\alpha\in f^{-1}(f(X))$، بنابر تعریف نگاره‌ی وارون مجموعه‌ی $f(X)$، $f(\alpha)\in f(X)$ و از تعریف نگاره‌ی مستقیم مجموعه‌ی X، $x\in X$ای وجود دارد که $f(x)=f(\alpha)$. از $f(x)=f(\alpha)$ و یک به یک بودن تابع f خواهیم داشت $x=\alpha$ که با توجه به این که $x\in X$ نتیجه می‌شود $\alpha\in X$. بنابراین از $\alpha\in f^{-1}(f(X))$ نتیجه شد که $\alpha\in X$ یعنی $f^{-1}(f(X))\subseteq X$. از طرفی قبلاً نشان دادیم که $X\subseteq f^{-1}(f(X))$. حال از رابطه اخیر و $f^{-1}(f(X))\subseteq X$ داریم $f^{-1}(f(X))=X$.

اکنون فرض می‌کنیم برای هر مجموعه‌ی دلخواه X، $f^{-1}(f(X))=X$ و ثابت می‌کنیم تابع f یک به یک است. x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع f یعنی A را به طوری که $f(x_1)=f(x_2)$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $X=\{x_1\}$. در این صورت $x_1\in X$. پس طبق تعریف نگاره‌ی مستقیم X، $f(x_1)\in f(X)$ و از $f(x_1)=f(x_2)$ داریم $f(x_2)\in f(X)$. حال با توجه به تعریف نگاره‌ی وارون $f(X)$، $x_2\in f^{-1}(f(X))$ و از فرض قضیه $f^{-1}(f(X))=X$ خواهیم داشت $x_2\in X$ و چون $X=\{x_1\}$ نتیجه می‌شود $x_2=x_1$ و ثابت می‌شود تابع f یک به یک است.

اثبات ب: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر تابع f پوشا باشد، آنگاه $f(f^{-1}(Y))=Y$. $\alpha\in Y$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $\alpha\in f(f^{-1}(Y))$. فرض می‌کنیم $\alpha\in Y$. چون f پوشا است، پس $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\alpha$. از $f(x)=\alpha$ و $\alpha\in Y$ نتیجه می‌شود $f(x)\in Y$ و از تعریف نگاره‌ی وارون Y، $x\in f^{-1}(Y)$. از رابطه اخیر و $f(x)=\alpha$ و تعریف نگاره‌ی مستقیم مجموعه $f^{-1}(Y)$ داریم $\alpha=f(x)\in f(f^{-1}(Y))$ یعنی $\alpha\in f(f^{-1}(Y))$. بنابراین ثابت می‌شود $Y\subseteq f(f^{-1}(Y))$. از طرفی قبلاً نشان دادیم که $f(f^{-1}(Y))\subseteq Y$. از رابطه اخیر و $Y\subseteq f(f^{-1}(Y))$ نتیجه می‌گیریم $f(f^{-1}(Y))=Y$.

اکنون فرض می‌کنیم برای هر مجموعه‌ی دلخواه $Y\subseteq B$، $f(f^{-1}(Y))=Y$ و ثابت می‌کنیم تابع f پوشا است. برای این منظور، $\alpha\in B$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\alpha$. از آنجایی که $\alpha\in B$ پس $\{\alpha\}\subseteq B$ و طبق فرض داریم $f(f^{-1}(\{\alpha\}))=\{\alpha\}$ و چون $\alpha\in\{\alpha\}$، پس $\{\alpha\}\ne\varnothing$. بنابراین $f(f^{-1}(\{\alpha\}))\ne\varnothing$. ادعا می‌کنیم $f^{-1}(\{\alpha\})\ne\varnothing$، زیرا در غیر این صورت اگر $f^{-1}(\{\alpha\})=\varnothing$ ، آنگاه $f(f^{-1}(\{\alpha\}))=f(\varnothing)=\varnothing$ که تناقضی آشکار با $f(f^{-1}(\{\alpha\}))\ne\varnothing$ است. حال چون $f^{-1}(\{\alpha\})\ne\varnothing$ پس βای وجود دارد که $\beta\in f^{-1}(\{\alpha\})$ و از تعریف تعریف نگاره‌ی وارون مجموعه $\{\alpha\}$، $f(\beta)\in\{\alpha\}$ که نتیجه می‌شود $f(\beta)=\alpha$. پس برای هر $\alpha\in B$، $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\alpha$، یعنی f پوشا است.

قضیه ۱۲: فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد، در این‌صورت: f تابعی پوشا است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی $Y\subseteq B$، اگر $Y\ne\varnothing$ آنگاه $f^{-1}(Y)\ne\varnothing$.

اثبات: برای اثبات پوشا بودن تابع f، $\beta\in B$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\beta$. از آنجا که $\beta\in B$ ، پس $\{\beta\}\subseteq B$ و واضح است که $\{\beta\}\ne\varnothing$، پس از فرض خواهیم داشت $f^{-1}(\{\beta\})\ne\varnothing$ و از ناتهی بودن $f^{-1}(\{\beta\})$ و نگاره‌ی وارون هر مجموعه تحت تابع f، $x\in A$ای وجود دارد که $x\in f^{-1}(\{\beta\})$. اکنون با توجه به تعریف نگاره‌ی وارون مجموعه $\{\beta\}$، $f(x)\in\{\beta\}$ که از این رابطه داریم $f(x)=\beta$. پس برای هر $\beta\in B$، $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\beta$، یعنی f پوشا است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم Y زیرمجموعه‌ای دلخواه از B باشد و ثابت می‌کنیم $f^{-1}(Y) \neq \varnothing$. چون $Y \neq \varnothing$ پس βای وجود دارد که $\beta \in Y$. از طرفی چون $Y \subseteq B$ داریم $\beta \in B$ و از پوششی بودن تابع f، $x \in A$ای وجود دارد که $f(x) = \beta$ و چون $\beta \in Y$ است، خواهیم داشت $f(x) \in Y$ و از تعریف نگاره‌ی وارون مجموعه‌ی Y نتیجه می‌شود $x \in f^{-1}(Y)$ ، که این عبارت نشان می‌دهد $f^{-1}(Y) \neq \varnothing$.

۳. تابع دو سویی (بیژکسیون یا تناظر یک به یک)

به تابع f، که هم یک به یک و هم پوشاست، تابع **دوسویی** می‌گوییم. نام دیگر این تابع، تناظر یک به یک است.

برای مثال تابع همانی $f(x) = x$ تابعی یک به یک است.

مثال ۲۱: یک به یک و پوشا بودن تابع $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 \end{array}$ **را بررسی کنید.**

☑ **پاسخ:** اثبات یک به یک بودن تابع f فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع f یعنی $\mathbb{R}$ باشند به طوری که $f(x_1) = f(x_2)$. پس $x_1^3 = x_2^3$ که نتیجه می‌شود $x_1 = x_2$. پس f یک به یک است.

اثبات پوشا بودن تابع f ، $y \in \mathbb{R}$ را دلخواه در نظر بگیریم. عبارت $x^3 = y$ دارای جواب $x = \sqrt[3]{y}$ است. پس f پوشاست.

ترکیب توابع

همان طور که در مقدمه‌ی این فصل بیان کردیم، تابع را می‌توانیم به عنوان دستگاهی در نظر بگیریم که ورودی‌هایش را با تغییراتی، به خروجی منحصر به فرد تبدیل می‌کند. حال به شکل زیر توجه کنید. ترکیب دو تابع را با ترکیب دو دستگاه، می‌توانیم نمایش دهیم. ورودی x به دستگاه اول یعنی تابع f وارد شده و خروجی به صورت $f(x)=y$ ایجاد می‌شود و همان طور که می‌بینید، خروجی تابع f به عنوان ورودی دستگاه دوم یعنی تابع g است و خروجی این دستگاه به صورت $g(f(x))$ تولید می‌شود. بنابراین، در این تابع، اولاً ورودی x باید در دامنه‌ی تابع f صدق کند، ثانیاً خروجی به دست آمده توسط تابع f باید در دامنه تابع g صدق کند.

ورودی x ⟵ [تابع $f(x)$] ⟵ خروجی $f(x)=y$ ⟵ ورودی y ⟵ [تابع $g(y)$] ⟵ خروجی $g(y)=g(f(x))=z$

حال می‌توانیم تعریف زیر را برای ترکیب دو تابع بیان کنیم:

دو تابع $f : A \to B$ و $g : B \to C$ را در نظر بگیرید. ترکیب دو تابع به صورت $gof : A \to C$ است که برای هر $x \in A$، $(gof)(x) = g(f(x))$. این عبارت به این معنی است که ابتدا تابع f بر x عمل می‌کند و آن را به $f(x)$ تصویر می‌کند، سپس تابع g بر $f(x)$ عمل کرده و آن‌را به $g(f(x))$ تصویر می‌کند.

ترکیب دو تابع f و g را به صورت $gof = \{(x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B; ((x,y) \in f \wedge (y,z) \in g)\}$ نیز می‌توان تعریف کرد. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که در صورتی‌که gof موجود باشد، gof یک تابع است. به همین شکل می‌توان هر چند تابع را با هم ترکیب نمود. به عنوان مثال، اگر تابع $h : C \to D$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت $ho(gof) : A \to D$ که به صورت $\forall x \in A, ho(gof) = ho[g(f(x))] = h(g(f(x)))$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱۳: فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to C$ تابع باشند. اگر $gof : A \to C$ موجود باشد، آنگاه gof یک تابع است.

اثبات: برای اثبات تابع بودن gof باید نشان دهیم:

۱) دامنه‌ی gof برابر با A است ۲) $\forall x \in A, \forall z, z' \in C[(x,z) \in gof \wedge (x,z') \in gof) \Rightarrow z = z']$.

با توجه به تعریف gof، دامنه‌ی gof برابر با دامنه‌ی f یعنی A است. حال باید نشان دهیم برای هر $x \in A$ و هر $z, z' \in C$، اگر $(x,z) \in gof \wedge (x,z') \in gof$، آنگاه $z = z'$. از تعریف gof می‌توان نوشت:

$$(1)\ (x,z) \in gof \Rightarrow \exists y \in B\ ((x,y) \in f \wedge (y,z) \in g)$$

$$(2)\ (x,z') \in gof \Rightarrow \exists y' \in B((x,y') \in f \wedge (y',z') \in g)$$

با توجه به تابع بودن f، از $(x,y) \in f$ و $(x,y') \in f$ نتیجه می‌شود $y = y'$ و از $(y,z) \in g$، $(y',z') \in g$ و $y = y'$ داریم $(y,z) \in g$ و $(y,z') \in g$ که از تابع بودن g نتیجه می‌گیریم $z = z'$.

➢ **توجه:** ترکیب دو تابع لزوماً وجود ندارد اگر برد تابع f، زیر مجموعه‌ای از دامنه تابع g باشد، آنگاه ترکیب دو تابع f و g یعنی gof وجود دارد.

ترکیب توابع را می‌توان با نمودار نمایش داد. نمودارهای زیر، ترکیب دو تابع و سه تابع را نمایش می‌دهند.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "h\circ g\circ f"'] & & C \arrow[dl, "h"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "gof"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

✍ **مثال ۲۲: دو تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، داریم:**

$$\mathbf{f(x)=x^{۳}} \qquad \mathbf{g(x)=۵x+۱}$$

$$\mathbf{(gof)(x)=g(f(x))=g(x^{۳})=۵x^{۳}+۱}$$

$$\mathbf{(fog)(x)=f(g(x))=f(۵x+۱)=(۵x+۱)^{۳}}$$

این مثال نشان می‌دهد که $gof\neq fog$، بنابراین، ترکیب توابع، لزوماً خاصیت جابه‌جایی ندارد. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که ترکیب توابع، دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

◆ ◆ ◆ ◆

قضیه ۱۴: فرض کنید $f:A\to B$، $g:B\to C$ و $h:C\to D$ تابع باشند، آنگاه $ho(gof)=(hog)of$.

اثبات: برای این که تساوی دو تابع hogof و $(hog)of$ را نشان دهیم باید ثابت کنیم:

۱. دامنه‌ی این دو تابع با هم برابرند.

۲. به ازای هر عضو از دامنه‌ی تعریف، مقدار این دو تابع با هم برابر است.

از تعریف ترکیب توابع داریم $\mathrm{Dom}(ho(gof))=\mathrm{Dom}(f)$ و $\mathrm{Dom}((hog)of)=\mathrm{Dom}(f)$، بنابراین دامنه‌ی توابع مورد نظر برابرند یعنی $\mathrm{Dom}((hog)of)=\mathrm{Dom}(ho(gof))$، پس (۱) برقرار است.

برای اثبات (۲) نشان می‌دهیم که برای هر $x\in A$، $[(hog)of](x)=[ho(gof)](x)$.

$$\left.\begin{array}{l}[(hog)of](x)=((hog)(f(x))=h(g(f(x)))\\ [(ho(gof)](x)=[h(gof)(x)]=h(g(f(x)))\end{array}\right\}\Rightarrow\ \forall x\in A,[(hog)of](x)=[ho(gof)](x).$$

قضیه ۱۵: فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت:

الف) اگر تابع $g:B\to A$ وجود داشته باشد به طوری که $gof=I_A$ (I_A تابع همانی است)، آنگاه f تابعی یک به یک است.

ب) اگر تابع $h:B\to A$ وجود داشته باشد به طوری که $foh=I_B$، آنگاه f پوشا است.

پ) اگرتوابع $g:B\to A$ و $h:B\to A$ وجود داشته باشد که $gof=I_A$ و $foh=I_B$، آنگاه f دوسویی است.

اثبات الف: فرض می‌کنیم تابع $g:B\to A$ که $gof=I_A$ وجود دارد و $x_۱$ و $x_۲$ را دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع f یعنی A در نظر می‌گیریم به طوری که $f(x_۱)=f(x_۲)$ و ثابت می‌کنیم $x_۱=x_۲$.

$$x_۱\overset{(۱)}{=}gof(x_۱)\overset{(۲)}{=}g(f(x_۱))\overset{(۳)}{=}g(f(x_۲))\overset{(۴)}{=}gof(x_۲)\overset{(۵)}{=}x_۲\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$$

۱) طبق فرض $\forall x\in A, gof(x)=x$، ۲) تعریف ترکیب توابع، ۳) $f(x_۱)=f(x_۲)$ ، ۴) تعریف ترکیب توابع و ۵) طبق فرض $\forall x\in A, gof(x)=x$

اثبات ب: فرض می‌کنیم تابع $h:B\to A$ که $foh=I_B$ وجود دارد و برای اثبات پوشا بودن تابع f، $\beta\in B$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $x\in A$ای موجود است به طوری که $f(x)=\beta$. چون $\beta\in B$ پس $\beta\in \mathrm{Dom}h$. از تعریف دامنه‌ی h، $x\in A$ ای وجود دارد که $h(\beta)=x$.

$$f(x)\overset{(۱)}{=}f(h(\beta))\overset{(۲)}{=}foh(\beta)\overset{(۳)}{=}I_B(\beta)\overset{(۴)}{=}\beta\ \Rightarrow\ f(x)=\beta$$

۱) طبق $h(\beta)=x$، ۲) تعریف ترکیب توابع، ۳) طبق فرض، $\forall x\in A, foh(x)=I_B(x)$ و ۴) تعریف تابع همانی.

اثبات پ: با توجه به اثبات قسمت الف و ب بدیهی است.

قضیه ۱۶: فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$ توابعی پوشا باشند. آنگاه تابع gof نیز پوشا است.

اثبات: با توجه به تعریف توابع f و g، تابع gof تابعی از A به C است. پس برای اثبات پوشا بودن این تابع، $\beta\in C$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $x\in A$ای موجود است به طوری که $gof(x)=\beta$. چون $\beta\in C$ و g تابعی پوشا است پس yای در دامنه‌ی g یعنی B وجود دارد که $g(y)=\beta$. از طرفی چون $y\in B$ و f پوشاست پس xای در دامنه‌ی f یعنی A وجود دارد که $f(x)=y$. بنابراین خواهیم داشت $\beta=g(y)\overset{y=f(x)}{=\!=\!=}g(f(x))=gof(x)$، یعنی $x\in A$ای موجود است به طوری که $gof(x)=\beta$. پس gof پوشاست.

قضیه ۱۷: فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$، توابعی یک به یک باشند. آنگاه تابع gof نیز یک به یک است.

اثبات: x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع gof یعنی A را در نظر می‌گیریم به طوری که $gof(x_1)=gof(x_2)$ و ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$. از $gof(x_1)=gof(x_2)$ و تعریف ترکیب توابع داریم $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ و از این که تابع g یک به یک است، خواهیم داشت $f(x_1)=f(x_2)$. از این رابطه و با توجه به یک به یک بودن f حکم یعنی $x_1=x_2$ ثابت می‌شود.

نتیجه: از آنجا که ترکیب توابع یک به یک، تابع یک به یک و ترکیب توابع پوشا، نیز پوشاست، پس ترکیب توابع دوسویی، تابع دو سویی است.

قضیه ۱۸: فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$ تابع باشند.

الف) اگر تابع gof یک به یک باشد آنگاه تابع f یک به یک است.

ب) اگر تابع gof پوشا باشد آنگاه تابع g پوشا است.

اثبات الف: دو عضو دلخواه x_1 و x_2 را از دامنه‌ی تابع f یعنی A در نظر می‌گیریم به طوری که $f(x_1)=f(x_2)$ و ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$. از $f(x_1)=f(x_2)$ داریم $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ و از این رابطه و ترکیب توابع می‌توان نوشت $gof(x_1)=gof(x_2)$ و چون gof یک به یک است، نتیجه می‌شود $x_1=x_2$.

اثبات ب: برای اثبات پوششی بودن تابع g، $\beta\in C$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $y\in B$ای موجود است به طوری که $g(y)=\beta$. چون تابع gof پوشا است، پس برای هر عضو از برد gof یعنی مجموعه‌ی C از جمله β، $x\in A$ای موجود است به طوری که $gof(x)=\beta$. از این رابطه و ترکیب توابع داریم $g(f(x))=\beta$. قرار می‌دهیم $f(x)=y$ که $y\in B$ پس $g(y)=\beta$ و نتیجه می‌گیریم تابع g پوشا است.

قضیه ۱۹: هرگاه $f:A\to B$ تابع باشد. آنگاه تابع f یک به یک است اگر و فقط اگر $\forall C,\forall h,k:C\to A[(foh=fok)\Rightarrow h=k]$.

اثبات: فرض می‌کنیم f تابعی یک به یک است و برای هر مجموعه‌ی C و هر تابع h و k از C به A داشته باشیم $foh=fok$ در این‌صورت تساوی دو تابع h و k را ثابت می‌کنیم. چون دامنه‌ی h و k باهم برابر است، کافی است ثابت کنیم برای هر عضو از $z\in C$، $h(z)=k(z)$. چون $z\in C$ یعنی z، عضو دامنه‌ی توابع fok و foh است، پس $foh(z)=fok(z)$ و از تعریف ترکیب توابع می‌توان نوشت $f(h(z))=f(k(z))$ که از یک به یک بودن تابع f داریم $h(z)=k(z)$ و چون z دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم $h=k$.

برای اثبات عکس قضیه، ثابت می‌کنیم f تابعی یک به یک است، پس x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از دامنه‌ی تابع f یعنی A را در نظر می‌گیریم به طوری که $f(x_1)=f(x_2)$ و ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$. چون فرض قضیه، برای هر مجموعه‌ی C و توابع دلخواه h و k برقرار است، قرار می‌دهیم $C=\{z\}$ و تابع h و k از C به A را به صورت $h:C\to A$ و $k:C\to A$ تعریف می‌کنیم. از طرفی $foh=fok$ زیرا:

$$h(z)=x_1 \qquad k(z)=x_2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\xrightarrow{\text{طبق تعریف تابع h و k}}f(h(z))=f(k(z))\xrightarrow{\text{تعریف ترکیب توابع}}foh(z)=fok(z)$$

پس چون طبق فرض از تساوی $foh=fok$ عبارت $h=k$ نتیجه می‌شود، بنابراین به ازای هر عضو دامنه که تنها دارای z است داریم $h(z)=k(z)$ و از تعریف تابع h و k نتیجه می‌شود $x_1=x_2$ و ثابت می‌شود f یک به یک است.

قضیه ۲۰: هرگاه $f:A\to B$ تابع باشد. آنگاه تابع f پوشا است اگر و فقط اگر $\forall D,\forall h,k:B\to D[(hof=kof)\Rightarrow h=k]$.

اثبات: فرض می‌کنیم f تابعی پوشا است و برای هر مجموعه‌ی D و هر تابع h و k از B به D داشته باشیم $hof=kof$. تساوی دو تابع h و k را ثابت می‌کنیم. چون دامنه‌ی h و k باهم برابر است، کافی است ثابت کنیم برای هر عضو از دامنه یعنی $y\in B$، $h(y)=k(y)$. چون $y\in B$ از پوشا بودن تابع f، $x\in A$ای وجود دارد که $f(x)=y$. لذا خواهیم داشت $h(y)=h(f(x))$ و $k(y)=k(f(x))$ که از رابطه‌ی اخیر و تعریف ترکیب توابع می‌توان نوشت $h(y)=(hof)(x)$ و $k(y)=(kof)(x)$. و چون طبق فرض توابع hof و kof برای هر عضو دامنه برابرند، پس داریم $h(y)=(hof)(x)=(kof)(x)=k(y)$.

ترتیب اعداد اصلی

دو مجموعه متناهی A و B را در نظر بگیرید. عدد اصلی A کوچک‌تر از عدد اصلی B است اگر و فقط اگر تعداد اعضای مجموعه A کمتر از تعداد اعضای مجموعه B باشد. به عبارت دیگر، با توجه به این که عدد اصلی متناهی، یک عدد صحیح نامنفی (همان تعداد اعضای مجموعه) است، بنابراین عدد اصلی مجموعه‌های متناهی را با توجه به ترتیب ذاتی اعداد طبیعی می‌توان با هم مقایسه کرد، یعنی:

$$۰ < ۱ < ۲ < ۳ < \cdots < k < k+۱ < \cdots$$

اما آیا می‌توان ترتیبی برای اعداد اصلی نامتناهی لحاظ کرد. در قاعده‌ی (۴) ذکر شد که دو عدد اصلی چه زمانی با هم برابر و چه زمانی برابر نیستند ولی زمانی که دو عدد اصلی برابر نباشند، نمی‌توان گفت که کدام عدد اصلی کوچکتر از دیگری است. برای مرتب کردن اعداد اصلی نامتناهی از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه (متناهی یا نامتناهی) باشند. اگر مجموعه‌ی A با یک زیرمجموعه‌ی از B هم‌توان باشد می‌گوییم $cardA$ کوچکتر یا مساوی $cardB$ است و به صورت $cardA \le cardB$ نمایش می‌دهیم و در صورتی که مجموعه‌ی A با یک زیرمجموعه‌ی B هم‌توان باشد ولی $cardA \ne cardB$، آنگاه گوییم $cardA$ کوچکتر از $cardB$ است و به صورت $cardA<cardB$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲: فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، در این‌صورت $cardA \le cardB$ اگر و فقط اگر تابعی یک به یک از A به B وجود داشته باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $cardA \le cardB$ که بنابر تعریف فوق، مجموعه‌ی A با یک زیرمجموعه از B مانند B' هم‌توان است، بنابراین تابع دوسویی مانند $f : A \to B'$ وجود دارد. حال تابع $g : A \to B$ را با ضابطه‌ی $\forall a \in A,\ g(a) = f(a)$ تعریف می‌کنیم که با توجه به یک به یک بودن تابع f واضح است g یک تابع یک به یک است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم تابعی یک به یک مانند $f : A \to B$ وجود داشته باشد، بنابراین A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌توان است که از تعریف فوق نتیجه می‌شود $cardA \le cardB$.

نتیجه: دو مجموعه‌ی A و B را به طوری که $A \subseteq B$ در نظر بگیرید. در این صورت $cardA \le cardB$.

چون همواره $A \cong A$، بنابراین مجموعه‌ی A با یک زیرمجموعه‌ی از B هم‌توان است، یعنی $cardA \le cardB$.

مثال ۵: نشان دهید $\aleph_۰ < \aleph_۱$.

☑ **پاسخ:** مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. بنابراین، $\mathbb{N}$ با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{N}$ هم‌توان است یعنی $card\mathbb{N} \le card\mathbb{R}$. از طرفی در فصل قبل دیدیم، $\mathbb{N} \ncong \mathbb{R}$ در نتیجه بنابر عکس نقیض قاعده‌ی۳، $card\mathbb{N} \ne card\mathbb{R}$.
حال از تعریف فوق نتیجه می‌شود که $card\mathbb{N} < card\mathbb{R}$ یعنی $\aleph_۰ < \aleph_۱$.

مثال۶: اگر $cardA = cardB = \aleph_۰$ آنگاه $card(A \cup B)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\aleph_۰$ ۲) $\aleph_۱$ ۳) $\aleph_۲$ ۴) برابر یک عدد طبیعی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $B \subseteq A \cup B$ بنابراین $\aleph_۰ \le card(A \cup B)$ از طرفی چون $A \cong B \cong \mathbb{N}$ بنابراین هر دوی A و B شمارش‌پذیر نامتناهی هستند و لذا $A \cup B$ نیز شمارش‌پذیر نامتناهی است بنابراین $A \cup B \cong \mathbb{N}$ و لذا $card(A \cup B) = \aleph_۰$.

در قاعده‌ی (۳) بیان کردیم، دو مجموعه هم‌توان هستند اگر و فقط اگر عدد اصلی این دو مجموعه یکی است. قضیه زیر تعریف دیگری برای تساوی عدد اصلی دو مجموعه ارائه می‌دهد.

قضیه ۳: فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند به طوری که $cardA \le cardB$ و $cardB \le cardA$، آنگاه $cardA = cardB$.

اثبات: با توجه به این که $cardA \le cardB$ طبق تعریف نتیجه می‌شود که زیرمجموعه‌ی B' از B وجود دارد به طوری که $A \cong B'$. همچنین از این که $cardB \le cardA$ داریم زیرمجموعه‌ی A' از A وجود دارد به طوری که $B \cong A'$. حال از قضیه شرودر-برنشتاین نتیجه می‌شود $A \cong B$ و از قاعده (۳) خواهیم داشت $cardA = cardB$.

قضیه ۴: فرض کنید A، B و C مجموعه‌های دلخواه باشند به طوری که $cardA = cardC$ و $A \subseteq B \subseteq C$، آنگاه $cardA = cardB = cardC$.

اثبات: از آنجا که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ خواهیم داشت $\text{cardA} \le \text{cardB}$ و $\text{cardB} \le \text{cardC}$. از طرفی طبق فرض $\text{cardA} = \text{cardC}$ بنابراین $\text{cardC} \le \text{cardA}$ و $\text{cardB} \le \text{cardA}$. از روابط اخیر و قضیه قبل نتیجه می‌شود $\text{cardA} = \text{cardB}$ و چون $\text{cardA} = \text{cardC}$ می‌توان نوشت $\text{cardA} = \text{cardB} = \text{cardC}$.

مثال ۷: نشان دهید که عدد اصلی هر بازه‌ی باز، بسته و نیم باز از اعداد حقیقی برابر با $\aleph_1$ است.

☑ **پاسخ:** نشان دادیم که $\text{card}\mathbb{R} = \text{card}(a,b) = \aleph_1$. همچنین، روابط زیر بین بازه‌ها برقرار است $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, $(a,b) \subset [a,b) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$. همچنین می‌دانیم که اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\text{cardA} \le \text{cardB}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \aleph_1 = \text{card}(a,b) \le \text{card}(a,b] \le \text{card}[a,b] \le \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1 \\ \aleph_1 = \text{card}(a,b) \le \text{card}[a,b) \le \text{card}[a,b] \le \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1 \end{cases} \Rightarrow \text{card}(a,b) = \text{card}(a,b] = \text{card}[a,b) = \text{card}[a,b] = \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۸: عدد اصلی مجموعه $P(\mathbb{N})$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) عدد طبیعی است　　۲) $2^{\aleph_1}$　　۳) $\aleph_1$　　۴) $\aleph_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا ثابت می‌کنیم $P(\mathbb{N}) \cong [0,1)$. تابع $f: P(\mathbb{N}) \to [0,1)$ را با ضابطه‌ی $\forall X \in P(\mathbb{N}), f(X) = 0/a_1a_2a_3\cdots$ در نظر می‌گیریم که در آن a_iها به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$a_i = \begin{cases} 0 & i \notin X \\ 1 & i \in X \end{cases}$$

حال ثابت می‌کنیم f تابعی یک به یک است. X و Y را دو عضو دلخواه از $P(\mathbb{N})$ در نظر می‌گیریم به طوری که $f(X) = f(Y)$ و نشان می‌دهیم $X=Y$. با توجه به تعریف تابع f داریم $f(X) = f(Y) = 0/a_1a_2a_3\cdots$. حال از تعریف a_iها خواهیم داشت $i \in X \Leftrightarrow a_i = 1 \Leftrightarrow i \in Y$ چون هر دو مجموعه مساوی باید دارای اعضای یکسان باشند، خواهیم داشت $X=Y$، بنابراین نشان دادیم که تابع f یک به یک است.

حال تابع یک به یک $g: [0,1) \to P(\mathbb{N})$ را تعریف کنیم. با توجه به این که می‌دانیم هر عدد در $[0,1)$ را می‌توانیم به صورت $x = 0/n_1n_2n_3\cdots$ که در آن $0 \le n_k \le 9$ نمایش دهیم، تابع g را با ضابطه‌ی $\forall x \in [0,1); g(x) = \{10^k n_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، برای عدد $x = 0/2354\ldots$ خواهیم داشت $g(x) = \{20, 300, 5000, 40000, \ldots\}$.

نشان می‌دهیم تابع g یک به یک است. $x = 0/n_1n_2n_3\cdots$ و $y = 0/m_1m_2m_3\cdots$ را دو عضو دلخواه از $[0,1)$ در نظر می‌گیریم به طوری که $g(x) = g(y)$ و نشان می‌دهیم $x = y$. با توجه به تعریف تابع g داریم $g(x) = \{10^k n_k \mid k \in \mathbb{N}\}, g(y) = \{10^k m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. طبق تعریف تساوی دو مجموعه، برای هر $i \in \mathbb{N}$ اگر $10^i n_i \in g(x)$، آنگاه $10^i n_i \in g(y) = \{10^k m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ و برعکس. بنابراین، $k \in \mathbb{N}$ای وجود دارد که $10^i n_i = 10^k m_k$. چون m_k و n_i اعدادی بین صفر و ۹ هستند، خواهیم داشت $i = k, n_i = m_k$، پس $x = y$ که نشان می‌دهد g تابعی یک به یک است.

بنابراین ثابت کردیم توابع $f: P(\mathbb{N}) \to [0,1)$ و $g: [0,1) \to P(\mathbb{N})$ توابعی یک به یک هستند بنابراین $P(\mathbb{N}) \cong [0,1)$. از طرفی چون $[0,1) \cong \mathbb{R}$ از خاصیت تعدی هم‌توانی مجموعه‌ها ثابت می‌شود $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$ و از قاعده (۳) می‌توان نوشت $\text{card}P(\mathbb{N}) = \text{card}\mathbb{R}$. حال با توجه به این که $\text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$، خواهیم داشت: $\text{card}P(\mathbb{N}) = \aleph_1$.

◆ ◆ ◆ ◆

قضیه ۵: رابطه‌ی «$\le$» یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی اعداد اصلی است.

اثبات: باید نشان دهیم رابطه‌ی «$\le$» دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادمتقارنی و متعدی است.

۱. رابطه‌ی «$\le$» روی اعداد اصلی انعکاسی است. باید نشان دهیم برای هر عدد اصلی مانند a، $a \le a$. طبق قاعده‌ی (۱) برای هر عدد اصلی a یک مجموعه مانند A هست که $\text{cardA} = a$. بنابراین نشان می‌دهیم $\text{cardA} \le \text{cardA}$. می‌دانیم که برای هر مجموعه‌ی A، تابع (همانی) یک به یک $I_A: A \to A$ با ضابطه‌ی $I_A(x) = x$ وجود دارد که نتیجه می‌شود $\text{cardA} \le \text{cardA}$.

۲. رابطه‌ی «$\le$» روی اعداد اصلی پادمتقارنی است. یعنی برای هر دو عدد اصلی مانند a و b اگر $a \le b$ و $b \le a$، آنگاه $a = b$، زیرا نشان دادیم که اگر $\text{cardA} \le \text{cardB}$ و $\text{cardB} \le \text{cardA}$، آنگاه $\text{cardA} = \text{cardB}$.

۳. رابطه‌ی «$\le$» روی اعداد اصلی متعدی است. یعنی برای اعداد اصلی مانند a، b و c اگر $a \le b$ و $b \le c$، آنگاه $a \le c$. طبق قاعده‌ی (۱) برای اعداد اصلی مانند a، b و c، مجموعه‌های A، B و C وجود دارند به طوری که $cardA = a$، $cardB = b$ و cardC=c. بنابراین نشان می‌دهیم اگر $cardA \le cardB$ و $cardB \le cardC$، آنگاه $cardA \le cardC$. چون $cardA \le cardB$ پس تابعی یک به یک مانند $f : A \to B$ وجود دارد. همچنین از این که $cardB \le cardC$ تابعی یک به یک مانند $g : B \to C$ وجود دارد. حال تابع $gof : A \to C$ را تعریف می‌کنیم که با توجه به این که ترکیب دو تابع یک به یک f و g، یک به یک است، gof تابعی یک به یک است که نتیجه می‌شود $cardA \le cardC$.

قضیه زیر که توسط جرج کانتور ثابت شد، عدد اصلی هر مجموعه مانند A را با عدد اصلی مجموعه‌ی توانی‌اش یعنی P(A) مقایسه می‌کند و به این سوال پاسخ می‌دهد که آیا مجموعه‌ای مانند X وجود دارد که $card\mathbb{R} < X$.

قضیه ۶ (قضیه‌ی کانتور) : اگر A یک مجموعه باشد، آنگاه $cardA < cardP(A)$.

اثبات: اگر $A = \varnothing$، آنگاه $P(A) = \{\varnothing\}$ که با توجه به قاعده‌ی (۲) و (۴) خواهیم داشت $cardA = ۰$ و $cardP(A) = ۱$ که می‌توان نوشت $cardA = ۰ < ۱ = cardP(A)$، پس $cardA < cardP(A)$.

حال فرض می‌کنیم $A \ne \varnothing$. در این صورت تابع $f : A \to P(A)$ با ضابطه‌ی $\forall a \in A\ ,\ f(a) = \{a\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که f یک تابع یک به یک است بنابراین $cardA \le cardP(A)$. حال برای اثبات این که $cardA < cardP(A)$ طبق تعریف کافی است ثابت کنیم $cardA \ne cardP(A)$. چون $A \not\approx P(A)$، که از عکسِ نقیض قاعده‌ی (۳) نتیجه می‌شود $cardA \ne cardP(A)$. بنابراین از $cardA \le cardP(A)$ و $cardA \ne cardP(A)$ می‌توان نوشت $cardA < cardP(A)$.

نتیجه: با استفاده از قضیه‌ی کانتور می‌توان یک دنباله‌ی نامتناهی و اکیداً صعودی از اعداد اصلی نامتناهی ایجاد کرد. برای این منظور، فرض کنید a یک عدد اصلی نامتناهی باشد. بنابر قاعده (۱) مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که a=cardA. حال از قضیه‌ی کانتور خواهیم داشت:

$$a = cardA < cardP(A) < cardP(P(A)) < cardP(P(P(A))) < cardP(P(P(P(A)))) < \cdots$$

این رابطه‌ی نشان می‌دهد که برای هر عدد اصلی نامتناهی، عدد اصلی نامتناهی دیگری که بزرگتر از آن است وجود دارد، بنابراین بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد. همچنین چون این دنباله‌ی اکیداً صعودی از اعداد اصلی نامتناهی است، بنابراین اعداد اصلی نامتناهی، نامتناهی هستند.

حساب اعداد اصلی

در این قسمت می‌خواهیم ببینیم که چطور می‌توانیم اعداد اصلی را با هم جمع و در هم ضرب کنیم یا به توان برسانیم؟ حساب اعداد اصلی متناهی، همان ویژگی ذاتی جمع، ضرب و توان را دارند. حال می‌خواهیم این اعمال را برای اعداد اصلی طوری تعمیم دهیم که برای هر عدد اصلی (متناهی یا نامتناهی) قابل تعریف باشد و همچنین، ویژگی حساب اعداد اصلی، روی اعداد اصلی متناهی را حفظ کند.

جمع اعداد اصلی

مثال ۹: دو عدد اصلی متناهی ۳ و ۴ را در نظر بگیرید. بنابر قاعده‌ی (۱) دو مجموعه‌ی $A = \{a,b,c,d\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$ وجود دارند به طوری که $cardA = ۴$ و $cardB = ۳$. مشخص است که جمع معمولی دو عدد اصلی یعنی $۳+۴$، عدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup B = \{a,b,c,d,۱,۲,۳\}$ یعنی $card(A \cup B) = ۷$ است. بنابراین، در این مثال جمع دو عدد اصلی ۳ و ۴ با جمع معمولی مطابقت دارد. اما آیا همواره جمع معمولی دو عدد اصلی برابر با عدد اصلی مربوط به اجتماع دو مجموعه‌ی متناظر به آن دو عدد اصلی است؟

پاسخ: برای پاسخ به این سوال، دو مجموعه‌ی $A = \{a,b,c,d\}$ و $C = \{a,۱,۲\}$ را که $cardA = ۴$ و $cardC = ۳$ در نظر بگیرید. در این صورت عدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup C = \{a,b,c,d,۱,۲\}$، $cardA \cup C = ۶$ است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، جمع معمولی دو عدد اصلی ۴ و ۳ یعنی ۷ برابر با عدد اصلی اجتماع دو مجموعه‌ی A و C یعنی ۶ نیست. در این حالت، همان‌طور که مشاهده می‌کنید $A \cap C \ne \varnothing$. حال دو مجموعه‌ی مجزای زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A \times \{۱\} = \{(a,۱),(b,۱),(c,۱),(d,۱)\},\ C \times \{۲\} = \{(a,۲),(۱,۲),(۲,۲)\}\ ,\ A \times \{۱\} \cap C \times \{۲\} = \varnothing$$

$$(A \times \{۱\}) \cup (C \times \{۲\}) = \{(a,۱),(b,۱),(c,۱),(d,۱),(a,۲),(۱,۲),(۲,۲)\}$$

در این صورت جمع معمولی دو عدد اصلی ۴ و ۳ برابر با عدد اصلی اجتماع دو مجموعه‌ی $A \times \{۱\}$ و $C \times \{۲\}$ یعنی ۷ است، بنابراین می‌توان گفت که در صورتی که مجموعه‌های متناظر به اعداد اصلی مجزا باشند، جمع اعداد اصلی برابر با عدد اصلی اجتماع آن مجموعه‌های مجزا است. حال در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم این مجموعه‌های مجزا همواره وجود دارند.

قضیه ۷: برای هر دو عدد اصلی a و b مجموعه‌های مجزای A و B وجود دارند، به طوری که $a=\text{card}A$ و $b=\text{card}B$.

اثبات: طبق قاعده (۱) برای اعداد اصلی a و b مجموعه‌های A' و B' وجود دارند، به طوری که $a=\text{card}A'$ و $b=\text{card}B'$. اگر $A'\cap B'=\varnothing$، حکم ثابت می‌شود. اما اگر $A'\cap B'\neq\varnothing$، آنگاه مجموعه‌های A و B را به صورت $A=A'\times\{۱\}$ و $B=B'\times\{۲\}$ تعریف می‌کنیم. این دو مجموعه مجزا هستند چرا که مجموعه‌ی A شامل همه‌ی زوج‌های مرتبی است که مولفه‌ی اول آن‌ها در A و مولفه‌ی دوم برابر با ۱ و مجموعه‌ی B شامل زوج‌های مرتبی که مولفه‌ی اول آن‌ها در B و مولفه‌ی دوم برابر با ۲ است، بنابراین مولفه‌ی دوم هر عضو مجموعه‌ی A با مولفه‌ی دوم هر عضو مجموعه‌ی B متفاوت است که نتیجه می‌شود این دو مجموعه مجزا هستند. حال توابع زیر را تعریف می‌کنیم که واضح است که این توابع دوسویی هستند.

$$f:A'\to A \qquad\qquad g:B'\to B$$
$$\forall a'\in A',\ f(a')=(a',۱) \quad \text{و} \quad \forall b'\in B',\ g(b')=(b',۲)$$

بنابراین از تعریف هم‌توانی مجموعه‌ها خواهیم داشت $A\cong A'$ و $B\cong B'$. از این روابط و قاعده (۴) می‌توان نوشت:

$a=\text{card}A'=\text{card}A$ و $b=\text{card}B'=\text{card}B$

توجه: لازم به ذکر است که قضیهٔ فوق قابل تعمیم برای هر تعداد عدد اصلی می‌باشد.

نشان دادیم که جمع دو عدد اصلی متناهی برابر با عدد اصلی اجتماع مجموعه‌های مجزای متناظر به آن دو عدد اصلی است. حال می‌خواهیم جمع دو عدد اصلی را در حالت کلی (متناهی یا نامتناهی) تعریف کنیم به طوری که جمع دو عدد اصلی متناهی را نیز حفظ کند.

❖ **تعریف ۲:** فرض کنید a و b دو عدد اصلی باشند. جمع این دو عدد اصلی که با نماد $a+b$ نشان می‌دهیم عبارت است از $\text{card}(A\cup B)$ که در آن A و B مجزا هستند، $a=\text{card}A$ و $b=\text{card}B$. در این صورت:

$$a+b=\text{card}(A\cup B)\Rightarrow \text{card}A+\text{card}B=\text{card}(A\cup B)$$

برای هر دو عدد اصلی، مجموعه‌های مجزای متناظر به آن اعداد اصلی وجود دارد که جمع این دو عدد اصلی برابر با عدد اصلی اجتماع آن مجموعه‌های مجزا است.

همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، $\text{card}(A\cup B)=۷,\text{card}((A\times\{۱\})\cup(C\times\{۲\}))=۷$. بنابراین برای هر دو عدد اصلی ممکن است مجموعه‌های مجزای بسیاری وجود داشته باشند ولی همان‌طور که مشاهده می‌کنید جمع این دو عدد اصلی منحصر به فرد و مستقل از انتخاب مجموعه‌های مجزا می‌باشد. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم a و b دو عدد اصلی باشند و داشته باشیم $a+b=\text{card}(A\cup B)$ به طوری که $a=\text{card}A,b=\text{card}B$ و $A\cap B=\varnothing$ حال مجموعه‌های مجزای A' و B' را در نظر می‌گیریم به طوری که $a=\text{card}A',b=\text{card}B'$ و ثابت می‌کنیم $\text{card}(A'\cup B')=a+b$.

بنابر قاعده (۳) از آنجا که $a=\text{card}A=\text{card}A'$ و $b=\text{card}B=\text{card}B'$، خواهیم داشت $A\cong A'$ و $B\cong B'$. حال با توجه به اینکه $A\cap B=\varnothing$ و $A'\cap B'=\varnothing$ و با توجه به قضیه فصل قبل نتیجه می‌شود $A\cup B\cong A'\cup B'$ که از قاعده (۳) می‌توان نوشت $a+b=\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A'\cup B')$. بنابراین خواهیم داشت $\text{card}(A'\cup B')=a+b$.

نکته۱ جمع دو عدد اصلی، منحصر به فرد و مستقل از انتخاب مجموعه‌های مجزای است.

مثال ۱۰: اگر $\text{card}\mathbb{N}=\aleph_0$ و $\text{card}\mathbb{R}=\aleph_1$، آنگاه $\aleph_0+\aleph_0$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) عدد طبیعی است　　۲) $\aleph_0$　　۳) $\aleph_1$　　۴) $۲^{\aleph_1}$

پاسخ: گزینه «۲» در فصل قبل ثابت کردیم $\mathbb{N}\cong\mathbb{O}$ و $\mathbb{N}\cong\mathbb{E}$ که بنابر قاعده (۳) خواهیم داشت:

$\text{card}\mathbb{O}=\text{card}\mathbb{N}=\aleph_0$ و $\text{card}\mathbb{E}=\text{card}\mathbb{N}=\aleph_0$

همچنین واضح است $\mathbb{O}\cap\mathbb{E}=\varnothing$ و $\mathbb{O}\cup\mathbb{E}=\mathbb{N}$. اکنون می‌توان نوشت:

$$\aleph_0+\aleph_0\overset{(۱)}{=}\text{card}\mathbb{O}+\text{card}\mathbb{E}\overset{(۲)}{=}\text{card}(\mathbb{O}\cup\mathbb{E})\overset{(۳)}{=}\text{card}\mathbb{N}=\aleph_0 \qquad \Rightarrow \aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

۱) جایگذاری $\text{card}\mathbb{O}=\aleph_0$ و $\text{card}\mathbb{E}=\aleph_0$، ۲) با توجه به $\mathbb{O}\cap\mathbb{E}=\varnothing$ و تعریف ۲ و ۳) جایگذاری $\mathbb{O}\cup\mathbb{E}=\mathbb{N}$.

مثال ۱۱: اگر $\text{card}\mathbb{N}=\aleph_0$ و $\text{card}\mathbb{R}=\aleph_1$، آنگاه $\aleph_0+\aleph_1$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) عدد طبیعی است　　۲) $\aleph_0$　　۳) $\aleph_1$　　۴) $۲^{\aleph_1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عدد اصلی بازه‌ی باز $(0,1)$ برابر $\aleph_1$ است. همچنین می‌دانیم $\text{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. حال مجموعه‌ی $A = (0,1) \cup \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $(0,1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$ طبق تعریف (۲) داریم: $\text{card}A = \text{card}((0,1) \cup \mathbb{N}) = \text{card}(0,1) + \text{card}\mathbb{N} = \aleph_1 + \aleph_0 \quad (*)$

و از آنجا که $(0,1) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ و $\text{card}(0,1) = \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$، می‌توان نوشت $\text{card}A = \text{card}(0,1) = \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$. از جایگذاری $\text{card}A = \aleph_1$ در $(*)$ خواهیم داشت $\aleph_1 = \aleph_1 + \aleph_0$.

مثال ۱۲: اگر $\text{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ و $\text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$، آنگاه $\aleph_1 + \aleph_1$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) عدد طبیعی است ۲) $\aleph_0$ ۳) $\aleph_1$ ۴) $2^{\aleph_1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که عدد اصلی بازه‌های باز $(0,1)$ و $(1,2)$ برابر $\aleph_1$ است و $(0,1) \subseteq (0,1) \cup (1,2) \subseteq \mathbb{R}$، از طرفی چون $\text{card}(0,1) = \text{card}\mathbb{R} = \aleph_1$ می‌توان نوشت $\aleph_1 = \text{card}[(0,1) \cup (1,2)] \quad (**)$. حال با توجه به این که $\text{card}(0,1) = \text{card}(1,2) = \aleph_1$ و $(0,1) \cap (1,2) = \varnothing$، طبق تعریف (۲) داریم $\text{card}[(0,1) \cup (1,2)] = \text{card}(0,1) + \text{card}(1,2) = \aleph_1 + \aleph_1$ که نتیجه می‌شود $\text{card}[(0,1) \cup (1,2)] = \aleph_1 + \aleph_1$. از جایگذاری $(**)$ در رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت $\aleph_1 = \aleph_1 + \aleph_1$.

قضیه ۸: فرض کنید a، b و c اعداد اصلی باشند. آنگاه داریم:

الف) $a + 0 = a$. (۰ عضو خنثی عمل جمع اعداد اصلی)

ب) $a + b = b + a$. (خاصیت جابه‌جایی در عمل جمع اعداد اصلی)

پ) $(a+b)+c = a+(b+c)$. (خاصیت شرکت‌پذیری در عمل جمع اعداد اصلی)

اثبات الف: بنابر قاعده (۱) برای عدد اصلی a مجموعه A وجود دارد به طوری که $\text{card}A = a$. همچنین از آنجا که $A \cup \varnothing = A$ داریم $\text{card}(A \cup \varnothing) = \text{card}A$. حال می‌توان نوشت:

$$a = \text{card}A \overset{(1)}{=} \text{card}(A \cup \varnothing) \overset{(2)}{=} \text{card}A + \text{card}\varnothing \overset{(3)}{=} a + 0 \qquad \Rightarrow a = a + 0$$

۱) $\text{card}(A \cup \varnothing) = \text{card}A$، ۲) با توجه به $A \cap \varnothing = \varnothing$ و تعریف ۲و ۳) جایگذاری $\text{card}A = a$ و $\text{card}\varnothing = 0$.

اثبات ب: نشان دادیم که برای اعداد اصلی a و b، مجموعه‌های مجزای A و B وجود دارند به طوری که $a = \text{card}A$ و $b = \text{card}B$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$a + b \overset{(1)}{=} \text{card}(A \cup B) \overset{(2)}{=} \text{card}(B \cup A) \overset{(3)}{=} b + a \qquad \Rightarrow a + b = b + a$$

۱) تعریف ۲، ۲) خاصیت جابه‌جایی مجموعه‌ها و ۳) تعریف ۲.

اثبات پ: با توجه به این که برای اعداد اصلی a، b و c مجموعه‌های مجزای A، B و C وجود دارند به طوری که $a = \text{card}A$، $b = \text{card}B$ و $c = \text{card}C$. در این صورت با خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها و تعریف۲ می‌توان نوشت:

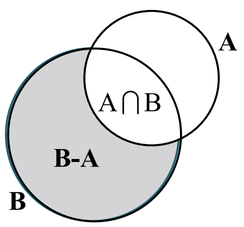
$$(a+b)+c = \text{card}(A \cup B) + \text{card}C = \text{card}[(A \cup B) \cup C] = \text{card}[A \cup (B \cup C)] = \text{card}A + \text{card}(B \cup C) = a + (b+c)$$

مثال ۱۳: برای دو مجموعه دلخواه A و B، $\text{card}A + \text{card}B$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $\text{card}(A \cup B)$ ۲) $\text{card}(A \cap B)$

۳) $\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$ ۴) $\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»



$$\text{card}A + \text{card}B \overset{(1)}{=} \text{card}A + \text{card}((B-A) \cup (A \cap B)) \overset{(2)}{=} \text{card}A + \text{card}(B-A) + \text{card}(A \cap B) \overset{(3)}{=}$$
$$\text{card}(A \cup (B-A)) + \text{card}(A \cap B) \overset{(4)}{=} \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$$

۱) جایگذاری $B = (B-A) \cup (A \cap B)$، ۲) با توجه به $(B-A) \cap (A \cap B) = \varnothing$ و تعریف ۲، ۳) با توجه به $A \cap (B-A) = \varnothing$ و تعریف ۲ و ۴) $A \cup (B-A) = A \cup B$. (در روابط مربوط به مجموعه‌ها، به نمودار ون توجه کنید.)

مثال۱۴: فرض کنیم A مجموعه‌ی مضارب ۲ یعنی اعدادی به صورت $2k$ به طوری که $1 \le k \le 25$ و B مجموعه‌ی مضارب ۳ یعنی اعـدادی بـه صورت $3k$ به طوری که $1 \le k \le 16$ باشند. در این صورت $card(A \cup B)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۳۲	۲) ۳۳	۳) ۳۴	۴) ۳۵

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه مـی‌کنیم کـه $A = \{2,4,6,...,50\}$، $B = \{3,6,...,48\}$ و بنـابراین $cardA = 25$ و $cardB = 16$. از طرفـی $A \cap B$ مجموعـه‌ی مضارب ۶ یعنـی کوچـک‌ترین مضـرب مشـترک ۲ و ۳ می‌باشـد یعنـی اعـدادی بـه صـورت $6k$ بـه طـوری کـه $1 \le k \le 8$. لـذا $card(A \cap B) = 8$. همچنین می‌دانیم:

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

در نتیجه:

$$card(A \cup B) = 25 + 16 - 8 = 33$$

ضرب اعداد اصلی

در این قسمت می‌خواهیم ضرب اعداد اصلی را طوری تعریف کنیم که برای اعداد اصلی متناهی با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی مطابقت داشته باشد.

مثال ۱۵: دو عدد اصلی متنـاهی ۳ و ۲ را در نظـر بگیریـد. طبـق قاعـده‌ی (۱) مجموعــه‌های $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{a,b\}$ وجـود دارنـد بـه طـوری که $cardA = 3$ و $cardB = 2$. همچنین، عدد اصلی مجموعه‌ی $A \times B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b)\}$ برابر ۶ است و همانطور که می‌دانیم $3 \times 2 = 6$ بنابراین، ضرب دو عدد اصلی را، برابر با عدد اصلی مربوط به حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های متناظر به آن دو عدد اصلی تعریف می‌کنیم.

❖ **تعریف ۳**: فرض کنید a و b دو عدد اصلی باشند. حاصل‌ضرب دو عدد اصلی a و b که با نماد ab نمایش می‌دهیم بـه صـورت $card(A \times B)$ اسـت که در آن $a = cardA$ و $b = cardB$. در این صورت:

$$ab = card(A \times B) \Rightarrow cardA \cdot cardB = card(A \times B)$$

برخلاف تعریف جمع اعداد اصلی، در تعریف ضرب اعداد اصلی نیازی به مجزا بودن مجموعه‌ها نیست.

توجه: در تعریف فوق حاصل‌ضرب دو عدد اصلی منحصر به فرد و مستقل از انتخاب مجموعه‌های A و B است. بـرای اثبـات ایـن مطلـب، فـرض کنیـد مجموعــه‌های A' و B' وجـود داشـته باشـند بـه طـوری کـه $a = cardA'$ و $b = cardB'$. بنـابر قاعـده (۳) از آنجـا کـه $a = cardA = cardA'$ و $b = cardB = cardB'$ خـــواهیم داشــــت $A \cong A'$ و $B \cong B'$. در نتیجـــــه داریـــــم $A \times B \cong A' \times B'$ کـــــه از قاعــــده (۳) می‌تــــوان نوشت $ab = card(A \times B) = card(A' \times B')$. بنابراین خواهیم داشت $ab = card(A' \times B')$.

قضیه ۹: فرض کنید a، b و c اعداد اصلی باشند. آنگاه داریم:

الف) $1a = a$ (۱ عضو خنثی عمل ضرب اعداد اصلی)

ب) $ab = ba$. (خاصیت جابه‌جایی در عمل ضرب اعداد اصلی)

پ) $(ab)c = a(bc)$. (خاصیت شرکت‌پذیری در عمل ضرب اعداد اصلی)

ت) $a(b+c) = ab + ac$. (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع)

ث) $0a = 0$. (عضو صفر عمل ضرب)

اثبات الف: طبق قاعده (۱) برای عدد اصلی a مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که $cardA = a$. همچنـین، بـا توجـه بـه فصـل مجموعـه‌های شـمارا و ناشـمارا داریـم $\{a\} \times A \cong A$ و بنـابر قاعـده‌ی ۳ خـواهیم داشـت $card(\{a\} \times A) = cardA$. همچنـین از تعریـف ضـرب اعـداد اصـلی می‌تـوان نوشـت $card\{a\}.cardA = cardA$. در نتیجـه چـون $card\{a\} = 1$ (عـدد اصـلی مجموعـه‌ی متنـاهی برابـر بـا تعـداد اعضـای آن مجموعـه اسـت) و $cardA = a$، خواهیم داشت $1a = a$.

اثبات ب: فرض کنید a و b اعداد اصلی متناظر به مجموعه‌های A و B باشند به طوری که $a = cardA$ و $b = cardB$ (قاعـده ۱). بـا توجـه بـه فصـل مجموعه‌های شمارا و ناشمارا، $A \times B \cong B \times A$ و از قاعده‌ی (۳) خواهیم داشت $card(A \times B) = card(B \times A)$. حـال از تعریـف ضـرب اعـداد اصـلی می‌توان نوشت $cardA.cardB = cardB.cardA$ که نتیجه می‌شود $ab = ba$.

اثبـــات پ: بـا توجـه بـه قاعـده (۱) مجموعــه‌های A، B و C وجـود دارنـد بـه طـوری کـه $a = cardA$، $b = cardB$ و $c = cardC$. تـابع $f : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ را با ضابطه‌ی $f(a,(b,c)) = ((a,b),c)$ تعریف کنید. واضـح اسـت کـه تـابع f تـابع دوسـویی است، بنـابراین از

هم‌توانی مجموعه‌ها خواهیم داشت $A\times(B\times C)\cong(A\times B)\times C$ و از قاعده (۳) می‌توان نوشت $card[A\times(B\times C)=card[(A\times B)\times C]$. حال با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها (*) و از تعریف ضرب اعداد اصلی (**) می‌توان نوشت:

$$(ab)c=(cardA.cardB).cardC\overset{(**)}{=\!=}card(A\times B).cardC\overset{(**)}{=\!=}card[(A\times B)\times C]\overset{(*)}{=\!=}card[A\times(B\times C)]\overset{(**)}{=\!=}cardA.card(B\times C)\overset{(**)}{=\!=}$$
$$cardA.(cardB.cardB)=a(bc)$$

اثبات ت: می‌دانیم که برای اعداد اصلی a ، b و c مجموعه‌های مجزای A، B و C وجود دارند، به طوری کـه $a=cardA$، $b=cardB$ و $c=cardC$. چون مجموعه‌های B و C مجزا از هم هستند، مجموعه‌های $A\times B$ و $A\times C$ نیز مجزا از هم هستند. از طرفـی طبـق خاصـیت توزیع‌پـذیری حاصلضـرب دکارتی نسبت به اجتماع داریم $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$. حال می‌توان نوشت:

$a(b+c)=cardA.(cardB+cardC)$ جایگذاری $a=cardA$، $b=cardB$ و $c=cardC$

$=cardA.card(B\cup C)$ با توجه به $B\cap C=\varnothing$ و تعریف جمع اعداد اصلی

$=card[A\times(B\cup C)]$ تعریف ضرب اعداد اصلی

$=card[(A\times B)\cup(A\times C)]$ جایگذاری $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$=card(A\times B)+card(A\times C)$ با توجه به $(A\times B)\cap(A\times C)=\varnothing$ و تعریف جمع اعداد اصلی

$=(cardA.cardB)+(cardA.cardC)$ تعریف ضرب اعداد اصلی

$=ab+ac$

اثبات ث: بنابر قاعده (۱) برای عدد اصلی a مجموعه‌ی A وجود دارد، به طوری که $cardA=a$. همچنین از $\varnothing\times A\cong\varnothing$ و بنابر قاعده‌ی (۳) خـواهیم داشـــت $card(\varnothing\times A)=card\varnothing$. حـــال از تعریـــف ضـــرب اعـــداد اصـــلی می‌تـــوان نوشـــت $card\varnothing.cardA=card\varnothing$. در نتیجـــه چـــون $card\varnothing=\circ$ و $cardA=a$ خواهیم داشت $\circ a=\circ$.

قضیه ۱۰: فرض کنید a، b و c اعداد اصلی باشند و $a\le b$ در این‌صورت داریم:

الف) $a+c\le b+c$. (جمع طرفین نامساوی با عدد اصلی c)

ب) $ac\le bc$. (ضرب طرفین نامساوی در عدد اصلی c)

اثبات الف: برای اعداد اصلی a، b و c مجموعه‌های مجزای A، B و C وجود دارند بـه طـوری کـه $a=cardA$، $b=cardB$ و $c=cardC$. از طرفـی چون طبق فرض قضیه $cardA\le cardB$، مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B مانند B' هم‌توان است، پس $A\cong B'$. از رابطـه‌ی اخیـر، $C\cong C$ و مجـزا بودن مجموعه‌های A، B و C خواهیم داشت $A\cup C\cong B'\cup C$، از طرفی می‌دانیم $B'\cup C\subseteq B\cup C$. بنـابراین، $A\cup C$ بـا زیرمجموعـه‌ی $B'\cup C$ از $B\cup C$ هم‌توان است یعنی $card(A\cup C)\le card(B\cup C)$. حال از تعریف جمع اعداد اصلی چـون $B\cap C=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$ خـواهیم داشـت $cardA+cardC\le cardB+cardC$ یعنی $a+c\le b+c$.

اثبات ب: فرض کنید برای اعداد اصلی a ، b و c مجموعه‌های A، B و C وجود دارند به طوری که $a=cardA$، $b=cardB$ و $c=cardC$. از طرفی چون طبق فرض قضیه $cardA\le cardB$، بنابراین تابعی یک به یـک مانـند $f:A\to B$ وجـود دارنـد. حـال تـابع $g:A\times C\to B\times C$ را بـا ضـابطه $g(a,c)=(f(a),c)$ تعریـف مـی‌کنیم. از یـک بـه یـک بـودن تـابع f بـه راحتـی ثابت می‌شـود کـه تـابع g نیـز تـابعی یـک بـه یـک اسـت. پـس $card(A\times C)\le card(B\times C)$ و از تعریف ضرب اعداد اصلی خواهیم داشت $cardA.cardC\le cardB.cardC$ یعنی $ac\le bc$.

مثال ۱۶: فرض کنید k یک عدد اصلی متناهی باشد. آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $k+\aleph_\circ=\aleph_\circ$ ۲) $k\aleph_\circ=\aleph_1$ ۳) $k+\aleph_1=\aleph_1$ ۴) $k\aleph_1=\aleph_1$

پاسخ: گزینه «۲» نادرست است. برای اثبات درستی گزینه (۱)، ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر عدد اصلی متناهی k، مجموعـه‌ی متنـاهی مانـند A موجـود اسـت کـه $A\cong\mathbb{N}_k=\{1,2,...,k\}$، $A\cap\mathbb{N}=\varnothing$ و $cardA=k$. قـرار مـی‌دهیم $A=\{-k,-k+1,-k+2,...,-2,-1\}$. حـال تـابع $f:\mathbb{N}_k\to A$ را با ضابطه $\forall n\in\mathbb{N}_k,f(n)=-n$ تعریف مـی‌کنیم کـه واضح است ایـن تـابع دوسویی اسـت. بنـابراین $A\cong\mathbb{N}_k$، $A\cap\mathbb{N}_k=\varnothing$ و $cardA=k$. از طرفی چون اجتماع مجموعه‌ی متناهی A و مجموعه‌ی شمارش‌پذیر نامتناهی $\mathbb{N}$، یعنی $A\cup\mathbb{N}$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر نامتناهی است و طبق تعریف مجموعه‌ی شمارش‌پذیر نامتناهی، $A\cup\mathbb{N}\cong\mathbb{N}$. حال بنابر قاعده (۳) خواهیم داشت $car(A\cup\mathbb{N})=card\mathbb{N}=\aleph_\circ$ و با توجه به تعریف جمع دو عدد اصلی، چـون $A\cap\mathbb{N}=\varnothing$ می‌تـوان نوشـت $card(A\cup\mathbb{N})=cardA+card\mathbb{N}$. از ایـن رابطـه و $car(A\cup\mathbb{N})=\aleph_\circ$ و $cardA=k$ نتیجه می‌گیریم $k+\aleph_\circ=\aleph_\circ$.

گزینه (۲) نادرست است. ثابت می‌کنیم $k\aleph_0 = \aleph_0$. چون حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ی متناهی A و مجموعه‌ی شمارش‌پذیر نامتناهی $\mathbb{N}$، یعنی $A\times\mathbb{N}$، مجموعه‌ای شمارش‌پذیر نامتناهی است، بنابراین $A\times\mathbb{N}\cong\mathbb{N}$ و بنابر قاعده (۳) خواهیم داشت $\operatorname{card}(A\times\mathbb{N}) = \operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. از طرفی از تعریف ضرب دو عدد اصلی داریم $\operatorname{card}(A\times\mathbb{N}) = \operatorname{card}A.\operatorname{card}\mathbb{N}$. از این رابطه و $\operatorname{car}(A\times\mathbb{N}) = \aleph_0$ و $\operatorname{card}A = k$ نتیجه می‌شود $\aleph_0 = k\aleph_0$.

اثبات درستی گزینه (۳)، با توجه به این که k عدد اصلی متناهی است، طبق قاعده (۱) مجموعه‌ی A وجود دارد که $\operatorname{card}A = k$. بنابراین فرض می‌کنیم $A = \{1,2,\ldots,k\}$. همچنین قرار می‌دهیم $B = (0,1)$ که چون $B = (0,1)\cong\mathbb{R}$ خواهیم داشت $\operatorname{card}B = \operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$. با توجه به این که $A\cap B = \varnothing$، از تعریف جمع اعداد اصلی و $\operatorname{card}A = k$ و $\operatorname{card}B = \aleph_1$ می‌توان نوشت $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}A + \operatorname{card}B = k + \aleph_1$ (*) همچنین می‌دانیم $A\cup B\subseteq\mathbb{R}$ و $B\subseteq A\cup B$، در نتیجه $\operatorname{card}(A\cup B)\le\operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$ و $\aleph_1 = \operatorname{card}B\le\operatorname{card}(A\cup B)$ که از روابط اخیر خواهیم داشت $\operatorname{card}(A\cup B) = \aleph_1$. با جایگذاری این رابطه در (*) حکم ثابت می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم $k\aleph_1 = \aleph_1$. واضح است که $A\times B = \bigcup_{i=1}^{k}(\{i\}\times B)$. همچنین در فصل قبل نشان دادیم که $\{i\}\times B\cong B$ و از آنجا که $B = (0,1)\cong\mathbb{R}$ بنا بر خاصیت تعدی هم‌توانی مجموعه‌ها نتیجه می‌گیریم $\forall i = 1,\ldots,k; \{i\}\times B\cong\mathbb{R}$. ازطرفی، اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های هم‌توان با $\mathbb{R}$، با $\mathbb{R}$ هم‌توان است، پس $A\times B = \bigcup_{i=1}^{k}(\{i\}\times B)\cong\mathbb{R}$. از قاعده (۳) خواهیم داشت $\operatorname{card}(A\times B)\cong\operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$ و از تعریف ضرب دو عدد اصلی داریم $\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card}A.\operatorname{card}B = k\aleph_1$ با جایگذاری $\operatorname{card}(A\times B)\cong\aleph_1$ در رابطه اخیر می‌توان نوشت $k\aleph_1 = \aleph_1$. بنابراین گزینه (۴) نیز درست است.

مثال ۱۷: ثابت کنید: الف) $\aleph_0 = \aleph_0\aleph_0$. **ب)** $\aleph_1 = \aleph_1\aleph_1$. **پ)** $\aleph_1 = \aleph_0\aleph_1$.

☑ **پاسخ:**

اثبات الف: چون $\mathbb{N}\cong\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. بنابراین از قاعده (۳)، $\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ و تعریف ضرب اعداد اصلی نتیجه می‌شود:

$$\aleph_0 = \operatorname{card}\mathbb{N} = \operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \operatorname{card}\mathbb{N}.\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0\aleph_0 \ \Rightarrow\ \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$$

اثبات ب: در فصل مجموعه‌های شمارا و ناشمارا، نشان دادیم که اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $A\cong\mathbb{R}$ و $B\cong\mathbb{R}$، آنگاه $A\times B\cong\mathbb{R}$. بنابراین با توجه به قاعده (۳) خواهیم داشت $\operatorname{card}A = \operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$، $\operatorname{card}B = \operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$ و $\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$. از طرفی از تعریف ضرب دو عدد اصلی و روابط موجود داریم $\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card}A.\operatorname{card}B = \aleph_1\aleph_1$. حال از $\operatorname{card}(A\times B) = \aleph_1$ و $\operatorname{card}(A\times B) = \aleph_1\aleph_1$ نتیجه می‌گیریم $\aleph_1 = \aleph_1\aleph_1$.

اثبات پ: می‌دانیم $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، پس $\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})\le\operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. همچنین در فصل مجموعه‌های شمارا و ناشمارا نشان دادیم $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$. از رابطه اخیر و قاعده (۳) داریم $\operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_1$ که نتیجه می‌گیریم $\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})\le\aleph_1$. حال تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ را با ضابطه $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = (1,x)$ در نظر می‌گیریم. واضح است که تابع f تابعی یک به یک است در نتیجه $\aleph_1 = \operatorname{card}\mathbb{R}\le\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})$ که از $\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})\le\aleph_1$ و $\aleph_1\le\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})$ نتیجه می‌گیریم $\aleph_1 = \operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R})$. حال مطابق روابط زیر، از رابطه اخیر و تعریف ضرب دو عدد اصلی حکم ثابت می‌شود.

$$\aleph_1 = \operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}\mathbb{N}.\operatorname{card}\mathbb{R} = \aleph_0\aleph_1 \Rightarrow \aleph_1 = \aleph_0\aleph_1$$

توان اعداد اصلی

فرض کنید می‌خواهیم یک عدد اصلی را به توان عدد اصلی دیگری برسانیم. می‌دانیم که $2^4 = 2\times2\times2\times2$ و $m^n = \overbrace{m\times m\times\ldots\times m}^{n\ \text{بار}}$. بنابراین، برای تعریف توان اعداد اصلی می‌توان از تعمیم ضرب اعداد اصلی استفاده کرد. اما روش دیگری برای تعریف این عمل وجود دارد. فرض کنید مجموعه‌های A و B مجموعه‌های متناهی هستند که به ترتیب دارای n و m عضو می‌باشند. می‌خواهیم تعداد توابع مختلف مانند $f:A\to B$ را به دست آوریم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $A = \{1,2,\ldots,n\}$، بنابراین m راه مختلف برای انتخاب مقدار $f(1)$ از مجموعه‌ی B وجود دارد. برای هر مقداری که $f(1)$ اختیار کرده باشد، m راه مختلف برای انتخاب مقدار $f(2)$ از مجموعه‌ی B وجود دارد. برای هر مقداری که $f(1)$ و $f(2)$ اختیار کرده باشند، m