مدرسان شریف

فصل اول

« ماتریس و دستگاه معادلات خطی »

ماتریس

ماتریس‌ها یکی از پرکاربردترین ابزارهای ریاضی در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی چون برق، مکانیک، کامپیوتر و غیره می‌باشند. در نتیجه از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و به نوعی همه‌ی مباحث درس حاضر، آمیخته با مفهوم ماتریس است. بدین جهت، می‌خواهیم در ابتدای کتاب شما عزیزان را با مفهوم ماتریس و کابرد آن در حل دستگاه‌های معادلات خطی آشنا کنیم، همان‌طور که می‌دانیم، ماتریس یک آرایه‌ی مستطیل شکل است که درایه‌های آن متعلق به میدانی هستند که ماتریس روی آن تعریف شده است. پس، قبل از شروع بحث در مورد ماتریس‌ها، ابتدا به تعریف میدان می‌پردازیم.

❖ **تعریف۱:** مجموعه $\mathbb{F}$ را همراه با دو عمل جمع و ضرب که به ازای هر دو عضو x و y از $\mathbb{F}$ به ترتیب به صورت $x+y$ و $x.y$ نمایش داده می‌شوند، میدان گوییم، هرگاه خواص ده‌گانه زیر را داشته باشد:

۱ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x+y\in\mathbb{F}$ و $x.y\in\mathbb{F}$ (بسته بودن نسبت به اعمال جمع و ضرب)

۲ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x+y=y+x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل جمع)

۳ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ نتیجه شود: $x+(y+z)=(x+y)+z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل جمع)

۴ـ یک عنصر منحصر بفرد $0\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که، به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x+0=0+x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل جمع)

۵ـ به ازای هر عضو $x\in\mathbb{F}$ یک عنصر منحصر بفرد $(-x)\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که:

$x+(-x)=(-x)+x=0$ (عنصر قرینه نسبت به عمل جمع)

۶ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ ، $x.y=y.x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل ضرب)

۷ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y.z)=(x.y).z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل ضرب)

۸ـ عضو ناصفر و منحصر بفرد $1\in\mathbb{F}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که؛ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x.1=1.x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل ضرب)

۹ـ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$، عنصر ناصفر و منحصر بفرد $x^{-1}\in\mathbb{F}$ موجود باشد به طوریکه؛ $x.x^{-1}=x^{-1}.x=1$ (عضو قرینه نسبت به عمل ضرب)

۱۰ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y+z)=x.y+x.z$ (پخش‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع)

مثال۱: مجموعه اعداد حقیقی و اعداد گویا تحت همان جمع و ضرب معمولی یک میدان هستند. همچنین، اعداد مختلط $\mathbb{C}$ نسبت به عمل جمع و ضرب تعریف شده در زیر؛ تشکیل یک میدان می‌دهند:

$$1)\ \ (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \qquad ; \qquad 2)\ \ (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

مثال۲: <u>میدان‌های متناهی</u>. مجموعه $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ همراه با اعمال جمع و ضرب به هنگ ۵، یک میدان متناهی است. جمع و ضرب به هنگ ۵ بدین صورت است که همان جمع و ضرب معمولی را انجام می‌دهیم و فقط حاصل آن را به هنگ ۵ بدست می‌آوریم. به عنوان مثال در $\mathbb{Z}_5$ داریم:

$$4\times 3=12\overset{5}{\equiv}2 \quad \text{و} \quad 4+3=7\overset{5}{\equiv}2 \quad \text{و} \quad 3+2=5\overset{5}{\equiv}0$$

نکته۱: اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_p=\{0,1,2,\dots,p-1\}$ تحت اعمال جمع و ضرب به هنگ p یک میدان متناهی است.

❖ **تعریف۲:** عدد صحیح و مثبت n را مشخصه میدان $\mathbb{F}$ گویند، هرگاه n کوچکترین عددی باشد که حاصل جمع n مرتبه عدد ۱ (عضو خنثی نسبت به ضرب) در آن میدان برابر صفر (عضو خنثی نسبت به جمع) شود. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، میدان را از مشخصه صفر می‌نامند.

مثال۳: اعداد حقیقی و گویا، میدان‌هایی با مشخصه صفر و به ازای هر عدد اول p ، $\mathbb{Z}_p$ میدانی با مشخصه p است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

۱) $\mathbb{Z}$ یک میدان از مشخصه صفر است.

۲) $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه نامتناهی است.

۳) $\mathbb{Z}_{91}$ یک میدان از مشخصه ۹۱ است.

۴) $\mathbb{Z}_{53}$ یک میدان از مشخصه ۵۳ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست؛ زیرا $2\in\mathbb{Z}$ و $2^{-1}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$، در واقع وارون عناصر ناصفر مخالف یک در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد. $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه صفر است. همچنین می‌دانیم که $\mathbb{Z}_p$ به ازای هر عدد اول p یک میدان از مشخصه p است. پس از آنجا که ۹۱ غیر اول (یا مرکب) و ۵۳ عدد اول است؛ گزینه (۳) غلط و گزینه (۴) درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

حال به تعریف ماتریس و اعمال جبری روی آن و بعضی قضایا در مورد آن می‌پردازیم.

❖ **تعریف۳:** فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، آرایه مستطیل شکل زیر که عناصر آن متعلق به $\mathbb{F}$ هستند را یک ماتریس می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

به ازای هر $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ عنصر a_{ij} را درایه ijـام ماتریس A می‌نامند. همچنین اگر m تعداد سطرهای ماتریس و n تعداد ستونهای ماتریس A باشد، ماتریس را از اندازه $m\times n$ می‌گویند و برای نمایش آن از شکل خلاصه مقابل استفاده می‌کنند. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

هر ماتریس $m\times 1$ را یک ستون m تایی و هر ماتریس $1\times n$ را یک سطر n تایی می‌نامند. همچنین اگر $m=n$ باشد، ماتریس A ، یک ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

اعمال جبری روی ماتریس‌ها

۱ـ جمع و تفریق ماتریس: جمع و تفریق دو ماتریس فقط در صورتی تعریف‌پذیر است که دو ماتریس هم اندازه باشند. در اینصورت، با فرض

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

داریم:

$$A\pm B=\begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

۲ـ ضرب اسکالر در ماتریس: برای هر اسکالر $c\in\mathbb{F}$ و ماتریس A روی میدان $\mathbb{F}$ داریم:

$$cA=\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال۵: ماتریس‌های $A+B$، $2B-C$ و $3A$ را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-4&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2&5\\1&2\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A+B=\begin{bmatrix}2-4&-1+2&1+1\\0+1&1+3&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&2\\1&4&1\end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix}3\times2&3\times-1&3\times1\\3\times0&3\times1&3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-3&3\\0&3&6\end{bmatrix}$$

از آنجا که B یک ماتریس 2×3 و C یک ماتریس 2×2 است، $2B-C$ قابل تعریف نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ ضرب دو ماتریس: ضرب ماتریس $A_{m\times n}$ در ماتریس $B_{k\times l}$ فقط در صورتی امکان‌پذیر است که $n=k$ ، یعنی تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. که در اینصورت حاصلضرب AB یک ماتریس $m\times l$ است و به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$AB=[c_{ij}]_{m\times l} \quad \text{و} \quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj} \quad \text{و} \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{و} \quad j=1,2,\dots,l$$

توجه کنید که لزوماً $AB=BA$ نیست. حتی ممکن است، حاصلضرب AB قابل تعریف و BA غیرقابل تعریف باشد. همچنین، توانهای یک ماتریس مربعی، از حاصلضرب آن ماتریس در خودش، حاصل می‌شود. یعنی؛ اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^2=AA,\ A^3=AA^2,\ \dots,\ A^m=AA^{m-1},\ m\in\mathbb{N}$$

به خاطر داشته باشید که محاسبه توانهای یک ماتریس، فقط در ماتریس‌های مربعی امکان‌پذیر است.

برای درک بهتر ضرب دو ماتریس، ابتدا به یادآوری ضرب اسکالر در بردارها پرداخته و سپس حاصل ضرب دو ماتریس را به کمک آن به دست می‌آوریم.

❖ **تعریف۴:** فرض کنید $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$ و $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$ دو بردار دلخواه باشند. در اینصورت ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a.b}$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\mathbf{a.b}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

مثال۶: اگر $\mathbf{a}=(1,2,-1,3)$ و $\mathbf{b}=(2,3,1,-1)$ داریم:

$$\mathbf{a.b}=(1,2,-1,3).(2,3,1,-1)=1\times2+2\times3+(-1)\times1+3\times(-1)=4$$

◆ ◆ ◆ ◆

حال اگر در ماتریس $A_{m\times n}$، سطر iام را $\mathbf{a_i}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$ و در ماتریس $B_{n\times\ell}$، ستون jام را $\mathbf{b'_j}=(b_{1j},b_{2j},\dots,b_{nj})^T$ در نظر بگیریم، به سادگی می‌بینیم که درایه ij ـ ام ماتریس $C=AB$ برابر با ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{a_i^T}$ و $\mathbf{b'_j}$ است: یعنی،

$$c_{ij}=\mathbf{a_i^T}.\mathbf{b'_j}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

مثال۷: با فرض $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$، ماتریس‌های AB و BA را به دست آورید:

پاسخ:

$$AB=\begin{bmatrix}2+1-1&4+1-1\\1+2+3&2+2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&7\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&5\\3&3&2\\3&3&2\end{bmatrix}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: فرض کنید ماتریس‌های A، B و C به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&3\end{bmatrix}_{2\times3},\quad B=\begin{bmatrix}4&5\\2&3\\1&2\end{bmatrix}_{3\times2},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

در این صورت داریم:

$$AC=\begin{bmatrix}19&14&21\\13&9&14\end{bmatrix}_{2\times3}\quad,\quad 2B=\begin{bmatrix}8&10\\4&6\\2&4\end{bmatrix}_{3\times2}\quad,\quad AB=\begin{bmatrix}18&27\\11&17\end{bmatrix}_{2\times2}\quad,\quad C^2=\begin{bmatrix}13&9&14\\11&11&14\\11&9&16\end{bmatrix}_{3\times3}$$

واضح است که حاصلضرب CA غیر قابل تعریف و همچنین BA یک ماتریس 3×3 است. بنابراین، در ضرب ماتریس‌ها لزوماً خاصیت جابجایی را نداریم. توجه کنید که محاسبه A^2 یا B^2 نیز، امکان‌پذیر نیست، چرا که آنها ماتریس مربعی نیستند.

مثال۹: نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه و به گونه‌ای باشند که AB=BA، آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $(AB)^n=A^nB^n$.

☑ **پاسخ:** برای اثبات از استقرار روی n استفاده می‌کنیم:

برای $n=1$ داریم:

$$(AB)^1=A^1B^1$$

حال فرض می‌کنیم که حکم برای $n=k$ برقرار باشد ($(AB)^k=A^kB^k$) و آن را برای $n=k+1$ اثبات می‌کنیم:

$$(AB)^{k+1}=(AB)^k(AB)\ \overset{\text{فرض استقرا}}{=\!=\!=}\ A^kB^kAB=A^k\underbrace{BB\cdots B}_{k\ \text{بار}}AB\ \overset{\text{فرض}}{=\!=}$$

$$A^k\underbrace{BB\cdots B}_{k-1\ \text{بار}}ABB\ \underset{\text{مسأله استفاده می‌کنیم.}}{\overset{k-1\ \text{بار دیگر از فرض}}{=\!=\!=\!=\!=}}\ A^kA\underbrace{BB\cdots B}_{k\ \text{بار}}B=A^{k+1}B^{k+1}$$

بدین ترتیب اثبات پایان می‌یابد.

مثال۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&5\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}3&-2\\4&1\\-1&2\end{bmatrix}$ **و** $C=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ **و D=ABC ، آنگاه** $2d_{11}$ **برابر است با:**

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نکته دارای اهمیت در اینگونه تست‌ها، پرهیز از محاسبات کامل و تعیین ماتریس D است. در واقع باید فقط به دنبال درایه مورد نظر باشیم. اگر قرار دهیم؛ $D=ABC=(AB)C$، آنگاه برای محاسبه d_{11} کافی است حاصلضرب سطر اول AB در ستون اول C را بدست آوریم.

چون ستون اول C به صورت $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ است؛ پس فقط کافی است $(AB)_{11}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم $(AB)_{11}$ برابر است با حاصل‌ضرب سطر اول A در ستون اول B، پس داریم:

$$(AB)_{11}=2\times3+3\times4+4\times(-1)=14\ \xrightarrow{\text{چون ستون اول C برابر با } \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \text{ است.}}\ d_{11}=14\Rightarrow 2d_{11}=28$$

نکته۲: اگر A و B ماتریس‌هایی باشند که جمع درایه‌های هر سطر آنها یک است، آنگاه جمع درایه‌های هر سطر AB نیز یک می‌شود.

اثبات: توجه کنید که لازمه‌ی برقراری این نکته، اینست که ضرب AB قابل تعریف باشد. با توجه به این، فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس دلخواه و به گونه‌ای باشند؛ که مجموع درایه‌های هر سطر آنها یک است.

مجموع درایه‌های هر سطر A برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $i=1,2,\dots,n$، داریم:

$$\text{(1)}\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ik}=1$$

مجموع درایه‌های هر سطر B برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $k=1,2,\dots,m$، داریم:

$$\text{(2)}\quad \sum_{j=1}^{p}b_{kj}=1$$

حال فرض کنید $C=AB$، در اینصورت با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها، می‌دانیم که C یک ماتریس $m\times p$ است و به ازای هر $i=1,2,\dots,p$ و $j=1,2,\dots,p$، داریم؛

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\qquad(3)$$

با توجه به روابط ۱و۲و۳ نتیجه می‌شود؛

$$\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ ـ ام } C = \sum_{j=1}^{p} c_{ij} \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{p} b_{kj} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times 1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overset{(1)}{=} 1$$

بنابراین، مجموع درایه‌های هر سطر $C = AB$ نیز، برابر با یک است.

❖ **تعریف۵:** در ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ، درایه‌های $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ را درایه‌های قطری، یا قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. اگر در یک ماتریس تمام درایه‌ها به غیر از درایه‌های قطری آن صفر باشند، آنرا ماتریس قطری نامیده و به صورت $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ نمایش می‌دهیم.

برای نمایش ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ از نماد $A = \mathrm{diag}(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})$ نیز استفاده می‌شود. در واقع، مواقعی از علامت (,) بین اعداد استفاده می‌شود که تشخیص درایه‌های قطری بدون کاما سخت باشد. به عنوان مثال $\mathrm{diag}(135)$ عبارتی مبهم است که می‌تواند هر کدام از ماتریس‌های $\mathrm{diag}(1,35)$، $\mathrm{diag}(13,5)$ و یا $\mathrm{diag}(1,3,5)$ نیز باشد. ولی عبارت $\mathrm{diag}(a_1a_2)$ کاملاً واضح است؛ پس دیگر نیازی به استفاده از کاما در آن نیست.

ماتریس $\mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n \text{ بار}})$ را ماتریس همانی مرتبه n می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند. به عنوان مثال:

$$I_2 = \mathrm{diag}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✍ **مثال۱۱: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{bmatrix}$، در اینصورت A^{2n} برابر است با:**

۱) A

۲) $\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n} \\ -\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \\ \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n} \end{bmatrix}$

۴) I_2

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید:

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow B^2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب نتیجه می‌شود:

$$B^4(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos 4\alpha & -\sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{bmatrix} \text{ و ... و } B^{2n}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(2n\alpha) & -\sin(2n\alpha) \\ \sin(2n\alpha) & \cos(2n\alpha) \end{bmatrix},\ n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

حال اگر در رابطه‌ی (۱) قرار دهیم $\alpha = \frac{\pi}{n}$، نتیجه می‌شود:

$$A^{2n} = B^{2n}(\frac{\pi}{n}) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & -\sin(2\pi) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

نکته۳: اگر A یک ماتریس قطری $n \times n$ و $A = \mathrm{diag}(a_1a_2\cdots a_n)$ باشد، آنگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم: $A^k = \mathrm{diag}(a_1^k a_2^k \cdots a_n^k)$

اثبات: به سادگی و با استقرا روی k بدست می‌آید:

برای $k = 1$، بوضوح حکم برقرار است؛ $k = 1 \Rightarrow A = \mathrm{diag}(a_1a_2\cdots a_n)$

حال فرض می‌کنیم حکم برای k برقرار باشد، آن را برای $k+1$ اثبات می‌کنیم.

$$A^{k+1}=AA^k \underset{\text{استقرا}}{\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}} \operatorname{diag}(a_1\cdots a_n)\operatorname{diag}(a_1^k\cdots a_n^k)=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^{k+1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2^{k+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{diag}(a_1^{k+1}\cdots a_n^{k+1})$$

بدین ترتیب، با توجه به استقراء اثبات تمام است.

مثال۱۲: با فرض $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$، ماتریس A^4 را به دست آورید.

پاسخ:

$$A^4=\begin{bmatrix} 3^4 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^4 & 0\\ 0 & 0 & (-2)^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}$$

مثال۱۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$ ، A^k را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I_n \Rightarrow A^3=A^2A=IA=A\ \ ,\ ,A^4=A^2A^2=I_nI_n=I_n\ \ldots$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود:

$$A^k=\begin{cases} A & \text{اگر } k \text{ فرد باشد.}\\ I_n & \text{اگر } k \text{ زوج باشد.}\end{cases}$$

❖ **تعریف۶:** ترانهاده ماتریس $A_{m\times n}$ ، یک ماتریس $n\times m$ است که هر ستون A یک سطر آن است؛ و آن را با A^t نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ -4 & 5 & 6\end{bmatrix}$، به سادگی می‌بینیم که $A^t=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4\\ -1 & 3 & 5\\ 0 & -2 & 6\end{bmatrix}$ می‌باشد.

❖ **تعریف۷:** ماتریس مربعی A را متقارن گوییم هرگاه $A^t=A$ و پاد متقارن گوییم، هرگاه $A^t=-A$ باشد.

با توجه به تعریف، ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ متقارن و ماتریس $B=\begin{bmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ پاد متقارن است. همچنین $C=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ نه متقارن است و نه پاد متقارن.

قضیه۱: فرض کنید A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ و o یک ماتریس $m\times n$ که تمام درایه‌های آن صفر است (ماتریس صفر) و c و d اسکالر باشند، در اینصورت داریم:

۱) $A+B=B+A$ ۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ ۳) $o+A=A+o=A$

۴) $c(A+B)=cA+cB$ ۵) $(c+d)A=cA+dA$ ۶) $(cd)A=c(dA)$

مدرسان شریف

فصل دوم

« دترمینان »

دترمینان

یکی از مفاهیم مهمی که نقش اساسی در بحث ماتریس‌ها و جبرخطی دارد، مفهوم دترمینان یک ماتریس است. در حقیقت دترمینان، یک تابع حقیقی مقدار با دامنه ماتریس‌های مربع است که به ازای هر ماتریس مربع یک مقدار، که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود، نسبت می‌دهد. دترمینان یک ماتریس، کاربردهایی در محاسبه معکوس ماتریس، حل دستگاه معادلات خطی، تعیین مقدارهای ویژه و ... دارد. در این فصل برآنیم که مفهوم دترمینان و کاربرد آن در تعیین معکوس یک ماتریس و حل دستگاه معادلات را برای شما دوستان گرامی شرح دهیم. در فصل‌های آتی در باب تعیین مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس به کمک دترمینان بحث خواهیم کرد.

اصولاً برای تعریف تابع دترمینان از مفهوم جایگشت استفاده می‌شود. به همین منظور ابتدا به ارائه چند تعریف در زمینه جایگشت‌ها می‌پردازیم و در ادامه تابع دترمینان را تعریف می‌کنیم.

❖ **تعریف۱:** وضعیتهای مختلف قرار گرفتن گروهی از اشیاء (یا اسکالرها) در کنار هم، یا آرایش‌های مختلف آن‌ها را، یک جایگشت از آن اشیاء می‌نامند.

❖ **تعریف۲:** در یک جایگشت از اعداد، گفته می‌شود یک انعکاس رخ داده است، اگر یک عدد بزرگتر قبل از عدد کوچکتر آمده باشد. همچنین اگر در یک جایگشت تعداد کل انعکاس‌ها زوج باشد، آنرا **جایگشتی زوج** و اگر تعداد کل انعکاس‌ها فرد باشد، آن‌را **جایگشتی فرد** می‌نامند.

مثال۱: جایگشت‌های (۴ ۵ ۳ ۲ ۱) (دارای یک انعکاس) و (۴ ۳ ۲ ۱ ۵) (دارای ۳ انعکاس)، جایگشتی فرد و جایگشت‌های (۵ ۴ ۳ ۲ ۱) (بدون انعکاس) و (۴ ۵ ۱ ۲ ۳) (دارای چهار انعکاس) جایگشتی زوج از مجموعه $\{۵,۴,۳,۲,۱\}$ می‌باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

❖ **تعریف۳:** اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه یک حاصلضرب مقدماتی از A عبارت است از حاصلضرب n درایه از ماتریس A که هیچ دو تا از آنها در یک سطر و یا یک ستون نباشند.

به طور کلی حاصلضرب‌های مقدماتی یک ماتریس $n\times n$ به‌صورت $a_{1j_1}.a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ می‌باشند؛ که در آن $(j_1j_2\dots j_n)$ یک جایگشت از مجموعهٔ اعداد $\{1,2,\dots,n\}$ است.

❖ **تعریف۴:** دترمینان یک ماتریس $n\times n$ مانند A روی میدان $\mathbb{F}$ برابر با مجموع تمام حاصلضرب‌های مقدماتی علامت‌دار آن است (حاصلضرب مقدماتی $a_{1j_1}.a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ را اگر $(j_1j_2\dots j_n)$ جایگشتی زوج باشد، با علامت مثبت و اگر $(j_1j_2\dots j_n)$ جایگشتی فرد باشد، با علامت منفی؛ علامت‌دار می‌کنیم)

دترمینان A را با $\det(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

مثال۲: حاصلضرب‌های مقدماتی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را به صورت علامت‌دار بنویسید.

$1)\ a_{11}a_{22}=ad$ چون (۲ ۱) جایگشت زوج است، علامت آن مثبت است.

$2)\ -a_{12}.a_{21}=-bc$ چون (۱ ۲) جایگشتی فرد است، علامت آن منفی است.

با توجه به مثال بالا و تعریف دترمینان نتیجه می‌شود که اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه داریم:

$$\det(A)=ad+(-1)bc=ad-bc$$

محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس با استفاده از تعریف آن بر اساس جایگشتها، کاری سخت و وقتگیر است و معمولاً برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس از بسط لاپلاس آن روی یکی از سطرها، یا ستون‌های آن استفاده می‌کنند.

❖ **تعریف۵:** فرض کنید A_{ij} زیر ماتریسی از ماتریس A باشد که در آن سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس A، حذف شده است. در اینصورت همسازهٔ سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس A که با c_{ij} نمایش می‌دهیم؛ برابر است با: $c_{ij} = (-۱)^{i+j}\det(A_{ij})$

قضیه زیر که به قضیه یا بسط لاپلاس در محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس معروف است، را بدون اثبات بیان می‌کنیم. این قضیه نشان می‌دهد که برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس، می‌توان از بسط لاپلاس آن ماتریس نسبت به هر سطر یا ستون دلخواه از آن، استفاده کرد.

قضیه۱: اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه داریم:

۱) $\det(A) = a_{i۱}c_{i۱} + a_{i۲}c_{i۲} + \ldots + a_{in}c_{in}$ بسط لاپلاس روی سطر i-ام ; $i = ۱,۲,\ldots,n$

۲) $\det(A) = a_{۱j}c_{۱j} + a_{۲j}c_{۲j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$ بسط لاپلاس روی ستون j-ام ; $j = ۱,۲,\ldots,n$

مثال۳: دترمینان ماتریس‌های زیر را به کمک بسط لاپلاس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

☑ **پاسخ:**

$$\det(A) = ۲\times -۱ - ۵\times ۱ = -۷$$

$$\det(B) = (-۱)^{۱+۱}\times ۱\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۰ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲}\times ۲\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۷ & ۹ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳}\times ۳\times\begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix} = (۵\times ۹ - ۶\times ۸) - ۲(۴\times ۹ - ۶\times ۷) + ۳(۴\times ۸ - ۵\times ۷) =$$

$$-۳ + ۱۲ - ۹ = ۰$$

$$\det(C) = (-۱)^{۱+۱}\times(-۱)\times\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲}\times ۰\times\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳}\times ۱\times\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} = -(۰-۱) - ۰ + (۰+۱) = ۱+۱ = ۲$$

> **توجه۱:** از آنجا که در محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس؛ درایه‌های سطر یا ستونی که بسط لاپلاس آن مورد استفاده قرار می‌گیرد، نقش ضریب را دارند، بنابراین بهتر است برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس، بسط آن را نسبت به سطر یا ستونی بنویسیم که بیشترین تعداد صفر را دارد.

مثال۴: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۰ & -۱ \\ -۶ & ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، آنگاه $\det(A)$ برابر است با:

۱) ۵   ۲) ۵-   ۳) ۱۵-   ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بسط لاپلاس را نسبت به سطر اول می‌نویسیم.

$$\det(A) = ۳\times(-۱)^{۱+۱}\times\det\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۶ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\right) + ۰\times(-۱)^{۱+۲}\times\det(A_{۱۲}) + ۰\times(-۱)^{۱+۳}\times\det(A_{۱۳}) + ۰\times(-۱)^{۱+۴}\times\det(A_{۱۴}) =$$

$$۳\times\det\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۶ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\right) \qquad (I)$$

برای محاسبهٔ دترمینان $A_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۶ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، از بسط آن نسبت به ستون سومش استفاده می‌کنیم.

$$\det(A_{11}) = 0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 0\\3 & 1\end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} + 0\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\6 & 0\end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} = 1-6=-5$$

بنابراین، با توجه به رابطه (I) نتیجه می‌شود:

$$\det(A) = 3\times -5 = -15$$

محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس با استفاده از بسط لاپلاس نیز در صورتیکه تعداد صفرهای سطرها و ستون‌های ماتریس اندک باشد، با دشواری زیادی در محاسبات همراه است؛ مخصوصاً اگر اندازهٔ ماتریس بزرگ باشد. در ادامه سعی می‌کنیم قضایایی را بیان کنیم؛ که محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس در حالت‌های خاص را راحت‌تر سازد.

قضیه۲: اگر A یک ماتریس مثلثی (بالا مثلثی یا پائین مثلثی) یا قطری باشد، آنگاه دترمینان A، برابر با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است.

اثبات: قضیه را با استفاده از استقرا برای یک ماتریس بالا مثلثی اثبات می‌کنیم. خواننده می‌تواند اثبات‌های مشابهی را برای ماتریس‌های پایین مثلثی یا قطری بدست آورد.

برای ۲ یا $n=1$ ، حکم بوضوح برقرار است.

فرض استقرا: فرض کنیم وقتی A یک ماتریس بالا مثلثی و $n\times n$ است، داریم $\det(A) = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}$، حال حکم را برای ماتریس بالا مثلثی $(n+1)\times(n+1)$ اثبات می‌کنیم. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n+1)(n+1)}\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $\det A$ ، اگر بسط آن را نسبت به ستون اول آن در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود.

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) = a_{11}\times\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n+1)}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n+1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n+1)(n+1)}\end{bmatrix}\right) \qquad (1)$$

همانطور که دیده می‌شود؛ A_{11} یک ماتریس بالا مثلثی $n\times n$ است و بنابر فرض استقرا داریم:

$$\det(A_{11}) = a_{22}a_{33}\ldots a_{(n+1)(n+1)}$$

بنابراین، با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{(n+1)(n+1)}$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

لازم بذکر است که برای اثبات در مورد ماتریس‌های پائین مثلثی، باید بسط ماتریس نسبت به سطر اول آن نوشته شود.

مثال۵: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\6 & 7 & 0\\3 & 0 & 10\end{bmatrix}$ با دترمینان کدام‌یک از ماتریس‌های زیر یکسان است؟

۱) $B = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\4 & 5 & 0\\1 & 0 & 9\end{bmatrix}$ ۲) $C = \begin{bmatrix}15 & 2\\5 & 10\end{bmatrix}$ ۳) $D = \begin{bmatrix}7 & 0 & 5\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 10\end{bmatrix}$ ۴) $E = \begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۲» A یک ماتریس پایین مثلثی است، پس $\det A = 2\times 7\times 10 = 140$، E یک ماتریس بالا مثلثی است، بنابراین $\det E = 7\times 5\times 3 = 105$، در مورد سایر ماتریس‌های مثال باید از بسط دترمینان آنها استفاده کنیم.

$$\det B \xlongequal{\text{بسط نسبت به ستون سوم}} 9\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 5\end{vmatrix} = 9\times(15-4) = 99$$

$$\det C = \begin{vmatrix}15 & 2\\5 & 10\end{vmatrix} = 150-10 = 140$$

$$\det D \xlongequal{\text{بسط نسبت به ستون اول}} 7\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 10\end{vmatrix} = 7\times(20-1) = 133$$

بنابراین، $\det A = \det C = 140$ است.

مثال۶: به ازای چه مقادیری از x و y، دترمینان ماتریس داده شده صفر می‌شود.

الف) $A\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ y & 0 & x \\ x & y & 0 \end{bmatrix}$		ب) $A=\begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

پاسخ:

الف)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ y & 0 & x \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط نسبت به سطر اول}} 0-x(0-x^2)+y(y^2-0)=x^3+y^3$$

$$\det(A)=0 \Rightarrow x^3+y^3=0 \Rightarrow x^3=-y^3 \xrightarrow{\text{x و y حقیقی‌اند}} x=-y$$

بنابراین، به ازای تمام نقاط (x,y) از نیمساز ربع دوم و چهارم، دترمینان ماتریس A صفر می‌شود.

ب)

$$\det(B)=\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix}=x(x(x^2-0))-y(-y(0-y^2))$$

$$=x^4-y^4 \xlongequal{\det(B)=0} 0 \Rightarrow x^4=y^4 \Rightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y \\ x^2=-y^2 \Rightarrow x=y=0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای تمام نقاط (x,y) از خطوط $x=y$ و $x=-y$، دترمینان A صفر می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که هر ماتریس هم ارز سطری ـ پلکانی یک ماتریس مثلثی است؛ بنابراین اگر بتوانیم رابطه‌ی بین دترمینان ماتریس‌های هم ارز سطری ـ پلکانی را به‌دست آوریم، می‌توان برای محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس با ابعاد بزرگ، ابتدا ماتریس مثلثی هم ارز سطری ـ پلکانی با آن را به‌دست آورد؛ سپس دترمینان آن ماتریس را به کمک دترمینان هم ارز آن، تعیین کرد. به همین‌منظور در قضیه بعد، تأثیر اعمال سطری مقدماتی را روی دترمینان یک ماتریس بررسی می‌کنیم.

قضیه۳: اگر A یک ماتریس $n\times n$ و B ماتریسی باشد که:

الف) از ضرب کردن سطری از A در اسکالر ناصفر k حاصل شود، آنگاه: $\det(B)=k\det(A)$

ب) از جابجایی دو سطر ماتریس A حاصل شود، آنگاه: $\det(B)=-\det(A)$

ج) از افزودن مضربی از یک سطر A به سطر دیگر آن حاصل شود، آنگاه: $\det B=\det A$

اثبات:

الف) فرض کنیم B ماتریسی باشد که از ضرب سطر i-ام ماتریس A در k حاصل شده است. در اینصورت از آن‌جا که تنها تفاوت ماتریس A و B در سطر i-ام آن‌ها است، واضح است که همسازه‌های متناظر با سطر i-ام و ستون j-ام برای $j=1,...,n$، در ماتریس‌های A و B با هم برابرند. بنابراین، اگر برای محاسبهٔ دترمینان B از بسط لاپلاس آن روی سطر i-ام استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\det(B)=ka_{i1}c_{i1}+ka_{i2}c_{i2}+...+ka_{in}c_{in}=k(a_{i1}c_{i1}+...+a_{in}c_{in}) \xlongequal{\text{طبق تعریف}} k\det(A)$$

که در آن c_{ij} برای $j=1,...,n$ همسازه‌ی ij-ام ماتریس B است که با همسازه‌ی ij-ام ماتریس A یکسان است.

ب) این قسمت را با استفاده از استقرا روی n، اثبات می‌کنیم: برای $n=2$ که حکم بوضوح برقرار است. حال فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ (که $n>2$) است و B ماتریسی است که از جابجایی دو سطر A بدست آمده است. در این صورت اگر برای محاسبهٔ دترمینان B، از بسط لاپلاس آن روی سطری از ماتریس (مثلاً i) که غیر از دو سطر جابجا شده است، استفاده کنیم؛

داریم:

$$\det(B)=a_{i1}(-1)^{i+1}\det(B_{i1})+...+a_{in}(-1)^{i+n}\det(B_{in})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(B_{ij}) \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم که B_{ij} برای هر $j=1,...,n$، یک ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ است که از جابجایی دو سطر ماتریس A_{ij} بدست آمده است (دقت کنید سطر i-ام سطری غیر از دو سطر جابجا شده در نظر گرفته شد). بنابراین، طبق فرض استقرا می‌دانیم برای هر $j=1,2,\dots,n$ ‏ $\det(B_{ij})=-\det(A_{ij})$ است.

با جایگذاری این نتیجه در معادله (۱) داریم:

$$\det(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}(-\det(A_{ij}))=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}.\det(A_{ij})=-\det A$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

ج) فرض کنید ماتریس B از افزودن k برابر سطر i-ام از ماتریس A به سطر j-ام آن حاصل شده است. در اینصورت تنها تفاوت ماتریس A و B در سطر j-ام آنها است. بنابراین، همسازه‌های سطر j-ام و ستون t-ام (c_{jt}) دو ماتریس برای $1\le t\le n$ یکسان هستند. حال اگر برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس B از بسط لاپلاس آن نسبت به سطر j-ام آن استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\det(B)=(a_{j1}+ka_{i1})c_{j1}+...+(a_{jn}+ka_{in})c_{jn}$$

دقت کنید که c_{jt}، برای $t=1,...,n$، همسازهٔ سطر j-ام و ستون t-ام ماتریس B است که در ماتریس A و B مقدار آن یکسان است. بنابراین:

$$\det(B)=\underbrace{\sum_{t=1}^{n}a_{jt}c_{jt}}_{=\det(A)}+k\underbrace{\sum_{t=1}^{n}a_{it}c_{jt}}_{=0}=\det(A)+0=\det(A) \qquad (2)$$

لازم به ذکر است که مجموع دوم در رابطهٔ (۲) برابر با دترمینان ماتریسی که از جایگزینی سطر i-ام A به جای سطر j-ام آن حاصل شده است؛ می‌باشد. (یعنی ماتریسی که دارای دو سطر یکسان است) و بنا بر نکته بعد می‌دانیم که دترمینان چنین ماتریسی برابر با صفر است. در نتیجه $\det B=\det A$ و اثبات تمام است.

مثال۷: نشان دهید که هرگاه A ماتریسی باشد که در هر سطر و ستونش یک و تنها یک درایه‌ی ناصفر دارد، آنگاه $\det(A)\neq 0$.

☑ **پاسخ:** فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و a_1, a_2, $\cdots$, a_n تنها درایه‌های ناصفر A هستند که هر کدام در یک سطر و ستون قرار دارند. بنابراین می‌توان با تعداد متناهی عمل جابجایی سطر در ماتریس A، ماتریس هم ارز سطری مقدماتی آن، $B=\text{diag}(a_1a_2\cdots a_n)$، را به دست آورد. حال اگر فرض کنیم k عمل جابجایی سطر در ماتریس A لازم بوده است، داریم:

$$\det(B)=(-1)^k\det(A)$$

از طرفی B یک ماتریس قطری است و داریم:

$$\det(B)=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

حال از آنجا که a_iها ناصفر بودند، دترمینان B و در نتیجه دترمینان A ناصفر است.

$$\det(A)=(-1)^k a_1a_2\cdots a_n$$

نکته۱: اگر ماتریس A دارای دو سطر یکسان باشد، آنگاه $\det A=0$ است.

اثبات: فرض کنید که سطر i-ام و j-ام ماتریس A یکسان باشند، حال اگر ماتریس B با تعویض سطرهای i و j از ماتریس A حاصل شود، واضح است که $B=A$ و بنابراین $\det B=\det A$ است. از طرفی بنابر قسمت (ب) از قضیه قبل نتیجه می‌شود که $\det B=-\det A$، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\det B=\det A\\ \det B=-\det A\end{array}\right\}\Rightarrow \det A=-\det A\Rightarrow 2\det A=0\Rightarrow \det A=0$$

نکته۲: اگر A دارای یک سطر صفر باشد، آنگاه $\det A=0$ است.

اثبات: کافی است بسط لاپلاس دترمینان آن را روی سطری که صفر است؛ بنویسیم تا نتیجه حاصل شود.

مثال۸: دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&5&1\\-2&1&4\\3&5&1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}\begin{bmatrix}2&5&1\\-1&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

☑ **پاسخ:** سطر اول و سوم A یکسان هستند، پس $\det(A)=0$. سطر سوم ماتریس B، یک سطر صفر است، پس $\det(B)=0$

تذکر۱: تمامی مواردی که در مورد سطرهای یک ماتریس بیان شد، در مورد ستونهای آن نیز برقرار است. یعنی اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه موارد زیر برقرارند:

الف) اگر A دارای یک ستون صفر باشد، آنگاه $\det A = 0$ است.

ب) اگر A دارای دو ستون یکسان باشد، آنگاه $\det A = 0$ است.

پ) اگر دو ستون از A را جابجا کنیم، آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر با $-\det A$ است.

ت) اگر مضربی از یک ستون ماتریس A به ستونی دیگری از آن اضافه شود، دترمینان ماتریس حاصل برابر با $\det A$ است.

ث) اگر ستونی از ماتریس A را در ضریبی ناصفر مانند k ضرب کنیم، دترمینان ماتریس حاصل برابر با $k\det A$ است.

مثال۹: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&0&4\\2&1&3\\1&2&5\end{bmatrix}$ با دترمینان کدامیک از ماتریس‌های زیر یکسان است.

۱) $B=\begin{bmatrix}3&0&4\\1&2&5\\2&1&3\end{bmatrix}$ ۲) $B=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&2&3\\2&1&5\end{bmatrix}$ ۳) $B=\begin{bmatrix}7&2&10\\2&1&3\\1&2&5\end{bmatrix}$ ۴) $B=\begin{bmatrix}3&0&4\\4&2&6\\1&2&5\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۳» در گزینه (۱) جای سطرهای دوم و سوم ماتریس A، عوض شده است؛ بنابراین $\det B=-\det A$، در گزینه (۲) ستونهای اول و دوم ماتریس A جابجا شده‌اند؛ بنابراین $\det B=-\det A$، در گزینه (۳) دو برابر سطر دوم ماتریس A به سطر اول آن اضافه شده است؛ پس دترمینان آن تغییری نمی‌کند و در نتیجه $\det B=\det A$، در گزینه (۴) سطر دوم ماتریس در ۲ ضرب شده است، بنابراین $\det B=2\det A$ است.

مثال۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\-1&0&-1\\1&4&2\end{bmatrix}$، آنگاه $\det A$ برابر است با:

۱) -8 ۲) 8 ۳) 4 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: تعداد صفرهای ماتریس A کم است. بنابراین، از اعمال سطری مقدماتی کمک می‌گیریم. به همین منظور اگر تفاضل سطر دوم و سوم (یعنی R_2-R_3) را به سطر اول اضافه کنیم. واضح است که دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند و ماتریس زیر حاصل می‌شود.

$$B=\begin{bmatrix}0&0&2\\-1&0&-1\\1&4&2\end{bmatrix}\Rightarrow \det B=2\times(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}-1&0\\1&4\end{pmatrix}=-8\Rightarrow \det A=\det B=-8$$

روش دوم: برای محاسبه دترمینان A، مستقیماً از بسط لاپلاس آن نسبت به سطر اول ماتریس استفاده می‌کنیم؛

$$\det A=\begin{vmatrix}2&4&5\\-1&0&-1\\1&4&2\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}0&-1\\4&2\end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}-1&-1\\1&2\end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}-1&0\\1&4\end{vmatrix}$$
$$=2(0-(-4))+(-4)(-2-(-1))+5(-4-0)=8+4-20=-8$$

می‌بینیم که محاسبه مستقیم دترمینان A دارای زحمت بیشتری است.

مثال۱۱: اگر $\det\begin{bmatrix}a&b&c\\x&y&z\\e&f&g\end{bmatrix}=5$، آنگاه $\det\begin{bmatrix}-e&-f&-g\\2a&2b&2c\\kx&ky&kz\end{bmatrix}$ که $k\in\mathbb{N}$ برابرست با:

۱) $-2k$ ۲) $2k$ ۳) $10k$ ۴) $-10k$

پاسخ: گزینه «۴» اگر ماتریس دوم را B بنامیم، داریم:

$$\det B \xlongequal{\text{طبق قضیه}} (-1)\times2\times k\times\det\begin{bmatrix}e&f&g\\a&b&c\\x&y&z\end{bmatrix}=-2k\times(-1)\det\begin{bmatrix}x&y&z\\a&b&c\\e&f&g\end{bmatrix}$$ (سطر اول و سوم جابجا شده‌اند)

مدرسان شریف

فصل سوم

« فضاها و زیرفضاهای برداری »

فضاهای برداری

فضاهای برداری و مباحث مربوط به آن، یکی از فصل‌های مهم در درس جبرخطی و در واقع یک پیش‌نیاز برای مطالعه‌ی فصل بعد نیز است. اهمیت این فصل منجر به این شده که هر سال درصد زیادی از تست‌های کنکور به صورت مستقیم یا غیرمستقیم مربوط به فضاهای برداری باشد. توجه کنید که می‌توان مفهوم فضای برداری را به عنوان تعمیمی از فضای اقلیدسی در نظر گرفت و بدین ترتیب، ویژگی‌های یک فضای برداری را به صورت شهودی درک کرد. اینجا، می‌خواهیم همراه با شما دوستان گرامی تعریف‌ها و نتیجه‌های به دست آمده در این موضوع را مرور کرده و همراه با حل مثال‌های زیاد، تسلط کافی را برای پاسخ دادن به سئوالات کنکور را به دست آوریم. به همین منظور، قبل از هر چیز، به ارایه تعریف فضای برداری می‌پردازیم.

❖ **تعریف۱:** یک فضای برداری، از یک میدان اسکالر مانند $\mathbb{F}$ ، یک مجموعه مانند V، یک عمل جمع روی اعضای V و یک عمل ضرب بین اعضای V و $\mathbb{F}$ تشکیل شده است. عمل جمع آن، به ازای دو عضو α و β از V ، یک عضو $\alpha+\beta$ از V را نظیر می‌کند و دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) عمل جمع جابجایی است؛ یعنی: $\forall \alpha,\beta \in V \Rightarrow \alpha+\beta=\beta+\alpha$

ب) عمل جمع شرکت‌پذیر است؛ یعنی: $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V \Rightarrow \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

ج) عمل جمع عضو خنثی منحصر بفرد دارد؛ یعنی بردار منحصر بفرد $o \in V$ وجود دارد بطوریکه: $\forall \alpha \in V \Rightarrow o+\alpha=\alpha+o=\alpha$

د) برای هر $\alpha \in V$ یک عضو منحصر بفرد $-\alpha \in V$ وجود دارد بطوریکه : $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=o$

و عمل ضرب آن، به ازای هر $\alpha \in V$ و هر اسکالر $c \in \mathbb{F}$، بردار $c \cdot \alpha$ واقع در V را نسبت می‌دهد و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) $\forall \alpha \in V \Rightarrow ۱\cdot \alpha=\alpha$ 　(۱ عضو همانی $\mathbb{F}$ نسبت به عمل ضرب است.)

۲) $\forall c_۱,c_۲ \in IF,\ \forall \alpha \in V \Rightarrow (c_۱c_۲)\alpha=c_۱(c_۲\alpha)$

۳) $\forall c_۱,c_۲ \in IF,\ \forall \alpha \in V \Rightarrow (c_۱+c_۲)\alpha=c_۱\alpha+c_۲\alpha$

۴) $\forall c \in F,\ \forall \alpha,\beta \in V \Rightarrow c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$

در اینصورت، V را یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامند.

مثال۱: فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و V مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های به فرم $v=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ با $x_i \in \mathbb{F}$ باشد. اگر جمع برداری و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف کنیم؛ V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ خواهد بود.

فرض کنید $v=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$, $u=(y_۱,y_۲,\dots,y_n)$ دو عضو از V و $c \in \mathbb{F}$ یک اسکالر دلخواه است. در اینصورت؛

تعریف جمع: $u+v=(y_۱,y_۲,\dots,y_n)+(x_۱,x_۲,\dots,x_n)=(y_۱+x_۱,y_۲+x_۲,\dots,y_n+x_n)$

تعریف ضرب اسکالر: $cv=c(x_۱,x_۲,\dots,x_n)=(cx_۱,cx_۲,\dots,cx_n)$

در این مثال فضای برداری V را معمولاً با $\mathbb{F}^n$ نمایش می‌دهند. فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ حالت خاصی از این مثال می‌باشند.

مثال۲: فرض کنید دو عمل جمع برداری، $\oplus$ و ضرب اسکالر $\otimes$ جدید روی $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n \ , \ c\in\mathbb{R} \ \Rightarrow x\oplus y=x-y \quad , \quad c\otimes x=-cx$$

کدامیک از شرایط تعریف فضای برداری برای $\mathbb{R}^n$ با اعمال جدید جمع و ضرب تعریف شده در بالا برقرار است.

☑ **پاسخ:** فرض کنید $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ سه بردار دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشند، در اینصورت داریم:

۱) جابجایی نسبت به جمع برداری نداریم.

$$۱)\ x\oplus y=x-y=-(y-x)=-(y\oplus x) \ \Rightarrow$$

۲) شرکت پذیری نسبت به جمع نداریم.

$$۲)\left\{\begin{matrix} x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(y-z)=x-(y-z)=x-y+z \\ (x\oplus y)\oplus z=(x-y)\oplus z=x-y-z \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

۳) عضو خنثی نسبت به جمع نداریم.

$$x\oplus ۰=x-۰=x \quad , \quad ۰\oplus x=۰-x=-x \ \Rightarrow$$

۴) شرط تعریف عضو قرینهٔ جمعی هر عضو، وجود عضو خنثی نسبت به جمع است و چون اینجا عضو خنثی نسبت به جمع نداریم، تعریف عضو قرینه نیز امکان پذیر نیست.

حال خواص ضرب اسکالر را بررسی می‌کنیم: فرض کنید $b\in\mathbb{R}$ و a دو اسکالر دلخواه باشند.

عضو همانی نسبت به ضرب اسکالر عدد (-۱) است.

$$۱)\ \forall x\in\mathbb{R}^n \ \Rightarrow(-۱)\otimes x=-(-۱)x=x \ \Rightarrow$$

شرط (۲) برقرار است.

$$۲)\forall x\in\mathbb{R}^n \ \Rightarrow(ab)\otimes x=-abx=-bax=(ba)\otimes x$$

شرط (۳) برقرار نیست.

$$۳)\left\{\begin{matrix} (a+b)\otimes x=-(a+b)x=-ax-bx \\ (a\otimes x)\oplus(b\otimes x)=(-ax)\oplus(-bx)=-ax+bx \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

شرط (۴) برقرار است.

$$۴)\left\{\begin{matrix} a\otimes(x\oplus y)=-a(x-y)=-ax+ay \\ (a\otimes x)\oplus(a\otimes y)=(-ax)\oplus(-ay)=-ax-(-ay)=-ax+ay \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و V مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌های واقع در $\mathbb{F}$ باشد. این مجموعه همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی ماتریس‌ها یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است؛ که آن را با $\mathbb{F}^{m\times n}$ یا $M_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

$$V=\{[a_{ij}]_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbb{F}\ ,\ i=۱,۲,...,m\ ,\ j=۱,۲,...,n\}$$

$$[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad c[a_{ij}]_{m\times n}=[ca_{ij}]_{m\times n}$$

لازم بذکر است که در این فضای برداری، صفر فضا، همان ماتریس صفر $m\times n$ و قرینه ماتریس $[a_{ij}]_{m\times n}$، ماتریس $[-a_{ij}]_{m\times n}$ است.

همچنین، دقت کنید که فضاهای برداری $\mathbb{F}^n$ و $\mathbb{F}^{۱\times n}$ روی میدان $\mathbb{F}$ یکسانند و فضای برداری $\mathbb{F}^{۱\times ۱}$ را که با $\mathbb{F}$ نمایش می‌دهند؛ نشان می‌دهد که هر میدان مانند $\mathbb{F}$ یک فضای برداری روی خودش است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و $\mathbb{F}[x]$ مجموعه‌ی تمام توابع از $\mathbb{F}$ به $\mathbb{F}$ باشد. در اینصورت $\mathbb{F}[x]$ تحت اعمال جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر آنها؛ که در زیر نمایش داده شده، یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است.

$$\forall f,g\in\mathbb{F}[x]\Rightarrow\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ \forall c\in\mathbb{F}\ ,\forall f\in\mathbb{F}[x]\Rightarrow\ (cf)(x)=cf(x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

به عنوان حالتهای خاص از مثال بالا، می‌توان مثال‌های زیر را در نظر گرفت.

مثال۵: فرض کنید $C[a,b]$ فضای تمام توابع پیوسته از $[a,b]$ به میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. در اینصورت $C[a,b]$ تحت همان اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر تعریف شده در بالا، یک فضای برداری است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و $P(\mathbb{F})$ مجموعهٔ تمام چند جمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{F}$ باشد؛ در اینصورت $P(\mathbb{F})$ تحت اعمال جمع و ضرب معمولی تعریف شده در بالا، یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است.

لازم به توضیح است که یک چند جمله‌ای روی میدان $\mathbb{F}$، مانند $f(x)$ عبارتی بصورت زیر است:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰ \quad , \quad a_i\in\mathbb{F}\ ,\ i=۰,۱,۲,...,n \quad , \quad n\in\mathbb{Z}^+$$

که در آن برای هر $i=0,1,2,...,n$ ، a_i ضریب x^i نامیده می‌شود. همچنین n یک عدد صحیح نامنفی است و در صورتی که $a_n \neq 0$، آنرا درجه‌ی چند جمله‌ای $f(x)$ می‌نامند (درجه‌ی یک چند جمله‌ای، در واقع بزرگترین توان از x است که در چند جمله‌ای دیده می‌شود و ضریب ناصفر دارد). دو چند جمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ و $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$ را مساوی گوییم؛ هرگاه درجه و ضریب توان‌های مساوی x، در آنها یکسان باشند؛ یعنی:

$$\forall i=0,1,.....,n \quad a_i=b_i \quad \text{و} \quad m=n$$

دقت کنید که در ۳ مثال قبل عضو صفر فضا، تابع $f(x)=0$ و به ازای هر عضو دلخواه مانند $f(x)$ از فضا، عضو قرینه آن $(-f(x))$ است.

مثال۷: مجموعهٔ تمام دنباله‌های نامتناهی مانند $\{a_n\}_{n\geq 1}$ که $a_n \in \mathbb{F}$، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است که آن را با $seq(\mathbb{F})$ نمایش می‌دهند. جمع برداری و ضرب اسکالر روی آن به صورت زیر می‌باشد:

۱) $\{a_n\}_{n\geq 1}+\{b_n\}_{n\geq 1}=\{a_n+b_n\}_{n\geq 1}$ 　　**جمع برداری**

۲) $\forall c\in\mathbb{F} \quad c\{a_n\}_{n\geq 1}=\{ca_n\}_{n\geq 1}$ 　　**ضرب اسکالر**

تمام مثال‌های بالا، فضاهای برداری شناخته شده‌ایی هستند که در موارد مختلف کاربرد دارند. لازم به ذکر است که هر فضای برداری لزوماً به یکی از صورت‌های فوق نیست و می‌توان روی هر مجموعهٔ دلخواه با تعریف عمل جمع برداری و ضرب اسکالر، به گونه‌ای که در شرایط تعریف صدق کند؛ یک فضای برداری ساخت. به عنوان نمونه می‌توانید بررسی کنید که آیا S در مثال زیر فضای برداری است یا نه؟

مثال۸: فرض کنید که $S=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ و اعمال جمع‌برداری و ضرب اسکالر زیر را در نظر بگیرید.

۱) $\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in S: \quad (a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2+k,b_1+b_2)$ 　　**جمع برداری**

۲) $\forall c\in\mathbb{R},(a_1,b_1)\in S: \; c(a_1,b_1)=(ca_1+kc-k,cb_1)$ 　　**ضرب اسکالر**

که k یک عدد صحیح مثبت و دلخواه است. به سادگی قابل بررسی است که S یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و همچنین، عضو صفر آن نسبت به عمل جمع $(-k,0)$ و قرینه (a,b) نسبت به عمل جمع عضو $(-a-k,-b)$ است. واضح است که عضو همانی نسبت به ضرب اسکالر همان $c=1$ می‌باشد.

قضیه زیر که به سادگی با توجه به تعریف فضای برداری نتیجه می‌شود، شامل چند خاصیت مقدماتی از فضاهای برداری است.

قضیه ۱: اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه موارد زیر برقرارند:

الف) برای هر $v\in V$ ، $0v=o$ $(0\in\mathbb{F})$

ب) برای هر $c\in\mathbb{F}$ ، $co=o$ $(o\in V)$

پ) برای هر $v_1,v_2,v_3\in V$ ؛ اگر $v_1+v_2=v_2+v_3$، آنگاه $v_1=v_3$.

ت) اگر $cv=o$ آنگاه $c=0$ یا $v=o$

ث) برای هر $v\in V$ ، $(-1)v=-v$

ج) برای هر $c\in\mathbb{F},v\in V$ ، $(-c)v=-(cv)=c(-v)$

اثبات. به راحتی و با استفاده از تعریف، تمامی موارد فوق ثابت می‌شوند.

زیر فضاها

فضاهای برداری نیز، همانند دیگر ساختارهای جبری دارای زیر ساختار هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

❖ **تعریف۲:** زیر مجموعه W از فضای برداری V یک زیر فضای برداری V است؛ هرگاه مجموعهٔ W همراه با جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V، خود نیز یک فضای برداری باشد. توجه کنید که اگر W زیر فضای V باشد، آن را با نماد $W\leq V$ نمایش می‌دهند.

مثال۹: در هر فضای برداری مثل V، خود V و مجموعه $\{o\}$ زیر فضاهای V می‌باشند. که آنها را زیر فضاهای بدیهی V می‌نامند.

بررسی اینکه آیا زیر مجموعه‌ی W از فضای برداری V، یک زیر فضای V است یا نه؛ با استفاده از تعریف، کاری خسته‌کننده است. خوشبختانه بسیاری از خواص مورد نظر در تعریف فضای برداری که **خواص موروثی** نیز نامیده می‌شوند؛ در زیر مجموعه‌های آن نیز برقرارند و دیگر نیازی به بررسی ندارند. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که فقط بررسی چه خواصی برای زیر فضا بودن لازم است.

قضیه۲: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و W یک زیر مجموعه‌ی ناتهی دلخواه از V است. در اینصورت W یک زیر فضای V است، اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\forall c \in \mathbb{F}\,,\ \ \forall \alpha,\beta \in W \Rightarrow c\alpha+\beta \in W$$

یعنی برای زیر فضا بودن W فقط کافی است؛ بسته بودن W نسبت به عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بررسی شود.

اثبات. اگر W یک زیر فضای V باشد، بنابر تعریف زیر فضا، می‌دانیم که W نیز یک فضای برداری و در نتیجه شرط مورد نظر برقرار است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید شرط برقرار است. از آنجا که W یک زیر مجموعه از V است و قوانین شرکت‌پذیری و جابجایی برای جمع و اصول مربوط به ضرب اسکالر روی تمام اعضای V برقرار است؛ پس روی اعضای W نیز برقرار است. بنابراین کافی است نشان دهیم W شامل عضو صفر و همچنین به ازای هر عضو، شامل عضو قرینه آن نیز است. از آنجا که W ناتهی است؛ فرض کنید $\alpha \in W$، در اینصورت با توجه به شرط، $(-1)\alpha+\alpha=0\in W$، W شامل عضو صفر است. همچنین به ازای هر عضو $\alpha \in W$ داریم $(-1)\alpha+0=-\alpha\in W$ بنابراین، W شامل قرینه α نسبت به جمع نیز است. در نتیجه W یک فضای برداری و در نتیجه یک زیر فضای V است.

توجه کنید که وقتی W یک زیر فضای V باشد آن را با نماد $W \le V$ نمایش می‌دهند.

مثال۱۰: تنها زیر فضاهای $\mathbb{R}^2$، زیر مجموعه‌های $W_1=\{(0,0)\}$ ، $W_2=\mathbb{R}^2$ و $W_a=\{(x,y)\,|\,y=ax\}$ که $a\in\mathbb{R}$ یک اسکالر ناصفر دلخواه است؛ می‌باشند. توجه کنید که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، W_a یک خط گذرنده از مبدا در $\mathbb{R}^2$ است.

پاسخ: در هر فضای برداری مانند V، زیر مجموعه‌های $\{0\}$ و V همواره زیر فضای V هستند و زیر فضاهای بدیهی V نامیده می‌شوند. بنابراین، W_1 و W_2 زیر فضاهای بدیهی $\mathbb{R}^2$ هستند. فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ یک اسکالر ناصفر دلخواه است. با استفاده از قضیه قبل، ثابت می‌کنیم W_a یک زیر فضای $\mathbb{R}^2$ است.

اگر α و β دو عضو دلخواه از W_a باشند، آنگاه x_1, x_2 در $\mathbb{R}$ به گونه‌ای وجود دارند؛ که $\alpha=(x_1,ax_1)$, $\beta=(x_2,ax_2)$. در این صورت به ازای هر اسکالر دلخواه $c\in\mathbb{R}$ داریم:

$$c\alpha+\beta=c(x_1,ax_1)+(x_2,ax_2)=(\underbrace{cx_1+x_2}_{=x},a(cx_1+x_2))=(x,ax)$$

بنابراین، $c\alpha+\beta$ عضوی از W_a و در نتیجه W_a یک زیر فضای $\mathbb{R}^2$ است.

مثال۱۱: تنها زیر فضاهای $\mathbb{R}^3$، زیر مجموعه‌های $W_1=\{(0,0,0)\}$ ، $W_2=\mathbb{R}^3$، خطوط گذرنده از مبدأ و صفحات گذرنده از مبدأ می‌باشند.

مثال۱۲: فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ است. در اینصورت $W=\{B\in M_{n\times n}\,|\,AB=BA\}$ یک زیر فضای $M_{n\times n}$ است. زیرا:

پاسخ: اگر فرض کنیم B_1 و B_2 در ماتریس دلخواه در W و $a\in\mathbb{R}$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد، داریم:

$$A(aB_1+B_2)=aAB_1+AB_2 \xlongequal{B_1,B_2\in W} aB_1A+B_2A=(aB_1+B_2)A$$

بنابراین، aB_1+B_2 نیز یک عضو از W و در نتیجه بنابر قضیه ۲، W یک زیر فضای $M_{n\times n}$ است.

مثال۱۳: کدامیک از زیر مجموعه‌های $W_1=\{X\in\mathbb{R}^n\,|\,AX=0\}$ و $W_2=\{X\in\mathbb{R}^n\,|\,AX=b\}$ از فضای برداری $\mathbb{R}^n$، زیر فضای $\mathbb{R}$ هستند (توجه کنید که A ماتریس دلخواه حقیقی $m\times n$ و b یک بردار ستونی m تایی است).

پاسخ: فرض کنید $X_1,X_2\in W_1$ دو عضو دلخواه و $a\in\mathbb{R}$ یک اسکالر دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$A(aX_1+X_2)=aAX_1+AX_2 \xlongequal{X_1,X_2\in W_1} 0+0=0$$

بنابراین، $(aX_1 + X_2) \in W_1$ و در نتیجه بنابر قضیه ۲، W_1 یک زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است. حال فرض کنید $X_2 \in W_2$ و X_1 دو عضو دلخـواه و $a \in \mathbb{R}$ یک اسکالر دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$A(aX_1 + X_2) = aAX_1 + AX_2 \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{X_1, X_2 \in W_2}{}} ab + b = (a+1)b$$

که لزوماً $(a+1)b$ با b برابر نیست، بنابراین $aX_1 + X_2$ لزوماً متعلق به W_2 نیست و در نتیجه W_2 یک زیر فضا نیست.

مثال۱۴: اگر V فضای برداری تمام توابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد $(V = C[a,b])$ کدامیک از مجموعه‌های زیر یک زیر فضای V نیست.

۱) تمام توابع به شکل $c_1e^x + c_2e^{-x}$ که $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

۲) مجموعه تمام توابعی که در شرط $f(a) = f(b)$ صدق می‌کنند.

۳) مجموعه تمام توابعی که در شرط $f(a) = \alpha \neq 0$ که $\alpha \in \mathbb{R}$ صدق می‌کنند.

۴) مجموعه تمام توابعی که در شرط $f(\alpha) = 0$ که $\alpha \in [a,b]$ صدق می‌کنند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قضیه فوق، کافی است در هر یک از زیرمجموعه‌های داده شده؛ برقراری شرط موردنظر را بررسی کنیم.

۱) گزینه‌ی (۱) زیر فضای $C[a\,,\,b]$ است: $c(\alpha_1e^x + \alpha_2e^{-x}) + (\beta_1e^x + \beta_2e^{-x}) = (c\alpha_1 + \beta_1)e^x + (c\alpha_2 + \beta_2)e^{-x}$

۲) گزینه‌ی (۲) زیر فضای $C[a\,,\,b]$ است: $(cf + g)(a) = cf(a) + g(a) = cf(b) + g(b) = (cf + g)(b)$

۳) گزینه‌ی (۳) زیر فضای $C[a\,,\,b]$ نیست: $(cf + g)(a) = cf(a) + g(a) = c\alpha + \alpha \neq \alpha$

۴) گزینه‌ی (۴) زیر فضای $C[a\,,\,b]$ است: $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = c \times 0 + 0 = 0$

مثال۱۵: فرض کنید V، فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت کدامیک از زیر مجموعه‌های زیر، یک زیر فضای V نیست.

۱) $W_1 = \{$مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن در $V\}$

۲) $W_2 = \{$مجموعهٔ تمام ماتریس‌های پادمتقارن در $V\}$

۳) $W_3 = \{$مجموعه تمام ماتریس‌هایی در V که با ماتریس ثابت P نسبت به ضرب جابجا می‌شوند.$\}$

۴) $W_4 = \{$مجموعهٔ تمام ماتریس‌های وارون‌پذیر در $V\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برقراری شرط معادل، داده شده در قضیه قبل را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم.

۱) فرض کنید دو ماتریس A و B متقارنند؛ در اینصورت برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(\alpha A + B)^t = \alpha A^t + B^t = \alpha A + B \quad \text{متقارن است.} \quad \Rightarrow (\alpha A + B) \in W_1 \Rightarrow W_1 \leq V$$

۲) فرض کنید دو ماتریس A و B پادمتقارنند؛ در اینصورت برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(\alpha A + B)^t = \alpha A^t + B^t = -\alpha A - B = -(\alpha A + B) \quad \text{پادمتقارن است.} \quad \Rightarrow (\alpha A + B) \in W_2 \Rightarrow W_2 \leq V$$

۳) فرض کنید A و B نسبت به ماتریس P در ضرب جابجایی پذیرند. در اینصورت برای هر $c \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(cA + B)P = cAP + BP = cPA + PB = P(cA + B) \quad \Rightarrow (cA + B) \in W_3 \Rightarrow W_3 \leq V$$

۴) واضح است که I وارون‌پذیر می‌باشد. پس اگر قرار دهیم $\alpha = -1$ نتیجه می‌شود؛ $\alpha I + I = -I + I = 0$، واضح است کـه مـاتریس صـفر وارون‌پـذیر نیست. و لذا W_4 زیر فضای V نیست.

مثال۱۶: فرض کنید S فضای برداری تعریف شده در مثال (۷) باشد. در اینصورت کدامیک از گزینه‌های زیر یک زیرفضای S است.

۱) $W_1 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$		۲) $W_2 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

۳) $W_3 = \{(2a,b) \mid a \in \mathbb{Z}\,,\ b \in \mathbb{R}\}$		۴) $W_4 = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

۱) W_1 زیر فضای S نیست: $(0,b_1) \oplus (0,b_2) = (k, b_1 + b_2) \notin W_1$

۲) W_2 زیر فضای S است: $c(a_1,0) \oplus (a_2,0) = (ca_1 + kc - k, 0) \oplus (a_2,0) = (ca_1 + a_2 + kc, 0) \in W_2 \Rightarrow W_2 \leq S$

۳) W_3 زیر فضای S نیست: $(2a_1, b_1) \oplus (2a_2, b_2) = (2(a_1 + a_2) + k, b_1 + b_2) \notin W_3$ (با فرض فرد بودن k)

۴) W_4 زیر فضای S نیست: $(a_1,a_1) \oplus (b_1,b_1) = (a_1 + b_1 + k, a_1 + b_1) \notin W_4$ (چون $a_1 + b_1 + k \neq a_1 + b_1$)

مثال۱۷: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ است. در اینصورت $W_1=\{AX \mid X\in\mathbb{R}^n\}$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ و $W_2=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}$ یک زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است.

مثال۱۸: فرض کنید P_n مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n است. در اینصورت P_n یک زیر فضای $P(\mathbb{F})$ است (یادآوری می‌کنیم که $P(\mathbb{F})$ مجموعهٔ تمام چند جمله‌ای ها روی میدان $\mathbb{F}$ است. توجه کنید که چند جمله‌ای صفر را با درجهٔ ۱- در نظر می‌گیرند). حال اگر P_n را به عنوان فضای برداری در نظر بگیریم، به سادگی قابل بررسی است که $W=\{p(x)\in P_n \mid p(0)=0\}$ نیز یک زیر فضای P_n است.

لازم به ذکر است که $P_n=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \mid a_i\in\mathbb{F}, i=0,1,\dots,n\}$

نکته۱: اگر W_1, W_2 دو زیرفضای V باشند، آنگاه:

الف) $W_1\cap W_2$ یک زیر فضای V است.

ب) $W_1\cup W_2$ یک زیر فضای V است، اگر و تنها اگر یکی شامل دیگری باشد.

اثبات.

الف) فرض کنید $\alpha,\beta\in W_1\cap W_2$ و $c\in\mathbb{F}$، در اینصورت داریم:

$$\alpha,\beta\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha,\beta\in W_1 \xrightarrow{W_1\le V} c\alpha+\beta\in W_1\\ \alpha,\beta\in W_2 \xrightarrow{W_2\le V} c\alpha+\beta\in W_2\end{array}\right\} \Rightarrow c\alpha+\beta\in W_1\cap W_2 \Rightarrow W_1\cap W_2\le V$$

ب) فرض کنید $W_1\cup W_2$ یک زیرفضای V است و بنابر برهان خلف فرض کنید هیچکدام از W_i ها زیر مجموعهٔ دیگری نباشد. بنابراین، $\alpha\in W_1\setminus W_2$ و $\beta\in W_2\setminus W_1$ وجود دارند. واضح است که $\alpha,\beta\in W_1\cup W_2$ از آنجا که $W_1\cup W_2$ یک زیرفضای V است؛ بنابراین، $\alpha+\beta\in W_1\cup W_2$ است. در نتیجه دو حالت داریم؛ یا $\alpha+\beta\in W_1$ یا $\alpha+\beta\in W_2$ است:

$$1)\ \text{if}\quad \alpha+\beta\in W_1 \xrightarrow[W_1\le V]{\alpha\in W_1} (-1)\alpha+(\alpha+\beta)=\beta\in W_1 \qquad \# \qquad \text{تناقض}$$

$$2)\ \text{if}\quad \alpha+\beta\in W_2 \xrightarrow[W_2\le V]{\beta\in W_2} (-1)\beta+(\alpha+\beta)=\alpha\in W_2 \qquad \# \qquad \text{تناقض}$$

چون در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. بنابراین، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

برای اثبات طرف عکس، بدون اینکه از کلیت مسأله کم شود، فرض می‌کنیم $W_1\subseteq W_2$؛ در اینصورت $W_1\cup W_2=W_2$ و می‌دانیم که W_2 یک زیرفضای V است.

قسمت (الف) نکته فوق را می‌توان به حالت کلی تعمیم داد و به قضیه زیر رسید.

قضیه۳: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در اینصورت اشتراک هر دسته از زیر فضاهای V مانند $\{W_\alpha\}$ نیز یک زیر فضای V است؛ یعنی $\bigcap_\alpha W_\alpha\le V$.

اثبات. کاملاً شبیه حالت دوتایی در قسمت (الف) نکته قبل است.

در قضیه قبل دیدیم که اشتراک هر دسته از زیرفضاها نیز، یک زیر فضا است. همچنین در نکته قبل قسمت (ب) دریافتیم که اجتماع حتی ۲ زیر فضا نیز در شرایط خاص، زیرفضا است. به همین دلیل برای ساختن یک زیرفضا از V که شامل W_1 و W_2 باشد؛ مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم.

❖ **تعریف۳:** اگر W_1، W_2، ...، W_k زیر مجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند، مجموع آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_1+W_2+\dots+W_k=\{w_1+w_2+\dots+w_k \mid w_1\in W_1,\dots,w_k\in W_k\}$$

قضیه۴: اگر W_1، W_2، ...، W_k زیر فضاهای فضای برداری V باشند، آنگاه $W_1+W_2+\dots+W_k$ کوچکترین زیرفضای V است که شامل $W_1, W_2, \dots, W_k$ است.

مدرسان شریف

فصل چهارم

«تبدیل‌ها و تابعک‌های خطی»

تبدیل خطی

تبدیلات خطی، یکی از موضوعات اصلی در درس جبر خطی است و همواره در کنکور کارشناسی ارشد مورد توجه بوده است. به همین دلیل، همراه با شما دانشجویان گرامی، به معرفی این مفهوم پرداخته و با پیدا کردن ارتباط آن با ماتریس‌ها، خواص آن را بررسی می‌کنیم. دسته‌ی خاصی از این تبدیلات به نام تابعک‌های خطی مورد توجه ویژه‌ای می‌باشند که در بخشی مجزا از این فصل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

تعریف و چند مثال

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید V و W، دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. در اینصورت یک تبدیل خطی از V به W، تابعی مانند $T:V\to W$ است؛ بطوریکه به ازای هر $c\in\mathbb{F}$ و $\alpha,\beta\in V$، در شرط $T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$ صدق کند. یا به به طور معادل در دو شرط زیر صدق کند:

$$\begin{cases}\text{۱)}\ \forall\alpha,\beta\in V\Rightarrow T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)\\ \text{۲)}\ \forall c\in F,\forall\alpha\in V\Rightarrow T(c\alpha)=cT(\alpha)\end{cases}\overset{\text{معادل با}}{\equiv}\quad T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$$

مثال۱: تابع زیر یک تبدیل خطی است.

$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}^{۳}$$
$$\mathbf{T(x,y,z)=(x,y,\circ)}$$

اثبات: فرض کنید $\alpha=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\beta=(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو عضو دلخواه از $\mathbb{R}^۳$ و $c\in\mathbb{R}$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$T(c\alpha+\beta)=T(c(x_۱,y_۱,z_۱)+(x_۲,y_۲,z_۲))=T((cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,cz_۱+z_۲))\xlongequal{\text{تعریف تبدیل خطی}}(cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,\circ)=$$
$$c(x_۱,y_۱,\circ)+(x_۲,y_۲,\circ)\xlongequal{\text{تعریف تبدیل خطی}}cT((x_۱,y_۱,z_۱))+T((x_۲,y_۲,z_۲))=cT(\alpha)+T(\beta)$$

پس، با توجه به تعریف تبدیل خطی؛ تابع تعریف شده T، یک تبدیل خطی است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: تابع $\mathbf{T}:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{T(x,y,z)=(x,y)}$ یک تبدیل خطی است.

☑ **پاسخ:**

اثبات: با فرض $\alpha=(x_۱,y_۱,z_۱)$، $\beta=(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $c\in\mathbb{R}$ داریم:

$$T(c\alpha+\beta)=T(c(x_۱,y_۱,z_۱)+(x_۲,y_۲,z_۲))=T((cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,cz_۱+z_۲))$$
$$\xlongequal{\text{تعریف } T}(cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲)=c(x_۱,y_۱)+(x_۲,y_۲)\xlongequal{\text{تعریف } T}$$
$$cT(\alpha)+T(\beta)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

مثال۳: فرض کنید V یک فضای برداری است. در اینصورت توابع $\begin{matrix} o: V \to V \\ o(v) = 0 \end{matrix}$ و $\begin{matrix} I: V \to V \\ I(v) = v \end{matrix}$ **تبدیل خطی هستند.**

اثبات: با توجه به تعریف به سادگی نتیجه حاصل می‌شود.

❖ **تعریف ۲:** اگر $T: V \to V$ یک تبدیل خطی باشد، T را یک عملگر خطی روی V می‌نامیم.

مثال۴: تابع $D: P_n \to P_n$ با ضابطه $D(f(x)) = f'(x)$ یک تبدیل خطی یا یک عملگر خطی روی P_n است که آن را عملگر مشتق (یا مشتق‌گیری) روی فضای چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه n می‌نامند.

با توجه به تعریف، برای تابع $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ از P_n داریم: $D(f) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1}$

نشان می‌دهیم عملگر D، یک عملگر خطی است؛

$$\forall f, g \in P_n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow D(cf+g) \xlongequal{\text{تعریف}D} (cf+g)' \xlongequal{\text{روابط مشتق}} cf' + g' \xlongequal{\text{تعریف } D} cD(f) + D(g)$$

بنابراین، D یک عملگر خطی روی P_n است.

مثال۵: فرض کنید A یک ماترس $m \times n$ با درایه‌های واقع در میدان $\mathbb{F}$ باشد. در اینصورت اگر تابع T را از $\mathbb{F}^{n\times 1}$ به $\mathbb{F}^{m\times 1}$ با ضابطه زیر تعریف کنیم، آنگاه T یک تبدیل خطی خواهد بود.

$$\underset{T(X)=AX}{T: \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}}$$

اثبات:

$$\forall X, Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}, c \in \mathbb{F} \Rightarrow T(cX+Y) \xlongequal{\text{تعریف}} A(cX+Y) \xlongequal{\text{قوانین ضرب ماتریس}} cAX + AY \xlongequal{\text{تعریف}} cT(X) + T(Y)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

مثال۶: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه داریم:

۱) $T(0) = 0$　　　۲) $T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + ... + c_n T(v_n)$

اثبات:

۱) $$T(0) = T(0+0) \xlongequal{\text{T تبدیل خطی است.}} T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$$

۲) $$T(c_1 v_1 + ... + c_n v_n) \xlongequal{\text{تعریف}} c_1 T(v_1) + T(c_2 v_2 + ... + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + T(c_3 v_3 + ... + c_n v_n) = \cdots = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + ... + c_n T(v_n)$$

مثال۷: تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T((x,y)) = (x^2, y)$ یک تبدیل خطی نیست.

اثبات: بنابر برهان خلف، فرض کنید T خطی است. در اینصورت داریم:

$$T((1,0)) = (1,0) \quad , \quad T((1,1)) = (1,1) \Rightarrow T((1,0)) + T((1,1)) = (1,0) + (1,1) = (2,1)$$

از طرفی، $(2,1) = (1,1) + (1,0)$ و داریم: $T((2,1)) = (4,1)$، ولی؛ $T((1,0) + (1,1)) = (4,1) \neq (2,1) = T((1,0)) + T((1,1))$ که این تناقض است. پس، فرض خلف باطل و در نتیجه T یک تبدیل خطی نیست.

مثال۸: تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $T(x,y) = (x, y, x+y)$ یک تبدیل خطی است.

اثبات:

$$T(c(x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = T((cx_1 + x_2, cy_1 + y_2)) \xlongequal{\text{تعریف}} (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, c(x_1 + y_1) + x_2 + y_2) =$$

$$c(x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) \xlongequal{\text{تعریف}} cT((x_1,y_1)) + T((x_2,y_2))$$

پس، T یک تبدیل خطی است.

مثال۹: کدامیک از نگاشت‌های زیر یک تبدیل خطی نیست.

۱) $T: M_{n\times n} \to \mathbb{R}$　　s.t.　　$T(A) = tr(A)$

۲) $T: M_{n\times n} \to \mathbb{F}^n$　　s.t.　　$T(A) = A_j$ (A ستون jــام)

۳) $T: P_n \to \mathbb{R}$　　s.t.　　$T(f(x)) = f(0)$

۴) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　　s.t.　　$T(x,y) = (xy, x+y)$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم که گزینه‌های ۱و۲و۳ تبدیل خطی هستند.

در گزینه (۱) فرض کنید A و B دو ماتریس دلخواه و c یک اسکالر است. در اینصورت داریم:

$$T(cA+B) \xlongequal{T \text{ تعریف}} tr(cA+B) \xlongequal{\text{خاصیت تابع اثر ماتریس}} ctr(A)+tr(B) \xlongequal{T \text{ تعریف}} cT(A)+T(B) \Rightarrow$$ T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۲) نیز فرض کنید A و B دو ماتریس و c یک اسکالر دلخواه است. در این‌صورت داریم:

$$T(cA+B) \xlongequal{T \text{ تعریف}} (cA+B)_j = c\times A_j + B_j \xlongequal{T \text{ تعریف}} cT(A)+T(B)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۳) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای دلخواه و c یک اسکالر دلخواه است. در اینصورت داریم:

$$T(cf(x)+g(x)) \xlongequal{T \text{ تعریف}} (cf+g)(0) = cf(0)+g(0) \xlongequal{T \text{ تعریف}} cT(f)+T(g)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۴) فرض کنید $x=(1,1)$ و $y=(1,0)$؛ در اینصورت داریم: $T(x)+T(y) = T(1,1)+T(1,0) = (1,2)+(0,1) = (1,3)$ و $T(x+y) = T((1,1)+(1,0)) = T(2,1) = (2,3)$. حال از آنجا که $(2,3) \neq (1,3)$ بنابراین، $T(x)+T(y) \neq T(x+y)$ و در نتیجه T نمی‌تواند یک تبدیل خطی باشد.

توجه کنید که در چنین تست‌هایی تشخیص گزینه غلط کافی است. در اینجا برای تمرین بیشتر، خطی بودن سایر گزینه‌ها را بررسی کردیم.

مثال۱۰: آیا تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x,y) = (1, x+y)$ یک تبدیل خطی است؟

پاسخ: خیر. فرض کنید $\alpha = (1,1)$ و $\beta = (0,1)$ و $c = 2$، داریم:

$$T(c\alpha+\beta) = T(2,3) \xlongequal{T \text{ تعریف}} (1,5)$$
$$cT\alpha + T\beta = 2T(1,1) + T(0,1) = 2(1,2)+(1,1) = (3,5)$$

چون $(3,5) \neq (1,5)$، پس $T(c\alpha+\beta) \neq cT\alpha + T\beta$ و در نتیجه تبدیل T خطی نیست.

مثال۱۱: فرض کنید V فضای تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت تابع $T: V \to V$ با ضابطه $T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$ یک عملگر خطی روی V است.

اثبات:

$$T(cf+g) \xlongequal{\text{تعریف}} \int_0^x (cf+g)(t)dt \xlongequal{\text{خواص انتگرال}} c\int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt \xlongequal{\text{تعریف}} cT(f)+T(g) \Rightarrow$$ T یک عمگر خطی است.

مثال۱۲: تابع $T: M_{m\times n} \to M_{n\times m}$ با ضابطه $T(A) = A^t$ یک تبدیل خطی است.

اثبات:

$$T(cA+B) \xlongequal{\text{تعریف}} (cA+B)^t \xlongequal{\text{خواص ترانهاده}} cA^t + B^t \xlongequal{\text{تعریف}} cT(A)+T(B)$$

پس، T یک تبدیل خطی است.

تذکر۱: در بعضی از موارد برای سادگی، عبارت $T(v)$ را به‌طور خلاصه، به‌صورت Tv می‌نویسیم.

مثال۱۳: فرض کنید $T:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{3}$ یک تبدیل خطی باشد. به طوریکه $T(1,1)=(1,2,1)$ و $T(1,0)=(0,1,2)$، در اینصورت $T(2,3)$ برابر است با:

۱) $(3,4,1)$ ۲) $(3,5,1)$ ۳) $(2,5,1)$ ۴) $(3,5,2)$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل، اگر بتوانیم بردار $(2,3)$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای $(1,1)$ و $(1,0)$ بدست آوریم، می‌توان $T(2,3)$ را به کمک $T(1,1)$ و $T(1,0)$ محاسبه کرد.

$$(2,3)=a(1,1)+b(1,0)=(a+b,a)\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ a=3\end{cases}\Rightarrow a=3,b=-1\Rightarrow(2,3)=3(1,1)-(1,0)$$

بنابراین، داریم:

$$T(2,3)=T(3(1,1)-(1,0))\xlongequal[\text{تبدیل } T]{\text{خاصیت خطی بودن}}3T(1,1)-T(1,0)\xlongequal{\text{فرض مساله}}3(1,2,1)-(0,1,2)=(3,5,1)$$

مثال۱۴: فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی و $T(v_1+2v_2)=w_1$ و $T(v_1-v_2)=w_2$ است. در اینصورت Tv_1 برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}w_1-\frac{1}{3}w_2$ ۲) $\frac{1}{3}w_2-\frac{1}{3}w_1$ ۳) $\frac{1}{3}w_1+\frac{2}{3}w_2$ ۴) $\frac{2}{3}w_1+\frac{1}{3}w_2$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از خاصیت خطی بودن T و با تشکیل دستگاه، Tv_1 را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T(v_1+2v_2)=w_1\\ T(v_1-v_2)=w_2\end{cases}\xrightarrow[\text{تبدیل } T]{\text{خاصیت خطی بودن}}\begin{cases}Tv_1+2Tv_2=w_1\\ Tv_1-Tv_2=w_2\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}3Tv_1=w_1+2w_2\Rightarrow Tv_1=\frac{1}{3}w_1+\frac{2}{3}w_2$$

هسته و برد

تعریف ۳: فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد. در اینصورت مجموعه $R_T=\{Tv\,|\,v\in V\}$ را برد T یا تصویر V تحت تبدیل خطی T می‌نامیم؛ که آن را با نمادهایی چون R_T، $T(V)$ و یا $Im(T)$ نمایش می‌دهند.

به همین ترتیب؛ اگر E یک زیر مجموعه از V باشد، تصویر E تحت تبدیل خطی T برابر با $T(E)=\{Tv\,|\,v\in E\}$ است.

مثال۱۵: برد تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{2}$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(x,x)$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به تعریف T می‌بینیم که به ازای هر $\alpha=(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}$، تصویر α $(T\alpha)$ در برد تبدیل خطی، یک نقطه روی خط $y=x$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^{2}$ است. به همین ترتیب به ازای هر نقطه روی خط $y=x$، مانند (a,a)، تصویر نقطه $(a,0,0)$ برابر است با:

$$T(a,0,0)=(a,a)$$

بنابراین، برد تبدیل خطی همان خط $y=x$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^{2}$ است، یعنی؛

$$R_T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}\,|\,x=y\right\}$$

مثال۱۶: برد تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{3}$ با ضابطه‌ی $T(x,x)=(x,y,x+y)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ادعا می‌کنیم که برد تبدیل خطی بالا، صفحه‌ی $z=x+y$ در فضای $\mathbb{R}^{3}$ است. به وضوح می‌بینیم که به ازای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^{2}$، تصویر آن تحت T متعلق به صفحه‌ی $z=x+y$ است. از طرفی به ازای هر نقطه از این صفحه مانند (a,b,c) واضح است که $c=a+b$. بنابراین، اگر قرار دهیم $(x,y)=(a,b)$، داریم:

$$T(x,y)=T(a,b)=(a,b,a+b)=(a,b,c)$$

بدین ترتیب، ادعایمان ثابت شد و داریم:

$$R_T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}\,|\,z=x+y\right\}$$

نکته۱: اگر V و W دو فضای برداری و $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه:

۱- R_T یک زیر فضای W است.

۲- اگر E یک زیرفضای V باشد، آنگاه $T(E)$ نیز یک زیرفضای W است.

اثبات. برای اثبات اینکه R_T یک زیر فضای W است، کافی است نشان دهیم نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است؛ چرا که با توجه به تعریف R_T، واضح است که $R_T \subseteq W$. فرض کنید $\alpha, \beta \in R_T$ و $c \in F$ باشد. در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in R_T \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف}} \exists v_1 \in V \text{ s.t. } \alpha = Tv_1 \\ \beta \in R_T \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف}} \exists v_2 \in V \text{ s.t. } \beta = Tv_2 \end{array}\right\} \Rightarrow c\alpha + \beta = cTv_1 + Tv_2 \overset{\text{تبدیل خطی است } T}{=\!=\!=} T(\underbrace{cv_1 + v_2}_{\in V}) \in R_T \Rightarrow c\alpha + \beta \in R_T$$

بنابراین، $R_T \le W$ است. اثبات قسمت (۲) نیز کاملاً شبیه به قسمت (۱) است.

نکته۲: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی و $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ یک پایه برای V باشد، آنگاه مجموعه $S' = \{Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\}$ یک مولد برای R_T است.

اثبات. فرض کنید $w \in R_T$. پس با توجه به تعریف، عضوی مانند $v \in V$ وجود دارد بطوری‌که $Tv = w$. از آنجا که S یک پایه برای V است؛ بنابراین، اسکالرهای a_1، a_2، ... ، a_n وجود دارند؛ بطوریکه $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. لذا داریم:

$$w = Tv = T(a_1v_1 + ... + a_nv_n) \overset{\text{تبدیل خطی است } T}{=\!=\!=} a_1Tv_1 + a_2Tv_2 + ... + a_nTv_n \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد، هر عضو دلخواه R_T را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای S' نمایش داد. بنابراین، S' یک مولد برای R_T است. دقت کنید که لزوماً S' یک پایه برای R_T نیست؛ چرا که لزوماً مستقل خطی نیست. یعنی ممکن است بعد R_T کمتر از بعد V باشد. ولی در مواقعی که بعد R_T و بعد V برابر باشند؛ لزوماً S' یک پایه برای R_T است.

از نکته فوق می‌توان چنین برداشت کرد که اگر تصویر عناصر یک پایه از فضای برداری V را تحت تبدیل خطی $T: V \to W$ داشته باشیم. می‌توان تصویر هر عنصر (یا بردار) از فضای برداری V را تحت T بدست آورد.

مثال۱۷: برد تبدیل خطی در مثال قبل را به کمک نکته‌ی بالا به دست آورید:

$$\mathbf{T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \ T(x, y) = (x, y, x + y)}$$

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که $\{(1,0), (0,1)\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^2$ است. پس کافی است تصویر اعضای این پایه را تحت T به دست آوریم:

$$T(1,0) = (1,0,1) \ , \ T(0,1) = (0,1,1) \Rightarrow$$

$$R_T = \langle (1,0,1) \ , \ (0,1,1) \rangle = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) = (a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid z = x + y\}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۸: اگر $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک تبدیل خطی و $T(1,0) = (1,2,0)$ و $T(0,1) = (0,1,2)$ باشد، ضابطه تبدیل خطی را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** هدف، تعیین $T(x, y)$ است.

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) \Rightarrow T(x, y) = T(x(1,0) + y(0,1)) \overset{\text{تبدیل خطی است } T}{=\!=\!=} xT(1,0) + yT(0,1) \overset{\text{فرض مسأله}}{=\!=\!=}$$

$$x(1,2,0) + y(0,1,2) = (x, 2x + y, 2y) \Rightarrow T(x, y) = (x, 2x + y, 2y) \quad (\text{ضابطه تبدیل})$$

◆ ◆ ◆ ◆

قضیه۱: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی و $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ یک پایه برای V و $S' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ بردارهای دلخواه در W باشند. در اینصورت دقیقاً یک تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ وجود دارد؛ بطوریکه برای هر $i = 1, 2, ..., n$ داشته باشیم $Tv_i = w_i$.

اثبات: ابتدا یک تبدیل خطی از V به W که در شرط قضیه صدق کند را معرفی (اثبات وجودی)، سپس منحصر بفردی آن را (اثبات یکتایی) ثابت می‌کنیم. فرض کنید $v \in V$ بردار دلخواهی در V باشد، از آنجا که S یک پایه برای V است؛ پس، اسکالرهایی مانند a_1، a_2، ... ، a_n وجود دارد؛ بطوریکه $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. نگاشت T را برای هر $v \in V$ به صورت $Tv = a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_nw_n$ درنظر بگیرید؛ که در آن w_1، ...، w_n بردارهای متعلق به S' و a_1، a_2، ... ، a_n ، اسکالرهای موجود در نمایش v به صورت ترکیب خطی از بردارهای S است. نشان می دهیم T یک تبدیل خطی است. برای این منظور فرض کنید v و u دو عضو دلخواه V و c یک اسکالر دلخواه است.

$$\left.\begin{array}{l} v\in V \xrightarrow{\text{S یک پایه برای V است.}} v=a_1v_1+\ldots+a_nv_n \\ u\in V \xrightarrow{\text{S یک پایه برای V است.}} u=b_1v_1+\ldots+b_nv_n \end{array}\right\} \Rightarrow cv+u=(ca_1+b_1)v_1+\ldots+(ca_n+b_n)v_n \xrightarrow{\text{تعریف T}}$$

$$T(cv+u)=(ca_1+b_1)w_1+\ldots+(ca_n+b_n)w_n=ca_1w_1+b_1w_1+\ldots+ca_nw_n+b_nw_n=$$
$$c(a_1w_1+\ldots+a_nw_n)+(b_1w_1+\ldots+b_nw_n)\overset{\text{تعریف T}}{=\!=\!=}cTv+Tu$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است. حال منحصر بفرد بودن T را نشان می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید T' یک تبدیل خطی از V به W است که برای هر $i=1,2,...,n$ ، در شرط $T'v_i=w_i$ صدق می کند و $v\in V$ یک بردار دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$T'v=T'(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n)\overset{\text{تبدیل خطی است } T'}{=\!=\!=\!=\!=}a_1T'v_1+a_2T'v_2+\ldots.+a_nT'v_n\overset{\text{با توجه به شرط}}{=\!=\!=\!=}$$
$$a_1w_1+a_2w_2+\ldots a_nw_n\overset{\text{تعریف T}}{=\!=\!=}Tv$$

بنابراین برای هر $v\in V$ ، $T'v=Tv$ و در نتیجه $T'=T$ می‌باشد. پس نگاشت T منحصر به فرد است.

با توجه به این قضیه می‌بینیم که **برای مشخص کردن یک تبدیل خطی**، کافی است اثر تبدیل را روی بردارهای پایهٔ فضای برداری اول، بدست آوریم.

مثال۱۹: فرض کنید $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ یک تبدیل خطی با ضابطه $T(x,y,z)=(x-y,z+y)$ باشد. تصویر زیرفضای $E=\{(x,y,z)\,|\,x=z+2y\}$ تحت T کدامیک از گزینه‌های زیر است.

۱) خط $x=2y$ ۲) خط $y=x+1$ ۳) نیمساز ربع دوم و چهارم ۴) نیمساز ربع اول و سوم

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تعریف E، داریم: $E=\{(x,y,z)\,|\,x=z+2y\}=\{(z+2y,y,z)\,|\,y,z,\in\mathbb{R}\}$

از طرفی می‌دانیم $T(z+2y,y,z)=(z+2y-y,z+y)=(z+y,z+y)$ ، بنابراین:

$$T(E)=\left\{(z+y,z+y)\middle|z,y\in\mathbb{R}\right\}\overset{z+y=a}{=\!=\!=\!=}\left\{(a,a)\,|\,a\in\mathbb{R}\right\}$$

در نتیجه تصویر E تحت T، خط $y=x$ یا همان نیمساز ربع اول و سوم است.

❖ **تعریف۴:** فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی و $U\subseteq W$ باشد. در اینصورت، تصویر معکوس U تحت تبدیل خطی T، که با $T^{-1}(U)$ نمایش داده می‌شود؛ برابر است با: $T^{-1}(U)=\{v\in V\,|\,Tv\in U\}$

مثال۲۰: با در نظر گرفتن تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T:(x,y)=(y,x)$، تصویر معکوس $U_1=\{(x,y)\,|\,x=y\}$ و $U_2=\{(1,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$V_1=T^{-1}U_1=\left\{T^{-1}(x,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}\overset{\text{تعریف T}}{=\!=\!=\!=}\left\{(x,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}=U_1$$

$$V_2=T^{-1}U_2=\left\{T^{-1}(1,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\right\}\overset{\text{تعریف T}}{=\!=\!=\!=}\left\{(y,1)\,|\,y\in\mathbb{R}\right\}$$

پس، V_1 همان خط $y=1$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است. توجه کنید که U_2، خط $x=1$ در فضای $\mathbb{R}^2$ بود. در واقع با کمی دقت می‌توان فهمید که تبدیل خطی معرفی شده در این مثال هر نقطه را به قرینه‌ی آن نسبت به خط $y=x$ می‌برد.

نکته۳: فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی است. در اینصورت اگر $U\subseteq W$ یک زیرفضای W باشد، آنگاه $T^{-1}(U)$ یک زیرفضای V است.

اثبات: فرض کنید v_1 و v_2 دو عضو دلخواه از $T^{-1}(U)$ و c یک اسکالر دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_1\in T^{-1}(U)\xrightarrow{\text{تعریف}}Tv_1\in U \\ v_2\in T^{-1}(U)\xrightarrow{\text{تعریف}}Tv_2\in U \end{array}\right\}\xrightarrow[\text{W است.}]{\text{U زیرفضای}}cTv_1+Tv_2\in U\xrightarrow[\text{خطی است}]{\text{T تبدیل}}T(cv_1+v_2)\in U$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف } T^{-1}(U)}cv_1+v_2\in T^{-1}(U)\Rightarrow$$ $T^{-1}(U)$ یک زیر فضای V است.

فصل پنجم

« مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و قضیه کیلی ـ هامیلتون »

مقدار و بردار ویژه

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $T:V \to V$ یک عملگر خطی روی Vباشد. در این صورت اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$ را یک مقدار ویژه T گویند، هرگاه یک بردار ناصفر مانند $v \in V$ وجود داشته باشد؛ به طوریکه رابطه $Tv = \lambda v$ به ازای آن برقرار باشد. همچنین، در صورت برقراری این رابطه، v را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامند.

مثال۱: نشان دهید که $\lambda = \pm ۱$ مقادیر ویژه عملگر خطی $T:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x,y)=(y,x)$ می‌باشند.

☑ **پاسخ:** کافی است دو بردار ویژه متناظر آنها را پیدا کنیم.

$T(۱,۱) \xrightarrow{\text{تعریف } T} (۱,۱) \Rightarrow T(۱,۱) = ۱ \times (۱,۱) \Rightarrow$ $\lambda = ۱$ یک مقدار ویژه T با بردار ویژه متناظر $(۱,۱)$ است.

$T(۱,-۱) = (-۱,۱) = -۱ \times (۱,-۱) \Rightarrow$ $\lambda = -۱$ یک مقدار ویژه T با بردار متناظر $(۱,-۱)$ است.

با کمی دقت در مثال بالا می‌توان فهمید که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، بردار (a,a) یک بردار ویژه متناظر با $\lambda = ۱$ و بردار $(a,-a)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = -۱$ است. این نتیجه به صورت کلی و همواره برقرار است. در نکته‌ی زیر آن را بیان و ثابت می‌کنیم.

نکته۱: اگر $v \in V$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ برای تبدیل خطی T باشد، آنگاه به ازای هر اسکالر نا صفر $\alpha \in \mathbb{F}$ بردار αv نیز یک بردار ویژه متناظر با λ است.

اثبات: از آنجا که v بردار ویژه متناظر با λ است، $Tv = \lambda v$ است. بنابراین، داریم:

$T(\alpha v) = \alpha Tv = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) \Rightarrow$ αv یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ است.

با توجه به نکته فوق می‌بینیم که اگر v یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه تمام مضارب اسکالر v نیز بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌باشند. پس می‌توانیم تعریف زیر را در نظر بگیریم.

❖ **تعریف ۲:** فرض کنید λ یک مقدار ویژه عملگر خطی $T:V \to V$ باشد. در این صورت، مجموعه تمام بردارهای $v \in V$ که در رابطه $Tv = \lambda v$ صدق کند را فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامند و آنرا با E_λ نمایش می‌دهند.

مثال۲: فضای ویژه متناظر با مقادیر ویژه $\lambda = \pm ۱$ در مثال قبل را به دست آورید:

☑ **پاسخ:** همان‌طور که در بالا دیدیم، به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$T(a,a) = ۱ \times (a,a) \Rightarrow E_۱ = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (۱,۱) \rangle$$

$$T(a,-a) = -۱ \times (a,-a) \Rightarrow E_{-۱} = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (۱,-۱) \rangle$$

نکته۲: اگر λ یک مقدار ویژهٔ عملگر خطی T باشد، آنگاه E_λ یک زیر فضای V است.

اثبات: با توجه به تعریف می‌دانیم $E_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$؛ بنابراین، E_λ در واقع فضای پوچ عملگر خطی $T-\lambda I_V$ است و از قبل می‌دانیم که فضای پوچ هر عملگر خطی روی V، یک زیر فضای V است.

نکته۳: عملگر خطی $T: V \to V$ دارای بردار ویژه متناظر با اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$ است، اگر و تنها اگر $T-\lambda I_V$ یک به یک نباشد.

اثبات: فرض کنید عملگر خطی T دارای بردار ویژه $v \in V$ با مقدار ویژه متناظر λ است. در این صورت، بنابر تعریف می‌دانیم که E_λ (فضای ویژه متناظر با λ) فضای پوچ عملگر $T-\lambda I_V$ است و همچنین $\{0\} \neq \langle v \rangle \subseteq E_\lambda$ می‌باشد. بنابراین، $N_{T-\lambda I_V} = E_\lambda \neq \{0\}$ و در نتیجه $T-\lambda I_V$ یک به یک نیست. از طرف دیگر، اگر $T-\lambda I_V$ یک به یک نباشد، آنگاه $E_\lambda = N_{T-\lambda I_V} \neq \{0\}$ است و در نتیجه اثبات تمام است.

مثال۳: فرض کنید $I_V : V \to V$ عملگر همانی باشد. در این صورت برای هر $v \in V$، داریم: $I_V(v) = 1.v$؛ بنابراین اسکالر ۱، مقدار ویژه I_V و همچنین $E_1 = V$ است. در واقع تنها مقدار ویژه عملگر همانی، $\lambda = 1$ می‌باشد.

مثال۴: فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک عملگر خطی با ضابطه $T(x,y) = (2x, x+y)$ است. در این صورت به ازای بردار $(1,1)$، داریم:

$$T(1,1) = (2\times 1, 1+1) = (2,2) = 2(1,1)$$

بنابراین، $(1,1)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 2$ است. به همین ترتیب، می‌بینیم که برای هر $a \in \mathbb{R}$ بردار $a(1,1) = (a,a)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 2$ است.

$$T(a,a) = (2a, a+a) = (2a, 2a) = 2(a,a)$$

همانطور که در قبل نیز اشاره کردیم، لزوماً هر عملگر خطی دارای مقادیر و یا بردارهای ویژه نیست و فقط زمانی $\lambda \in \mathbb{F}$ می‌تواند یک مقدار ویژه عملگر خطی $T: V \to V$ باشد؛ که عملگر $T-\lambda I_V$ یک به یک نباشد. مثال بعد، یک عملگر خطی را ارائه می‌کند که دارای هیچ مقدار یا بردار ویژه‌ای نیست.

مثال۵: فرض کنید $V = C[a,b]$ مجموعه تمام توابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ است. عملگر خطی $T: V \to V$ با ضابطه $T(f) = \int_a^x f(t)dt$ را در نظر بگیرید (این عملگر، به عملگر انتگرال‌گیری معروف است). در این صورت تابع نا صفر $f \in V$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه متناظر λ است، اگر و تنها اگر رابطه $T(f) = \lambda f$ برقرار باشد. در چنین مواقعی تابع f را یک تابع ویژه نیز می‌نامند. نشان می‌دهیم این عملگر خطی دارای هیچ تابع ویژه‌ای (بردار ویژه) نیست.

پاسخ: بنابر برهان خلف، فرض کنید تابع ناصفر f و اسکالر ناصفر $\lambda \in \mathbb{F}$ وجود دارد؛ بطوریکه f یک تابع ویژه متناظر با λ است. در این صورت داریم:

$$T(f) = \lambda f \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \lambda f(x) \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} f(x) = \lambda f'(x) \xrightarrow{f(x)\neq 0, \lambda \neq 0}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} Ln(f(x)) = \frac{1}{\lambda}x + c \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } e \text{ می‌رسانیم.}} e^{\ln(f(x))} = e^{\frac{1}{\lambda}x + c} = e^c . e^{\frac{1}{\lambda}x} = c' e^{\frac{1}{\lambda}x}$$

$$\Rightarrow f(x) = c' e^{\frac{1}{\lambda}x} \quad (1)$$

$$\text{از طرف دیگر} \Rightarrow \lambda f(x) = T(f) = \int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x=a} \lambda f(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \xrightarrow{\lambda \neq 0} f(a) = 0 \qquad (2)$$

حال با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow f(x) = c' e^{\frac{1}{\lambda}x} \\ (2) \Rightarrow f(a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c' e^{\frac{1}{\lambda}a} = 0 \xrightarrow{e^{\frac{1}{\lambda}a} \neq 0} c' = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

و این با فرض اولیه که f یک تابع ناصفر است، تناقض دارد. بنابراین، فرض خلف باطل و اثبات تمام است.توجه کنید که برای $\lambda = 0$ با توجه به ناصفر بودن f، بوضوح هیچ تابعی به عنوان تابع ویژه وجود ندارد.

بنابراین، عملگر فوق یک عملگر بدون بردار ویژه یا مقدار ویژه است. این نتیجه می‌دهد که برای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، به ازای عملگر خطی فوق، عملگر $T-\lambda I_V$ یک عملگر نامنفرد است.

نکته‌ای که باید توجه کرد؛ این است که در مثال قبل V یک فضای برداری از بعد نامتناهی است و در واقع فقط در مواقعی که V با بعد نامتناهی باشد، امکان روی دادن چنین حالتی وجود دارد. در ادامه فصل نشان می‌دهیم که اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، هر عملگر خطی روی آن حتماً دارای مقادیر و بردارهای ویژه خواهد بود (البته با فرض اینکه فضای برداری V روی یک میدان بسته جبری تعریف شده باشد).

مثال۶: نشان دهید تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T:(x,y)=(-y,x)$ دارای هیچ مقدار ویژه‌ای نیست.

☑ **پاسخ:** بنابر برهان خلف، فرض کنید که $\lambda \in \mathbb{R}$ یک مقدار ویژه T با بردار ویژه متناظر (a,b) باشد. در این‌صورت داریم:

$$T(a,b)=\lambda(a,b) \Rightarrow (-b,a)=(\lambda a,\lambda b) \Rightarrow \begin{cases} -b=\lambda a \\ a=\lambda b \end{cases} \Rightarrow -b=\lambda^2 b \Rightarrow (1+\lambda^2)b=0 \xrightarrow{1+\lambda^2\neq 0} b=0 \qquad (1)$$

به همین تربیت $\Rightarrow a=-\lambda^2 a \Rightarrow (1+\lambda^2)a=0 \xrightarrow{1+\lambda^2\neq 0} a=0 \qquad (2)$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $(a,b)=(0,0)$ و این تناقض دارد با تعریف بردار ویژه، چرا که بردار ویژه باید ناصفر باشد. بنابراین فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

در مثال بالا، دیدیم که امکان دارد یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی هر هم مقدار ویژه و در نتیجه بردار ویژه نداشته باشد. در مثال فوق، تبدیل خطی را روی فضای $\mathbb{C}^2$ در نظر بگیریم، می‌بینیم که دو مقدار ویژه $\lambda=\pm i$ خواهد داشت.

مثال۷: فرض کنید V یک فضای برداری و $T:V\to V$ یک عملگر خطی است. در این صورت کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح <u>نیست</u>؟

۱) T دارای n مقدار ویژه است (با احتساب تکرار).

۲) اگر v یک بردار ویژه T باشد، آنگاه هر مضرب ناصفر v نیز یک بردار ویژه T است.

۳) اگر E_λ فضای ویژه متناظر با λ باشد، آنگاه هر $0\neq v\in E_\lambda$ یک بردار ویژه متناظر با λ است.

۴) یک عملگر خطی روی Vمانند T وجود دارد که مقدار ویژه نداشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مثال قبل دیدیم که اگر V از بعد نامتناهی باشد، عملگر خطی Tروی V را می‌توان چنان پیدا کرد که مقدار یا بردار ویژه نداشته باشد. بنابراین، گزینه (۱) غلط و گزینه (۴) صحیح است. از طرفی درستی گزینه‌های ۲و۳ نیز، با توجه به نکات قبل و تعریف، بوضوح نتیجه می‌شود.

مثال۸: عملگر خطی $D:P_n \to P_n$ با ضابطه $D(f)=f'$ را در نظر بگیرید (این عملگر به عملگر مشتق‌گیری معروف است). مقادیر و بردارهای ویژه آن را در صورت وجود بدست آورید.

☑ **پاسخ:** اگر $f(x)=a$ یک تابع ثابت باشد، واضح است که $Df=(a)'=0$ و لذا $\lambda=0$ یک مقدار ویژه عملگر مشتق‌گیری است و تابع ثابت $f(x)=1$ و تمام مضارب آن بردار ویژه (تابع ویژه) متناظر با آن هستند. در واقع اگر $f(x)=1$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{aligned} &D(f)=D(1)=(1)'=0 \\ &0\times 1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(f)=0\times f=0 \Rightarrow$$ $\lambda=0$ یک مقدار ویژه و تابع $f(x)=1$ تابع ویژه متناظر با آن است.

حال فرض کنید $f(x)\in P_n$ یک چند جمله‌ای دلخواه نا صفر و $\lambda\neq 0$ به گونه‌ای باشند که λ یک مقدار ویژه و $f(x)$ تابع ویژه متناظر با آن است. در این صورت داریم:

$$D(f)=\lambda f \xrightarrow{\text{تعریف}} f'(x)=\lambda f(x) \xrightarrow{f\neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}}$$

$$\operatorname{Ln}(f(x))=\lambda x+c \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } e \text{ برسانیم}} e^{\operatorname{Ln}(f(x))}=e^{\lambda x+c}=e^c e^{\lambda x}=c'e^{\lambda x} \Rightarrow f(x)=c'e^{\lambda x}$$

واضح است که تابع $f(x)$ بدست آمده؛ در P_n قرار ندارد. پس، عملگر خطی فوق به غیر از صفر $(\lambda=0)$ مقدار ویژه‌ی دیگری ندارد و تنها مقدار ویژه آن $\lambda=0$ است.

نکته۴: فرض کنید V یک فضای برداری و $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد. در این صورت $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T است، اگر و تنها اگر T منفرد باشد.

اثبات: اگر $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T باشد، از نکته قبل نتیجه می‌شود که عملگر خطی $T-\lambda I_V=T-0I_V=T$ منفرد است. از طرف دیگر، اگر T منفرد باشد؛ به همین ترتیب نتیجه می‌شود، عملگر $T-0I_V=T$ منفرد و در نتیجه $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T است.

تعیین مقادیر و بردارهای ویژه یک عملگر خطی با توجه به تعریف در اکثر مواقع، کاری وقت‌گیر و حوصله‌بر است. می‌توان برای این منظور از ماتریس متناظر با عملگر خطی استفاده کرد. البته واضح است که این روش فقط در مواقعی که V دارای بعد متناهی است، کاربرد دارد.

❖ **تعریف ۳:** فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ است. در این صورت $\lambda\in\mathbb{F}$ را یک مقدار ویژه ماتریس A می‌گوییم، هرگاه بردار ناصفری مانند $X\in\mathbb{F}^n$ موجود باشد؛ به طوریکه رابطه $AX=\lambda X$ برقرار شود. در چنین مواقعی بردار X را، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

با توجه به تعریف واضح است که λ یک مقدار ویژه ماتریس A است، هرگاه دستگاه $AX=\lambda X$ و یا دستگاه متناظر آن؛ یعنی $(\lambda I_n-A)X=0$ دارای جواب ناصفر باشد. از فصل دستگاه معادلات می‌دانیم که یک دستگاه معادلات همگن فقط در صورتی دارای جواب غیر بدیهی است؛ که ماتریس ضرایب آن وارون‌ناپذیر باشد. همچنین، یک ماتریس وارون‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن صفر شود. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که λ یک مقدار ویژه ماتریس A است، اگر و تنها اگر $\det(\lambda I_n-A)=0$ شود. پس، عبارت $\det(\lambda I_n-A)$ که یک چند جمله‌ای از درجه n برحسب λ است؛ در تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس نقش اساسی دارد.

❖ **تعریف ۴:** اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، چند جمله‌ای $P_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$ را چند جمله‌ای مشخصه A و معادله $P_A(\lambda)=0$ را معادله مشخصه A می‌نامند.

مثال۹: معادله مشخصه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\det(\lambda I_2-A)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-2&-1\\1&\lambda-3\end{bmatrix}\right)=$$

معادله مشخص ماتریس A: $(\lambda-2)(\lambda-3)+1=\lambda^2-5\lambda+6+1\Rightarrow\lambda^2-5\lambda+7=0$

نتیجه۱: با توجه به توضیحات قبل؛ نتیجه می‌شود که λ یک مقدار ویژه A است، اگر و تنها اگر ریشه معادله مشخصه آن باشد. بنابراین، برای تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس، باید ریشه‌های معادله مشخصه آن را بدست آوریم و سپس برای تعیین بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ، کافی است؛ دستگاه معادلات $(\lambda I_n-A)X=0$ را حل کنیم.

مثال۱۰: چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\-4&1&4\\-1&0&2\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&1\\-4&\lambda-1&4\\-2&0&\lambda+1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{به ستون دوم می‌نویسیم.}]{\text{بسط دترمینان را نسبت}}(-1)^{2+2}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\-2&\lambda+1\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda+1)+2)=(\lambda-1)((\lambda-1)\lambda)=(\lambda-1)^2\lambda$$

برای تعیین مقادیر ویژه A، باید ریشه‌های $P_A(\lambda)$ را بدست آوریم.

مقادیر ویژه ماتریس A: $P_A(\lambda)=0\Rightarrow(\lambda-1)^2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=1$ (ریشه مضاعف)

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 0$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور باید دستگاه $(\lambda_1 I_3 - A)X = -AX = 0$ را حل کنیم، که جواب آن با دستگاه $AX = 0$ برابر است (فرض کنید: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$).

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x \\ 4x + y - 4z = 0 \\ 2x - z = 0 \ \text{با معادله اول یکسان است} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4x \ , \ z = 2x$$

بنابراین، تمام بردارهای به شکل $X = \begin{bmatrix} x \\ 4x \\ 2x \end{bmatrix}$ که در آن $0 \neq x \in \mathbb{R}$ است، یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 0$ است. برای سادگی بردار $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ را بـه عنوان بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 0$ در نظر می‌گیریم. فضای ویژه متناظر با $\lambda_1 = 0$ نیز، فضای تولید شده توسط این بردار است. یعنی داریم:

$$E_{\lambda_1} = < \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} > \Rightarrow \dim E_{\lambda_1} = 1$$

حال بردار ویژه متناظر با $\lambda_2 = 1$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور باید دستگاه $(\lambda_2 I_3 - A)X = (I_3 - A)X = 0$ را حل کنیم.

$$(I_3 - A)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \Rightarrow x = z \ \text{و}\ y \ \text{دلخواه} \\ -2x + 2z = 0 \end{array}\right.$$

با توجه به نتیجه بدست آمده در بالا، واضح است که بردارهای $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$، دو بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = 1$ می‌باشند. توجه کنید کـه چـون λ_2 یک مقدار ویژه با دو بار تکرار (ریشه مضاعف چند جمله‌ای مشخصه) بود؛ بنابراین، می‌تواند دارای دو بردار ویژه مستقل خطی هم، باشد. در این صورت داریم:

$$E_{\lambda_2} = < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > \Rightarrow \dim E_{\lambda_2} = 2$$

◆ ◆ ◆ ◆

در حالت کلی اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A با k بار تکرار باشد، می‌توان نشان داد که همواره $\dim E_\lambda \leq k$ است. در اینجا، ابتدا در نکته زیر به رابطه بین مقادیر و بردارهای ویژه در ماتریس‌ها و عملگرهای خطی پرداخته، و سپس پاره‌ای از خواص چند جمله‌ای مشخصه، مقـادیر و بردارهـای ویـژه در ماتریس‌ها را بررسی می‌کنیم.

نکته۵: اگر A یک ماتریس متقارن ، حقیقی و $n \times n$ باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژه A حقیقی‌اند.

اثبات: فرض کنید λ یک مقدار ویژه A و X بردار ویژه متناظر با آن است: در اینصورت با توجه به رابطهٔ $AX = \lambda X$؛ واضح است که اگر X یـک بـردار حقیقی باشد، آنگاه چون A حقیقی است، λنیز لاجرم اسکالری حقیقی خواهد بود. اگر x یک بردار مختلط باشد؛ یعنی $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ، آنگـاه اگـر طرفین رابطهٔ $AX = \lambda X$ را در $\overline{X}^t$ ضرب کنیم ($\overline{X}^t$، ترانهاده‌ی مزدوج X است)، نتیجه می‌شود:

$$\overline{X}^t AX = \overline{X}^t \lambda X = \lambda[\overline{x}_1 \ \overline{x}_2 \ .... \ \overline{x}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \ x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \qquad (1)$$

(از درس توابع مختلط می‌دانیم که همواره به ازای هر $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z}z = \|z\|^2$)

از طرفی، $\bar{X}^t AX$ ، یک اسکالر و در نتیجه با ترانهادهٔ خود برابر است، یعنی؛

$$\bar{X}^t AX = (\bar{X}^t AX)^t = X^t A^t \bar{X} \xrightarrow{\text{متقارن است } A} X^t A\bar{X} \qquad (۲)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\overline{\bar{X}^t AX} = \overline{\bar{X}^t}\,\overline{AX} \xrightarrow{\text{حقیقی است } A} X^t A\bar{X} \qquad (۳)$$

از روابط ۲و۳ نتیجه می‌شود که $\overline{\bar{X}^t AX} = \bar{X}^t AX$ و این یعنی $\bar{X}^t AX$ یک اسکالر حقیقی است (فقط اعداد حقیقی با مزدوجشان برابرند). لذا با توجه به رابطه (۱)، باید $\lambda\sum_{i=۱}^{n}\|x_i\|^۲$ نیز حقیقی باشد. چون $\sum_{i=۱}^{n}\|x_i\|^۲$ حقیقی است؛ پس، لزوماً λ نیز حقیقی و لذا اثبات تمام است.

مثال۱۱: کدام گزینه در مورد مقادیر ویژه تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه $T(x,y,z) = (x-y+z\ ,\ -x+۲y\ ,\ x+z)$ درست است؟

۱) $\lambda_۱ = \sqrt{۲}+۱\ ,\ \lambda_{۲,۳} = ۱\pm i$
۲) $\lambda_۱ = \sqrt{۵}+۱\ ,\ \lambda_{۲,۳} = ۱\pm i$
۳) $\lambda_{۱,۲} = -۱\pm\sqrt{۲}i\ ,\ \lambda_۳ = \sqrt{۳}-۱$
۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با کمی دقت می‌بینیم که ماتریس این تبدیل خطی تحت پایه‌ی استاندارد به صورت $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است. چون A یک ماتریس حقیقی، متقارن و مربعی است، از نکته‌ی قبل نتیجه می‌شود که تمام مقادیر ویژه‌ی T باید حقیقی باشند. پس، هیچ‌کدام از گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ نمی‌توانند مقادیر ویژه T باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۶: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی، Tیک عملگر خطی روی V و B یک پایه مرتب برای V باشد. در این صورت λ یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ یک مقدار ویژه $[T]_B$ باشد. همچنین $v \in V$ یک بردار ویژه T است، اگر و تنها اگر $[v]_B$ (مختصات v در پایه B) یک بردار ویژه $[T]_B$ باشد.

بنابراین، با توجه به نکته فوق؛ برای تعیین مقادیر و یا بردارهای ویژه یک عملگر خطی، کافی است ماتریس آن را نسبت به یک پایه مرتب دلخواه (اصولاً برای راحتی پایه استاندارد فضا را در نظر می‌گیریم) بدست آوریم و سپس با تعیین مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس آن، با استفاده از نکته فوق، مقادیر و بردارهای ویژه عملگر خطی مورد نظر را بدست آوریم.

مثال۱۲: کدامیک از توابع زیر یک بردار ویژه تبدیل خطی $T: P_۲ \to P_۲$ با ضابطه $T(a+bx+cx^۲) = a+(۲a-b)x+(a+۲b-۲c)x^۲$ نیست.

۱) $۱+x+۲x^۲$
۲) $۱+x+x^۲$
۳) $x+۲x^۲$
۴) $۲x^۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با در نظر گرفتن پایه استاندارد $B = \{۱, x, x^۲\}$ نتیجه می‌شود $[T]_B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$. به سادگی مقادیر ویژه $[T]_B$ به صورت $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = -۱$ و $\lambda_۳ = -۲$ بدست می‌آیند. برای تعیین بردارهای ویژه متناظر با آنها داریم.

$$\lambda_۱ = ۱:\quad (I_۳ - [T]_B)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -۲x+۲y = ۰ \\ -x-۲y+۳z = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

بنابراین، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه $[T]_B$ و در نتیجه $f_۱(x) = ۱+x+x^۲$ یک بردار ویژه T است.

$$\lambda_۲ = -۱:\quad (-I_۳ - [T]_B)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -۲x = ۰ \\ -۲x = ۰ \\ -x-۲y+z = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = ۰,\ z = ۲y$$