فصل اول

«حساب کامپیوتری»

اصول محاسبه در ماشین‌های محاسبه‌گری مانند کامپیوتر، حساب کامپیوتری نامیده می‌شود. چون حساب کامپیوتری با محاسبه‌های واقعی متفاوت است درنتیجه، نتایج به‌دست آمده از آن نیز متفاوت خواهد بود. در این فصل، این تفاوت‌ها و روش‌های ذخیره عدد در حساب کامپیوتری را بررسی می‌کنیم.

نمایش اعشاری اعداد حقیقی

در آنالیز مقدماتی برای هر عدد حقیقی نمایشی به‌صورت $\pm(a_n a_{n-1} \ldots a_0 / b_1 b_2 \ldots)_\beta$ درنظر گرفته می‌شود. در این نمایش β مبنای نمایش اعشاری نام دارد و عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک است. a_i و b_jها رقم‌های نمایش اعشاری هستند و متعلق به مجموعه $\{0,1,\ldots,\beta-1\}$ هستند. در این نمایش ممیز اعشار نقش مهمی دارد و ارزش ارقام را مشخص می‌کند. به‌این صورت که، i امین رقم بعد از ممیز یعنی b_i دارای ارزش β^{-i} و i امین رقم قبل از ممیز یعنی a_i دارای ارزش β^i است. بنابراین این نمایش مربوط به عدد حقیقی با ارزش زیر است:

$$\pm(a_n a_{n-1} \cdots a_0 / b_1 b_2 \cdots)_\beta = \pm\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta^{-i}\right) = \pm\left(a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 + \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots\right)$$

$$a_i \,,\, b_i \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}$$

نمایش‌های اعشاری با توجه به ویژگی‌های آن‌ها به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) اگر کلیه رقم‌های بعد از ممیز اعشار صفر باشند، آن نمایش اعشاری را یک عدد صحیح می‌نامیم.

۲) اگر تعداد ارقام غیر صفر بعد از ممیز اعشار متناهی باشد، نمایش اعشاری را با پایان یا مختوم گوییم و در غیر این صورت آن را بی‌پایان یا نامختوم می‌نامیم.

۳) اگر در یک نمایش اعشاری بی‌پایان، ارقامی مانند c_1 و c_2 و ... و c_k به تناوب تکرار شوند، آن نمایش اعشاری را متناوب می‌گوییم. شکل کلی یک نمایش اعشاری متناوب به‌صورت زیر است:

$$\pm(a_n a_{n-1} \cdots a_0 / b_1 b_2 \cdots b_m c_1 c_2 \cdots c_k c_1 c_2 \cdots c_k \cdots)_\beta = \pm(a_n a_{n-1} \cdots a_0 / b_1 b_2 \cdots b_m \overline{c_1 c_2 \cdots c_k})_\beta$$

که بخش $c_1 c_2 \cdots c_k$ را یک دوره گردش یا تناوب نمایش اعشاری می‌گوییم.

مثال ۱: حاصل $(0/\overline{1})_\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{\beta-1}{\beta+1}$ ۲) $\frac{1}{\beta+1}$ ۳) $\frac{1}{\beta}$ ۴) $\frac{1}{\beta-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از دستور محاسبه حد مجموع سری هندسی، این مقدار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(0/\overline{1})_\beta = \beta^{-1} + \beta^{-2} + \cdots = \frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}} = \frac{1}{\beta-1}$$

مثال ۲: حاصل $(0/\overline{0z})_\beta$ کدام است؟ $(z := \beta - 1)$

۱) $\frac{\beta-1}{\beta+1}$ ۲) $\frac{1}{\beta+1}$ ۳) $\frac{1}{\beta}$ ۴) $\frac{1}{\beta-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از دستور محاسبه حد مجموع سری هندسی، این مقدار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(0/\overline{0z})_\beta = (\beta-1)(\beta^{-2}+\beta^{-4}+\cdots) = (\beta-1)\frac{\beta^{-2}}{1-\beta^{-2}} = \frac{\beta-1}{\beta^2-1} = \frac{1}{\beta+1}$$

قضیه: نمایش اعشاری یک عدد حقیقی در مبنای β یکتا نیست. هریک از دو شرط زیر موجب می‌شود نمایش اعشاری اعداد حقیقی یکتا باشد:

۱) از بین نمایش‌های متفاوت یک عدد، نمایش مختوم آن انتخاب شود.

۲) بی‌نهایت رقم از ارقام نمایش اعشاری متفاوت با رقم $\beta-1$ باشد.

توجه کنید که این دو شرط معادل هستند. برای مثال به تساوی $3/99\ldots = 4$ که دو نمایش متفاوت از عدد چهار در مبنای دهدهی می‌باشد، توجه کنید. هر دو شرط موجب می‌شود که نمایش ۴ که هم مختوم است و هم بی‌نهایت رقم از آن متفاوت با ۹ است، انتخاب شود.

نکته۱: یک عدد حقیقی ممکن است در یک مبنا دارای نمایش مختوم و در مبنای دیگر دارای نمایش نامختوم باشد. به‌عنوان مثال عدد حقیقی $\frac{1}{10}$ در مبنای ۱۰ دارای نمایش مختوم $0/1$ و در مبنای ۲ دارای نمایش نامختوم $(0/0\overline{0011})_2$ است.

اعداد حقیقی گویا و گنگ

مطابق تقسیم‌بندی که برای نمایش‌های اعشاری انجام دادیم، می‌توانیم اعداد حقیقی را به دو گروه گویا و گنگ تقسیم کنیم.

یک عدد حقیقی گویا است، اگر نمایش اعشاری آن در مبنای β دارای یکی از دو وضعیت زیر باشد:

۱) نمایش بسط اعشاری آن باپایان (مختوم) باشد.

۲) نمایش بسط اعشاری آن بی‌پایان (نامختوم) و متناوب باشد.

و یک عدد حقیقی گنگ است اگر نمایش بسط اعشاری آن در مبنای β بی‌پایان (نامختوم) و نامتناوب باشد.

مثال۳: کدام‌یک از اعداد زیر گنگ است؟

۱) $(0/10101010\ldots)_2$ ۲) $(0/0101010\ldots)_2$ ۳) $(0/101001000100000\ldots)_2$ ۴) $(0/110110110110\ldots)_2$

پاسخ: گزینه «۳» عدد حقیقی $(0/1010010001000 0\ldots)_2$ نامختوم و نامتناوب است. زیرا تعداد صفرهای بین دو رقم یک متوالی، رو به افزایش است، پس یک عدد گنگ می‌باشد و اعداد دیگر نامختوم و متناوب هستند. (۱) $0/\overline{10}$, ۲) $0/\overline{01}$, ۳) $0/\overline{110}$)

مثال۴: کدام‌یک از اعداد زیر گویا است؟

۱) $(0/101001000100000\ldots)_3$ ۲) $(0/01011011101111\ldots)_3$

۳) $(0/122112211122111\ldots)_3$ ۴) $(0/10101010\ldots)_3$

پاسخ: گزینه «۴» عدد حقیقی $(0/10101010\ldots)_3$ نامختوم و متناوب و بنابراین یک عدد گویا است و اعداد دیگر نامختوم و نامتناوب هستند؛ زیرا در گزینه (۱) تعداد صفرهای بین دو رقم یک، در گزینه (۲)، تعداد یک‌های بین دو رقم صفر و در گزینه (۳) تعداد یک‌های بین دو عدد ۲۲، رو به افزایش است.

تبدیل مبنا در نمایش اعشاری

در حساب واقعی، محاسبه‌ها در مبنای ۱۰ انجام می‌شوند؛ اما در ماشین‌های محاسبه‌گر از مبناهای دیگری مانند مبنای ۲ استفاده می‌شود. بنابراین تبدیل مبنا در نمایش اعشاری و روش آن را بررسی می‌کنیم.

تبدیل از مبنای ده به مبنای دیگر

برای تبدیل نمایش اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای دیگر دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: برای تبدیل عدد صحیح A از مبنای ۱۰ به مبنای β، از روش تقسیم‌های متوالی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

گام ۱: A و β را از ورودی بگیرید و شمارنده i را برابر صفر قرار دهید.

گام ۲: a_i را برابر $A-\beta[\frac{A}{\beta}]$ قرار دهید. (این مقدار باقی‌مانده تقسیم A بر β است.)

گام ۳: اگر $[\frac{A}{\beta}]$ برابر صفر است، به گام ۶ بروید. (یعنی عمل تقسیم تا زمانی که خارج قسمت کوچک‌تر از مقسوم علیه شود ادامه دارد.)

گام ۴: A را برابر $[\frac{A}{\beta}]$ قرار دهید.

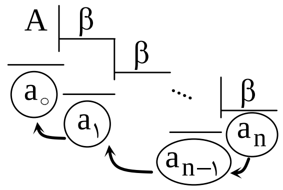
گام ۵: به شمارنده i یک واحد اضافه کنید و به گام ۲ بروید.

گام ۶: عدد $a_i a_{i-۱} \cdots a_۱ a_۰$ را چاپ کنید.

برای راحتی می‌توان از جدولی به‌صورت زیر استفاده کرد. در این جدول هر بخش از الگوریتم در ستونی جداگانه آورده شده است.

A	β	i	$a_i = A - \beta[\frac{A}{\beta}]$	$[\frac{A}{\beta}]$

دورواقع، با عمل به این الگوریتم تقسیم‌های متوالی مقابل انجام می‌شوند.



حالت دوم: برای تبدیل عدد حقیقی $۰ < A < ۱$ از مبنای ۱۰ به مبنای β و تعیین n رقم بسط اعشاری آن در مبنای β از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

گام ۱: A و β را از ورودی بگیرید.

گام ۲: برای i از ۱ تا n دستورات زیر را انجام دهید.

(آ) b_i را برابر $[\beta A]$ قرار دهید.

(ب) A را برابر $\beta A - b_i$ قرار دهید.

(پ) اگر A برابر صفر بود، انجام دستورات را خاتمه دهید.

گام ۳: عدد $۰/b_۱ b_۲ \ldots b_n$ را چاپ کنید.

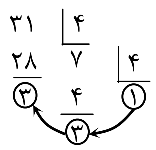
البته برای چنین تبدیلی بهتر است از یک جدول به شکل زیر استفاده کنیم. در این جدول، هر بخش از الگوریتم در ستونی جداگانه آورده شده است.

A	i	$A\beta$	$b_i = [\beta A]$	$\beta A - b_i$

مثال ۵: کدام‌یک نمایش عدد ۳۱ در مبنای ۴ است؟

۱) $(۱۳۳)_۴$ ۲) $(۳۱۳)_۴$ ۳) $(۳۳۱)_۴$ ۴) $(۱۱۳)_۴$

پاسخ: گزینه «۱» نمایش عدد ۳۱ در مبنای ۴ براساس الگوریتم بالا به‌صورت $(۱۳۳)_۴$ است.



A	β	i	$a_i = A - \beta[\frac{A}{\beta}]$	$[\frac{A}{\beta}]$
۳۱	۴	۰	$a_۰ = ۳۱ - ۴[\frac{۳۱}{۴}] = ۳$	$[\frac{۳۱}{۴}] = ۷$
۷	۴	۱	$a_۱ = ۷ - ۴[\frac{۷}{۴}] = ۳$	$[\frac{۷}{۴}] = ۱$
۱	۴	۲	$a_۲ = ۱ - ۴[\frac{۱}{۴}]$	$[\frac{۱}{۴}] = ۰$

مثال ۶: عدد ۰/۳ در مبنای ۲ کدام است؟

۱) $(۰/۰۰\overline{۱۰۰۱})_۲$ ۲) $(۰/۰\overline{۱۰۱})_۲$ ۳) $(۰/\overline{۰۱۰۰۱})_۲$ ۴) $(۰/۰\overline{۱۰۰۱})_۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مطابق الگوریتم تبدیل در حالت دوم، جدول زیر به‌دست می‌آید.

A	i	۲A	$b_i = [2A]$	$2A - b_i$
۰/۳	۱	۰/۶	۰	۰/۶
۰/۶	۲	۱/۲	۱	۰/۲
۰/۲	۳	۰/۴	۰	۰/۴
۰/۴	۴	۰/۸	۰	۰/۸
۰/۸	۵	۱/۶	۱	۰/۶
۰/۶				

چون سطر دوم و ششم جدول یکسان شدند، دوره گردش ایجاد شده و ارقام ۱ و ۰ و ۰ و ۱ در دوره گردش هستند؛ بنابراین نمایش اعشاری به‌صورت $0/3 = (0/0\overline{1001})_2$ است.

نکته۲: برای تبدیل عدد حقیقی غیرصحیح و بزرگ‌تر از یک A، از مبنای ۱۰ به مبنای دیگر، بخش‌های صحیح و اعشاری آن را با توجه به حالت‌های اول و دوم به‌صورت جداگانه تبدیل می‌کنیم و سپس آن‌ها را جمع می‌کنیم.

تبدیل از مبنای دیگر به مبنای ده

برای تبدیل عدد حقیقی از مبنای β به مبنای ۱۰، چهار حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

۱) برای تبدیل یک عدد صحیح از رابطه روبه‌رو استفاده می‌کنیم. $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_\beta = a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0$

۲) برای تبدیل یک عدد حقیقی کوچک‌تر از یک با بسط اعشاری باپایان رابطه زیر را به‌کار می‌بریم:

$$(0/b_1 b_2 \cdots b_m)_\beta = b_1\beta^{-1} + b_2\beta^{-2} + \dots + b_m\beta^{-m}$$

۳) برای تبدیل یک عدد حقیقی کوچک‌تر از یک با بسط اعشاری بی‌پایان و متناوب به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$(0/b_1 b_2 \cdots b_m \overline{c_1 c_2 \cdots c_k})_\beta = \frac{(b_1 b_2 \cdots b_m c_1 c_2 \cdots c_k)_\beta - (b_1 b_2 \cdots b_m)_\beta}{(\underbrace{zz\cdots z}_{\text{مرتبه}\ k}\ \underbrace{00\cdots 0}_{\text{مرتبه}\ m})_\beta}$$

که منظور از z رقم $\beta - 1$ است.

۴) اگر یک عدد حقیقی دارای یک بخش صحیح و یک بخش اعشاری بود، ابتدا هر بخش را به‌طور جداگانه به مبنای ۱۰ می‌بریم و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال۷: عدد $(0/1\overline{012})_3$ در مبنای ۱۰ کدام است؟

۱) $\frac{38}{72}$ ۲) $\frac{31}{78}$ ۳) $\frac{13}{78}$ ۴) $\frac{31}{72}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** مطابق حالت سوم مقدار این عدد در مبنای ۱۰ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(0/1\overline{012})_3 = \frac{(1012)_3 - (1)_3}{(2220)_3} = \frac{27+3+2-1}{2(3+9+27)} = \frac{31}{78}$$

روش دوم: از تعریف نمایش اعشاری و حد مجموع سری هندسی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(0/1\overline{012})_3 &= 1(3^{-1}) + 0(3^{-2}) + 1(3^{-3}) + 2(3^{-4}) \\ &\quad + 0(3^{-5}) + 1(3^{-6}) + 2(3^{-7}) \\ &\quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &= \frac{1}{3} + 1\left(\frac{3^{-3}}{1-3^{-3}}\right) + 2\left(\frac{3^{-4}}{1-3^{-3}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{3^{-3}(1+\frac{2}{3})}{\frac{26}{27}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{26} = \frac{1}{3} + \frac{5}{78} = \frac{31}{78}\end{aligned}$$

نکته۳: برای تبدیل یک عدد از مبنای β_1 به مبنای β_2 ابتدا آن را از مبنای β_1 به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم، سپس آن را از مبنای ۱۰ به مبنای β_2 می‌بریم.

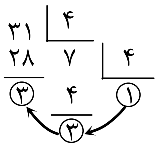
مثال۸: عدد $(1011)_3$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) $(113)_4$ ۲) $(331)_4$ ۳) $(313)_4$ ۴) $(133)_4$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا عدد موردنظر را به مبنای ۱۰ می‌بریم. پس داریم:

$$(1011)_3 = 1(3^3)+0(3^2)+1(3)+1 = 31$$

حال ۳۱ را با استفاده از تقسیم‌های متوالی روبه‌رو به مبنای ۴ می‌بریم. بنابراین $(1011)_3 = (133)_4$ است.



مثال۹: کدام عدد در مبنای ۵ و ۷ دارای یک نمایش است؟

۱) $(6)_{10}$ ۲) $(7)_{10}$ ۳) $(4)_{10}$ ۴) $(5)_{10}$

پاسخ: گزینه «۳» نمایش اعداد موجود در گزینه‌ها را در هر دو مبنای ۵ و ۷ می‌نویسیم:

$$5=(10)_5=(5)_7 \quad , \quad 4=(4)_5=(4)_7 \quad , \quad 7=(12)_5=(10)_7 \quad , \quad 6=(11)_5=(6)_7$$

درنتیجه تنها عدد ۴ در هر دو مبنا دارای یک نمایش است.

سیستم نمایش ممیز ثابت

مقدار حافظه‌ای که برای ذخیره هر عدد در ماشین‌های محاسبه‌گر اختصاص داده می‌شود محدود است؛ بنابراین در این سیستم نمایش، تعداد n رقم برای نمایش ارقام قبل از ممیز اعشار و به تعداد m رقم برای ارقام بعد از ممیز اعشار و همین‌طور یک مکان برای علامت درنظر گرفته می‌شود. به‌این ترتیب در سیستم نمایش ممیز ثابت، شکل کلی اعداد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\pm(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 / b_1b_2\cdots b_m)_\beta \quad ; \quad a_i, b_j \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}}$$

ویژگی‌های سیستم نمایش ممیز ثابت را می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد.

۱) تعداد اعداد حقیقی قابل نمایش در این سیستم نمایش اعداد، مساوی $2\times\beta^n\times\beta^m-1=2\beta^{n+m}-1$ است. چون هر رقم دارای β حالت می‌باشد که از بین اعضای مجموعه $\{0,1,\cdots,\beta-1\}$ انتخاب می‌شوند و علامت دارای دو حالت است. می‌دانیم عدد $0=(0\cdots0/0\cdots0)_\beta$ دارای علامت نیست پس، از تعداد به‌دست آمده یک واحد کم می‌کنیم.

۲) بزرگ‌ترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم نمایش اعداد را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$x_{max} = ((\underbrace{(\beta-1)\cdots(\beta-1)}_{n\text{مرتبه}} / \underbrace{(\beta-1)\cdots(\beta-1)}_{m\text{مرتبه}})_\beta = (\beta-1)\sum_{i=-m}^{n-1}\beta^i = \beta^n-\beta^{-m}$$

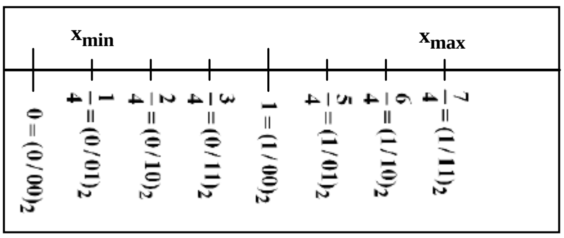
برای آن‌که بزرگ‌ترین عدد قابل نمایش حاصل شود، تمام ارقام برابر $\beta-1$ یعنی بزرگ‌ترین رقم ممکن در مبنای β درنظر گرفته شده است.

۳) کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم، نمایش اعداد مساوی $x_{min}=(\underbrace{0\cdots0}_{n\text{مرتبه}} / \underbrace{0\cdots0}_{m-1\text{مرتبه}}1)_\beta=\beta^{-m}$ است. برای دستیابی به کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش، همه ارقام بجز یک رقم، برابر صفر فرض می‌شوند.

۴) توزیع اعداد در سیستم نمایش ممیز ثابت یکنواخت است؛ یعنی اعداد با فاصله‌های مساوی در بازه $[-x_{max}, x_{max}]$ قرار دارند و فاصله بین دو عدد متوالی مساوی β^{-m} است.

مثال۱۰: اعداد مثبت قابل نمایش در سیستم $(a_0/b_1b_2)_2$ را بر روی محور مختصات نمایش دهید.

پاسخ: اعداد مثبت این سیستم اعداد به‌صورت زیر هستند. توجه کنید که توزیع این اعداد یکنواخت است و فاصله بین اعداد برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد.



فصل ششم

«انتگرال‌گیری عددی»

در این فصل روش‌های عددی محاسبه انتگرال معین یک تابع را بیان می‌کنیم. دلایل استفاده از روش‌های عددی برای محاسبه تقریبی یک انتگرال معین؛ عدم وجود تابع اولیه، دشواری یافتن آن و یا وجود اطلاعات جدولی از انتگرالده در تعدادی متناهی نقطه است.

فرض کنید مقادیر تابع f به‌صورت جدولی $\begin{array}{c|cccc} x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f_i & f_0 & f_1 & \cdots & f_n \end{array}$ داده شده است که $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقـاطی از بـازه $[a,b]$ هسـتند. بـرای تقریـب $\int_a^b f(x)dx$ از مجموع $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ استفاده می‌کنیم که در آن ممکن است برخی w_i ها (وزن‌ها) و برخی x_i ها (گره‌ها) مجهول باشند. بنـابراین ایـن تقریب حداکثر دارای $2n+2$ مجهول است. برای محاسبه مقادیر x_i ها و w_i ها در صورت مجهول بودن، تابع $f(x)$ را بـه‌ترتیـب برابـر ۱ و x و ... و x^{k-1} قرار می‌دهیم که در آن k برابر تعداد مجهول‌ها است. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات با k معادله و k مجهول به‌دست می‌آید که با حل آن مقادیر مجهول مشخص می‌شوند.

درجه دقت یک فرمول انتگرال‌گیری عددی برابر عدد طبیعی n است، هرگاه فرمول برای همه چندجمله‌ای‌های تا درجه حداکثر n یک فرمول بـدون خطـا باشد، در این حالت می‌گوییم فرمول برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n دقیق است. برای یـافتن درجـه دقـت فرمـول انتگـرال‌گیـری کـافی اسـت بزرگ‌ترین عدد طبیعی n را بیابیم که فرمول برای x^k که $k \le n$ است، بدون خطا باشد. معمولاً درجه دقت فرمول، یک واحد کمتر از مرتبه مشتق موجود در رابطه خطا است.

فرمول انتگرال‌گیری عددی که در آن از هر دو نقطه انتهایی a و b استفاده شود، فرمول بسته نامیده می‌شود و اگر حداقل یکی از دو نقطه انتهایی a و b در آن، مورد استفاده نباشد آن فرمول را باز می‌نامیم.

مثال۱: اگر E خطای فرمول انتگرال‌گیری مضربی از $f^{(1389)}(\eta)$ باشد، درجه دقت فرمول کدام است؟

۱) ۱۳۸۸　　۲) ۱۳۸۹　　۳) ۱۳۹۰　　۴) ۶۹۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» درجه دقت فرمول، یک واحد کمتر از مرتبه مشتق موجود در رابطه خطا یعنی $1388=1-1389$ است.

مثال۲: کدام فرمول انتگرال‌گیری باز است؟

۱) هیچ‌یک از گره‌ها برابر نقاط انتهایی نیست.　　۲) تنها یکی از گره‌ها برابر یکی از نقاط انتهایی است.

۳) هر دو نقطه انتهایی جزء گره‌ها هستند.　　۴) گزینه ۱ و ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مطابق تعریف فرمول باز باید حداقل یکی از نقاط انتهایی در آن، مورد استفاده نباشد.

فرمول‌های بسته نیوتن کوتس

در روش نیوتن کوتس گره‌ها، $x_0, x_1, \ldots, x_n$، معلوم و اغلب فاصله و وزن‌ها، $w_0, \ldots, w_n$ مجهول درنظر گرفته می‌شوند. بنابراین برای یافتن مجهول‌ها با جایگذاری $1, x, \cdots, x^{n+1}$ به جای $f(x)$ در رابطه زیر، یک دستگاه معادلات با $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول ایجاد می‌شود.

$$\boxed{\begin{array}{c}\int_{x_\circ}^{x_n} f(x)\,dx = w_\circ f_\circ + w_1 f_1 + \cdots + w_n f_n + E = \sum_{i=\circ}^{n} w_i f_i + E \\ f_i = f(x_i)\ ;\ x_i = x_\circ + ih\ ;\ i = \circ,1,\cdots,n\end{array}}$$

این دستور را فرمول $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌گوییم. روش دیگری نیز برای به‌دست آوردن این فرمول وجود دارد. در این روش چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $i=\circ,1,\ldots,n$ و $x_i = x_\circ + ih$ را جایگزین تابع f در انتگرال می‌کنیم. نتیجه همان فرمول $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس خواهد بود. نکته جالب در فرمول نیوتن کوتس آن است که ضرایب جمله‌های متساوی‌البُعد از طرفین با هم برابرند. به عبارت دیگر:

$$\boxed{w_i = w_{n-i}\ ;\ i = \circ,1,2,\cdots,n}$$

خطای روش $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس متناسب با h^k است که در آن برای nهای فرد $k=n+2$ و برای nهای زوج $k=n+3$ است. پس k عددی فرد است و استفاده از این روش برای n های زوج مناسب‌تر می‌باشد.

مثال ۳: فرمول ۴ نقطه‌ای نیوتن کوتس را به‌دست آورید.

پاسخ: برای راحتی فرض می‌کنیم $x_\circ = \circ$ باشد، پس فرمول به‌صورت $\int_\circ^{3h} f(x)dx = \sum_{i=\circ}^{3} w_i f_i + E$ است که در آن $x_\circ = \circ$ ، $x_1 = h$ ، $x_2 = 2h$ و $x_3 = 3h$ می‌باشد. مطابق روشی که گفته شد برای یافتن w_iها تابع $f(x)$ را برابر ۱ و x و x^2 و x^3 و $E=\circ$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=1\ :\ \int_\circ^{3h} 1dx = 3h = w_\circ + w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x)=x\ :\ \int_\circ^{3h} xdx = \frac{9h^2}{2} = hw_1 + 2hw_2 + 3hw_3$$

$$f(x)=x^2\ :\ \int_\circ^{3h} x^2dx = 9h^3 = h^2w_1 + 4h^2w_2 + 9h^2w_3$$

$$f(x)=x^3\ :\ \int_\circ^{3h} x^3dx = \frac{81h^4}{4} = h^3w_1 + 8h^3w_2 + 27h^3w_3$$

که پس از ساده کردن، مقادیر به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آیند. $w_\circ = \frac{3h}{8}\ ,\ w_1 = \frac{9h}{8}\ ,\ w_2 = \frac{9h}{8}\ ,\ w_3 = \frac{3h}{8}$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۴: در فرمول ۱۳۸۹ نقطه‌ای نیوتن کوتس خطا متناسب با .... است.

۱) h^{1389} ۲) h^{1390} ۳) h^{1391} ۴) h^{1392}

پاسخ: گزینه «۳» چون $n+1=1389$ و $n=1388$ زوج است، پس خطا متناسب با $h^{n+3}=h^{1391}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۵: خطای روش $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس متناسب با h^{12} است، n کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) وجود ندارد

پاسخ: گزینه «۴» خطای روش نیوتن کوتس نمی‌تواند متناسب با توان زوجی از h باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

چند فرمول نیوتن کوتس

فرمول ذوزنقه‌ای ساده: در این فرمول $n=1$ است و یک فرمول ۲ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌باشد.

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{h^3}{12} f''(\eta)\ ;\ x_i < \eta < x_{i+1}}$$

فرمول سیمپسون ساده: در این فرمول $n=2$ است و یک فرمول ۳ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌باشد.

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)\ ;\ x_i < \eta < x_{i+2}}$$

فرمول $\frac{3}{8}$ سیمپسون ساده: در این فرمول $n=3$ است و یک فرمول ۴ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌باشد.

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta) \quad ; \quad x_i < \eta < x_{i+3}$$

فرمول کلی خطای روش‌های نیوتن کوتس: اگر I_n را روش $n+1$ نقطه‌ای نیوتون کوتس برای تقریب انتگرال تابع f درنظر بگیریم، عبارت خطا به‌صورت زیر است:

۱) اگر n زوج باشد، داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+n}} f(x)dx = I_n + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}_{(\varepsilon)}}{(n+2)!} \int_0^n t^2 (t-1)\dots(t-n)dt$$

۲) اگر n فرد باشد، داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+n}} f(x)dx = I_n + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}_{(\varepsilon)}}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt$$

که $x_i < \varepsilon < x_{i+n}$ می‌باشد.

چند دستور مرکب نیوتن کوتس

دستور ذوزنقه‌ای مرکب: آن را با $T(h)$ و خطای آن را با $ET(h)$ نشان می‌دهیم.

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(h) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$ET(h) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta) = O(h^2)$$

روش ذوزنقه‌ای مرکب برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه یک دقیق است.

دستور سیمپسون مرکب: آن را با $S(h)$ و خطای آن را با $ES(h)$ نشان می‌دهیم که در آن $n = 2k$ عددی زوج است.

$$\int_a^b f(x) \approx S(h) = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-2}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$ES(h) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) = O(h^4)$$

روش سیمپسون مرکب برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه سه دقیق است.

دستور سیمپسون $\frac{3}{8}$ مرکب: آن را با $S_{\frac{3}{8}}(h)$ و خطای آن را با $ES_{\frac{3}{8}}(h)$ نشان می‌دهیم که در آن $n = 3k$ مضربی از سه است.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\frac{3}{8}}(h) = \frac{3h}{8}[f_0 + 3\sum_{i=0}^{k-1}(f_{3i+1} + f_{3i+2}) + 2\sum_{i=0}^{k-1} f_{3i} + f_{3n}]$$

$$ES_{\frac{3}{8}}(h) = -\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\eta) = O(h^4)$$

روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ مرکب برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه سه دقیق است.

مثال ۶: کدام تقریب برای انتگرال عددی تابع جدولی

x_i	−۱	۰	۱	۳
f_i	۱	۲	۴	۵

مناسب‌تر است؟

۱) $\frac{40}{3}$　۲) $\frac{41}{3}$　۳) $\frac{42}{3}$　۴) $\frac{43}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» چون فاصله نقاط یکسان نیست پس بازه انتگرال‌گیری را افراز می‌کنیم. لذا $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = I_1 + I_2$ می‌باشد. برای محاسبه I_1 روش مناسب سیمپسون است. چون $n=2$، عددی زوج است، پس $I_1 \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{3}(1+4(2)+4) = \frac{13}{3}$ می‌باشد. برای محاسبه I_2 روش مناسب ذوزنقه‌ای است، پس $I_2 \approx \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = \frac{2}{2}(4+5) = 9$ می‌باشد. بنابراین $I = I_1 + I_2 \approx \frac{40}{3}$ است.

مثال۷: اگر بخواهیم تقریبی از $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} x\cos x dx$ به روش سیمپسون به‌دست آوریم که خطای آن کمتر از $۱۰^{-۵}$ باشد، n حداقل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه $ES(h)$ یک کران بالا برای مشتق چهارم تابع $f(x)=x\cos x$ محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\cos x - x\sin x \quad , \quad f''(x)=-۲\sin x - x\cos x \quad , \quad f'''(x)=-۳\cos x + x\sin x \quad , \quad f^{(۴)}(x)=۴\sin x + x\cos x$$

چون $\circ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ است، بنابراین کران بالای مشتق چهارم f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|f^{(۴)}(x)|=|۴\sin x + x\cos x| \le ۴|\sin x|+|x||\cos x| \le ۴+\frac{\pi}{۲}<۶$$

پس $M_۴=۶$ است، بنابراین طبق فرمول خطا، خطای روش دارای کران بالای زیر است.

$$|ES(h)| \le \frac{b-a}{۱۸۰}h^۴M_۴=\frac{\frac{\pi}{۲}-\circ}{۱۸۰}h^۴\times ۶=\frac{\pi h^۴}{۶۰}\le ۱۰^{-۵}$$

بنابراین $h \le \circ/۱۱۷۶$ می‌باشد. چون $nh=b-a=\frac{\pi}{۲}$ است، درنتیجه $n=\frac{\pi}{۲h}\ge ۱۳/۳۵۷$ می‌باشد و چون n باید زوج باشد، پس $n=۱۴$ است.

مثال۸: اگر در روش سیمپسون $\frac{۳}{۸}$ بعد از محاسبات به رابطه $n \ge ۱۳/۱۴$ برسیم، n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۳» چون در روش $\frac{۳}{۸}$ سیمپسون باید n مضرب سه باشد، پس $n=۱۵$ است.

مثال۹: کدام گزاره درباره خطای روش نیوتن کوتس درست است؟

۱) روش نیوتن کوتس برای تابع‌های زوج بر بازه‌های متقارن دقیق است.
۲) روش نیوتن کوتس برای تابع‌های فرد بر بازه‌های متقارن دقیق است.
۳) روش نیوتن کوتس زوج نقطه‌ای برای توابع زوج بر بازه‌های متقارن دقیق است.
۴) روش نیوتن کوتس فرد نقطه‌ای برای توابع فرد بر بازه‌های متقارن دقیق است.

پاسخ: گزینه «۲» نشان می‌دهیم که روش نیوتن کوتس برای توابع فرد بر بازه‌های متقارن دقیق است، چون بازه $[x_\circ, x_n]$ متقارن است، پس همواره $x_i=-x_{n-i}$ می‌باشد. از طرفی تابع f فرد است، بنابراین رابطه $f_i=-f_{n-i}$ برقرار است. اما می‌دانیم در روش نیوتن کوتس $w_i=w_{n-i}$ می‌باشد. بنابراین جملات w_if_i و $w_{n-i}f_{n-i}$ یکدیگر را در مجموع $\sum w_if_i$ حذف می‌کنند. اگر n فرد باشد، همه جمله‌ها حذف شده و مجموع برابر صفر خواهد بود. در صورتی که n زوج باشد همه جمله‌ها به جز جمله وسط یعنی $w_{\frac{n}{۲}}f_{\frac{n}{۲}}$ حذف می‌شوند، اما $f_{\frac{n}{۲}}=f(x_{\frac{n}{۲}})$ و $x_{\frac{n}{۲}}$ نقطه وسط بازه متقارن $[x_\circ, x_n]$ است، بنابراین $x_{\frac{n}{۲}}=\circ$ و چون f فرد می‌باشد $f_{\frac{n}{۲}}=f(\circ)=\circ$ خواهد بود. پس نتیجه به‌دست آمده از روش نیوتن کوتس و مقدار واقعی انتگرال هر دو صفر است، بنابراین روش نیوتن کوتس برای توابع فرد بر بازه‌های متقارن دقیق است. توجه کنید که برای گزینه دیگر می‌توان به راحتی مثال نقض به‌دست آورد.

فرمول نیوتن کوتس باز (نقطه میانی)

فرمول نقطه میانی ساده:

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx = hf(x_i+\frac{h}{۲})+\frac{h^۳}{۲۴}f''(\eta)\ ,\ x_i<\eta<x_{i+۱}}$$

فرمول مرکب نقطه میانی: آن را با $M(h)$ و خطای آن را با $EM(h)$ نشان می‌دهیم.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq M(h) = h\left(f(x_0+\frac{h}{2})+f(x_1+\frac{h}{2})+\cdots+f(x_{n-1}+\frac{h}{2})\right)$$
$$EM(h)=\frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\eta)=O(h^2)$$

مثال۱۰: اگر بخواهیم تقریبی از $I=\int_0^1 e^{x^2}$ به روش نقطه میانی به‌دست آوریم که خطای آن کمتر از $\frac{e}{1024}$ باشد، n حداقل کدام است؟

۱) ۱۴　　۲) ۱۵　　۳) ۱۶　　۴) ۱۷

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته قبل، یک کران بالا برای مشتق دوم تابع $f(x)=e^{x^2}$ محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=2xe^{x^2} \quad , \quad f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$$

چون $0<x\le 1$ است، بنابراین $|f''(x)|=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}\le 6e=M_2$ می‌باشد. چون $\frac{h^2}{24}M_2\le\frac{h^2e}{4}\le\frac{e}{1024}$ بنابراین $h^2\le\frac{1}{256}$ و از آن $h\le\frac{1}{16}$ است، پس $n=\frac{1}{h}\ge 16$ می‌باشد.

نکته۱: روش نقطه میانی دارای چند مزیت نسبت به روش ذوزنقه‌ای می‌باشد:

۱) این روش برای محاسبه انتگرال‌های ناسره مناسب است. ۲) در محاسبه این روش، مقدار تابع در یک نقطه کمتر محاسبه می‌شود.۳) خطای آن نصف خطای روش ذوزنقه‌ای است.

توجه کنید که این مزایا برای زمانی است که مقدار تابع در نقاط میانی دو گره متوالی موجود باشند.

مثال۱۱: برای محاسبه انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\,dx$ با $n=36$ کدام روش مناسب‌تر است؟

۱) ذوزنقه　　۲) سیمپسون　　۳) سیمپسون $\frac{3}{8}$　　۴) نقطه میانی

پاسخ: گزینه «۴» چون تابع $\sec x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است، پس روش نقطه میانی مناسب است.

نکته۲: فرض کنیم $I=\int_a^b f(x)dx$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر $f''(x)$ بر بازه $[a,b]$ نامنفی باشد، آن‌گاه $M(h)\le I\le T(h)$ است. ۲) اگر $f''(x)$ بر بازه $[a,b]$ نامثبت باشد، آن‌گاه $T(h)\le I\le M(h)$ است.

مثال۱۲: برای $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ کدام درست است؟

۱) $M(h)\le T(h)$　　۲) $T(h)\le M(h)$　　۳) $M(h)=T(h)$　　۴) $2M(h)=T(h)$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته قبل علامت مشتق دوم تابع $f(x)=\cos x$ را بر بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ بررسی می‌کنیم. چون $f'(x)=-\sin x$ و $f''(x)=-\cos x$ می‌باشد. پس تابع $f''(x)$ بر بازه موردنظر نامثبت است بنابراین $T(h)\le M(h)$ است.

مثال۱۳: برای $\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$ کدام درست است؟

۱) $T(h)\ge\pi$　　۲) $M(h)\ge 0$　　۳) $T(h)\ge 0$　　۴) $M(h)\le -\pi$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته قبل علامت مشتق دوم تابع $f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ را بر بازه $[0,\pi]$ بررسی می‌کنیم. چون $f'(x)=\cos 2x$ و $f''(x)=-2\sin 2x$ می‌باشد. پس تابع $f''(x)$ بر بازه موردنظر نامثبت است. بنابراین $T(h)\le I\le M(h)$ است. از سوی دیگر:

$$I=\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{4}\cos 2\pi+\frac{1}{4}\cos 0=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

پس $T(h)\le 0\le M(h)$ می‌باشد.

نکته۳: اگر $f''(x)$ بر بازه $[a,b]$ دارای علامت ثابتی باشد. آن‌گاه داریم:

۱) $T(\frac{h}{2})=\frac{1}{2}(M(h)+T(h))$ و $S(\frac{h}{2})=\frac{1}{3}(2M(h)+T(h))$ تقریب‌های بهتری نسبت به روش‌های ذوزنقه‌ای و نقطه میانی هستند.

۲) دقت تقریب $S(\frac{h}{2})=\frac{1}{3}(2M(h)+T(h))$ از تقریب $T(\frac{h}{2})=\frac{1}{2}(M(h)+T(h))$ بهتر است.

مثال۱۴: کدام تقریب برای محاسبه انتگرال $\int_0^1 e^{x^2}dx$ بهتر است؟

۱) $T(h)$ ۲) $M(h)$ ۳) $\frac{1}{2}(M(h)+T(h))$ ۴) $\frac{1}{3}(2M(h)+T(h))$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $f(x)=e^{x^2}$ باشد، پس $f'(x)=2xe^{x^2}$ و $f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}$ است. چون علامت f'' همواره مثبت است، پس طبق نکته قبل گزینه (۴) تقریب بهتری خواهد بود.

انتگرال‌گیری با روش رامبرگ

این روش براساس روش ذوزنقه‌ای و برون‌یابی ریچاردسون است که در آن با استفاده از دو تقریبی که برای یک انتگرال موجود است می‌توان به تقریب بهتری برای آن دست یافت.

آرایه رامبرگ یک آرایه مثلثی به‌صورت زیر است که هر درایه آن تقریبی برای انتگرال $I=\int_a^b f(x)dx$ می‌باشد.

$$\begin{array}{lllll}
R_{11} & & & & \\
R_{21} & R_{22} & & & \\
R_{31} & R_{32} & R_{33} & & \\
R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

ستون اول، تقریب‌های ذوزنقه‌ای هستند که در آن‌ها بازه $[a,b]$ به‌ترتیب به ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ... (توان‌های عدد ۲) بخش افراز شده است. ستون‌های دیگر با استفاده از ستون‌های قبلی با دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$\boxed{R_{kj}=R_{k(j-1)}+\frac{R_{k(j-1)}-R_{(k-1)(j-1)}}{4^{j-1}-1}=\frac{4^{j-1}R_{k(j-1)}-R_{(k-1)(j-1)}}{4^{j-1}-1}}$$

به عبارت دیگر، در آرایه این تقریب‌ها به‌صورت زیر قرار دارند.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & & \\
\cdots & R_{(k-1)(j-1)} & & \vdots & \\
\cdots & R_{k(j-1)} & \longrightarrow & R_{kj} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

خطای تقریب‌های واقع بر ستون jاُم متناسب با $O(h^{2j})$ هستند و برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $2j-1$ دقیق می‌باشند. دنباله متشکل از عناصر قطری آرایه رامبرگ به مقدار دقیق انتگرال معین همگرا است. یعنی $\lim_{k\to\infty} R_{kk}=I$. در تعیین مقدار تقریبی انتگرال به روش رامبرگ برای دوری از محاسبات اضافی بهتر است که آرایه رامبرگ را سطر به سطر تولید کنیم، یعنی اگر به ازای عدد ε مثبت مفروضی قدرمطلق تفاضل دو مقدار تقریبی از ε کمتر شد محاسبات را پایان می‌دهیم و آخرین تقریب، تقریب مناسبی است.

مثال۱۵: اگر برای محاسبه انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}$ از روش رامبرگ استفاده کنیم، درایه اول ستون سوم کدام است؟

۱) $\frac{107\pi}{189}$ ۲) $\frac{108\pi}{189}$ ۳) $\frac{109\pi}{189}$ ۴) $\frac{110\pi}{189}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض کنیم $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ و $a=-\frac{\pi}{2}$ و $b=\frac{\pi}{2}$ باشد. پس درایه‌های ستون اول به‌صورت زیر هستند.

$$R_{11}=\frac{\pi}{2}(f(-\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{3})=\frac{2\pi}{3} \quad \text{و} \quad R_{21}=\frac{\pi}{4}(f(-\frac{\pi}{2})+2f(0)+f(\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{4}(1+1+\frac{1}{3})=\frac{7\pi}{12}$$

$$R_{31}=\frac{\pi}{8}(f(-\frac{\pi}{2})+2f(-\frac{\pi}{4})+2f(0)+2f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{8}(1+\frac{4}{4-\sqrt{2}}+1+\frac{4}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{3})=\frac{97\pi}{168}$$

بنابراین درایه‌های ستون دوم به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند.

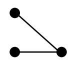
$$R_{22}=\frac{4R_{21}-R_{11}}{3}=\frac{4(\frac{7\pi}{12})-\frac{2\pi}{3}}{3}=\frac{5\pi}{9} \quad \text{و} \quad R_{32}=\frac{4R_{31}-R_{21}}{3}=\frac{4(\frac{97\pi}{168})-\frac{7\pi}{12}}{3}=\frac{145\pi}{252}$$

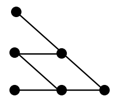
درنتیجه درایه اول ستون سوم به‌صورت $R_{33}=\frac{4^2(\frac{145\pi}{252})-\frac{5\pi}{9}}{16-1}=\frac{109\pi}{189}$ به‌دست می‌آید.

مثال۱۶: برای محاسبه درایه (i,j) از آرایه رامبرگ نیاز به محاسبه چند درایه از آن داریم؟

۱) j^2 ۲) $i(j+1)$ ۳) $\frac{j(j+1)}{2}$ ۴) ij

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به موارد زیر توجه کنید.

$j=1$ $1=1$ و $j=2$  $1+2=3$

$j=3$  $1+2+3=6$

بنابراین برای محاسبه درایه (i,j) از آرایه نیاز به محاسبه مؤلفه‌های یک مثلث با طول اضلاع j هستیم که تعداد مؤلفه‌های آن برابر است با:

$$1+2+3+\cdots+j=\frac{j(j+1)}{2}$$

نکته۴: در آرایه رامبرگ $R_{22}=\frac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{3}=S(\frac{h}{2})$ است.

نکته۵: به‌طور مشابه می‌توان یک آرایه رامبرگ دیگر با استفاده از روش سیمپسون ساخت. این آرایه را وفقی سیمپسون می‌گویند.

انتگرال‌گیری عددی با روش گاوس

در این روش نقاط x_i و وزن‌های w_i همگی در فرمول $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)+E$ مجهول فرض می‌شوند، پس فرمول این روش دارای $n+1$ گره $x_0,x_1,\dots,x_n$ و $n+1$ وزن $w_0,w_1,\dots,w_n$ مجهول است.

برای راحتی فرمول روش گاوس برای بازه $[-1,1]$ به‌دست می‌آید، اما با استفاده از جانشانی $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$ بازه $[a,b]$ به بازه $[-1,1]$ تبدیل می‌شود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi(x)=f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x)}$$

ویژگی‌های روش گاوس

۱) گره‌ها در فرمول گاوس ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر هستند که این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از فرمول زیر مشهور به فرمول رودریگ به‌دست آورد.

$$\boxed{P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad ; \quad n=0,1,\cdots}$$

به‌عنوان مثال، چندجمله‌های لژاندر زیر را می‌توان با کمی محاسبه به‌دست آورد:

$$P_0(x)=1 \text{ و } P_1(x)=x \text{ و } P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \text{ و } P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

۲) وزن‌ها در فرمول گاوس را می‌توان از فرمول زیر به‌دست آورد که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر و $L_i(x)$ چندجمله‌ای لاگرانژ در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ است.

$$\boxed{\mathbf{w_i=\frac{2(1-x_i^2)}{n^2(P_n(x_i))^2} \quad ; \quad w_i=\int_{-1}^{1}L_i(x)dx \quad ; \quad i=0,1,2,\cdots,n}}$$

۳) تمام وزن‌های w_i در روش گاوس در نابرابری $0<w_i\le 1$ صدق می‌کنند که موجب دقت بالای روش می‌شود.

۴) اگر در روش گاوس n فرد باشد، تعداد گره‌ها زوج است و روابط زیر برای آن‌ها برقرار می‌باشد:

$$\boxed{\mathbf{x_{n-i}=-x_i \quad , \quad w_{n-i}=w_i \quad ; \quad i=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2}}}$$

و اگر در روش گاوس n زوج باشد، تعداد گره‌ها فرد است و روابط زیر برای آن‌ها برقرار می‌باشد.

$$\boxed{\mathbf{x_{n-i}=-x_i \quad , \quad x_{\frac{n}{2}}=0 \quad , \quad w_{n-i}=w_i \quad ; \quad i=0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1}}$$

با استفاده از این روابط می‌توان نشان داد که فرمول‌های گاوس برای توابع فرد دقیق هستند.

مثال۱۷: اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط (گره‌ها) و $w_0, w_1, \dots, w_n$ وزن‌ها در فرمول انتگرال‌گیری گاوس باشند، حاصل $x_0+x_1+\cdots+x_n$ کدام است؟

۱) $w_0+w_1+\cdots+w_n$ ۲) $-(w_0+w_1+\cdots+w_n)$ ۳) صفر ۴) عددی گنگ است.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ویژگی بالا نقاط متساوی‌البعد از دو طرف قرینه یکدیگرند، پس حاصل برابر صفر است.

مثال۱۸: اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط (گره‌ها) و $w_0, w_1, \dots, w_n$ وزن‌ها در فرمول انتگرال‌گیری گاوس باشند، حاصل $w_0+w_1+\cdots+w_n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) به زوجیت n بستگی دارد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه‌ای که برای وزن‌ها آورده شد، می‌توان نوشت:

$$w_0+w_1+\cdots+w_n=\int_{-1}^{1}L_0(x)dx+\int_{-1}^{1}L_1(x)dx+\dots+\int_{-1}^{1}L_n(x)dx=\int_{-1}^{1}(L_0(x)+L_1(x)+\cdots+L_n(x))dx$$

اما مجموع چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برابر یک است. بنابراین، $w_0+w_1+\cdots+w_n=\int_{-1}^{1}dx=x\Big|_{-1}^{1}=2$ می‌باشد.

حالت‌های خاص فرمول گاوس

پرکاربردترین فرمول‌های گاوس در این قسمت آورده شده است. به آسانی می‌توانید درستی آن‌ها را با توجه به مطالب بالا بررسی کنید.

فرمول یک‌نقطه‌ای گاوس: این فرمول برای چندجمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است و همان قاعده نقطه میانی می‌باشد. $\int_{-1}^{1}f(x)dx\simeq 2f(0)$

فرمول دونقطه‌ای گاوس: این فرمول برای چندجمله‌ای‌های تا درجه سه دقیق است. $\int_{-1}^{1}f(x)dx\simeq f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

فرمول سه‌نقطه‌ای گاوس: این فرمول برای چندجمله‌ای‌های تا درجه پنج دقیق است. $\int_{-1}^{1}f(x)dx\simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

مثال۱۹: اگر $f(x)=6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ باشد، حاصل $A=\frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ۴) $\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینه «۱» A همان فرمول سه‌نقطه‌ای گاوس می‌باشد که برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۵ دقیق است. پس داریم:

$$A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)\Big|_{-1}^{1}=6-0=6$$

مثال۲۰: حاصل $\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ با استفاده فرمول سه‌نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}$ ۳) صفر ۴) -1

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ باشد، آن‌گاه این تابع فرد است زیرا: $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$

چون فرمول گاوس برای توابع فرد دقیق است، بنابراین حاصل انتگرال برابر صفر است.

مثال۲۱: حاصل $\int_{-1}^{1}(\mathrm{Arc}\tan x)^2dx$ با استفاده از فرمول دونقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{9}$ ۲) $\frac{\pi^2}{18}$ ۳) $\frac{\pi^2}{27}$ ۴) $\frac{\pi^2}{36}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از فرمول دونقطه‌ای گاوس برای این تابع به‌دست می‌آید.

$$\int_{-1}^{1}(\mathrm{Arc}\tan x)^2dx=(\mathrm{Arc}\tan(-\frac{1}{\sqrt{3}}))^2+(\mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{\sqrt{3}}))^2=(-\frac{\pi}{6})^2+(\frac{\pi}{6})^2=\frac{\pi^2}{18}$$

روش مستطیلی

اگر در انتگرال $\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx$ به جای $f(x)$ به‌ترتیب مقدار آن در نقطه سمت راست، f_{i+1} مقدار آن در نقطه سمت چپ، f_i را جایگزین کنیم.

فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی موسوم به روش مستطیلی راست ساده و مستطیلی چپ ساده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

روش مستطیلی راست ساده:	$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\simeq hf_{i+1}$	**روش مستطیلی چپ ساده:**	$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\simeq hf_i$

برای $i=0,1,\cdots,n-1$ و $x_{i+1}-x_i=h$ روش‌های مستطیلی راست و چپ مرکب را به‌ترتیب با $RR(h)$ و $LR(h)$ نمایش می‌دهیم.

$$\int_a^b f(x)dx\simeq RR(h)=h(f_1+f_2+\cdots+f_n)\ ;\ E=\frac{h}{2}f'(\eta)$$
$$\int_a^b f(x)dx\simeq LR(h)=h(f_0+f_1+\cdots+f_{n-1})\ ;\ E=-\frac{h}{2}f'(\eta)$$

مثال۲۲: میانگین حسابی فرمول‌های مستطیلی راست و چپ مرکب، برابر فرمول .... است.

۱) ذوزنقه‌ای مرکب ۲) سیمپسون مرکب ۳) میانی مرکب ۴) سیمپسون $\frac{3}{8}$ مرکب

پاسخ: گزینه «۱» میانگین حسابی فرمول‌های مستطیلی راست و چپ مرکب، برابر فرمول ذوزنقه‌ای مرکب است. زیرا:

$$\frac{1}{2}(LR(h)+RR(h))=\frac{h}{2}(f_0+\cdots+f_{n-1})+\frac{h}{2}(f_1+\cdots+f_n)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\cdots+2f_{n-1}+f_n)=T(h)$$

روش ذوزنقه‌ای اصلاح شده

اگر در انتگرال $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت تابع f در نقاط x_i و x_{i+1} را جایگزین تابع f کنیم فرمول انتگرال‌گیری عددی زیر موسوم به ذوزنقه‌ای اصلاح شده به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{۲}(f_i + f_{i+1}) + \frac{h^۲}{۱۲}(f'_i - f'_{i+1}) + \frac{h^۵}{۷۲۰}f^{(۴)}(\eta) \quad ; \quad x_i \le \eta \le x_{i+1}}$$

اگر $T(h)$ فرمول ذوزنقه‌ای مرکب باشد، آن‌گاه فرمول مرکب روش ذوزنقه‌ای اصلاح شده به شکل زیر خواهد بود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = T(h) + \frac{h^۲}{۱۲}[f'(a) - f'(b)] + \frac{(b-a)}{۷۲۰}h^۴ f^{(۴)}(\eta) \quad ; \quad a < \eta < b}$$

مثال ۲۳: فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ مقادیر تابع f و مشتق آن f' را در نقاط a و b درون‌یابی کند. رابطه انتگرال‌گیری عددی $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P(x)dx$ برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه چند دقیق است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرمول داده شده، همان فرمول ذوزنقه‌ای اصلاح شده ساده می‌باشد که دارای خطای $\frac{h^۵}{۷۲۰}f^{(۴)}(\eta)$ می‌باشد، بنابراین برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه $۳ = ۱ - ۴$ دقیق است.

مثال ۲۴: اگر $x_{i+1} - x_i = h \;;\; i = ۰,۱,\dots,n-۱$ باشد، خطای مقدار تقریبی $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \sin x dx$ با قاعده ذوزنقه‌ای مرکب متناسب با کدام است؟

۱) h ۲) $h^۲$ ۳) $h^۳$ ۴) $h^۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید $f(x) = \sin x$ باشد، چون $f'(x) = \cos x$ پس $f'(\frac{\pi}{۲}) = f'(\frac{۳\pi}{۲}) = ۰$ است. بنابراین فرمول‌های ذوزنقه‌ای مرکب و ذوزنقه‌ای اصلاح شده مرکب بر هم منطبق می‌باشند. درنتیجه خطای مقدار تقریبی انتگرال با قاعده ذوزنقه‌ای مرکب همان خطای مقدار تقریبی انتگرال با قاعده ذوزنقه‌ای اصلاح شده مرکب است و متناسب با $h^۴$ می‌باشد.

مدرسان شریف

فصل دهم

«تقریب کمترین مربعات»

تابع جدولی را درنظر بگیرید که مقادیر آن با اندازه‌گیری یا آزمایش به‌دست آمده است. در این حالت، اغلب به جای درون‌یابی داده‌ها، یک منحنی به‌دست می‌آوریم که از نزدیکی نقاط تابع جدولی بگذرد و خطای آن حداقل باشد. در این فصل روش به‌دست آوردن منحنی کمترین مربعات و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

چندجمله‌ای کمترین مربعات

نمودار کدام چندجمله‌ای $P(x)$ از نزدیکی نقاط $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ می‌گذرد، به‌طوری که خطای آن کمترین مقدار ممکن باشد؟ فرض کنید خطای مورد نظر، خطای کمترین مربعات باشد، یعنی به دنبال چندجمله‌ای $P(x)$ هستیم تا مجموع زیر کمترین مقدار را داشته باشد:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-P(x_i)\right]^2=\left[y_1-P(x_1)\right]^2+\left[y_2-P(x_2)\right]^2+\cdots+\left[y_n-P(x_n)\right]^2$$

برای یافتن چندجمله‌ای مورد نظر آن را به‌صورت $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ می‌نویسیم. بنابر قضیه‌ای از حسابان برای آن‌که تابع $m+1$ متغیره $E(a_0,a_1,\dots,a_m)$ کمترین مقدار را داشته باشد، لازم است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial a_k}=0\ ;\quad k=0,1,\dots,m}$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات را دستگاه معادلات نرمال می‌گویند.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_i^k\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_mx_i^m-y_i\right]=0\quad ;\ k=0,1,\dots,m}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات نرمال به‌صورت زیر می‌باشد. توجه کنید که اندیس i مقادیر طبیعی از ۱ تا n را می‌پذیرد.

$$\begin{bmatrix}\sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m\\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1}\\ \vdots & & & \vdots & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\\ \vdots\\ \sum x_i^my_i\end{bmatrix}$$

نکته ۱: دستگاه معادلات نرمال چندجمله‌ای کمترین مربعات دارای جواب یکتا است.

مثال۱: کدام درباره دستگاه معادلات روش کمترین مربعات با چندجمله‌ای درست است؟

۱) دارای جواب یکتا است. ۲) ممکن است جواب نداشته باشد.

۳) ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد. ۴) در شرایط مختلف هر سه حالت امکان دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دستگاه معادلات روش کمترین مربعات با چندجمله‌ای در هر شرایط دارای جواب یکتا است.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۲: ماتریس ضرایب دستگاه معادلات نرمال چندجمله‌ای کمترین مربعات، به شکل A^TA است که $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times(m+1)}$ و $a_{ij}=\left(x_i\right)^{j-1}$ می‌باشد.

مثال ۲: کدام درباره ماتریس ضرایب دستگاه معادلات برازش با چندجمله‌ای درست است؟

۱) آن را می‌توان به شکل $A^T A$ نوشت.
۲) آن را می‌توان به شکل $P^{-1}AP$ نوشت.
۳) آن را می‌توان به شکل $P^T AP$ نوشت.
۴) در شرایط مختلف هر سه حالت امکان دارد.

پاسخ: گزینه «۱» طبق نکته قبل ماتریس ضرایب را می‌توان به شکل $A^T A$ نوشت.

خط کمترین مربعات

در حالتی که چندجمله‌ای کمترین مربعات خط باشد، آن را خط کمترین مربعات می‌گوییم. دستگاه معادلات نرمال خط کمترین مربعات $P(x) = a_1 x + a_0$ برای داده‌های $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}}$$

از حل این دستگاه با استفاده از روش کرامر، برای a_0 و a_1 مقادیر زیر به‌دست می‌آید:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left[\sum x_i\right]^2}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left[\sum x_i\right]^2}$$

مثال ۳: دستگاه معادلات برازش خطی تابع جدولی $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}$**، کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اطلاعات داده‌ها، جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم.

درنتیجه دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-2	1	4	-2
-1	2	1	-2
0	3	0	0
1	3	1	3
3	4	9	12
$\sum x_i = 1$	$\sum y_i = 13$	$\sum x_i^2 = 15$	$\sum x_i y_i = 11$

مثال ۴: خط کمترین مربعات برای تابع جدولی $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}$**، کدام است؟**

۱) $74y = 184 + 42x$
۲) $47y = 184 + 74x$
۳) $47y = 74 + 184x$
۴) $184y = 74 + 47x$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مثال قبل و به کمک روش کرامر، جواب دستگاه $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر است:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{184}{74} \quad , \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{42}{74}$$

بنابراین خط کمترین مربعات برای تابع جدولی در گزینه اول آمده است.

نکته۳: اگر $y=ax+b$ خط کمترین مربعات داده‌های $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ باشد، آن‌گاه میانگین x_iها و y_iها در معادله خط صدق می‌کند. به عبارتی، اگر $\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ و $\bar{y}=\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$ باشند، آن‌گاه $\bar{y}=a\bar{x}+b$ است.

مثال۵: کدام درباره خط کمترین مربعات رئوس یک چندضلعی درست است؟

۱) حداقل از دو رأس چندضلعی عبور می‌کند.
۲) از وسط دو ضلع چندضلعی عبور می‌کند.
۳) از مرکز ثقل چندضلعی عبور می‌کند.
۴) از وسط یک قطر چندضلعی عبور می‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» بنابر نکته قبل این خط از مرکز ثقل چندضلعی عبور می‌کند. توجه داشته باشید که مرکز ثقل همان نقطه‌ی $(\bar{x},\bar{y})$ می‌باشد.

مثال۶: معادله خط کمترین مربعات داده‌های $(1,1)$ و $(2,1)$ و $(3,3)$ کدام است؟

۱) $2y=x$
۲) $3y=3x-1$
۳) $y=x$
۴) $2y=x+3$

پاسخ: گزینه «۲» بنابر نکته قبل این خط از نقطه $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{1+2+3}{3},\frac{1+1+3}{3})=(2,\frac{5}{3})$ می‌گذرد. اما این نقطه فقط در خط گزینه دوم صدق می‌کند.

چند تقریب کمترین مربعات دیگر

گاهی داده‌ها طوری هستند که تقریب با یک تابع چندجمله‌ای مناسب نیست و بهتر است آن‌ها را با یک تابع دیگر تقریب بزنیم. این موضوع زمانی رخ می‌دهد که با رسم داده‌ها در یک دستگاه مختصات، مجموعه نقاط رسم شده شبیه یک منحنی خاص باشد. اما در این حالت دستگاه معادلات حاصل غیر خطی است. برای رهایی از این مشکل، برخی اوقات می‌توان این توابع را با جانشانی‌هایی به شکل خطی در آورد. این فرآیند را خطی‌سازی می‌گوییم.

تقریب نمایی

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y=ae^{bx}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\ln y$ به شکل $\ln y=bx+\ln a$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y=\ln y$ خطی‌سازی $Y=bx+\ln a$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum x_i \ln y_i \end{bmatrix}}$$

تقریب هذلولی

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y=\frac{1}{ax+b}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\frac{1}{y}$ به شکل $\frac{1}{y}=ax+b$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y=\frac{1}{y}$ خطی‌سازی $Y=ax+b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum \frac{1}{y_i} \\ \sum \frac{x_i}{y_i} \end{bmatrix}}$$

تقریب مثلثاتی

اگر y_iها در داده‌ها به‌صورت متناوب تکرار شوند، منحنی تقریب مناسب به‌صورت مثلثاتی $y=b+a\cos\omega x$ است که در آن ω مقداری معلوم می‌باشد. با جانشانی $X=\cos\omega x$ خطی‌سازی $y=aX+b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum \cos\omega x_i \\ \sum \cos\omega x_i & \sum (\cos\omega x_i)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cos\omega x_i \end{bmatrix}}$$

تقریب کسری

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y=\frac{x}{ax+b}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\frac{x}{y}$ به شکل $\frac{x}{y}=ax+b$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y=\frac{x}{y}$ خطی‌سازی $Y=ax+b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum \frac{x_i}{y_i} \\ \sum \frac{x_i^2}{y_i} \end{bmatrix}}$$

تقریب تابع با روش کمترین مربعات

تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ داده شده است. می‌خواهیم این تابع را با یک چندجمله‌ای $P(x)$ چنان تقریب بزنیم که کمترین خطای ممکن ایجاد شود. خطای کمترین مربعات را درنظر بگیرید؛ بنابراین باید چندجمله‌ای $P(x)$ را طوری بیابیم که عبارت زیر کمترین مقدار را داشته باشد.

$$\boxed{E=\int_a^b\left(f(x)-P(x)\right)^2dx}$$

در این صورت چندجمله‌ای $P(x)$ را چندجمله‌ای تقریب کمترین مربعات تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم. برای یافتن چندجمله‌ای مورد نظر آن را به‌صورت $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ می‌نویسیم. بنابر قضیه‌ای از حسابان برای آن که تابع $m+1$ متغیره $E(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ کمترین مقدار را داشته باشد، لازم است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial a_k}=0\ ;\quad k=0,1,\ldots,m}$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات را دستگاه معادلات نرمال می‌گویند.

$$\boxed{\int_a^b x^k\left[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m-f(x)\right]dx=0\quad;\ k=0,1,\ldots,m}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات نرمال به‌صورت زیر می‌باشد. توجه کنید که اندیس i مقادیر طبیعی از ۱ تا n را می‌پذیرد.

$$\begin{bmatrix} I_0 & I_1 & \cdots & I_m \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_m & I_{m+1} & \cdots & I_{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

که در آن I_k و b_k را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{I_k=\int_a^b x^kdx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\ ;\ k=0,1,\ldots,2m\quad,\quad b_k=\int_a^b x^kf(x)dx\ ;\ k=0,1,\ldots,m}$$

نکته۴: اگر تقریب تابع با روش کمترین مربعات بر بازه $[0,1]$ موردنظر باشد، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاصل به شکل $(\frac{1}{i+j})_{m\times m}$ است که آن را ماتریس هیلبرت می‌نامیم.

❖ **تعریف:** اگر $f(x)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه $[a,b]$ باشد، نرم p آن را به‌صورت $\|f\|_p:=(\int_a^b|f(x)|^pdx)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌کنیم و نرم بی‌نهایت آن با $\|f\|_\infty:=\underset{a\le x\le b}{Max}|f|$ تعریف می‌شود.

مثال۷: اگر $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف درجه n باشد، مقدار $\|T_n\|_\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n}$ ۲) $|\cos\frac{1}{n}|$ ۳) $|\cos\frac{\pi}{n}|$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بنابر مطالب فصل چهارم درباره چندجمله‌ای چبیشف، چون $|T_n(x)|\le 1$ و $T_n(\cos\frac{k\pi}{n})=(-1)^k$ است؛ بنابراین $\|T_n\|_\infty=\underset{-1\le x\le 1}{Max}|T_n|=1$ می‌باشد.

مسأله کمترین مربعات

اگر A، یک ماتریس $m\times n$ و b، یک بردار $m\times ۱$ باشد، در این صورت مسأله کمترین مربعات دستگاه معادلات $Ax=b$ عبارت است از یافتن بردار x، به‌طوری که مقدار عبارت زیر را مینیمم کند.

$$\boxed{\|\varepsilon(x)\|_۲=\|Ax-b\|_۲}$$

هر بردار x^* که این عبارت را مینیمم کند جواب و عبارت $\|\varepsilon(x^*)\|_۲=\|Ax^*-b\|_۲$ باقیمانده جواب مسأله کمترین مربعات نامیده می‌شود. همچنین به‌دستگاه معادلات $Ax=b$، یک دستگاه معادلات $n\times n$، به شکل $A^TAx=A^Tb$ نسبت می‌دهیم و آن را دستگاه معادلات نرمال می‌گوییم.

نکته ۵: دستگاه معادلات نرمال $A^TAx=A^Tb$ همواره پایدار است، حتی اگر دستگاه معادلات $Ax=b$ ناپایدار باشد.

مثال ۸: پایداری دستگاه معادلات $Ax=b$، چه شرطی برای پایداری دستگاه معادلات $A^TAx=A^Tb$ است؟

۱) لازم ۲) کافی ۳) لازم و کافی ۴) نه لازم و نه کافی

پاسخ: گزینه «۴» دستگاه معادلات نرمال $A^TAx=A^Tb$ همواره پایدار است.

قضیه۱: مجموعه جواب‌های مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$، با مجموعه جواب‌های دستگاه معادلات نرمال $A^TAx=A^Tb$ برابر است.

مثال ۹: مجموعه جواب‌های مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ با مجموعه جواب‌های کدام دستگاه برابر است؟

۱) $A^TAx=A^Tb$ ۲) $AA^Tx=A^Tb$ ۳) $A^TAx=Ab$ ۴) $AA^Tx=Ab$

پاسخ: گزینه «۱» طبق قضیه قبل، دستگاه مورد نظر $A^TAx=A^Tb$ است.

قضیه۲: جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ یکتا است اگر و فقط اگر $\text{rank}(A)=n$ باشد. در این حالت جواب مسأله کمترین مربعات برابر $x=(A^TA)^{-۱}A^Tb$ است. باید توجه داشته باشیم که مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ همواره جواب دارد. اگر $\text{rank}(A)=n$ باشد که جواب این مسأله یکتا است. در غیر این صورت مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ بی‌نهایت جواب دارد.

نتیجه: جواب مسأله کمترین مربعات یکتا است اگر و فقط اگر ماتریس ضرایب دارای رتبه کامل باشد.

مثال ۱۰: جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ یکتا است، ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۱» جواب مسأله کمترین مربعات یکتا است، اگر و فقط اگر ماتریس ضرایب دارای رتبه کامل باشد. بنابراین کافی است رتبه ماتریس‌ها را مشخص کنیم.

$$۲=\text{rank}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=۲ \quad , \quad ۳\neq\text{rank}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}=۲$$

$$۲\neq\text{rank}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}=۱ \quad , \quad ۳\neq\text{rank}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}=۲$$

بنابراین فقط ماتریس آمده در گزینه اول دارای رتبه کامل است.

قضیه ۳: اگر دستگاه معادلات $Ax=b$ پایدار باشد، مجموعه جواب آن با مجموعه جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ یکسان است.

نکته ۶: اگر A وارون‌پذیر باشد، جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ ، همان جواب دستگاه $Ax=b$ است و باقی‌مانده جواب صفر است.

قضیه ۴: ماتریس A دارای رتبه کامل نیست اگر و فقط اگر مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ دارای بی‌نهایت جواب باشد.

قضیه ۵: ستون‌های ماتریس $A_{m\times n}$ $(m>n)$ مستقل خطی نیستند اگر و فقط اگر مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ دارای بی‌نهایت جواب باشد.

نکته ۷: استفاده از تجزیه‌ی QR برای حل مسأله کمترین مربعات یک فرآیند پایدار است.

مثال۱۱: در چه صورت مسأله کمترین مربعات دستگاه $\mathbf{Ax=b}$ دارای بی‌نهایت جواب است؟

۱) A دارای رتبه کامل نباشد.
۲) ستون‌های A مستقل خطی نباشند.
۳) سطرهای A مستقل خطی نباشند.
۴) سطرها یا ستون‌های A مستقل خطی نباشند.

پاسخ: گزینه «۱» بنابر قضیه ۵ گزینه‌ی اول درست است. برای گزینه‌ی دوم توجه کنید که ممکن است $A_{m\times n}$ با $m<n$ دارای سطرهای مستقل خطی باشد. برای گزینه‌ی سوم ممکن است، $A_{m\times n}$ با $m>n$ دارای ستون‌های مستقل خطی باشد.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دهم

۱ـ استفاده از تجزیه قائم $A = QR$ که در آن Q یک ماتریس قائم نرمال و R یک ماتریس بالامثلثی است روشی است ....

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) پایدار برای حل مسأله کمترین مربعات ولی نه لزوماً برای حل دستگاه خطی
۲) پایدار برای حل دستگاه خطی ولی نه لزوماً برای حل مسأله کمترین مربعات
۳) پایدار هم برای حل دستگاه خطی و هم برای حل مسأله کمترین مربعات
۴) ناپایدار هم برای حل دستگاه خطی و هم برای حل مسأله کمترین مربعات

۲ـ اگر برازش منحنی $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$ را برای جدول داده‌های زیر به کار ببریم، در این صورت (a,b) کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

x_i	y_i
۰	۱
۰/۵	۰/۲۵
۱	۰/۱۶

۱) $(2,1)$
۲) $(1,2)$
۳) $(1/5,1/08)$
۴) $(1/8,1/05)$

۳ـ $\min\limits_{y} \| Ay - b\|_2$ به‌ازای هر ماتریس مربعی از مرتبه n معادل با حل کدام‌یک از مسائل بهینه‌سازی زیر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\min\limits_{y}(y^TA^TAy - y^TA^Tb)$
۲) $\min\limits_{y}(\frac{1}{2}y^TA^TAy - y^TA^Tb)$
۳) $\min\limits_{y}(\frac{1}{2}y^TA^TAy - y^Tb)$
۴) $\min\limits_{y}(y^TA^TAy - y^Tb)$

۴ـ کدام‌یک از نقاط زیر بر روی خط برازنده با کمترین مجموع مربعات،تعریف شده توسط نقاط جدول زیر قرار دارد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

x_k	y_k
۰	۱
۱	۴
۲	۶
۳	۹

۱) $(2/5,10)$
۲) $(2/5,7/5)$
۳) $(1/5,5)$
۴) $(2/5,2/5)$

۵ـ تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید. با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات، خط برازنده به این تابع جدولی را به‌دست آورید. کدام‌یک از موارد ذیل، جواب درست است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

x	y
۱/۰−	۱/۰۰۰
۰/۱−	۱/۰۹۹
۰/۲	۰/۸۰۸
۱/۰	۱/۰۰۰

۱) $y = 0/1 + 2/05x$
۲) $y = -0/0517 + 3/9070x$
۳) $y = -0/0224 + 0/9773x$
۴) $y = 0/9773 - 0/0224x$

۶ـ جواب مسأله کمترین مربعات $\min\limits_{X} \| QX - b\|_2$ که در آن Q یک ماتریس قائم نرمال است، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $X = Qb$
۲) $X = Q^Tb$
۳) $X = Q^TQb$
۴) $X = QQ^Tb$

۷ـ مسأله کمترین مربعات $\min \| Ax - b\|_2$ دارای جواب .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) یگانه است ولی باقی‌مانده ممکن است یک مقدار بزرگ‌تر از صفر باشد، وقتی A وارون‌پذیر باشد.
۲) یگانه با باقی‌مانده برابر صفر است وقتی A وارون‌پذیر باشد.
۳) نیست، اگر A رتبه کامل نباشد.
۴) همواره دارای جواب به تعداد متناهی است.

۸ـ کدام تابع دارای خطای با حداقل مربعات برای عبور از نقاط زیر می‌باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

x	f(x)
۱	۳
۲	۵
۳	۹

۱) $3x-\frac{1}{5}$ ۲) $3x+\frac{1}{5}$

۳) $3x-\frac{1}{3}$ ۴) $3x+\frac{1}{3}$

۹ـ خط کمترین مربعات برای تابع جدولی

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f(x)	۰	۰/۴۵	۰/۶۳	۰/۷۷	۰/۸۹	۱

کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y=\frac{6/64}{21}x+\frac{3/6}{7}$ ۲) $y=0/86x+0/1$ ۳) $y=0/92x+0/16$ ۴) $y=\frac{6/46}{7}x+\frac{3/4}{21}$

۱۰ـ با داشتن اطلاعات جدول

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۵/۰۴	۸/۱۲	۱۰/۶۴	۱۳/۱۸

مناسب‌ترین خط مستقیم که به تابع $y=f(x)$ نظیر می‌شود را از روش حداقل مربعات به‌دست آورید. $y=ax+b$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $a=0/650$ ، $b=7/520$ ۲) $a=0/694$ ، $b=7/510$ ۳) $a=2/350$ ، $b=2/130$ ۴) $a=2/125$ ، $b=2/345$

۱۱ـ مسأله کمترین مربعات خطی $\min\limits_{u}\|pu-b\|_2$ را درنظر بگیرید که در آن $0\neq b\in\mathbb{R}^m$ ، $0\neq p\in\mathbb{R}^m$ داده شده‌اند. فرض کنید $p^Tb=0$ ، در این صورت u^* جواب مسأله و مقدار مینیمم در جواب بهینه u^* .... هستند. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) هر دو برابر صفر ۲) برابر و غیرصفر ۳) هردو غیرصفر و نابرابر ۴) به‌ترتیب برابر صفر و $\|b\|_2$

۱۲ـ مسأله کمترین مربعات خطی $\min\limits_{t}\|\lambda t-y\|_2$ را درنظر بگیرید که در آن $y,\lambda\in\mathbb{R}^n$ داده شده‌اند و $t\in\mathbb{R}$. این مسأله ... . (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) همواره دارای یک جواب یگانه است. ۲) می‌تواند جواب یگانه نداشته باشد.

۳) جوابی یگانه دارد اگر $\lambda\neq 0$. ۴) همواره بی‌نهایت جواب دارد.

۱۳ـ سهمی با کمترین مربعات برای ۴ نقطه $(-3,3)$ و $(0,1)$ و $(2,1)$ و $(4,3)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۵)

۱) $y=0/192x^2-0/178x+0/850$ ۲) $y=-0/192x^2-0/178x+0/850$

۳) $y=0/178x^2-0/192x+0/850$ ۴) $y=0/178x^2+0/850x-0/192$

۱۴ـ جدول

x	۲	۱	۰	۱−	۲−
y	۳/۱	۲/۱	۳	۶/۱	۱۱/۱

نظیر به تابع $y=a+bx+cx^2$ می باشد، با استفاده از روش حداقل مربعات least square مناسب‌ترین مقادیر a و b و c را محاسبه کنید. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $c=1/098$ و $b=-2/065$ و $a=3/241$ ۲) $c=1/135$ و $b=-2/126$ و $a=3/095$

۳) $c=1/124$ و $b=-2/132$ و $a=3/121$ ۴) $c=1/014$ و $b=-2$ و $a=3/052$

۱۵ـ سهمی با کمترین مربعات برای چهار نقطه $(-3,3)$ و $(0,1)$ و $(2,1)$ و $(4,3)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۶)

۱) $y=0/192495x^2-0/178462x+0/850519$ ۲) $y=-0/178462x^2-0/192495x+0/850519$

۳) $y=0/178462x^2-0/192465x+0/850519$ ۴) $y=-0/192495x^2-0/178462x+0/850519$

۱۶ـ فرض کنید ستون‌های ماتریس A ، $m\times n$ ، مستقل خطی‌اند. در این صورت مقدار $\min\limits_{X}\|AX-b\|_2$ .... است. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) غیرصفر و تعداد جواب‌های X نامتناهی ۲) برابر صفر و جواب X یگانه

۳) برابر صفر و تعداد جواب‌های X نامتناهی ۴) می‌تواند غیرصفر باشد، ولی جواب X یگانه

۱۷ـ فرض کنید $A=QR$ که در آن Q یک ماتریس قائم نرمال $(Q^TQ=I)$ و R یک ماتریس بالامثلثی وارون‌پذیر است. حل مسأله $\min\limits_{C}\|AC-f\|_2^2$ را که در آن f داده شده است، می‌توان با حل یک دستگاه .... به‌دست آورد. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) بالامثلثی ۲) پایین‌مثلثی

۳) قطری ۴) تکین (یعنی ماتریس ضرایب وارون‌ناپذیر)

۱۸ـ بهترین خط با معادله $y = a_0 + a_1x$ که مناسب داده‌های [illegible] $(8,4)$ باشد، کدام است؟ (خط کمترین مربعات که ضرایب آن تا سه رقم اعشار منظور شوند.) (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $y = 1/531 + 0/361x$ ۲) $y = 1/611 + 0/359x$ ۳) $y = 1/646 + 0/376x$ ۴) $y = 1/702 + 0/348x$

۱۹ـ مناسب‌ترین چندجمله‌ای درجه دوم $y = a + bx + cx^2$ که نظیر به جدول داده‌های زیر می‌باشد را به‌دست آورید. به‌ازای $x = -3$ مقدار y را از این چندجمله‌ای به‌دست آورید. می‌توانید از روش حداقل مربعات استفاده نمایید. کدام جواب زیر دقیق‌تر است؟(least square) (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

x	-2	-1	0	1	2
y	$4/1$	$-0/1$	$-1/9$	$-2/1$	$0/1$

۱) $y = 6/41$ ۲) $y = 8/51$ ۳) $y = 10/28$ ۴) $y = 12/90$

۲۰ـ حل کدام معادله، ضرایب a_0 و a_1 در خط $a_0 + a_1x$ را تولید می‌کند تا این خط تقریب حاصل از حل مسأله کمترین مربعات مربوط به داده‌های

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x_i)$	۳	۷	۱۲	۰	۷	۸

باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 136 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{35} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 136 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{35} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{73}{15} \\ \frac{13}{35} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{73}{15} \\ \frac{13}{35} \end{bmatrix}$

۲۱ـ خط $y = \alpha x + \beta$ که به‌ازای آن $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - (\alpha x + \beta)]^2 dx$ کمترین مقدار را دارد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $y = x$ ۲) $y = \pi x$ ۳) $y = \frac{12}{\pi^2}x$ ۴) $y = \frac{24}{\pi^3}x$

۲۲ـ برای داده‌های

x	0	$0/2$	$0/4$	$0/6$	$0/8$
y	$0/9$	$1/9$	$2/8$	$3/3$	$4/2$

، خط حداقل مربعات کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۸)

۱) $y = 4x + 1/02$ ۲) $y = 4x + 2/05$ ۳) $y = 2x + 1/02$ ۴) $y = 2x + 2/05$

۲۳ـ فرض کنید $A = LQ$ که در آن L یک ماتریس پایین‌مثلثی وارون‌پذیر و Q یک ماتریس قائم نرمال است $(Q^TQ = I)$. برای دو مسأله $Ax = b$ و $\min_x \|Ax - b\|_2$، گزینه صحیح را انتخاب کنید. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) هر دو جواب یگانه دارند ولی جواب‌ها ممکن است متفاوت باشند.
۲) اولی ممکن است جواب نداشته باشد ولی دومی بی‌نهایت جواب دارد.
۳) اولی ممکن است جواب نداشته باشد ولی دومی جواب یگانه دارد.
۴) جواب‌های یکسان و یگانه دارند.

۲۴ـ فرض کنید x^* جواب مسأله $\min_x \|Ax - b\|_2$، که در آن $b \neq 0$، دستگاه $Ax = \lambda b$ را به‌ازای برخی λ برقرار می‌سازد. در این صورت مقدار $\min_x \|Ax - b\|_2$ .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) همواره برابر صفر است.
۲) بزرگ‌تر از صفر است اگر و تنها اگر $\lambda \neq 0$.
۳) برابر صفر است اگر و تنها اگر $\lambda = 1$.
۴) باید برابر صفر باشد اگر و تنها اگر $\lambda = 1$.

۲۵ـ فرض کنید A یک ماتریس متقارن است و $A^2 = A$. در این صورت جواب دستگاه $Ax = Ab$ جواب مسأله .... است. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $Ax = \lambda x$ به‌ازای برخی λ ۲) $\min_x \|Ax - b\|_2$ ۳) $A^m x = b$ به‌ازای $m \geq 2$ ۴) $Ax = b$

۲۶ـ فرض کنید بردارهای $x \in \mathbb{R}^n$، $y \in \mathbb{R}^m$ و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ داده شده‌اند. فرض کنید نزدیکترین بردار در امتداد Ax به بردار y، بردار $\overline{x} = \alpha Ax$ باشد، مقدار α کدام است؟ (می‌دانیم که $Ax \neq 0$) (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{x^T y}{x^T x}$ ۲) $\frac{\| A^T y \|_2}{\| Ax \|_2}$ ۳) $\frac{x^T A^T y}{x^T Ax}$ ۴) $\frac{x^T A^T y}{\| Ax \|_2^2}$

۲۷ـ فرض کنید $\| y \|_M = \| My \|_2$ به‌ازای هر بردار y. جواب مسأله $\min_x \| Ax - b \|_M$ از حل دستگاه $A^T Ax = A^T b$ به‌دست می‌آید اگر M ... باشد. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) متقارن ۲) معین مثبت ۳) وارون‌پذیر ۴) قائم نرمال $(M^T M = I)$

۲۸ـ با استفاده از روش حداقل مربعات least square مناسب‌ترین چندجمله‌ای درجه یک $y = a + bx$ نظیر به داده‌های زیر را به‌دست آورید. کدام گزینه زیر دقیق‌تر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
y	۰	۰/۴	۰/۱۶	۰/۳۶	۰/۶۴	۱

۱) $a = -0/51$، $b = 1$ ۲) $a = 1$، $b = -0/51$ ۳) $a = -0/13$، $b = 1$ ۴) $a = 1$، $b = 1$

۲۹ـ خط $y = \alpha x + P$ که به‌ازای آن $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - (\alpha x + \beta)]^2 dx$ کمترین مقدار را دارد کدام است؟ (آزاد ۹۰)

۱) $y = \frac{24}{\pi^3} x$ ۲) $y = \frac{12}{\pi^2} x$ ۳) $y = \pi x$ ۴) $y = x$

۳۰ـ فرض کنید P یک ماتریس متعامد نرمال و b یک بردار داده شده هستند. بردار y به‌طوری‌که Py به b، در نرم اقلیدسی نزدیک‌ترین باشد، برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) Pb ۲) $(P - P^T)b$ ۳) $P^T b$ ۴) βb، به‌ازای β اسکالر

۳۱ـ مسأله کمترین مربعات $\| \lambda u - v \|_2$ را در نظر بگیرید که در آن، u ، $v \in R^n$ و λ مجهول است. جواب مسأله $\min \| \lambda u - v \|_2$ برابر کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{v^T v}{u^T v}$ ۲) $\frac{u^T u}{v^T v}$ ۳) $\frac{u^T u}{u^T v}$ ۴) $\frac{v^T v}{u^T u}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دهم

۱ـ گزینه «۳» تجزیه قائم QR که Q یک ماتریس قائم و R یک ماتریس بالامثلثی است هم برای حل دستگاه خطی و هم برای حل مسأله کمترین مربعات پایدار است.

۲ـ گزینه «۳» چون $ax+b=\frac{۱}{\sqrt{y}}$ بنابراین با تغییر متغیر $Y=\frac{۱}{\sqrt{y}}$ خواهیم داشت $Y=ax+b$. درنتیجه کافی است خط برازنده با حداقل مربعات را به‌دست آوریم. پس با توجه به تابع جدولی و تغییر متغیر، جدول روبه‌رو را خواهیم داشت:

x_i	y_i	Y_i	$x_i^۲$	x_iY_i
۰	۱	۱	۰	۰
۰/۵	۰/۲۵	۲	۰/۲۵	۱
۱	۰/۱۶	۲/۵	۱	۲/۵
$\sum x_i=۱/۵$		$\sum Y_i=۵/۵$	$\sum x_i^۲=۱/۲۵$	$\sum x_iY_i=۳/۵$

بنابراین $\begin{cases}۳b+۱/۵a=۵/۵\\ ۱/۵b+۱/۲۵a=۳/۵\end{cases}$ پس $a=۱/۵$ و $b=۱/۰۸$ است.

۳ـ گزینه «۱» x جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ است اگر و تنها اگر جواب دستگاه $A^TAx=A^Tb$ باشد. بنابراین $A^TAx-A^Tb=۰$ و درنتیجه $x^TA^TAx-x^TA^Tb=۰$ می‌باشد. پس مسأله $\min\limits_y \|Ay-b\|_۲$ با مسأله بهینه‌سازی $\min\limits_y(y^TA^TAy-y^TA^Tb)$ معادل است.

۴ـ گزینه «۳» بنابر نکته ۴ در متن درس میانگین x_iها و y_iها در خط برازنده صدق می‌کند. اما $\overline{x}=\frac{۰+۱+۲+۳}{۴}=۱/۵$ و $\overline{y}=\frac{۱+۴+۶+۹}{۴}=۵$ است. پس نقطه موردنظر $(۱/۵,۵)$ می‌باشد.

۵ـ گزینه «۴» با استفاده از تابع جدولی مسأله، جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم. اگر $y=ax+b$ خط برازنده موردنظر باشد، مقادیر a و b در دستگاه زیر صدق می‌کنند:

x_i	y_i	$x_i^۲$	x_iy_i
−۱/۰	۱/۰۰۰	۱	−۱
−۰/۱	۱/۰۹۹	۰/۰۱	−۰/۱۰۹۹
۰/۲	۰/۸۰۸	۰/۰۴	۰/۱۶۱۶
۱/۰	۱/۰۰۰	۱	۱
۰/۱	۳/۹۰۷	۲/۰۵	۰/۰۵۱۷

$\begin{bmatrix}\sum x_i & ۴\\ \sum x_i^۲ & \sum x_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\end{bmatrix}$ که اگر مقادیر به‌دست آمده را جایگزین کنیم دستگاه $\begin{bmatrix}۰/۱ & ۴\\ ۲/۰۵ & ۰/۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳/۹۰۷\\ ۰/۰۵۱۷\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید. پس $a=-۰/۰۲۲۴$ و $b=۰/۹۷۷۳$ است.

۶ـ گزینه «۲» X یک جواب کمترین مربعات دستگاه $QX=b$ است اگر و تنها اگر جواب دستگاه $Q^TQX=Q^Tb$ باشد. اما چون Q قائم نرمال است پس $Q^TQ=I$ می‌باشد. بنابراین $X=Q^Tb$ است.

۷ـ گزینه «۲» اگر A دارای رتبه کامل باشد، جواب مسأله یکتاست و اگر A دارای رتبه کامل نباشد آن‌گاه مسأله، بی‌نهایت جواب دارد. حال اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه رتبه A کامل است و جواب مسأله کمترین مربعات یکتا خواهد بود. در این حالت $x=A^{-۱}b$ جواب مسأله کمترین مربعات است که به‌ازای آن باقی‌مانده صفر می‌باشد.

۸ـ گزینه «۳» چون $\overline{x}=\frac{۱+۲+۳}{۳}=۲$ و $\overline{y}=\frac{۳+۵+۹}{۳}=\frac{۱۷}{۳}$ پس نقطه $(۲,\frac{۱۷}{۳})$ بر خط برازنده واقع است، اما این نقطه تنها در گزینه (۳) صدق می‌کند. البته می‌توان با تشکیل دستگاه $\begin{bmatrix}۳ & \Sigma x_i\\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma y_i\\ \Sigma y_i x_i\end{bmatrix}$ و از آنجا مقادیر a و b را برای خط کمترین مربعات $y=ax+b$ به‌دست آورد.

۹ـ گزینه «۴» اگر $y=a_1x+a_0$، خط کمترین مربعات باشد، a_0 و a_1 را می‌توان از حل دستگاه $\begin{bmatrix}\sum 1 & \sum x_i\\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum f_i\\ \sum x_i f_i\end{bmatrix}$ به‌دست آورد. با استفاده از تابع جدولی اطلاعات زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum 1=۶\ ,\ \sum x_i=۳\ ,\ \sum x_i^2=۲/۲\ ,\ \sum f_i=۳/۷۴\ ,\ \sum x_i f_i=۲/۵۱۶$$

حال با استفاده از روش کرامر دستگاه را حل می‌کنیم.

$$a_0=\frac{\begin{vmatrix}۳/۷۴ & ۳\\ ۲/۵۱۶ & ۲/۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۶ & ۳\\ ۳ & ۲/۲\end{vmatrix}}=\frac{۳/۴}{۲۱}\ ,\ a_1=\frac{\begin{vmatrix}۶ & ۳/۷۴\\ ۳ & ۲/۵۱۶\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۶ & ۳\\ ۳ & ۲/۲\end{vmatrix}}=\frac{۶/۴۶}{۷}$$

بنابراین خط کمترین مربعات در گزینه (۴) آمده است.

۱۰ـ هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از تابع جدولی اطلاعات زیر به‌دست می‌آید. اگر $y=ax+b$ خط کمترین مربعات باشد، a و b را می‌توان از حل دستگاه $\begin{bmatrix}\sum 1 & \sum x_i\\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_i y_i\end{bmatrix}$ به‌دست آورد. با استفاده از روش کرامر مقدار آن‌ها چنین خواهد بود:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	۱	۵/۰۴	۱	۵/۰۴
	۲	۸/۱۲	۴	۱۶/۲۴
	۳	۱۰/۶۴	۹	۳۱/۹۲
	۴	۱۳/۱۸	۱۶	۵۲/۷۲
Σ	۱۰	۳۶/۹۸	۳۰	۱۰۵/۹۲

$$b=\frac{\begin{vmatrix}۳۶/۹۸ & ۱۰\\ ۱۰۵/۹۲ & ۳۰\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۴ & ۱۰\\ ۱۰ & ۳۰\end{vmatrix}}=۲/۵۱۰\ ,\ a=\frac{\begin{vmatrix}۴ & ۳۶/۹۸\\ ۱۰ & ۱۰۵/۹۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۴ & ۱۰\\ ۱۰ & ۳۰\end{vmatrix}}=۲/۶۹۴$$

۱۱ـ گزینه «۴» طبق قضیه ۳، u^* باید در $p^Tpu^*=p^Tb$ صدق کند. چون طبق فرض $p^Tb=0$ است. پس $p^Tpu^*=0$ و درنتیجه $u^*=0$ می‌باشد. همچنین مقدار مینیمم در جواب بهینه برابر است با: $\|pu^*-b\|_2=\|p\times 0-b\|_2=\|b\|_2$

۱۲ـ گزینه «۳» چون $\|\lambda t-y\|_2\geq 0$ است پس کافی است مسأله $\min\limits_t\|\lambda t-y\|_2^2$ را بررسی کنیم. فرض کنیم $\varphi(t)=\|\lambda t-y\|_2^2=\sum\limits_{i=1}^n(\lambda_i t-y_i)^2$ باشد. حال برای یافتن مینیمم $\varphi(t)$، نقاط بحرانی آن را بررسی می‌کنیم. چون $\varphi'(t)=2\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(\lambda_i t-y_i)=0$ درنتیجه، $t=\frac{\sum\lambda_i y_i}{\sum\lambda_i^2}$ است. اما $\varphi''(t)=2\sum\lambda_i^2>0$ می‌باشد پس این نقطه مینیمم‌کننده است.

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به جدول مقابل دستگاه معادلات

$$\begin{cases}۴a+۳b+۲۹c-۸=0\\ ۳a+۲۹b+۴۵c-۵=0\\ ۲۹a+۴۵b+۳۵۳c-۷۹=0\end{cases}$$

به‌دست می‌آید که در آن $y=a+bx+cx^2$ معادله سهمی با کمترین مربعات می‌باشد. با حل این دستگاه به گزینه (۳) می‌رسیم.

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
−۳	۳	۹	−۲۷	۸۱	−۹	۲۷
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۴	۸	۱۶	۲	۴
۴	۳	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۲	۴۸
۳	۸	۲۹	۴۵	۳۵۳	۵	۷۹

۱۴ـ گزینه «۴» اگر $y=a+bx+cx^2$ سهمی کمترین مربعات برای نقاط $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ باشد آن‌گاه:

$$\sum_{k=1}^n(a+bx_k+cx_k^2-y_k)=0\qquad \sum_{k=1}^n(ax_k+bx_k^2+cx_k^3-y_kx_k)=0$$

$$\sum_{k=1}^n(ax_k^2+bx_k^3+cx_k^4-y_kx_k^2)=0$$

با توجه به جدول داده‌ها جدول زیر به‌دست می‌آید.

x_i	y_i	$x_i^۲$	$x_i^۳$	$x_i^۴$	x_iy_i	$y_ix_i^۲$
−۲	۱۱/۱	۴	−۸	۱۶	−۲۲/۲	۴۴/۴
−۱	۶/۱	۱	−۱	۱	−۶/۱	۶/۱
۰	۳	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۲/۱	۱	۱	۱	۲/۱	۲/۱
۲	۳/۱	۴	۸	۱۶	۶/۲	۱۲/۴
$\sum x_i =$ ۰	$\sum y_i =$ ۲۵/۴	$\sum x_i^۲ =$ ۱۰	$\sum x_i^۳ =$ ۰	$\sum x_i^۴ =$ ۳۴	$\sum x_iy_i =$ −۲۰	$\sum y_ix_i^۲ =$ ۶۵

بنابراین a و b و c در دستگاه $\begin{cases} ۵a+۱۰c-۲۵/۴=۰ \\ ۱۰b+۲۰=۰ \\ ۱۰a+۳۴c-۶۵=۰ \end{cases}$ صدق می‌کنند. درنتیجه $a=۳/۰۵۲$ و $b=-۲$ و $c=۱/۰۱۴$ است.

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به جدول مقابل دستگاه معادلات $\begin{cases} ۴a+۳b+۲۹c-۸=۰ \\ ۳a+۲۹b+۴۵c-۵=۰ \\ ۲۹a+۴۵b+۳۵۳c-۷۹=۰ \end{cases}$ به‌دست می‌آید که در آن $y=a+bx+cx^۲$ معادله سهمی با کمترین مربعات می‌باشد. با حل این دستگاه به گزینه (۳) می‌رسیم.

x_i	y_i	$x_i^۲$	$x_i^۳$	$x_i^۴$	x_iy_i	$x_i^۲y_i$
−۳	۳	۹	−۲۷	۸۱	−۹	۲۷
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۴	۸	۱۶	۲	۴
۴	۳	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۲	۴۸
۳	۸	۲۹	۴۵	۳۵۳	۵	۷۹

۱۶ـ گزینه «۴» ستون‌های ماتریس A، مستقل خطی‌اند پس رتبه کامل دارد. درنتیجه جواب مسأله کمترین مربعات $\min_X \|AX-b\|_۲$ یکتاست. از سوی دیگر با توجه به A می‌تواند این مینیمم غیرصفر باشد.

۱۷ـ گزینه «۱» چون Q و R وارون‌پذیرند، پس $A=QR$ نیز وارون‌پذیر است. بنابراین جواب مسأله $\min_C \|AC-f\|_۲^۲$ با جواب مسأله $AC=f$ برابر است. پس کافی است جواب $QRC=f$ را بیابیم. اگر Q^T را از چپ در رابطه ضرب کنیم $RC=Q^Tf$ به‌دست می‌آید. پس C جواب یک دستگاه بالامثلثی است.

۱۸ـ گزینه «۳» با استفاده از روش کمترین مربعات به‌دستگاه $\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \end{bmatrix}$ می‌رسیم که با جایگذاری مقادیر، دستگاه $\begin{bmatrix} ۵ & ۱۸ \\ ۱۸ & ۱۱۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۷۱ \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. با حل دستگاه به روش کرامر $a_۰ \simeq \frac{۳۷۲}{۲۲۶} \simeq ۱/۶۴۶$ و $a_۱ = \frac{۸۵}{۲۲۶} \simeq ۰/۳۷۶$ خواهد بود.

۱۹ـ گزینه «۳» اگر $y=a+bx+cx^۲$ سهمی کمترین مربعات برای نقاط $(x_۱,y_۱),\dots,(x_n,y_n)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{k=۱}^{n}(a+bx_k+cx_k^۲-y_k)=۰ \quad \text{و} \quad \sum_{k=۱}^{n}(ax_k+bx_k^۲+cx_k^۳-y_kx_k)=۰ \quad \text{و} \quad \sum_{k=۱}^{n}(ax_k^۲+bx_k^۳+cx_k^۴-y_kx_k^۲)=۰$$

با استفاده از جدول داده‌ها، جدول زیر به‌دست می‌آید.

x_k	y_k	$x_k^۲$	$x_k^۳$	$x_k^۴$	y_kx_k	$y_kx_k^۲$
−۲	۴/۱	۴	−۸	۱۶	−۸/۱	۱۶/۴
−۱	−۰/۱	۱	−۱	۱	۰/۱	−۰/۱
۰	−۱/۹	۰	۰	۰	۰	۰
۱	−۲/۱	۱	۱	۱	−۲/۱	−۲/۱
۲	۰/۱	۴	۸	۱۶	۰/۲	۰/۴
$\sum x_k =$ ۰	$\sum y_k =$ ۰/۱	$\sum x_k^۲ =$ ۱۰	$\sum x_k^۳ =$ ۰	$\sum x_k^۴ =$ ۳۴	$\sum y_kx_۴ =$ −۹/۹	$\sum y_kx_k^۲ =$ ۱۴/۶

بنابراین دستگاه موردنظر به‌صورت $\begin{cases} ۵a+۱۰c-۰/۱=۰ \\ ۱۰b+۹/۹=۰ \\ ۱۰a+۳۴c-۱۴/۶=۰ \end{cases}$ است که از آن $a=-۲/۰۳۶$ و $b=-۰/۹۹$ و $c=۱/۰۲۸$ به‌دست می‌آید. بنابراین $y(-۳)=۹/۲۵۲+۲/۹۷-۲/۰۳۶=۱۰/۱۸۶\simeq۱۰/۲۸$ می‌باشد.

۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به جدول زیر دستگاه مورد نظر به‌صورت $\begin{bmatrix} ۶ & ۲۱ \\ ۲۱ & ۹۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۷ \\ ۱۳۶ \end{bmatrix}$ است.

x_i	y_i	$x_i^۲$	x_iy_i
۱	۳	۱	۳
۲	۷	۴	۱۴
۳	۱۲	۹	۳۶
۴	۰	۱۶	۰
۵	۷	۲۵	۳۵
۶	۸	۳۶	۴۸
$\sum x_i=۲۱$	$\sum y_i=۳۷$	$\sum x_i^۲=۹۱$	$\sum x_iy_i=۱۳۶$

۲۱ـ گزینه «۴» روش اول: عبارت موردنظر را با $E(\alpha,\beta)$ نامگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$E(\alpha,\beta)=\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}[\sin x-(\alpha x+\beta)]^۲dx=\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}[\sin^۲ x-۲\alpha x\sin x-۲\beta\sin x+\alpha^۲x^۲+۲\alpha\beta x+\beta^۲]dx$$

با توجه به زوج و فرد بودن توابع موجود در انتگرال خواهیم داشت:

$$E(\alpha,\beta)=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin^۲ x-۲\alpha x\sin x+\alpha^۲x^۲+\beta^۲)dx=[x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x+۴\alpha x\cos x-۴\alpha\sin x+\frac{۲\alpha^۲}{۳}x^۳+۲\beta^۲x]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$
$$=\frac{\pi}{۲}-۴\alpha+\frac{۲\alpha^۲}{۳}(\frac{\pi}{۲})^۳+\beta^۲\pi$$

چون مینیمم E موردنظر است پس $\frac{\partial E}{\partial\alpha}=۰$ و $\frac{\partial E}{\partial\beta}=۰$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$۰=\frac{\partial E}{\partial\alpha}=-۴+\frac{۴\alpha}{۳}(\frac{\pi}{۲})^۳\Rightarrow\alpha=\frac{۲۴}{\pi^۳} \quad \text{و} \quad ۰=\frac{\partial E}{\partial\beta}=۲\beta\pi\Rightarrow\beta=۰$$

توجه کنید که با توجه به گزینه‌ها می‌توانستیم β را برابر صفر فرض کنیم.

روش دوم: با توجه به گزینه‌ها می‌توانیم β را برابر صفر فرض کنیم. برای مینیمم شدن مقدار انتگرال باید داشته باشیم:

$$۰=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin x-\alpha x)^۲dx=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sin x-\alpha x)^۲dx=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۲(\sin x-\alpha x)(-x)dx=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(-x\sin x+\alpha x^۲)dx$$

بنابراین $\alpha=\dfrac{\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}x\sin x\,dx}{\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}x^۲dx}=\frac{۲۴}{\pi^۳}$ است.

۲۲ـ گزینه «۱» اگر $y=a_۰+a_۱x$ خط کمترین مربعات باشد، آن‌گاه $a_۰$ و $a_۱$ از دستگاه $\begin{bmatrix} \sum ۱ & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آیند. با جایگذاری مقادیر دستگاه $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۳/۱ \\ ۶/۸۴ \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود که با استفاده از روش کرامر $a_۰=\frac{۲/۰۴}{۲}=۱/۰۲$ و $a_۱=\frac{۸}{۲}=۴$ خواهند بود.

۲۳ـ گزینه «۴» چون L و Q وارون‌پذیرند پس $A=LQ$ نیز وارون‌پذیر است و جواب دو مسأله یکسان و برابر $x=A^{-1}b$ است.

۲۴ـ گزینه «۳» فرض کنیم λ مقداری باشد که به‌ازای آن x^* جواب دستگاه $Ax=\lambda b$ باشد.

$$\|Ax^*-b\|_2=\|\lambda b-b\|_2=\|(\lambda-1)b\|_2=|\lambda-1|\,\|b\|_2$$

چون $b\neq 0$ پس $\|b\|\neq 0$ است. درنتیجه $\|Ax^*-b\|_2$ برابر صفر است اگر و تنها اگر $\lambda-1=0$ یا $\lambda=1$ باشد.

۲۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم جواب دستگاه $A^TAx=A^Tb$، همان جواب مسأله کمترین مربعات $\min\limits_x\|Ax-b\|_2$ است. چون A متقارن است پس $A^T=A$ می‌باشد و چون $A^2=A$ است پس $A^TA=A^2=A$ می‌باشد. درنتیجه جواب دستگاه $Ax=Ab$ همان جواب مسأله کمترین مربعات $\min\limits_x\|Ax-b\|_2$ است.

۲۶ـ گزینه «۴» بنابر فرض مسأله، $\overline{x}=\alpha Ax=A(\alpha x)$ است. پس αx یک جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=y$ است. بنابراین، $A^TA(\alpha x)=A^Ty$ می‌باشد و از آن، $\alpha A^TAx=A^Ty$ است. حال طرفین رابطه را از چپ در x^T ضرب می‌کنیم.

$$\alpha x^TA^TAx=x^TA^Ty \Rightarrow \alpha(Ax)^T(Ax)=x^TA^Ty$$

درنتیجه، $\alpha\|Ax\|_2^2=x^TA^Ty$، پس $\alpha=\dfrac{x^TA^Ty}{\|Ax\|_2^2}$ است.

۲۷ـ گزینه «۴» چون به‌ازای ماتریس قائم نرمال (متعامد) داریم: $\|My\|_2=\|y\|_2$، پس به‌ازای این گونه ماتریس‌ها نرم $\|\cdot\|_M$ با نرم $\|\cdot\|_2$ یکسان است.

۲۸ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از فرمول ذکر شده در سؤال بقیهٔ داده‌های لازم را محاسبه کرده و با فرمول جواب را محاسبه می‌کنیم، داریم:

k	x_ky_k	x_k^2	y_k	x_k
۱	۰	۰	۰	۰
۲	۰/۰۰۸	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۲
۳	۰/۰۶۴	۰/۱۶	۰/۱۶	۰/۴
۴	۰/۲۱۶	۰/۳۶	۰/۳۶	۰/۶
۵	۰/۵۱۲	۰/۶۴	۰/۶۴	۰/۸
۶	۱	۱	۱	۱
$\sum$	۱/۸	۲/۲	۲/۲	۳

می‌دانیم ضرایب چندجمله‌ای $y=a+bx$ در دستگاه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}x_k^2\right)b+\left(\sum\limits_{k=1}^{N}x_k\right)a=\sum\limits_{k=1}^{N}x_ky_k\\ \left(\sum\limits_{k=1}^{N}x_k\right)b+Na=\sum\limits_{k=1}^{N}y_k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2/2b+3a=1/8\\ 3b+6a=2/2\end{cases}$$

با حل دستگاه $a=-0/13$ و $b=1$ به‌دست می‌آید.

۲۹ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم: $S(\alpha,\beta)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(\alpha x+\beta)]^2dx$ و برای اکسترمم (مینیمم) کردن چنین انتگرالی باید α و β مناسب را پیدا کنیم. پس این انتگرال را به‌عنوان تابعی از دو متغیر α و β درنظر می‌گیریم و می‌دانیم برای مینیمم شدن باید $\dfrac{\partial S}{\partial\beta}=\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=0$ باشد، پس داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-2x[\sin x-\alpha x-\beta]dx=0\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x[\sin x-\alpha x-\beta]dx=0$$