مدرسان شریف

فصل اول

«مقدمه آماری»

مقدمه

آمار (Statistics) علم و هنر جمع‌آوری، تنظیم، تجزیه تحلیل و تفسیر مشاهدات حاصل از سرشماری و آزمایش است. جمع‌آوری مشاهدات (Collection of data) مرحله تهیه اندازه‌ها یا شمارش‌ها می‌باشد. نتایج قابل اطمینان فقط از مشاهدات نمونه‌ای که به طور صحیح جمع‌آوری شده باشند بدست می‌آید. تنظیم مشاهدات (Organization of data) شامل معرفی اندازه‌ها یا شمارش گردآوری شده در قالب مناسب، جهت استنتاج نهایی و منطقی می‌باشد. در حقیقت مشاهدات بوسیله جداول و نمودارها نشان داده می‌شوند. در تجزیه مشاهدات (Analysis of data) اطلاعات ارقام قابل اطمینان به صورت ارقام خلاصه شده و قابل درک از اندازه‌ها یا اعداد استخراج می‌شوند.

از مهمترین اندازه‌هایی که برای این منظور به کار می‌روند می‌توان به میانگین، میانه، دامنه تغییرات و انحراف معیار اشاره کرد. مرحله آخر در یک محاسبه آماری تفسیر مشاهدات (Interpretation of data) می‌باشد. در این مرحله نتیجه‌گیری از تجزیه مشاهدات به عمل می‌آید. همچنین اطلاعات بدست آمده از این مجموعه کوچک از مواد مورد بررسی (نمونه)، به مجموعه بزرگ از همان مواد (جمعیت)، تعمیم داده می‌شود.

درسنامه (۱): تعریف پارامترهای آماری

محاسبات آماری را می‌توان به دو بخش آمار توصیفی و آمار استنباطی تقسیم کرد. هدف از آمار توصیفی خلاصه کردن و شرح ویژگی‌های یک سری از داده‌ها یا مشاهدات است. از مهمترین روش‌های آماری توصیفی می‌توان رسم انواع نمودار، تجزیه غیر استنباطی داده‌ها، محاسبه میانگین‌ها، واریانس و انحراف استاندارد مشاهدات را نام برد. به طور مثال میانگین معدل ۵۰ دانش آموز ابتدایی به صورت نمودار گزارش می‌گردد.

هدف از آمار استنباطی اطلاع از ویژگی‌های جمعیت از طریق اندازه‌گیری ویژگی‌های نمونه است. به طور مثال با اندازه‌گیری میانگین معدل ۵۰ دانش آموز از ۵۰۰ دانش آموز یک مدرسه ابتدایی، میانگین معدل دانش آموزان آن مدرسه تعیین می‌گردد.

جمعیت و نمونه

به مجموعه بزرگی از افراد که دست کم دارای یک صفت مشترک باشند جمعیت (Population) گفته می‌شود. اگر شمار افراد یک جمعیت مشخص باشد آن را جمعیت محدود (Finite) و اگر تعداد افراد جمعیت بی‌شمار باشد آن جمعیت را نامحدود (Infinite) می‌نامند.

به مجموعه افراد یا موادی که از یک جمعیت انتخاب می‌شوند نمونه (Sample) می‌گویند. در اصل از آنجایی که جمعیت‌های مورد استفاده برای پژوهشگران غالباً بسیار بزرگ است و اندازه‌گیری کلیه افراد یک جمعیت امکان پذیر نیست به منظور بررسی خصوصیات، جمعیت تعدادی از افراد را به عنوان نمونه انتخاب و ارزیابی می‌کنند.

* روش صحیح انتخاب نمونه، انتخاب تصادفی است تا کلیه افراد جمعیت شانس مساوی در تشکیل آن داشته باشند.
* هرچه تعداد افراد در نمونه بیشتر باشد برآورد ویژگی جمعیت دقیق‌تر خواهد بود. اگر اندازه نمونه بیشتر از ۳۰ باشد آن را نمونه بزرگ و اگر کمتر از ۳۰ باشد آن را نمونه کوچک می‌نامند.

معیار جمعیت و نمونه

کمیتی که ویژگی جمعیت را نشان می‌دهد معیار جمعیت یا پارامتر (Parameter) نامیده می‌شود. معیار نمونه ((Estimator (Sample criterion)) نیز ویژگی نمونه را نمایان می‌سازد. مقدار عددی معیار جمعیت (پارامتر)، ثابت و معیار نمونه قابل نوسان است چرا که نمونه‌های برداشته شده از یک جمعیت الزاماً مشابه نیستند.

معیار نمونه را با حروف کوچک لاتین و معیار جمعیت را با حروف کوچک یونانی نشان می‌دهند. (جدول زیر)

معیارهای جمعیت و نمونه

	میانگین	واریانس	انحراف معیار
معیارجمعیت	$m(\mu)$	σ^2	σ
معیار نمونه	$\bar{x}$	s^2	s

ـ داده‌ها (مشاهدات) (Data): اعداد و ارقامی هستند که از اندازه‌گیری صفت یا متغیر مورد مطالعه در افراد یا از شانس افراد برای داشتن یک صفت حاصل می‌شوند.

ـ متغیر (Variate) (Variable): عبارت است از عامل یا صفتی که ارزش آن از فردی به فرد دیگر تغییر کند. انواع تقسیم‌بندی متغیرها به شرح زیر است:

۱ـ متغیر تصادفی و ثابت: اگر مقادیر به طور تصادفی از جمعیت برداشته شود آن متغیر را متغیر تصادفی (Random Variable) می‌نامند که اطلاعات آن قابل تعمیم به جامعه است در حالی که اگر مقادیر یک متغیر به طور غیر تصادفی و توسط پژوهشگر تعیین شود آن را متغیر ثابت (Fixed Variable) می‌گویند.

۲ـ متغیر کمّی و کیفی: هنگامی که ارزش متغیر با اعداد و ارقام و افراد درون جمعیت به چند نوع مجزا تقسیم شوند به آن متغیر کیفی (Qualitive Variable) می‌گویند. بالعکس در متغیر کمّی (Quantitative Variable) ارزش افراد توسط اعداد بدست می‌آید.

۳ـ متغیر پیوسته و ناپیوسته: در متغیر پیوسته (Continuous Variable) افراد مورد اندازه قرار گرفته و می‌توانند هر مقدار ممکن در دامنه تغییرات (Range of Variable) (اختلاف دو حد بالا و پایین) را به خود اختصاص دهند. در متغیرهای ناپیوسته (Discrete Variable) ارزش افراد از طریق شمارش بدست آمده و قابل اندازه‌گیری نیست. مقادیر حاصل جدا از هم بوده و در دسته‌های مجزا گروه‌بندی می‌شوند.

۴ـ متغیرهای مستقل و غیر مستقل: مقادیر متغیر مستقل (Independent Variable) معمولاً توسط آزمایش کننده تعیین می‌شود و مقادیر متغیر وابسته (Dependent Variable) بستگی به سطوح انتخابی متغیر مستقل دارد.

نکته۱: متغیر کیفی همواره ناپیوسته است و متغیر کمّی غالباً پیوسته است.

مثال۱: در مدل آماری زیر، کدام عامل متغیر کمکی (کوواریت) محسوب می‌شود؟ (علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۵)

(باقی‌مانده‌ها+ روزهای شیردهی+ نوبت زایش+ تیمار+ میانگین = تولید شیر)

۱) روزهای شیردهی ۲) تیمار و نوبت زایش ۳) تیمار و روزهای شیردهی ۴) نوبت زایش و روزهای شیردهی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مدل آماری (باقی‌مانده‌ها + روزهای شیردهی + نوبت زایش + تیمار + میانگین = تولید شیر)، روزهای شیردهی به عنوان عامل کوواریت محسوب می‌شود چون بر روی ماده آزمایشی تأثیر می‌گذارد.

نکته۲: متغیر وابسته همواره تصادفی و متغیر مستقل اکثراً ثابت است.

انواع مقیاس اندازه‌گیری

۱ـ مقیاس اسمی (Nominal): در این مقیاس اعداد، را به عنوان اسم به کار می‌برند. این اعداد، مقادیر کمّی، واقعی نیستند و فقط اختلاف بین افراد را نشان می‌دهند از این مقیاس برای گروه‌بندی افراد استفاده می‌شود.

۲ـ مقیاس رتبه‌ای (Ordinal): این مقیاس علاوه بر آنکه مانند مقیاس اسمی تفاوت‌ها را نمایان می‌سازد افراد و اشیاء را در طول یک مقیاس کمّی مرتب می‌کند.

۳ـ مقیاس فاصله‌ای (Interval): این مقیاس علاوه بر داشتن دو ویژگی مقیاس‌های قبلی فاصله بین داده‌های اندازه‌گیری شده در آن یکسان است.

۴ـ مقیاس نسبتی (Ratio): در این مقیاس علاوه بر آنکه کلیه ویژگی‌های سه مقیاس قبلی وجود دارد، نقطه صفر واقعی بوده و امکان گزارش داده‌ها به صورت نسبت وجود دارد.

نکته۳: داده‌های کیفی بر اساس مقیاس اسمی اندازه‌گیری می‌شوند در حالی که داده‌های کمّی بر مبنای سه مقیاس دیگر قابل اندازه‌گیری است. اطلاع از نوع مقیاس اندازه‌گیری، نقش مهمی در انتخاب روش‌های آماری مناسب برای تجزیه داده‌ها ایفا می‌کند.

نکته۴: داده‌های دارای مقیاس اسمی و رتبه‌ای فاقد توزیع نرمال بوده و برای تجزیه آماری آن‌ها از روش‌های آماری غیر پارامتری استفاده می‌شود.

ـ علامت جمع (Summation notatio:n): اگر متغیری با x نشان داده شود مشاهدات متوالی n بار آن به صورت $X_۱$ (X اندیس ۱)، $X_۲$، $X_۳$ و ... تا X_n نوشته می‌شود. در حقیقت مشاهده iام به صورت X_i نمایش داده می‌شود. برای نشان دادن جمع این مشاهدات از رابطه زیر استفاده می‌شود.

* حرف یونانی سیگما به عنوان علامت جمع استفاده می‌شود.

$$X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$$

* $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ نشان دهنده جمع عباراتی است که اولین آن‌ها دارای اندیس برابر عدد صحیح زیر سیگما یعنی ۱ و آخرین آن‌ها عدد صحیح بالای سیگما یعنی n می‌باشد.

خواص علامت جمع:

۱ـ جمع یک جمله که خود شامل دو عبارت یا بیشتر باشد برابر است با مجموع جمع تک تک عبارات.

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i + Y_i + Z_i) = \sum_{i=۱}^{n} X_i + \sum_{i=۱}^{n} Y_i + \sum_{i=۱}^{n} Z_i$$

۲ـ جمع حاصلضرب یک عدد ثابت در یک متغیر برابر است با حاصلضرب عدد ثابت در جمع متغیر.

$$\sum_{i=۱}^{n} aX_i = a\sum_{i=۱}^{n} X_i$$

معیارهای تمایل به مرکز

میانگین((Mean (Arithmetic Mean): برای محاسبه میانگین (میانگین حسابی) n مشاهده از X_i تا X_n از رابطه زیر استفاده می‌کنند:

$$\mu = m = \frac{\sum X_i}{n}$$

خواص میانگین حسابی:

۱ـ اگر از تمامی مشاهدات عدد ثابتی مانند C کم یا اضافه شود، به میانگین آن اعداد نیز عدد ثابت C کم یا اضافه می‌شود.

۲ـ اگر تمامی مشاهدات در عدد ثابتی مانند C ضرب یا تقسیم شوند، میانگین آن اعداد نیز در عدد ثابت C ضرب یا تقسیم می‌شود.

۳ـ مجموعه انحراف معیار مشاهدات از میانگین برابر صفر است.

برای محاسبه میانگین از روی جدول فراوانی که در آن f_i فراوانی مشاهده را نشان می‌دهد از رابطه زیر استفاده می‌شود: (در این رابطه $n = \sum f_i$)

$$\mu = m = \frac{\sum X_i f_i}{n}$$

میانگین حسابی را معمولاً معدل نیز می‌نامند. اصطلاح معدل برای سایر اندازه‌های تمایل به مرکز به کار می‌رود. بنابراین هرگاه این اصطلاح به کار رود خواننده باید از متن پی ببرد که منظور کدام اندازه تمایل به مرکز است.

میانه (Mediun): میانه یک سری N عددی که به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب شده باشد عبارت است از حد وسط آن سری اگر N فرد باشد و یا میانگین دو عدد وسط اگر N زوج باشد.

میانگین هندسی (Geometric Mean): میانگین هندسی یکی از اندازه‌های تمایل به مرکز است که کمتر از سایر اندازه‌های تمایل به مرکز مورد استفاده قرار می‌گیرد. میانگین هندسی از رابطه مقابل محاسبه می‌گردد:

$$M_g = \sqrt[n]{X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n}$$

نکته۵: از میانگین هندسی برای مشاهداتی استفاده می‌شود که در آن، نسبت هر دو عدد متوالی ثابت یا تقریباً ثابت است.

میانگین هارمونیک (Harmonic mean): از میانگین هارمونیک برای اندازه‌گیری متوسط سرعت هنگامی که فواصل مربوط به آن‌ها برابر باشد، استفاده می‌شود. میانگین هارمونیک اعداد از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$M_h = \frac{n}{\frac{۱}{X_۱} + \frac{۱}{X_۲} + \cdots + \frac{۱}{X_۱}} = \frac{n}{\sum_{i=۱}^{N} \frac{۱}{X_i}}$$

مد (Mode) (نما):

دسته یا دسته‌هایی که فراوانی آن‌ها از همه بیشتر باشد را مد (Modal class) می‌نامند. ممکن است برخی مشاهدات دارای یک مد، چند مد یا بدون مد باشند.

ارزش‌های معیارهای تمایل به مرکز

۱ـ متداول‌ترین معیار تمایل به مرکز، میانگین حسابی است که محاسبه و تعریف آن آسان است و تمامی اندازه‌ها را شامل می‌شود.

۲ـ از نظر اهمیت، میانگین در رتبه اول و میانه و مد در رتبه‌های بعدی قرار دارد.

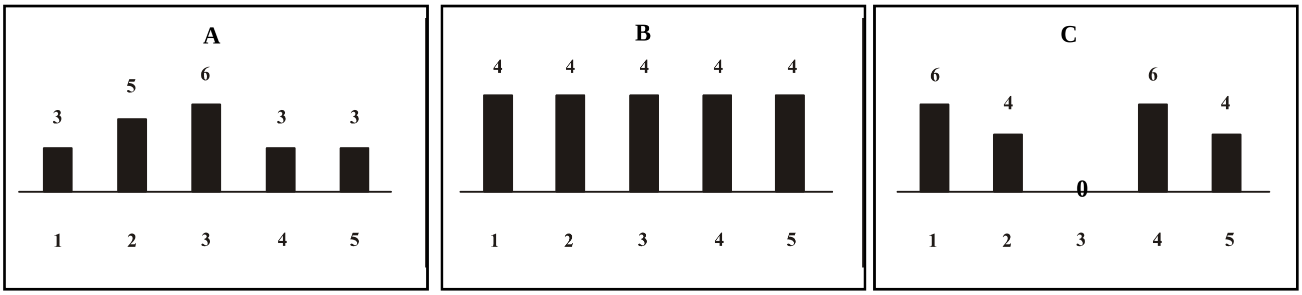
۳ـ میانگین حسابی نسبت به میانه و مد دارای ثبات بیشتری است. این مسئله را این گونه می‌توان توضیح داد که اگر از یک جمعیت چند نمونه گرفته شود و میانگین و مد آن‌ها محاسبه شود میانگین‌ها نسبت به میانه و مد به هم نزدیکترند.

پارامترهای پراکندگی

اگرچه میانگین حسابی یک پارامتر ایده‌آل تمایل به مرکز است، به تنهایی تصویر روشنی از یک سری از متغیرها یا توزیع آن‌ها را بدست نمی‌دهد. در جدول ۲ میانگین حسابی سه دسته عددی A، B و C آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میانگین حسابی سه دسته با یکدیگر برابر و مساوی ۴ ($m = ۴$) می‌باشد که نشان‌دهنده یکسانی این سه دسته اعداد با هم است در صورتی که اگر نمودار توزیع فراوانی این اعداد را ترسیم کنیم خواهیم دید که سه دسته عدد A، B و C با یکدیگر متفاوتند. این مثال و مثال‌های نظیر آن اهمیت پارامترهای پراکندگی را نشان می‌دهد.

میانگین و داده‌های سه گروه A، B و C

A	B	C
۳	۴	۶
۵	۴	۴
۶	۴	۰
۳	۴	۶
۳	۴	۴
$m = ۴$	$m = ۴$	$m = ۴$



نمودارهای ستونی داده‌های جدول

دامنه (Range): برای یک سری از اعداد دامنه عبارت از تفاوت بین بزرگترین و کوچکترین آن‌ها می‌باشد. با وجود آن که دامنه نشانه‌ای از پراکندگی مشاهدات حول میانگین را در اختیار می‌گذارد ولی منحصراً به مقادیر فراوانی بستگی داشته که ممکن است صرفاً تصادفی باشد. همچنین دامنه در مورد توزیع متغیرها بین این دو حد یا میزان تجمع آن‌ها در اطراف میانگین اطلاعاتی بدست نمی‌دهد.

میانگین انحرافات (Mean deviation): یکی دیگر از پارامترهای پراکندگی مجموع انحرافات یک سری داده از میانگین آن‌ها یعنی $\sum(X_i - m)$ می‌باشد. این عبارت ممکن است همیشه برابر صفر باشد برای جلوگیری از این امر از علامت جبری انحراف صرف نظر می‌کنیم. متوسط انحرافات که همگی مثبت در نظر گرفته می‌شوند، میزان پراکندگی داده‌ها در اطراف میانگین را تعیین کرده و به نام میانگین انحرافات شناخته می‌شوند و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$M_D = \frac{\sum |X_i - m|}{N}$$

واریانس(Variance) و انحراف معیار(Standard deviation): یک روش دیگر برای تبدیل اعداد مثبت و منفی از عبارت $\sum(X_i - m)^۲$ است که در این حالت تمامی اعداد مثبت می‌شوند. میانگین مجذور انحرافات را واریانس می‌نامند که از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$S^۲ = \sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i - m)^۲}{N}$$

نکته۶: واریانس یکی از پارامترهای پراکندگی است که در تجزیه‌های آماری زیاد به کار می‌رود و بوسیله واحدهایی که مجذور واحدهای اصلی هستند بیان می‌شود.

برای نشان دادن اندازه پراکندگی در همان واحد داده‌های اصلی و میانگین از انحراف معیار استفاده می‌شود که از جذر واریانس بدست می‌آید:

$$S = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i - m)}{N}}$$

واریانس و انحراف معیار دارای کلیه مزایای میانگین انحرافات می‌باشند و به علاوه برای عملیات جبری مناسب هستند. بنابراین واریانس و انحراف معیار متداول ترین پارامترهای پراکندگی به شمار می‌روند.

نکته۷: برای بررسی میزان دقت، کافی است واریانس گروه‌ها مورد بررسی قرار گیرد. هر دسته‌ای که واریانس کمتری داشته باشد دارای دقت بیشتری است.

مثال۲: دو نفر بسته‌ای به وزن ۲۰ گرم را چهار مرتبه وزن کرده‌اند و نتایج زیر حاصل شده است. کدام گزینه زیر صحیح است؟

A	۱۸	۱۵	۲۵	۲۰
B	۱۸	۱۷	۱۶	۱۹

۱) دقت A بیشتر است.
۲) دقت B بیشتر است.
۳) صحت و دقت عمل A بیشتر است.
۴) صحت و دقت عمل B بیشتر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بررسی میزان دقت، کافی است واریانس گروه‌ها مورد بررسی قرار گیرد. هر دسته‌ای که واریانس کمتری داشته باشد دارای دقت بیشتری است.
$\sigma_A^۲ = ۱۷/۶۷ \quad , \quad \sigma_B^۲ = ۱/۶۷$

خواص جبری واریانس

۱ـ اگر به تمامی مشاهدات، عدد ثابتی مانند C اضافه یا کم گردد واریانس اعداد جدید همان واریانس مشاهدات اولیه خواهد بود و تغییری نمی‌کند.

۲ـ اگر تمامی مشاهدات بر عدد ثابتی مانند C ضرب یا تقسیم گردد آنگاه واریانس مشاهدات به مجذور عدد ثابت ($C^۲$) ضرب یا تقسیم می‌گردد.

مثال۳: در یک طرح آزمایشی چنان‌چه قبل از شروع عملیات تجزیه واریانس کلیه اعداد خام در عدد ثابتی ضرب شوند در این صورت:

۱) CV آزمایش در همان عدد ضرب می‌شود.
۲) CV آزمایش در مجذور آن عدد ضرب می‌شود.
۳) CV آزمایش بر مجذور آن عدد تقسیم می‌شود.
۴) CV آزمایش تغییری نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این صورت ضریب تغییرات هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

درسنامه (۲): ارتباط بین آمار و احتمال

احتمال

آمار و احتمال به اندازه‌ای به هم بستگی دارند که بحث در مورد آمار، بدون درک معنی احتمال غیر ممکن است. آگاهی از تئوری احتمال تفسیر نتایج آماری را ممکن می‌سازد و از آنجایی که در بسیاری از روش‌های آماری نتیجه‌گیری از روی نمونه‌هایی که همیشه تحت تأثیر تغییرات تصادفی قرار می‌گیرند انجام می‌شود در نتیجه به وسیله تئوری احتمالات می‌توان مقدار اجتناب‌ناپذیر عدم اطمینان را به صورت عددی بیان کرد. به طور مثال با احتمال ۹۵٪ و ۵٪ خطا میانگین دو تیمار با یکدیگر متفاوتند.

اگر تعداد موفقیت در n آزمایش بوسیله s نمایش داده شود و اگر سری فراوانی‌های نسبی s/n که برای مقادیر بیشتر و بیشتر n بدست می‌آید به سمت یک حد میل کند این حد را احتمال موفقیت (Probability of success in a single trial)در یک آزمایش می‌نامند.

تمرین ۱: در آزمایش‌های جداگانه میزان جوانه‌زنی تعداد مشخص (n) از بذر گندم مورد بررسی قرار گرفت و تعداد بذرهای جوانه‌زده در آزمایش به طور جداگانه بدست می‌آید (s) و در نهایت فراوانی نسبی s/n تعیین گردید. نتایج این آزمایش در جدول زیر آمده است.

نتایج حاصل از آزمایش جوانه‌زنی بذر گندم

n	s	s/n
۱۰۰	۴۹	۰/۴۹
۲۰۰	۱۰۳	۰/۵۱۵
۵۰۰	۲۶۲	۰/۵۲۴
۱۰۰۰	۵۱۷	۰/۵۱۷
۱۰۰۰۰	۵۱۹۳	۰/۵۱۹۳

فراوانی نسبی s/n به طرف مقدار ۰/۵۲ میل می‌کند که در حقیقت همان احتمال موفقیت در یک آزمایش می‌باشد.

با توجه به تمرین بالا احتمال را می‌توان فراوانی نسبی موفقیت در تعداد بزرگ ولی محدود آزمایش‌ها تعریف نمود. این تعریف با وجود آنکه تعریف کاملاً دقیقی از احتمال نمی‌باشد ولی منجر به کسب نتایج غلط نمی‌گردد.

نکته۸: در بسیاری از موارد بخصوص در بازی‌های شانسی احتمال، بدون جمع‌آوری داده‌های مربوط به فراوانی بیان می‌گردد. مانند: احتمال شیر یا خط شدن یک سکه که برابر ۱/۲ می‌باشد.

توزیع احتمال (Probability of the union): همان‌طور که بیان شد احتمال یک متغیر، همان فراوانی نسبی آن متغیر در جمعیت می‌باشد. لذا توزیع احتمال یک متغیر تصادفی نیز از توزیع فراوانی نسبی ارزش‌های آن متغیر در جمعیت بدست می‌آید. سه نوع توزیع احتمال که کاربرد زیادی در تجزیه داده‌ها دارند عبارتند از: توزیع دو جمله‌ای، پواسون و نرمال.

۱ـ توزیع دو جمله‌ای (Binomial distribution): برای محاسبه احتمال با استفاده از توزیع دو جمله‌ای سه شرط زیر لازم است:

I. دو حالت موفقیت p و عدم موفقیت q موجود باشد. II. آزمایش چند بار (n بار) تکرار شود. III. در هر دفعه تکرار آزمایش احتمال p و q ثابت باشد.

توزیع دو جمله‌ای که متکی بر بسط دو جمله‌ای $(p+q)^n$ می‌باشد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(p+q)^n = C_{n,n}p^n + C_{n,1}p^{n-1}q^1 + \cdots + C_{n,r}p^{n-r}q^r + \cdots + C_{n,n}q^n$$

$$C_{n,n} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

با توجه به بسط دو جمله‌ای اگر p احتمال موفقیت یک حادثه و q احتمال مخالف آن باشد در این صورت احتمال وقوع پیشامد (f_r)، میانگین توزیع دو جمله‌ای (m) و انحراف معیار (σ) آن برابر است با:

$$f_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}p^{n-r}q^r \quad ; \quad m = np \quad , \ \sigma = \sqrt{npq}$$

۲ـ توزیع نرمال (Normal distribution): اگر تعداد آزمایش n بزرگ باشد محاسبه فراوانی‌ها و احتمال‌ها با استفاده از قضیه دو جمله‌ای خسته‌کننده می‌شود. از آنجایی که بسیاری از مسایل علمی شامل تعداد زیادی از آزمایشات مکرر است پیدا کردن یک روش سریع برای محاسبه احتمال‌ها حائز اهمیت است. چنین روشی بوسیله توزیع نرمال که مهمترین توزیع احتمال پیوسته بوده و بیشتر نظریات آماری بر اساس آن پی‌ریزی شده است مهیا می‌گردد. توزیع نرمال برای اولین بار توسط گوس مطالعه شده و به آن توزیع گوس نیز می‌گویند. منحنی توزیع نرمال توسط فرمول زیر بیان می‌شود.

$$f_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-m)}{2\sigma^2}}$$

مدرسان شریف

فصل ششم

«مقایسه تیمارها»

مقایسه میانگین دوبه‌دو تیمارها و مقایسه گروهی تیمارها (مقایسات ارتوگونال)

پس از انجام محاسبات آماری و تشکیل جدول تجزیه واریانس (ANOVA) بر مبنای آزمون F فرض صفر یعنی فرض مساوی بودن میانگین تیمارها رد می‌شود و می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که میانگین تیمارها مساوی بوده و از نظر آماری تفاوت معنی‌داری بین آن‌ها وجود دارد. بنابراین لازم است تا تیمارهای مورد آزمایش با یکدیگر مورد مقایسه قرار گیرند. این امر به دو صورت انجام می‌گردد در حالت اول میانگین تیمارها به صورت دو به دو با یکدیگر مقایسه می‌گردند تا معلوم گردد که تفاوت کدام تیمارها معنی‌دار است که بدین منظور از آزمون‌های مقایسه میانگین تیمارها (LSD، دانت، دانکن و ...) استفاده می‌گردد. در حالت دیگر تیمارها به صورت گروهی با یکدیگر مقایسه می‌شوند که این نوع مقایسات به مقایسات گروهی (ارتوگونال) معروف‌اند.

نکته۱: به طور کلی F معنی‌دار بدین مفهوم است که حداقل بین دو میانگین از نظر آماری تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

مثال۱: مقایسه‌های تیماری یعنی:

۱) مقایسه میانگین‌های چند تیمار با روش دانکن

۲) مقایسه میانگین‌های چند تیمار با روش LSD

۳) مقایسه میانگین‌های چند تیمار با هم با یکی از روش‌های LSD، دانکن، دانت، توکی یا استیودنت نیومن کویل

۴) مقایسه میانگین یک تیمار با میانگین یک دسته از تیمارها یا مقایسه میانگین یک دسته از تیمارها با میانگین یک دسته از تیمارهای دیگر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مقایسه تیمارها، میانگین تیمارها به صورت منفرد و با استفاده از یکی از روش‌های آزمون مقایسه میانگین تیمارها که شامل حداقل اختلاف معنی‌دار LSD، دانکن، توکی HSD و استیودنت نیومن کویل SNK می‌باشد بررسی می‌گردد. برای این منظور قدر مطلق تفاضل میانگین دو تیمار با عدد بدست آمده از هر یک از آزمون‌های مقایسه میانگین سنجیده می‌شود. اگر قدر مطلق تفاضل دو میانگین بزرگتر یا مساوی عدد آزمون مقایسه میانگین بود دو تیمار با یکدیگر اختلاف معنی‌دار دارند. لازم به ذکر است که برای مقایسه بیش از یک تیمار با یکدیگر از مقایسات گروهی (ارتوگونال) استفاده می‌شود.

درسنامه (۱): مقایسات میانگین تیمارها

محققین برای انجام مقایسه میانگین تیمارها (مقایسه دو به دو) از آزمون‌های متعددی استفاده می‌کنند که مهمترین آن‌ها LSD، دانت، دانکن، توکی، SNK و شفه می‌باشد که با توجه به خصوصیات هر کدام، هدف انجام آزمایش و سلیقه شخصی محقق برای مقایسه میانگین تیمارها استفاده می‌شود.

۱ـ آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار (LSD (Least Signification Different

از مزایای این آزمون سادگی و سرعت عمل آن است؛ زیرا در این آزمون یک مقدار ثابت به نام LSD محاسبه و اختلاف بین میانگین‌ها را با آن مقایسه می‌کنند. فرمول محاسباتی LSD به صورت مقابل است:

$$LSD = S_{\bar{d}} \times t_{p, df_e}$$

در این رابطه $S_{\bar{d}}$ انحراف استاندارد اختلاف بین دو میانگین است و از رابطه زیر بدست می‌آید. در این رابطه میانگین مربعات اشتباه آزمایشی و r تعداد تکرار می‌باشد.

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2MS_E}{r}}$$

$S_{\bar{d}}$ به خطای معیار یا خطای استاندارد نیز شناخته می‌شود.

در رابطه LSD همچنین p سطح احتمال آماری، df_e درجه آزادی اشتباه آزمایشی و t مقدار ثابتی است که از جدول t استخراج می‌شود.

نکته۲: آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار از فرمول t مشتق شده است. همان‌طور که اشاره شد فرمول t برای مقایسه میانگین دو گروه ۱ و ۲ به صورت $t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{2S^2}{n}}}$ می‌باشد. در این فرمول S^2 واریانس مشترکی است که برای مقایسه کلیه میانگین‌ها به کار می‌رود که در حقیقت همان واریانس درون گروهی یا واریانس خطای آزمایشی (MS_E) در جدول تجزیه واریانس می‌باشد و بالطبع به جای تعداد n نیز می‌توان تعداد تکرار r را قرار داد. حال برای پاسخ به این سؤال که اختلاف بین دو تیمار باید حداقل چه میزانی باشد تا تفاوت دو تیمار معنی‌دار گردد مقدار t در سطح احتمال مورد نظر را جایگزین کرده و حداقل اختلاف معنی‌دار یا LSD را بدست می‌آوریم.

$$t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{2S^2}{n}=\frac{2MS_E}{r}}} \Rightarrow t.\sqrt{\frac{2S^2}{n}}=|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \Rightarrow t.S_{\bar{d}}=LSD$$

نحوه مقایسه میانگین تیمارها با روش LSD بدین صورت است که قدر مطلق تفاوت میانگین دو تیمار مورد نظر با مقدار عدد محاسبه شده LSD مقایسه می‌گردد. اگر قدر مطلق تفاوت میانگین دو تیمار از عدد LSD بزرگ‌تر یا مساوی بود دو تیمار با یکدیگر اختلاف معنی‌داری در سطح احتمال P دارند؛ در غیر این صورت اختلاف دو تیمار تصادفی بوده و اختلاف آماری بین آن دو وجود ندارد.

نکته۳: کاربردهای آزمون LSD:

۱ـ روش صحیح کاربرد آزمون LSD در مقایسه‌های متعامد یا مستقل است. مقایساتی متعامد یا مستقل نامیده می‌شوند که تیمارها در همه آن‌ها فقط یکبار تکرار شده باشند. به طور مثال در مقایسه تیمارهای A، B، C، D، E و F مقایسه A_B، C_D و E_F مقایسه مستقل است.

۲ـ از آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار LSD زمانی می‌توان استفاده نمود که F مربوط به تیمار معنی‌دار شده باشد. این روش گاهی LSD محافظت شده یا PLSD (Protected LSD) نامیده می‌شود.

۳ـ از آزمون LSD برای مقایسه تیمارها با شاهد استفاده می‌شود.

۴ـ انجام مقایساتی که از قبل تعیین شده‌اند.

مثال۲: آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار (LSD) شکل دیگری از کدام آزمون است؟

۱) F   ۲) t یک طرفه   ۳) t دو طرفه   ۴) دانکن

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» آزمون t از رابطه $t=\frac{|\bar{X}_{.1}-\bar{X}_{.2}|}{\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}}$ به دست می‌آید. اگر دو سمت این رابطه را در هم ضرب کنیم رابطه به صورت $t\times\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}=|\bar{X}_{.1}-\bar{X}_{.2}|$ در می‌آید. این رابطه نشان‌دهنده آن است که حداقل مقدار تفاوت برای میانگین دو تیمار $\bar{X}_{.1}$ و $\bar{X}_{.2}$ برای وجود تفاوت معنی‌دار که با LSD نشان داده می‌شود از رابطه $t\times\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}$ به دست می‌آید. بنابراین در حقیقت می‌توان رابطه را به صورت $LSD=t\times\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}$ نشان داد که به جای $\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}$ نیز می‌توان $S_{\bar{d}}$ قرار داده و رابطه به صورت $LSD=S_{\bar{d}}\times t_{(p,dfe)}$ در می‌آید. بنابراین می‌توان گفت که آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار (LSD) شکل دیگر آزمون t دو طرفه است.

مثال۳: در آزمایشات آماری برای مقایسه میانگین تیمارها از چه آزمونی استفاده می‌شود؟

۱) F   ۲) t   ۳) z   ۴) χ

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای مقایسه میانگین تیمارها از آزمون t استفاده می‌شود، در حقیقت آزمونی مانند آزمون حداقل اختلاف میانگین تیمارها LSD از آزمون t استخراج گردیده است.

مثال۴: محاسبه حداقل دامنه‌های معنی‌دار در کدام آزمون انجام می‌شود؟

۱) دانکن ۲) توکی ۳) دانت ۴) LSD

پاسخ: گزینه «۴» آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار LSD از فرمول t مشتق شده است. فرمول t برای مقایسه میانگین دو گروه ۱ و ۲ به صورت $t=\dfrac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{n}}}$ می‌باشد. در این فرمول S^2 واریانس مشترک است که برای مقایسه کلیه میانگین‌ها به کار می‌رود که در حقیقت همان واریانس درون گروهی یا واریانس خطای آزمایشی (MS_E) در جدول تجزیه واریانس می‌باشد و همینطور به جای تعداد n نیز می‌توان تعداد تکرار r را قرار داد.

حال برای پاسخ به این سؤال که اختلاف بین دو تیمار باید حداقل چه میزانی باشد تا تفاوت دو تیمار معنی‌دار گردد مقدار t در سطح احتمال مورد نظر را جایگزین کرده و حداقل اختلاف معنی‌دار یا LSD را به دست می‌آوریم.

مثال۵: خطای استاندارد برای مقایسه دو تیمار ($S_{\bar{d}}$) از کدام رابطه محاسبه می‌شود؟

۱) $\sqrt{\dfrac{2S_p^2}{r}}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2S_p^2}}{r.t}$ ۳) $\sqrt{\dfrac{S_p^2}{r}}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{S_p^2}}{r.t}$

پاسخ: گزینه «۱» در مقایسه دو تیمار واریانس خطا برابر با واریانس مشترک یا S_p^2 می‌باشد.

مثال۶: آزمون LSD در کدام موارد زیر استفاده نمی‌شود؟

۱) برای مقایسه دو به دوی تیمارها ۲) مقایسه تیمارها با شاهد

۳) مقایسه تیمارهای دامنه ۲ ۴) مقایسه‌هایی که از قبل انتخاب شده‌اند.

پاسخ: گزینه «۱» در مقایسه‌های دو به دو تیمارها با توجه به آنکه تیمارها در دامنه‌های مختلف قرار می‌گیرند نمی‌توان از این آزمون استفاده کرد.

مثال۷: اگر در یک طرح کاملاً تصادفی، ۴ تیمار در ۶ تکرار مورد مقایسه قرار گرفته باشند و اطلاعات زیر موجود باشد، در این صورت مقدار LSD جهت مقایسه میانگین‌های تیمارها برابر کدام است؟ (۲/۵ = مقدار t جدول) (زراعت و اصلاح نباتات ـ سراسری ۹۶)

$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}(x_{ij}-\bar{x}_{\circ\circ})^2=300$ و $\sum_{i=1}^{4}(\bar{x}_{i\circ}-\bar{x}_{\circ\circ})^2=10$

۱) ۲۵/۵۰ ۲) ۱۸/۰۰ ۳) ۵/۰۰ ۴) ۴/۰۰

پاسخ: گزینه «۳» در محاسبات با استفاده از فرمول‌های نظری دقت شود که فرمول‌ها مربوط به کدام مجموع مربعات هستند.

$$LSD=|t_{\frac{\alpha}{2},dfe}\times S_{\bar{d}}|$$

$$SST=r\Sigma(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=6\times 10=60$$

$$SST=\Sigma\Sigma(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=300$$

$$SSe=300-60=240 \Rightarrow MSe=\frac{SSe}{df}=\frac{240}{4(6-1)}=\frac{240}{20}=12$$

$$S_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2MSe}{r}} \Rightarrow S_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2\times 12}{6}}=\sqrt{4}=2$$

$$LSD=2/5\times 2=5$$

مثال۸: در یک طرح مربع لاتین، ۶ تیمار مورد ارزیابی قرار گرفته و مجموع مربعات خطا (SS_e) برابر ۲۴۰ به دست آمده است. چنانچه مقدار t از جدول برابر ۲ فرض شود، مقدار LSD جهت مقایسه میانگین تیمارها کدام است؟ (زراعت و اصلاح نباتات ـ سراسری ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۳»

$r=t=6$ جدول $t=2$

$$SS_E=240 \Rightarrow MS_E=\frac{SS_E}{(t-2)(t-1)}=\frac{240}{20}=12$$

$$S_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2MS_E}{r}}=\sqrt{\frac{2\times 12}{6}}=\sqrt{4}=2$$

$$LSD=S_{\bar{d}}\times t \Rightarrow LSD=2\times 2=4$$

مثال۹: برای معنی‌دار شدن میانگین دو تیمار با اختلاف نسبتاً کم، تعداد تکرار و مجموع مربعات اشتباه به‌ترتیب چگونه تغییر کند تا مؤثر باشد؟
(علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۵)

۱) افزایش- کاهش　　۲) کاهش- کاهش　　۳) کاهش- افزایش　　۴) افزایش- افزایش

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای اینکه میانگین دو تیمار معنی‌دار باشد، باید تعداد تکرارها و تیمارها را افزایش داد و هرچه مجموع مربعات اشتباه (SS_E) کاهش یابد، میانگین دو تیمار معنی‌دارتر می‌شود. همچنین با انتخاب مناسب واحدهای آزمایشی و یکنواختی در آنها و نیز با دقت در اندازه‌گیری‌ها می‌توان دقت طرح را افزایش داد.

مثال۱۰: اگر دو تیمار A و B در شرایط یکنواخت آزمایشی و هر کدام در ۶ تکرار ارزیابی شده باشند و مقدار جمع مجذورات (SS) بین تکرارها در تیمار اول و دوم به ترتیب ۶۵ و ۵۵ حاصل شده باشند و مقدار اختلاف دو میانگین آن‌ها برابر ۱۲ باشد، مقدار t جهت مقایسه دو میانگین چند است؟
(علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۶)

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$S_1^2=\frac{65}{r-1}=\frac{65}{5}=13,\quad S_2^2=\frac{55}{6-1}=11 \Rightarrow S_p^2=\frac{S_1^2+S_2^2}{2}=\frac{13+11}{2}=12$$

$$t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{12}{\sqrt{12(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})}}=\frac{12}{\sqrt{4}}=6$$

مثال۱۱: در کدام شرایط، بهتر است برای مقایسه میانگین‌ها از روش LSD استفاده نمود؟ (زراعت و اصلاح نباتات ـ سراسری ۹۵)

۱) مقایسه‌های مستقل و مقایسه میانگین تیمارها با شاهد
۲) مقایسه‌های غیرمستقل پس از معنی‌دار بودن F تیمارها
۳) مقایسه‌های غیرمستقل و مقایسه میانگین تیمارها با شاهد
۴) مقایسه دوبه‌دوی میانگین تیمارها پس از معنی‌دار بودن F تیمارها

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» LSD حداقل تفاوتی است که باید بین دو میانگین وجود داشته باشد تا اختلاف آنها از نظر آماری معنی‌دار تلقی شود.

این آزمون در موارد زیر استفاده می‌شود:

۱ـ در مورد مقایسه‌های متعامد یا مستقل استفاده می‌شود؛ ۲ـ موقعی که F جدول تجزیه واریانس، معنی‌دار شده باشد؛ ۳ـ وقتی در آزمایش شاهد به کار رفته و مقایسه تیمارها با شاهد انجام می‌شود؛ ۴ـ برای مقایسه‌های از پیش تعیین‌شده و بدیهی استفاده می‌شود؛ ۵ـ برای مقایسه‌های شامل دو تیمار استفاده می‌شود.

۲ـ آزمون دانکن (آزمون جدید چنددامنه‌ای دانکن (Duncans′ multiple test))

آزمون دانکن با استفاده از رابطه مقابل محاسبه می‌گردد:

$$LSR=S_{\bar{x}}\times SSR_{(p,dfe,R)}$$

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{MS_E}{r}}$$

در رابطه آزمون دانکن حداقل دامنه‌های معنی‌دار LSR (Least Significant Range)، SSR (Significant Studentized Range) و با توجه به سطح احتمال P، درجه آزادی خطای آزمایشی df_e و R از جدول دامنه‌های معنی‌دار که توسط دانکن تهیه و جدول استیودنت نام‌گذاری شده است استخراج می‌گردد. در این جدول چون می‌بایست دست‌کم دو میانگین وجود داشته باشد تعداد دامنه مورد مقایسه از ۲ شروع می‌شود.
اولین مرحله در مقایسه میانگین تیمارها با استفاده از آزمون دانکن مرتب کردن میانگین تیمارها از بزرگ به کوچک و بالعکس است. سپس مقدار دانکن برای تمامی دامنه‌های مورد نیاز (با توجه به تیمارها) محاسبه می‌گردد. در مرحله آخر قدر مطلق تفاوت میانگین دو تیمار در دامنه مشخص با مقدار آزمون دانکن در همان دامنه مقایسه می‌گردد. اگر تفاوت میانگین دو تیمار، بزرگ‌تر یا مساوی دانکن باشد دو تیمار با هم تفاوت معنی‌دار داشته و در غیر این صورت اختلاف دو تیمار غیرمعنی‌دار می‌باشد. برای درک بهتر در مورد نحوه قرارگیری تیمارها در دامنه‌های مختلف به مثال زیر توجه کنید.
فرض کنید ۵ تیمار A، B، C، D و E دارای میانگین‌های ۱۵، ۱۲، ۲۳، ۱۹ و ۱۰ باشند بنابراین تیمارها به صورت زیر مرتب می‌شوند.

$$E_{(10)}\quad B_{(12)}\quad A_{(15)}\quad D_{(19)}\quad C_{(23)}$$

با توجه به این ترتیب، دامنه تمامی مقایسات ممکن بین میانگین تیمارها به صورت زیر خواهد بود.

تیمارهای مورد مقایسه	دامنه	تیمارهای مورد مقایسه	دامنه
E – B	۲	B – D	۳
E – A	۳	B – C	۴
E – D	۴	A – D	۲
E – C	۵	A – C	۳
B – A	۲	B – C	۲

برای شناسایی دامنه مقایسات میانگین می‌توان از این روش نیز استفاده کرد که پس از مرتب کردن تیمارها بر حسب میانگین تیمارها از بزرگ به کوچک یا بالعکس به تعداد تیمارهای که بین دو تیمار مورد مقایسه قرار دارند ۲ واحد اضافه نمود. در مثال بالا برای مقایسه میانگین بین دو تیمار E و C بین دو تیمار سه تیمار A، B و D قرار داشته بنابراین دامنه‌های این مقایسه ۵ است.

نکته۴: مقدار آزمون چند دامنه دانکن LSR در دامنه ۲ با آزمون LSD برابر است.

نکته۵: در مقایسات میانگین تیمارها در آزمایش با t تیمار تعداد $\frac{t(t-۱)}{۲}$ نوع مقایسه بین تیمارها وجود دارد.

نکته۶: مهم‌ترین مزیت روش دانکن آن است که در مقایسات مختلف از جمله مقایسات غیر مستقل و مقایسات واجد دامنه‌های مختلف می‌توان از آن استفاده کرد.

مثال۱۲: میانگین‌های یک آزمایش با ۴ تیمار توسط دو دانشجو به‌صورت زیر به روش دانکن مقایسه آماری شده‌اند، کدام مرتبه از نظر آماری و کدام از نظر منطق مقایسه دانکن درست می‌باشد؟ (علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۵)

مقایسه دانشجوی دوم	مقایسه دانشجوی اول
۲۵^{b}	۲۵^{a}
۲۴^{b}	۲۴^{a}
۲۳^{a}	۲۳^{b}
۲۲^{a}	۲۲^{b}

۱) اول- مقایسه دانشجوی اول
۲) دوم- مقایسه دانشجوی اول
۳) هر دو- مقایسه دانشجوی دوم
۴) هر دو- مقایسه دانشجوی اول

پاسخ: گزینه «۴» آزمون دانکن یک آزمون چنددامنه‌ای است که تا حدودی باعث کاهش خطای نوع I نسبت به آزمون LSD می‌گردد و با فرمول $LSR = SSRxs_{\bar{x}}$ نشان داده می‌شود. چنانچه تفاوت دو میانگین بیشتر از LSR در دامنه مربوطه باشد، این نتیجه حاصل می‌شود که بین دو تیمار مورد مقایسه تفاوت معنی‌داری از نظر آماری وجود دارد. حروف الفبای لاتین (a,b) جهت نشان دادن اختلاف میانگین‌ها می‌باشد و بستگی به مطلوب بودن بزرگی یا کوچکی میانگین و نظر محقق دارد که حروف را از سمت چپ شروع کند یا سمت راست؛ بنابراین هر دو مقایسه از نظر آماری درست می‌باشد؛ ولی چون آزمون دانکن میانگین‌ها را از بزرگ به کوچک در مقایسات انجام می‌دهد و برتری آماری تیمارها از نظر صفت مورد نظر از روی ترتیب حروف الفبا مشخص می‌شود؛ بنابراین مقایسه اول از نظر منطق دانکن درست می‌باشد.

مثال۱۳: پرکاربردترین آزمون مقایسه میانگین کدام است؟

۱) دانکن ۲) LSD ۳) دانت ۴) SNK

پاسخ: گزینه «۱» پرکاربردترین آزمون مورد استفاده در مقایسات میانگین تیمارها آزمون دانکن می‌باشد.

مثال۱۴: اگر مقدار F در جدول تجزیه واریانس معنی‌دار نشود ممکن است اختلافات کوچکی بین بعضی تیمارها (میانگین تیمارها) وجود داشته باشند. در این قبیل موارد کدام‌یک از روش‌های زیر به ما کمک می‌کند تا اختلافات بین بعضی از میانگین‌ها که ممکن است معنی‌دار باشند را مشخص کنیم؟

۱) توکی ۲) دانکن ۳) کمترین اختلاف معنی‌دار ۴) SNK

پاسخ: گزینه «۲» برخلاف آزمون‌های LSD و دانت که فقط پس از معنی‌دار بودن F قابل استفاده هستند آزمون دانکن را حتی اگر F معنی‌دار نباشد می‌توان به کار گرفت. معنی‌دار نبودن F به مفهوم نبود اختلاف‌های معنی‌دار بین میانگین‌های تیمارها به کار برده شده است. باید دانست که گاهی در صورت نزدیکی میانگین تیمارهای به کار برده شده در آزمایش به یکدیگر و ترتیب قرارگیری آن‌ها در دو سوی میانگین کل آزمایش به گونه‌ای که اختلاف‌های آن‌ها نسبت به آن بسیار اندک باشد این اختلاف‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند. آنگاه برای اثر تیمار F معنی‌دار نخواهد شد. در این موارد می‌توان با وجود معنی‌دار نبودن F تیمار از آزمون دانکن که بر مبنای دامنه بین میانگین‌ها استوار است استفاده نمود.

مثال۱۵: مقدار LSR در دامنه ۲ با کدام‌یک از مقادیر زیر برابر است؟ (دکتری ۹۱)

۱) Q توکی ۲) SNK ۳) d' ۴) LSD

پاسخ: گزینه «۴» LSD حداقل تفاوتی است که می‌باید بین دو میانگین وجود داشته باشد تا اختلاف آنها از نظر آماری معنی‌دار تلقی گردد و به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $LSD = |t_{\frac{\alpha}{2}, df_e} \times S_{\bar{d}}|$

در این فرمول t از جدول t برای سطح احتمال $\frac{\alpha}{2}$ و درجه آزادی خطای آزمایشی (MS_e) به دست می‌آید، و $S_{\bar{d}}$ انحراف معیار توزیع تفاوت میانگین‌هاست که به خطای معیار یا خطای استاندارد معروف است و برای طرح کاملاً تصادفی با r تکرار برابر است با: $S_{\bar{d}} = \sqrt{2MS_E}$

که در آن MS_e همان میانگین مربعات خطای آزمایشی در جدول تجزیه واریانس می‌باشد. در مواردی که مقایسه میانگین‌های بیش از دو جامعه مورد نظر است، می‌توان تفاوت کلیه میانگین‌ها را دو به دو در برابر یک خطای استاندارد سنجید. در صورتی که تعداد تیمارها بیشتر از دو و مقایسات غیرمستقل باشند، سطح اطمینان (α) افزایش می‌یابد.

به عبارت دیگر مقدار LSD برای همه مقایسات نامستقل کوچک خواهد بود. یکی از راه‌حل‌ها، استفاده از مقادیر مختلف حداقل تفاوت معنی‌دار، با توجه به تعداد تیمارهایی که مورد مقایسه قرار می‌گیرند است که استفاده از آزمون چنددامنه‌ای دانکن (LSR) می‌تواند این نیاز را برطرف کند.

۳ـ آزمون توکی (Tukey 's -Wprocedure)

آزمون توکی که به آزمون اختلاف معنی‌دار قابل اعتماد HSD (Honestly Significant Difference) نیز معروف است مانند آزمون دانکن به منظور مقایسه همه میانگین‌ها به صورت دو به دو به کار می‌رود ولی مانند روش LSD یک مقدار ثابت برای هر سطح احتمال محاسبه می‌شود. آزمون توکی با استفاده از رابطه مقابل محاسبه می‌شود. $HSD = S_{\bar{x}} \times q_{(p,t,dfe)}$

در این رابطه مقدار عددی q با توجه به درجه آزادی اشتباه آزمایشی df_e، تعداد تیمار t و سطح احتمال مورد نظر p از جدولی به نام Q استخراج می‌گردد. نحوه مقایسه میانگین تیمارها به صورت آزمون دانکن بوده با این تفاوت که همان‌طور که گفته شد تمام مقایسات با یک مقدار ثابت آزمون توکی صورت می‌گیرد.

مثال۱۶: در آزمایشی دارای ۵ تیمار که در قالب طرح کاملاً تصادفی با ۸ تکرار اجرا شده، برای مقایسه میانگین تیمارها با انجام آزمون توکی، مقدار HSD = ۲ و $q_{1\%} = ۴$ می‌باشد. مجموع مربعات خطای آزمایشی چقدر است؟ (زراعت و اصلاح نباتات ـ سراسری ۹۶)

۱) ۷۰ ۲) ۶۴ ۳) ۲ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه «۱» آزمون توکی یا آزمون اختلاف معنی‌دار حقیقی با دامنه اختلاف‌ها سروکار دارد ولی مانند LSD فقط یک مقدار ثابت محاسبه شده و تمام اختلافات با آن سنجیده می‌شود. دقت شود که طرح کاملاً تصادفی می‌باشد. $HSD = q \times S_{\bar{Y}} \Rightarrow ۲ = ۴ \times S_{\bar{Y}} \Rightarrow S_{\bar{Y}} = ۰/۵$

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{MSe}{r}} \Rightarrow ۰/۵ = \sqrt{\frac{MSe}{۸}} \Rightarrow MSe = ۲$$

$$MSe = \frac{SSe}{df} \Rightarrow ۲ = \frac{SSe}{(۸-۱)(۵)} \Rightarrow SSe = ۳۵ \times ۲ = ۷۰$$

۴ـ آزمون استیودنت ـ نیومن ـ کلز (Student – Newman – Keuls)(SNK)

آزمون SNK مانند آزمون دانکن (LSR) یک آزمون چنددامنه‌ای است (برای مقایسه هر دامنه ۱ عدد وجود دارد). آزمون SNK از رابطه زیر محاسبه می‌گردد. $SNK = S_{\bar{x}} \times q_{(P,R,dfe)}$

در آزمون SNK نیز برای محاسبه q از جدول توکی استفاده می‌شود. تفاوت آن با آزمون توکی در آن است که در آزمون توکی تعداد تیمار و در آزمون SNK دامنه بین تیمارها در نظر گرفته می‌شود.

۵ـ آزمون دانت (Dunnet)

در مواردی که هدف آزمایش انتخاب تیمارهایی است که از شاهد بهتر می‌باشند از آزمون دانت استفاده می‌گردد. آزمون دانت از رابطه زیر بدست می‌آید:

$d = S_{\bar{d}} \times t'_{(p, dfe, (t-1))}$

در این رابطه t' از جدول دانت و با توجه به سطح احتمال مورد نظر P، درجه آزادی اشتباه آزمایشی و تعداد مقایسه با شاهد $(t-1)$ بدست می‌آید.

تمرین ۱: در آزمایشی تأثیر ۴ برش یونجه بر میزان افزایش وزن گوساله‌های پرواری که در ۴ تکرار و با استفاده از طرح بلوک کامل تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است، نتایج زیر حاصل آمده است. مقایسه میانگین تیمارها را با دو روش حداقل اختلاف معنی‌دار LSD و دانکن انجام دهید.

$\bar{X}_{.1} = ۵۲/۲۵$

$\bar{X}_{.2} = ۵۴$

$\bar{X}_{.3} = ۴۹$

$\bar{X}_{.4} = ۴۴/۲۵$ $MS_E = ۹/۸$

قبل از مقایسه میانگین تیمارها لازم است به این نکته اشاره کنیم که شاخص F برای تیمار در سطح ۱٪ معنی‌دار گردیده است یعنی به احتمال ۹۹٪ صحت و ۱٪ خطا حداقل دو تیمار با یکدیگر اختلاف دارند.

درسنامه (۲): روش‌های مختلف مقایسه میانگین تیمارها

مقایسه میانگین تیمارها به روش حداقل اختلاف معنی‌دار LSD:

در مرحله اول لازم است تیمارها بر اساس میانگین از بزرگ به کوچک مرتب گردند. $\bar{X}_{.1} = ۵۲/۲۵, \bar{X}_{.2} = ۵۴, \bar{X}_{.3} = ۴۹, \bar{X}_{.4} = ۴۴/۲۵$

در مرحله دوم مقدار عددی LSD با استفاده از رابطه $LSD = S_{\bar{d}} \times t_{p,dfe}$ محاسبه می‌گردد. بدین منظور لازم است در ابتدا با استفاده از میانگین مربعات خطا (MS_E) و تعداد تکرار r انحراف استاندارد اختلاف بین دو میانگین تیمار $S_{\bar{d}}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{۲MS_E}{r}} \quad [MS_E = ۹/۸, r = ۴] \quad S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{۲\times ۹/۸}{۴}} = ۲/۲۱$$

مقدار عددی t نیز با استفاده از جدول t و با استفاده از درجه آزادی خطای آزمایش که برابر ۹ می‌باشد ($df_E = ۹$) و سطح احتمال مورد نظر که ۱٪ در نظر گرفته می‌شود ($\alpha = ۰/۰۱$) بدست می‌آید که برابر ۳/۲۵۰ است، بنابراین مقدار LSD برابر است با:

$$LSD = S_{\bar{d}} \times t_{p,dfe} \quad [S_{\bar{d}} = ۲/۲۱, t = ۳/۲۵۰] \quad LSD = ۲/۲۱ \times ۳/۲۵۰ = ۷/۱۸$$

با توجه به آنکه از آزمون حداقل اختلاف معنی‌دار LSD برای مقایسه تیمارهای در دامنه ۲ استفاده می‌شود با توجه به ترتیب تیمارها مقایسات صورت می‌گیرد. نحوه مقایسه بدین صورت است که قدرمطلق میانگین دو تیمار با مقدار عددی LSD مقایسه می‌شود.

$$|\bar{X}_{.1} - \bar{X}_{.2}| = |۵۲/۵۵ - ۵۴| = ۱/۷۵ \leq ۷/۱۸$$

$$|\bar{X}_{.2} - \bar{X}_{.3}| = |۵۴ - ۴۹| = ۵ \leq ۷/۱۸$$

$$|\bar{X}_{.3} - \bar{X}_{.4}| = |۴۹ - ۴۴/۲۵| = ۴/۷۵ \leq ۷/۱۸$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود با استفاده از آزمون LSD تنها می‌توان تیمارهای موجود در دامنه ۲ را با هم بررسی کرد. این مقایسات هیچ گونه اختلاف معنی‌داری را بین تیمارها نشان نمی‌دهد.

مثال۱۷: اگر مقایسه دو میانگین به روش آزمون دانت معنی‌دار شود مقایسه این دو میانگین به روش LSD نیز معنی‌دار خواهد شد ولی برعکس آن صادق نیست. علت این امر کدام مورد است؟ (علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۵)

۱) مقدار MSE در آزمون دانت بزرگ‌تر از مقدار آن در آزمون LSD است.

۲) مقدار MSE در آزمون دانت کوچک‌تر از مقدار آن در آزمون LSD است.

۳) مقدار عددی جدول t' (جدول t دانت) بزرگ‌تر از مقدار عدد جدول t (آزمون LSD) است.

۴) مقدار عددی جدول t' (جدول t دانت) کوچک‌تر از مقدار عدد جدول t (آزمون LSD) است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» آزمون دانت زمانی استفاده می‌شود که بخواهیم میانگین تیمارها را با شاهد مقایسه کنیم. به طور کلی روش و اساس این آزمون همانند آزمون LSD است، با این تفاوت که به جای t (آزمون LSD) از یک مقدار دیگر که آن را با t' (جدول t دانت) نشان می‌دهند، استفاده می‌کنند؛ اما تفاوت مقدار t و t' در این است که مقدار t تنها با توجه به a و dfe تعیین می‌شود؛ در حالی که جهت تعیین مقدار t' بزرگ‌تر از t می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۸: اگر هدف مقایسه میانگین تیمارها با تیمار شاهد باشد، بهتر است از کدام روش استفاده شود؟ (علوم دام و طیور ـ سراسری ۹۵)

۱) دانکن ۲) توکی ۳) LSD ۴) SNK

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» روش LSD از قدیمی‌ترین و ساده‌ترین روش‌های مقایسه میانگین‌ها می‌باشد و به علت سهولت استفاده، به‌طور وسیعی کاربرد دارد. LSD حداقل تفاوتی است که باید بین دو میانگین وجود داشته باشد تا اختلاف آنها از نظر آماری معنی‌دار به حساب آید. از این آزمون وقتی استفاده می‌شود که $\hat{F}$ در جدول ANOVA معنی‌دار به دست آمده باشد. مقایسه‌ها بهتر است بین میانگین تیمارهای مختلف با تیمار شاهد انجام شود. در روش LSD باید تعداد تیمارها کم (حداکثر ۶ تا) و تفاوت میانگین‌ها زیاد باشد و مقایسه‌ها حتماً مستقل باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۹: در یک آزمایش به صورت بلوک‌های کامل تصادفی، ۴ تیمار در ۶ تکرار ارزیابی شده و مقدار SSR جدول برای دامنه‌های $P = ۲$ و $P = ۳$ و $P = ۴$ یک آزمون چنددامنه‌ای دانکن به ترتیب ۳، ۴ و ۵ فرض شود و مقدار مجموع مربعات خطای آزمایشی برابر $SS_e = ۳۶۰$ باشد، مقدار LSD برای مقایسه میانگین تیمارها کدام است؟ (آگروتکنولوژی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در یک آزمایش معین مقدار LSR (آزمون چنددامنه‌ای دانکن) در زیردامنه ۲، برابر LSD (آزمون حداقل تفاوت معنی‌دار) در احتمال مربوطه است. بنابراین آزمون دانکن به طور غیرمستقیم منجر به جواب آزمون LSD می‌شود. $LSR = LSD$ دامنه۲

از طرفی: $LSR = SSR \times S_{\overline{x}}$

که در آن SSR از اعداد جدولی به نام دامنه‌های معنی‌دار استودنت با توجه به درجه آزادی به دست می‌آید و $S_{\overline{x}}$ اشتباه (انحراف) استاندارد میانگین تیمارها می‌باشد که از رابطه مقابل به دست می‌آید. $S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}}$

که در آن r تعداد تکراری MSE میانگین مربعات خطا می‌باشد و برای یک آزمایش بلوک کامل تصادفی با t تیمار و r تکرار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$MSE = \frac{SSE}{(r-۱)(t-۱)} = \frac{۳۶۰}{(۶-۱)(۴-۱)} = ۲۴$$

در نتیجه:

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{۲۴}{۶}} = ۲$$

$$LSR = LSD = SSR_{(\text{در دامنه۲})} \times S_{\overline{Y}} = ۳ \times ۲ = ۶ \quad \text{در دامنه۲}$$

✍ **مثال۲۰: اگر در آزمایشی که با طرح بلوک کامل تصادفی اجراشده مقدار $t_{\%۱} = ۳/۲$ و مقدار $LSD_{\%۱} = ۱۶$ باشد، مقدار معیار خطا ($S_{\overline{x}}$) برای آزمون توکی کدام است؟**

۱) $۲/۵\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴/۵\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه $S_{\overline{x}}$ ابتدا باید مقدار (MS_E) را بدست آوریم. بدین منظور با استفاده از فرمول حداقل اختلاف معنی‌دار LSD مقدار $S_{\overline{d}}$ را محاسبه کرده و سپس با کمک رابطه $S_{\overline{d}}$ میانگین مربعات خطا را بدست می‌آوریم.

$$LSD = S_{\overline{d}} \times t_{p,d_{fe}} [LSD_{۱\%} = ۱۶ \, , \, t_{۱\%} = ۳/۲] \; ۱۶ = S_{\overline{d}} \times ۳/۲ \Rightarrow S_{\overline{d}} = ۵$$

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{MS_E}{r}} \quad S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\frac{۲۵r}{۲}}{r}} = ۲/۵\sqrt{۲}$$

$$S_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{۲MS_E}{r}} \quad ۵ = \sqrt{\frac{۲MS_E}{r}} = MS_E = \frac{۲۵r}{۲}$$

✍ **مثال۲۱: در آزمایشی ۴ نمونه ۷ تایی استخراج کرده‌ایم. اگر $LSD_{\%۵}$ مورد نیاز برای مقایسه میانگین‌های ۴ نمونه برابر با ۴/۱۲ باشد، مجموع مربعات اشتباه چقدر است؟**

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۱۴ ۳) ۲۱۸ ۴) ۳۳۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا با کمک فرمول LSD میزان $S_{\overline{d}}$ و سپس MS_E محاسبه می‌شود و با توجه به درجه آزادی خطا میزان SS_E محاسبه می‌شود.

$$LSD = S_{\overline{d}} \times t_{(p,dfe)} \quad ۴/۱۲ = S_{\overline{d}} \times ۲/۰۶۴ \rightarrow S_{\overline{d}} = ۱/۹۹$$

$$۱۳/۹ = \frac{SS_E}{۲۴} \rightarrow SS_E = ۳۳۵ \; MS_E = \frac{SS_E}{df_E} \rightarrow$$

$$S_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{۲ \times MS_E}{r}} \quad ۱/۹۹ = \sqrt{\frac{۲ \times MS_E}{۷}} \rightarrow MS_E = ۱۳/۹$$

✍ **مثال۲۲: در یک طرح مربع لاتین، میانگین تیمارها برابر است با ۶۶، ۷۲،۶۰ و ۷۰ چنان‌چه $LSD_{\%۵} = ۷/۳۴۱$ باشد، میانگین مربعات تیمار و اشتباه و F تیمار به ترتیب برابر است با: (فرض کنید که t جدول مساوی ۲/۴۴۷ است.)**

۱) ۱۱۲، ۱۸و ۶/۲ ۲) ۱۱۲، ۱۸ و ۳۳۶ ۳) ۳۳۶، ۱۰۸ و ۶/۲ ۴) ۳۳۶، ۱۸ و ۶/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با کمک فرمول LSD میزان $S_{\overline{d}}$ محاسبه شده سپس میزان واریانس خطا محاسبه می‌شود. از طرف دیگر مجموع مربعات خطا با استفاده از اطلاعات داده شده محاسبه می‌شود. در نهایت F تیمار از تقسیم واریانس تیمار به واریانس خطا محاسبه می‌شود.

$$LSD = S_{\overline{d}} \times t_{(p,dfe)} \quad ۷/۳۴۱ = S_{\overline{d}} \times ۲/۴۴۷ \Rightarrow S_{\overline{d}} = ۳$$

$$S_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{۲\times MS_E}{r}} \quad ۳ = \sqrt{\frac{۲\times MS_E}{۴}} \Rightarrow MS_E = ۱۸$$

$$SS_t = \frac{\sum X_{..k}^{۲}}{r} - CF \quad CF = \frac{(X_{...})^{۲}}{rt} \quad X_{...} = (۴\times ۶۶)+(۴\times ۶۰)+(۲\times ۲۷)+(۴\times ۷۰) = ۱۰۷۲$$

$$CF = \frac{(۱۰۷۲)^{۲}}{۱۶} = ۷۱۸۲۴$$

$$SS_t = \frac{(۲۶۴)^{۲}+(۲۴۰)^{۲}+(۲۸۸)^{۲}+(۲۸۰)^{۲}}{۴} - ۷۱۸۲۴ = ۳۳۶$$

$$MS_t = \frac{SS_t}{df_t} \quad MS_t = \frac{۳۳۶}{۳} = ۱۱۲$$

$$F_t = \frac{MS_t}{MS_E} \quad F_t = \frac{۱۱۲}{۱۸} \Rightarrow F_t = ۶/۲$$

مقایسه میانگین تیمارها به روش دانکن

مانند آنچه در مورد آزمون مقایسه میانگین به روش LSD گفته شد در مرحله اول لازم است تیمارها بر اساس میانگین از بزرگ به کوچک مرتب گردند.

$$\overline{X}_{.۱} = ۵۲/۲۵,\ \overline{X}_{.۲} = ۵۴,\ \overline{X}_{.۳} = ۴۹,\ \overline{X}_{.۳} = ۴۴/۲۵$$

در مرحله دوم از اشتباه استاندارد اختلاف بین میانگین‌های تیمار $S_{\overline{x}}$ با استفاده از رابطه $S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{MS_E}{r}}$ استفاده می‌شود و در نهایت مقدار عددی دانکن با استفاده از رابطه $LSR = S_{\overline{x}} \times SSR_{(p,dfe,R)}$ محاسبه می‌گردد. توجه داشته باشید مقدار SSR با استفاده از دامنه مورد نظر، درجه آزادی خطا و دامنه‌های مختلف محاسبه می‌گردد. بهترین راه ترسیم جدول است.

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{۹/۸}{۴}} = ۱/۵۶,\ r = ۴\ ,\ [\ MS_E = ۹/۸\ ],\ S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{MS_E}{r}}$$

	دامنه ۲	دامنه ۳	دامنه ۴
SSR	۴/۶	۴/۸۶	۴/۹۹
LSR= $S_{\overline{x}} \times$ SSR	۷/۱۸	۷/۵۸	۷/۷۸

پس از محاسبه مقدار عددی دانکن LSR، تیمارها را با توجه به دامنه‌هایی که در آن قرار می‌گیرند با یکدیگر مقایسه می‌کنند. به طور مثال تیمار ۱ و ۲ در دامنه ۲، تیمار ۱ و ۳ در دامنه ۳ و تیمار ۱ و ۴ در دامنه ۴ قرار می‌گیرند.

$$|\overline{X}_{.۱} - \overline{X}_{.۲}| = |۵۴ - ۵۲/۲۵| = ۱/۷۵ \le ۷/۱۸$$

$$|\overline{X}_{.۱} - \overline{X}_{.۳}| = |۵۴ - ۴۹| = ۵ \le ۷/۵۸$$

$$|\overline{X}_{.۱} - \overline{X}_{.۴}| = |۵۴ - ۴۴/۲۵| = ۹/۷۵ \ge ۷/۷۸$$

با توجه به نتایج به دست آمده تیمار ۱ و ۴ دارای اختلاف معنی‌دار در سطح ۱ % می باشند. این عمل برای تیمار دوم و سوم نیز تکرار می‌گردد.

$$|\overline{X}_{.۲} - \overline{X}_{.۳}| = |۵۲/۲۵ - ۴۹| = ۳/۲۵ \le ۷/۱۸$$

$$|\overline{X}_{.۲} - \overline{X}_{.۴}| = |۵۲/۲۵ - ۴۴/۲۵| = ۸ \ge ۷/۵۸$$

$$|\overline{X}_{.۳} - \overline{X}_{.۴}| = |۴۹ - ۴۴/۲۵| = ۴/۷۵ \le ۷/۱۸$$

با توجه به این نتایج تیمار دوم و تیمار چهارم با یکدیگر در سطح ٪۱ اختلاف معنی‌دار دارند.

مدرسان شریف

فصل نهم

«طرح‌های آزمایشی با کاربردهای خاص»

هدف این فصل آشنایی با طرح‌های آزمایشی می‌باشد که از موارد کاربردی خاصی برخوردار است. در این فصل با کاربردها، نقشه‌ها و جداول تجزیه واریانس این آزمایشات آشنا خواهیم شد. لازم به تذکر است که همان طور که در ادامه مطالعه خواهید کرد برخی از این طرح‌ها مختص آزمایشات زراعی و برخی مختص آزمایشات علوم دامی می‌باشند.

درسنامه (۱): انواع طرح‌های آزمایشی

آزمایش کرت دو بار خردشده (اسپلیت اسپلیت پلات Split – split – plot design)

آزمایش کرت دو بار خردشده (اسپلیت اسپلیت پلات) آزمایشی است که در آن ۳ عامل A، B و C و اثرات متقابل آنها بررسی می‌گردد. در حقیقت این آزمایش مانند آزمایش فاکتوریل ۳ عاملی می‌باشد با این تفاوت که همانند آنچه که در مورد آزمایش کرت خردشده گفته شد برای اجرای ساده‌تر آزمایش از این طرح استفاده می‌شود. در این آزمایش نیز مانند آزمایش کرت خردشده عامل اصلی A عاملی است که برای اجرا نیاز به کرت‌های بزرگ‌تر داشته و بنابراین در کرت اصلی قرار می‌گیرد. عامل فرعی B در داخل کرت اصلی و در کرت‌های فرعی و عامل C در داخل کرت فرعی و در کرت‌های فرعی فرعی قرار می‌گیرد.

نکته۱: در آزمایش کرت دوبار خردشده عامل C نسبت به B و عامل B نسبت به عامل A نیاز به کرت کوچکتری دارد.

نکته۲: آزمایش کرت دوبار خردشده در قالب یکی از سه طرح پایه CRD، RCBD و LS اجرا می‌گردد.

نحوه اجرا و نقشه طرح

نحوه اجرای آزمایش کرت دو بار خردشده‌ای که عامل اصلی A دارای ۳ سطح و عامل‌های فرعی B و فرعی فرعی C هر کدام دارای دو سطح هستند و آزمایش در قالب طرح بلوک کامل تصادفی با ۳ تکرار انجام می‌گردد؛ بدین صورت است که در مرحله اول هر بلوک به تعداد سطوح عامل اصلی A به سه قسمت تقسیم شده و سطوح عامل اصلی A (a_1، a_2 و a_3) به‌طور تصادفی در آنها توزیع می‌گردند. در مرحله دوم هر کرت اصلی به تعداد سطوح عامل فرعی B به دو قسمت تقسیم شده و سطوح عامل فرعی b_1 و b_2 در داخل آنها که همان کرت فرعی هستند توزیع می‌گردد. در نهایت هر کرت فرعی برای تشکیل کرت‌های فرعی فرعی به تعداد سطوح عامل فرعی فرعی C به دو قسمت تقسیم شده و سطوح عامل فرعی c_1 و c_2 در آنها به طور تصادفی توزیع می‌گردد. این عمل برای سایر بلوک‌ها (دو بلوک دیگر این آزمایش) تکرار می‌گردد. نقشه این آزمایش می‌تواند به صورت زیر باشد.

نقشه آزمایش کرت دو بار خردشده در قالب طرح بلوک کامل تصادفی

بلوک ۱	a_1				a_3				a_2			
	b_2		b_1		b_1		b_2		b_1		b_2	
	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_1	c_2	c_2	c_1	c_2	c_1
بلوک ۲	a_1				a_2				a_3			
	b_1		b_2		b_2		b_2		b_2		b_1	
	c_1	c_2	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1
بلوک ۳	a_3				a_1				a_2			
	b_1		b_2		b_2		b_1		b_2		b_1	
	c_2	c_1	c_1	c_2	c_2	c_1	c_1	c_2	c_1	c_2	c_2	c_1

جدول زیر، جدول تجزیه واریانس آزمایش کرت دو بار خردشده در قالب بلوک کامل تصادفی می‌باشد که در آن درجات آزادی، فرمول‌های کاربردی جداول دو طرفه و سه طرفه مورد نیاز و رابطه شاخص F آورده شده است. در این جدول اندیس i برای بلوک، اندیس j برای عامل اصلی A، اندیس k برای عامل فرعی b و اندیس l برای عامل فرعی فرعی C به کار می‌رود.

تجزیه واریانس آزمایش کرت دو بار خردشده در قالب طرح بلوک کامل تصادفی شامل درجات آزادی، فرمول کاربردی و جداول مورد نیاز برای محاسبه مجموع مربعات و شاخص F

منابع تغییر	درجه آزادی df	مجموع مربعات	جداول مورد نیاز	F
بلوک R	$r-1$	$\frac{\sum X_{i...}^2}{abc}-CF$	RA	$\frac{MS_R}{MS_{Ea}}$
فاکتور اصلی A	$a-1$	$\frac{\sum X_{.j..}^2}{rbc}-CF$	RA	$\frac{MS_A}{MS_{Ea}}$
خطای کرت اصلی Ea	$(a-1)(r-1)$	$SS_{mp}-SS_R-SS_A$	---------	---------
کرت اصلی mp	$ra-1$	$\frac{\sum X_{ij..}^2}{b}-CF$	داخل RA	---------
عامل فرعی B	$b-1$	$\frac{\sum X_{..k.}^2}{rac}-CF$	RB یا AB	$\frac{MS_B}{MS_{Eb}}$
اثر متقابل AB	$(a-1)(b-1)$	$\frac{\sum X_{.jk.}^2}{rc}-CF-SS_A-SS_B$	AB	$\frac{MS_{AB}}{MS_{Eb}}$
خطای کرت فرعی Eb	$a(r-1)(b-1)$	$SS_{sp}-SS_B-SS_{AB}$	---------	---------
کرت فرعی sp	$ra(b-1)$	$\frac{\sum X_{ijk.}^2}{rab}-CF-mp$	RAB	---------
عامل فرعی C	$c-1$	$\frac{\sum X_{...l}^2}{rab}-CF$	AC	$\frac{MS_C}{MS_{Ec}}$
اثر متقابل AC	$(a-1)(c-1)$	$\frac{\sum X_{.j.l}^2}{rb}-CF-SS_A-SS_C$	داخل AC	$\frac{MS_{AC}}{MS_{Ec}}$
اثر متقابل BC	$(b-1)(c-1)$	$\frac{\sum X_{..kl}^2}{ra}-CF-SS_B-SS_C$	داخل BC	$\frac{MS_{BC}}{MS_{Ec}}$
اثر متقابل ABC	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\frac{\sum X_{.jkl}^2}{r}-CF-SS_A-SS_B-SS_C-SS_{AB}-SS_{AC}-SS_{BC}$	داخل ABC	$\frac{MS_{ABC}}{MS_{Ec}}$
خطای کرت فرعی Ec	$ab(r-1)(c-1)$	$SS_{sp}-SS_C-SS_{AC}-SS_{BC}-SS_{ABC}$	---------	---------
کرت فرعی ssp	$rab(c-1)$	$SS_T-SS_{mp}-SS_{sp}$	---------	---------
کل T	$rabc-1$	$\sum X_{ijkl}^2-CF$	داده‌های اولیه	---------

به منظور محاسبه فاکتور تصحیح CF از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$CF=\frac{(X_{....})^2}{rabc}$$

خصوصیات کرت دو بار خردشده:

عامل اصلی A؛ نیاز به پلات‌های بزرگ داشته و در کرت‌های اصلی (بزرگ‌ترین کرت‌ها) قرار می‌گیرند. اهمیت این عامل نسبت به سایر عوامل برای محقق کمتر است.

عامل فرعی B؛ نیاز به کرت‌های متوسط داشته و در داخل کرت‌های اصلی در کرت‌های فرعی قرار می‌گیرد. این عامل از اهمیت بیشتری نسبت به عامل اصلی برخوردار است.

عامل فرعی فرعی C، نیاز به کرت‌های کوچک داشته و در داخل کرت‌های فرعی در کرت‌های فرعی فرعی قرار می‌گیرد اما اهمیت آن نسبت به دو عامل دیگر بیشتر است.

انواع خطای آزمایشی کرت دو بار خردشده:

۱ـ خطای کرت اصلی Ea یا $E_۱$ که جهت بررسی عامل اصلی A و بلوک R استفاده می‌شود.

۲ـ خطای کرت فرعی Eb یا $E_۲$ که جهت بررسی عامل فرعی B و اثر متقابل AB استفاده می‌شود.

۳ـ خطای کرت فرعی فرعی Ec یا $E_۳$ که جهت بررسی عامل اصلی C و اثرات متقابل ABC ،BC ،AC استفاده می‌شود.

نکته۳: درجه آزادی خطای کرت فرعی فرعی (df_{ec}) از درجه آزادی خطای کرت فرعی (df_{eb}) و درجه آزادی خطای کرت اصلی (df_{ea}) بزرگ‌تر است ($df_{ec} > df_{eb} > df_{ea}$). بنابراین میانگین مربعات خطای کرت فرعی فرعی نیز از دو خطای کرت فرعی و اصلی کوچکتر بوده ($MS_{Ec} < MS_{Eb} < MS_{Ea}$) و بالطبع همان طور که پیش‌تر نیز بدان اشاره شد عامل فرعی فرعی با دقت بیشتری محاسبه می‌شود.

مثال۱: کدام طرح برای بررسی اثر سه فاصله ردیف کاشت و دو نوع کود ازت سرک در چهار میزان مصرف مناسب‌تر است؟

۱) کرت‌های دوبار خردشده و اختصاصی فاکتورها به کرت‌های اصلی، فرعی و فرعی فرعی برحسب اهمیت مورد نظر آن‌ها

۲) کرت‌های دوبار خردشده به طوری که فاصله ردیف کرت اصلی، نوع کود کرت فرعی و میزان مصرف کود، کرت فرعی فرعی باشد.

۳) بلوک‌های خردشده به طوری که نوع کود، میزان کود کرت اصلی را تشکیل دهند.

۴) کرت‌های خردشده به طوری که نوع و میزان کود کرت اصلی را تشکیل دهند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به نظر می‌رسد میزان مصرف کود دارای اهمیت بیشتر، نوع کود در درجه دوم اهمیت و بالاخره فاصله ردیف دارای اهمیت کمتری است.

مثال۲: در یک طرح دو بار خردشده با سه تکرار فاکتور B ،A و C به ترتیب در پنج، سه و سه سطح وجود دارند اگر فاکتور C به عنوان فاکتور فرعی فرعی باشد درجه آزادی اشتباه C و اثر متقابل ABC چقدر است؟

۱) ۶۰ و ۱۶   ۲) ۲۰و ۸   ۳) ۶۰ و ۸   ۴) ۲۰ و ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$df_{ec} = ab(r-۱)(c-۱) = ۵\times۳(۳-۱)(۳-۱) = ۶۰$$
$$df_{ABC} = (a-۱)(b-۱)(c-۱) = (۵-۱)(۳-۱)(۳-۱) = ۱۶$$

مثال۳: یک اصلاح‌کننده نبات می‌خواهد ۱۰ واریته برنج با سه سطح کود ازته را مورد آزمایش قرار دهد، به نظر شما چه طرح آزمایشی باید برای این مطالعه به کار ببرد؟

۱) یک طرح کرت خردشده که در آن واریته برنج کرت‌های اصلی را تشکیل می‌دهند.

۲) یک طرح کرت خردشده که در آن سطوح کود ازته کرت‌های اصلی را تشکیل می‌دهند.

۳) یک طرح کرت نواری که در آن واریته برنج نوار عمودی است.

۴) یک طرح کرت نواری که در آن کود ازته نوار عمودی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون فردی که می‌خواهد آزمایش را انجام دهد یک اصلاح‌کننده نبات است در نتیجه تمایل وی بیشتر در خصوص مقایسه ۱۰ واریته برنج می‌باشد و مقایسه سطوح کود ازته در درجه دوم اهمیت برای وی قرار دارد لذا سطوح کود ازته باید در کرت اصلی قرار گیرد که دقت آن کمتر است و واریته‌های برنج در کرت فرعی قرار گیرند که دقت آن‌ها بیشتر است. گزینه‌های (۳) و (۴) نیز غلط است چون تأثیر متقابل در اینجا دارای اهمیت اصلی نیست که با دقت بیشتری تخمین زده شود.

مدرسان شریف

فصل دهم

«مقایسات کمّی تیمارها (بررسی منحنی پاسخ)»

درسنامه (۱): انواع روابط بین دو متغیر

در برخی از تحقیقات نه تنها مقایسه اثر تیمارها یا مقایسه گروهی تیمارها مورد نظر است، بلکه چنانچه تیمارها یا سطوح فاکتورها کمّی باشند مانند مقادیر، زمان‌ها، فاصله یا غلظت نوع رابطه بین دو متغیر (تیمار یا فاکتور و خصوصیت اندازه‌گیری شده مثلاً ارتفاع یا عملکرد) نیز جالب توجه است. در حقیقت محقق باید پاسخ به دست آمده y را به صورت رگرسیونی بررسی کند. بدین منظور از ضرایب چندجمله‌ای متعامد (ارتوگونال) استفاده می‌شود که برای کدگذاری مقادیر X و محاسبه سریع رگرسیون Y با X به کار برده می‌شوند (جدول ضرایب چندجمله‌ای متعامد). برای استفاده از این ضرایب دو شرط لازم است:

۱ـ تعداد تکرار برای همه تیمارها یا سطوح فاکتورها یکسان باشد.

۲ـ مقادیر افزایش یا کاهش تیمارها یا سطوح فاکتورها هم اندازه یا هم فاصله باشد. (به طور مثال بررسی اثر مقادیر ۱۵۰، ۲۰۰، ۲۵۰ و ۳۰۰ کیلوگرم کود ازت در هکتار، همان‌طور که می‌بینیم فاصله تیمارها از یکدیگر مساوی و برابر ۵۰ می‌باشد.)

مثال۱: در چه صورت می‌توان روند بین سطوح معکوس یک تیمار را معین نمود؟

۱) تیمار کیفی دارای سطوح هم‌فاصله باشد.
۲) تیمار با تکرار از نظر تعداد مساوی باشد.
۳) تیمار کمّی و دارای سطوح هم‌فاصله باشد.
۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر تیمارها کمّی و دارای سطوح هم‌فاصله باشند می‌توانیم روند بین سطوح را از نظر درجه دوم و ... تعیین کنیم.

مقایسه بین تیمارها باید به نحوی تعیین شود که هر مقایسه ماهیت تغییرات صفت مورد بررسی را نسبت به تغییرات تیمار اعمال شده نشان دهد. به طور کلی ممکن است بین دو متغیر روابط مختلفی وجود داشته باشد که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود:

رابطه خطی: این رابطه نشان می‌دهد که با افزایش یا کاهش یک متغیر، صفت مورد مطالعه نیز به طور خطی کاهش یا افزایش می‌یابد. در اصطلاح به این نوع تبعیت دو متغیر از یکدیگر رابطه خطی یا درجه اول گفته می‌شود که دارای فرمول مقابل است.

$$\hat{Y} = a + bX$$

رابطه درجه ۲: هنگامی دو متغیر دارای رابطه درجه ۲ می‌باشند که با افزایش یک متغیر تا یک حد معین دیگری افزایش یافته و سپس کاهش پیدا کند یا بالعکس این مدل از معادله مقابل تبعیت می‌کند.

$$\hat{Y} = a + bX + cX^2$$

رابطه درجه ۳: در این حالت با افزایش متغیر اول متغیر دوم نیز افزایش یافته و به حداکثر خود می‌رسد، سپس با افزایش متغیر اول، متغیر دوم شروع به کاهش می‌کند و به حداقل خود رسیده و دوباره شروع به افزایش می‌کند. معادله مدل درجه سوم به صورت زیر است.

$$\hat{Y} = a + bX + cX^2 + dX^3$$

نکته۱: با توجه به آنکه در مطالعات کشاورزی روابط درجه ۳ و بالاتر کمتر مطرح بوده و تفسیر آن‌ها مشکل و یا غیر واقعی است، معمولاً به روابط درجه ۱ و ۲ اکتفا می‌شود.

مسئله قابل توجه آن است که چنانچه هر یک از دو متغیر تنها دو حالت داشته باشند (تعداد تیمار یا سطوح فاکتور برابر ۲ بوده و بالطبع ۲ پاسخ یا صفت مورد اندازه‌گیری را به همراه داشته باشد) امکان ترسیم دو نقطه وجود داشته و بین دو نقطه تنها می‌توان یک خط ترسیم کرد. اگر تعداد تیمار یا سطوح فاکتور برابر ۳ باشد ابتدا رابطه خطی بین دو متغیر بررسی شده و در مرحله بعد رابطه درجه ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. بالطبع به دلیل آنکه با ۳ نقطه تنها می‌توان یک منحنی با یک نقطه ماکزیمم یا مینیمم ترسیم نمود بررسی رابطه درجه ۳ امکانپذیر نمی‌باشد.

درسنامه (۲): نحوه تشکیل جدول تجزیه واریانس اجزای رگرسیونی

نکته مهم آن است که در مطالعات روند تغییرات ابتدا بررسی می‌گردد که چه مقدار از تغییرات صفت مورد مطالعه یا متغیر y توسط رابطه خطی با درجه آزادی ۱ توجیه می‌شود و چه میزان توسط رابطه خطی توجیه نمی‌گردد که در اصطلاح به آن انحراف از خطی می‌گویند و درجه آزادی آن برابر $t-2$ می‌باشد. در مرحله دوم همین روند بررسی در مورد رابطه درجه ۲ انجام می‌گیرد یعنی مشخص می‌گردد چه میزان از تغییرات y توسط رابطه درجه ۲ با درجه آزادی ۱ توجیه گشته و چه میزان توسط این مدل توجیه نمی‌گردد که در حقیقت منظور انحراف از درجه ۲ می‌باشد که درجه آزادی آن برابر $t-3$ می‌باشد. این روند را برای درجات بالاتر نیز می‌توان ادامه داد.

در حقیقت در هر مرتبه مجموع مربعات انحراف از یک مدل به دو بخش مجموع مربعات مدل جدید با درجه آزادی ۱ و مجموع مربعات انحراف از آن مدل با یک درجه آزادی کمتر تفکیک می‌گردد. جدول تجزیه واریانس رگرسیون و انحراف از رگرسیون خطی و درجه ۲ به صورت زیر می‌باشد.

ضرایب چندجمله‌ای متعامد برای محاسبه مجموع مربعات مدل‌های رگرسیونی بین تیمارها یا سطوح فاکتور با صفت مورد مطالعه

تعداد تیمار	درجه پلی نوم	اثر یا جزء	تعداد سطوح یک فاکتور (تعداد تیمار هم فاصله)					$\sum C_j^2$
			۱	۲	۳	۴	۵	
۲	۱	خطی (Linear)	-۱	+۱				۲
۳	۲	خطی	-۱	۰	+۱			۲
		درجه دوم (Quadratic) (انحراف از درجه خطی ۱)	+۱	-۲	+۱			۶
۴	۳	خطی	-۳	-۱	+۱	+۳		۲۰
		درجه دوم	+۱	-۱	-۱	+۱		۴
		درجه سوم (Cubic) (انحراف از درجه ۲)	-۱	+۳	-۳	+۱		۲۰
۵	۴	خطی	-۲	-۱	۰	+۱	+۲	۱۰
		درجه دوم	+۲	-۱	۰	+۱	+۲	۱۴
		درجه سوم	-۱	+۲	۰	-۲	+۱	۱۰
		درجه چهارم (Quartic) (انحراف از درجه ۳)	+۱	-۴	+۶	-۴	+۱	۷۰

محاسبه مجموع مربعات اجزای رگرسیونی

به منظور محاسبه مجموع مربعات مدل‌های خطی، درجه ۲ و درجه ۳ و ... را با استفاده از ضرایب چندجمله‌ای متعامد می‌توان محاسبه کرد. جدول ضرایب چندجمله‌ای متعامد برای ۳ تا ۵ تیمار توسط فیشر و ییتز تهیه گردیده است.

چنانچه قبلاً بدان اشاره شد اگر تیمار دو جزء هم فاصله داشته باشد درجه آزادی آن یا همان درجه پلی نوم برابر ۱ (۱=۱-۲) است و بنابراین تنها محاسبه مجموع مربعات رگرسیون خطی امکان‌پذیر است. به همین ترتیب اگر تیمار با سطوح فاکتور شامل ۳ سطح هم فاصله باشد درجه پلی نوم برابر ۲ بوده و بررسی مدل رگرسیون خطی و درجه ۲ (انحراف از رگرسیون خطی) امکان‌پذیر است. جدول آورده‌شده ضرایب چندجمله‌ای متعامد را برای ۲ تا ۵ تیمار نشان می‌دهد.

به منظور محاسبه مجموع مربعات اجزا رگرسیونی از روش ضرایب متعامد مانند آنچه که در مقایسات گروهی (ارتوگونال) بیان شد از رابطه $SS=\frac{Q^2}{r\sum C_j^2}$ استفاده می‌شود که در این رابطه Cj ضرایب متعامد هستند که با توجه به تعداد تیمار (درجه آزادی پلی نوم) و نوع مدل مورد نظر (خطی، درجه دوم و ..) از جدول مربوطه استخراج می‌شوند. همچنین در این رابطه مقدار عددی Q از رابطه $Q=\sum C_j X_{.j}$ محاسبه گشته و r نیز تعداد تکرار می‌باشد.