

۱۰۰ تست تکمیلی از مسائل پرتکرار

در این قسمت، با توجه به سؤالات ۵ سال اخیر و نظر به روند فکری طراحان، سؤالاتی از مباحث پرتکرار طراحی و به صورت ۱۰ آزمون ۱۰ سؤالی، دسته‌بندی شده است. سطح برخی از این سؤالات کمی بالاتر از سؤالات متن کتاب و سطح برخی سؤالات هم مطابق با سؤالات آزمون‌های اصلی و سؤالات متن کتاب است. پیشنهاد می‌کنم پس از دوره کامل سؤالات حل مسأله‌ی متن کتاب و سؤالات آزمون‌های سال‌های گذشته، اقدام به پاسخگویی به این سؤالات نمایید. برای هر آزمون ۱۰ سؤالی، حدود ۳۰ دقیقه وقت بگذارید؛ پس از حل سؤالات هر آزمون، سعی کنید سؤالاتی را که حل نکرده‌اید «بدون توجه به زمان» حل کنید. این کار بسیار در بالا بردن قدرت حل مسأله به شما کمک خواهد کرد. ضمناً پاسخ این سؤالات را می‌توانید از وبسایت www.h-nami.ir دانلود نمایید.

آزمون (۱)

۱- در یک نمایشگاه اتومبیل، ۵۰۰ ماشین دو در یا چهار در وجود دارد که هر کدام حداقل یکی از امکانات دوربین عقب یا ترمز ABS را دارند. ۱۶۵ تا از آنها دو در هستند، ۱۲۰ ماشین چهار در داریم که مجهز به دوربین عقب هستند و هجده درصد کل ماشین‌های دارای دوربین عقب، ترمز ABS هم دارند. اگر ۴۰ درصد همه ماشین‌های مجهز به دوربین عقب و ترمز ABS، ماشین دو در باشند، چه تعداد ماشین چهار در داریم که هم مجهز به دوربین عقب هستند و هم مجهز به ترمز ABS هستند؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۳۶ (۴) ۴۵

۲- سه نوع محلول به قیمت‌های کیلویی ۶۰ تومان، ۷۵ تومان و ۱۰۰ تومان موجود است. با چه تناسبی آنها را با هم مخلوط کنیم که اگر کیلویی ۹۶ تومان فروختیم، ۲۰ درصد سود کرده باشیم؟ (عدد سمت چپ مربوط به محلول ۱۰۰ تومانی و عدد سمت راست مربوط به محلول ۶۰ تومانی است.)

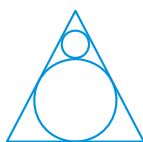
- (۱) ۱ : ۲ : ۴ (۲) ۳ : ۷ : ۶ (۳) ۲ : ۴ : ۱ (۴) ۳ : ۶ : ۵

۳- بین اعداد زیر، یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال کدام عدد باید قرار گیرد؟

۱, ۳, ۶, ۱۱, ۱۸, ۲۹, ۴۲, ۵۹, ?

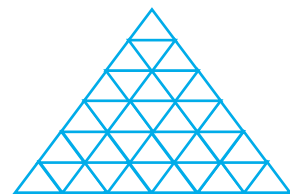
- (۱) ۷۸ (۲) ۷۹ (۳) ۷۷ (۴) ۸۰

۴- در شکل زیر دایره‌ای در یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط شده است. دایره کوچک‌تری در فضای بین دایره و دو ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط شده است. اگر طول ضلع مثلث ۱ سانتی‌متر باشد، طول شعاع دایره‌های بزرگ و کوچک چند سانتی‌متر است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{27}, \frac{\sqrt{3}}{9}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{36}, \frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{\sqrt{3}}{6}$

۵- شکل زیر، از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یکسان ساخته شده است. تعداد شکل A (دقیقاً مشابه نمونه‌ی داده شده در هر اندازه و هر جهتی) با تعداد کل مثلث‌های قابل مشاهده در شکل چند تا اختلاف دارد؟ (شکل A از ۵ قطعه خط هم‌اندازه ساخته می‌شود)



- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۰ (۴) ۲

۶- سه مکعب داریم که حجم‌های آنها به ترتیب برابر با ۸، ۱ و ۲۷ است. می‌خواهیم این سه مکعب را طوری به هم بچسبانیم که مساحت بیرونی جسم حاصل، کمترین مقدار ممکن باشد. این کمترین مقدار ممکن کدام است؟

- (۱) ۷۶ (۲) ۸۴ (۳) ۸۱ (۴) ۷۲

۷- دو دوچرخه‌سوار، از دو شهر A و B، در یک زمان، به طرف یکدیگر حرکت کردند. دوچرخه‌سوار اول، تا لحظه‌ی برخورد، یک برابر و نیم دوچرخه‌سوار دوم راه پیمود؛ دوچرخه‌سوار اول، ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه بعد از ملاقات با دوچرخه‌سوار دوم، به B رسید. دوچرخه‌سوار دوم، ۲ ساعت بعد از ملاقات، در ۱۰ کیلومتری A بود. فاصله‌ی بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۸ (۴) ۳۸



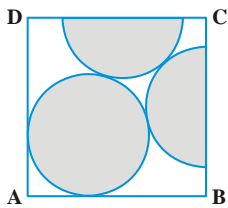
۸- سه دستگاه، یک نوع محصول تولید می‌کنند، (ولی با قدرت‌های متفاوت). اگر هر سه دستگاه کار کنند، قدرت تولیدی همه‌ی آن‌ها $1/5$ برابر قدرت تولیدی دستگاه‌های اول و دوم است. دستگاه‌های دوم و سوم، روی هم، مقداری محصول را در ۴ ساعت و ۴۸ دقیقه زودتر از دستگاه اول تولید می‌کنند؛ همین مقدار محصول را، دستگاه دوم، ۲ ساعت زودتر از دستگاه اول تولید می‌کند. دستگاه اول، همین مقدار محصول را در چند ساعت تولید می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۹

۹- دو قطعه چدن، با وزن‌های برابر و با مقدار کروم مختلف موجود در آن، مفروض است. از این دو قطعه، یک قطعه چدن درست کرده‌ایم که دارای ۱۲ کیلوگرم کروم است. اگر وزن قطعه اول دو برابر بود، در ملقمه حاصل، ۱۶ کیلوگرم کروم وجود داشت. می‌دانیم مقدار کروم قطعه اول ۵٪ کمتر از مقدار کروم قطعه دوم است. درصد کروم در هر قطعه کدام است؟

- (۱) $2/5$ و $7/5$ (۲) ۵ و ۱۰ (۳) ۱۵ و ۱۰ (۴) $9/5$ و $14/5$

۱۰- در شکل زیر، ABCD یک مربع است که درون آن دو نیم‌دایره و یک دایره که همگی شعاعی برابر ۱ دارند، قرار گرفته است. همچنین آن‌ها بر هم و بر دو ضلع مربع مماس هستند. مساحت مربع چند است؟



$$(1) 3 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$(2) 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$(3) 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{3} + 3$$

$$(4) 3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

آزمون (۱۲)

۱۱- شیر A با آهنگ ۱۰۰ لیتر در دقیقه و شیر B با آهنگ ۲۵ لیتر در دقیقه مخزنی را پر می‌کنند و شیر خروجی C آب آن را با آهنگ ۵۰ لیتر در دقیقه خالی می‌کند. سه تا شیر یکی پس دیگری هر کدام فقط به مدت یک دقیقه باز نگه داشته می‌شوند. اگر ظرفیت مخزن ۷۰۰۰ لیتر باشد، در هر کدام از شرایط زیر چقدر طول می‌کشد تا مخزن پر شود؟

- الف: اول A باز باشد، سپس B و سپس C
ب: اول B، سپس A، سپس C
پ: اول B، سپس C و سپس A
- (۱) $279/25$ دقیقه، ۲۸۰ دقیقه، ۲۸۰ دقیقه
(۲) ۲۸۰ دقیقه، ۲۸۰ دقیقه، $279/25$ دقیقه
(۳) ۲۷۹ دقیقه، ۲۸۰ دقیقه، $279/25$ دقیقه
(۴) ۲۷۷ دقیقه، ۲۷۷ دقیقه و چهل و پنج ثانیه، ۲۷۹ دقیقه

۱۲- بین اعداد زیر یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال کدام عدد باید قرار گیرد؟

۱, ۸, ۹, ۴, ۱, ?

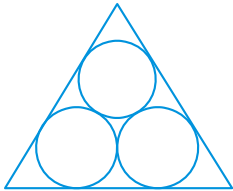
$$(1) \frac{1}{6}$$

$$(2) \frac{1}{4}$$

$$(3) \frac{1}{36}$$

$$(4) \frac{1}{16}$$

۱۳- سه دایره با شعاع ۱cm درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که سه دایره بر یکدیگر و دو ضلع از مثلث مماس هستند. طول ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟



$$(1) 2 + \sqrt{3}$$

$$(2) 3$$

$$(3) 2 + 2\sqrt{3}$$

$$(4) 4$$

۱۴- در یک کودکان تعداد کودکان کوچک‌ترین عددی است که می‌توانیم آن‌ها را به ۹ روش مختلف دسته‌بندی کنیم به طوری که در هر روش تعداد کودکان تمام دسته‌ها با هم برابر است و هیچ کودکی اضافه نمی‌آید. اگر دو کودک از تعداد کودکان کودکان کم شود، بقیه‌ی کودکان را به چند روش مختلف مانند قبل، می‌توان دسته‌بندی کرد؟

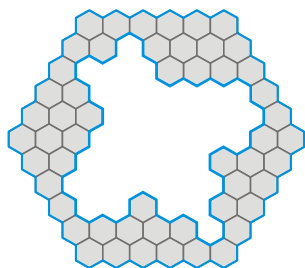
$$(1) 6$$

$$(2) 7$$

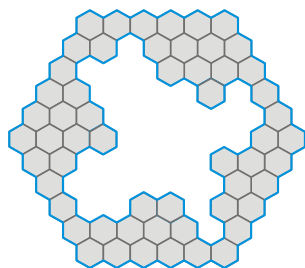
$$(3) 5$$

$$(4) 4$$

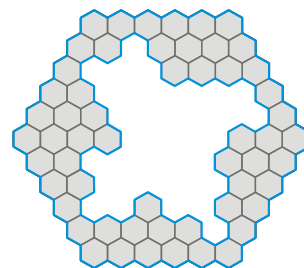
۱۵- سه شکل زیر کاملاً یکسان هستند و از کنار هم قرار گرفتن شش ضلعی‌های منتظم و یکسان تشکیل شده‌اند. هر شکل تعدادی شش ضلعی کوچک لازم دارد تا کاملاً پر شود. کدام شکل‌ها با تعداد یکسانی شش ضلعی کوچک تکمیل می‌شوند؟



(A)



(B)



(C)

(۴) A, B, C و

(۳) B و C

(۲) A و C

(۱) A و B

۱۶- حمید و وحید در یک پیست دایره‌ای شکل با محیط ۴۰۰ متر می‌دوند. سرعت حمید $\frac{2}{5}$ سرعت وحید است. آن‌ها هم‌زمان ولی در جهت‌های مختلف و از یک نقطه شروع به دویدن می‌کنند. پس از ۲۰۰ ثانیه دو نفر چهار بار همدیگر را ملاقات کرده‌اند. سرعت وحید بر حسب متر بر ثانیه چقدر از سرعت حمید بیشتر است؟

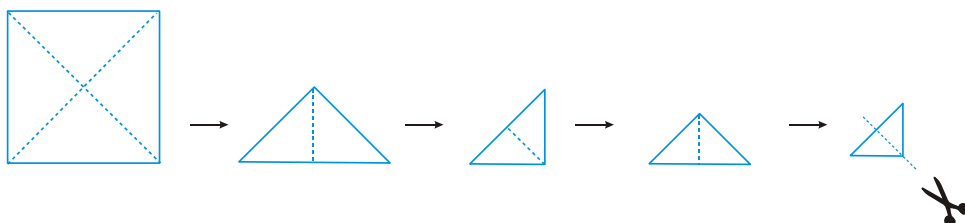
(۴) ۳

(۳) ۵

(۲) ۲

(۱) ۴

۱۷- یک کاغذ مربع شکل را در نظر بگیرید. ابتدا آن را از روی هر دو قطر تا می‌زنیم. شکلی مثلثی ایجاد می‌شود که دقیقاً $\frac{1}{4}$ مساحت مربع اول است. مثلث کاغذی ایجاد شده را نسبت به نیمساز رأس آن مجدداً تا می‌زنیم تا شکلی مثلثی به مساحت $\frac{1}{8}$ مربع اول ایجاد شود. دوباره مثلث‌های جدید را از روی نیمساز رأس آن (محور تقارن) تا می‌زنیم تا مثلثی با مساحت $\frac{1}{16}$ مساحت مربع اول ایجاد شود. اکنون از روی نیمساز مثلث جدید، شکل را با قیچی برش می‌دهیم. چند قطعه کاغذ حاصل می‌شود؟



(۱) ۸

(۲) ۱۶

(۳) ۹

(۴) ۱۸

۱۸- سه تلمبه داریم. تلمبه دوم در هر ساعت دو برابر تلمبه اول و تلمبه سوم در هر ساعت ۸ مترمکعب بیشتر از تلمبه دوم آب خارج می‌کنند. دو استخر با گنجایش‌های ۶۰۰ و ۱۶۸۰ مترمکعب را با هم به وسیله سه تلمبه، به ترتیب زیر، پر از آب کردیم. استخر به گنجایش ۶۰۰ مترمکعب را، تلمبه اول پر می‌کند. در استخر دوم، ابتدا تلمبه دوم، ۲۴۰ مترمکعب آب ریخت، سپس تلمبه سوم بلافاصله به جای تلمبه دوم شروع به کار کرد و استخر دوم را پر کرد. استخر دوم، ۶ ساعت بعد از استخر اول پر شد. اگر از همان ابتدا با تلمبه سوم استخر را پر می‌کردیم، ۵ ساعت دیرتر از استخر اول پر می‌شد. تلمبه اول در هر ساعت چند مترمکعب آب بیرون می‌کشد؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۸

(۲) ۲۲

(۱) ۲۰

۱۹- دو ظرف داریم که در یکی ۴ کیلوگرم و در دیگری ۶ کیلوگرم محلول اسید با غلظت‌های مختلف وجود دارد. اگر آن‌ها را روی هم بریزیم، محلولی به دست می‌آید که شامل ۳۵% اسید است. ولی اگر از دو محلول، به وزن‌های مساوی روی هم بریزیم، محلولی با ۳۶% اسید حاصل می‌شود. در هر ظرف چند کیلوگرم اسید وجود دارد؟

(۴) $\frac{1}{64}$ و $\frac{1}{68}$

(۳) $\frac{1}{64}$ و $\frac{1}{86}$

(۲) $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{85}$

(۱) $\frac{1}{44}$ و $\frac{1}{56}$

۲۰- به مناسبت فرا رسیدن جشن، همه بچه‌ها به تعداد مساوی، اسباب‌بازی هدیه گرفتند. تعداد اسباب‌بازی‌های هر بچه، به اندازه ۹ واحد از تعداد کل بچه‌ها کمتر بود. اگر ۹ بچه در جشن شرکت کرده بودند و به هر بچه یک اسباب‌بازی بیشتر داده می‌شد تعداد اسباب‌بازی‌های قبلی، کفایت نمی‌کرد. اگر بدانیم تعداد بچه‌های شرکت‌کننده در جشن، عددی فرد است، چند اسباب‌بازی هدیه داده شده است؟

(۴) ۲۲

(۳) ۱۸

(۲) ۲۰

(۱) ۱۱



آزمون (۳)

۲۱- بین اعداد زیر، یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال باید چه عددی قرار گیرد؟

۵, ۱۵, ۲۷, ۴۵, ۶۳, ۸۱, ۹۹, ?

۱۳۶ (۴)

۱۱۷ (۳)

۱۲۳ (۲)

۱۳۵ (۱)

۲۲- اگر ۲۰ مرد یا ۲۴ زن یا ۴۰ پسر کاری را در ۱۲ روز کاری ۸ ساعته انجام دهند، چند مرد با ۶ زن و ۲ پسر می‌توانند کاری چهار برابر بزرگ‌تر را در ۱۲ روز کاری ۵ ساعته انجام دهند؟

۱۲۸ (۴)

۱۲۲ (۳)

۹۶ (۲)

۱۶۰ (۱)

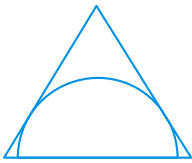
۲۳- در شکل زیر یک نیم‌دایره درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به گونه‌ای محاط شده است که قطر نیم‌دایره روی یکی از اضلاع مثلث است و کمان آن مماس بر دو ضلع دیگر مثلث است. اگر طول ضلع مثلث ۴ باشد، طول قطر چند است؟

$2\sqrt{3}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)



۲۴- قرار است ۵ توپ را در سه جعبه قرار دهیم. هر جعبه ظرفیت همه توپ‌ها را دارد. اگر توپ‌ها متفاوت باشند ولی جعبه‌ها یکسان باشند، به چند طریق می‌توانیم توپ‌ها را درون جعبه‌ها قرار دهیم، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد؟

۶ (۴)

۱۵ (۳)

۲۳ (۲)

۲۵ (۱)

۲۵- شش رابطه نادرست با نمایش دیجیتال ارقام ۰ تا ۹ که با چوب‌کبریت ساخته شده‌اند نشان داده شده است.

در چند رابطه می‌توان فقط با افزودن یا جابه‌جا کردن (و نه حذف) دقیقاً یک چوب‌کبریت تساوی برقرار کرد؟

$$90 - 50 = 30$$

$$12 \times 6 - 32 = 64$$

۴ (۱)

$$53 + 13 = 12 \times 6$$

$$9 - 8 = 8$$

۶ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

$$72 + 2 = 24 - 12$$

$$96 + 6 = 15 \times 6$$

۲۶- فاصله بین دو ایستگاه A و B برابر ۴۸ کیلومتر است. در ساعت ۹، کشتی از ایستگاه A به راه افتاد و در جهت جریان آب رودخانه به طرف ایستگاه B رفت. یک ساعت در B توقف کرد، سپس به طرف A برگشت و در ساعت ۱۷ همان روز به ایستگاه A رسید. سرعت جریان آب، برابر است با ۲ کیلومتر در ساعت. سرعت اختصاصی کشتی (یعنی سرعت آن در آب ساکن) چند کیلومتر در ساعت است؟

۱۸ (۴)

۱۴ (۳)

۴۲ (۲)

۲۸ (۱)

۲۷- آب به وسیله دو لوله با قطرهای متفاوت وارد مخزن می‌شود. روز اول با کار هر دو لوله، ۱۴ مترمکعب آب، وارد مخزن شد. روز دوم، تنها لوله کوچک‌تر باز بود که با ۵ ساعت کار بیشتر نسبت به روز اول، باز هم ۱۴ مترمکعب آب به مخزن ریخت. روز سوم، که در مدتی به اندازه روز دوم آب به مخزن می‌ریخت، ابتدا هر دو لوله باز بودند و ۲۱ مترمکعب آب به مخزن وارد کردند. سپس تنها لوله بزرگ‌تر کار می‌کرد که باز هم ۲۰ مترمکعب آب وارد مخزن کرد. اگر راندمان هر لوله را ثابت فرض کنیم، هر لوله چقدر آب در هر ساعت وارد مخزن می‌کند؟

۵ و ۳ (۴)

۷ و ۲ (۳)

۲ و ۵ (۲)

۷ و ۳ (۱)

۲۸- در نتیجه پاک کردن یک ماده خام، ناخالصی آن از ۲۰٪ به ۵٪ کاهش یافته است. از ماده خام نخستین، چقدر باید انتخاب کرد تا ۱۶۰ کیلوگرم از پاک شده آن به دست آید؟

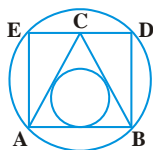
۱۸۵ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

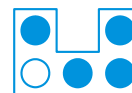
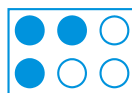
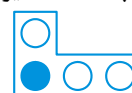
۲۹- یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و ABDE یک مستطیل است که DE از C عبور می‌کند. اگر شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ABC برابر با ۱ باشد، اندازه‌ی قطر دایره‌ی گذرنده از نقاط A، B، D و E چند است؟



- (۱) $\sqrt{17}$
- (۲) $\sqrt{23}$
- (۳) $\sqrt{19}$
- (۴) $\sqrt{21}$

۳۰- چهار تیم والیبال در یک تورنمنت ۶ روزه شرکت می‌کنند. هر دو تیم با هم دقیقاً دو بار بازی می‌کنند و هر تیم در هر روز یک بازی می‌کند. شکل سمت چپ نتیجه‌ی نهایی برد و باخت‌ها را نشان می‌دهد که بخشی از آن کنده شده و به چهار قسمت تقسیم شده است که در شکل سمت راست دیده می‌شود. تمام قطعه‌ها یک رو چاپ شده‌اند. دایره‌های سیاه نشان‌دهنده‌ی برد و دایره‌های سفید نشان‌دهنده‌ی باخت است. کدام تیم تورنمنت را برده است؟

تیم‌ها	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه
A	○					
B	○					
C	●	○				
D	●					



D (۴)

C (۳)

B (۲)

A (۱)

آزمون (۱۴)

۳۱- می‌خواهیم ۴۸ دانش‌آموز را در ردیف‌هایی بنشانیم به طوری که تعداد افراد همه ردیف‌ها یکسان باشد. اگر حداقل تعداد افراد در یک ردیف ۳ نفر باشد و حداقل دو ردیف باید داشته باشیم به چند حالت متفاوت می‌توان این دانش‌آموزان را روی صندلی‌ها نشاناد؟

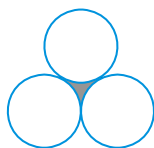
- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۵

۳۲- بین اعداد زیر، یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال کدام عدد باید قرار گیرد؟

$$2520, 1260, 840, 630, 504, 420, 360, ?$$

- (۱) ۳۰۴
- (۲) ۲۵۲
- (۳) ۲۸۰
- (۴) ۳۱۵

۳۳- سه دایره با شعاع ۲cm، دوه‌دو با هم مماس هستند. مساحت محصور بین این سه دایره چند سانتی‌متر مربع است؟



- (۱) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$
- (۲) $4\sqrt{3} - \pi$
- (۳) $6\sqrt{3} - 2\pi$
- (۴) $4\sqrt{3} - 2\pi$

۳۴- دو ضلع یک مثلث ۵ و ۷ سانتی‌متر هستند. طول ضلع سوم چند سانتی‌متر باشد تا مثلث بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد؟

- (۱) $\sqrt{58}$
- (۲) $\sqrt{74}$
- (۳) $\sqrt{42}$
- (۴) $\sqrt{40}$

۳۵- در کلاسی ۱۲۰ دانش‌آموز وجود دارند که از ۱ تا ۱۲۰ شماره‌گذاری شده‌اند. همه شماره‌های زوج در درس فیزیک اسم نوشته‌اند. آنهایی که شماره‌شان بر ۵ بخش‌پذیر است در درس شیمی اسم نوشته‌اند و کسانی که عددشان بر ۷ بخش‌پذیر بوده است. چه تعداد از این افراد در هیچ کدام از این دروس ثبت نام نکرده‌اند؟

- (۱) ۱۹
- (۲) ۴۱
- (۳) ۲۱
- (۴) ۲۶

۳۶- دو طرح ساختمانی داریم. در طرح اول، قرار است چند بلوک ساختمانی مسکونی وجود داشته باشد که کاملاً شبیه هم و روی هم، شامل ۱۲۰۹۶ آپارتمان باشند. در طرح دوم ۸ بلوک ساختمانی بیشتر از طرح اول در نظر گرفته شده است که باز هم شبیه یکدیگرند، ولی در هر بلوک، بیشتر از هر بلوک طرح اول، آپارتمان وجود دارد. تعداد کل آپارتمان‌های طرح دوم، ۲۳۶۲۵ عدد است. در طرح اول، چند بلوک ساختمانی وجود دارد؟

- (۱) ۲۱
- (۲) ۶
- (۳) ۲۵
- (۴) ۲۷



۳۷- اگر مبلغی را در ابتدای سال، در بانکی بگذاریم، در آخر سال، درصد معینی به آن اضافه می‌شود (و این درصد، برای بانک‌های مختلف متفاوت است). در آغاز سال، $\frac{3}{5}$ پولی را در بانک اول و بقیه را در بانک دوم گذاشته‌ایم. در پایان سال اول، مجموع پول‌های دو بانک روی هم، ۵۹۰ واحد پول و در پایان سال بعد، ۷۰۱ واحد پول شد. اگر در ابتدا، $\frac{3}{5}$ پول را در بانک دوم و بقیه را در بانک اول می‌گذاشتیم، در جریان یک سال، مجموع پول‌ها، برابر ۶۱۰ واحد پول می‌شد. مجموع پول‌ها، در انتهای سال دوم، در این بانک‌ها چند واحد می‌شود؟

- (۱) ۷۳۰ (۲) ۵۰۷ (۳) ۷۴۹ (۴) ۸۳۴

۳۸- سه آلیاژ در اختیار داریم. اولی شامل ۴۵٪ قلع و ۵۵٪ سرب، دومی شامل ۱۰٪ بیسموت، ۴۰٪ قلع و ۵۰٪ سرب و سومی شامل ۳۰٪ بیسموت و ۷۰٪ سرب است. از آن‌ها می‌خواهیم آلیاژ تازه‌ای درست کنیم که ۱۵٪ بیسموت داشته باشد. حداکثر و حداقل درصد سرب در این آلیاژ تازه، چند درصد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۵۵ و ۵۸ (۲) ۵۵ و ۶۲/۵ (۳) ۵۸ و ۶۲/۵ (۴) ۴۸ و ۵۸

۳۹- سه ماشین خاک‌برداری، منطقه‌ای را خاک‌برداری می‌کنند. تفاوت قدرت کار ماشین اول و سوم، ۳ برابر تفاوت قدرت کار ماشین‌های دوم و سوم است. زمانی که لازم است تا با ماشین اول $\frac{4}{5}$ تمام کار را انجام دهد، برابر است با زمانی که لازم است تا ابتدا ماشین دوم $\frac{1}{15}$ کار و سپس به دنبال او، ماشین سوم $\frac{9}{28}$ بقیه‌ی کار را انجام دهد. قدرت کار ماشین اول، چند برابر قدرت کار ماشین دوم است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

۴۰- بار را در واگن‌هایی به ظرفیت هر کدام ۸۰ تن جا دادند. ولی معلوم شد که یکی از واگن‌ها، کاملاً پر نشده است. آن وقت، همه‌ی بارها را به واگن‌هایی منتقل کردند که ظرفیت هر کدام ۶۰ تن بود؛ در این‌جا ناچار شدند به تعداد واگن‌ها، ۸ واگن اضافه کنند، با وجود این، معلوم شد که باز هم یکی از واگن‌ها کاملاً پر نیست. بالاخره از واگن‌های با ظرفیت ۵۰ تن استفاده کردند؛ باز هم به ۵ واگن اضافی نیاز پیدا کردند، ولی همه‌ی واگن‌ها کاملاً پر شده بود. وزن کل بار چند تن بوده است؟

- (۱) ۱۷۰۰ (۲) ۱۷۵۰ (۳) ۱۸۰۰ (۴) ۱۸۵۰

آزمون (۱۵)

۴۱- بین اعداد زیر، یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال کدام اعداد باید قرار گیرد؟

۰, ۱۰, ۱۱۱, ۰, ۳۱۱, ۱۳۲۱۱, ۰, ?

- (۱) ۳۱۱۱۱۱۰۱۱۰۲ (۲) ۱۱۱۳۱۲۲۱۱۰ (۳) ۳۱۱۳۱۱۲۲۲۱۱۰ (۴) ۱۱۱۳۱۲۳۱۲۰

۴۲- استخری توسط یک شیر ورودی در ۴ ساعت پر می‌شود و توسط یک شیر خروجی در ۵ ساعت خالی می‌شود. در ابتدا استخر خالی بوده است. شیر ورودی را در ساعت ۱ بعدازظهر باز می‌کنند و پس از مدتی شیر خروجی را باز می‌کنند، اگر استخر ساعت ۱۱ عصر پر شود و زودتر از این زمان پر نشده باشد، چه زمانی شیر خروجی باز شده است؟

- (۱) ساعت ۴ بعدازظهر (۲) ساعت ۲:۳۰ بعدازظهر (۳) ساعت ۳ بعدازظهر (۴) ساعت ۳:۳۰ بعدازظهر

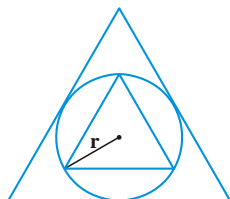
۴۳- با مخلوط کردن دو نوع گندم به نسبت ۲ به ۳ و فروختن مخلوط به قیمت کیلویی ۲۲ تومان فروشنده می‌تواند ۱۰ درصد سود داشته باشد. اگر قیمت گندمی که مقدار کمتری در مخلوط دارد کیلویی ۱۴ تومان باشد، قیمت هر کیلو از دیگر نوع گندم چند تومان است؟

- (۱) ۲۳ تومان (۲) ۲۵ تومان (۳) ۲۴ تومان (۴) ۲۶ تومان

۴۴- می‌خواهیم ۶۸۸ پرتقال را به گونه‌ای در تعدادی ردیف بچینیم که تعداد میوه‌های هر ردیف ۴ عدد از ردیف قبلی بیشتر باشد. در مورد ردیف آخر نیز این نظم برقرار است. اختلاف بین تعداد میوه‌های ردیف اول و آخر چند است؟

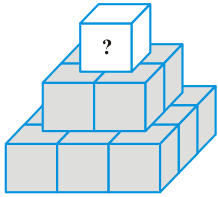
- (۱) ۴۴ (۲) ۶۸ (۳) ۵۲ (۴) ۶۰

۴۵- مطابق شکل زیر، دایره‌ای درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط شده است. مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری درون این دایره محاط شده است. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر چند است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) $3\sqrt{3}$
(۴) $2\sqrt{3}$

۴۶- گیتی ۱۴ عدد طبیعی متفاوت را روی هر کدام از مکعب‌های هرم زیر می‌نویسد. مجموع ۹ عدد طبیعی نوشته شده در مکعب‌های پایینی برابر با ۵۰ است. عدد طبیعی نوشته شده روی هر مکعب با مجموع اعداد نوشته شده روی ۴ مکعب زیرین آن برابر است. بزرگترین عدد طبیعی ممکن که می‌تواند روی بالاترین مکعب نوشته شود، چیست؟



- (۱) ۱۱۲
(۲) ۱۰۴
(۳) ۱۱۰
(۴) ۱۱۸

۴۷- تعداد کتاب‌های ریاضی و زبان، در کتابخانه، در برابر $\frac{11}{13}$ تعداد کتاب‌های هنری این کتابخانه است. برای انتقال کتابخانه به شهری دیگر، کتاب‌ها را در دو واگن جا داده‌اند. معلوم شد که $\frac{1}{15}$ کتاب‌های ریاضی و زبان و $\frac{18}{19}$ کتاب‌های هنری، در واگن اول جا داشتند (و بنابراین، در واگن دوم، $\frac{1}{19}$ کتاب‌های هنری و $\frac{14}{15}$ کتاب‌های ریاضی و زبان قرار گرفتند). در کتابخانه، چند کتاب ریاضی و زبان (با هم) و چند کتاب هنری وجود دارد، به شرطی که در واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ کتاب و در واگن دوم، کمتر از ۱۰۰۰۰ کتاب جا گرفته باشد؟

- (۱) ۱۱۱۱۵ و ۹۴۰۵ (۲) ۱۰۸۲۰ و ۹۱۲۵ (۳) ۱۱۴۱۰ و ۹۶۹۵ (۴) ۱۰۵۴۵ و ۸۸۳۵

۴۸- دو ظرف داریم: ظرف اول پر از گلیسیرین خالص و ظرف دوم پر از آب است. دو ملاقه‌ی دو لیتری برمی‌داریم: اولی را از ظرف اول پر از گلیسیرین و دومی را از ظرف دوم پر از آب می‌کنیم، سپس ملاقه‌ی اول را در ظرف دوم و ملاقه‌ی دوم را در ظرف اول خالی می‌کنیم و محتوی هر دو ظرف را کاملاً به هم می‌زنیم. بعد دوباره، ملاقه‌ی اول را از مخلوط ظرف اول و ملاقه‌ی دوم را از مخلوط ظرف دوم پر می‌کنیم و سپس ملاقه‌ی دوم را در ظرف اول خالی می‌کنیم. محلول حاصل در ظرف اول، شامل ۴۰٪ گلیسیرین خالص می‌شود. مجموع حجم‌های دو ظرف، به شرطی که حجم ظرف دوم، چهار برابر حجم ظرف اول باشد، چند لیتر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۲/۵ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۴۹- دو گروه باید بار کشتی را تخلیه کنند. اگر زمانی را که برای تخلیه‌ی بار کشتی تنها به وسیله‌ی گروه اول لازم است، به زمان لازم برای تخلیه‌ی کشتی به وسیله‌ی تنها گروه دوم، اضافه کنیم، ۱۲ ساعت به دست می‌آید. این زمان‌ها برحسب ساعت، به شرطی که تفاضل این دو زمان، برابر ۴۵٪ زمانی باشد که برای تخلیه‌ی بار کشتی به وسیله‌ی دو گروه با هم، لازم است، چقدر است؟

- (۱) $\frac{14}{3}$ و $\frac{17}{3}$ (۲) ۵ و $\frac{17}{3}$ (۳) $\frac{22}{3}$ و $\frac{16}{3}$ (۴) $\frac{20}{3}$ و $\frac{16}{3}$

۵۰- دانش‌آموز، در ایستگاه A از تراموا پیاده شد و پیاده به مدرسه رفت. اگر او تا ایستگاه B با تراموا و سپس، از B تا مدرسه پیاده می‌رفت، یک دقیقه وقت کمتر صرف می‌کرد. ولی، اگر دانش‌آموز، سرعت پیاده‌روی خود را از A تا مدرسه، دو برابر کند، برای رسیدن به مدرسه، به همان زمانی نیاز دارد که برای رسیدن تراموا از A تا B لازم است. به شرطی که بدانیم فاصله‌ی A تا مدرسه ۳۰۰ متر و فاصله‌ی B تا مدرسه ۱۰۰ متر می‌باشد، سرعت پیاده‌روی دانش‌آموز چند کیلومتر در ساعت است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) اطلاعات سؤال کافی نیست.

آزمون (۷)

۵۱- کدام گزینه می‌تواند به جای علامت سؤال قرار گیرد؟

- 199
280
344
360
396
?

- (۱) ۴۱۰
(۲) ۴۵۷
(۳) ۴۷۷
(۴) ۴۹۷



کله ۵۲- می دانیم که اگر بخواهیم با یک خط یا منحنی یک مثلث متساوی الاضلاع را به دو بخش با مساحت مساوی تقسیم کنیم، کوتاه ترین خط یا منحنی که بتوان با آن چنین کاری انجام داد، یک کمان از دایره‌ای به مرکز یکی از رئوس مثلث است. اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع a باشد، شعاع این کمان کدام است؟

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}\pi}} \quad (۴)$$

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} \quad (۳)$$

$$a \sqrt{\frac{3}{\pi\sqrt{3}}} \quad (۲)$$

$$a \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} \quad (۱)$$

کله ۵۳- ارقام ۱ تا ۹ طوری در خانه‌های سفید جدول زیر قرار می‌گیرند که تساوی‌های مشخص شده در هر سطر و ستون برقرار باشد (تکرار ارقام مجاز است). نهایتاً مجموع ارقام نوشته شده سطر اول و سطر سوم چندتا با مجموع ارقام نوشته شده در سطر دوم و سطر چهارم اختلاف دارد؟

9	÷		×		=	6
+		-		×		+
	+		-	4	=	
÷		+		-		÷
	×	3	-		=	
=		=		=		=
5	÷		+		=	

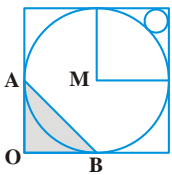
۱ (۰)

۲ (۱۰)

۳ (۸)

۴ (۶)

کله ۵۴- شکل زیر مربعی را نشان می‌دهد که یک دایره داخل آن محاط شده است. نقاط A و B وسط اضلاع هستند. همچنین مربع کوچک داخل شکل، یک رأس آن از مرکز دایره می‌گذرد و دایره‌ی کوچکی بر دو ضلع قائمه و دایره‌ی بزرگ مماس است. اگر مساحت مثلث OAB ، ۳۲ باشد، شعاع دایره‌ی کوچک کدام است؟




$$۱) ۸ - ۲\sqrt{2}$$

$$۲) ۱۶ - ۲\sqrt{2}$$

$$۳) ۲۴ - ۱۶\sqrt{2}$$

$$۴) ۲۴ - ۸\sqrt{2}$$

کله ۵۵- برای پوشاندن کامل سطح مستطیل با طول ۱۲ و عرض ۸ واحد، با موزائیک‌هایی به شکل ، حداقل به چند موزائیک نیاز داریم؟

(هر کدام از مربع‌ها به طول ضلع واحد هستند.)

$$۳۲ (۴)$$

$$۲۴ (۳)$$

$$۳۶ (۲)$$

$$۱۲ (۱)$$

کله ۵۶- برای آماده کردن یک تونل، سه گروه کارگر در سه نوبت کار می‌کنند؛ میزان کار گروه‌ها، یکی است. سرعت حفر تونل در نوبت دوم $1/2$ برابر سرعت حفر در نوبت اول است و در نوبت سوم، ساعتی $0/6$ متر بیشتر از نوبت دوم کار انجام می‌شود. کارگران نوبت دوم، کار خود را در زمانی که یک ساعت کمتر از زمان اتمام کار به وسیله‌ی کارگران نوبت اول بود، انجام دادند؛ و کارگران نوبت سوم، نیمی از کل برنامه‌ی خود را ۳ ساعت سریع‌تر از تمام برنامه‌ی گروه دوم به پایان رساندند. کارگران نوبت اول، هر ساعت چند متر از تونل را حفر می‌کنند؟

$$۴/۵ (۴)$$

$$۲ (۳)$$

$$۳/۵ (۲)$$

$$۴ (۱)$$

کله ۵۷- بنابر پیش‌بینی جامعه‌شناسان، در فاصله‌ی سال‌های از ۱۹۵۶ تا ۱۹۷۹، باید ۳۱۵۰ ازدواج انجام می‌گرفت. در واقع، در سال ۱۹۵۶، ۱۰۰ ازدواج انجام شد. ولی در سال‌های بعد، هر سال ۵ ازدواج بیش از سال قبل انجام شد تا به مرز برآورد قبلی ۳۱۵۰ ازدواج رسید. از آن به بعد، تعداد ازدواج‌های هر سال ۱۱ عدد کمتر از سالی بود که رکورد تعداد ازدواج‌ها را شکسته بود. در این ۲۴ سال، چند درصد، نسبت به تعداد پیش‌بینی شده، ازدواج صورت گرفته است؟

$$۱۸ (۴)$$

$$۲۲ (۳)$$

$$۲۰ (۲)$$

$$۲۴ (۱)$$

کله ۵۸- از نقطه‌های A و B ، در یک زمان و به طرف هم، اتومبیل و موتورسیکلت حرکت کردند. اتومبیل در دقیقه اول، ۱۸۰۰ متر و در دقیقه‌های بعد، هر دقیقه ۱۲۰ متر کمتر از دقیقه قبل حرکت می‌کرد. موتورسیکلت، پنج دقیقه اول را، دقیقه‌ای ۱۲۰ متر و در دقیقه‌های بعد، هر دقیقه ۶۰ متر بیشتر از دقیقه قبل جلو می‌رفت. اتومبیل بعد از چه فاصله‌ای به موتورسیکلت می‌رسد، به شرطی که فاصله بین دو نقطه A و B ، برابر $19/5$ کیلومتر باشد؟

$$۱۴/۴ (۴)$$

$$۱۳/۶ (۳)$$

$$۱۵/۵ (۲)$$

$$۱۲/۸ (۱)$$

۵۹- دو آلیاژ داریم که از روی و مس درست شده‌اند، آلیاژ اول ۲ کیلوگرم و آلیاژ دوم ۳ کیلوگرم وزن دارد. این دو آلیاژ را با ۵ کیلوگرم آلیاژ دیگری (از روی و مس)، که عیار روی در آن ۴۵٪ بود و آلیاژی از روی و مس به دست آوردیم که عیار روی در آن ۵۰٪ است. اگر درصد روی در آلیاژ اول به اندازه درصد روی در آلیاژ دوم و برعکس، درصد روی در آلیاژ دوم به اندازه درصد روی در آلیاژ اول بود و آنها را با ۵ کیلوگرم آلیاژ با ۶۰٪ روی مخلوط می‌کردیم، به آلیاژی با ۵۵٪ روی می‌رسیدیم. عیار روی در آلیاژهای اول و دوم چند درصد است؟

- (۱) ۶۰ و ۴۰ (۲) ۷۵ و ۶۰ (۳) ۶۰ و ۴۰ (۴) ۷۰ و ۳۰

۶۰- در اطلاعیه یک کارگاه ساختمانی گفته شده است که، تعداد کارگرانی که به مرخصی رفته‌اند، بین ۱۷٪ تا ۲۷٪ کل کارگران را تشکیل می‌دهد. حداقل تعداد کارگران این کارگاه، چقدر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۵۰ (۳) ۵۵ (۴) ۵۸

آزمون (V)

۶۱- در دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه تهران، ۷۰۰ دانشجوی پسر و دختر در رشته‌های MBA و اقتصاد وجود دارد. ۳۲۰ دانشجوی در رشته اقتصاد تحصیل می‌کنند و تعداد دختران رشته MBA، ۲۱۰ نفر است. پنجاه درصد از دانشجویان MBA و ۴۰ درصد از دانشجویان اقتصاد در ترم جاری درس اقتصاد خرد دارند. ۹۰ دانشجوی پسر MBA درس اقتصاد خرد ندارند. تعداد دانشجویان دختر رشته اقتصاد که درس اقتصاد خرد دارند، از نصف تعداد دختران MBA که این درس را دارند، کمتر است. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند تعداد پسران رشته اقتصاد باشد که در درس اقتصاد خرد ثبت‌نام کرده‌اند؟

- (۱) ۶۶ (۲) ۷۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۳۰

۶۲- ۱۰۰ عدد مکعب یکسان به طول واحد به صورت‌های یک جعبه مکعب واحد، یک جعبه مکعب $2 \times 2 \times 2$ (که شامل ۸ مکعب واحد است)، یک جعبه مکعب $3 \times 3 \times 3$ (که شامل ۲۷ مکعب واحد است) و یک جعبه مکعب $4 \times 4 \times 4$ (که شامل ۶۴ مکعب است) وجود دارد. این مکعب‌ها به هم متصل نیستند. همه وجه‌های بیرونی این مکعب‌ها رنگی شده است، ولی وجه‌های داخلی رنگ نشده است. این چهار مکعب را به مکعب‌های واحد تجزیه کرده و سپس به صورت یک مربع 10×10 مسطح (یا مکعب $10 \times 10 \times 10$) در کنار هم قرار می‌دهیم. بالا و همه قسمت‌های جانبی این مربع باید رنگی باشند؛ ولی نیازی به رنگی بودن کف آن نیست. حداقل چه تعداد وجه از مکعب‌های واحد را باید رنگ آمیزی کنیم تا این طراحی جدید با شرایط گفته شده درست شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۶۳- بین اعداد زیر، یک ارتباط منطقی برقرار است. به جای علامت سؤال کدام عدد باید قرار گیرد؟

$$6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, ?$$

- (۱) ۶۲۵ (۲) ۷۲۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۷۶۰

۶۴- ریسمانی را به سه بخش که طول آن‌ها به نسبت‌های ۲ : ۵ : ۶ هستند، علامت‌گذاری می‌کنیم. دو گره A و B، طول ریسمان را به طول‌های مختلف کاهش می‌دهند. در بخش اول، شش گره از نوع ۱ در بخش ۲، ۱۰ گره از نوع B و در بخش ۳، ۵ گره از نوع A و ۵ گره از نوع B ایجاد می‌کنیم. سپس طول سه بخش به ترتیب به نسبت‌های ۱ : ۷ : ۸ تبدیل می‌شوند. نسبت کاهش طول ناشی از گره A به نسبت کاهش طول گره B چند است؟

- (۱) ۳ به ۵ (۲) ۴ به ۵ (۳) ۵ به ۴ (۴) ۵ به ۳

۶۵- حسن و حسین در یک کارخانه کار می‌کنند. حسین پس از هر نه روز کار، یک روز مرخصی دارد. حسن نیز پس از هر شش روز کار، یک روز مرخصی دارد. امروز حسین در مرخصی است و فردا حسن در مرخصی خواهد بود. حداقل چند روز پس از امروز، مرخصی هر دو در یک روز است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۳ (۳) ۵۴ (۴) ۵۰

۶۶- ۴۰ کیلوگرم محلول نمک را در دو ظرف ریخته‌ایم، به نحوی که مقدار نمک خالص در ظرف دوم، ۲ کیلوگرم بیشتر از مقدار نمک خالص ظرف اول باشد. اگر به ظرف دوم، یک کیلوگرم نمک اضافه کنیم، در آن صورت، مقدار نمک خالص ظرف دوم، دو برابر مقدار نمک خالص ظرف اول خواهد شد. وزن محلول ظرف اول چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۲/۵ (۴) ۲۵

۶۷- برای جابه‌جایی زندانیان به وسیله راه‌آهن، چند واگن را اختصاص دادند. در مرکز A، در هر واگن، ۱۲ زندانی جا دادند. در مرکز B تعدادی از زندانیان را پیاده کردند، بقیه زندانیان را به‌طور مساوی در واگن‌هایی جا دادند که تعداد آنها نسبت به تعداد واگن‌های قبلی، ۲ عدد کمتر بود. ضمناً معلوم شد که تعداد زندانیان هر واگن عددی اول است و تعداد واگن‌ها، ۱۴ عدد کمتر از تعداد زندانیان هر واگن است. تعداد زندانیان در مرکز A کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴) ۸۴



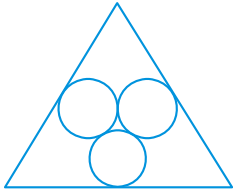
۶۸- جریان آبی به رودخانه می‌ریزد. قایقی از ایستگاه A واقع در مسیر جریان آب، ۸۰ کیلومتر و در جهت جریان پیش می‌رود تا به رودخانه می‌رسد، سپس در رودخانه به طرف بالا و در خلاف جهت حرکت آب خود را به ایستگاه B می‌رساند؛ برای این منظور، یعنی رسیدن از ایستگاه A در مسیر جریان تا ایستگاه B در مسیر رودخانه، روی هم ۱۸ ساعت وقت صرف می‌کند. سپس قایق در جهت عکس، یعنی از B به سمت A حرکت می‌کند و با صرف وقت ۱۵ ساعت، همان مسیر را طی می‌کند تا به A می‌رسد. سرعت اختصاصی قایق، یعنی سرعت آن در آب ساکن، ۱۸ کیلومتر در ساعت و سرعت حرکت آب رودخانه ۳ کیلومتر در ساعت است. فاصله بین ایستگاه A تا ایستگاه B و سرعت «جریان آب» چند کیلومتر در ساعت است؟

- (۱) ۲۰۹ و ۲ (۲) ۲۷ و ۱ (۳) ۲۳ و ۵ (۴) ۲۹ و ۴

۶۹- با برش‌های عرضی، طولی و ارتفاعی می‌خواهیم یک کیک مکعب مستطیل شکل را به ۱۸۰ قسمت مساوی (از نظر شکل و اندازه) تقسیم کنیم. حداقل با چند برش می‌توان این تقسیم‌بندی را انجام داد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۷۰- مطابق شکل، سه دایره درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که بر یکدیگر و یک ضلع مثلث در نقطه وسط ضلع مماس هستند. اگر شعاع همه دایره‌ها ۱ cm باشد، طول ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟



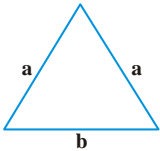
- (۱) $3 + 2\sqrt{3}$
(۲) $4 + 2\sqrt{3}$
(۳) $4 + \sqrt{3}$
(۴) $3 + \sqrt{3}$

آزمون (A)

۷۱- ظرفی لبریز از شیر است. ۸ لیتر از آن را خالی کرده و به جای آن ۸ لیتر آب می‌ریزیم. این عمل را سه بار دیگر نیز انجام می‌دهیم. در نهایت نسبت شیر موجود در ظرف به مخلوط برابر با ۱۶ به ۸۱ است. مقدار شیر درون ظرف در ابتدا چند لیتر بوده است؟

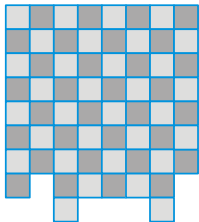
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۴۲

۷۲- مثلثی متساوی‌الساقین دارای محیط ۱۸ cm و طول اضلاع عددی طبیعی است. کمترین سطح ممکن که این مثلث اشغال می‌کند، چند سانتی‌متر مربع است؟



- (۱) $3\sqrt{7}$
(۲) $2\sqrt{7}$
(۳) $6\sqrt{5}$
(۴) $3\sqrt{5}$

۷۳- دو خانه‌ی مربعی 1×1 از یک تخته‌ی شطرنج 8×8 را جدا کرده و در مکان جدیدی مطابق شکل قرار می‌دهیم. می‌خواهیم با تقسیم‌کردن تخته‌ی شطرنج به دو قسمت و چرخاندن آن در جهت درست، دوباره صفحه شطرنج را به شکل صحیح خود درآوریم. آن قسمتی از تخته‌ی شطرنج اصلی که باید جدا شود و چرخانده شود تا صفحه‌ی شطرنج به شکل صحیح خود درآید شامل چند مربع کوچک 1×1 می‌باشد؟



- (۱) ۲۹
(۲) ۲۷
(۳) ۳۱
(۴) ۴۰

۷۴- ماشین خاک‌برداری، سفارشی برای کندن دو خندق، با یک عمق، در دو زمین مختلف دریافت کرد. ماشین ابتدا به خاک‌برداری از زمین اول به طول ۵ متر پرداخت و سپس، سراغ زمین دوم به طول ۳ متر رفت. زمانی که ماشین برای آماده کردن خندق اول صرف کرد، ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه کمتر از زمانی بود که برای جابه‌جا شدن ماشین و کندن خندق دوم لازم بود. اگر قدرت کار ماشین برابر $\frac{1}{4}$ قدرت کار فعلی آن بود، آن وقت، زمانی که برای کندن خندق اول لازم داشت، با زمان انتقال آن از یک خندق به خندق دیگر برابر می‌شد. این ماشین خاک‌برداری، در هر ساعت چه طولی از خندق را می‌تواند خاک‌برداری کند؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

۷۵- دو شناگر در استخری به طول ۵۰ متر، از یک نقطه با یک فاصله‌ی زمانی، پشت سر هم حرکت کردند. شناگر دوم، که با سرعت ۱/۵ متر در ثانیه حرکت می‌کند، ۲۱ متر بعد از نقطه‌ی حرکت به اولی رسید، سپس تا انتهای استخر شنا کرد و $\frac{2}{3}$ ثانیه بعد از برگشت دوباره به شناگر اول رسید. فاصله‌ی زمانی بین آغاز حرکت دو شناگر چند ثانیه است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) ۱

۷۶- تعدادی میوه را اگر در بشقاب‌های ۷ تایی قرار دهیم، هیچ میوه‌ای اضافه نمی‌آید. اگر در بشقاب‌های ۴ تایی قرار دهیم ۲ میوه اضافه می‌آید و اگر در بشقاب‌های ۳ تایی قرار دهیم برای تکمیل بشقاب آخر، ۲ میوه کم می‌آید. اگر بخواهیم میوه‌ها را در جعبه‌های ۱۲۰ تایی قرار دهیم، چند عدد مختلف می‌تواند بیانگر تعداد میوه‌هایی باشد که اضافه می‌آید؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۷۷- سانا از مربع A شروع کرد و پس از چند حرکت متوالی به B رسید. هر حرکت سانا باید در جهت راست یا پایین باشد. او در مسیر مجموع اعدادی را که از آنها می‌گذشت حساب کرد و به ازای هر خانه سیاه ۵ واحد به مجموع اضافه کرد. او از چند مسیر می‌توانست به B برسد، به طوری که مجموع محاسبه شده در پایان ۵۱ باشد؟

A		12		10
	11		11	
10		10		15
	11		14	
10		13		B

- ۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷۸- اتومبیل‌های یک نمایشگاه اتومبیل حداقل یکی از امکانات کیسه هوا، ترمز ABS یا سنسور عقب را دارند. ۷۰ درصد خودروها دارای کیسه هوا، ۳۰ درصد خودروها دارای ترمز ABS و ۴۰ درصد آن‌ها دارای سنسور عقب می‌باشند. حداکثر چند درصد از خودروها هر سه امکان را دارند؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۷۹- یک آژانس مسافرتی می‌خواهد ۱۸۶ گردشگر را با دو نوع خودرو به یک تور یک‌روزه ببرد. در خودروی نوع اول ۹ گردشگر و در خودروی نوع دوم ۵ گردشگر قرار می‌گیرند. در چند حالت مختلف آژانس مسافرتی می‌تواند از خودروهای نوع اول و دوم استفاده کند و همه‌ی گردشگران را به تور یک‌روزه ببرد؟

- ۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۰- در یک کارگاه ریخته‌گری، سرب و روی و قلع با نسبت ۳ و ۴ و ۵ با هم ترکیب می‌شوند و آلیاژ حاصل با سود ۲۰٪ به فروش می‌رسد. همچنین سرب و روی و قلع با نسبت ۳ و ۱ و ۱۱ با هم ترکیب می‌شوند و آلیاژ جدیدی حاصل می‌شود که با سود ۸۰٪ به قیمت ۳ برابر قیمت فروش آلیاژ قبلی به فروش می‌رسد. اگر بخواهیم آلیاژ سوم را به این صورت تشکیل دهیم که سرب و روی و قلع به وزن ۳ و ۷ و ۹ کیلوگرم با هم مخلوط شوند و با سود ۳۰٪ به فروش رود، قیمت فروش ۱۹ کیلوگرم آلیاژ سوم، چند برابر قیمت خرید هر کیلوگرم قلع خواهد شد؟

- ۱) ۶ ۲) ۱۳ ۳) ۷ ۴) ۸/۳

آزمون (۹)

۸۱- به تساوی‌های زیر توجه کنید؛ به جای علامت سؤال کدام عدد باید قرار گیرد که یک ارتباط منطقی برقرار شود؟

- ۱ = ۷ ۱) ۹۹۹۹۷
۲ = ۹۷ ۲) ۹۹۹۱۹
۳ = ۹۹۷ ۳) ۹۹۹۹۱
۴ = ۹۹۷۳ ۴) ۹۹۹۷۹
۵ = ?

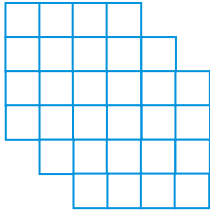
۸۲- علی، بهنام و سجاد سه دوست هستند که کاری را با سرعت‌های متفاوت انجام می‌دهند. وقتی که دو نفر کندتر با هم کار را انجام دهند، N روز طول می‌کشد کار انجام شود. وقتی دو نفر سریع‌تر با هم کار را انجام دهند M روز طول می‌کشد کار انجام شود. اگر یکی از آنها به تنهایی کار را انجام دهد، در مدت زمانی سه برابر وقتی که هر سه نفر با هم کار کنند کار را به پایان می‌رساند. چقدر طول می‌کشد تا هر سه نفر با هم کار را انجام دهند؟

- ۱) $\frac{3MN}{2(M+N)}$ ۲) $\frac{2MN}{(M+N)}$ ۳) $\frac{4MN}{3(M+N)}$ ۴) $\frac{5MN}{2(M+N)}$

۸۳- در یک رستوران تعدادی صندلی سه پایه و چهارپایه قرار دارد. اگر به تعداد میانگین دو نوع صندلی از صندلی های ۳ پایه کم کنیم و به تعداد ۲ برابر میانگین دو نوع صندلی اولیه به صندلی های ۴ پایه اضافه کنیم، تعداد پایه های صندلی ۷۰٪ نسبت به حالت اولیه افزایش می یابد. تعداد کل صندلی های اولیه کدام گزینه می تواند باشد؟

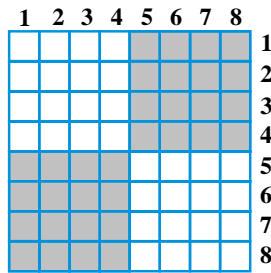
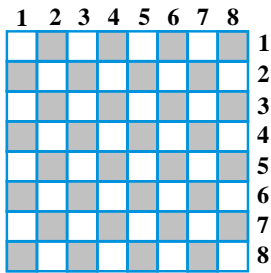
- (۱) ۲۳۸ (۲) ۲۴۰ (۳) ۲۱۸ (۴) ۲۳۱

۸۴- در شکل روبه رو چند مربع قابل مشاهده است؟



- (۱) ۶۲
(۲) ۵۲
(۳) ۷۲
(۴) ۷۸

۸۵- در شکل مقابل یک شبکه ی ۸ در ۸ از لامپ های LED را می بینید که خانه های سیاه لامپ های خاموش و خانه های سفید لامپ های روشن آن هستند. در کنار هر سطر یک کلید قرار دارد که با فشردن آن، همه ی لامپ های آن سطر تغییر وضعیت می دهند. (از روشن به خاموش یا بالعکس). در بالای هر ستون نیز کلیدی وجود دارد که با فشردن آن همه ی لامپ های آن ستون تغییر وضعیت می دهند. با فشردن حداقل چند کلید می توانیم تصویر سمت راست را ایجاد کنیم؟



- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۲
(۴) ۱۶

۸۶- دوچرخه سوار، از مرکز A به طرف مرکز B حرکت کرد؛ ربع ساعت، بعد از او اتومبیلی به دنبال او به راه افتاد. اتومبیل در وسط راه بین A تا B، به دوچرخه سوار رسید و وقتی که اتومبیل به B رسید، دوچرخه سوار هنوز ثلث راه را در پیش رو داشت. دوچرخه سوار فاصله ی A تا B را در چند دقیقه طی می کند، به شرطی که بدانیم سرعت دوچرخه سوار و اتومبیل، در تمام فاصله از A تا B، مقدار ثابتی بوده است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

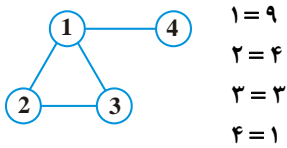
۸۷- دو ظرف، اولی به گنجایش ۱۵ لیتر و دومی به گنجایش ۶ لیتر، برای آمیختن دو مایع A و B در نظر گرفته ایم. ابتدا ۱۲ لیتر از مایع A را، در دو ظرف، روی هم، ریخته ایم. سپس، ظرف کوچک تر را با مایع B پر کرده و به هم زده ایم. بعد، ظرف بزرگ تر را با آمیزه ی حاصل در ظرف کوچک تر، پر کرده ایم. آن وقت، به همان اندازه ی بار اول، از مایع A در ظرف کوچک تر ریخته ایم. مقداری از مایع A که ابتدا در ظرف اول ریخته ایم، به شرطی که نسبت مقدار مایع A نسبت به کل مایعی که در هر یک از ظرف ها وجود دارد، برای هر دو ظرف یکی باشد، چند لیتر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

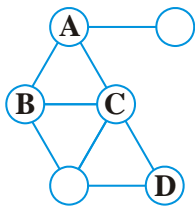
۸۸- در مخزن می توان از طریق دو لوله آب ریخت. اگر تنها لوله اول باز باشد، مخزن یک ساعت زودتر از موقعی پر می شود که تنها لوله دوم باز باشد، اگر گنجایش مخزن ۲ مترمکعب بیشتر و قدرت عبور آب از لوله دوم در هر ساعت $\frac{4}{3}$ مترمکعب بیشتر بود، آن وقت برای پر کردن مخزن از راه لوله دوم، همان قدر وقت لازم بود که برای عبور ۲ مترمکعب آب از لوله اول لازم می شد. اگر بدانیم در مدت پر شدن آن از طریق لوله دوم، ۳ مترمکعب آب از لوله اول خارج می شود، حجم مخزن چند مترمکعب است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

۸۹- در الگوی زیر تساوی را به این صورت تعریف می‌کنیم که عدد نوشته شده در سمت راست علامت تساوی، برابر با مجموع اعدادی است که به صورت مستقیم به هر دایره وصل است. به عنوان مثال:



با توجه به توضیحات فوق در شکل زیر، حاصل $A + B - 2C + D$ چند است؟



$1 = 17$
 $2 = 11$
 $3 = 4$
 $4 = 6$
 $5 = 7$
 $6 = 8$

- ۹ (۱)
 ۷ (۲)
 ۱۳ (۳)
 ۱۵ (۴)

۹۰- تعدادی کارگر قرار است جدول خیابانی را رنگ کنند. اولین کارگر شروع به کار می‌کند. پس از آن هر بیست دقیقه، یک کارگر اضافه می‌شود و نهایتاً پس از ۸ ساعت، کار تمام می‌شود. اگر اولین کارگر شروع به کار کند و پس از آن هر ۴۵ دقیقه، یک کارگر اضافه شود، پس از ۶ ساعت از آغاز کار، چه درصدی از جدول‌های خیابان رنگ نخورده باقی می‌ماند؟

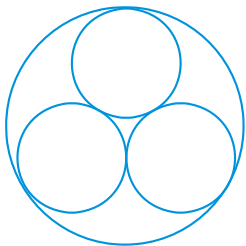
- ۲۷٪ (۱) ۴۵٪ (۲) ۷۳٪ (۳) ۵۵٪ (۴)

آزمون (۱۰)

۹۱- مخزنی ۴۷۵ لیتری با دو شیر آب A و B پر می‌شود به طوری که شیر A، ۵ ساعت بیشتر از شیر B باز است. با توجه به اینکه اگر دو شیر همزمان باز بشوند، ۱۹ ساعت طول می‌کشد تا مخزن پر شود، مدت زمانی که شیر B باز بوده، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

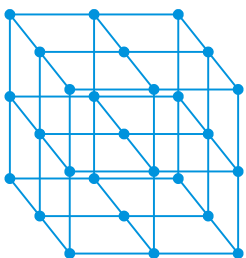
- ۱۰ ساعت (۱) ۱۴ ساعت (۲) ۱۶ ساعت (۳) ۲۰ ساعت (۴)

۹۲- مطابق شکل، سه دایره یکسان در دایره‌ای بزرگ‌تر محصور شده‌اند. این دایره‌ها دایره دو مماس هستند و هر کدام با دایره بزرگ‌تر نیز در یک نقطه مماس است. نسبت شعاع دایره کوچک‌تر به دایره بزرگ‌تر کدام یک از مقادیر زیر است؟



- $4\sqrt{3} - 3$ (۱)
 $2\sqrt{3} - 3$ (۲)
 $\frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$ (۳)
 $\frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}$ (۴)

۹۳- مکعب شکل زیر از ۸ مکعب هم‌اندازه تشکیل شده است و رئوس آن‌ها را با نقاط توپُر مشخص کرده‌ایم. به وسیله خطوط راست می‌خواهیم در شبکه‌ی ۲۷ نقطه‌ای مقابل مثلث متساوی‌الاضلاع با هر اندازه و موقعیتی پیدا کنیم (دقت کنیم که در هر مثلث باید سه نقطه توپُر، دقیقاً در سه رأس آن قرار گیرد). چند مثلث متساوی‌الاضلاع با این شرایط می‌توانیم در شکل پیدا کنیم؟



- ۶۴ (۱)
 ۷۲ (۲)
 ۸۰ (۳)
 ۸۸ (۴)

۹۴- تعدادی توپ هم‌اندازه و هم‌وزن در یک جعبه قرار دارند. آن‌ها ۸ رنگ مختلف دارند و از هر رنگ ۹۰ توپ داریم. بدون نگاه کردن حداقل چند توپ باید از جعبه بیرون بیاوریم تا از ۴ رنگ مختلف و از هر کدام حداقل ۹ عدد داشته باشیم؟

- ۳۰۸ (۱) ۳۰۷ (۲) ۳۱۱ (۳) ۳۱۲ (۴)



کله ۹۵- پنج جعبه داریم که در هر کدام از آن‌ها تعدادی توپ سفید و مشکی قرار دارد. تعداد توپ‌ها در هر جعبه ۱۱۰، ۱۰۵، ۱۰۰، ۱۱۵ و ۱۱۳ عدد است. اگر یکی از جعبه‌ها را کنار بگذاریم، در چهار جعبه‌ی باقی‌مانده، تعداد توپ‌های سفید، سه برابر تعداد توپ‌های مشکی است. جعبه‌ای که کنار گذاشته شده بود، حاوی چند توپ بوده است؟

(۴) ۱۰۵

(۳) ۱۱۵

(۲) ۱۱۳

(۱) ۱۱۰

کله ۹۶- کاغذی مربع‌شکل در اختیار است که یک طرف آن رنگی و طرف دیگر آن سفید است. می‌خواهیم با تازدن، کاغذ را به بزرگترین مربعی تبدیل کنیم که هر دو طرف آن رنگی باشد. کمترین تعداد تازدن چندتاست؟



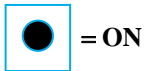
(۱) ۲

(۲) ۶

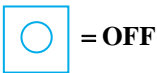
(۳) ۴

(۴) ۸

کله ۹۷- چهار لامپ ۱، ۲، ۳ و ۴ توسط چهار کلید A، B، C و D می‌توانند خاموش یا روشن شوند. نحوه‌ی تأثیر کلیدها روی لامپ‌ها به صورت زیر است:



= ON



= OFF

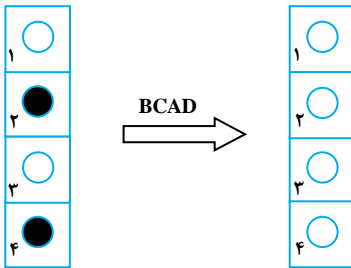
* کلید A لامپ‌های ۱ و ۲ را خاموش یا روشن می‌کند.

* کلید B لامپ‌های ۲ و ۴ را خاموش یا روشن می‌کند.

* کلید C لامپ‌های ۱ و ۳ را خاموش یا روشن می‌کند.

* کلید D لامپ‌های ۳ و ۴ را خاموش یا روشن می‌کند.

روی شکل سمت چپ کلیدزنی BCAD را اعمال کردیم و نتیجه شکل سمت راست شد، کدام کلید عمل نکرده است؟



(۱) A

(۲) B

(۳) C

(۴) D

کله ۹۸- فرودگاهی تعدادی درب اتوماتیک دارد که هر کدام به صورت شبانه‌روزی به طور منظم در مضارب صحیحی از دقیقه باز و بسته می‌شوند. فاصله بین دوبار باز و بسته شدن متوالی برای هیچ دو دربی یکسان نیست. در طول سه شبانه‌روز، ۲۷ بار همه‌ی درب‌ها با هم باز و بسته می‌شوند. این فرودگاه حداکثر چه تعداد درب اتوماتیک می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۱۰

(۳) ۱۶

(۲) ۸

(۱) ۱۲

کله ۹۹- یک شیرفروش متقلب ادعا می‌کند که شیر را به قیمت هزینه تمام شده می‌فروشد، ولی شیر را با آب قاطی می‌کند به طوری که ۲۵٪ سود به دست می‌آورد. درصد آب در مخلوط چند است؟

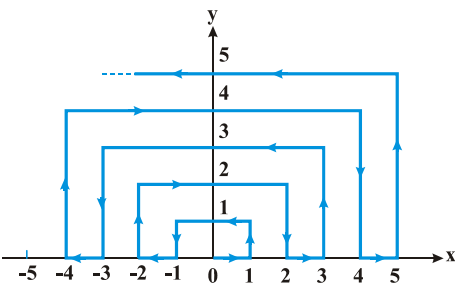
(۴) ۲۵٪

(۳) ۲۰٪

(۲) ۶/۲۵٪

(۱) ۴٪

کله ۱۰۰- متحرکی مطابق شکل از مبدأ مختصات در مسیر مشخص شده حرکت می‌کند به طوری که هر واحد را (به صورت افقی یا عمودی) در مدت ۱ ثانیه می‌پیماید. پس از گذشت ۱۳۹۶ ثانیه از آغاز حرکت، متحرک در کدام نقطه قرار دارد؟



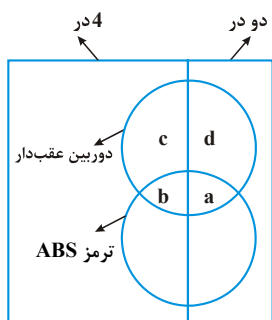
(۱) (۱۸ و ۲۶)

(۲) (۲۶ و ۱۸)

(۳) (۲۶ و -۱۸)

(۴) (۱۸ و -۲۶)

آزمون (۱)



۱- گزینه «۲» برای درک بهتر چنین سؤالاتی رسم شکل بسیار مفید است. از ۵۰۰ ماشین، ۱۶۵ ماشین دو در هستند، پس $۳۳۵ = ۵۰۰ - ۱۶۵$ ماشین چهار در داریم. ۱۲۰ ماشین چهار در داریم که مجهز به دوربین عقب هستند. اما نمی‌دانیم چند تای آن‌ها هم دوربین عقب دارند و هم ترمز ABS، پس فرض می‌کنیم C تعداد آن‌هایی باشد که هم دوربین عقب دارند و هم ترمز ABS و لذا $b + c = ۱۲۰$ در نظر می‌گیریم.

از طرفی هجده درصد (۱۸٪) همه ماشین‌ها، دارای دوربین عقب و ترمز ABS هستند:

$$a + b = \frac{۱۸}{۱۰۰}(a + b + c + d) = \frac{۹}{۵۰}(۱۲۰ + a + d)$$

از آنجا که b و a اعداد طبیعی هستند، مجموع (a+d) یا ماشین‌های دو در مجهز به دوربین عقب باید طوری باشد که مجموع آنها با ۱۲۰ بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد، پس a+d یا تعداد ماشین‌های دو در مجهز به دوربین عقب باید ۳۰، ۸۰، ۱۳۰، ۱۸۰ و ... باشد. از آنجایی که تعداد کل ماشین‌های دو در ۱۶۵ تاست، پس $a + d = ۱۸۰$ نادرست است. فعلاً سه گزینه برای a+d داریم: ۳۰، ۸۰ و ۱۳۰ که برای هر کدام تعداد a+d یا تعداد ماشین‌های دارای هم سیستم دوربین عقب، هم ترمز ABS را به دست می‌آوریم:

$$a + d = ۳۰ \Rightarrow a + b = \frac{۹۰}{۵۰}(۱۲۰ + ۳۰) = ۲۷$$

$$a + d = ۸۰ \Rightarrow a + b = \frac{۹}{۵۰}(۱۲۰ + ۸۰) = ۳۶$$

$$a + d = ۱۳۰ \Rightarrow a + b = \frac{۹}{۵۰}(۱۲۰ + ۱۳۰) = ۴۵$$

از طرفی داریم که ۴۰ درصد ماشین‌های مجهز به هر دو سیستم، ماشین دو در هستند، پس داریم:

$$a = \frac{۴۰}{۱۰۰}(a + b) = \frac{۲}{۵}(a + b)$$

چون a یک عدد طبیعی است، باید a+b عددی باشد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، که از بین اعداد بالا فقط $a + b = ۴۵$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

$$\Rightarrow a = \frac{۴}{۵}(۴۵) = ۱۸$$

در نتیجه:

سؤال از ما تعداد ماشین‌های چهار در را خواسته که به هر دو سیستم مجهز هستند، یعنی b را خواسته است.

$$\Rightarrow b = (a + b) - a = ۴۵ - ۱۸ = ۲۷$$

۲- گزینه «۳» وقتی با ۲۰ درصد سود ۹۶ تومان می‌فروشیم، قیمت تمام شده یک کیلو مخلوط برابر است با:

$$\frac{۹۶}{۱/۲} = ۸۰$$

طبق فرمول میانگین وزنی داریم:

$$\frac{۶۰Q_A + ۷۵Q_B + ۱۰۰Q_C}{Q_A + Q_B + Q_C} = ۸۰ \Rightarrow ۶۰Q_A + ۷۵Q_B + ۱۰۰Q_C = ۸۰Q_A + ۸۰Q_B + ۸۰Q_C$$

$$\Rightarrow ۲۰Q_C = ۲۰Q_A + ۵Q_B \Rightarrow ۴Q_C = ۴Q_A + Q_B$$

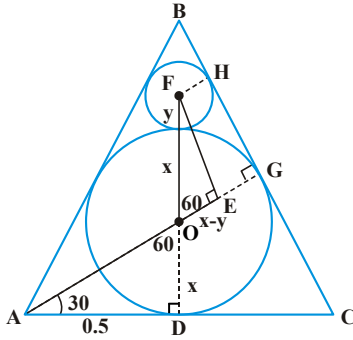
انتخاب $Q_C = ۲, Q_B = ۴, Q_A = ۱$ مناسب است. البته مسأله جواب‌های دیگری هم دارد. اما در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۳) صحیح است.

$$۱, ۱+۲ = ۳, ۳+۳ = ۶, ۶+۵ = ۱۱$$

۳- گزینه «۱» ارتباط به این شکل است که عدد قبل به علاوه‌ی عدد اول (شروع از ۲) می‌شود:

بنابراین ۵۹ باید با عدد اول ۱۹ جمع شود، که برابر با ۷۸ می‌شود.

۴- گزینه «۴»



روش اول: می‌دانیم که مرکز دایره محاط در دایره متساوی‌الاضلاع، محل تقاطع نیم‌سازهای زوایای مثلث و همچنین محل تقاطع ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث است. مثلث ADO مثلث قائم‌الزاویه با زوایای 30° ، 60° و 90° است. زاویه \hat{ODA} ، 90° درجه است؛ زیرا شعاع دایره بر خط مماس بر دایره عمود است. زاویه \hat{OAD} ، 30° درجه است؛ زیرا مرکز دایره محل تلاقی نیم‌سازهاست، پس پاره‌خط AD نیم‌ساز زاویه \hat{A} از مثلث است که چون مثلث متساوی‌الاضلاع است زاویه \hat{A} ، 60° درجه است. پس داریم:

$$\operatorname{tg}(\hat{OAD}) = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

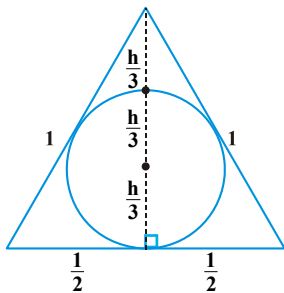
البته طبق فرمول کتاب می‌دانیم اگر شعاع دایره محاط درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع r باشد، طول اضلاع مثلث $2\sqrt{3}r$ می‌باشد، بنابراین بدون محاسبات فوق می‌شود گفت $2\sqrt{3}r = 1$ و لذا $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$. حالا برای محاسبه شعاع دایره کوچک‌تر مثلث دیگری به اسم OEF به گونه‌ای می‌سازیم که ضلع EF موازی با ضلع CB مثلث بزرگ باشد. چون شعاع دایره بر خط مماس بر دایره عمود است، پس ادامه ضلع OE بر ضلع CB عمود می‌شد و چون ضلع EF مثلث کوچک‌تر موازی با ضلع CB مثلث بزرگ‌تر است، OE بر EF عمود است. از طرفی با توجه به موازی بودن دو خط CB و EF ، فواصل آنها از هم در همه‌جا یکسان است، پس $FH = EG$ که $FH = EG$ در واقع شعاع دایره کوچک‌تر است که آن را y در نظر می‌گیریم؛ بنابراین طول ضلع OE برابر با اختلاف شعاع دو دایره است. $OE = x - y$

طول ضلع OF نیز با توجه به مماس بودن دو دایره برابر است با مجموع شعاع‌های دو دایره (توجه کنیم که F مرکز دایره کوچک‌تر است). $OF = x + y$

زاویه \hat{EOF} 60° درجه است.

$$\cos(\hat{EOF}) = \frac{x-y}{x+y} = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 2y = x + y \Rightarrow x = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{3}}{6}} y = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

روش دوم: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، شعاع دایره‌ی محاطی برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع مثلث است.



$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

پس شعاع دایره بزرگ $R = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}$ است. اکنون توجه کنید که طبق قضیه‌ی تالس، دایره‌ی کوچک‌تر هم در یک مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر محاط شده است که ارتفاع آن مثلث $\frac{h}{3}$ است. پس شعاع دایره کوچک

$$r = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

برابر است با:

۵- گزینه «۱» برای محاسبه‌ی تعداد مثلث‌های موجود در شکل سعی می‌کنیم مثلث‌ها به ضلع ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را مطابق الگوی زیر شمارش کنیم. در هر مورد از قاعده مثلث شروع می‌کنیم.

بالا: $1+2+3+4+5+6 = 21$ تعداد مثلث به ضلع ۱ روبه بالا

پایین: $1+2+3+4+5 = 15$ تعداد مثلث به ضلع ۱ روبه پایین

بالا: $1+2+3+4+5 = 15$ تعداد مثلث به ضلع ۲ روبه بالا

پایین: $1+2+3 = 6$ تعداد مثلث به ضلع ۲ روبه پایین

بالا: $1+2+3+4 = 10$ تعداد مثلث به ضلع ۳ روبه بالا

پایین: 1 تعداد مثلث به ضلع ۳ روبه پایین

بالا: $1+2+3 = 6$ تعداد مثلث به ضلع ۴ روبه بالا

پایین: 0 تعداد مثلث به ضلع ۴ روبه پایین

بالا: $1+2 = 3$ تعداد مثلث به ضلع ۵ روبه بالا

پایین: 0 تعداد مثلث به ضلع ۵ روبه پایین

بالا: 1 تعداد مثلث به ضلع ۶ روبه بالا

پس تعداد کل مثلث‌های قابل مشاهده در شکل برابر است با:

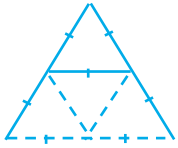
$$21 + 15 + 15 + 6 + 10 + 1 + 6 + 3 + 1 = 78$$

برای محاسبه‌ی تعداد شکل \triangle در هر اندازه و هر جهتی کافی است ابتدا تعداد مثلث‌های به ضلع ۲ را از مرحله‌ی قبل در نظر بگیریم و سه برابر کنیم (چرا؟! چون اگر هر سه ضلع مثلث اصلی را به عنوان قاعده فرض کنیم می‌توانیم \triangle یا \triangleleft یا \triangleright را داشته باشیم).

دقت کنیم که شکل A دقیقاً قسمتی از الگوی A می باشد.

$$۶۳ = ۲۱ \times ۳ = ۱۵ + ۶ = \text{تعداد مثلث به ضلع } ۲$$

چون تعداد A در هر اندازه خواسته شده است، لذا در این مرحله سعی می کنیم تعداد مثلث های به ضلع ۴ را محاسبه کنیم و به دلیل قبلی در ۳ ضرب کنیم!



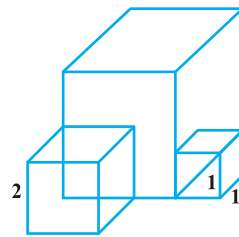
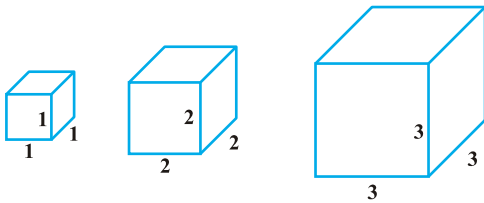
$$۱۸ = ۶ \times ۳ = \text{تعداد مثلث به ضلع } ۴$$

$$۳ = ۱ \times ۳ = \text{تعداد مثلث به ضلع } ۶ \text{ با استدلال مشابه}$$

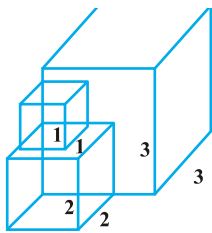
پس تعداد شکل A در هر اندازه و هر جهتی برابر است با: $۸۴ = ۶۳ + ۱۸ + ۳$ که با تعداد کل مثلث ها، ۶ عدد اختلاف دارد.

۶- گزینه «۴» مکعب ها به ضلع ۱، ۲، ۳ هستند.

باید طوری سه مکعب را کنار هم قرار دهیم که بیشترین اشتراک را با هم داشته باشند. به عنوان مثال در حالت زیر، فقط مکعب به ضلع ۱ و مکعب به ضلع ۲ با مکعب بزرگ اشتراک دارند که مسلماً سطح بیرونی شکل کمترین عدد نخواهد شد.

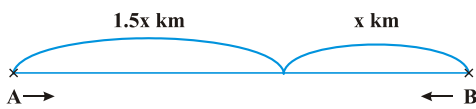


اگر به صورت زیر سه مکعب را کنار هم قرار دهیم، کمترین سطح بیرونی را خواهیم داشت:



$$۷۲ = ۳ + ۴ + ۴ + ۱۶ + ۴۵ = (۲ \times ۲ - ۱ \times ۱) + (۳ \times ۳ - ۲ \times ۲ - ۱ \times ۱) + ۴ \times (۱ \times ۱) + ۴ \times (۲ \times ۲) + ۵ \times (۳ \times ۳) = \text{سطح بیرونی}$$

۷- گزینه «۲» فرض کنیم دوچرخه سوار اول A و دوچرخه سوار دوم B باشد که اولی از نقطه A به سمت B و دومی از نقطه B به سمت A حرکت می کند. در لحظه برخورد اگر B به اندازه x کیلومتر طی کرده باشد، A باید $۱/۵x$ طی کند.



$$\begin{cases} \text{متحرک A:} \\ \text{جابجایی} = ۱/۵x \\ \text{زمان} = t \\ \text{سرعت} = V_A \end{cases} \quad \begin{cases} \text{متحرک B:} \\ \text{جابجایی} = x \\ \text{زمان} = t \\ \text{سرعت} = V_B \end{cases}$$

$$\frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت}} = \text{زمان} \Rightarrow \frac{۱/۵x}{V_A} = \frac{x}{V_B} \Rightarrow V_A = ۱/۵V_B$$

دوچرخه سوار A برای رسیدن از نقطه برخورد به نقطه B باید x کیلومتر را در مدت $\frac{۴}{۳}$ ساعت طی کند. همچنین دوچرخه سوار B نیز پس از ۲ ساعت باید در ۱۰ کیلومتری A باشد. یعنی در مدت ۲ ساعت $۱/۵x - ۱۰$ کیلومتر را طی می کند.

$$\begin{cases} \text{متحرک A:} \\ \text{جابجایی} = x \\ \text{زمان} = \frac{۴}{۳} \\ \text{سرعت} = V_A \end{cases} \quad \begin{cases} \text{متحرک B:} \\ \text{جابجایی} = ۱/۵x - ۱۰ \\ \text{زمان} = ۲ \\ \text{سرعت} = V_B \end{cases}$$

$$x = \frac{۴}{۳} V_A$$

$$۱/۵x - ۱۰ = ۲ \times V_B$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۱/۵x - ۱۰} = \frac{\frac{۴}{۳} \times ۱/۵ V_B}{۲ \times V_B} \Rightarrow x = ۲۰ \Rightarrow \text{طول AB} = ۲/۵ \times x = ۲/۵ \times ۲۰ = ۵ \text{ km}$$



۸- گزینه «۲» دستگاه‌ها را A، B و C می‌نامیم. اگر A کاری را در t ساعت انجام دهد، B همان کار را در (t-۲) ساعت و B و C باهم همان کار را در (t-۴) ساعت انجام می‌دهند. همچنین بین A، B و C نیز ارتباط خاصی برقرار است. هدف محاسبه مقدار t می‌باشد.

$$A+B+C = \frac{1}{5}(B+A) \Rightarrow C = \frac{1}{4}(B+A)$$

$$\begin{cases} (B+C) \times (t-4/8) = w \\ A \times t = w \\ B \times (t-2) = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{4}(B+A) = \frac{1}{4}\left(\frac{w}{t} + \frac{w}{t-2}\right) \\ A = \frac{w}{t} \\ B = \frac{w}{t-2} \end{cases}$$

$$B+C = \frac{w}{t-4} \Rightarrow \frac{w}{t-2} + \frac{w}{4t} + \frac{w}{2(t-2)} = \frac{w}{t-4} \Rightarrow \frac{2t+t-2+t}{2t \times (t-2)} = \frac{1}{t-4/8} \Rightarrow \frac{4t-2}{2t(t-2)} = \frac{1}{t-4/8}$$

با طرفین وسطین کردن تساوی فوق به معادله درجه دومی می‌رسیم که ریشه‌های آن $t = 8$ و $t = \frac{3}{5}$ خواهد بود. از طرفی چون t باید از ۲ بزرگ‌تر باشد، پس فقط $t = 8$ قبول است.

۹- گزینه «۲» فرض کنیم دو قطعه هر کدام به وزن A کیلوگرم داریم که یکی حاوی x% و دیگری حاوی y% کروم باشند. اگر هر دو را با هم ترکیب

$$A \times x + A \times y = 12$$

$$2A \times x + A \times y = 16$$

کنیم ۱۲ کیلوگرم کروم خالص داریم:

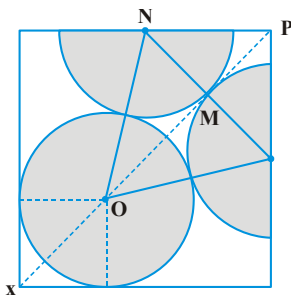
اگر قطعه x% وزنش 2A باشد، داریم:

از طرفی $x = y - 5$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} A(x+y) = 12 \\ A(2x+y) = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{بر هم تقسیم}} \frac{x+y}{2x+y} = \frac{12}{16} \Rightarrow \frac{2y-5}{3y-10} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 10$$

پس قطعات، ۵ و ۱۰ درصد کروم دارند.

۱۰- گزینه «۱» اگر مراکز نیم‌دایره‌ها و دایره را به هم وصل کنیم، یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود. از طرفی اگر از مرکز دایره بر اضلاع مربع شعاع وارد کنیم، شعاع وارد بر نقطه مماس بر نقطه تماس عمود خواهد شد.



قطر مربع خارجی از مجموع قطعات OX، OM و MP ساخته شده است.

$$OX = 1 \times \sqrt{2} = \text{قطر مربع به ضلع واحد}$$

$$OM = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \text{ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲}$$

با توجه به تقارن شکل و اینکه $NM \perp MP$ است، پس $\triangle NMP$ متساوی‌الساقین به رأس M می‌باشد. پس:

$$NM = MP = \text{واحد}$$

$$\Rightarrow \text{قطر مربع خارجی} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$$

$$\text{مساحت مربع} = \frac{1}{2} \times (\text{قطر})^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)^2 = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

آزمون (۲)

۱۱- گزینه «۴» ظاهراً سؤال وقت‌گیری است، ولی با کمی دقت حتی در ۲۵ ثانیه هم قابل پاسخ‌گویی به سؤال هستیم. ابتدا روش کلی حل سؤال را بررسی می‌کنیم. در ابتدا با نگاه به گزینه‌ها می‌بینیم که مقدار اول یعنی وقتی شرایط الف برقرار باشد، برای چهار گزینه متفاوت است، پس کافی است فقط با در نظر گرفتن شرایط الف مسأله را حل کنیم.

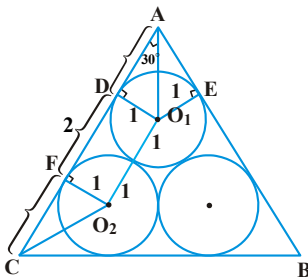
در این سؤالات بهتر است چند مرحله ابتدایی را انجام دهیم تا الگویی برای حل سؤال بیابیم. بعد از یک دقیقه شیر A، ۱۰۰ لیتر آب وارد مخزن می‌کند، در یک دقیقه بعدی شیر B، ۲۵ لیتر به آن اضافه می‌کند، سپس در دقیقه سوم شیر C، ۵۰ لیتر از آب را می‌کاهد. پس بعد از سه دقیقه ۷۵ لیتر آب در مخزن وجود دارد. پس مثلاً بعد از ۶ دقیقه ۱۵۰ لیتر آب در مخزن است، بعد از ۳۰ دقیقه حجم آب برابر ۷۵۰ لیتر است. چون ملاک لحظه‌ای است که مخزن برای بار اول پر می‌شود، باید نزدیک به عدد ۷۰۰۰ را بیابیم که بر ۷۵ بخش‌پذیر باشد، چرا که در پایان کار ترتیب باز شدن شیرها مهم است. ۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است و بر ۳. پس عددی که بر ۷۵ بخش‌پذیر است باید بر ۲۵ و ۳ بخش‌پذیر باشد. پس از ۷۰۰۰ که خود بر ۲۵ بخش‌پذیر است و بر ۳ نیست، ۲۵ تا ۲۵ تا پایین می‌آیم تا به عددی برسیم که بر ۳ بخش‌پذیر است. ۶۹۰۰ اولین عددی است که این ویژگی را دارد. حاصل تقسیم ۶۹۰۰ بر ۷۵ برابر ۹۲ است، یعنی پس از ۹۲ تا زمان سه دقیقه‌ای یعنی ۲۷۶ دقیقه به حجم آب ۶۹۰۰ لیتر می‌رسیم. حال باید شیر A باز شود، از آنجا که شیر A در یک دقیقه ۱۰۰ لیتر آب وارد می‌کند، پس از یک دقیقه حجم آب برابر با ۷۰۰۰ خواهد شد. یعنی نهایتاً در ۲۷۷ دقیقه مخزن پر می‌شود. تا اینجا گزینه پاسخ مشخص است. برای بخش‌های «ب» و «پ» نیز از تحلیل مشابه استفاده می‌شود. یعنی ابتدا برای چند دقیقه اولی الگویی بیابیم سپس آن را تعمیم دهیم.

پاسخ بسیار سریع: با بررسی شرایط می‌بینیم که در حالت "پ" ابتدا شیر B باز است که ۲۵ لیتر آب وارد می‌کند، سپس شیر C باز است که چون می‌تواند در دقیقه ۵۰ لیتر آب خارج کند قاعدتاً ۲۵ لیتر وارد شده از سوی شیر B را خارج می‌کند. حال پس از دو دقیقه ترتیب می‌شود همان ترتیب حالت "الف" و مخزن نیز خالی است. پس قاعدتاً زمان پر شدن مخزن در حالت "پ" دو دقیقه بیشتر از زمان برای پر شدن در حالت "الف" است که این شرایط تنها در گزینه (۴) دیده می‌شود. پس پاسخ گزینه (۴) است.

۱۲- گزینه «۴» سؤال نسبتاً راحتی است؛ اعداد طبیعی با شروع از عدد ۱ به ترتیب ابتدا به توان عدد ۴ رسیده‌اند، سپس ۳، ۲، ۱ و ... هر عدد زمانی که به توان رسیده است، توان آن یک واحد از عدد قبلی کمتر بوده است. ارتباط به شکل زیر است:

$$1^4, 2^3, 3^2, 4^1, 5^0, \dots = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

۱۳- گزینه «۳» مرکز دو تا از دایره‌ها را طبق شکل به هم وصل می‌کنیم، فاصله این دو مرکز از هم برابر با 2cm است. $O_1O_2 = 2\text{cm}$.



از هرکدام از این مراکز دو دایره، به رأس نزدیک‌تر از مثلث، خطی رسم می‌کنیم، در مثلث O_1AD زاویه $\hat{A}O_1D$ ، 30° درجه است. برای نشان دادن اینکه چرا این زاویه 30° درجه است از O_1 به نقطه تماس دایره با ضلع دیگر یعنی نقطه OE خطی رسم می‌نماییم. OE بر AB عمود است (عمود بودن شعاع بر خط مماس بر دایره)،

$AD = AE$ زیرا طول دو خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج از دایره با هم برابرند. پس دو مثلث ODA و OEA از طریق حالت ض‌رض یکسان هستند. پس $\hat{A}O_1E = \hat{A}O_1D$ و چون $\hat{A} = 60^\circ$ درجه است، $\hat{A}O_1D = \hat{A}O_1E = 30^\circ$. در نتیجه داریم:

$$\text{tg}(\hat{A}O_1D) = \frac{1}{AD} = \text{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \sqrt{3}$$

به طریق مشابه طول CF نیز برابر با $\sqrt{3}$ می‌شود.

$$AC = AD + DF + FC = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}$$

پس داریم:



۱۴- گزینه «۱» وقتی می‌توانیم N کودک را به ۹ روش دسته‌بندی کنیم، یعنی N باید ۹ مقسوم‌علیه داشته باشد. می‌دانیم اعداد مربع کامل تعداد مقسوم‌علیه فرد دارند و اعدادی که مربع کامل نباشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌ها زوج است. مثلاً مقسوم‌علیه‌های ۲۵ اعداد ۱ و ۵ و ۲۵ است و تعدادشان فرد است. کوچک‌ترین عدد مربع کامل که ۹ مقسوم‌علیه دارد عدد ۳۶ است.

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$36 = 3 \times 3 = 9 \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌ها} \Rightarrow a = \{0, 1, 2\}, b = \{0, 1, 2\}; 36 = 2^a \times 3^b \text{ مقسوم‌علیه}$$

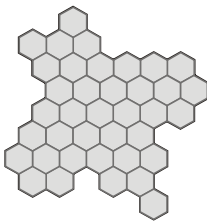
اگر دو کودک کم کنیم یعنی ۳۴ کودک، تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۴ موردنظر سؤال است.

$$34 = 2 \times 17 = 2^1 \times 17^1$$

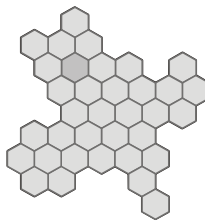
$$34 \text{ مقسوم‌علیه} = 2 \times 2 = 4 \text{ تعداد مقسوم‌علیه} \Rightarrow x = \{0, 1\}, y = \{0, 1\}; 34 = 2^x \times 17^y$$

پس ۳۴ کودک را می‌توان در دسته‌های ۱ و ۲ و ۱۷ و ۳۴ تایی دسته‌بندی کرد.

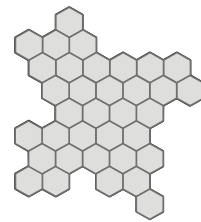
۱۵- گزینه «۳» شکل‌های B و C هر کدام با ۳۵ شش‌ضلعی و شکل A با ۳۸ شش‌ضلعی کامل می‌شود (کافی است در هر شکل از نقطه‌ای خاص شروع به تکمیل شکل کنیم) هر کدام از شکل‌های A، B و C توسط شش‌ضلعی‌هایی که در زیر آورده می‌شود تکمیل می‌گردد.



شکل مکمل (A)



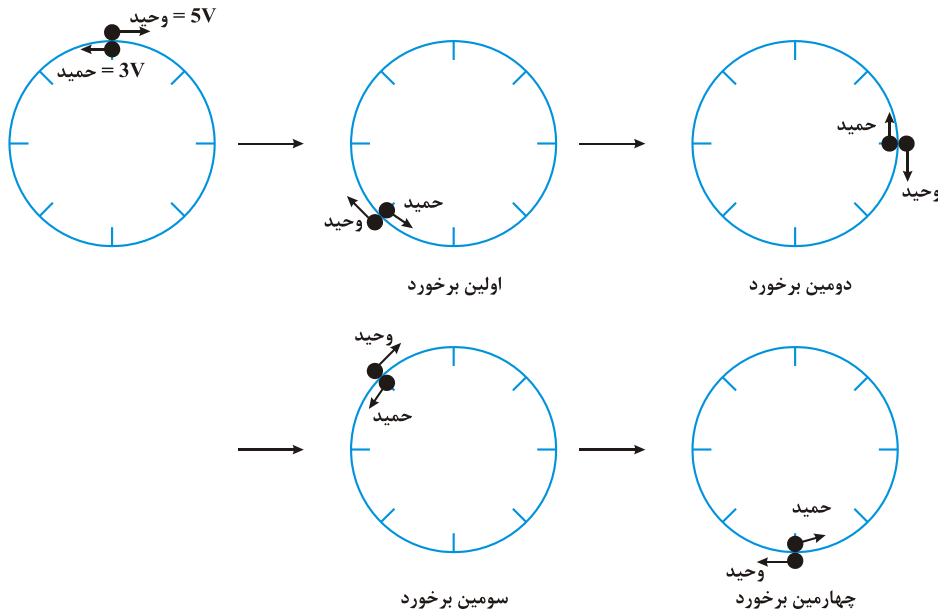
شکل مکمل (B)



شکل مکمل (C)

۱۶- گزینه «۲» فرض کنیم سرعت وحید ۵۷ باشد، آنگاه سرعت حمید $37 = \frac{3}{5} \times 57$ خواهد بود. از آنجاکه جابه‌جایی ارتباط مستقیم با سرعت دارد، پس

در یک زمان مشخص، نسبت جابه‌جایی وحید به جابه‌جایی حمید ۵ به ۳ خواهد شد. پس اگر محیط دایره را (که ۴۰۰ متر است) به ۸ قسمت مساوی تقسیم کنیم داریم:



در لحظه‌ای که چهارمین برخورد رخ می‌دهد، وحید $\frac{2}{5}$ محیط دایره را طی کرده است.

$$\begin{cases} \text{متر} = 1000 = \frac{2}{5} \times 400 \\ \text{ثانیه} = 200 \\ \text{سرعت وحید} = \frac{1000}{200} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

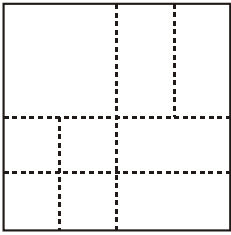
$$\begin{cases} \text{متر} = 600 = \frac{1}{5} \times 400 \\ \text{ثانیه} = 200 \\ \text{سرعت حمید} = \frac{600}{200} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

پس سرعت وحید، $\frac{2}{5}$ از سرعت حمید بیشتر است.



۱۷- گزینه «۳»

پس از آنکه شکل را مطابق الگوی فوق تا می‌زنیم و در مرحله آخر برش می‌دهیم، شکل طوری برش می‌خورد که یک قطعه آن دقیقاً $\frac{1}{4}$ مربع می‌باشد. ۴ قطعه به اندازه $\frac{1}{8}$ مربع اولیه و ۴ قطعه نیز به اندازه $\frac{1}{16}$ مربع اولیه ایجاد می‌شود. دقت کنیم که قسمت مرکزی محل تا خوردن مربع بزرگ، قسمت‌های دولا که لبه هستند به $\frac{1}{8}$ مربع و لبه‌ها نیز به $\frac{1}{16}$ تقسیم می‌شوند.



پس شکل در مجموع به ۹ قسمت تقسیم می‌شود.

۱۸- گزینه «۱» تلمبه‌های A، B و C را در نظر می‌گیریم به طوری که بین سرعت آنها ارتباط زیر برقرار است:

$$B = 2A, \quad C = B + 8$$

هر متر مکعب آب را نیز یک واحد کار در نظر می‌گیریم، در این صورت A در مدت زمان t، ۶۰۰ واحد کار انجام می‌دهد. B در مدت t' باید ۲۴۰ واحد کار انجام دهد و C نیز در مدت t'' باید ۱۴۴۰ واحد کار انجام دهد. همچنین ارتباط بین t و t' و t'' نیز در صورت سؤال مشخص شده است.

$$A \times t = 600; \quad B \times t' = 240; \quad C \times t'' = 1440; \quad C \times (t + 5) = 1680; \quad t'' + t' = 6 + t$$

$$\Rightarrow A = \frac{600}{t}; \quad B = \frac{240}{t'}; \quad C = \frac{1680}{t+5} = \frac{1440}{t''}$$

$$B = 2A \Rightarrow \frac{240}{t'} = 2 \times \frac{600}{t} \Rightarrow t = 5t'$$

$$\frac{1680}{t+5} = \frac{1440}{t''} \Rightarrow 6t + 30 = 7t''$$

$$t'' + t' = 6 + t \Rightarrow \frac{6}{7}t + \frac{30}{7} + \frac{t}{5} = 6 + t \Rightarrow t = 30$$

$$A \times t = 600 \Rightarrow A = \frac{600}{t} \Rightarrow A = \frac{600}{30} = 20$$

در مورد تلمبه A داریم:

یعنی در هر ساعت می‌تواند ۲۰ متر مکعب آب بیرون بکشد.

۱۹- گزینه «۳» فرض کنیم ظرف ۴ کیلوگرمی و ۶ کیلوگرمی به ترتیب x% و y% اسید داشته باشند. مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{\text{حجم دومی} \times \text{درصد دومی} + \text{حجم اولی} \times \text{درصد اولی}}{\text{حجم دومی} + \text{حجم اولی}} = \text{درصد اسید محلول حاصل} \Rightarrow 35 = \frac{4 \times x + 6 \times y}{4 + 6} \Rightarrow 4x + 6y = 350 \Rightarrow 2x + 3y = 175$$

در حالت دوم فرض کنیم از هر ظرف M لیتر برداریم:

$$36 = \frac{M \times x + M \times y}{2M} \Rightarrow (x + y) \times M = 72M \Rightarrow x + y = 72 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 175 \\ x + y = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 31 \\ x = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{اسید اولی} = \frac{41}{100} \times 4 = 1/86 \\ \text{اسید دومی} = \frac{31}{100} \times 6 = 1/86 \end{cases}$$

البته دقت کنیم که ۱/۶۴ و ۱/۸۶ برحسب کیلوگرم هستند.

۲۰- گزینه «۴» فرض کنیم N کودک داشته باشیم که به هر کدام x عدد اسباب‌بازی بدهیم.

$$\text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = N(N-9) \xrightarrow{x=N-9} \text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = N \times x$$

اگر $N = 9$ و به هر کودک (N-9+1) اسباب‌بازی بدهیم، اسباب‌بازی کم می‌آید و به همه کودکان نمی‌رسد. یعنی به زبان ریاضی:

$$9 \times (N-9+1) > N(N-9) \Rightarrow 9N - 72 > N^2 - 9N \Rightarrow N^2 - 18N + 72 < 0 \Rightarrow (N-6)(N-12) < 0 \Rightarrow 6 < N < 12 \text{ و } N > 9$$

پس $N = 10$ و $N = 11$ قبول است، ولی از آنجا که N باید فرد باشد، پس $N = 11$.

$$x = N - 9 = 11 - 9 = 2 \text{ تعداد اسباب‌بازی هر بچه}$$

$$\text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = 2 \times 11 = 22$$



آزمون (۳)

۲۱- گزینه «۱» مجموع ارقام عدد در ۲ ضرب می‌شود و با همان عدد جمع می‌شود و به عنوان عدد بعد در نظر گرفته می‌شود.

$$5 \times 2 + 5 = 15, (5+1) \times 2 + 15 = 27, (2+7) \times 2 + 27 = 45$$

$$(4+5) \times 2 + 45 = 63, (6+3) \times 2 + 63 = 81, (8+1) \times 2 + 81 = 99 \Rightarrow ? = (9+9) \times 2 + 99 = 36 + 99 = 135$$

۲۲- گزینه «۳» وقتی ۲۰ مرد کار A را در ۱۲ روز کاری ۸ ساعته انجام می‌دهند، یعنی کار را در 8×12 ساعت انجام می‌دهند، در هر ساعت $\frac{1}{(8 \times 12)}$ از کار را انجام می‌دهند، پس یک مرد در یک ساعت $\frac{1}{(8 \times 12 \times 20)}$ از کار A را انجام می‌دهد. به طریق مشابه یک زن در یک ساعت $\frac{1}{(8 \times 12 \times 24)}$ از کار و

یک پسر $\frac{1}{(8 \times 12 \times 40)}$ از کار را انجام می‌دهد. حال اگر کار B چهار برابر بزرگ‌تر از کار A باشد، نسبتی از کار که در یک ساعت از سوی مرد و زن و پسر قابل انجام است به $\frac{1}{4}$ نسبت‌های فعلی می‌رسد، یعنی یک مرد و زن و پسر به ترتیب در هر ساعت $\frac{1}{(8 \times 12 \times 20 \times 4)}$ ، $\frac{1}{(8 \times 12 \times 24 \times 4)}$ و $\frac{1}{(8 \times 12 \times 40 \times 4)}$ از

کار B را می‌توانند انجام دهند.

حال X مرد داریم و شش زن و دو پسر که این کار B را در ۱۲ روز کاری ۵ ساعته یعنی در 12×5 ساعت انجام می‌دهند. پس با توجه به مقدار کار از B که هر مرد و زن و پسر می‌توانند انجام دهند و تعداد ساعت‌های کار می‌توان X را به دست آورد.

$$X \times \left(\frac{1}{12 \times 8 \times 20 \times 4} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{8 \times 12 \times 24 \times 4} \right) + 6 \times \left(\frac{1}{8 \times 12 \times 24 \times 4} \right) = \frac{1}{12 \times 5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 4 \times 12} \frac{X}{160} + \frac{1}{160} + \frac{1}{32} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{X+1+5}{160} = \frac{128}{160} \Rightarrow X = 122$$

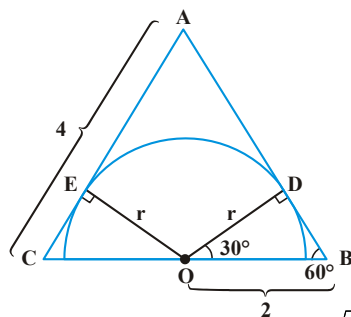
۲۳- گزینه «۱» شعاع نیم‌دایره را رسم می‌نماییم، شعاع بر خط مماس بر دایره یعنی AB عمود

است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، هر یک از زوایای آن 60° است؛ در نتیجه مثلث ODB

مثلثی قائم‌الزاویه با زوایای 30° ، 90° ، 60° است. توجه کنیم که طول ضلع OB نصف طول ضلع

مثلث بزرگ‌تر یعنی نصف BC است. پس: $OB = 2$

$$OB = 2 \Rightarrow \cos(\hat{D}OB) = \frac{r}{2} = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{طول قطر} = 2 \times r = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$



دقت کنیم که سؤال از ما طول قطر را خواسته است، نه طول شعاع را. برخی ممکن است از روی بی‌دقتی وقتی $r = \sqrt{3}$ را بیابند، سریع گزینه (۲) را انتخاب کنند که اشتباه است.

ممکن است سؤال پیش بیاید که چرا $OB = \frac{1}{2}(BC)$ یا اینکه چرا ادعا می‌کنیم مرکز نیم‌دایره وسط BC است. از راه‌های مختلف می‌توان آن را نشان داد،

مثلاً با رسم شعاع OE، مثلث OEC مثلثی یکسان با ODB می‌شود؛ زیرا $r = r$ ، $\hat{O}EC = \hat{O}DB = 90^\circ$ و چون $AB = AC$ (متساوی‌الاضلاع) و $AD = AE$ (مساوی بودن طول دو مماس که از نقطه‌ای واحد بر دایره رسم می‌شوند)، پس $BD = CE \Rightarrow AB - AD = AC - AE$ ، پس دو

مثلث ODB و OEC به دلیل مساوی بودن دو ضلع و زاویه بین یکسان هستند، پس داریم:

$$OB = OC = \frac{1}{2}BC = 2 \Leftarrow OB = OC$$

۲۴- گزینه «۱» می‌دانیم که اگر بخواهیم n شیء مختلف را در k دسته مختلف طوری قرار دهیم که در دسته k_1, n_1 عضو و در دسته k_2, n_2 عضو و ... در دسته k_m, n_m عضو باشد، از رابطه زیر تعداد حالات را به دست می‌آوریم:

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

در این سؤال شیءها متفاوت هستند (توپ) ولی جعبه‌ها یکسان هستند. نحوه‌های مختلف تخصیص توپ‌ها به جعبه‌ها عبارتند از:

تعداد توپ	۱	۲	۳	
۱ جعبه	۱	۲	۳	
	۱	۱	۳	$\Rightarrow \frac{5!}{1!1!3!} = 5 \times 4 = 20$
	۱	۳	۱	$\Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$
	۱	۲	۲	$\Rightarrow \frac{5!}{2!2!} = 5 \times 2 \times 3 = 30$
	۲	۱	۲	$\Rightarrow 30$
	۲	۲	۱	$\Rightarrow 30$
	۳	۱	۱	$\Rightarrow 20$

برای حالتی که جعبه‌ها متفاوت باشند $3(20) + 3(30) = 150$ = تعداد

از طرفی چون ۳ تا جعبه با هم تفاوتی ندارند، پس حاصل را باید بر ۳! تقسیم کرد. $\frac{150}{3!} = \frac{150}{6} = 25$ = تعداد برای حالتی که جعبه‌ها یکسان هستند.

۲۵- گزینه «۱» می‌توان به صورت زیر روابط را به تساوی تبدیل کرد.

$$90 - 50 = 30 \rightarrow 90 - 60 = 30 \text{ (جابه‌جایی)}$$

$$12 \times 8 - 32 = 64 \rightarrow 12 \times 8 - 32 = 64 \text{ (افزودن)}$$

$$53 + 19 = 12 \times 6 \rightarrow 53 + 19 = 12 \times 6 \text{ (افزودن)}$$

$$8 - 8 = 0 \rightarrow 8 - 8 = 0 \text{ (جابه‌جایی)}$$

پس در ۴ مورد می‌توان با افزودن یا جابه‌جا کردن دقیقاً یک چوب کبریت به تساوی رسید.

۲۶- گزینه «۳» سرعت کشتی را V_K فرض می‌کنیم و سرعت جریان آب نیز ۲ کیلومتر در ساعت است. زمانی که کشتی در جهت آب حرکت کند، سرعت نسبی آن $V_K + 2$ است و زمانی که خلاف جهت آب حرکت کند، سرعت نسبی آن $V_K - 2$ می‌باشد. از ساعت ۹ صبح تا ۱۷ کشتی یک ساعت توقف کرده است، یعنی جمعاً ۷ ساعت در راه بوده است. طول مسیر نیز ۴۸ کیلومتر است.

$$t_{\text{رفت}} = \frac{48}{V_K + 2} \quad ; \quad t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 7$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{48}{V_K - 2}$$

$$\Rightarrow 48 \left(\frac{1}{V_K + 2} + \frac{1}{V_K - 2} \right) = 7 \Rightarrow 48 \times \frac{2V_K}{(V_K + 2)(V_K - 2)} = 7 \Rightarrow 96V_K = 7(V_K^2 - 4) \Rightarrow V_K = 14$$



۲۷- گزینه «۲» لوله‌های کوچک و بزرگ را به ترتیب با K و B نشان می‌دهیم. هر متر مکعب آب را نیز یک واحد کار در نظر می‌گیریم. بر این اساس در مورد روز اول و دوم و سوم می‌توانیم معادلات زیر را تنظیم کنیم:

$$(1) \quad (K+B) \times t = 14 \quad \text{روز اول هر دو با هم } 14 \text{ مترمکعب آب ریختند}$$

اگر روز اول t ساعت کار انجام شده باشد، روز دوم 5 ساعت بیشتر کار انجام شده است، یعنی t+5 ساعت روز دوم کار انجام شده است.

$$(2) \quad K \times (t+5) = 14 \quad \text{روز دوم، لوله کوچکتر 5 ساعت بیشتر از روز اول کار کرد و } 14 \text{ مترمکعب آب ریخت}$$

روز سوم نیز باید t+5 ساعت کار انجام شده باشد، فرض کنیم t' ساعت را لوله کوچک و بزرگ با هم باشند، پس t+5-t' ساعت را لوله بزرگ به تنهایی فعالیت کرده است.

$$(3) \quad (K+B) \times t' = 21 \quad \text{روز سوم به همان مدتی که روز دوم کار کرده بودند،}$$

$$(4) \quad B \times (t+5-t') = 20 \quad \text{کار کردند، به مدت } t' \text{ با هم بودند و بقیه زمان را}$$

فقط لوله بزرگ‌تر فعال بود

هدف محاسبه راندمان K و B است:

$$\begin{cases} (1) \text{ و } (2) \\ (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K+B = \frac{14}{t} \\ K+B = \frac{21}{t'} \end{cases} \Rightarrow \frac{14}{t} = \frac{21}{t'} \Rightarrow t' = \frac{3}{2}t \xrightarrow{(1) \text{ و } (2) \text{ و } (4)} \left(\frac{14}{t+5} + \frac{20}{5-\frac{1}{2}t} \right) \times t = 14 \Rightarrow t = 2$$

$$K = \frac{14}{t+5} \xrightarrow{t=2} K = 2$$

$$(K+B) \times t = 14 \xrightarrow{K=2, t=2} (2+B) \times 2 = 14 \Rightarrow B = 5$$

۲۸- گزینه «۳» وقتی یک ماده خام را از ناخالصی پاک می‌کنیم، در واقع فقط میزان ناخالصی‌ها را کاهش می‌دهیم و از میزان خالصی آن چیزی کم نمی‌شود. فرض کنیم M کیلوگرم ابتدای کار از ماده خام داشته باشیم و پس از پاک کردن n کیلوگرم از آن باقی بماند:

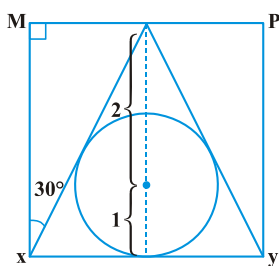
$$M \begin{cases} \circ / 2M \text{ ناخالصی} \\ \circ / 8M \text{ خالصی} \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از پاک کردن}} n \begin{cases} \circ / 95n \text{ خالصی} \\ \circ / 5n \text{ ناخالصی} \end{cases}$$

قرار است پس از پاک کردن، 160 کیلوگرم از ماده بماند، یعنی:

$$n = 160 \begin{cases} \circ / 95 \times 160 = 152 \text{ کیلوگرم خالصی} \\ \circ / 5 \times 160 = 8 \text{ کیلوگرم ناخالصی} \end{cases}$$

$$152 = \circ / 8M \Rightarrow M = 190 \text{ kg}$$

البته میزان خالصی موجود در ماده‌ی اولیه و ماده پس از پاک‌سازی با هم برابر است:



۲۹- گزینه «۴» $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است و دایره کوچک دایره محاطی آن می‌باشد. مرکز دایره و مثلث بر هم

منطبق است. می‌دانیم فاصله مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع از قاعده‌ی $\frac{1}{3}$ کل ارتفاع می‌باشد. از طرفی چون شعاع دایره کوچک واحد می‌باشد، پس ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع 3 می‌باشد:

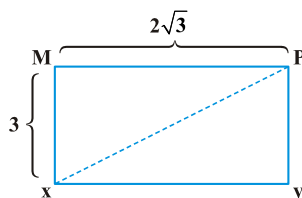
$$\text{ارتفاع متساوی‌الاضلاع} = \text{ضلع مثلث} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3 = \text{ضلع مثلث} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ضلع مثلث} = 2\sqrt{3}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° درجه نصف وتر است، پس:

$$MN = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} = NP$$

$$\triangle MNX \text{ در فیثاغورث: } Mx = \sqrt{xN^2 - MN^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} \Rightarrow Mx = 3$$



$$xP = \text{قطر مستطیل} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}$$

۳۰- گزینه «۳» بیان دیگر سؤال می‌تواند این باشد که: یک مستطیل 4×6 به ۵ قطعه برش خورده است که تمام قطعات یک رو چاپ شده‌اند. جای یک قطعه در سمت چپ مستطیل معلوم است. با استفاده از ۴ قطعه دیگر، پازل (جورچین) را کامل کنید. قطعه L شکل می‌تواند به صورت \cap در بالا قرار گیرد یا به صورت \supset به قطعه سمت چپ وصل شود.



با توجه به اینکه مسابقات در ۶ روز انجام شده است، قطعه مستطیلی شکل فقط می‌تواند گوشه بالای سمت راست باشد. با توجه به اینکه دو قطعه L شکل داریم و جایگاه‌های قطعه L شکل، می‌توانیم مستطیل 4×6 را به دو صورت مجزای زیر تکمیل کنیم:

تیم‌ها	شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه	شنبه
A	○	●	●	○	○	○	○
B	○	●	○	●	●	●	○
C	●	○	○	●	●	●	●
D	●	○	●	○	○	○	●

یا

تیم‌ها	شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه	شنبه
A	○	●	○	○	○	●	●
B	○	●	●	●	●	●	○
C	●	○	○	●	○	○	○
D	●	○	○	○	●	○	○

اکنون به این مطلب توجه کنید:

توجه: از آن‌جا که در هر روز، هر کدام از تیم‌ها در برابر یک تیم دیگر بازی می‌کنند، تعداد کل بردها با تعداد کل باخت‌ها در هر روز باید برابر باشد؛ زیرا وقتی یک تیم برده باشد، حتماً تیم رقیب باخته است. به عبارت ساده‌تر، در هر ستون باید ۲ دایره مشکی و ۲ دایره سفید داشته باشیم. به همین دلیل به جز جدول نشان داده در سمت چپ، وضعیت دیگری نمی‌توان در نظر گرفت، مثلاً نمی‌توانید جای قطعات L مانند را در جدول‌های فوق با هم عوض کنید. طبق این جدول، C بیشترین تعداد بُرد را دارد و در نتیجه C تورنمنت را برده است.



آزمون (۱۴)

۳۱- گزینه «۳» نکات کلیدی این سؤال برابر بودن تعداد دانش‌آموزان تمام ردیف‌ها، حداقل سه نفر بودن افراد هر ردیف و حداقل تعداد ردیف‌هاست که باید بزرگ‌تر مساوی ۲ باشد. روش سریع برای این سؤال با نوشتن مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۸ است. چرا که با توجه به نیاز به یکسان بودن افراد با ردیف‌ها نهایتاً افرادی طوری خواهند نشست که حاصل ضرب تعداد ردیف‌ها در افراد هر ردیف برابر ۴۸ شود.

مقسوم‌علیه‌های ۴۸ : ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۴, ۴۸

تعداد ردیف:

۱ تا نمی‌تواند باشد. به دلیل شرط حداقل دوتا بودن ردیف‌ها

۲ تا می‌تواند باشد. که در این صورت تعداد افراد هر ردیف ۲۴ نفر است که بزرگ‌تر از ۳ است.

۳ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد می‌شود ۱۶ تا بزرگ‌تر از ۳

۴ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد ۱۲ تا

۶ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۸

۸ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۶

۱۲ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۴

۱۶ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۳

۲۴ تا نمی‌تواند باشد. زیرا تعداد افراد هر ردیف ۲ تا خواهد بود که با شرط حداقل سه نفره بودن تعداد در هر ردیف تناقض دارد.

۴۸ تا نمی‌تواند باشد. زیرا تعداد افراد هر ردیف یک خواهد بود که با شرط حداقل سه نفره بودن تعداد در هر ردیف تناقض دارد.

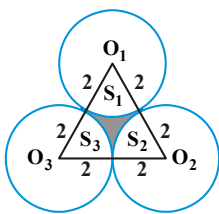
پس در مجموع ۷ آرایش ممکن وجود دارد.

۳۲- گزینه «۴» ارتباط بین اعداد به شکل زیر است:

$$\frac{2520}{1} = 2520, \quad \frac{2520}{2} = 1260, \quad \frac{2520}{3} = 840, \quad \frac{2520}{4} = 630, \quad \frac{2520}{5} = 504, \quad \frac{2520}{6} = 420, \quad \frac{2520}{7} = 360$$

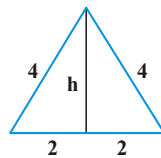
بنابراین به جای علامت سؤال باید عدد $\frac{2520}{8} = 315$ قرار گیرد.

۳۳- گزینه «۴» مرکز سه دایره را به هم وصل می‌کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $O_1O_2O_3$ تشکیل می‌شود که طول هر ضلع آن ۴ سانتی‌متر است.



برای به‌دست آوردن مساحت قسمت محصور بین سه دایره کافی است ابتدا مساحت مثلث $O_1O_2O_3$ را به‌دست آورد، سپس مساحت نواحی از دایره‌ها که در این مثلث وجود دارند را از مساحت مثلث کم کنیم.

مساحت مثلث $O_1O_2O_3$:



$$h = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})(4) = 4\sqrt{3}$$

مساحت هر کدام از نواحی دایره‌ها که در مثلث قرار دارند، برابر با $\frac{1}{6}$ مساحت یک دایره کامل به شعاع ۲ است (توجه کنیم که این سطوح زاویه مرکزی $\frac{\pi}{3}$ را دارند).

پس مجموع این سه سطح برابر است با: $\frac{2\pi}{6}$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3S_1 = 3S_2 = 3S_3 = (3) \times \left(\frac{1}{6}\right)(\pi \times 2^2) = \frac{1}{2}\pi(4) = 2\pi$$

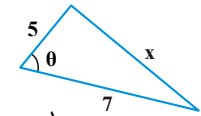
$$\Rightarrow S = 4\sqrt{3} - 2\pi$$

بنابراین مساحت محصور شده برابر است با:



۳۴- گزینه «۲» زاویه بین دو ضلع ۵ و ۷ سانتی‌متری را θ می‌نامیم.

می‌دانیم مساحت مثلثی که دو ضلع a و b و زاویه θ بین آنها را داشته باشیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

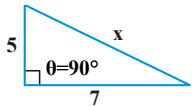


$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 7 \times 5 \times \sin \theta \Rightarrow S = \frac{35}{2} \cdot \sin \theta$$

با توجه به رابطه به دست آمده، مساحت زمانی بیشینه می‌شود که $\sin \theta$ بیشینه شود؛ یعنی وقتی $\sin \theta = 1$ ، یعنی به بالاترین مقدار خود برسد، مساحت

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times 1 = \frac{35}{2} \quad \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$$

$\theta = 90^\circ$ یعنی ۷ و ۵ دو ضلع قائمه مثلث باشند، ضلع‌های ۷ و ۵ سانتی‌متری بر هم عمود باشند، در این صورت ضلع سوم یعنی x از رابطه فیثاغورث به دست می‌آید:



$$x = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$$

۳۵- گزینه «۲» برای به دست آوردن تعداد کسانی که در هیچ کدام از این دروس اسم ننوشته‌اند ابتدا تعداد افرادی که حداقل در یکی از این دروس اسم نوشته‌اند را به دست می‌آوریم. سپس عدد به دست آمده را از تعداد کل یعنی 120 کم می‌کنیم.

تعداد کسانی که حداقل در یکی از سه درس ثبت نام کرده‌اند در واقع تعداد اعضای مجموعه اجتماع سه مجموعه است.

مجموعه ثبت‌نامی در درس فیزیک : اعداد زوج تقسیم‌پذیر بر ۲ : A تعداد اعضا : $N_A = 60$

مجموعه ثبت‌نامی در درس شیمی : اعداد بخش‌پذیر بر ۵ : B تعداد اعضا : $N_B = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24$

مجموعه ثبت‌نامی در درس ریاضی : اعداد بخش‌پذیر بر ۷ : C تعداد اعضا : $N_C = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$

مجموعه کسانی که در دو درس شیمی و فیزیک اسم نوشته‌اند: $A \cap B$. اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۵ اعدادی هستند که بر 10 بخش‌پذیرند $12 =$

مجموعه کسانی که در دو درس ریاضی و فیزیک اسم نوشته‌اند: $A \cap C$. اعداد بخش‌پذیر بر ۲، ۵، ۷، $8 = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor =$

مجموعه کسانی که در دو درس شیمی و ریاضی اسم نوشته‌اند: $B \cap C$ اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و ۷: اعداد بخش‌پذیر بر $35 = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3$

مجموعه کسانی که در هر سه درس اسم نوشته‌اند: $A \cap B \cap C$ اعداد بخش‌پذیر بر ۲، ۵ و ۷: بخش‌پذیر بر $70 = 1$

$$N(A \cup B \cup C) = N_A + N_B + N_C - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

$$N(A \cup B \cup C) = 60 + 24 + 17 - 12 - 8 - 3 + 1 = 79$$

$$X = 120 - 79 = 41$$

پس تعداد کسانی که در هیچ درسی اسم ننوشته‌اند برابر است با:

۳۶- گزینه «۴» فرض کنیم در طرح اول x بلوک باشد که هر بلوک شامل n واحد است.

$$x \times n = 12096 = 2^6 \times 3^3 \times 7$$

در طرح دوم $(x+8)$ بلوک داریم که هر کدام m واحد دارند و $m > n$:

$$(x+8) \times m = 23625 = 5^3 \times 3^3 \times 7$$

با مقایسه دو عدد 12096 و 23625 متوجه می‌شویم که حاصل $(x+8) \times m$ باید از دو برابر xn کمتر باشد. از طرفی از آنجا که $m > n$ ، پس:

$$xm > xn \Rightarrow xm > 2^6 \times 3^3 \times 7$$

پس $(x+8)$ باید طوری در نظر گرفته شود که کمتر از دو برابر را اعمال کند. از طرفی m نیز نمی‌تواند دو برابر n باشد (باید کمتر باشد). باید xm را

طوری در نظر بگیریم که اولاً از $xn = 2^6 \times 3^3 \times 7$ بیشتر باشد، ثانیاً $xm + 8m = 5^3 \times 3^3 \times 7$.

درواقع $m > n$ باید طوری لحاظ شود که $xm + 8m$ بتواند تساوی فوق را برقرار کند. با توجه به $xn = 2^6 \times 3^3 \times 7$ قطعاً x نمی‌تواند عامل ۵ داشته باشد. x را باید طوری مقدار دهیم که شرط $m > n$ نیز برقرار باشد.

$$x \times n = \underbrace{3^3}_x \times \underbrace{2^6 \times 7}_n$$

$$3^3 \times m + 8 \times m = 5^3 \times 3^3 \times 7 \Rightarrow m \times \underbrace{(3^3 + 8)}_{25} = 5^3 \times 3^3 \times 7 \Rightarrow m \times 25 = 5^2 \times 3^3 \times 35 \Rightarrow m = 5^2 \times 3^3 \Rightarrow m = 675$$

پس $x = 27$ و $n = 448$ و $m = 675$ می‌توانند در معادلات مسئله جای گیرند.



۳۷- گزینه «۳» فرض کنیم مبلغ N را بخواهیم در بانک‌ها بگذاریم. بانک اول در هر سال پول موجود را x برابر کند و بانک دوم نیز در هر سال پول موجود را y برابر کند. $\frac{3}{5}N$ را در بانک اول و $\frac{2}{5}N$ را در بانک دوم قرار می‌دهیم. بر این اساس داریم:

	آغاز سرمایه‌گذاری	پایان سال اول	پایان سال دوم
بانک اول	$\frac{3}{5}N$	$\frac{3}{5}N \times x$	$\frac{3}{5}N \times x^2$
بانک دوم	$\frac{2}{5}N$	$\frac{2}{5}N \times y$	$\frac{2}{5}N \times y^2$
مجموع موجودی در هر دو بانک		$= 590$	$= 710$

اکنون باید حالتی را فرض کنیم که $\frac{2}{5}N$ در بانک اول و $\frac{3}{5}N$ در بانک دوم باشد:

	آغاز سرمایه‌گذاری	پایان سال اول	پایان سال دوم
بانک اول	$\frac{2}{5}N$	$\frac{2}{5}N \times x$	$\frac{2}{5}N \times x^2$
بانک دوم	$\frac{3}{5}N$	$\frac{3}{5}N \times y$	$\frac{3}{5}N \times y^2$
مجموع موجودی در هر دو بانک		$= 610$	$= ?$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}Nx + \frac{2}{5}Ny = 590 & (1) \\ \frac{2}{5}Nx + \frac{3}{5}Ny = 610 & (2) \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow{(2)-(1)} \frac{1}{5}N(y-x) = 20 \\ \xrightarrow{(1)+(2)} N(x+y) = 1200 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{5}N(y-x)}{N(x+y)} = \frac{20}{1200} \Rightarrow 11y = 13x$$

ارتباط بین x و y را پیدا کردیم. در ادامه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}Nx^2 + \frac{2}{5}Ny^2 = 701 &\Rightarrow \frac{3}{5}Nx^2 + \frac{2}{5}N \times \frac{169}{121}x^2 = 701 \Rightarrow Nx^2 \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{169}{121} \right) = 701 \Rightarrow Nx^2 \times \frac{701}{5 \times 121} = 701 \Rightarrow Nx^2 = 5 \times 121 \\ \text{مطلوب} = \frac{2}{5}Nx^2 + \frac{3}{5}Ny^2 &= \frac{2}{5}Nx^2 + \frac{3}{5}N \times \frac{169}{121}x^2 = Nx^2 \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{169}{121} \right) = Nx^2 \times \frac{749}{5 \times 121} = 5 \times 121 \times \frac{749}{5 \times 121} = 749 \end{aligned}$$

۳۸- گزینه «۲» آلیاژ اول، دوم و سوم را به ترتیب A ، B و C می‌نامیم. با توجه به صورت سؤال داریم:

$$A: \begin{cases} \text{قلع } 45\% \\ \text{سرب } 55\% \end{cases} \quad B: \begin{cases} \text{بیسموت } 1\% \\ \text{قلع } 4\% \\ \text{سرب } 5\% \end{cases} \quad C: \begin{cases} \text{بیسموت } 3\% \\ \text{سرب } 7\% \end{cases}$$

می‌خواهیم آلیاژی درست کنیم که ۱۵ درصد بیسموت داشته باشد. پس حتماً باید از B یا C استفاده کنیم. فرض کنیم از هر کدام از آلیاژها به ترتیب A ، B و C واحد داشته باشیم.

$$\text{درصد دومی} \times \text{مقدار دومی} + \text{درصد اولی} \times \text{مقدار اولی} = \text{درصد بیسموت}$$

$$\text{مقدار دومی} + \text{مقدار اولی}$$

اگر از آلیاژ B و C استفاده کنیم:

$$15 = \frac{10B + 30C}{B + C} \Rightarrow B = 3C$$

$$\text{درصد سرب} = \frac{50B + 70C}{B + C} = \frac{150C + 70C}{4C} = 55\%$$

اگر از A و C استفاده کنیم:

$$15 = \frac{30C}{A + C} \Rightarrow A = C$$

$$\text{درصد سرب} = \frac{55A + 70C}{A + C} = \frac{125}{2} = 62.5\%$$

به این ترتیب حداقل و حداکثر درصد سرب می‌تواند ۵۵ و ۶۲/۵ درصد باشد.

۳۹- گزینه «۱» فرض کنیم ماشین‌های خاک‌برداری A، B و C باشند. A در مدت زمان t می‌تواند $\frac{4}{5}$ کار را انجام دهد. B در مدت t' می‌تواند $\frac{1}{15}$ کار را

انجام دهد و ماشین C نیز در مدت (t-t') باید $\frac{9}{28}$ از بقیه کار (یعنی $\frac{14}{15}$) را انجام دهد.

همچنین در مورد اختلاف A و C و اختلاف B و C رابطه زیر را داریم:

مطلوب ما محاسبه نسبت $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

$$|A - C| = 3 \times |B - C|$$

$$A \times t = \frac{4}{5} w$$

$$B \times t' = \frac{1}{15} w$$

$$C \times \underbrace{(t - t')}_{t''} = \frac{9}{28} \times \frac{14}{15} w \Rightarrow C \times t'' = \frac{9}{30} w$$

$$t = t' + t'' \Rightarrow \frac{4}{5A} = \frac{1}{15B} + \frac{3}{10C} \xrightarrow{30 \times} \frac{24}{A} = \frac{2}{B} + \frac{9}{C} \xrightarrow{B \times} \frac{24B}{A} = 2 + \frac{9B}{C}$$

$$\text{همچنین } A - C = 3(B - C) \Rightarrow A + 2C = 3B \xrightarrow{\frac{1}{B} \times} \frac{A}{B} + 2\frac{C}{B} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{A}{B} = \alpha \\ \frac{C}{B} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{\alpha} = 2 + \frac{9}{\beta} \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{cases}$$

با قرار دادن $\beta = 3 - \frac{\alpha}{2}$ در رابطه بالایی می‌توانیم به $\alpha = 3$ برسیم که همان نسبت $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

۴۰- گزینه «۲» فرض کنیم بتوانیم کل بار را در n واگن ۵۰ تنی قرار دهیم. آنگاه اگر در (n-۱۳) واگن ۸۰ تنی قرار دهیم، مقداری اضافه می‌آید و اگر

در (n-۵) واگن ۶۰ تنی قرار دهیم نیز مقداری اضافه می‌آید. می‌توانیم روابط زیر را تنظیم کنیم:

$$60(n-6) < 50n < 60(n-5) \Rightarrow 30 < n < 36$$

$$80(n-14) < 50n < 80(n-13) \Rightarrow 34 < n < 37$$

فقط $n = 35$ می‌تواند در نامساوی‌های بالا صدق کند، پس:

$$\text{وزن کل بار} = 50n = 50 \times 35 = 1750$$



آزمون (ب)

۴۱- گزینه «۲» از جمله سؤالات غیراستاندارد که در آزمون‌های بین‌المللی هوش مطرح شده است! هر جمله توضیحی از جمله‌ی قبل است. مثلاً صفر، یک صفر است که در جمله‌ی بعدی آن را با ۱۰ (یک صفر) توضیح داده؛ عدد ۱۰ هم یک، ۱ دارد و یک صفر که به صورت ۱۱۱۰ توضیح داده شده است. در واقع الگویی به شکل زیر وجود دارد:

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱۰ \rightarrow \text{تبدیل می‌شود به } ۰ \\ ۱۱۱۰ \rightarrow \text{تبدیل می‌شود به } ۱۰ \\ ۱۲ \rightarrow \text{تبدیل می‌شود به } ۲ \\ ۱۳ \rightarrow \text{تبدیل می‌شود به } ۳ \end{array} \right.$$

بنابراین به جای علامت سؤال باید گزینه (۲) قرار گیرد. در جمله‌ی قبل به ترتیب یک، ۱ داریم که سمت چپ عدد جدید باید ۱۱ باشد، بعد از آن یک، ۳ داریم و بنابراین باید ۱۳ بنویسیم و بعد یک ۲ داریم که باید ۱۲ بنویسیم، و بعد از آن دو تا یک داریم که باید ۲۱ بنویسیم و بعد یک، صفر داریم و باید ۱۰ بنویسیم.

۴۲- گزینه «۴» استخر در ۴ ساعت پر می‌شود، یعنی شیر ورودی در هر ساعت می‌تواند $\frac{1}{4}$ استخر را پر کند. از طرفی شیر خروجی در هر ساعت می‌تواند

حجمی معادل $\frac{1}{5}$ حجم استخر را خالی کند. شیر ورودی را ساعت ۱ عصر باز کرده‌اند و شیر خروجی را پس از مدت زمان T باز کرده‌اند. کل زمانی که طول کشیده است تا استخر پر شود ۱۰ ساعت است یعنی از ساعت ۱ عصر تا ساعت ۱۱ عصر. در T ساعت اول که فقط شیر ورودی باز است حجمی معادل $\frac{1}{4} \times T$ از حجم استخر پر می‌شود. پس از باز شدن شیر خروجی در هر ساعت شیر ورودی حجمی معادل $\frac{1}{4}$ اضافه می‌کند و شیر خروجی معادل $\frac{1}{5}$ حجم استخر را خارج می‌کند. پس در این شرایط در هر ساعت معادل $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ به حجم استخر به حجم آب اضافه می‌شود.

$$\frac{1}{4} \times T + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \times (10 - T) = 1 \Rightarrow \frac{T}{4} + \frac{10}{20} - \frac{T}{20} = 1 \Rightarrow \frac{4T}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow T = \frac{20}{8} = 2.5$$

پس ۲/۵ ساعت پس از شیر ورودی شیر خروجی باز می‌شود. چون شیر ورودی ساعت ۱ عصر باز شده بود، پس باید شیر خروجی ساعت ۳:۳۰ عصر باز شده باشد.

۴۳- گزینه «۳» مخلوط را کیلویی ۲۲ تومان فروخته است و ۱۰ درصد سود به دست آورده است. یعنی قیمت فروشش ۱/۱ برابر هزینه تمام شده هر کیلو

مخلوط است و این یعنی هر کیلو مخلوط هزینه‌ای برابر با $20 = \frac{22}{1.1}$ تومان دارد.

گندم با مقدار کمتر در مخلوط: A و گندم با مقدار بیشتر در مخلوط: B

$$20 = \frac{14Q_A + X(Q_B)}{Q_A + Q_B}$$

طبق فرمول میانگین وزنی داریم:

از صورت سؤال می‌دانیم که $\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{2}{3}$ است، پس $Q_B = \frac{2}{3}Q_A$ است. با ساده کردن Q_A از صورت و مخرج داریم:

$$20 = \frac{14 + \frac{2}{3}X}{1 + \frac{2}{3}} \Rightarrow 20 + \frac{40}{3} = 14 + \frac{2}{3}X \Rightarrow X = 24$$

۴۴- گزینه «۴»

فرض کنیم در ردیف اول x عدد پرتقال باشد. ردیف دوم $x+4$ ، ردیف سوم $x+8$ و به همین ترتیب الی آخر.

$$x, x+4, x+8, \dots, x+(n-1) \times 4$$

مجموع آنها باید ۶۸۸ باشد. با توجه به فرمول مجموع در تصاعد حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} (\underbrace{2a}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{(n-1) \times d}_{\text{تعداد} \times \text{قدرنسبت}})$$

$$688 = \frac{n}{2} (2x + (n-1) \times 4) \Rightarrow nx + 2n(n-1) = 688$$

اختلاف ردیف اول و آخر $4(n-1)$ می‌باشد. در واقع هر گزینه را برابر با $4(n-1)$ قرار می‌دهیم. به دنبال آن باید x نیز صحیح باشد، فقط در مورد گزینه (۴) داریم:

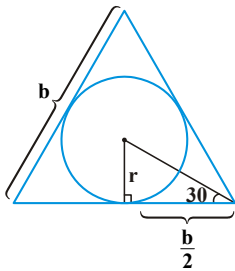
$$4(n-1) = 60 \Rightarrow n-1 = 15 \Rightarrow n = 16 \Rightarrow 16x + 2 \times 16(16-1) = 688 \Rightarrow x = 13$$

در مورد سایر گزینه‌ها، x عدد صحیح به دست نمی‌آید.

۴۵- گزینه «۲» پاسخ به سؤال، به روش‌های مختلف ممکن می‌باشد. ابتدا به این حل توجه کنید:

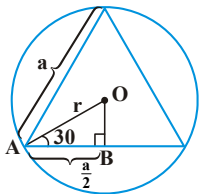
حل اول: اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، طبق فرمول کتاب طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر است با $2\sqrt{3}r$ و طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط شده بر دایره برابر است با $\sqrt{3}r$ ، پس مساحت مثلث بزرگتر چهار برابر مساحت مثلث کوچکتر است.

حل دوم: اگر نکته بالا را ندانیم، می‌توان نسبت اضلاع مثلث‌ها به طول شعاع دایره را به دست آورد. مرکز دایره محل تلاقی نیم‌سازها، میانها و ارتفاعات مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره است.



$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{r}{\frac{b}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{b}{2}} = \frac{2r}{b} \Rightarrow \boxed{b = 2\sqrt{3}r}$$

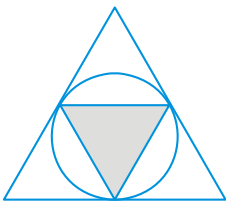
از طرفی مرکز دایره محیط بر مثلث متساوی‌الاضلاع محل تلاقی نیم‌سازها، میانها و ارتفاعات مثلث محاط شده است، پس مثلث OAB مثلث قائم‌الزاویه با زوایای $30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ است.



$$\cos(O\hat{A}B) = \frac{r}{a} = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{3}r$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{بزرگتر}}}{S_{\text{کوچکتر}}} = \left(\frac{\text{ضلع بزرگتر}}{\text{ضلع کوچکتر}} \right)^2 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}r}{\sqrt{3}r} \right)^2 = (2)^2 = 4$$

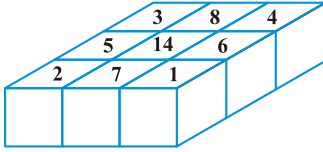
حل سوم: اگر مثلث درونی را بچرخانیم، شکل به صورت مقابل خواهد شد. از آنجا که دایره محاط شده در مثلث بزرگتر، در میان اضلاع بر آنها مماس می‌شود، رئوس مثلث کوچکتر روی میانها اضلاع مثلث بزرگتر قرار می‌گیرد؛ پس مساحت مثلث بزرگتر چهار برابر مساحت مثلث کوچکتر است.





۴۶- گزینه «۴» می‌خواهیم مجموع ۹ عدد طبیعی و متمایز نوشته شده بر روی ۹ مکعب پایینی ۵۰ باشد؛ از طرفی می‌دانیم:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$



همان‌طور که مشخص است، هنوز ۵ تا، تا رسیدن به عدد ۵۰ فاصله داریم. سعی می‌کنیم ۵ تای باقی‌مانده را طوری اختصاص دهیم که بزرگ‌ترین عدد ممکن ایجاد شود (به دلیل این که مطلوب سؤال بزرگ‌ترین عدد روی مکعب بالایی می‌باشد). پس می‌توانیم اعداد ۱ تا ۸ و (۹+۵) را در نظر بگیریم. اکنون باید بزرگ‌ترین اعداد را طوری در صفحه‌ی 3×3 پخش کنیم که بزرگ‌ترین اعداد در مشترک‌ترین قسمت‌ها باشد:

بر این اساس لایه وسطی که هر مکعبش مجموع ۴ مکعب زیرش می‌باشد، با اعداد زیر کامل می‌شود:

$$\left. \begin{array}{l} 14+6+1+7=28 \\ 14+6+8+4=32 \\ 14+8+3+5=30 \\ 14+7+2+5=28 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{عدد مکعب بالایی} = 28+32+30+28=118$$

و این حداکثر مقدار ممکن برای بالاترین مکعب می‌باشد.

۴۷- گزینه «۱» فرض کنیم تعداد کتاب‌های ریاضی، زبان و هنر به ترتیب R ، Z و H عدد باشند، در این صورت داریم:

$$R+Z=\frac{11}{13} \times H$$

قرار است $\frac{18}{19}H$ و $\frac{1}{15}(R+Z)$ در واگن اول باشد و بقیه کتاب‌ها در واگن دوم و تعداد کتاب‌های داخل واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ و در واگن دوم کمتر از ۱۰۰۰۰ کتاب باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}(R+Z)+\frac{18}{19}H &> 10000 \\ \frac{14}{15}(R+Z)+\frac{1}{19}H &< 10000 \end{aligned}$$

واضح است که تعداد کتاب‌ها باید عدد صحیح باشد، یعنی H باید مضرب ۱۹ و $(R+Z)$ نیز مضرب ۱۵ باشد.

$$\text{فرض می‌کنیم} \begin{cases} R+Z=15x \\ H=19y \end{cases} \text{ آنگاه داریم:}$$

$$x+18y > 10000 \Rightarrow x > 10000-18y$$

$$14x+y < 10000 \Rightarrow y < 10000-14x$$

دو نامساوی داریم که در آنها باید x و y صحیح و مثبت باشند. با توجه به اینکه باید $10000-14x < y < 10000-18y$ ، پس x نمی‌تواند از ۷۱۴ بزرگ‌تر باشد. از طرفی باید طوری x را مقدار دهیم که شرط y نیز در هر دو نامساوی برقرار باشد.

به ازای $x=627$ و $y=585$ نامساوی‌های فوق برقرار است.

$$R+Z=15 \times x=15 \times 627=9405$$

$$H=19 \times y=19 \times 585=11115$$

$$\frac{1}{15} \times 9405 + \frac{18}{19} \times 11115 = 627 + 10530 = 11157 > 10000$$

$$\frac{14}{15} \times 9405 + \frac{1}{19} \times 11115 = 8778 + 585 = 9363 < 10000$$



۴۸- گزینه «۱» ظرف اول پر از گلیسرین و ظرف و ظرف دوم پر از آب است و حجم دومی ۴ برابر اولی است.

پس فرض کنیم ظرف اول به حجم x و دومی به حجم $4x$ باشد. وقتی ملاقه اولی را در دومی و دومی را در اولی می‌ریزیم، یعنی به ظرف اول ۲ لیتر آب اضافه می‌کنیم و به ظرف دوم ۲ لیتر گلیسرین.

$$\left| \begin{array}{c} \text{گلیسرین} \\ x \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \text{آب} \\ 4x \end{array} \right|$$

$$\% \text{ گلیسرین دومی} = \frac{2}{4x} \times 100 \quad \% \text{ گلیسرین اولی} = \frac{x-2}{x} \times 100$$

در ظرف اول x لیتر گلیسرین است. وقتی دو لیتر از گلیسرین را برمی‌داریم و به جای آن آب می‌ریزیم، میزان گلیسرین موجود $(x-2)$ لیتر می‌شود ولی حجم کل هنوز همان x لیتر می‌باشد.

$$\text{نسبت گلیسرین خالص موجود} = \frac{x-2}{x}$$

$$\text{نسبت گلیسرین خالص موجود} = \frac{2}{4x}$$

در ادامه، از ظرف دوم ۲ لیتر برمی‌داریم، از ظرف اولی نیز ۲ لیتر برمی‌داریم و از ظرف دوم، آنچه که برداشته‌ایم را در ظرف اول می‌ریزیم.

$$\% \text{ گلیسرین اولی} = \frac{x-2-2 \times \frac{x-2}{x} + 2 \times \frac{2}{4x}}{x} \times 100 = \frac{4}{100}$$

دقت کنیم وقتی از ظرف اول ۲ لیتر برمی‌داریم $\frac{x-2}{x}$ آن گلیسرین است. پس $2 \times \frac{x-2}{x}$ از گلیسرین آن کم می‌شود و وقتی از ظرف دوم ۲ لیتر برای

اولی می‌ریزیم، $2 \times \frac{2}{4x}$ میزان گلیسرین خالص است. با طرفین وسطین داریم:

$$4x = 100x - 200 - 200 + \frac{40}{x} + \frac{10}{x} \Rightarrow 3x^2 - 200x + 250 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{10}{6} \end{cases}$$

که البته $x = \frac{10}{6}$ قبول نیست، چون از ۲ لیتر کمتر است! پس ظرف‌ها ۵ و ۲۰ لیتر می‌باشند.

۴۹- گزینه «۴» فرض کنیم A و B گروه اول و دوم باشند که به ترتیب در t و t' بتوانند کار را انجام دهند. می‌دانیم $t+t'=12$ تفاضل t و t' برابر

با ۴۵٪ زمانی است که هر دو با هم کار کنند.

$$A \times t = w \quad t+t'=12$$

$$B \times t' = w \quad t-t' = 0/45 \times t''$$

$$(A+B) \times t'' = w \Rightarrow \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right) \times t'' = 1 \Rightarrow \frac{t+t'}{t \times t'} \times t'' = 1 \Rightarrow \frac{12}{t \times t'} \times t'' = 1 \Rightarrow \begin{cases} t \times t' = 12t'' \\ t-t' = 0/45t'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12(t-t') = \frac{45}{100} t \times t' \Rightarrow 1200 \times (t-t') = 45t \times t' \Rightarrow 80(t-t') = 3t \times t' \xrightarrow{t'=12-t} 80(2t-12) = 3t \times (12-t)$$

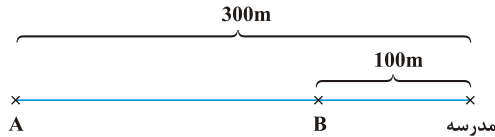
$$\Rightarrow 160t - 960 = 36t - 3t^2 \Rightarrow t = \frac{20}{3}$$

و چون $t+t'=12$ ، پس $t' = \frac{16}{3}$ خواهد شد.

پس گزینه (۴) صحیح است.



۵۰- گزینه «۲» می‌توانیم موقعیت ایستگاه A و B و مدرسه را به صورت زیر فرض کنیم:



سرعت تراموا برابر U و سرعت دانش‌آموز را V فرض می‌کنیم. با توجه به رابطه بین جابه‌جایی، سرعت و زمان داریم:

$$\frac{300}{V} = \frac{200}{U} + \frac{100}{V} + \frac{1}{60}$$

مدت زمان رفتن از A تا مدرسه پیاده	مدت زمان رفتن از A تا B با تراموا	مدت زمان پیاده رفتن از B تا مدرسه	یک دقیقه اضافه‌تر که البته برحسب ساعت نوشته شده است
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	---

اگر سرعت خود را دو برابر کند، رابطه زیر را نیز خواهیم داشت:

$$\frac{300}{2V} = \frac{200}{U} \Rightarrow 3U = 4V \Rightarrow \begin{cases} 3U = 4V \\ \frac{300}{V} = \frac{200}{U} + \frac{100}{V} + \frac{1}{60} \end{cases} \Rightarrow V = 3000 \frac{m}{h}$$

چون زمان را برحسب ساعت و جابه‌جایی را برحسب متر لحاظ کردیم، پس واحد $\frac{m}{h}$ می‌باشد:

$$\frac{m}{h} \times \frac{1}{1000} = \frac{km}{h} \Rightarrow 3000 \times \frac{1}{1000} = 3 \frac{km}{h}$$

سرعت دانش‌آموز $3 \frac{km}{h}$

آزمون (۴)

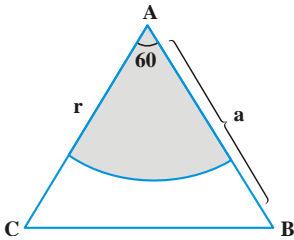
۵۱- گزینه «۳» در ارتباط بین اعداد، گاهی لازم است هر عدد را با ارقامش مرتبط کنیم. مثلاً ۱۹۹ را هم به چشم یکصد و نود و نه نگاه کنیم هم به چشم ۱ و ۹ و ۹. با کمی دقت در اعداد داده شده به این نتیجه می‌رسیم که هر عدد با مربع خودش جمع می‌شود و عدد بعدی حاصل می‌شود.

$$۱۹۹ + ۹^2 = ۲۸۰$$

$$۲۸۰ + ۸^2 = ۳۴۴$$

⋮

$$۳۹۶ + ۹^2 = ۴۷۷ \leftarrow \text{جواب}$$



۵۲- گزینه «۳» می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع بر ضلع a برابر است با:

$$S_{\Delta}(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

می‌خواهیم مساحت قطاع به مرکز A و شعاع r نصف مساحت مثلث یعنی برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ باشد.

با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC ، هر یک از زوایای آن 60° است، پس مساحت قطاع مشخص شده $\frac{1}{6}$ مساحت دایره‌ای به شعاع r است.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{6} (\pi r^2) \Rightarrow (r^2) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} \times 6 a^2}{4\pi} = \frac{3\sqrt{3} a^2}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} a^2}{4\pi}} = a \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$$

۵۳- گزینه «۴» با ارقام ۱ تا ۹ و چهار عمل اصلی سعی می‌کنیم جدول را کامل کنیم. حدس اولیه برای سطر اول می‌تواند $۹ \div ۳ \times ۲ = ۶$ باشد. در مورد

$$۶ + ۳ \div ۳ = ۳$$

ستون سمت راست نیز داریم:

اکنون اگر بخواهیم ستون سمت چپ را کامل کنیم دو حالت داریم: ۹ یا ۹ پس از قرار دادن در جدول و پرکردن بقیه خانه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که

$$\begin{array}{r} + \\ ۹ \\ \div \\ ۳ \\ = \\ ۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} + \\ ۱ \\ \div \\ ۲ \\ = \\ ۵ \end{array}$$

حالت ۹ قبول است.

$$\begin{array}{r} + \\ ۶ \\ \div \\ ۳ \\ = \\ ۵ \end{array}$$

نهایتاً جدول به صورت زیر کامل خواهد شد:

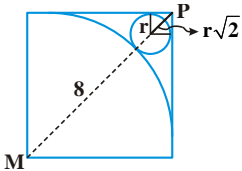
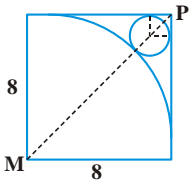
9	÷	3	×	2	=	6
+		-		×		+
6	+	1	-	4	=	3
÷		+		-		÷
3	×	3	-	6	=	3
=		=		=		=
5	÷	5	+	2	=	3



۵۴- گزینه «۳» با توجه به این که A و B وسط اضلاع هستند، پس می‌توانیم چهارضلعی AMBO را مربع در نظر بگیریم، لذا:

$$S_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = 32 \Rightarrow OA \times OB = 64$$

$$(OA)^2 = 64 \Rightarrow OA = 8$$



از آنجا که $OA = OB$ ، پس داریم:
پس شعاع دایره بزرگ ۸ می‌باشد و البته واضح است که در این صورت طول ضلع مربع کوچک نیز ۸ می‌شود. فرض کنیم شعاع دایره کوچک r باشد:

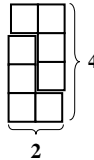
$$MP = 8\sqrt{2} = 8 + r + r\sqrt{2} \Rightarrow 8\sqrt{2} - 8 = r(1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow r = \frac{8(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} = 24 - 16\sqrt{2}$$

لازم به ذکر است که در مربع کوچک، بر نقاط مماس با اضلاع مربع، شعاع وارد کردیم، در نتیجه انگار با مربعی به ضلع r در گوشه سمت راست سروکار داریم:

$$MP = 8 + r + r\sqrt{2}$$

۵۵- گزینه «۳» ابتدا با کنار هم گذاشتن دو تا از موزائیک‌ها به یک مستطیل ۲ در ۴ می‌رسیم:



حالا با کنار هم گذاشتن این قطعات ۲ در ۴ می‌توانیم بدون نیاز به شکستن موزائیک‌ها کل مساحت مستطیل ۱۲ در ۸ را بپوشانیم.

$$4 \text{ در } 2 \text{ در } 4 = \frac{\text{تعداد قطعات } 2 \text{ در } 4}{\text{مساحت قطعه } 2 \text{ در } 4} = \frac{12 \times 8}{2 \times 4} = 12$$

۱۲ قطعه ۲ در ۴ داریم. در هر قطعه ۲ موزائیک به کار رفته است، پس تعداد موزائیک‌های مورد نیاز $12 \times 2 = 24$ است.

توجه: ایجاد یک قطعه مستطیل شکل با ابعاد ۲ در ۴ برای این انجام شد که مطمئن شویم نیازی به شکستن موزائیک‌ها برای پوشاندن کل سطح نداریم.

۵۶- گزینه «۳» فرض کنیم حجم کل کار برای هر گروه w باشد و هر نوبت را A و B و C بنامیم.

$$B = 1/2A \Rightarrow \text{سرعت گروه دوم، } 1/2 \text{ برابر گروه اول است}$$

$$C - B = 0/6 \Rightarrow \text{نوبت سوم ساعتی } 0/6 \text{ متر بیشتر از دومی کار انجام می‌دهد}$$

مدت زمان انجام کار توسط نوبت دوم، یک ساعت کمتر از نوبت اول است و نوبت سوم برای نصف کار، ۳ ساعت بیشتر از نوبت دوم زمان لازم دارند

$$\Rightarrow \begin{cases} A \times (t+1) = w \\ B \times t = w \\ C \times (t-3) = \frac{w}{2} \end{cases}$$

$$A = \frac{w}{t+1} \text{ و } B = \frac{w}{t} \text{ و } C = \frac{w}{t-3}$$

$$B = 1/2A \Rightarrow \frac{w}{t} = 1/2 \times \frac{w}{t+1} \Rightarrow t+1 = 1/2t \Rightarrow t = 5$$

$$C - B = 0/6 \Rightarrow \frac{w}{2(t-3)} - \frac{w}{t} = 0/6 \xrightarrow{t=5} \frac{w}{4} - \frac{w}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow 5w - 4w = 12 \Rightarrow w = 12$$

یعنی کل کار برای هر نوبت ۱۲ متر می‌باشد. از طرفی A در هر ساعت $\frac{w}{t+1}$ را انجام می‌دهد:

$$\frac{w}{t+1} = \frac{12}{5+1} = 2$$

۵۷- گزینه «۴» با شروع از سال ۱۹۵۶ تا پایان سال ۱۹۷۹ یعنی در ۲۴ سال متوالی باید ۳۱۵۰ ازدواج صورت پذیرد. با یک تضاد حسابی روبه‌رو هستیم که جمله اول آن ۱۰۰ و قدر نسبت آن (+۵) می‌باشد.

$$100 + 105 + 110 + \dots = 3150 \Rightarrow \text{تضاد حسابی} \begin{cases} a = 100 \\ d = 5 \\ S_n = 3150 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow 3150 = \frac{n}{2}(2 \times 100 + (n-1) \times 5) \Rightarrow n = 21$$

$$a_{21} = a_1 + (21-1) \times 5 = 100 + 20 \times 5 = 200 = \text{تعداد ازدواج سال بیست و یکم}$$

و طبق صورت سؤال، برای a_{22}, a_{23}, a_{24} باید هر سال، ۱۱ عدد کمتر از ۲۰۰ ازدواج داشته باشیم، یعنی:

$$a_{22} = a_{23} = a_{24} = 200 - 11 = 189$$

$$\text{تعداد ازدواج‌هایی که رخ داد} = 3150 + 3 \times 189 = 3717$$

$$\text{تعداد ازدواج‌هایی که پیش‌بینی شد} = 3150$$

$$\% \text{ اختلاف} = \frac{3717 - 3150}{3150} = 18\%$$

۵۸- گزینه «۴» حرکت اتومبیل در هر دقیقه یک تضاد حسابی می‌باشد که جمله اول آن ۱۸۰۰ و قدر نسبت آن (-۱۲۰) است. حرکت موتورسیکلت نیز برای چهار دقیقه اول ثابت و هر دقیقه ۱۲۰ متر می‌باشد. ولی از شروع دقیقه پنجم به بعد، تضاد حسابی است که جمله اول آن ۱۲۰ و قدر نسبت آن (+۶۰) می‌باشد. جملات مربوط به جابه‌جایی اتومبیل و موتورسیکلت را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجموع جابه‌جایی هر دو ۱۹۵۰۰ متر باشد:

جابجایی اتومبیل	۱۸۰۰	۱۶۸۰	۱۵۶۰	۱۴۴۰	۱۳۲۰	۱۲۰۰	۱۰۸۰	۹۶۰	۸۴۰
جابجایی موتور	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰	۳۶۰
مجموع	۱۹۲۰	۱۸۰۰	۱۶۸۰	۱۵۶۰	۱۴۴۰	۱۳۸۰	۱۳۲۰	۱۲۶۰	۱۲۰۰
	۷۲۰	۶۰۰	۴۸۰	۳۶۰	۲۴۰	۱۲۰			
	۴۲۰	۴۸۰	۵۴۰	۶۰۰	۶۶۰	۷۲۰			
	۱۱۴۰	۱۰۸۰	۱۰۲۰	۹۶۰	۹۰۰	۸۴۰			

در واقع پس از ۱۵ دقیقه، هر دو به هم می‌رسند. در واقع جابه‌جایی اتومبیل یک تضاد حسابی است که جمله اول آن ۱۸۰۰، قدر نسبت آن -۱۲۰ و تعداد جملات آن ۱۵ می‌باشد:

$$\text{مجموع جابه‌جایی اتومبیل بر حسب متر} = \frac{15}{2}(1800 + 120) = 14400$$

۵۹- گزینه «۳» فرض کنیم آلیاژ اول و دوم به ترتیب $x\%$ و $y\%$ روی داشته باشند. آلیاژ سوم نیز ۴۵٪ روی دارد و وزن آن ۵ کیلوگرم است. وزن آلیاژ اول و دوم نیز به ترتیب ۲ و ۳ کیلوگرم است.

$$\text{درصد روی} = \frac{2 \times x + 3 \times y + 5 \times 45}{2 + 3 + 5} = 50 \Rightarrow 2x + 3y = 275$$

اگر جای x و y را برای آلیاژها عوض کنیم و آنها را با ۵ کیلوگرم آلیاژ ۶۰٪ مخلوط کنیم، آلیاژ جدیدی با درصد روی ۵۵٪ ایجاد می‌شود:

$$55 = \frac{2y + 3x + 5 \times 60}{2 + 3 + 5} \Rightarrow 2y + 3x = 250$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 275 \\ 3x + 2y = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 65 \end{cases}$$

دستگاهی تشکیل می‌دهیم و x و y را پیدا می‌کنیم:



۶۰- گزینه «۱» هرگاه بخواهیم بین دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، کسر دیگری قرار دهیم می‌توانیم از الگوی زیر پیروی کنیم:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

می‌توانیم کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را نیز ساده کنیم، در نتیجه در کسر $\frac{a+c}{b+d}$ با اعداد کوچک‌تری در صورت و مخرج روبه‌رو هستیم. به عنوان مثال:

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5}{10} < \frac{8}{14} < \frac{3}{4}$$

وقتی می‌خواهیم حداقل تعداد کارگران را پیدا کنیم باید کسرها را تا جایی که ممکن است ساده کنیم و چون تعداد کارگران موردنظر است، می‌توانیم با کم و زیاد کردن صورت یا مخرج (به صورت محدود) بازه، مورد نظر سؤال را برقرار کنیم.

فرض کنیم M کل کارگران باشد و x تعداد کارگرانی که به مرخصی رفته‌اند:

$$\frac{1/7}{100} < \frac{x}{M} < \frac{2/3}{100} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{1/7 + 2/3}{100 + 100} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50} = 2\%$$

تعداد کارگران ۵۰ نفر می‌تواند باشد، ولی با کمی تغییر در صورت و مخرج $\frac{1/7}{100}$ و $\frac{2/3}{100}$ بدون اینکه از کلیت سؤال کاسته شود، می‌توانیم از زاویه دیگری

مسئله را ببینیم:

$$\frac{1/7}{100} \approx \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{50} < \frac{x}{M} < \frac{3}{126} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{4}{176} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{4}{176} = \frac{1}{44} \approx 2/27\%$$

$$\frac{2/3}{100} \approx \frac{3}{125}$$

پس کمترین تعداد کارگران می‌تواند ۴۴ نفر باشد.

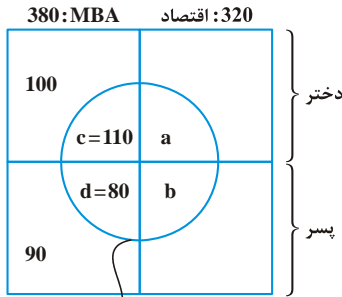
آزمون (V)

۶۱- گزینه «۳» برای درک بهتر و گیج نشدن در روند حل سؤال رسم شکل بسیار مفید است. از ۷۰۰ نفر دانشجوی، ۳۲۰ نفر اقتصاد هستند، پس ۳۸۰ نفر MBA داریم. تعداد دختران رشته MBA، ۲۱۰ نفر است، پس تعداد پسران این رشته برابر است با:

$$380 - 210 = 170$$

۵۰ درصد دانشجویان MBA، یعنی ۱۹۰ نفر و ۴۰ درصد دانشجویان اقتصاد، یعنی $0.4 \times (320) = 128$ نفر درس اقتصاد خرد دارند.

$$\begin{cases} c + d = 190 \\ a + b = 128 \end{cases}$$



ثابت نام کنندگان در درس اقتصاد خرد

۹۰ نفر دانشجوی پسر رشته MBA درس اقتصاد ندارند، پس $d = 80 = 170 - 90$ ، از طرفی چون تعداد دانشجویان MBA که درس را داشتند ۱۹۰ نفر بودند، پس $c = 190 - 80 = 110$ نفر از دانشجویان دختر درس MBA را دارند.

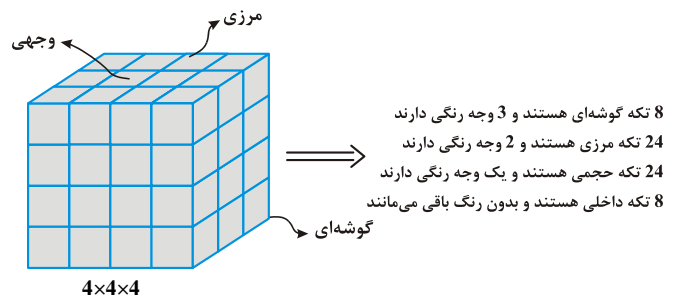
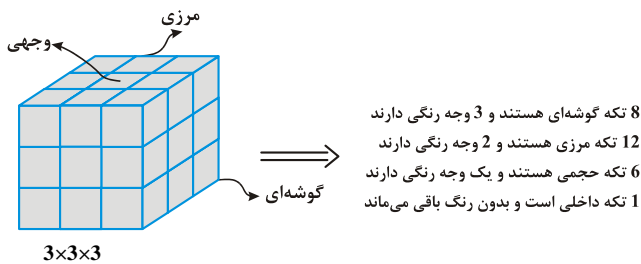
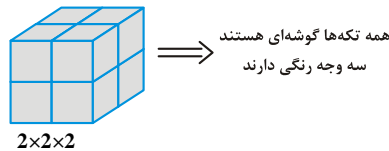
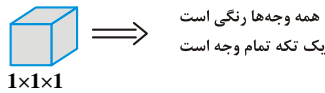
تعداد دانشجویان دختر رشته اقتصاد که درس را دارند (a) از نصف تعداد دختران رشته MBA که درس را دارند، یعنی $\frac{1}{2} \times 110 = 55$ کمتر است.

پس $a < 55 \Rightarrow a \leq 54$. سؤال تعداد دانشجویان پسر رشته اقتصاد را خواسته است که این درس را دارند، یعنی پیدا کردن b مورد نظر است:

$$a + b = 128 \Rightarrow b = 128 - a \xrightarrow{a < 55} b > 128 - 55 = 73$$

$b > 73$ پس در نتیجه گزینه (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرفی $a + b = 128$ ، پس a و b هر دو کوچک‌تر مساوی ۱۲۸ هستند، پس b نمی‌تواند ۱۳۰ باشد، پس تنها گزینه ممکن در این بین، گزینه (۳) یعنی $b = 100$ می‌باشد.

۶۲- گزینه «۳» ابتدا به مکعب‌های گفته شده دقت کنیم که در هر کدام چند تکه گوشه‌ای، چند تکه مرزی (لبه‌ای)، چند تکه وجهی، چند تکه داخلی (بی‌رنگ) و چند تکه کامل رنگی داریم.

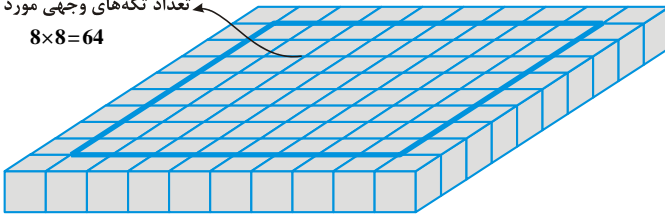


شکل	هر ۶ وجه رنگی	گوشه‌ای، ۳ وجه رنگی	مرزی، ۲ وجه رنگی	وجهی، ۱ وجه رنگی	داخلی، بدون رنگ
۱×۱×۱	۱	-	-	-	-
۲×۲×۲	-	۸	-	-	-
۳×۳×۳	-	۸	۱۲	۶	۱
۴×۴×۴	-	۸	۲۴	۲۴	۸
کل	۱	۲۴	۳۶	۳۰	۹



تعداد تکه‌های وجهی مورد نیاز

$$8 \times 8 = 64$$



در شکل نهایی که به صورت یک مکعب $10 \times 10 \times 10$ ساخته می‌شود، همه‌ی تکه‌ها حداقل باید یک وجه رنگ شده داشته باشند زیرا وجه بالایی باید رنگ شده باشد. در حالی که ما ۹ مکعب واحد داریم که هیچ‌وجه رنگی ندارند. پس برای ساخته شدن شکل نهایی، ناچاریم حداقل ۹ وجه از مکعب‌های واحد را رنگ‌آمیزی کنیم.

توضیح بیشتر:

در مربع 10×10 مسطح یا مکعب $10 \times 10 \times 10$:

۴ مکعب گوشه‌ای نیاز داریم.

$4 \times 8 = 32$ تکه مرزی (۲ وجه رنگی) نیاز داریم (بالا و کنار رنگی).

$8 \times 8 = 64$ تکه وجهی (یک وجه رنگی نیاز داریم).

$25 = 24 + 1$ تکه داریم که حداقل سه وجه آنها رنگی است و می‌توانند در گوشه باشند، ۴ تا از آنها را در گوشه می‌گذاریم و ۲۱ تا اضافه داریم. کلاً ۳۲ تکه مرزی می‌خواهیم که می‌توانیم از این ۲۱ تا ۳ وجهی (گوشه‌ای) و هم‌چنین ۳۶ تا ۲ وجهی (لبه‌ای) استفاده کنیم. از آن ۳۶ تا ۱۱ تا برمی‌داریم؛ می‌ماند ۲۵ تا. هر کدام از گوشه‌های (سه وجه رنگی) و دو وجهی‌ها (لبه‌ای‌ها) را می‌توان طوری قرار داد که یک طرف رنگی آنها بالا باشد، پس از آنها برای تکه‌های وجهی نیز می‌توان استفاده کرد. پس ۲۵ تا به‌علاوه‌ی ۳۰ تا (که یک وجه رنگی دارند) می‌شود ۵۵ تا که تا ۶۴ تا کم داریم، پس آن ۹ تا که هیچ‌وجه رنگی ندارند هم باید رنگی شوند. پس تنها همان ۹ تکه بدون رنگ می‌مانند که باید یک وجه آنها (بالا) را رنگ کرد تا به طراحی دلخواه برسیم. پس حداقل باید ۹ وجه را رنگ‌آمیزی کنیم.

۶۳- گزینه «۲» ارتباط اعداد به صورت زیر است:

$$1 \times 2 \times 3 = 6, \quad 2 \times 3 \times 4 = 24, \quad 3 \times 4 \times 5 = 60, \quad 4 \times 5 \times 6 = 120, \quad 5 \times 6 \times 7 = 210, \quad 6 \times 7 \times 8 = 336, \quad 7 \times 8 \times 9 = 504 \Rightarrow ? = 8 \times 9 \times 10 = 720$$

۶۴- گزینه «۴» فرض کنید $2x$ ، $5x$ و $6x$ طول اصلی بخش‌های مربوطه باشد. فرض کنید P و Q به ترتیب طول کاهش یافته گره A و B باشد. بنابراین طول جدید برابر با $6x - (\Delta P + \Delta Q)$ ، $5x - 10Q$ و $2x - 6P$ هستند، اما با توجه به این که نسبت‌های جدید ۱، ۷ و ۸ هستند، بنابراین:

$$2x - \frac{6P}{\Delta x} - 10Q = \frac{1}{7} \quad \text{و} \quad 2x - \frac{6P}{6x} - (\Delta P + \Delta Q) = \frac{1}{8}$$

را به دست آوریم:

$$\begin{cases} \frac{2x - 6P}{5x - 10Q} = \frac{1}{7} \Rightarrow 14x - 42P = 5x - 10Q \\ \frac{2x - 6P}{6x - \Delta P - \Delta Q} = \frac{1}{8} \Rightarrow 16x - 48P = 6x - \Delta P - \Delta Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 42P - 10Q \\ 10x = 43P - \Delta Q \end{cases}$$

از معادله‌ی اول x را برحسب P و Q به دست آورده و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$10 \left(\frac{42}{9}P - \frac{10}{9}Q \right) = 43P - \Delta Q \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}} 420P - 100Q = 9 \times 43P - 9 \times \Delta Q \Rightarrow 420P - 9 \times 43P = 55Q$$

$$\Rightarrow 33P = 55Q \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{55}{33} = \frac{5}{3}$$

۶۵- گزینه «۴» حسین پس از هر ۹ روز کار، یک روز مرخصی دارد. در واقع حسین روزهای ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ و ... مرخصی دارد. حسن نیز هر ۷ روز یکبار

مرخصی دارد. یعنی روزهای ۷ و ۱۴ و ۲۱ و ... حسن به مرخصی می‌رود. امروز حسین مرخصی است، پس باید از فردا سر کار برود.

فرض کنیم امروز ۳۱ تیر باشد (به عنوان مثال) پس حسین از یکم مرداد سر کار می‌رود و روزهای دهم و بیستم و سی‌ام مرداد مرخصی دارد. فردا حسن مرخصی است، یعنی با فرضی که در نظر گرفتیم (امروز ۳۱ تیر باشد) حسن باید از دوم مرداد سر کار برود و هر ۷ روز یکبار مرخصی می‌رود. حسین ۵۰ روز بعد مرخصی دارد و حسن ۴۹ روز بعد. ولی چون حسن یک روز دیرتر به مرخصی می‌رود، پس ۴۹ روز بعد برای حسن همان روز پنجاهم برای حسین می‌باشد. پس حداقل ۵۰ روز بعد هر دو با هم به مرخصی می‌روند.

۶۶- گزینه «۱» فرض کنیم در ظرف اول و دوم به ترتیب x و $40-x$ کیلوگرم محلول نمک بریزیم و غلظت نمک نیز $A\%$ باشد.

در ظرفی که x کیلوگرم محلول ریخته‌ایم، میزان نمک خالص برابر است با:

$$x \times \frac{A}{100}$$

$$(40-x) \times \frac{A}{100}$$

و در ظرف دوم نیز که $40-x$ کیلوگرم محلول ریخته‌ایم، میزان نمک خالص برابر است با:

$$\boxed{x}$$

ظرف اول



$$\text{نمک خالص} = x \times \frac{A}{100}$$

$$\boxed{40-x}$$

ظرف دوم



$$\text{نمک خالص} = (40-x) \times \frac{A}{100}$$

$$(40-x) \frac{A}{100} = \frac{xA}{100} + 2$$

اگر به ظرف دوم ۱ کیلوگرم نمک اضافه کنیم:

$$\text{نمک خالص ظرف دوم} = (40-x) \times \frac{A}{100} + 1$$

$$\Rightarrow (40-x) \frac{A}{100} + 1 = 2 \times \frac{xA}{100}$$

$$\text{نمک خالص ظرف اول} = x \times \frac{A}{100}$$

با استفاده از ۲ رابطه بالا داریم:

$$\frac{xA}{100} + 2 + 1 = 2 \times \frac{xA}{100} \Rightarrow \frac{xA}{100} = 3$$

$$(40-x) \times \frac{A}{100} = \frac{xA}{100} + 2 \Rightarrow \frac{40A}{100} - \frac{xA}{100} = \frac{xA}{100} + 2 \Rightarrow \frac{2}{5}A = 8 \Rightarrow A = 20 \Rightarrow \frac{xA}{100} = 3 \Rightarrow x = 15 \text{ (kg)}$$

پس در ظرف اول ۱۵ کیلوگرم محلول ریخته‌ایم.

۶۷- گزینه «۲» فرض کنیم ابتدا آنها را در x واگن با ظرفیت ۱۲ نفر جای دهیم. یعنی $12x$ تعداد کل زندانیان است. N نفر پیاده می‌شوند و بقیه را

در $(x-2)$ واگن جای می‌دهیم، به طوری که در هر واگن a نفر قرار دارد که a عددی اول است و $(x-2)$ باید ۱۴ واحد از a کمتر باشد:

$$12x = \text{تعداد کل}$$

عدد اول



$$12x - N = (x-2) \times a \quad ; \quad x-2 = a-14$$

تنها حالتی که a بتواند اول باشد و در روابط بالا صدق کند $a=17$ است. در نتیجه داریم:

$$x-2 = 17-14 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \text{تعداد کل زندانیان} = 60$$

۶۸- گزینه «۱» سرعت قایق ۱۸ کیلومتر در ساعت است و سرعت آب رودخانه $\frac{3}{h}$ km.

سرعت جریان آب ورودی به رودخانه را V فرض می‌کنیم. قایق از نقطه A باید ۸۰ کیلومتر را با سرعت $(18+V)$ طی کند تا به رودخانه برسد، سپس x کیلومتر را با سرعت $(18-3)$ در خلاف جهت رودخانه برود و به نقطه B برسد. پس داریم:

$$\text{رفت: } \begin{cases} 80 = (18+V) \times t \\ x = (18-3) \times (18-t) \end{cases}$$

با توجه به اینکه قایق در مسیر برگشت ۱۵ ساعت در راه بوده است و با لحاظ کردن جهت جریان آب در رودخانه داریم:

$$\text{برگشت: } \begin{cases} 80 = (18-V) \times t' \\ x = (18+3) \times (15-t') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{80}{18+V} + \frac{x}{18-3} = 18 \\ \frac{80}{18-V} + \frac{x}{18+3} = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{80}{18+V} + \frac{x}{15} = 18 \\ \frac{80}{18-V} + \frac{x}{21} = 15 \end{cases}$$

چون سمت راست تساوی‌ها عدد صحیح است، پس باید $\frac{x}{21}$ و $\frac{x}{15}$ عدد صحیح باشد، لذا x باید مضرب ۲۱ و ۱۵ باشد. از طرفی $\frac{80}{18+V}$ و $\frac{80}{18-V}$ نیز باید صحیح باشند، یعنی $18-V$ و $18+V$ باید مقسوم‌علیه ۸۰ باشد، اگر $V=2$ باشد، آنگاه هم $\frac{80}{18-2}$ هم $\frac{80}{18+2}$ عدد صحیح می‌شود، پس $V=2$ به

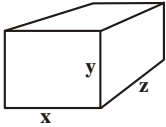
$$\frac{80}{18+2} + \frac{x}{15} = 18 \Rightarrow \frac{x}{15} = 14 \Rightarrow x = 210$$

همین ترتیب اگر $V=2$ باشد، داریم:

و البته فاصله A و B از هم $(x+80)$ می‌باشد، یعنی ۲۹۰ کیلومتر فاصله دو ایستگاه A و B از هم می‌باشد.



۶۹- گزینه «۲» اگر ابعاد مکعب مستطیل به x, y, z و z قسمت تقسیم شود، کل قطعات برابر با $x \times y \times z$ خواهد بود. ابتدا 180 را تجزیه کنیم:



$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

باید سعی کنیم طوری $2, 3, 5$ را با هم ترکیب کنیم که حاصل ضرب آنها 180 شود. به عنوان مثال $180 = 12 \times 3 \times 5$ نیز قبول است، ولی در این حالت تعداد برش‌ها حداقل نخواهد شد. یادآور می‌شویم که اگر بخواهیم پاره‌خطی به x قسمت مساوی تقسیم شود، باید $(x-1)$ برش اعمال کنیم.

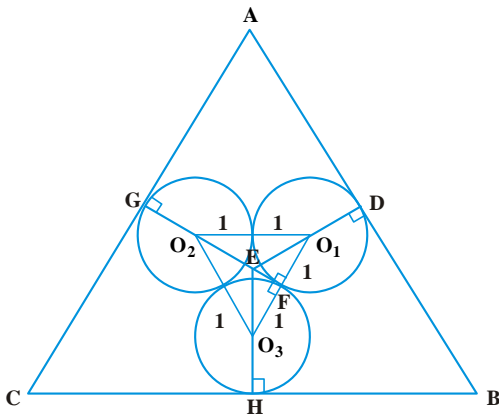
$$180 = 4 \times 9 \times 5$$

$$180 = 6 \times 6 \times 5$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 برش ۴ برش ۵ برش ۵

یعنی اگر بُعدهای مکعب به 6 و 6 و 5 قسمت تقسیم شوند، کمترین تعداد برش (یعنی 14 برش) لازم است.

۷۰- گزینه «۲» با وصل کردن مرکز دایره به هم یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 2cm تشکیل می‌شود. شعاع عمود بر اضلاع مثلث را که ادامه دهیم در



نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. $O_2E = O_1E = O_3E$ چرا که مثلاً

$$\begin{cases} O_1E = \sqrt{EF^2 + 1^2} \\ O_2E = \sqrt{EF^2 + 1^2} \end{cases} \Rightarrow O_1E = O_2E$$

و به طریق مشابه $O_2E = O_3E$. پس E نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به یک فاصله است، پس این نقطه محل تلاقی نیم‌سازها، ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث $O_1O_2O_3$ است؛ پس طول $O_1E = O_2E = O_3E$ برابر با $\frac{2}{3}h$ است که h ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع درونی است و می‌دانیم $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع مثلث یعنی $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

$$O_1E = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین داریم:

پس فاصله نقطه E تا ضلع‌های مثلث برابر است با:

$$ED = EO_1 + O_1D = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$$

نقطه E درون مثلث بزرگ‌تر از هر سه ضلع فاصله یکسانی دارد، پس این نقطه محل تلاقی نیم‌سازها، میانه‌ها و ارتفاع‌ها است و فاصله E تا هر ضلع یک‌سوم ارتفاع است. اگر طول ضلع مثلث بزرگ X باشد، داریم:

$$ED = \frac{1}{3}(AH) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}X, \quad ED = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \Rightarrow X = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{4\sqrt{3} + 6}{\sqrt{3}} = 4 + \frac{6\sqrt{3}}{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

آزمون (۸)

۷۱- گزینه «۲» فرض کنید که در ابتدا مقدار شیر در ظرف X لیتر بوده باشد. وقتی ۸ لیتر از آن را خالی کرده و جای آن آب می‌ریزیم، مقدار شیر موجود برابر با $X - 8$ لیتر و مقدار آب موجود برابر با ۸ لیتر خواهد شد. در واقع نسبت مقدار شیر به مخلوط برابر $(1 - \frac{8}{X}) = \frac{(X-8)}{X}$ می‌شود. در مرحله دوم که ۸ لیتر برمی‌داریم. این ۸ لیتر شیر خالی نیست بلکه با توجه به نسبت شیر به کل مخلوط بخشی از این ۸ لیتر شیر است و بخش دیگر آب. با توجه به اینکه قبل از این مرحله نسبت شیر به مخلوط برابر با $1 - \frac{8}{X}$ است. همین نسبت آن ۸ لیتر جدیداً خارج شده را شیر تشکیل می‌دهد. یعنی مقدار شیر خارج شده در مرحله دوم برابر است با:

$$8 \times (1 - \frac{8}{X})$$

پس مقدار شیر مانده در ظرف پس از مرحله دوم برابر با $X - 8 - (8 \times (1 - \frac{8}{X}))$ است. یعنی نسبت شیر به مخلوط برابر با مقدار زیر خواهد شد:

$$\frac{(X-8) - 8 \times (1 - \frac{8}{X})}{X} = \frac{X(1 - \frac{8}{X}) - 8 \times (1 - \frac{8}{X})}{X} = \frac{(X-8)(1 - \frac{8}{X})}{X} = (1 - \frac{8}{X})^2$$

به طریق مشابه برای مرحله سوم به دست می‌آید که نسبت شیر مانده به مخلوط برابر $(1 - \frac{8}{X})^3$ خواهد بود و در نهایت بعد از مرحله چهارم نسبت شیر به مخلوط برابر با $(1 - \frac{8}{X})^4$ است. در صورت سؤال بیان شده که بعد از چهار مرحله نسبت شیر به مخلوط برابر با $\frac{16}{81}$ است. پس داریم:

$$(1 - \frac{8}{X})^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow 1 - \frac{8}{X} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{8}{X} = \frac{1}{3} \Rightarrow X = 8 \times 3 = 24$$

۷۲- گزینه «۱» اگر ساق‌های مثلث را با a و ضلع دیگر را با b نشان دهیم:

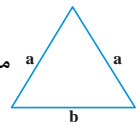
$$a + a + b = 2a + b = 18 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 18 - 2a \\ b: \text{ عدد طبیعی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ عدد زوج } b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a > b \\ 2a + b = 18 \end{array} \right. \Rightarrow b \leq 9 \xrightarrow{\text{زوج } b} b \leq 8$$

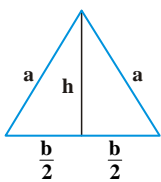
$$\left\{ \begin{array}{l} b = 2, a = 8 \\ b = 4, a = 7 \\ b = 6, a = 6 \\ b = 8, a = 5 \end{array} \right.$$

از طرفی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است، پس داریم:

پس چهار ترکیب ممکن به شکل مقابل وجود دارد:



در مثلث a مساحت بر حسب a و b به طریق زیر به دست می‌آید:



$$\text{ارتفاع} = h = \sqrt{a^2 - (\frac{b}{2})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$S = \frac{1}{2}(b \times h) = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$b = 2, a = 8 \Rightarrow S = \frac{2}{2} \sqrt{64 - \frac{4}{4}} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

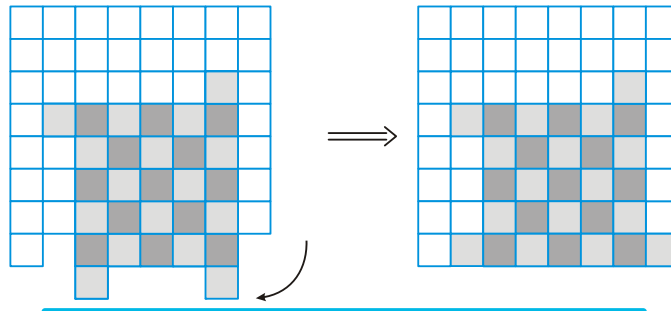
$$b = 4, a = 7 \Rightarrow S = \frac{4}{2} \sqrt{49 - \frac{16}{4}} = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}$$

$$b = 6, a = 6 \Rightarrow \text{ مثلث متساوی‌الاضلاع } : S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(6 \times 6) = 9\sqrt{3}$$

$$b = 8, a = 5 \Rightarrow S = \frac{8}{2} \sqrt{25 - \frac{64}{4}} = 4\sqrt{25 - 16} = 4 \times 3 = 12$$

پس کمترین مساحت برابر با $3\sqrt{7}$ به دست می‌آید.

۷۳- گزینه ۱» اولاً قسمتی که بریده می‌شود باید شامل دو مربع کوچک که از شکل اصلی بیرون هستند باشد. ثانیاً چون در سطر زیرین صفحه‌ی شطرنجی دو مربع کم می‌باشد، لذا باید حداقل ۷ مربع کنار هم و به هم وصل باشند تا بتوانیم سطر زیرین را پر کنیم. پس از طرفی باید حداقل یک ردیف هفت‌تایی از مربع‌ها انتخاب کنیم، از طرف دیگر باید انتخاب ما شامل دو مربع بیرون‌زده از شکل باشد. دقت کنیم که شکل انتخابی ما باید حداقل ۹۰ درجه دوران کند تا بتواند قسمت خالی شکل را پر کند و بیرون‌زدگی از شکل را به داخل هدایت کند. انتخابی شبیه شکل زیر می‌تواند با چرخش ۹۰ درجه ساعتگرد، داخل شکل قرار گیرد و آن را به صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ تبدیل کند.



۷۴- گزینه ۱» فرض کنیم خندق ۵ متری را در مدت t و خندق ۳ متری را در مدت t' انجام دهد. همچنین مدت زمان t'' را نیز در راه باشد که از خندق اول به خندق دوم برسد. ماشین خاکبرداری را با M نمایش می‌دهیم.

اگر ماشین بتواند در مدت زمان t خندق ۵ متری و در مدت زمان t' خندق ۳ متری را حفر کند، یعنی ماشین می‌تواند در هر ساعت $\frac{5}{t}$ یا $\frac{3}{t'}$ متر کار را انجام دهد.

$$M = \frac{5}{t} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{M} \\ M = \frac{3}{t'} \end{cases}$$

از طرفی یک ساعت و ۱۲ دقیقه را اگر برحسب ساعت بنویسیم، معادل $1/2$ ساعت خواهد شد که می‌توانیم رابطه زیر را بین t ، t' و t'' برقرار کنیم:

$$\begin{aligned} M \times t &= 5 \\ M \times t' &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \frac{5}{M} = t'' + \frac{3}{M} - 1/2$$

اگر به جای M ، $\frac{M}{4}$ داشته باشیم (قدرت آن $\frac{1}{4}$ باشد)، آنگاه:

$$\frac{M}{4} \times ? = 5 \Rightarrow ? = \frac{5 \times 4}{M} = t'' \Rightarrow \frac{5}{M} = \frac{20}{M} + \frac{3}{M} - 1/2 \Rightarrow M = 15$$

↑
زمان لازم

بر این اساس M (فاعل) می‌تواند در هر ساعت ۱۵ واحد از کار را انجام دهد.

۷۵- گزینه ۴» شناگر دوم ۲۱ متر را با سرعت $1/5$ متر در ثانیه طی می‌کند و به اولی می‌رسد. یعنی شناگر دوم (که سریع‌تر از اولی می‌رود) ۱۴ ثانیه طول می‌کشد به اولی برسد. یعنی شناگر اول ($14 + t_0$) ثانیه را در آب بوده و ۲۱ متر را طی کرده است. شناگر دوم با سرعت $1/5 \frac{m}{s}$ مسافت ۵۰ متر را می‌رود که به انتهای استخر برسد:

$$50 = 1/5 \times ? \Rightarrow ? = \frac{100}{3} \text{ ثانیه} \leftarrow \text{مدت زمانی که طول می‌کشد دومی به انتها برسد}$$

از طرفی $\frac{2}{3}$ ثانیه پس از آن نیز شنا می‌کند، یعنی جمعاً $(\frac{100}{3} + \frac{2}{3})$ ثانیه با سرعت $1/5 \frac{m}{s}$ شنا کرده است. متر ۵۱ = $1/5 \times (\frac{100}{3} + \frac{2}{3})$ = جابه‌جایی یعنی شناگر دوم ۵۰ متر رفته و ۱ متر برگشته و دوباره به اولی رسیده است. یعنی اولی جمعاً ۴۹ متر حرکت کرده است و کلاً $(\frac{102}{3} + t_0)$ در راه بوده است.

$$\begin{cases} 49 = (\frac{102}{3} + t_0) \times V \\ 21 = (14 + t_0) \times V \end{cases} \Rightarrow t_0 = 1$$

پس اختلاف زمانی آنها ۱ ثانیه است.

۷۶- گزینه «۳» اگر n میوه داشته باشیم و آن‌ها را در بشقاب‌های ۷ تایی و ۴ تایی و ۳ تایی قرار دهیم به ترتیب ۰ و ۲ و ۱ میوه اضافه می‌آید. می‌توانیم سه معادله‌ی زیر را بر این اساس تنظیم کنیم:

$$n = 7k$$

$$n = 4k' + 2$$

$$n = 3k'' + 1$$

در واقع n باید مضربی از ۷ باشد که باقی‌مانده‌ی آن بر ۴ و ۳ به ترتیب ۲ و ۱ باشد. کوچک‌ترین مضرب ۷ که از این قاعده پیروی می‌کند عدد $7 \times 7 = 49$ می‌باشد. سایر مقادیر n با جمع کردن کم‌کم مقسوم‌علیه‌ها یعنی (۷ و ۴ و ۳) با عدد ۷۰ به دست می‌آید. کم‌کم این سه عدد برابر است با: $3 \times 4 \times 7 = 84$ پس n می‌تواند مطابق جدول زیر باشد و در هر حالت باقی‌مانده‌ی آن را بر ۱۲۰ محاسبه می‌کنیم:

N	۷۰	۱۵۴	۲۳۸	۳۲۲	۴۰۶	۴۹۰	۵۷۴	۶۵۸	۷۴۲	۸۲۶	۹۱۰	۹۹۴
باقی‌مانده بر ۱۲۰	۷۰	۳۴	۱۱۸	۸۲	۴۶	۱۰	۹۴	۵۸	۲۲	۱۰۶	۷۰	۳۴

همان‌طور که از جدول معلوم است باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۱۲۰ می‌تواند ده عدد مختلف باشد. (مطابق جدول از ۷۰ تا ۱۰۶) و از آن به بعد دوباره تکرار همین ده عدد خواهد شد.

توضیح تکمیلی: در قسمت اضافه کردن سه عدد ۳ و ۴ و ۷ به عدد ۷۰ در حالت کلی توجه داشته باشیم که:

فرض کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی را می‌خواهیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر q_1 برابر با r_1 و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر q_2 برابر با r_2 باشد. اولین عدد طبیعی با این خاصیت را n_1 می‌نامیم:

$$n_1 = k_1 q_1 + r_1$$

$$n_1 = k_2 q_2 + r_2$$

حالا می‌خواهیم عدد طبیعی بعدی را که این ویژگی را دارد پیدا کنیم. فرض کنیم $n > n_1$ باشد و داشته باشیم:

$$n = k'_1 q_1 + r_1$$

$$n = k'_2 q_2 + r_2$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$n - n_1 = (k'_1 - k_1) q_1$$

$$n - n_1 = (k'_2 - k_2) q_2$$

یعنی $n - n_1$ باید مضرب مشترک q_1 و q_2 باشد. اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک q_1 و q_2 را با m نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$n = n_1 + m, n_1 + 2m, n_1 + 3m, \dots$$

به همین ترتیب اگر ۳ مقسوم‌علیه به نام‌های q_1, q_2, q_3 داشته باشیم باید m را برابر با کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها بگیریم.

۷۷- گزینه «۱» او از هر مسیری که بگذرد تا به B برسد، به ناچار از ۴ مربع سیاه خواهد گذشت؛ این یعنی $20 = 4 \times 5$.

پس برای اینکه مجموع اعداد ۵۱ شود، باید از مربعات سفیدی بگذرد که مجموع آنها $51 - 20 = 31$ شود. او در نهایت از ۳ مربع سفید خواهد گذشت که یک مربع آن از بین سه مربع ۱۵ و ۱۴ و ۱۳، یعنی سه مربع نزدیک‌تر به B انتخاب شود. یک مربع باید از بین ۱۰ و ۱۱ (روی قطر سفید مربع) انتخاب کند و یک مربع از بین ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ که نزدیک‌ترین مربعات به A است. اگر از هر مجموعه مربع کمترین را هم انتخاب کند، یعنی از ۱۰، ۱۰، ۱۳ بگذرد که می‌شود مسیری که از A مستقیم تا پایین‌ترین مربع از ستون اول بیاید و سپس باقی مسیر را تا نقطه B در جهت راست حرکت کند، باز مجموع ۳۳ می‌شود که بیشتر از ۳۱ است؛ پس هیچ مسیری وجود ندارد که مجموع در نهایت ۵۱ شود.

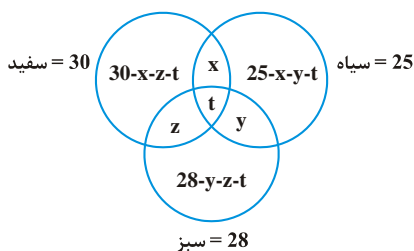
حل سریع‌تر: باید مجموع سه مربع سفید ۳۱ شود. با نگاه به اعداد متوجه می‌شویم که کوچک‌ترین عدد ۱۰ است $3 \times 10 = 30$ ، تنها راه برای رسیدن به عدد ۳۱ این است که از دو مربع ۱۰ و یک مربع ۱۱ بگذرد. در لایه آخر حتماً باید از یکی از مربعات ۱۳، ۱۴ یا ۱۵ بگذرد، پس هیچ‌گاه برایش ممکن نخواهد بود که به ۳۱ و در نهایت به مجموع ۵۱ برسد.

۷۸- گزینه «۴» چون امکانات برحسب درصد مطرح شده‌اند می‌توانیم فرض کنیم که ۱۰۰ خودرو در

نمایشگاه باشد، در این صورت ۷۰ و ۳۰ و ۴۰ خودرو به ترتیب کیسه هوا، ترمز ABS و سنسور عقب را دارا هستند. با نمودار ون این سه مجموعه را نمایش می‌دهیم. چون قرار است اشتراک هر سه مجموعه حداکثر باشد پس باید در ناحیه‌هایی که دو مجموعه مشترک هستند، کمترین تعداد اتومبیل باشد. فرض کنیم x خودرو شامل هر سه امکان باشند.

$$\Rightarrow (30 - x) + (70 - x) + (40 - x) + x = 100 \Rightarrow 140 - 2x = 100 \Rightarrow x = 20$$

پس حداکثر ۲۰ خودرو می‌تواند هر سه امکان را داشته باشد.





۷۹- گزینه «۲» ظرفیت خودروها ۵ و ۹ می‌باشد. فرض کنیم x خودرو ۵ نفره و y خودرو ۹ نفره پُر شوند. در مجموع ۱۸۶ نفر را می‌خواهیم توسط خودروها جابه‌جا کنیم:

$$5x + 9y = 186$$

با یک معادله سیاله روبه‌رو هستیم. ضریب کوچک‌تر را در یک طرف نگه داشته و بقیه را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. سپس دو طرف را بر ضریب

$$5x = 186 - 9y \Rightarrow x = \frac{186}{5} - \frac{9y}{5} \Rightarrow x = 37 - y + \frac{1-4y}{5}$$

کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

از آنجا که x و y صحیح هستند، پس $\frac{1-4y}{5}$ نیز باید صحیح باشد. می‌توانیم مطابق جدول زیر x و y را مقداردهی کنیم:

x	۳۰	۲۱	۱۲	۳
y	۴	۹	۱۴	۱۹

همان‌طور که مشخص شده در چهار حالت مختلف می‌توان از خودروهای نوع اول و دوم برای جابه‌جایی ۱۸۶ نفر استفاده کرد.

۸۰- گزینه «۲» قیمت خرید سرب و روی و قلع را به ترتیب با x و y و z نمایش می‌دهیم. اگر آلیاژ اول به مبلغ ۱۲A به فروش رفته باشد، آلیاژ دوم به مبلغ ۳۶A فروخته شده است.

$$\begin{cases} (3x + 4y + 5z) \times 1/2 = 12A \\ (3x + y + 11z) \times 1/8 = 36A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 10A & (1) \\ 3x + y + 11z = 20A & (2) \end{cases} \xrightarrow{(2)-(1)} 6z - 3y = 10A \Rightarrow A = \frac{6z - 3y}{10}$$

اکنون می‌توانیم به جای A در معادلات بالا قرار دهیم و ارتباطی بین x و y و z پیدا کنیم.

$$3x + 4y + 5z = 10A \xrightarrow{A = \frac{6z - 3y}{10}} 3x + 4y + 5z = 6z - 3y \Rightarrow z = 3x + 7y$$

در آلیاژ سوم سرب و روی و قلع به نسبت وزنی ۳ و ۷ و ۹ کیلوگرم با هم ترکیب می‌شوند. با احتساب سود ۳۰٪ و توجه به این که قیمت هر کیلوگرم قلع Z تومان می‌باشد داریم:

$$(3x + 7y + 9z) \times 1/3 = ? \times z$$

$$(z + 9z) \times 1/3 = ? \times z \Rightarrow 13z = ? \times z \Rightarrow ? = 13$$

هدف محاسبه‌ی $?$ در رابطه بالا می‌باشد. از آنجا که $z = 3x + 7y$ داریم:

پس قیمت فروش ۱۹ کیلوگرم از آلیاژ سوم برابر با قیمت خرید ۱۳ کیلوگرم قلع است.

آزمون (۹)

۸۱- گزینه «۳» عدد سمت راست، بزرگ‌ترین عدد n رقمی اول است که n همان عدد سمت چپ تساوی‌ها است. بنابراین پاسخ ما باید یک عدد ۵ رقمی باشد و ضمناً بزرگ‌ترین عدد اول هم باشد که این عدد ۹۹۹۹۱ است. این سؤال هم چندان منطقی به نظر نمی‌رسد، ولی به هر حال در آزمون‌های هوش بین‌المللی مطرح شده بود و گفتیم بهتر است با این نوع سؤالات هم آشنا شوید!

۸۲- گزینه «۳» فرض کنیم که علی (A) سریع‌تر از بهنام (B) و بهنام سریع‌تر از سجاد (C) باشد. یعنی برای انجام کار داریم: $A < B < C$
 زمان انجام کار برای علی A روز است. یعنی علی به تنهایی در هر روز می‌تواند $\frac{1}{A}$ کار را انجام دهد.

اگر بهنام و سجاد با هم کار کنند (کندترها): $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{N}$. چون N روز طول می‌کشد کار را انجام دهند، در یک روز $\frac{1}{N}$ کار را انجام می‌دهند.

اگر علی و بهنام با هم کار کنند (سریع‌ترها): $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{M}$

مهم‌ترین بخش حل این سؤال مربوط می‌شود به تشخیص اینکه کدام یک از افراد است که می‌تواند زمان انجام کار توسط وی سه برابر زمان انجام کار توسط هر سه نفر با هم باشد. فرض کنیم هر سه نفر با سرعت مشابهی کار را انجام دهند. آنگاه این شرایط برای هر کدام صادق است. حال اگر دو نفر شبیه به هم باشند، یک نفر سریع‌تر باشد، یعنی در زمانی کمتر کار را انجام دهد، دیگر سه برابر بودن زمان وی به نسبت زمان هر سه برقرار نیست و در واقع زمان نفر اول، کمتر از سه برابر زمان هر سه نفر خواهد بود. برای نفر کندتر نیز استدلال مشابهی داریم و در این حالت قطعاً زمان فرد کندتر بیشتر از سه برابر زمان کار هر سه نفر با هم است. پس تنها حالتی که زمان‌ها مختلف باشند و زمان کار یک نفر سه برابر زمان کار هر سه باشد این است که نفر وسطی باشد. اگر زمان انجام هر سه با هم را X بنامیم، داریم:

$$B = 3X$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{X} \Rightarrow \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) - \frac{1}{B} = \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{B} = \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{3X} = \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{4}{3X}$$

$$\Rightarrow \frac{M+N}{MN} = \frac{4}{3X} \Rightarrow X = \frac{4MN}{3(M+N)}$$

۸۳- گزینه «۱» فرض کنیم x عدد صندلی ۴ پایه و y عدد صندلی ۳ پایه داشته باشیم. میانگین آنها $\frac{x+y}{2}$ خواهد شد. پس از اضافه و کم کردن تعداد آنها برابر است با:

چهار پایه	سه پایه
x	y
↓	↓
$x + 2 \times \frac{x+y}{2}$	$y - \frac{x+y}{2}$

$$4x + 3y = \text{تعداد کل پایه‌ها قبل از اضافه و کم کردن}$$

$$6/5x + 5/5y = \text{تعداد کل پایه‌ها بعد از اضافه و کم کردن}$$

$$\Rightarrow 6/5x + 5/5y = 1/7(4x + 3y) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

تعداد کل صندلی‌های اولیه برابر است با:

$$x + y = x + \frac{3}{4}x = \frac{7}{4}x$$

پس اولاً باید تعداد کل صندلی‌ها عدد صحیح مضرب $\frac{7}{4}$ باشد، ثانیاً میانگین آن یعنی $\frac{7}{8}x$ عدد صحیح باشد. از بین گزینه‌ها فقط ۲۳۸ می‌تواند هم زوج

باشد و هم حاصل ضرب آن در $\frac{7}{4}$ عدد صحیح باشد.

۸۴- گزینه «۱» در حالت کلی در یک مربع مشبک $n \times n$ تعداد کل مربع‌ها برابر است با $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. اگر شکل مورد نظر کامل بود، تعداد کل

$$1^2 + 2^2 + \dots + 6^2 = 91$$

مربع‌ها برابر می‌شد با:

ولی ۶ مربع کوچک از شکل جدا شده است. باید تمام مربع‌های کوچک و مربع‌هایی که با آن‌ها درگیر بودند را حذف کنیم. (از طرفی خود مربع

بزرگ 6×6 نیز حذف می‌شود.) به عنوان مثال در مورد مربع گوشه‌ی بالا سمت راست:

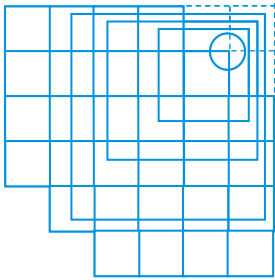
چهار مربع با این مربع می‌تواند ساخته شود که باید حذف شود.

۶ مربع کوچک، ۱ مربع اصلی، گوشه‌ای‌ترین مربع‌ها هر کدام ۴ تا (4×2) و هر کدام از

مربع‌های کوچک کنار آن نیز ۳ مربع از کل کم می‌کنند. (4×3) همچنین دو مربع

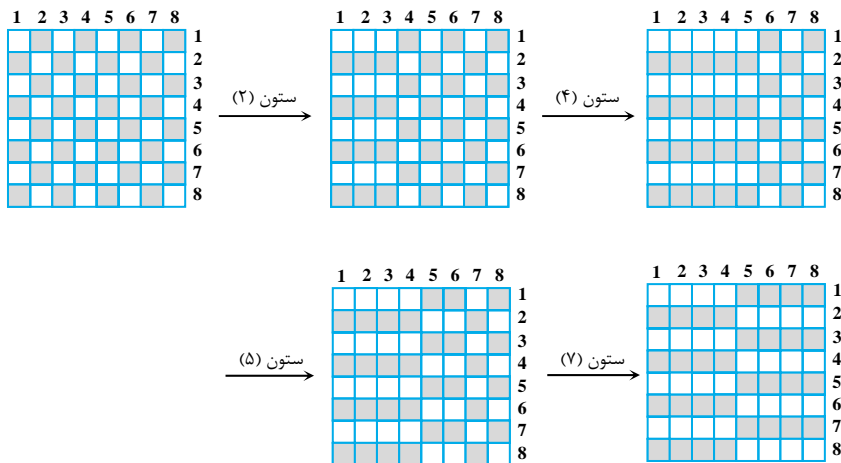
به صورت مشترک حذف می‌شود.

$$\text{جواب} = 91 - (6 + 1 + 8 + 12 + 2) = 91 - 29 = 62$$



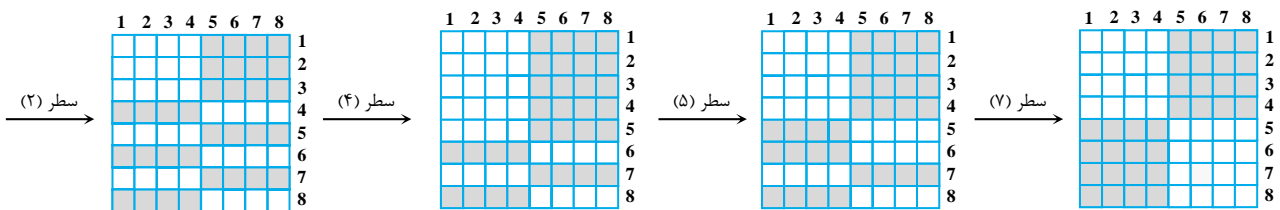
۸۵- گزینه «۲» به سطر اول توجه کنید. در این سطر باید لامپ‌های ۲ و ۴ روشن شوند و لامپ‌های ۵ و ۷ خاموش شوند. البته نمی‌خواهیم سایر

لامپ‌های سطر اول تغییر کنند بنابراین این ۴ ستون را تغییر وضعیت می‌دهیم:



اکنون به سراغ سطرها می‌رویم:

به ترتیب سطرهای دوم، چهارم، پنجم و هفتم را تغییر وضعیت می‌دهیم:



بنابراین با فشردن ۸ کلید می‌توانیم به تصویر موردنظر برسیم. در ضمن با توجه به آن که هر کلید فقط روی یک سطر یا یک ستون اثر می‌گذارد و این

شکل دارای ۸ سطر و ۸ ستون است. بنابراین اطمینان داریم که با کمتر از ۸ حرکت این تصویر ساخته نمی‌شود.

۸۶- گزینه «۱» فرض کنیم دوچرخه در مدت زمان t با سرعت V_D نصف مسیر را طی کند. پس از اتومبیل در مدت $(t - \frac{1}{4})$ با سرعت V_M نصف مسیر را طی می‌کند و به دوچرخه می‌رسد. اگر کل مسیر x باشد، داریم:

$$\frac{x}{2} = V_D \times t$$

$$\frac{x}{2} = V_M \times (t - \frac{1}{4})$$

اتومبیل در مدت t' با سرعت V_M ، $\frac{x}{2}$ دیگر را طی می‌کند و به B می‌رسد. در این مدت (t' یعنی t') دوچرخه با سرعت V_D مسافت $(\frac{x}{2} - \frac{x}{2})$ را طی کرده است.

$$\frac{x}{2} = V_M \times t' \Rightarrow \frac{V_M}{V_D} = 3$$

$$\frac{x}{6} = V_D \times t'$$

با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\begin{cases} V_D \times t = V_M \times (t - \frac{1}{4}) \\ V_M = 3V_D \end{cases} \Rightarrow t = 3(t - \frac{1}{4}) \Rightarrow t = \frac{3}{8} \text{ ساعت}$$

البته t مدت زمان طی کردن نصف مسیر توسط دوچرخه است و برای طی کردن کل مسیر به $2t$ زمان لازم دارد.

$$2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ دقیقه}$$

۸۷- گزینه «۲» قرار است در مجموع، ۱۲ لیتر از مایع A در هر دو ظرف بریزیم. فرض کنیم در ظرف ۶ و ۱۵ لیتری به ترتیب x و $12 - x$ لیتر از مایع A بریزیم. بعد از آن ظرف کوچک را باید با B پر کنیم. یعنی $(6 - x)$ لیتر از مایع B داخل ظرف کوچک می‌ریزیم.

۱۲ - x (A)
۱۵

(16 - x) (B)	x (A)
۶	

اکنون می‌خواهیم از محتویات ظرف کوچک آنقدر به بزرگ بریزیم تا ظرف بزرگ پر شود؛ یعنی باید $(3 + x)$ لیتر از ظرف کوچک به بزرگ بریزیم. دقت کنیم که نسبت مایع A در ظرف کوچک $\frac{x}{6}$ است. یعنی هر حجمی از ظرف کوچک انتخاب کنیم، $\frac{x}{6}$ آن A است. پس در کل $(3 + x) \times \frac{x}{6}$ از مایع A به ظرف بزرگ منتقل شده است. در این لحظه دوباره x لیتر از مایع A به ظرف کوچک اضافه می‌کنیم.

$(3 + x) \times \frac{x}{6}$ (A)
۱۲ - x (A)
۱۵

(x) (A)	(3 - x) $\times \frac{x}{6}$ (A)
۶	

$$\text{نسبت مایع } A \text{ در ظرف بزرگ} = \frac{(3 + x) \times \frac{x}{6} + (12 - x)}{15}$$

$$\text{نسبت مایع } A \text{ در ظرف کوچک} = \frac{(12 - x) \times \frac{x}{6} + x}{3}$$

با توجه به این که دو نسبت با هم برابر هستند، از مساوی قرار دادن آن‌ها $x = 2$ به دست می‌آید.



۸۸- گزینه «۴» فرض کنیم حجم مخزن n لیتر باشد. اگر لوله دوم (B) در مدت t مخزن را پر کند، لوله اول (A) می‌تواند در مدت $(t-1)$ همین حجم کار را انجام دهد.

$$A \times (t-1) = n$$

$$B \times t = n$$

حال قدرت لوله دوم $(B + \frac{4}{3})$ و حجم مخزن نیز $n+2$ در نظر می‌گیریم. لوله اول در مدت $t-1$ می‌تواند n لیتر آب را عبور دهد. بنابراین مدت زمان لازم برای عبور ۲ لیتر آب از لوله اول برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \text{ساعت} & \text{لیتر} & \\ n & t-1 & \\ 2 & ? & \Rightarrow ? = \frac{2(t-1)}{n} \end{array}$$

همچنین در مدتی که لوله دوم می‌تواند کار را انجام دهد (t) لوله اول می‌تواند ۳ لیتر آب را عبور دهد.

$$\begin{array}{l} A \times (t-1) = n \\ A \times t = 3 \end{array} \Rightarrow \frac{t-1}{t} = \frac{n}{3} \Rightarrow n = \frac{3(t-1)}{t}$$

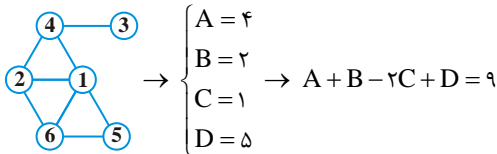
در مورد لوله دوم و حجم جدید مخزن داریم:

$$(B + \frac{4}{3}) \times \frac{2(t-1)}{n} = n+2, \quad B = \frac{n}{t}, \quad n = \frac{3(t-1)}{t} \Rightarrow (\frac{3(t-1)}{t} + \frac{4}{3}) \times \frac{2(t-1)}{\frac{3(t-1)}{t}} = \frac{3(t-1)}{t} + 2$$

از حل یک معادله یک مجهول ساده فوق به $t=3$ می‌رسیم:

$$\text{ظرفیت مخزن: } n = \frac{3 \times (3-1)}{3} = 2$$

۸۹- گزینه «۱» باید سعی کنیم با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ اعداد ۱۷، ۱۱، ۴، ۶، ۷ و ۸ را بسازیم. در مورد عدد ۱ چون $1=17$ یعنی مجموع اعداد وصل شده به (۱) باید ۱۷ باشد، تنها راه رسیدن به مجموع A با اعداد ۱ تا ۶ را باید به دست آوریم. مجموع دو عدد حداکثر ۱۱ و مجموع ۳ عدد ۱۵ است، پس حداقل به ۴ عدد نیاز داریم. نتیجه می‌شود که ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ باید جمع ۱۷ را به ما بدهند. عدد ۱ هم وسط است، پس تنها عددی که باقی‌مانده ۳ است که نباید به ۱ متصل باشد. با توجه به $3=4$ ، تک دایره‌ی متصل به ۳ باید ۴ باشد و از آن‌جا به بعد سایر دوایر نیز مشخص می‌شوند. می‌توان به صورت یکتای زیر شکل را کامل نمود و A و B و C و D را مشخص کرد.



۹۰- گزینه «۳» هر کارگر را با A نمایش می‌دهیم. کارگر اول $\frac{1}{3}$ ساعت کار می‌کند. سپس دو کارگر $\frac{1}{3}$ ساعت با هم کار می‌کنند و به همین ترتیب الی آخر. چون ۸ ساعت انجام کار طول می‌کشد و هر ساعت به ۳ تا بیست دقیقه تقسیم می‌شود، پس داریم:

$$A \times \frac{1}{3} + 2A \times \frac{1}{3} + 3A \times \frac{1}{3} + \dots + 24A \times \frac{1}{3} = w \Rightarrow \frac{A}{3} (1+2+3+\dots+24) = w \Rightarrow A = \frac{6}{24 \times 25} w$$

$$A \times \frac{3}{4} + 2A \times \frac{3}{4} + \dots + 8A \times \frac{3}{4} = xw$$

اگر قرار باشد هر ۴۵ دقیقه یک کارگر اضافه شود، در مدت ۶ ساعت داریم:

$$A \times \frac{3}{4} (1+2+\dots+8) = xw \Rightarrow \frac{6}{24 \times 25} \times \frac{3}{4} \times \frac{8 \times 9}{2} = x \Rightarrow x = \frac{27}{100}$$

پس از ۶ ساعت $\frac{27}{100}$ کار انجام می‌شود و ۷۳ درصد از آن باقی می‌ماند.

آزمون (۱۰)

۹۱- گزینه «۳» اگر سرعت ورود آب از شیر A را با V_A نشان دهیم که نشان دهنده مقدار آبی است که در یک ساعت از آن می‌گذرد و سرعت ورود آب از شیر B را با V_B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$19(V_A + V_B) = 475 \Rightarrow V_A + V_B = \frac{475}{19} = 25$$

از طرفی در حالتی که شیر A، ۵ ساعت بیشتر از شیر B باز باشد، داریم:

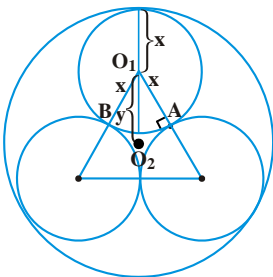
$$(t+5)V_A + tV_B = 475 \Rightarrow t(V_A + V_B) + 5V_A = 475 \Rightarrow 25t + 5V_A = 475 \Rightarrow 5t + V_A = 95 \quad (*)$$

$$\Rightarrow t = \frac{95 - V_A}{5}$$

$$\frac{95 - 25}{5} < t < \frac{95 - 0}{5} \Rightarrow 14 < t < 19$$

با توجه به آن که $V_A + V_B = 25$ است، پس $0 < V_A < 25$ است. بنابراین داریم:

بنابراین در بین گزینه‌ها $T = 16$ قابل قبول است. البته از روی معادله (*) به روش حل معادله سیاله با روش طولانی‌تر هم می‌توان جواب را تعیین کرد.



۹۲- گزینه «۲» مطابق شکل اگر مرکز یکی از دایره‌های کوچک‌تر را O_1 و مرکز دایره بزرگ‌تر را O_2 نامگذاری کنیم، طول شعاع دایره کوچک‌تر را x بنامیم و فاصله مرکز دایره کوچک‌تر با مرکز دایره بزرگ‌تر (O_1O_2) را y در نظر بگیریم، طول شعاع دایره بزرگ‌تر برابر با $x+y$ است.

مثلث O_1AO_2 مثلثی قائم‌الزاویه با زوایای 30° ، 60° و 90° درجه است. با توجه به اینکه زاویه O_1 در مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است و با توجه به تساوی دو مثلث O_1AO_2 و O_1BO_2 زاویه O_1BO_2 30° درجه است.

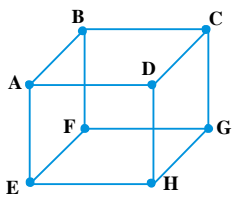
$$\cos(O_1\hat{O}_2A) = \frac{x}{y} = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ‌تر} = x + y = x + \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = \frac{x(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}}$$

$$\text{نسبت شعاع دایره کوچک‌تر به شعاع دایره بزرگ‌تر} = \frac{\text{شعاع دایره کوچک‌تر}}{\text{شعاع دایره بزرگ‌تر}} = \frac{x}{\frac{x(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 3} = 2\sqrt{3} - 3$$

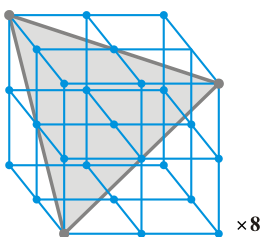
۹۳- گزینه «۳» در سه حالت مطابق شکل‌های زیر می‌توانیم مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل دهیم.

یادآوری: در یک مکعب اگر بخواهیم با قطرهای وجوه مثلث بسازیم ۸ حالت متصور خواهد بود. به عنوان مثال اگر قطر AC ، AH و CH را به هم وصل کنیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌گردد. می‌توانیم ۷ حالت دیگر نیز با وصل کردن ۳ قطر از قطرهای وجوه مکعب، مثلث متساوی‌الاضلاع بسازیم:

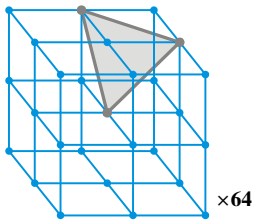


- ACH, ACF
- BDE, BDG
- EGD, EGB
- FHC, AFH

بنابراین داریم:

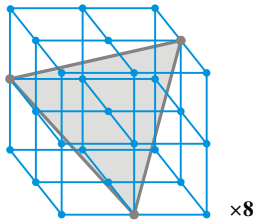


در هشت جهت مختلف \rightarrow حالت = ۸



هر مکعب کوچک ۸ حالت
در مجموع ۸ مکعب کوچک

×۶۴



در هشت جهت مختلف

×۸

پس جواب گزینه ۳ خواهد بود.

۹۴- گزینه «۳» وقتی عنوان می‌شود که «حداقل چند توپ باید بیرون بیاوریم» یعنی باید بدترین حالت ممکن را فرض کنیم. در این مسأله بدترین حالت ممکن این است که از ۳ رنگ، هر کدام ۹۰ توپ خارج شود. واضح است که تا الآن، به مطلوب سؤال نرسیده‌ایم. از این به بعد، بدترین حالت، حالتی است که از ۵ رنگ باقی‌مانده، هر کدام ۸ توپ خارج شود. توپ بعدی که خارج می‌شود، یقیناً از ۴ رنگ مختلف، هر کدام ۹ توپ خارج شده است.

$$\text{تعداد کل} = 3 \times 90 + 5 \times 8 + 1 = 311$$

توضیح بیشتر: در حالت کلی، هرگاه بخواهیم از n شیء حداقل تعداد مشخصی داشته باشیم، سعی می‌کنیم $(n-1)$ شیء را در بدترین حالت ممکن در نظر بگیریم. در این سؤال هم چون می‌خواهیم از ۴ رنگ مختلف حداقل ۹ عدد از هر کدام داشته باشیم، سعی می‌کنیم $(4-1)$ حالت را بدترین حالت طوری فرض کنیم که خواسته‌ی سؤال برآورده نشود. وقتی بدترین حالت را در نظر بگیریم اگر مثلاً x حالت باشد، قطعاً $x+1$ آمین حالت، مطلوب سؤال خواهد بود. یعنی به جای این که پای رنگ چهارم را وسط بکشیم، فرض کنیم از سه رنگ، از هر کدام ۹۰ توپ خارج شود. این بدترین حالت ممکن است که برای ۳ توپ می‌تواند رخ دهد.

۹۵- گزینه «۳» فرض کنیم در هر ظرف به ترتیب x, y, z, t, q توپ سفید باشد. بر این اساس تعداد توپ‌های مشکی هر ظرف نیز مشخص می‌شود.

x	سفید	y	سفید	z	سفید	t	سفید	q	سفید
$110-x$	مشکی	$105-y$	مشکی	$100-z$	مشکی	$115-t$	مشکی	$113-q$	مشکی

می‌خواهیم یک ظرف را کنار بگذاریم، به طوری که پس از این عمل، تعداد توپ‌های سفید باقی‌مانده ۳ برابر تعداد توپ‌های مشکی باشد.

فرض کنیم ظرف حاوی ۱۱۰ توپ را کنار بگذاریم:

$$\text{توپ‌های سفید} = y + z + t + q$$

$$\text{توپ‌های مشکی} = (105 - y) + (100 - z) + (115 - t) + (113 - q) = 433 - (y + z + t + q)$$

$$\text{توپ‌های سفید} = 3 \times \text{توپ‌های مشکی} \rightarrow y + z + t + q = 3 \times 433 - 3 \times (y + z + t + q) \rightarrow 4 \times (y + z + t + q) = 3 \times 433$$

$$\rightarrow y + z + t + q = 324/75$$

چون باید حاصل جمع $y + z + t + q$ صحیح باشد، پس قبول نیست و ظرف حاوی ۱۱۰ توپ نمی‌تواند حذف شده باشد.

$$\text{توپ‌های سفید} = x + y + z + t$$

اگر ظرف حاوی ۱۱۳ توپ را کنار بگذاریم:

$$\text{توپ‌های مشکی} = 430 - (x + y + z + t)$$

$$\rightarrow x + y + z + t = 3 \times 430 - 3 \times (x + y + z + t)$$

$$\rightarrow 4(x + y + z + t) = 3 \times 430$$

در واقع باید سمت راست تساوی مضرب ۴ باشد که نیست. پس این ظرف هم نمی‌تواند حذف شده باشد.

اگر ظرف حاوی ۱۰۰ و ۱۰۵ توپ نیز کنار روند، با استدلال مشابه امکان‌پذیر نخواهد بود.

$$\text{توپ‌های سفید} = x + y + z + q$$

اگر ظرف حاوی ۱۱۵ توپ را کنار بگذاریم، داریم:

$$\text{توپ‌های مشکی} = 428 - (x + y + z + q)$$

$$\rightarrow (x + y + z + q) = 3 \times 428 - 3 \times (x + y + z + q)$$

$$\rightarrow 4(x + y + z + q) = 3 \times 428$$

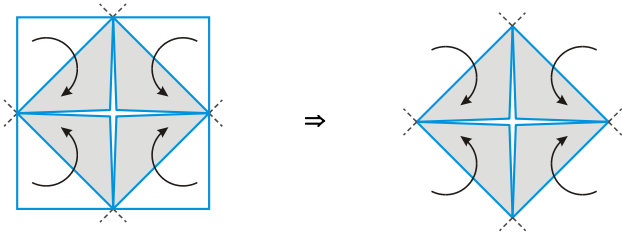
با توجه به اینکه ۴۲۸ مضرب ۴ می‌باشد، پس امکان‌پذیر است.

۹۶- گزینه «۳» اگر کاغذ را یکبار از وسط به موازات محور افقی و در ادامه نیز یکبار به موازات محور عمودی تا بزنیم به مربعی می‌رسیم که مساحت آن $\frac{1}{4}$ مساحت مربع اصلی است و هر دو طرف آن رنگی می‌باشد.

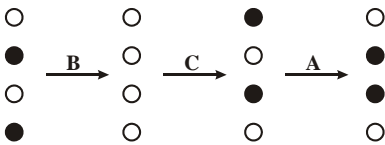


ولی این مربع بزرگ‌ترین مربعی که شرایط سؤال را تأمین کند، نمی‌باشد.

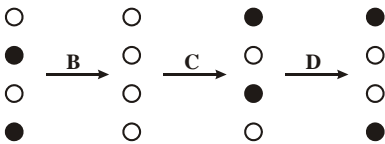
می‌توانیم مطابق الگوی زیر شکل را با ۴ بار تازدن به مربعی تبدیل کنیم که هر دو طرف آن رنگی است.



۹۷- گزینه «۲» اگر کلید D عمل نکند یعنی فقط کلیدزنی BCA اعمال شده است:

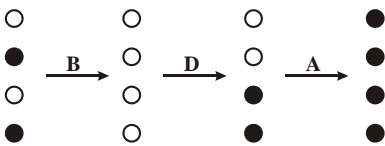


که وضعیت نهایی با آنچه که مطلوب سؤال است متفاوت می‌باشد، پس D عمل کرده است. به همین ترتیب اگر A عمل نکند انگار کلیدزنی BCD اعمال شده است:



در این حالت نیز وضعیت نهایی با آنچه که مطلوب سؤال است فرق دارد، پس A نیز سالم است.

اکنون فرض کنیم C عمل نکرده باشد، یعنی باید کلیدزنی BDA را اعمال کنیم:



در این حالت نیز به شکل مطلوب سؤال نرسیدیم، پس کلید C نیز سالم است. در نتیجه فقط کلید B عمل نکرده است.

راه حل تستی: حل این سؤال نیازی به دخالت دست ندارد! با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر ۴ کلید A، B، C و D با هر ترتیبی زده شوند (البته فقط ۱ بار)، هر لامپ باید ۲ بار تغییر وضعیت دهد، یعنی شکل نهایی باید به صورت شکل اول باشد. شکل دوم در لامپ‌های ۲ و ۴ با شکل اول تفاوت دارد، پس کلیدی که درست کار نکرده است کلیدی بوده که فقط بر دو لامپ ۲ و ۴ تأثیر داشته، یعنی کلید B، لذا جواب صحیح گزینه (۲) است.

۹۸- گزینه «۱» هر شبانه‌روز ۲۴ ساعت و هر ساعت ۶۰ دقیقه است. ابتدا حساب کنیم ۳ شبانه‌روز چند دقیقه است.

$$3 \times 24 \times 60 = 4320 = 3^3 \times 5^1 \times 2^5$$

در مدت ۴۳۲۰ دقیقه همه‌ی درب‌ها ۲۷ بار با هم باز و بسته می‌شوند. اگر فاصله‌ی ۴۳۲۰ دقیقه را بر ۲۷ تقسیم کنیم، معلوم می‌شود که هر چند دقیقه

$$\frac{4320}{27} = 160 = 2^5 \times 5^1$$

یکبار درب‌ها با هم عمل می‌کنند.

هر ۱۶۰ دقیقه یکبار، درب‌ها با هم عمل می‌کنند. تعداد درب‌ها می‌تواند حداکثر برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۶۰ باشد:

$$160 = 2^5 \times 5^1 = 2^a \times 5^b; a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; b = \{0, 1\}$$

در واقع 6×2 مقسوم‌علیه می‌توانیم برای ۱۶۰ در نظر بگیریم. پس تعداد درب‌ها حداکثر ۱۲ عدد می‌باشد.



۹۹- گزینه «۳» فرض این سؤال این است که آب هزینه‌ای برای شیرفروش ندارد. یعنی برای آب هزینه خاصی متحمل نمی‌شود و در واقع آن بخشی از مخلوط که آب است ولی به قیمت شیر فروخته می‌شود سود وی را به همراه دارد.

مقدار لیتر آب: W ، مقدار لیتر شیر: M ، قیمت هر واحد شیر: P

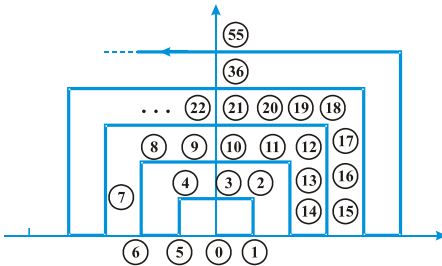
درصد سود شیرفروش متقلب: $100 \times \frac{(M+W)P - M \times P}{M \times P} = 100 \times \frac{W}{M}$ و این یعنی $100 \times \frac{W}{M} = 25$ و لذا $\frac{W}{M} = \frac{1}{4}$ یعنی به ازای هر ۱ لیتر آب چهار لیتر

شیر داریم. پس به ازای هر ۵ لیتر مخلوط یک لیتر آب داریم و این یعنی ۲۰٪ مخلوط را آب تشکیل می‌دهد.

اشتباه متداول در این سؤال این است که دانشجو به اینکه فرد ۲۵٪ سود می‌کند، سریع گزینه ۴ را انتخاب می‌کند.

۱۰۰- گزینه «۲» می‌توانیم با شروع از مبدأ مختصات بین مکان و زمان طی شده برای متحرک ارتباطی پیدا کنیم:

مطابق شکل موقعیت مکانی در هر لحظه برای متحرک به تصویر کشیده شده است.



به ارتباط بین محل تلاقی متحرک با محور عمودی و زمان آن توجه کنیم:

مکان	(۰ و ۱)	(۰ و ۲)	(۰ و ۳)	(۰ و ۴)	(۰ و ۵)	...
زمان	۳	۱۰	۲۱	۳۶	۵۵	...

در واقع می‌توان فهمید که پس از $t \times (2t+1)$ ثانیه، متحرک در مکان $(t \circ)$ قرار دارد. سعی می‌کنیم از دل 1396 عبارتی شبیه $t(2t+1)$ خارج کنیم و رفتار متحرک را پیش‌بینی کنیم:

$$1396 = \underbrace{26 \times (2 \times 26 + 1)} + 18$$

در این لحظه در مکان $(26 \circ)$ قرار داشته

با دقت در شکل اصلی متوجه می‌شویم که هر جا متحرک در نقطه $(زوج \circ)$ بوده، پس از آن به سمت راست حرکت کرده و هر جا که متحرک در نقطه $(فرد \circ)$ بوده، به سمت چپ حرکت کرده است. پس انتظار داریم وقتی متحرک در نقطه $(26 \circ)$ است، پس از آن به سمت راست حرکت کند. همچنین اگر به نمودار داده شده در صورت سؤال توجه کنیم، می‌بینیم که وقتی در نقطه $(2, \circ)$ هستیم، ۲ گام بعدی به سمت راست هستند. وقتی در نقطه $(4, \circ)$ هستیم، ۴ گام بعدی به سمت راست هستند. به همین ترتیب وقتی در نقطه $(26, \circ)$ هستیم، ۲۶ گام بعدی به سمت راست خواهند بود. پس باید ۱۸ ثانیه بعدی را به اندازه ۱۸ واحد از $(26 \circ)$ به سمت راست حرکت کند. یعنی موقعیت نهایی متحرک پس از 1396 ثانیه نقطه $(26 \circ)$ خواهد بود.