

سؤالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

■ راهنمایی: در این بخش، دو متن به طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

متن (۱)

تفسیر «بور»، چه در زمان خود و چه در عصر حاضر، مورد قبول و احترام دانشمندان است. اما اخیراً نظریه دنیاهای چندگانه «اورت»، توجه دانشمندان را به سمت خود جلب کرده است. هیو اورت جوان، با اکثر مواردی که بور مطرح کرده بود، مشکلی نداشت و آنها را قبول می‌کرد. او با بور در زمینه برهم‌نهی کوانتومی و تابع موج موافق بود، اما در یک مورد حیاتی، نظریه وی را قبول نداشت. بنابر نظر اورت، مشاهده اجزای کوانتومی باعث تغییر حالت این اجزا نمی‌شود، اما این مشاهده می‌تواند شکافی در جهان ما ایجاد کند. جهان ما نسخه‌های مختلفی به اندازه حالت‌های موجود برای این ذرات کوانتومی دارد. برای مثال، فرض کنید شیء مورد بررسی، دو حالت ممکن موج و ذره را می‌تواند داشته باشد. پس بررسی نیز دو نتیجه احتمالی دارد، شیء مورد نظر یا یک ذره خواهد بود یا یک موج. هنگامی که یک دانشمند شیئی را مورد مشاهده قرار می‌دهد، شکافی در دو جهان مجزا ایجاد می‌شود. بنابراین دانشمندی در یک جهان، این شیء را موج می‌بیند و دانشمندی در جهانی دیگر، همان شیء را در حالت ذره. بنابراین، با این نظریه می‌توان حالت‌های مختلف ماده را نیز توجیه کرد.

نظریه دنیاهای چندگانه با اینکه عجیب به نظر می‌رسد، اما مفاهیمی ورای سطح کوانتوم دارد. اگر این نظریه درست باشد و عملی چند نتیجه ممکن و متفاوت داشته باشد، اگر آن عمل را انجام دهیم، درواقع دنیاهای جدا کرده و شکافی در آنها ایجاد می‌کنیم. حتی اگر آن عمل را انجام ندهیم نیز، این اتفاق می‌افتد، چرا که یکی از حالت‌های ممکن، اتفاق نیفتادن آن عمل است. یعنی اگر کاری را انجام دهیم که یکی از نتایج احتمالی باشد، نسخه دیگری از ما در جهانی موازی خواهد مرد! اینجا است که بسیاری این نظریه را ناراحت‌کننده و عذاب‌آور می‌دانند. همچنین این نظریه، خطی بودن زمان را زیر سؤال می‌برد. تاریخچه‌ای از جنگ ویتنام را در نظر بگیرید. در صورت صحیح بودن این نظریه، هر عملی از اول جنگ، چندین نتیجه خواهد داشت و هر نتیجه‌ای، چندین و چند نتیجه متفاوت دیگر. این پیچیدگی باعث ایجاد تاریخچه‌ای پیچیده و عجیب در تاریخ بشریت می‌شود.

اما یک فرد، اطلاعی از نسخه دیگر خود در جهان‌های موازی، حتی پس از مرگ نیز نخواهد داشت، پس چگونه می‌توان این نظریه را ثابت کرد؟ شواهدی برای وجود امکان درستی این نظریه در حالت تئوری، در حدود سال‌های ۱۹۹۰ میلادی توسط آزمایشی به دست آمدند. به این نوع آزمایش‌ها، آزمایش ذهن گفته می‌شود که به صورت تخیلی برای اثبات درستی و یا نادرستی یک نظریه انجام می‌گیرند. آزمایش مورد استفاده برای بررسی صحت این نظریه، خودکشی کوانتومی نام داشت. این آزمایش، بار دیگر توجهات را به سمت نظریه اورت جلب کرد، نظریه‌ای که برای سالیان دراز غلط انگاشته می‌شد. چون نظریه جهان‌های چندگانه در حالت نظری ممکن است، فیزیکدانان و ریاضیدان‌ها سعی دارند به عمق و مفهوم این نظریه پی ببرند. اما مفهوم دنیاهای چندگانه، تنها نظریه‌ای نیست که سعی در توجیه جهان دارد و صد البته، تنها نظریه‌ای نیست که وجود جهان‌های موازی را مطرح می‌کند.

کله ۱- طبق پاراگراف ۱، کدام مورد، نکته افتراق بور و اورت است؟

(۱) اینکه یک شیء ذره است یا موج

(۲) تغییرپذیری ذره کوانتوم با مشاهده

(۳) نحوه تفسیر برهم‌نهی کوانتومی

(۴) نگرش درباره تابع موج

کله ۲- کدام مورد به‌درستی، نقش پاراگراف ۲ در ارتباط با پاراگراف ۱ را نشان می‌دهد؟

(۱) برخی نتایج پذیرش نظریه‌ای که در پاراگراف ۱ آمده است را مطرح می‌کند.

(۲) با ذکر مثال‌هایی ملموس، مفاهیم انتزاعی پاراگراف ۱ را توضیح بیشتر می‌دهد.

(۳) مبانی عجیب و ناراحت‌کننده تئوری مورد بحث در پاراگراف ۱ را توصیف می‌کند.

(۴) با ذکر نتایج حاصله از تئوری مطرح‌شده در پاراگراف ۱، اختلاف بور و اورت را که در آن پاراگراف آمده است، بیشتر آشکار می‌کند.

کله ۳- کدام مورد را می‌توان به‌درستی، از متن، راجع به نظریه اورت استنباط کرد؟

(۱) برای هر عمل، تنها یک حالت ممکن و متقابل دیگر را می‌توان متصور شد.

(۲) اگر بور نبود، به شکل دیگری مطرح می‌شد.

(۳) برای مدتی مدید، نادرست فرض می‌شد.

(۴) مدل مناسبی برای تفسیر تاریخی است.

کله ۴- با توجه به متن، کدام مورد به‌درستی، نظر دانشمندان راجع به نظریه جهان‌های چندگانه را توصیف می‌کند؟

(۱) موافق در سطح نظری و نگران در سطح نتایج عملی

(۲) امکان‌پذیر از نظر تئوریک

(۳) مخالفت جانبدارانه

(۴) تردید عمیق

متن (۲)

چرا محدود کردن کالری نتایج مثبتی را نشان می‌دهد؟ ساختار بدن انسان طوری است که در هنگام قحطی، تولید سلول‌های جدید را متوقف می‌کند تا این عمل را در روزهایی که کالری مناسبی دریافت می‌کند، دوباره از سر بگیرد. پس بهتر است که تعداد ژن‌های مؤثر در پیشگیری و مرمت سلولی را بیشتر کرده و عمل تولید سلولی را کمی کند کنیم. ما ژن‌های مخصوصی در بدن خود داریم که کمبود مواد غذایی را احساس کرده و روند پیری را کند می‌کنند و منتظر شرایطی می‌مانند که قحطی از بین برود.

با اینکه همچنان بحث بر سر مؤثر بودن رژیم محدود کردن کالری وجود دارد، اما به‌نظر می‌رسد مکانیزم این رژیم، مطابق با عملکرد سلول‌های بدن است و بر روی کاغذ می‌تواند عمر انسان‌ها را افزایش دهد. به این دلیل نیز دانشمندان با تحقیق روی این رژیم، رویه پیری را مورد بررسی قرار می‌دهند و در تلاش برای یافتن دارویی برای افزایش عمر هستند. ممکن است نام برخی از این داروها را شنیده باشید. «رزوراترول» دارویی معروف است که در پوست انگور یافت می‌شود و دارویی است که تبلیغ زیادی بر روی آن انجام شده است. اما متأسفانه شواهد کافی برای مؤثر بودن این دارو در دست نیست. دارویی که کمتر شناخته شده اما بسیار مهم است، «راپامایسین» نام دارد. این دارو درواقع در خاکی که از جزیره ایستر جمع‌آوری شده بود، یافت شده است. راپامایسین مجوز دارویی دارد و برای افرادی که عمل پیوند عضو را گذرانده‌اند، به منظور پس زدن عضو جدید، تجویز می‌شود. بعد از سال‌ها دانشمندان متوجه تأثیر این دارو بر کند شدن فرایند پیری نیز شدند. با اینکه رزوراترول، دارویی است که بیشتر شناخته شده است، اما راپامایسین، دارویی است که مشاهدات آزمایشگاهی، مؤثر بودن آن را بیشتر تصدیق می‌کنند. راپامایسین در آزمایشگاه روی قارچ‌ها، موش‌ها و برخی پستانداران آزمایش شده و نتایج مثبتی به‌دست آمده است.

PART A: Grammar

Directions: Select the answer choice (1), (2), (3) or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

31- Thunder is caused by lightning, essentially a stream of electrons flowing between or within clouds or between a cloud and the ground.

- 1) which is 2) that is 3) to be 4) it is

32- In ancient Egypt and India, people produced large blocks of ice with the help of evaporative cooling (the principle draw heat from their surroundings).

- 1) water molecules that vaporizes 2) that vaporizing water molecules
3) to vaporize water molecules 4) water molecules are vaporized

33- By the end of the 1800s, naturally occurring reserves of nitrogen-based compounds had been so badly depleted by their use as fertilizers some feared a worldwide famine when supplies ran out.

- 1) that 2) then 3) which 4) when

34- Work is currently under way on planes that could potentially fly the speed of sound.

- 1) faster than 20 times of 2) more than 20 times as much as that of
3) at 20 times 4) 20 times faster than that of

35- In 1894, by the theories of physicist James Clerk Maxwell, Italian physicist Guglielmo Marconi began work on a technique to transmit electromagnetic signals through the air over long distances.

- 1) when was inspired 2) having inspired 3) to be inspired 4) inspired

36- Because concrete generates considerable heat as it sets, large volumes can become exceedingly hot,

- 1) so the material's structural strength damaged 2) that damages the material's structural strength
3) and the material's structural strength damages 4) damaging the material's structural strength

37- Back in the 1966 movie *Fantastic Voyage*, a band of intrepid travelers were scrunched down to the size of blood cells they could swim through the veins of a big-shot diplomat and destroy a life-threatening blood clot.

- 1) so that 2) since 3) as though 4) in which

38- The space telescope, after all, has broken all kinds of records, including probably

- 1) any single astronomical project produces the most newspaper headlines
2) the most newspaper headlines produced by any single astronomical project
3) producing the most newspaper headlines by any single astronomical project
4) the most newspaper headlines of any single astronomical project is ever produced

پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

پاسخ سؤالات متن (۱)

۱- گزینه «۲» در پاراگراف اول به وضوح آمده است که اورت با بور در زمینه‌ی نگرش درباره‌ی تابع موج و تفسیر برهم‌نهی کوانتومی هم‌نظر بود؛ ولی برخلاف بور معتقد بود که مشاهده‌ی اجزای کوانتومی باعث تغییر حالت این اجزا نمی‌شود و هر دو حالت موج و ذره بودن شیء همزمان وجود دارد.

۲- گزینه «۱» در پاراگراف دوم درباره‌ی جهان‌های چندگانه صحبت می‌شود که نتیجه‌ی پذیرش نظریه‌ی اورت می‌باشد. پس گزینه (۱) صحیح است.

۳- گزینه «۳» در پاراگراف سوم به صراحت آمده است که نظریه‌ی اورت برای سالیان دراز غلط انگاشته می‌شد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): طبق نظریه‌ی اورت و جهان‌های چندگانه تمام حالات ممکن برای یک مسئله متصور است.

بررسی گزینه (۲): نویسنده در مورد شباهت و تفاوت‌های نظریه‌های بور و اورت نوشته است اما رابطه‌ی علی بین این دو را مطرح نکرده است.

بررسی گزینه (۴): طبق جمله‌ی آخر پاراگراف دوم، این مدل تفسیر تاریخ را پیچیده‌تر می‌کند.

۴- گزینه «۲» در پاراگراف سوم نویسنده با صراحت از ممکن بودن این نظریه در حالت نظری صحبت می‌کند و این که دانشمندان در حال بررسی عمیق‌تر آن هستند.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): در متن چیزی نیامده است که مبنی بر موافق بودن دانشمندان با این نظریه باشد، بلکه صرفاً بیان شده است که در حال بررسی این نظریه هستند.

بررسی گزینه (۳): صحبتی از مخالفت جانبدارانه با این نظریه نشده است.

بررسی گزینه (۴): دانشمندان به دنبال پی بردن به عمق این نظریه هستند، نه اینکه در آن تردید عمیق داشته باشند.

پاسخ سؤالات متن (۲)

۵- گزینه «۴» با توجه به جمله‌ی آخر متن مشخص است که پاراگراف بعدی باید درباره‌ی روش‌های دیگر افزایش طول عمر باشد. پس گزینه (۴) صحیح است.

بررسی گزینه (۲): این گزینه به این دلیل غلط است که هنوز درباره‌ی روش‌های دیگر افزایش طول عمر مطلبی نیامده است که مقایسه امکان‌پذیر باشد.

۶- گزینه «۴» در پاراگراف سوم آمده است که راپامایسین از طریق رویه‌ی سیرتوئین روی افزایش طول عمر اثر می‌گذارد که رویه‌ای مجزا از رویه‌ی نشان انسولین است. پس این گزینه صحیح است.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): مطلبی درباره‌ی افزایش تبلیغات بر روی راپامایسین نیامده است.

بررسی گزینه (۲): نویسنده صحبتی از آزمایش‌های بیشتر روی راپامایسین نکرده است بلکه از موفقیت‌آمیزتر بودن آن‌ها گفته است.

بررسی گزینه (۳): این دارو به منظور پس‌زدن عضو جدید توسط بیماران پیوند عضو استفاده شده و بعدها دانشمندان متوجه تأثیرات آن روی افزایش طول عمر شدند. لزوماً فقط عمر افرادی که پیوند عضو انجام داده‌اند را افزایش نمی‌دهد.

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱- گزینه «۱» تندر در اثر رد و برق ایجاد می‌شود که اساساً جریانی از الکترون‌ها است که بین ابرها یا بین ابر و زمین در جریان هستند. توضیح گرامری: اگر جمله را ترجمه کنیم، می‌بینیم به یک گزاره وصفی برای جای خالی نیاز داریم. پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند چون ضمیر موصولی ندارند. ضمناً گفتیم بعد از کاما that کاربرد ندارد؛ پس گزینه ۲ هم نادرست است. حالا فقط گزینه (۱) می‌ماند که در اینجا lightening مرجع و از جای خالی به بعد هم گزاره وصفی است. البته چون گزاره وصفی ما بعد از کاما به کار رفته، از نوع غیرضروری است.

۳۲- گزینه «۲» در مصر و هند باستان، مردم با کمک سردسازی تبخیری (یعنی این اصل که مولکول‌های بخار آب، گرما را از محیط خود جذب می‌کنند) یخ تولید می‌کردند.

توضیح گرامری: برای پاسخگویی فقط به اطلاعات داخل پرانتز نیاز داریم. پس بیایید داخل پرانتز را تحلیل کنیم. The principle فاعل ما است؛ پس (۱) و (۴) حذف می‌شوند چون هر کلاز (جمله‌واره) یک فاعل نیاز دارد نه بیشتر. ضمناً در مبحث گزاره اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که بعد از یک‌سری اسم مثل principle, view, belief و بیاید. پس فقط (۲) صحیح است.

۳۳- گزینه «۱» تا پایان دهه ۱۸۰۰، منابع و مخازن طبیعی ترکیبات نیتروژنی به‌خاطر کاربردهای به‌عنوان کود شیمیایی چنان به پایان رسیدند که برخی می‌ترسیدند هنگام اتمام این مخازن، قحطی سرتاسر جهان را در برگیرد. توضیح گرامری: تست خیلی راحتی است. نویسنده از الگوی زیر استفاده کرده است:

so + صفت + that ⇒ ... So badly depleted ... that ...

۳۴- گزینه «۳» محققان در حال حاضر روی هواپیماهایی کار می‌کنند که می‌توانند ۲۰ برابر سرعت صوت پرواز کنند. توضیح گرامری: در گزینه‌های (۲) و (۴) اساساً معلوم نیست that به چه چیزی برمی‌گردد؛ پس هر دو نادرست هستند. گزینه (۱) هم به این دلیل نادرست است که قاعدتاً می‌گوییم 20 times faster than نه faster than 20 times.

۳۵- گزینه «۴» در سال ۱۸۹۴، فیزیکدان ایتالیایی به نام گولیلمو مارکونی که از نظریه‌های جیمز کلرک ماکسول الهام گرفته بود، شروع به پژوهش در مورد فنی برای انتقال سیگنال‌های الکترومغناطیسی از طریق هوا در طول فواصل زیاد کرد. توضیح گرامری: خب بدل مدنظر سؤال است. پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند. حالا بیایید صورت سؤال را بررسی کنیم. بعد از جای خالی by آمده که نشانه ساختار مجهول است، اما گزینه (۲) که فعل مجهول نیست؛ پس این گزینه هم نادرست است. برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۴) صحیح است باید اول اصل جمله را پیدا کنیم که این‌گونه بوده است:

In 1894, Italian physicist Guglielmo Marconi, **who was inspired by the theories**, began work

خب قسمتی را که بولد (تیره) کردیم، گزاره وصفی غیرضروری است چون بین دو کاما قرار گرفته است. حالا می‌توانیم گزاره وصفی را کوتاه کنیم:

In 1894, Italian physicist Guglielmo Marconi, **inspired by the theories**, began work

حالا قسمت بولدشده، بدل غیرضروری است. گفتیم بدل را می‌توانیم به قبل از مرجع انتقال دهیم. پس داریم:

In 1894, **inspired by the theories**, Italian physicist Guglielmo Marconi began work

۳۶- گزینه «۴» بتن زمانی که سخت می‌شود، گرمای زیادی ایجاد می‌کند و در نتیجه در حجم زیاد، باعث تولید گرمای زیادی می‌شود که این امر به نوبه خود می‌تواند بر توان و مقاومت سازه‌های مصالح آسیب بزند.

توضیح گرامری: اول از همه اینکه *that* بعد از *as much as* استفاده نمی‌شود. پس گزینه (۲) نادرست است. گزینه (۱) هم نادرست است چون بعد از *so* که یک حرف ربط همپایه‌ساز است، باید جمله بیاوریم، اما اینجا جمله نداریم. گزینه (۳) هم نادرست است چون فعل *damage* متعدی است، یعنی بعد از آن باید مفعول بیاید؛ در حالی که مفعول نداریم. پس فقط گزینه (۴) صحیح است. اما چرا؟

یادتان هست در مبحث گزاره وصفی گفتیم استثنائاً مرجع ضمیر موصولی *which* می‌تواند جمله هم باشد. اینجا همین مسئله مطرح است، یعنی اول داشتیم:

.....large volumes can become exceedingly hot, which damages the material's structural strength

در اینجا قسمتی که زیر آن را خط کشیده‌ایم، مرجع جمله ما است. حالا می‌توانیم ضمیر موصولی را حذف کنیم و به فعل *ing* بدهیم. یعنی:

.....large volumes can become exceedingly hot, damaging the material's structural strength

۳۷- گزینه «۱» در فیلم سفر معجزه‌آسا، چند فرد ماجراجوی شجاع، به اندازه سلول‌های خونی کوچک شدند تا بتوانند داخل رگ‌های دیپلمات کله‌گنده شنا کنند و لخته خونی خطرناک او را نابود سازند.

توضیح گرامری: چون در گزینه‌ها حرف ربط وابسته‌ساز داریم، تست ما بیشتر جنبه مفهومی دارد تا گرامری. با این حساب مجبوریم صورت سؤال را ترجمه کنیم تا به جواب صحیح برسیم. چون جای خالی را به صورت «تا» ترجمه کردیم پس *so that* را انتخاب می‌کنیم که اینجا هدف را نشان می‌دهد.

(۱) تا (۲) چون که (۳) گویی (۴) که در آن

۳۸- گزینه «۲» تلسکوپ فضایی، همه رکوردها از قبیل تیتراهای ایجادشده در اثر هر پروژه نجومی دیگر را شکسته است.

توضیح گرامری: فعل *include* به معنی شامل‌شدن متعدی است؛ یعنی بعد از آن به مفعول نیاز داریم. مفعول که نباید فعل اصلی داشته باشد؛ پس گزینه (۱) به‌خاطر فعل *produce* و گزینه (۴) به‌خاطر فعل *is produced* هر دو حذف می‌شوند. گزینه (۳) هم که کلاً بی‌معنی است. فقط گزینه (۲) صحیح است که اصل آن این‌طور بوده است:

..... the most newspaper headlines **which are produced by any single**

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۹- گزینه «۴» ده سال قبل چنین تلسکوپ‌های بزرگی غیرممکن بودند اما از آن به بعد، مهندسان، راه‌های مختلفی برای ساخت و حمایت از آینه‌های بزرگ و سنگین‌شان پیدا کرده‌اند.

(۱) بازتاب کردن (۲) تکرار کردن (۳) تشخیص دادن (۴) ساختن

۴۰- گزینه «۳» یک سری نیروی طبیعی و انسانی پل‌ها را تهدید می‌کنند که شامل تجزیه در اثر آب‌نمک، خاک‌های خورنده، ترافیک سنگین و تخریب عظیم ناگهانی در اثر زمین‌لرزه می‌شوند.

(۱) غیرقابل انعطاف (۲) کند، آهسته (۳) بزرگ، عظیم (۴) طعنه‌آمیز

۴۱- گزینه «۱» برای این که یک ساختمان را آزمایش کنیم باید توانایی آن را برای تحمل تندباد و زمین‌لرزه بسنجیم.

(۱) تحمل کردن (۲) بازداري کردن (۳) مستحکم کردن (۴) انکار کردن

۴۲- گزینه «۳» مطالعه آب و هوای کنونی شامل داده‌های هواشناسی جمع‌آوری شده در طول چند سال می‌باشد از قبیل داده‌های بارش، دما و آرایش جوی.

- (۱) پیچیده کردن (۲) اطمینان دادن (۳) انباشته کردن (۴) تخمین زدن

۴۳- گزینه «۴» استفاده از حیوانات در آزمایش‌ها اغلب ناکارآمد است چون حیوانات، بسیاری از بیماری‌هایی که انسان به آن مبتلا می‌شود را نمی‌گیرند.

- (۱) عملی، واقع‌گرایانه (۲) اجتناب‌ناپذیر (۳) معتبر، موثق (۴) ناکارآمد

۴۴- گزینه «۴» اثر «حفظ حیات» که اثری جامع و جذاب است و توسط اریک چیوین و آرون برنشتین ویراستاری شده است، بیان می‌کند که حفظ تنوع زیستی و سلامتی بشر درهم‌تنیده هستند و نمی‌توان یکی از آنها را به قیمت دیگری داشت.

- (۱) معکوس کردن (۲) وساطت کردن (۳) قدغن کردن (۴) به هم پیچیدن

۴۵- گزینه «۲» ژاپن که در سال ۱۹۸۲ مایل نبود در مقابل جریان‌های بی‌پایان آب و هوا و زمان تسلیم شود، دیواری ایجاد کرد تا از فرسایش مخروط کوه مقدس فوجی جلوگیری کند.

- (۱) ضعیف، نازک (۲) سنگدل، تغییرناپذیر (۳) ذاتی (۴) خفته، خاموش

۴۶- گزینه «۳» پژوهش اخیر نشان می‌دهد که رواج و گاهی اوقات استفاده نادرست از تلفن همراه و کامپیوتر باعث تردید در برخی از افراد در مورد مزایای فناوری شده است.

- (۱) برداشت، احساس (۲) تکانه، ضربه (۳) تردید، دوسوگرایی (۴) نادانی، بی‌خردی

۴۷- گزینه «۱» نمونه‌ای از تغییر و تحول در زندگی پروانه دیده می‌شود. پروانه‌ها دچار یک تغییر و تحول چهار مرحله‌ای از تخم تا لیس، شفیره و بزرگسال می‌شوند.

- (۱) تغییر و تحول (۲) ناپیدی (۳) انتشار (۴) افزونگی، حشو

۴۸- گزینه «۳» هنگامی که شما برای سخنرانی خود برنامه‌ریزی می‌کنید، از این مسئله اطمینان حاصل کنید که مثال‌های شما به موضوعتان مرتبط باشند. باید از مثال‌هایی استفاده کنید که با موضوع مورد بحث شما ارتباط دارند.

- (۱) در مغایرت با (۲) خالی از، تهی از (۳) مرتبط با (۴) پر از، مملو از

۴۹- گزینه «۴» بسیاری از مردم امروزه از سهولت در خرید، بانکداری و پرداخت آنلاین قبوض برخوردار هستند. اما، اگر اطلاعات شخصی شما به صورت ایمن رمزگذاری نشود، مشکلاتی به وجود می‌آیند.

- (۱) مداخله کردن (۲) افشا کردن (۳) نادیده گرفتن (۴) رمزگذاری کردن

۵۰- گزینه «۲» در دهه ۱۹۶۰، تاریخ‌دان‌ها احتمال دادند که در مرگ ناپلئون، سال ۱۸۲۱ در جزیره اس.تی. هلنا، جنایتی صورت گرفته است. در نتیجه ترتیبی صورت گرفت تا جنازه وی از خاک بیرون کشیده شود و نمونه‌ای از موی او برداشته شد. چون مو پوسیده نمی‌شود، دانشمندان توانستند روی آن مطالعاتی انجام دهند و به دنبال مواد سمی باشند.

- (۱) تکامل یافتن، نمایان شدن (۲) پوسیده شدن (۳) ایستادگی کردن، پشتکار داشتن (۴) از رمق انداختن



سؤالات ریاضی کاربردی

مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته ۱)

که ۱- فرض کنید $f(x) = \int_0^x \int_0^s e^{-t^2} dt ds$ ، کدام گزینه درباره نمودار تابع f در بازه $[0, \infty)$ درست است؟

- (۱) f نزولی و مقعر است. (۲) f صعودی و مقعر است. (۳) f نزولی و محدب است. (۴) f صعودی و محدب است.

که ۲- مجموعه $\{a \in [0, \infty) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1) \cdots (a+n)} < \infty\}$ کدام است؟

- (۱) $(1, \infty)$ (۲) $[1, \infty)$ (۳) $[e, \infty)$ (۴) $\emptyset$

که ۳- کدام گزینه درباره انتگرال ناسره $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ درست است؟

- (۱) همگرایی مطلق و مقدار آن بزرگتر از صفر است. (۲) همگرایی مشروط و مقدار آن برابر صفر است. (۳) همگرایی مطلق و مقدار آن برابر صفر است. (۴) واگرا است.

که ۴- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $\alpha = \sup A$. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $\alpha \notin A$ آنگاه $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$.

(۲) اگر جملات دنباله $\{a_n\}$ متمایز باشند، آنگاه $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$.

(۳) اگر مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ نامتناهی باشد، آنگاه $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$.

(۴) اگر $\{a_n\}$ زیردنباله‌ای صعودی داشته باشد، آنگاه $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$.

که ۵- فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ یک تابع پیوسته بین دو فضای متریک باشد. آنگاه:

- (۱) برای هر مجموعه باز $U \subseteq X$ در $f(U)$ باز است. (۲) برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq X$ در $f(K)$ فشرده است. (۳) برای هر مجموعه بسته $U \subseteq X$ در $f(U)$ بسته است. (۴) برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq Y$ در $f^{-1}(K)$ فشرده است.

که ۶- در فضای متریک $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر زیرمجموعه ناشمارای $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی در $\mathbb{R}$ دارد. (۲) هر زیرمجموعه نامتناهی و همبند $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی گویا دارد. (۳) هر زیرمجموعه ناشمارا از اعداد گنگ، نقطه حدی گویا دارد. (۴) هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی در $\mathbb{R}$ دارد.

که ۷- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک نامتناهی باشد به طوری که برای هر $A, B \subseteq X$ ، $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. کدام گزینه درست است؟

- (۱) X همبند است. (۲) X مجموعه‌ای شمارا است. (۳) هر دنباله کوشی در X همگرا است. (۴) هر تابع دلخواه $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است.

که ۸- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{2n}(x) \cos^2(x)$ را بر بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

- (۱) سری همگرایی نقطه‌ای نیست. (۲) سری به طور مطلق همگرایی یکنواخت است. (۳) سری همگرایی نقطه‌ای است اما همگرایی یکنواخت نیست. (۴) سری همگرایی یکنواخت است اما به طور مطلق همگرایی یکنواخت نیست.



۱۹- مقادیر c_1 و c_2 به طوری که $\int_{-\pi}^{\pi} (e^x - (c_1 + c_2 \cos x))^2 dx$ کمترین مقدار خود را اختیار کند، از حل دستگاه معادلات به صورت

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

به دست می آیند. مقدار b_2 کدام است؟

(۱) $\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}$ (۲) $\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$ (۳) $\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$ (۴) $\frac{-e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$

۲۰- فرمول $\frac{\frac{1}{3}f(x+h) - f(x) + \frac{2}{3}f(x-\frac{h}{2})}{(\frac{1}{3}h)^2}$ تخمینی برای است.

(۱) $f''(x)$ با خطای برشی $O(h^2)$ (۲) $f''(x)$ با خطای برشی $O(h)$
(۳) $f'(x)$ با خطای برشی $O(h)$ (۴) $f'(x)$ با خطای برشی $O(h^2)$

۲۱- مقدار تقریبی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ با استفاده از روش دوزنقه ای کدام است؟

(۱) $\sqrt{\pi}$ (۲) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

۲۲- فرض کنید $x > 0$ و محاسبه $A = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}$ روی یک کامپیوتر با روند عددی یک برابر با u مدنظر است. یک فرمول جایگزین مناسب برای محاسبه A ،

(۱) $\frac{2}{x^3}$ است اگر $x > (\frac{2}{u})^{\frac{1}{4}}$ (۲) $\frac{1}{x^3}$ است اگر $x > (\frac{2}{u})^{\frac{1}{4}}$ (۳) $\frac{2}{x^3}$ است اگر $x > u^{\frac{1}{4}}$ (۴) $\frac{1}{x^3}$ است اگر $x > (\frac{u}{2})^{\frac{1}{4}}$

۲۳- فرض کنید $L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ که $L_k(x) = \frac{b-a}{n}$ و $x_k = a + k(\frac{b-a}{n})$ ، $k = 0, 1, \dots, n$ ، $w_k = \int_a^b L_k(x) dx$ ، کدام یک از روابط زیر برقرار است؟

(۱) $w_k - w_{n-k} = L_k(x_k)$ (۲) $w_k = w_{n-k}$ (۳) $w_k + w_{n-k} = 1$ (۴) $w_k = w_{n-k-1}$

۲۴- به ازای چه مقدار از c روش دوزنقه ای برای تخمین انتگرال $\int_0^1 (x^5 - cx^4) dx$ دقیق تر از روش سیمسون است؟

(۱) $\frac{15}{14} < c < \frac{85}{74}$ (۲) $\frac{3}{10} < c < \frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{120} < c < \frac{1}{48}$ (۴) $\frac{15}{14} < c < \frac{95}{74}$

۲۵- چند جمله ای درونیاب هرمیت مربوط به نقاط جدول زیر کدام است؟

x_i	۰	۱
f_i	۳	۴
f'_i	۲	-۲
f''_i	۴	-

(۱) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

(۲) $-4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

(۳) $3x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 3$

(۴) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

۲۶- فرض کنید f یک چندجمله ای تکین از درجه ۴ و P یک چندجمله ای از درجه ۳ باشد به طوری که $P'(0) = f'(0)$ ، $P''(0) = f''(0)$ ، $P(1) = f(1)$ و $P(0) = f(0)$. کوچکترین مقدار C که $|f(x) - P(x)| \leq C$ به ازای هر $0 \leq x \leq 1$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{64}$ (۲) $\frac{21}{125}$ (۳) $\frac{27}{256}$

۲۷- فرض کنید P_3 یک چندجمله ای از درجه ۳ و P_2 چندجمله ای درونیاب P_3 در نقاط $x_0 = -h$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = h$ باشد ($h > 0$)، گزینه درست کدام است؟

(۲) $\int_{-h}^h P_2(x) dx = 2 \int_{-h}^h P_3(x) dx$

(۱) $\int_{-h}^h P_2(x) dx = \int_{-h}^h P_3(x) dx$

(۴) $\int_{-h}^h P_2(x) dx = 2 \int_{-h}^h P_3(x) dx$

(۳) $\int_{-h}^h P_2(x) dx = \int_0^h P_3(x) dx$



پاسخنامه ریاضی کاربردی

مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته (۱))

۱- گزینه «۴» قاعده لایبنینز را به یاد بیاورید:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \int_0^s e^{-t} dt dx = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x^2) x$$

حال با مشتق‌گیری از f داریم:

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \int_0^s e^{-t} dt dx = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x^2) + 2x^2 e^{-x^2}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2 \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)}{\sqrt{\pi}}$$

که:

چون مشتق اول مثبت است تابع صعودی و چون مشتق دوم مثبت است تابع محدب است.

۲- گزینه «۱» قرار دهید $a = 1$ آنگاه:

$$\frac{n!}{(a+1) \dots (a+n)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}$$

که یک سری هارمونیک را نتیجه می‌دهد و واگراست. لذا گزینه (۲) درست نیست. حال قرار دهید $a = 2$ آنگاه:

$$\frac{n!}{(a+1) \dots (a+n)} = 2 \frac{n!}{(n+2)!} = 2 \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

و این سری از مرتبه $\frac{1}{n^2}$ است و همگراست لذا گزینه چهار و سوم رد می‌شود.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^t}{1+e^{2t}} dt$$

۳- گزینه «۳» با تغییر متغیر $x = e^t$ داریم:

که انتگرالده یک تابع فرد است و در نتیجه مقدار این انتگرال برابر صفر است. همچنین می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{|\ln(x)|} = \infty$ لذا از جایی به بعد ($x > x_0$) خواهیم داشت $|\ln(x)| > \sqrt{x}$. پس برای $x > x_0$ ، $\frac{|\ln(x)|}{1+x^2}$ از مرتبه $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ خواهد بود که در بازه (x_0, ∞) انتگرال‌پذیر است. همچنین

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ پس برای $0 < x < x_1$ و $|\ln(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و این ایجاب می‌کند که $\frac{|\ln(x)|}{1+x^2}$ در نزدیکی صفر از مرتبه $\frac{1}{\sqrt{x}}$ باشد و در نتیجه

انتگرال‌پذیر شود. در بازه (x_1, x_0) نیز $\frac{|\ln(x)|}{1+x^2}$ پیوسته و در نتیجه انتگرال‌پذیر است.

۴- گزینه «۱» فرض کنید که $a_1 = 2, a_n = \sin(n)$; $n = 2, \dots$ در این صورت $\alpha = 2$ و $\limsup \sin(n) = 1$. واضح است که مجموعه حدود زیردنباله a_n در بازه $[-1, 1]$ قرار می‌گیرد و نامتناهی است. در واقع A در $[-1, 1]$ چگال است. همچنین از این مطلب می‌شود نتیجه گرفت که زیر دنباله صعودی دارد که به یک همگراست. لذا هر سه گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) اشتباه هستند.

۵- گزینه «۲» لم: یک تابع پیوسته هر مجموعه فشرده در دامنه خود را به مجموعه فشرده در برد خود می‌برد. همچنین این تابع هر مجموعه همبند از دامنه خود را به یک مجموعه همبند از برد خود می‌برد.

۶- گزینه «۳» فرض کنید که Q' نشان‌دهنده اعداد گنگ باشد آنگاه مجموعه $\pi + Q'$ ناشماراست و مجموعه $\mathbb{N}\pi$ شماراست. لذا مجموعه $\pi + Q' / \mathbb{N}\pi$ ناشماراست و هر دنباله دارای حدی به صورت $\pi + \mathbb{R} / \mathbb{N}\pi$ خواهد بود که گنگ است. لذا گزینه سوم نادرست است.

۷- گزینه «۴» فرض کنید که $Q' = (\frac{\pi}{4}, 1] \cap (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ و $X = Q'$. لذا گزینه یک و دو نادرست است. همچنین چون X کامل نیست لذا گزینه سه نیز اشتباه است.

۸- گزینه «۴» توجه کنید که اگر x از صفر و $\frac{\pi}{4}$ دور باشد آنگاه مقداری مانند $0 < \xi < 1$ وجود دارد که $\xi^{2n} < \sin^{2n}(x) \cos^2(x)$ و چون سری $\sum \xi^{2n}$ همگراست لذا سری نام برده در سؤال به صورت مشروط و مطلق همگرایی یکنواخت است. اما اگر x به صفر یا $\frac{\pi}{4}$ نزدیک باشد با توجه به اینکه به ترتیب $\sin^{2n} \cos^2(x) \approx O(x^{2n})$ یا $\sin^{2n} \cos^2(x) \approx O((1 - \frac{1}{4}x^2))$ ، لذا در حالت مطلق به مقدار x وابسته خواهند بود. در حالت مشروط ولی با توجه به تسط همگرایی سری‌های متناوب در نزدیکی صفر و نزدیکی $\frac{\pi}{4}$ همگرایی سری تنها به نزولی بودن $\sin^{2n} \cos^2(x)$ وابسته خواهد بود.

۹- گزینه «۳» واضح است که بعد V و W برابر با دو است و در یک زیر فضا یک بعدی اشتراک دارند؛ لذا بعد فضای مجموع آن‌ها برابر با دو به علاوه دو منهای یک خواهد بود.

۱۰- گزینه «۳» فرض کنید که $m = n = 1$ آنگاه زیرمجموعه‌های غیریکریخت به صورت روبه‌رو خواهند بود: $\{(a, 0)\}, \{(b, 0)\}, \{(0, 0)\}$ که سه زیرمجموعه است و در گزینه سوم صدق می‌کند.

۱۱- گزینه «۲» فرض کنید $n = 2$ آنگاه فضای پوچی عملگر با توجه به تعریف باید به صورت زیر باشد تا از حذف سطر اول و ستون اول ماتریس 1×1 صفر بدست بیایید.

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$$

و لذا سه پایه خواهد داشت که فقط گزینه دوم به ازای $n = 2$ جواب است.

۱۲- گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌های داده‌شده، واضح است ماتریس‌های تبدیل S و T به ترتیب معادل $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ هستند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$ST = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای این ماتریس معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$|xI - ST| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+3 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 = 0$$

۱۳- گزینه «۳» داریم:

$$!! A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

لذا مقادیر ویژه برابر خواهند بود با:

حال برای بردارهای ویژه متناظر یک خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 2x + 3y \\ 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

که دارای یک معادله زاید است و معادله آخر یک ثابت ایجاب می‌کند. لذا دارای یک پایه خواهد بود که به صورت روبه‌رو است: $[x, -x, 0]$ و برای بردار ویژه متناظر ۵ داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 2x + 3y \\ 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{bmatrix}$$

دارای یک معادله زاید است لذا دارای دو پایه است. تفاضل این مقدار برابر یک است.

۱۴- گزینه «۴» با دو بار مشتق‌گیری از T به‌دست می‌آید $x(a_6 - a_4)$. لذا رنک ST برابر یک است و لذا $\dim \ker(ST) = 5 - \text{rank}(ST) = 5 - 1 = 4$.

۱۵- گزینه «۴» ماتریس A را ماتریس همانی در نظر بگیرید در این صورت فقط در گزینه چهار صدق خواهد کرد. گزینه اول برابر $7I$ ، گزینه دوم برابر $8I$ و گزینه سوم برابر $2I$ می‌شود.

۱۶- «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» این سؤال اشتباه است. ابتدا توجه داشته باشید که چون $\text{rank}(J) = 1$ است، $\text{rank}(AJ) \leq 1$ است و چون درایه‌های هر دو ماتریس مثبت هستند، پس $AJ \neq O$ و در نتیجه $\text{rank}(AJ) = 1$ خواهد بود. بنابراین AJ یک ماتریس 4×4 با مرتبه ۱ است و این یعنی ۳ مقدار ویژه تکراری صفر دارد. بنابراین تنها مقدار ویژه ناصفر آن برابر با مقدار مجموع درایه‌های قطر اصلی خواهد بود. حالا ثابت می‌کنیم که این

مقدار ویژه همواره یک مقدار ثابت دارد. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}$ و با ویژگی گفته شده در سؤال باشد. در این صورت درایه‌های قطر

اصلی AJ به صورت زیر خواهند بود:

$$AJ = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_5 + a_6 + a_7 + a_8 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda \neq 0 = \sum_{i=1}^{16} a_i = \sum_{i=1}^{16} i = \frac{16 \times 17}{2} = 136$$

یعنی صرف‌نظر از نحوه آرایش A ، تنها مقدار ویژه ناصفر ماتریس AJ برابر ۱۳۶ خواهد بود که همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هیچ‌یک از گزینه‌ها وجود ندارد.

۱۷- گزینه «۱» با قراردادن $X_k = X_{k+1} = x$ مشخص می‌شود که دنباله به $x = 1$ می‌تواند همگرا باشد. از سویی این نقطه ریشه مکرر تابع f است لذا از مبحث نقطه ثابت آنالیز عددی نرخ همگرایی از مرتبه ۱ خواهد بود.

۱۸- گزینه «۳» تعداد نقاط درونیاب برابر با $t+1$ است؛ لذا از مبحث درونیاب آنالیز عددی برای چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه t و کمتر دقیق است پس $t \geq m, t \geq n$.

۱۹- گزینه‌های «۱ و ۳» با مشتق‌گیری نسبت به C_1 و C_2 مساوی صفر قرار دادن این مشتقات داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dC_1} (e^x - (C_1 + C_2 \cos(x)))^2 dx = -2(e^\pi - e^{-\pi} - 2\pi C_1) = 0 \Rightarrow \pi C_1 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dc_1} (e^x - (c_1 + c_2 \cos(x)))^2 dx = (2c_2\pi + e^{\pi} - e^{-\pi}) = 0 \Rightarrow \pi c_2 = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}$$

یا معادلاً

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \\ \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2} \end{bmatrix}$$

البته این سؤال در اصل اشتباه است زیرا دستگاه بالا را می‌شود به صورت‌های دیگر هم نوشت. مثلاً:

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \\ \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \end{bmatrix}$$

و لذا گزینه (۳) نیز می‌توانست درست باشد!

۲۰- گزینه «۲» با نوشتن بسط تیلور برای تابع

$$\frac{1}{3}f(x+h) - f(x) + \frac{2}{3}f(x-\frac{h}{2})$$

نسبت به $h = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}f(x+h) - f(x) + \frac{2}{3}f(x-\frac{h}{2}) = \frac{1}{6}D^{(3)}f(x)h^3 + \frac{1}{24}D^{(4)}f(x)h^4 + O(h^5)$$

لذا:

$$\frac{\frac{1}{3}f(x+h) - f(x) + \frac{2}{3}f(x-\frac{h}{2})}{\frac{1}{6}h^3} = \frac{\frac{1}{6}D^{(3)}f(x)h^3 + \frac{1}{24}D^{(4)}f(x)h^4 + O(h^5)}{\frac{1}{6}h^3} = D^{(3)}f(x) + \frac{1}{6}D^{(4)}f(x)h + O(h^2)$$

۲۱- «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» برای تابع $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ مقدار در $x = 0$ را به صورت حد آن یعنی صفر تعریف می‌کنیم. در این صورت مقدار انتگرال کماکان ثابت خواهد ماند و روش‌های انتگرال‌گیری نیوتن کتس بسته قابل اعمال خواهند بود.

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin 0}{\sqrt{0}} + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \right) = \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi$$

حال از روش دوزنقه خواهیم داشت:

بنابراین با توجه به محاسبات فوق هیچ‌کدام از گزینه‌های سنجش نمی‌تواند صحیح باشد.

۲۲- «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$A = \frac{\frac{4}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}}$$

حال اگر $x > (\frac{2}{u})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} < u$ باشد آنگاه نمایش $\frac{2}{x^2} \pm \frac{2}{x^2}$ با نمایش x^2 برابر است و در نتیجه $A = \frac{2}{x^3}$. در گزینه‌ها چنین شرطی نیامده است از

سویی چون u یک مقدار کوچک می‌باشد $\frac{2}{u}$ به حد کافی بزرگ است و گزینه یک لزوماً شرط ذکر شده را نمی‌دهد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق هیچ‌کدام از گزینه‌های سنجش نمی‌تواند صحیح باشد.



۲۳- گزینه «۲» از مبحث انتگرال گیری عددی آنالیز عددی می‌دانیم که W_k ضرایب وزن روش نیوتن کتس بسته هستند که متقارن می‌باشند، لذا بنابر تقارنی که دارند گزینه (۲) درست می‌باشد.

۲۴- گزینه «۱» مقدار دقیق انتگرال برابر است با:

$$I = -\frac{1}{5}c + \frac{1}{6}$$

$$T = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$$

$$S = -\frac{5}{24}c + \frac{3}{16}$$

مقادیر دوزنقه‌ای T و سیمسون S برابرند با:

و باید داشته باشیم:

$$\left| -\frac{1}{5}c + \frac{1}{6} - \left(-\frac{5}{24}c + \frac{3}{16} \right) \right| > \left| -\frac{1}{5}c + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$c < \frac{15}{74}, \quad \frac{15}{14} < c$$

و از حل این نامساوی به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 2$$

۲۵- گزینه «۴» برای گزینه (۴) داریم:

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 12x^2 - 24x + 4$$

با جایگذاری مشتقات و مقادیر جدول در نقاط داده شده داریم:

$$\left. \frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \right|_{x=0} = 4$$

$$\left. \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \right|_{x=0} = 2$$

$$\left. \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \right|_{x=1} = -2$$

$$\left. (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \right|_{x=0} = 3$$

$$\left. (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \right|_{x=1} = 4$$

که با مقادیر جدول تطابق دارند.

۲۶- گزینه «۴» با فرضیات داده شده می‌توان P را به عنوان درونیاب هرمیت تابع f در نقاط $\{0, 0, 0, 1\}$ به حساب آورد لذا از خطای درونیابی هرمیت داریم:

$$E = \frac{x^3(x-1)}{4!} f^{(4)}(\eta) = x^3(x-1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 \cdot (x-1)) = 0$$

و برای کمینگی با مشتق به دست می‌آید:

$$[[x=0], [x=\frac{3}{4}]]$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{3}{4} \text{ برابر است با } \frac{-27}{256}.$$

۲۷- گزینه «۱» از مبحث انتگرال گیری عددی روش‌های نیوتن کتس، با انتگرال گیری از P_3 روش سیمسون به دست می‌آید و این روش برای انتگرال از چند جمله‌های درجه سه دقیق است یعنی برای انتگرال P_3 نیز دقیق خواهد بود.