

**PART A: Grammar**

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

1- The rate that bright comets enter the solar system implies there should be around 3000 of them buzzing around, only 25 are known.

- 1) nonetheless 2) regardless of the fact 3) and yet 4) as there are

2- Contemporary theories of interpretation require that, in our analyses of texts, we consider not only what the text says“made.”

- 1) also its meaning gets and 2) but also gets the meaning of it
3) but its meaning also gets 4) but how its meaning gets

3- individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

- 1) That 2) An 3) The 4) It is that

4- Plant scientists have been trying for years to genetically modify flowers for aesthetic purposes. The first to go on sale were blue carnations in Australia, in 1996.

- 1) were produced 2) produced 3) had been produced 4) to produce

5- Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, weapon platforms.

- 1) they are often called 2) often called 3) called they are often 4) that are called often

6- Articulating what the difference between humans and other creatures consists of behind it have formed a large and difficult project tackled by biologists, anthropologists, psychologists, and philosophers.

- 1) uncovering the biology 2) the biology of uncovering
3) the biology uncovering 4) and uncovering the biology

7- Most healthcare professionals view depression as “just part of getting old and argue that this illness,, can have serious, even fatal consequences.

- 1) untreated then 2) untreated whether it is 3) if untreated 4) that is untreated

8- Ted had a terrible habit of boasting so much about his smallest accomplishments his vainglory became renowned throughout the small college campus.

- 1) that 2) as 3) in that 4) as though

**PART B: Vocabulary**

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

🐞 9- Dogs growl and show their teeth in an attempt to frighten the animal or person they perceive as a

- 1) habitat 2) prey 3) suspicion 4) threat

🐞 10- Based on his recent poor decisions, it was obvious that Seth lacked even a modicum of good

- 1) sentiment 2) sense 3) sensation 4) sensitivity

🐞 11- The judge the extraneous evidence because it was not pertinent to the trial.

- 1) disclosed 2) distended 3) dismissed 4) distorted

🐞 12- The more frequently employees take time to exercise during working hours each week, the fewer sick days they

- 1) expend 2) save 3) take 4) recall

🐞 13- Classic psychology experiments have shown that when rats are first with an electrical shock to fear a tone when it sounds, they later fear the tone even without the associated shock.

- 1) conditioned 2) sparkled 3) displayed 4) intended

🐞 14- In 1998 Gordon Sinclair, the owner of a well-known restaurant, was struggling with a problem that all restaurateurs. Patrons frequently reserve a table but, without notice, fail to appear.

- 1) delegates 2) afflicts 3) intensifies 4) evades

🐞 15- Despite what the scientist said, the volcano eruption is not , so do not be concerned!

- 1) impassive 2) negotiable 3) vulnerable 4) imminent

🐞 16- At the landfill, the process is in full swing, turning much of the garbage into gasses.

- 1) conversion 2) restoration 3) decomposition 4) pressurization

🐞 17- Because I am an extreme planner who needs to control everything, I never engage in

- 1) justification 2) pretention 3) coincidence 4) spontaneity

🐞 18- The roads in our town already have too much traffic; building a new shopping mall will the problem.

- 1) frustrate 2) exacerbate 3) preserve 4) exploit

🐞 19- The movie *Close Encounters of the Third Kind* tells the story of the first contact between beings from outer space and creatures, that is, those living on earth.

- 1) terrestrial 2) dominant 3) ingenious 4) affable

🐞 20- There is agreement that an airport is needed; no one disputes that, but there is fundamental disagreement about where to build it.

- 1) uniform 2) utilitarian 3) unique 4) unanimous

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۱- گزینه «۳» با توجه به سرعت و تعداد ورود ستاره‌های دنباله‌دار به منظومه شمسی می‌توان حدس زد که باید تقریباً ۳۰۰۰ مورد از آن‌ها وجود داشته؛ با این حال تنها ۲۵ عدد از آنها شناسایی شده‌اند.

توضیح: همان‌طور که می‌دانید nonetheless قید ربط است؛ یعنی قبل از آن باید نقطه یا نقطه‌ویرگول و بعد از آن باید حتماً کاما بیاید. با این حساب گزینه (۱) نادرست است. گزینه (۲) در صورتی ارزش بررسی کردن دارد که طراح بعد از fact از حرف ربط that استفاده می‌کرد. گزینه (۳) صحیح است، هم با توجه به مفهوم جمله و هم با توجه به اینکه قبل از and کاما می‌آید. و گزینه (۴) نادرست است چون بعد از as دو تا فعل داریم؛ یکی are و یکی know.

۲- گزینه «۴» نظریه‌پردازان معاصر در زمینه ترجمه شفاهی باور دارند ما در آنالیز متن، علاوه بر چیزی که متن می‌گوید، باید به نحوه شکل‌گیری معنی آن نیز توجه داشته باشیم.

توضیح: همان‌طور که می‌بینیم این تست با مبحث not only ... but also سروکار دارد. اول از همه اینکه در این ساختار but also می‌تواند به صورت but یا also هم به کار برود. پس امیدوارم فوری گزینه (۲) را نزنه باشید.

ضمناً می‌دانیم ساختار (also) but ... not only مستلزم رعایت ساختار موازی است؛ بنابراین چون بعد از not only کلمه پرسشی what را داریم باید بعد از but(also) هم از کلمه‌ی پرسشی how استفاده کنیم:

.... not only what the text says but how its meaning gets made.

۳- گزینه «۱» اینکه شبکه‌های اجتماعی بر روی رفتار افراد تاثیرگذار هستند، قابل تردید نمی‌باشد.

توضیح: تست بسیار ساده‌ای است. توی مبحث جمله‌واره‌ی اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که قبل از فعل be به عنوان فاعل استفاده شوند. گفتیم در این موارد that به صورت «اینکه» ترجمه می‌شود:

That individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

مثال بیشتر:

That coffee grows in Brazil is well known.

۴- گزینه «۲» گیاه‌شناسان سال‌هاست که با استفاده از اصلاح ژنتیک به دنبال زیباتر ساختن گل‌ها هستند. گل میخک آبی اولین موردی بود که برای فروش عرضه شد. این گل در سال ۱۹۹۶ در استرالیا تولید شد.

توضیح: این تست از دو جمله تشکیل شده که برای پاسخگویی به آن فقط به جمله دوم نیاز داریم. جمله دوم دارای فعل اصلی were می‌باشد، با این حساب به هیچ فعل اصلی دوم دیگری نیاز نداریم چون هر جمله فقط و فقط باید یک فعل اصلی داشته باشد. این یعنی حذف همزمان گزینه‌های (۱) و (۳). گزینه (۴) نادرست است چون قصد بیان هدف نداریم.

ضمناً شکل اولیه گزینه (۲) این‌طوری بوده:

The first to go on sale were blue carnations **that were produced** in Australia, in 1996.

اگر that were را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.



۵- گزینه «۲» سلاح‌ها از طریق وسایل نقلیه مختلفی حمل و تحویل داده می‌شوند. این وسایل نقلیه اغلب با نام پلتفرم سلاح شناخته می‌شوند.
توضیح: تقریباً هر سال از این مبحث سؤال می‌آید و ما هم هر سال می‌گوییم بعد از کاما کاربرد that ممنوع است. (این یعنی حذف گزینه (۴)).
گزینه (۱) در صورتی صحیح است که کاما به نقطه تبدیل بشود و they هم به They. مهم‌ترین دلیل رد گزینه (۳) کاربرد they بعد از called است.
ضمناً شکل اولیه‌ی گزینه‌ی ۲ این طوری بوده:

Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, **which are often called** weapon platforms.

اگر which are حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۶- گزینه «۴» درک تفاوت بین انسان و سایر موجودات و مسائل بیولوژیکی نهفته در آن باعث بوجود آمدن مباحث و تحقیقات دشوار و گسترده‌ای شده است که دانشمندانی از رشته‌های مختلف مانند زیست‌شناسی، انسان‌شناسی، روانشناسی و فلسفه به آن می‌پردازند.
توضیح: توی تست‌هایی که این‌قدر طولانی هستند، اولین کار این است که به دنبال فعل اصلی باشیم. فعل اصلی سوال ما have formed است. پس به خاطر حضور have باید فاعلمون جمع باشد. اما articulating به تنهایی به فعل مفرد نیاز دارد، این یعنی باید articulating را با and به یک ساختار ing دار موازی دیگر متصل کنیم تا آن موقع کاربرد فعل have هم معنی پیدا کند. و چون فقط گزینه (۴) است که دارای and می‌باشد، می‌توانیم باقی گزینه‌ها را رد کنیم.

۷- گزینه «۳» اکثر متخصصین حوزه بهداشت و درمان، افسردگی را بخشی از پروسه افزایش سن می‌دانند و اعتقاد دارند که در صورت عدم درمان می‌تواند عواقب بسیار وخیمی داشته و یا حتی باعث مرگ بیمار شود.
توضیح: اول از همه اینکه طراح سؤال ظاهراً یادش رفته آن (") را که باز کرده ببندد. باید این علامت را قبل از and بیاورد. حالا می‌رسیم به رد گزینه‌ها. کاربرد that بعد از کاما ممنوع است (یعنی رد گزینه (۴)). گزینه ۱ نادرست است چون معلوم نیست طراح سوال آن then را بابت چی استفاده کرده. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون بعد از is هیچ عبارت کامل‌کننده‌ای نداریم. اما برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۳) صحیح است باید اصل جمله را پیدا کنیم.

Most healthcare professionals argue that this illness, **if it is untreated**, can have serious, even fatal consequences.

چون it به this illness برمی‌گردد، می‌توانیم با فرض اینکه فاعل‌ها یکسان هستند، فاعل جمله‌واره‌ی وابسته یعنی it و فعل is را حذف کنیم و یک وجه وصفی بسازیم:

Most healthcare professionals argue that this illness, **if untreated**, can have serious, even fatal consequences.

۸- گزینه «۱» تد اخلاق بسیار زشتی داشت و به خاطر کوچک‌ترین موفقیت‌هایش به قدری فخر فروشی می‌کرد که عادت خودستایی او در سرتاسر محوطه‌ی کوچک دانشگاه زبانزد عام و خاص بود.
توضیح: از ساختار that so استفاده شده.

....so much about that

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۹- گزینه «۴» سگ‌ها در هنگام مواجهه با خطر / تهدید، پارس می‌کنند و دندان‌های خود را نشان می‌دهند تا حیوان یا شخص مورد نظر را بترسانند.

- (۱) زیستگاه، زیست‌بوم (۲) طعمه (۳) سوءظن، تردید (۴) خطر، تهدید

۱۰- گزینه «۲» ضعف تصمیمات اخیر سِت نشان می‌دهد که کوچکترین درکی نسبت به مسائل مختلف ندارد.

- (۱) تمایل، گرایش، احساس (۲) شعور، معنی، ادراک (۳) احساس، هیجان (۴) حساسیت

۱۱- گزینه «۳» قاضی شواهد غیرضروری را مردود اعلام کرد زیرا ارتباط چندانی با روال دادرسی نداشت.

- (۱) افشاء کردن، فاش کردن (۲) بزرگ کردن، منبسط کردن (۳) مردود شمردن، رد کردن (۴) کج کردن، تحریف کردن

۱۲- گزینه «۳» کارمندان هرچقدر در طول هفته بیشتر ورزش کنند، کمتر به مرخصی استعلاجی نیاز پیدا می‌کنند.

توضیح: جواب این سؤال عیناً توی خود سؤال آمده. یعنی اول بوده take time حالا شده take days.

اصطلاح take sick days یعنی «استعلاجی گرفتن».

۱۳- گزینه «۱» طبق آزمایشات روانشناسی کلاسیک، وقتی موش‌ها برای ترسیدن از یک صدای بخصوص به وسیله شوک الکتریکی شرطی شوند،

بعدها بدون وجود شوک الکتریکی هم از آن صدا می‌ترسند.

- (۱) شرطی کردن (۲) درخشیدن، برق زدن (۳) نمایش دادن (۴) قصد داشتن

۱۴- گزینه «۲» گوردن سینکлер، صاحب یکی از رستوران‌های مشهور، در سال ۱۹۹۸ با یکی از مشکلاتی که تمامی صاحب رستوران‌ها را آزار می‌داد،

دست و پنجه نرم می‌کرد. مشتریان، میز رزرو می‌کردند اما بدون اطلاع در رستوران حاضر نمی‌شدند.

- (۱) تفویض کردن، سپردن (۲) رنجاندن، آزردن (۳) تشدید کردن (۴) طفره رفتن، شانه خالی کردن

۱۵- گزینه «۴» علیرغم دیدگاه آن دانشمند، فوران آتشفشان در آینده‌ای نزدیک اتفاق نخواهد افتاد. بنابراین جایی برای نگرانی نیست!

- (۱) خونسرد، بی‌عاطفه (۲) قابل مذاکره (۳) آسیب‌پذیر (۴) قریب‌الوقوع

۱۶- گزینه «۳» در مکان دفن زباله، پروسه‌ی تجزیه با قدرت در حال اجرا است. در این پروسه بخش زیادی از زباله به گاز تبدیل می‌شود.

- (۱) تبدیل، تغییر (۲) ترمیم، بازسازی (۳) تجزیه (۴) تحت فشار قرار دادن

۱۷- گزینه «۴» من، به دلیل اینکه برنامه‌ریز بسیار دقیقی هستم، باید همه چیز را تحت نظر داشته باشم. بنابراین در زندگی من هرگز چیزی

بدون برنامه‌ریزی (فی‌البداهه) اتفاق نمی‌افتد.

- (۱) توجیه، دلیل آوردن (۲) تظاهر، وانمود (۳) اتفاق، تصادف، تقارن (۴) بدون برنامه، خودبخودی



۱۸- گزینه «۲» خیابان‌های شهر ما در حال حاضر هم ترافیک سنگینی دارد و ساخت پاساژ این مشکل را بدتر خواهد کرد.

- (۱) خنثی کردن، مختل کردن (۲) بدتر کردن، تشدید کردن (۳) حفظ کردن، نگه داشتن (۴) استخراج کردن، بهره‌برداری کردن

۱۹- گزینه «۱» فیلم «برخورد نزدیک از نوع سوم» داستان اولین برخورد بین موجودات فضایی و موجودات زمینی را روایت می‌کند.

- (۱) زمینی، دنیوی، خاکی (۲) غالب، مسلط (۳) باهوش، ماهر (۴) مهربان، خوش‌برخورد

توجه: در گزینه (۳) واژه ingenious به معنی «باهوش، ماهر، ماهرانه» است که از واژه genius به معنای «نبوغ، ذکاوت» گرفته شده. اکثر داوطلبان این واژه را با واژه ingenuous به معنی «صاف‌وساده، بی‌ریا» اشتباه می‌گیرند.

۲۰- گزینه «۴» همه افراد با ساخت فرودگاه موافق هستند، اما در مورد مکان ساخت آن اختلاف نظر شدیدی وجود دارد.

- (۱) یک‌شکل، یک‌دست (۲) سوداگر، سودمند، کاربردی (۳) منحصربه‌فرد (۴) متفق‌القول، به‌اتفاق‌آرا

توجه: لغت unanimous معمولاً با واژگان consent, agreement, decision, vote و ... می‌آید.

بخش سوم: درک مطلب

دو متن زیر را بخوانید و از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) گزینه‌ای را انتخاب کنید که برای هر سؤال بهترین پاسخ باشد. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

متن ۱:

با رشد و پیاده‌سازی تکنولوژی بالقوه VR (واقعیت مجازی) در ده سال آینده زندگی انسان به شدت دستخوش یک سری تغییرات می‌شود. در مورد میزان تأثیر VR و سرعت گسترش آن در جامعه همچنان اختلاف نظر وجود دارد. با این حال بسیاری از متخصصین اعتقاد دارند که تا سال ۲۰۳۰ (و شاید حتی زودتر) VR به اندازه کافی توسعه پیدا کرده و به بخشی جدایی‌ناپذیر از زندگی انسان تبدیل خواهد شد. در حال حاضر ۴۰ میلیون نفر هدست VR دارند و انتظار می‌رود در ۳ سال آینده این تعداد دو برابر شود. تا سال ۲۰۲۵ به احتمال زیاد به نقطه‌ای می‌رسیم که تقریباً ۲۰۰ میلیون کاربر از وسایل ویدئویی VR یا همان HMD (نمایشگر سه‌بعدی که بر روی سر قرار می‌گیرد) استفاده کنند.

هدف نهایی این هدست‌ها، خلق یک فضای مجازی سه بعدی و ۳۶۰ درجه است تا کاربر بتواند بدون نیاز به تلویزیون، کامپیوتر یا پرده سینما از تماشای برنامه‌های مختلف لذت ببرد. در این تکنولوژی دو LCD وجود دارد که هر کدام مخصوص یک چشم است. این LCDها تصاویر فرستاده شده توسط کامپیوتر یا وسیله مشابه دیگر (از طریق کابل HDMI) یا تصاویر موجود بر روی صفحه نمایش موبایل هوشمند وصل شده به بخش جلویی هدست را نمایش می‌دهند. لنزهای قرار گرفته در داخل HMD و در حد فاصل بین چشم کاربر و صفحه نمایش LCD، ضروری هستند زیرا اختلاف طبیعی میان چیزی را که دو چشم انسان به‌طور همزمان می‌بینند از بین می‌برند.

از طریق این لنزها، تصاویر دوبعدی صفحه نمایش قابل مشاهده می‌باشند، که این امر نهایتاً باعث ایجاد یک تصویر مناسب برای هر چشم می‌شود. با ترکیب تصاویر دوبعدی، تصاویری سه‌بعدی ایجاد می‌شوند که بسیار شبیه دنیای واقعی هستند. HMD همچنین از سامانه «head tracking» استفاده می‌کند که مشابه سامانه پرواز هواپیما است و سه مقیاس اوج، زاویه نوانش و غلت را روی محورهای X، Y و Z دنبال می‌کند. به عبارت دیگر، وقتی سر کاربر به طرف بالا، پایین، چپ یا راست حرکت می‌کند، VR این حرکات را دنبال کرده و از این طریق کاربر می‌تواند محیط اطراف خود را ببیند.

۲۱- گزینه «۱» جواب این سؤال در جمله ابتدایی متن پیدا می‌شود:

For the next ten years, various aspects of society could be going through enormous change as **Virtual Reality (VR) technology moves towards fully operational and interactive implementation of its potential.**

قسمت بلدشده جمله بالا نشان می‌دهد که تکنولوژی VR هنوز به طور کامل و به آن اندازه که پتانسیل دارد، پیاده‌سازی نشده.

در این گزینه لغت materialize یعنی «تحقق یافتن، به یک واقعیت تبدیل شدن»

preoccupied در گزینه (۲) یعنی «مشغول، درگیر، مجذوب» / integral یعنی «ضروری، جدایی‌ناپذیر»

سوالات مهندسی مکانیک - تبدیل انرژی

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مکانیک سیالات پیشرفته، ترمودینامیک پیشرفته)

۱- مسئله $\begin{cases} 2y'' + y = 0, 0 < x < \pi \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = a \end{cases}$ مفروض است. اگر $Y_s(n)$ تبدیل فوری سینوسی تابع $y(x)$ به ازای $n \in \mathbb{N}$ باشد و $Y_s(2) = \frac{108}{17\pi}$ مقدار a کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۲- معادله $y'' + \lambda y = 0$ را به همراه شرایط کرانه‌ای $y(0) = y(\pi)$ و $y'(0) = y'(\pi)$ به ازای مقدار ویژه حقیقی مقدار λ در نظر بگیرید. کدام مورد درست است؟

(۱) هر دو تابع $\sin(nx)$ و $\cos(nx)$ ، توابع ویژه متناظر با n امین مقدار ویژه مثبت هستند.

(۲) تنها برای مقدار ویژه صفر، تابع ویژه ساده (یک تابع ویژه مستقل خطی) است.

(۳) برخی توابع ویژه (متمايز) مسئله، در بازه $[0, \pi]$ بر یکدیگر عمود نیستند.(۴) کوچکترین مقدار ویژه مثبت، $\lambda = 1$ است.

۳- فرض کنید سری فوری تابع $f(x) = \begin{cases} -4k & -2 \leq x \leq 1 \\ kx + 5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ در $x = 1$ به k همگرا باشد. مقدار k ، کدام است؟

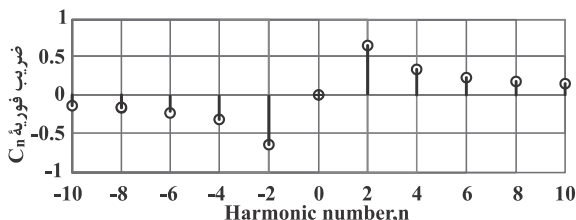
۲ (۴)

 $\frac{5}{4}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴- تعدادی از ضرایب سری فوری مختلط تابع g در شکل زیر نشان داده شده است. روند مشاهده شده برای تابع در دو طرف، تا بی‌نهایت ادامه دارد. کدام مورد درست است؟

(۱) g موهومی و فرد است.(۲) g موهومی و زوج است.(۳) g حقیقی و فرد است.(۴) g حقیقی و زوج است.

۵- فرض کنید در مسئله $g(0) = 0, g'(0) = 1$ ؛ $g''(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(\omega t) \sin(\omega x) g(t) dt d\omega$ ؛ g تابعی حقیقی و فرد است. $g(1)$ کدام است؟

$$\frac{2}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{2} \sinh\left(\frac{2}{\pi}\right) \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2}{\pi}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (۱)$$

۶- مسئله $u(0, t) = \sin(t); u(x, 0) = 0; x > 0, t > 0$ را در نظر بگیرید. مقدار $u(1, 2)$ کدام است؟

$$\frac{\sin 2}{e} \quad (۴)$$

$$\frac{\sin 1}{e} \quad (۳)$$

$$\frac{\sin 2}{e^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sin 1}{e^2} \quad (۱)$$

۷- فرض کنید $u = u(x, t)$ جواب مسئله انتقال حرارت زیر باشد. مقدار $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{9}\right)$ ، کدام است؟

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0; t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos^2 x; 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-4}) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-9}) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}(1 + e^{-4}) \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2}(1 + e^{-9}) \quad (۳)$$

۸- جواب مسئله لاپلاس زیر در مختصات قطبی کران دار است. $\frac{u(r, \theta)}{\sin \theta}$ کدام است؟

$$2r + \frac{1}{2}r \cos \theta \quad (۲)$$

$$2 + \frac{1}{2}r^2 \cos \theta \quad (۱)$$

$$2 \cos(\ln r) + \frac{1}{2} \cos(2 \ln r) \cos \theta \quad (۴)$$

$$2r + r^2 \cos \theta \quad (۳)$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0; 0 < r < 1, -\pi < \theta \leq \pi, \\ u(1, \theta) = (2 + \cos \theta) \sin \theta; -\pi < \theta \leq \pi, \end{cases}$$

۹- مسئله الکترواستاتیک $\nabla^2 u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0$ در ناحیه $0 < r < 2$ و $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ با شرایط مرزی $u(r, \pm \frac{\pi}{4}) = 0$ ، $u(2, \theta) = \pi$ ، $u(0, \theta) = -\pi$ را در نظر بگیرید. مقدار $u(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{3}) - u(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $2\pi \ln(\frac{9}{4}) - \pi$ (۲) $2\pi \log_4(\frac{9}{4})$ (۳) $2\pi \log_4(9)$ (۴) $2\pi \log_4(9) + \pi$

۱۰- فرض کنید تابع لگاریتم با شاخه‌ی اصلی یعنی $-\pi < \text{Arg} z \leq \pi$ ، تعریف شده باشد. مقدار $\text{Ln}(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^2$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}i$ (۲) $\frac{2\pi}{3}i$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}i$ (۴) $-\frac{4\pi}{3}i$

۱۱- فرض کنید $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{z^2 \sinh(z)}$. مقدار $\sum_{n=-3}^1 |a_n|$ در ناحیه‌ی همگرایی سری کدام است؟

- (۱) $\frac{427}{360}$ (۲) $\frac{413}{360}$ (۳) $\frac{307}{360}$ (۴) $\frac{293}{360}$

۱۲- فرض کنید $f(z) = \sin(x) \cosh(ay) + i v(x, y)$ تحلیلی باشد. مقدار $\int_C f(z) dz$ که در آن C پاره‌خط جهت‌دار از مبدأ مختصات به

نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ می‌باشد، کدام است؟ $(z = x + iy)$

- (۱) $1 + i \sinh \frac{\pi}{2}$ (۲) $i + \sinh \frac{\pi}{2}$ (۳) $i - \sinh \frac{\pi}{2}$ (۴) $1 - i \sinh \frac{\pi}{2}$

۱۳- مقدار $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{z+1}{z}}}{z} dz$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}$ (۲) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$ (۳) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2k)!}$ (۴) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$

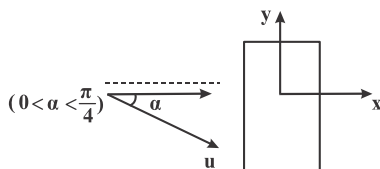
۱۴- مقدار $\int_0^{\pi} \sin(e^{i\theta}) \sin^2(\theta) d\theta$ ، کدام است؟ $(i = \sqrt{-1})$

- (۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) صفر (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۵- مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx$ کدام است؟

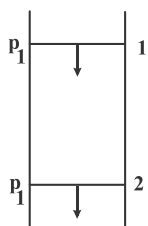
- (۱) $\frac{\pi}{2} (e^{-2} - 2e^{-1})$ (۲) $\frac{\pi}{3} (e^{-2} - 2e^{-1})$ (۳) $\frac{\pi}{2} (2e^{-2} - e^{-1})$ (۴) $\frac{\pi}{3} (2e^{-2} - e^{-1})$

۱۶- سطح مستطیلی در مقابل جریان یکنواخت سیال قرار دارد. با انحراف سرعت جریان آزاد نسبت به خط عمودی (افزایش زاویه α)، ضخامت لایه مرزی و مقدار نیروی وارده بر سطح راستای X به ترتیب چگونه تغییر می‌کند؟



- (۱) کاهش - کاهش
(۲) کاهش - افزایش
(۳) افزایش - کاهش
(۴) افزایش - افزایش

۱۷- در شکل زیر، مایعی با وزن مخصوص γ به طرف پایین جریان دارد. در خصوص این جریان کدام مورد درست است؟



- (۱) $P_2 = P_1$
(۲) $P_2 > P_1$
(۳) $P_2 < P_1$

(۴) اظهار نظر قطعی نمی‌توان کرد.

پاسخنامه مهندسی مکانیک – تبدیل انرژی

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مکانیک سیالات پیشرفته، ترمودینامیک پیشرفته)

۱- گزینه «۳» از رابطه‌ی تبدیل فوریه سینوسی مشتق دوم تابع استفاده می‌کنیم:

$$F_s(f''(x)) = \frac{\gamma n \pi}{L} [((-1)^{n+1} f(L) + f(0)) - (\frac{n\pi}{L})^\gamma F_s(f(x))]$$

با جایگذاری $f(\pi) = a, f(0) = 1, L = \pi, F_s(f(x)) = Y_s(n)$ داریم:

$$F_s(y'') = \frac{\gamma n}{\pi} ((-1)^{n+1} (a+1) - n^\gamma Y_s(n))$$

از معادله‌ی $2y'' + y = 0$ تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم:

$$\gamma \left(\frac{\gamma n}{\pi} ((-1)^{n+1} (a+1) - n^\gamma Y_s(n)) + Y_s(n) \right) = 0$$

با جایگذاری $n = 3$ داریم:

$$\frac{12}{\pi} (a+1) - 18 \left(\frac{108}{1728\pi} \right) + \frac{108}{1728\pi} = 0 \Rightarrow a+1=9 \Rightarrow a=8$$

۲- گزینه «۲» با فرض $\lambda > 0$ داریم:

$$y = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

با جایگذاری شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \Rightarrow A = A \cos \sqrt{\lambda} \pi + B \sin \sqrt{\lambda} \pi & (I) \\ y'(0) = y'(\pi) \Rightarrow B \sqrt{\lambda} = -A \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi & (II) \end{cases}$$

(I), (II) $\Rightarrow \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda} \pi = 1 \\ \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \gamma n \Rightarrow \lambda = \gamma n^2 = 4, 16, 36, \dots$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) غلط می‌باشند. این گزینه‌ها باید به صورت زیر اصلاح گردند:

گزینه (۱): توابع $\sin(\gamma n x)$ و $\cos(\gamma n x)$ توابع ویژه متناظر با n امین مقدار ویژه مثبت هستند.

گزینه (۴): کوچک‌ترین مقدار ویژه مثبت، $\lambda = 4$ است.

با فرض $\lambda < 0$ داریم:

$$y = A e^{\sqrt{|\lambda|} x} + B e^{-\sqrt{|\lambda|} x}$$

این فرض با توجه به شرایط اولیه پاسخ حقیقی λ ندارد.

با فرض $\lambda = 0$ داریم:

$y = Ax + B$

$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B$

$\lambda \in \{0, 4, 16, 36, \dots\}$

با توجه به شرایط اولیه:

بنابراین مقادیر ویژه به صورت روبه‌رو خواهند بود:

لذا گزینه (۳) نیز غلط است. چرا که تنها مقدار ویژه در بازه $[0, \pi]$ همان $\lambda = 0$ است.

۳- گزینه «۲» می‌دانیم که سری فوریه در نقطه a به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$F(a) = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} \Rightarrow F(1) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2}$$

$\begin{cases} f(1^+) = k(1) + \delta = k + \delta \\ f(1^-) = -\epsilon k \end{cases} \Rightarrow F(1) = \frac{k + \delta - \epsilon k}{2} = \frac{-\epsilon k + \delta}{2} \Rightarrow k = \frac{-\epsilon k + \delta}{2} \Rightarrow k = 1$

۴- گزینه «۱» با توجه به روابط $a_n = C_n + C_{-n}$ و $b_n = i(C_n - C_{-n})$ داریم:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \gamma i C_n \end{cases} \Rightarrow g(x) = \gamma i C_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

نمودار تابعی فرد را نشان می‌دهد، بنابراین با ساده‌سازی روابط بالا مشاهده می‌شود که تابع موهومی و فرد است.

۵- گزینه «۴» با توجه به روابط تبدیل فوریه سینوسی و عکس تبدیل فوریه سینوسی، داریم:

$\int_0^\infty \sin(\omega t) g(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_s(g) \Rightarrow \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(\omega x) \sin(\omega t) g(t) dt d\omega = \frac{\pi}{2} g(x)$

$\Rightarrow g''(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\gamma g(x) \Rightarrow g(x) = A \cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right) + B \sinh\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$A = 0 \Rightarrow g(x) = B \sinh\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

با توجه به فرد بودن تابع داریم:

$g'(x) = \frac{B\pi}{2} \cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow g'(0) = 1 = \frac{B\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{2}{\pi}$

اکنون شرط $g'(0) = 1$ را جایگذاری می‌کنیم:

$\Rightarrow g(1) = \frac{2}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$



۶- گزینه «۳» از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$sU(x, s) - u(x, 0) + U_x(x, s) + U(x, s) = 0$$

$$\Rightarrow U_x + (s+1)U = 0 \Rightarrow U = ke^{-(s+1)x}$$

$$u(0, t) = \sin t \Rightarrow U(0, s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow k = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow U = \frac{e^{-(s+1)x}}{s^2 + 1}$$

با تفکیک معادله و عکس لاپلاس گرفتن داریم:

$$U = e^{-x} \cdot \frac{e^{-xs}}{s^2 + 1} \Rightarrow u(x, t) = e^{-x} L^{-1}\left(\frac{e^{-xs}}{s^2 + 1}\right) = e^{-x} \sin(t-x) \Rightarrow u(1, 2) = e^{-1} \sin(2-1) = e^{-1} \sin(1) = \frac{\sin(1)}{e}$$

$$u = e^{-\lambda_1 t} (k_1 \cos(\lambda x) + k_2 \sin(\lambda x))$$

۷- گزینه «۲» می‌دانیم پاسخ عمومی به فرم روبه‌رو خواهد بود:

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ \lambda_n = n \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \cos(nx)$$

با توجه به شروط کسینوسی روی $x = 0$ و $x = \pi$ داریم:

$$u(x, 0) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

اکنون شرط لحظه ابتدایی را بررسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{1}{2} & ; \quad n = 0, 2 \\ A_n = 0 & ; \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\lambda_2 t} \cos(2x) \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{9}}}{2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{1}{9}})$$

$$u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\lambda_n} + B_n r^{-\lambda_n}) (C_n \cos \lambda_n \theta + D_n \sin \lambda_n \theta)$$

۸- گزینه «۳» پاسخ عمومی به فرم روبه‌رو خواهد بود:

$$b_0 = B_n = 0$$

با توجه به دامنه $0 < r < 1$ و کراندار بودن پاسخ مسئله، داریم:

$$\Rightarrow u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n \theta + b_n r^{\lambda_n} \sin \lambda_n \theta)$$

اکنون شرایط مرزی را جایگذاری می‌کنیم:

$$u(1, \theta) = r \sin \theta + \cos \theta \sin \theta = r \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \Rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n \theta + b_n \sin \lambda_n \theta) = r \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}$$

با توجه به دامنه $-\pi < \theta \leq \pi$ داریم: $\lambda_n = n$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_1 = r \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ b_n = 0 \quad n \neq 1, 2 \end{cases} \Rightarrow u(r, \theta) = r \sin \theta + \frac{r^2}{2} \sin 2\theta \Rightarrow \frac{u}{\sin \theta} = r + \frac{r^2 \sin 2\theta}{2 \sin \theta} = r + r^2 \cos \theta$$

$$u = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

حل تستی: فرم پاسخ مسئله باید به شکل مقابل باشد:

طبق چهار گزینه فرم u را به دست می‌آوریم و با فرم استاندارد مقایسه می‌کنیم:

$$u = r \sin \theta + \frac{1}{2} r^2 \cos \theta \sin \theta = r \sin \theta + \frac{1}{4} r^2 \sin 2\theta \quad \times \quad (۱)$$

$$u = r \sin \theta + \frac{1}{2} r \cos \theta \sin \theta = r \sin \theta + \frac{1}{4} r \sin 2\theta \quad \times \quad (۲)$$

$$u = r \sin \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta = r \sin \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \quad \checkmark \quad (۳)$$

$$u = r \sin \theta \cos(Lnr) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos(rLnr) \quad \times \quad (۴)$$

۹- گزینه «۲» فرم کلی جواب به صورت مقابل است:

$$u_{(r,\theta)} = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum (c_n r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$u_{\theta}(r, \pm \frac{\pi}{r}) = 0 \Rightarrow \sum (c_n r^n + d_n r^{-n})(-na_n \sin n\theta + b_n n \cos n\theta)|_{\theta = \frac{\pi}{r}, -\frac{\pi}{r}} = 0$$

$$\forall r \leq r \leq r$$

$$\begin{cases} -a_n \sin(\frac{n\pi}{r}) + b_n \cos(\frac{n\pi}{r}) = 0 & , \frac{\pi}{r} \\ a_n \sin(\frac{n\pi}{r}) + b_n \cos(\frac{n\pi}{r}) = 0 & , -\frac{\pi}{r} \end{cases} \Rightarrow a_n = b_n = 0 \Rightarrow u_{(r,\theta)} = a_0 + b_0 \ln(r)$$

$$\begin{cases} u_{(\circ/\Delta, \theta)} = -\pi \Rightarrow -\pi = a_0 + b_0 \ln(\circ/\Delta) \\ u_{(r, \theta)} = \pi \Rightarrow \pi = a_0 + b_0 \ln(r) \end{cases} \Rightarrow r\pi = b_0 \ln(r) \Rightarrow b_0 = \frac{r\pi}{\ln(r)}$$

$$\Rightarrow u(\frac{r}{r}, \frac{\pi}{r}) - u(\frac{r}{r}, \frac{\pi}{r}) = a_0 + b_0 \ln(\frac{r}{r}) - a_0 - b_0 \ln(\frac{r}{r}) = b_0 \ln(\frac{r}{r}) = \frac{r\pi}{\ln(r)} \ln(\frac{r}{r}) = r\pi \log_r(\frac{r}{r})$$

۱۰- گزینه «۳» ابتدا عبارت درون $\ln$ را به فرم $re^{i\theta}$ تبدیل می کنیم:

$$I = \ln\left(\frac{1+i\sqrt{r}}{1-i\sqrt{r}}\right)^r = \ln\left(\frac{re^{\frac{i\pi}{r}}}{re^{-\frac{i\pi}{r}}}\right)^r = \ln(e^{\frac{4\pi i}{r}})^r$$

برای اینکه بتوانیم عبارت را از $\ln$ خارج کنیم باید توان e در بازه شاخه اصلی یعنی $(-\pi, \pi]$ قرار گیرد.

$$I = \ln(e^{\frac{4\pi i}{r}})^r = \ln(e^{-\frac{4\pi i}{r}})^r = -\frac{r\pi i}{r}$$

۱۱- گزینه «۱» ابتدا بسط $\frac{1}{z^r \sinh(z)}$ را محاسبه می کنیم:

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow z^r \sinh(z) = z^r + \frac{z^{r+3}}{3!} + \frac{z^{r+5}}{5!} + \dots$$

اکنون بسط $\frac{1}{z^r \sinh(z)}$ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{1}{z^r + \frac{z^{r+3}}{3!} + \frac{z^{r+5}}{5!} + \dots} = \frac{1}{z^r} \left(1 - \frac{z^3}{3!z^r} + \left(\frac{z^3}{3!z^r} \right)^2 - \frac{z^5}{5!z^r} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^r} \left(1 - \frac{z^3}{3!z^r} + \frac{z^6}{(3!)^2 z^{2r}} - \frac{z^5}{5!z^r} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^r} \left(1 - \frac{z^3}{3!z^r} + \frac{z^6}{(3!)^2 z^{2r}} - \frac{z^5}{5!z^r} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^r} \left(1 - \frac{z^3}{3!z^r} + \frac{z^6}{(3!)^2 z^{2r}} - \frac{z^5}{5!z^r} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-r}^{\infty} |a_n| = 1 + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{7}{360} = \frac{427}{360}$$

۱۲- گزینه «۱» روش اول: با توجه به تحلیلی بودن تابع داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \cos x \cosh ay = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \frac{\cos x \sinh ay}{a} + g_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \Rightarrow a \sin x \sinh ay = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = a \cos x \sinh ay + g_2(y)$$

$$a = 1, g_1(x) = g_2(y) = 0$$

$$f(z) = \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y) = \sin z$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{r}(1+i)} f(z) dz = -\cos z \Big|_0^{\frac{\pi}{r}(1+i)} = -\sin\left(z + \frac{\pi}{r}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{r}(1+i)}$$

$$\Rightarrow I = \sin\left(0 + \frac{\pi}{r}\right) - \sin\left(\pi + \frac{i\pi}{r}\right) = 1 - \left[\sin \pi \cosh \frac{\pi}{r} + i(\cos \pi \sinh \frac{\pi}{r}) \right] = 1 - \left[0 + i(-1) \sinh \frac{\pi}{r} \right] = 1 + i \sinh \frac{\pi}{r}$$

بنابراین داریم:

لذا داریم:



روش دوم:

$$f(z) = \sin(x) \cos(ay) + i v(x, y)$$

$$y = 0 \Rightarrow \text{روی محور حقیقی: } f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(z) = \sin(z) \Rightarrow \sin(x + iy) = \sin x \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = [-\cos(z)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 + i \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{z+1}{z}} dz}{z} = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \right) \text{Res}\left(\frac{e^{\frac{z+1}{z}}}{z}\right) \Big|_{z=0} \Rightarrow I = \text{Res}\left(\frac{e^{\frac{z+1}{z}}}{z}\right) \Big|_{z=0}$$

۱۳- گزینه «۴» با استفاده از قضیه مانده‌ها داریم:

برای محاسبه مانده تابع از بسط تیلور استفاده می‌کنیم:

$$\frac{e^z \cdot e^{\frac{1}{z}}}{z} = \left(\frac{1}{z}\right) \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow I = \text{Res}\left(\frac{e^{\frac{z+1}{z}}}{z}\right) \Big|_{z=0} = 1 + 1 + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin(e^{i\theta}) \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin(e^{i\theta}) \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

۱۴- گزینه «۱» ابتدا عبارت درون انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(e^{i\theta}) \frac{(1 - \cos \theta)}{4} d\theta$$

با تغییر متغیر $\theta_1 = 2\theta$ داریم:اکنون تغییر متغیر $z = e^{i\theta_1}$ را اعمال می‌کنیم:

$$dz = ie^{i\theta_1} d\theta_1 = iz d\theta_1 \Rightarrow d\theta_1 = -iz^{-1} dz$$

$$\sin(e^{i\theta_1}) = \sin z, \cos \theta_1 = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\Rightarrow I = \oint_{|z|=1} \sin z \left(\frac{1 - \frac{z^2 + 1}{2z}}{4}\right) (-iz^{-1} dz) = \oint_{|z|=1} \frac{i(z-1)^2 \sin z dz}{4z^2}$$

با توجه به اینکه تنها قطب تابع در $z = 0$ واقع شده است، داریم:

$$I = 2\pi i \text{Res}(f(z)) \Big|_{z=0} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \cdot \frac{i(z-1)^2 \sin z}{4z^2} \right] = 2\pi i \left(\frac{i(-1)^2}{4} \right) \Rightarrow I = \frac{-\pi}{4}$$

۱۵- گزینه «۴» ابتدا فرمول کلی زیر را یادآوری می‌کنیم:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx = \text{Re} \left[2\pi i \left(\text{مجموع مانده‌های } f(z) e^{iaz} \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی هستند} \right) \right]$$

$$\text{بنابراین باید مانده‌های تابع } g(z) = \frac{z^2 e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \text{ را بیابیم.}$$

قطب‌های بالای محور $g(z)$ برابر $z_1 = i$ و $z_2 = 2i$ هستند.

$$\begin{cases} \text{Res}(g(z)) \Big|_{z=i} = \frac{(i)^2 e^{-1}}{2i(3)} = \frac{i}{6e} \\ \text{Res}(g(z)) \Big|_{z=2i} = \frac{(2i)^2 e^{-2}}{(-3)(4i)} = \frac{i}{-3e^2} \end{cases} \Rightarrow I = \text{Re} \left[2\pi i \left(\frac{i}{6e} - \frac{i}{3e^2} \right) \right] = \frac{2\pi}{3e^2} - \frac{\pi}{3e} = \frac{\pi}{3} (2e^{-2} - e^{-1})$$

۱۶- گزینه «۳» رابطه ضخامت لایه مرزی برای جریان آرام به صورت $\delta = \frac{\Delta x}{\sqrt{Re_x}}$ و برای جریان درهم به صورت $\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{1/2}}$ است. سرعت جدید نسبت به محور x به صورت $V_x = U \times \cos \alpha$ تعیین خواهد شد و به دلیل آنکه زاویه ایجاد شده در جهت جریان بین صفر و $\frac{\pi}{4}$ است، پس سرعت جدید کمتر از سرعت اصلی خواهد بود. با توجه به تعریف عدد رینولدز به صورت $Re_x = \frac{\rho V_x d}{\mu}$ ، بنابراین مقدار عدد رینولدز کاهش می‌یابد و با توجه به رابطه ابتدایی بیان شده و رابطه عکس ضخامت لایه مرزی با عدد رینولدز، مقدار ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد.

رابطه نیروی وارد شده بر سطح به صورت $F_L = C_L \frac{\rho V_x^2}{2} A$ است. با توجه به آنکه با تغییر زاویه، سرعت کاهش می‌یابد، بر اساس این رابطه، مقدار نیروی وارد شده بر سطح نیز کاهش می‌یابد.

۱۷- گزینه «۴» رابطه تغییرات فشار نسبت به ارتفاع به صورت $\int_{P_1}^P \frac{dP}{\rho} = -g(z_2 - z_1)$ است. در صورتی که سیال تراکم ناپذیر باشد، چگالی (ρ) ثابت بوده و رابطه فوق به صورت $P_2 - P_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$ تبدیل می‌شود. در این حالت، افزایش ارتفاع به معنای کاهش فشار است. در صورتی که سیال تراکم‌پذیر باشد، رابطه بالا صادق نبوده و نیاز به داشتن رابطه تغییرات چگالی نسبت به فشار است و بر همین اساس نمی‌توان بدون داشتن این رابطه اظهار نظر قطعی کرد.

۱۸- گزینه «۲» رابطه تنش برشی برای دو صفحه موازی افقی و در شرایطی که یک صفحه با سرعت ثابت V کشیده شود به صورت مقابل است. $\tau = \frac{\mu V}{a}$ با توجه به آنکه دو سطح با سرعت مساوی و در خلاف جهت در حال حرکت است، می‌توان فرض کرد که یک صفحه ثابت و صفحه دیگر با سرعت ۲V در حال کشیده شدن است. پس تنش برشی وارده برابر است با:

برای تعیین توان می‌توان از رابطه $P = \tau \times \dot{Q}$ استفاده کرد که در این رابطه $\dot{Q}$ دبی حجمی عبوری از بین دو سطح است. بر اساس سطح مقطع و سرعت حرکت سیال، رابطه دبی حجمی به صورت $\dot{Q} = V \times A$ است. در این شرایط نیز به دلیل سرعت یکسان و مخالف دو صفحه، و با توجه به آنکه $A = 1m^2$ است، دبی حجمی برابر است با $\dot{Q} = 2V$. با قرار دادن این رابطه و رابطه تنش برشی در رابطه توان داریم:

$$P = \tau \times \dot{Q} = \frac{\mu V}{a} \times 2V = \frac{2\mu V^2}{a}$$

۱۹- گزینه «۱» لزجت عامل اصلی انتقال مومنتوم بین لایه‌های سیال بوده و زمانی ظاهر می‌شود که بین لایه‌های سیال حرکت نسبی وجود داشته باشد. بر اساس این تعریف، نیروی برشی ناشی از لزجت سیال از بوجود آمدن اغتشاشات جریان جلوگیری کرده و باعث مستهلک شدن آن می‌شود. نیروی اینرسی خاصیتی از جسم است که در برابر تغییر سرعت و یا تغییر جهت حرکت مقاومت می‌کند. بر اساس این تعریف، نیروی اینرسی باعث ناپایداری حرکت سیال می‌شود.

۲۰- گزینه «۱» در مختصات استوانه، برای سیال تراکم‌ناپذیر، رابطه زیر صادق است.

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

با توجه به آنکه در این سؤال، تنها تغییرات سرعت در جهت θ نسبت به r وجود دارد و سرعت در سایر جهات صفر است و همچنین با فرض steady state

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{بودن جریان، } g_\theta = 0 \text{ و } \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \text{ داریم:}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} = C_1' r \Rightarrow ru_\theta = C_1' \frac{r^2}{2} + C_2' \Rightarrow u_\theta = C_1' \frac{r}{2} + \frac{C_2'}{r} = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

حال با انتگرال‌گیری رابطه فوق داریم:

۲۱- گزینه «۲» در جریان آرام، رابطه ضخامت لایه مرزی به صورت $\delta = \frac{\Delta x}{\sqrt{Re_x}}$ بوده و در جهت جریان، ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد. با توجه به

$$\text{رابطه تنش برشی به صورت } \tau = \mu \frac{dV}{dy} \text{، در جهت جریان، ضخامت لایه مرزی افزایش و در نتیجه } \frac{dV}{dy} \text{ کاهش و تنش برشی نیز کاهش می‌یابد.}$$



۹- فرض کنید $f(z) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} + i v(x, y)$ ، به‌ازای $z \neq -1$ تحلیلی باشد. مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۰- مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\pi + 2i)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ، کدام است؟

- (۱) $-i \sinh(2)$ (۲) $i \sinh(2)$ (۳) $i \sin(2)$ (۴) سری واگرا است.

۱۱- مانده $f(z) = e^z \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$ حول نقطه $z = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2!}$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2!}$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{((2n+1)!)^2}$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{((2n)!)^2}$

۱۲- ضریب z^n در سری لوران $f(z) = \sin(z + \frac{1}{z})$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2 \cos \theta) \cos(n\theta) d\theta$ (۲) $\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2 \cos \theta) \cos(n\theta) d\theta$

- (۳) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(2 \cos \theta) \cos(n\theta) d\theta$ (۴) $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2 \cos \theta) \cos(n\theta) d\theta$

۱۳- مقدار $\oint_{|z|=1} \frac{\tanh(z+1)}{e^z \sin(z)} dz$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $2\pi i \tanh(1)$ (۳) $2\pi i \tanh(2)$ (۴) $4\pi i \tanh(2)$

۱۴- مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi x) dx}{x^2 + 2x + 2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} (\cosh(2\pi) - 1)$ (۲) $\frac{\pi}{2} (\cosh(2\pi) + 1)$ (۳) $\frac{\pi (e^{2\pi} - 1)}{2e^{2\pi}}$ (۴) $\frac{\pi (e^{2\pi} + 1)}{2e^{2\pi}}$

۱۵- نقش تصویر منحنی $|z+1|=1$ توسط نگاشت $w = \frac{z+1}{2iz}$ ، کدام است؟ $(w = u + iv \text{ و } z = x + iy)$

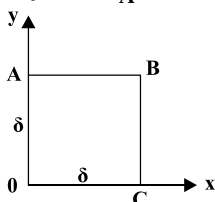
- (۱) $v = -\frac{1}{4}$ (۲) $u = -\frac{1}{2}$ (۳) $-3u + 2v = 0$ (۴) $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مکانیک سیالات پیشرفته - ترمودینامیک پیشرفته

۱۶- در المان سیال، اندازه سرعت‌ها داده شده است. آهنگ زمانی تغییر زاویه این المان سیال کدام مورد می‌باشد؟

$$U_0 = 0, U_A = 2, U_B = 2, U_C = U_B$$

$$V_0 = 0, V_A = 0, V_B = 2, V_C = V_B$$



- (۱) $\frac{3}{\delta}$ (۲) $\frac{5}{\delta}$

- (۳) $\frac{2}{\delta}$ (۴) $\frac{1}{\delta}$

۱۷- در تقریب بوزینسک (فرض بوزینسک)، چگالی در کدام جمله (ها) را به‌ترتیب، ثابت و در کدام جمله (ها) متغیر در نظر می‌گیریم؟

- (۱) جابه‌جایی - مربوط به شتاب ثقل و ناپایایی
(۲) مربوط به شتاب ثقل - ناپایایی جابه‌جا
(۳) ناپایایی - جابه‌جایی و مربوط به شتاب ثقل
(۴) ناپایایی و جابه‌جایی - مربوط به شتاب ثقل

۱۸- در دوران جسم جامد (صلب) سیال، کدام مورد درست است؟

- (۱) سطوح فشار ثابت به‌شکل هذلولی است.
(۲) تنش‌های لزج غیر صفر است و معادلات اولر لزج به‌کار می‌رود.
(۳) تنش‌های لزج صفر است و معادلات اولر غیرلزج به‌کار می‌رود.
(۴) رابطه برنولی برای نقاط روی خطوط جریان مختلف ثابت است.

کدام ۱۹- برای حل انتگرالی جریان در لایه مرزی بر روی صفحه تخت با گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial x}$ ، پروفیل مرتبه سوم (درجه ۳) حدس زده شده است. کدام

مورد، پروفیل صحیح جریان را نشان می‌دهد؟

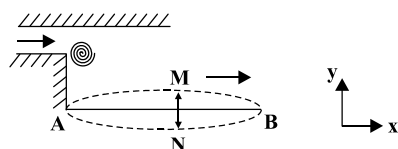
$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{4u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (۱)$$

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{4u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (۲)$$

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta^2}{2u_{\infty}^2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (۳)$$

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (۴)$$

کدام ۲۰- در کانال با پله وارون سازگار با شکل، سطح AB در امتداد محور y نوسان می‌کند. کدام مورد در خصوص اندازه گردابه ANB یا AMB درست است و فشار در مقطع خروجی چه تغییری می‌کند؟



(۱) ANB، گردابه کوچک - افزایش می‌یابد.

(۲) ANB، گردابه بزرگ - افزایش می‌یابد.

(۳) AMB، گردابه کوچک - کاهش می‌یابد.

(۴) AMB، گردابه بزرگ - افزایش می‌یابد.

کدام ۲۱- پروفیل سرعت جریان بین دو صفحه موازی با فاصله H که صفحه بالایی با سرعت U_0 حرکت داده می‌شود به فرم $u = \frac{U_0 y}{H}$ است، کدام مورد

در خصوص میزان ورتیسیتهی این جریان صحیح است؟

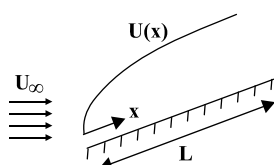
(۱) میزان ورتیسیتهی در همه جریان ثابت و برابر با $\frac{-U_0}{H}$ است.

(۲) ماکزیمم ورتیسیته روی دیواره بالایی با مقدار $\frac{U_0}{H}$ روی می‌دهد.

(۳) ماکزیمم ورتیسیته در نقطه ماکزیمم تنش برشی در جریان روی می‌دهد.

(۴) ورتیسیته به صورت خطی از مقدار صفر تا $\frac{-U_0}{H}$ روی دیواره بالایی متغیر است.

کدام ۲۲- در جریان سیال بر روی یک جسم خاص، سرعت جریان آزاد از رابطه $U(x) = U_{\infty} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$ پیروی می‌کند. در مورد چنین جریانی، اگر L به



اندازه کافی بزرگ باشد، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

(۱) امکان وقوع جدایش لایه مرزی وجود ندارد.

(۲) گرادیان فشار مساعد در مسئله برقرار است.

(۳) جدایش لایه مرزی به وقوع خواهد پیوست.

(۴) در درون لایه مرزی تنش برشی بر روی جسم ثابت خواهد بود و با X تغییر نمی‌کند.

کدام ۲۳- صفحه‌ای به طول ۲ متر و عرض یک متر در جریان بادی قرار دارد. برای اینکه حداقل نیروی پسا روی صفحه اعمال شود، بهتر است صفحه چگونه قرار گیرد؟

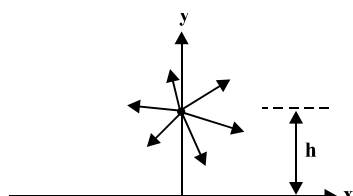
(۱) موازی جریان باد و عرض آن در جهت باد

(۲) موازی جریان باد و عرض آن در جهت باد

(۳) عمود بر جریان باد و عرض آن موازی افق

(۴) عمود بر جریان باد و عرض آن موازی افق

کدام ۲۴- یک چشمه به قدرت m در فاصله h از یک دیوار قرار گرفته است. کدام مورد معرف فشار در امتداد دیوار ($P(x=0)$) است؟ (ρ چگالی، P_0 فشار در دور دست)



$$P_0 - \frac{\rho m^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + h^2)^2} \quad (۲) \quad P_0 + \frac{\rho m^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + h^2)^2} \quad (۱)$$

$$P_0 - \frac{\rho m^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + h^2)^2} \quad (۴) \quad P_0 - \frac{\rho m^2 x^2}{\pi^2 (x^2 - h^2)^2} \quad (۳)$$

مکانیک سیالات پیشرفته - ترمودینامیک پیشرفته

۱۶- گزینه «۲» برای حل این مسئله باید آهنگ زمانی تغییر زاویه یا همان نرخ چرخش (rotation rate) از طریق روابط سینماتیکی محاسبه شود. در المان مربعی ABCD با ابعاد δ ، آهنگ تغییر زاویه بین دو ضلع عمود (مثل زاویه $\angle ADB$) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{Rate of rotation} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

در اینجا باید مشتقات جزئی سرعت‌ها از روی داده‌های نقاط A و B و C بدست آید. بین نقاط A و B که اختلاف x به اندازه δ است و بین نقاط A و C که اختلاف y به اندازه δ است، روابط مقابل صادق است.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_B - v_A}{\delta} = \frac{3 - 0}{\delta} = \frac{3}{\delta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_A - u_D}{\delta} = \frac{2 - 0}{\delta} = \frac{2}{\delta}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\delta} - \frac{2}{\delta} \right) = \frac{1}{2\delta}$$

حال محاسبه نرخ چرخش (آهنگ زمانی تغییر زاویه)، به صورت مقابل تعیین می‌شود.

هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست ولی ممکن است هدف طراح، تغییر زاویه بین دو ضلع باشد که مربوط به تنش برشی و نرخ کرنش برشی است، در این شرایط بر اساس رابطه مقابل داریم:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{\delta} + \frac{3}{\delta} = \frac{5}{\delta}$$

۱۷- گزینه «۴» در تقریب بوزینسک (Boussinesq Approximation)، فرضیات زیر اعمال می‌شود:

- چگالی (ρ) در تمام معادلات ثابت در نظر گرفته می‌شود، به جز جمله‌ای که مربوط به شتاب ثقل (گرادیان فشار ناشی از نیروی شناوری) است. این به معنای آن است که تغییرات چگالی فقط در جمله نیروی شناوری (ناشی از اختلاف دما یا غلظت) تأثیرگذار است و در سایر بخش‌های معادلات (مانند معادله پیوستگی و معادله مومنتوم) چگالی ثابت فرض می‌شود.

- چگالی فقط در جمله مربوط به شتاب ثقل (معمولاً در عبارت نیروی شناوری) متغیر در نظر گرفته می‌شود. بر اساس توضیحات فوق، گزینه (۴) صحیح است. گزینه (۱) نادرست است، زیرا جابه‌جایی و ناپایداری هر دو معمولاً تحت تأثیر چگالی ثابت قرار می‌گیرند. گزینه (۲) نیز نادرست است، زیرا جمله مربوط به شتاب ثقل تنها جایی است که چگالی متغیر در نظر گرفته می‌شود. گزینه (۳) نیز نادرست است، زیرا جابه‌جایی معمولاً با چگالی ثابت مدل می‌شود.

۱۸- گزینه «۳» در دوران جسم صلب سیال (یعنی حالتی که سیال به صورت صلب می‌چرخد، مانند یک بشکه آب که به صورت یکنواخت می‌چرخد)، همه ذرات سیال با سرعت زاویه‌ای یکسان حول محور دوران حرکت می‌کنند (بدون تغییر شکل موضعی). بنابراین، هیچ گرادیان سرعتی درون سیال وجود ندارد و تنش‌های لزج صفر هستند. در این حالت چون اثرات لزجیتی بی‌معناست، از معادلات اولر غیرلزج استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که رابطه برنولی تنها روی یک خط جریان صادق است، نه بین خطوط مختلف. همچنین سطوح فشار ثابت به صورت سطوح سهموی (Paraboloid) هستند، نه هذلولی.

۱۹- گزینه «۲» بررسی گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۴): برای حل این پرسش، ابتدا باید بدانیم که در حل انتگرالی لایه مرزی از یک تابع فرضی (پروفیل سرعت) برای $u(y)$ استفاده می‌شود. در حالت کلی، وقتی گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial x}$ وجود دارد، پروفیل سرعت باید تابعی از این گرادیان باشد، پس گزینه (۴) نادرست است. بررسی گزینه (۳): برای استفاده از روش انتگرالی، پروفیل سرعت مرتبه سوم (درجه ۳) به صورت مقابل حدس زده می‌شود:

$$\frac{u}{u_\infty} = a \left(\frac{y}{\delta} \right) + b \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + c \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

در حل‌های کلاسیک، این ضرایب (a، b و c) تابعی از گرادیان فشار (یا به عبارتی از پارامتر مشابه گرادیان فشار) هستند. بر اساس این رابطه، گزینه (۳) نیز نادرست است.

بررسی گزینه (۱): گزینه (۱) در ظاهر بعدیابی درسته، اما از نظر رفتار فیزیکی در مرز $y = \delta$ نمی‌تواند همیشه $u = u_\infty$ را تضمین کند. در نتیجه یک

$$y = \delta \Rightarrow u = \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\delta^2}{4u_\infty v} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\delta^2}{4u_\infty v} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\delta^2}{4u_\infty v} \right) \right] u_\infty > u_\infty$$

پروفیل عمومی قابل استفاده در تحلیل انتگرالی نیست.

بنابر توضیحات فوق گزینه (۲)، صحیح می‌باشد.

۲۰- گزینه «۳» گردابه ANB در ناحیه پایین دست پله وارون تشکیل می‌شود. به دلیل تقسیم جریان و جدایش، این گردابه معمولاً بزرگ‌تر است. اندازه آن تحت تأثیر نوسانات سطح AB قرار می‌گیرد، اما همچنان بزرگ باقی می‌ماند. گردابه AMB در ناحیه بالادست پله وارون تشکیل می‌شود. به دلیل محدودیت فضایی و تأثیر مستقیم نوسانات سطح AB، این گردابه معمولاً کوچک‌تر است.

با شکل‌گیری گردابه‌ها و تغییرات جریان، فشار در خروجی دستخوش تغییر می‌شود. اگر گردابه بزرگ‌تر باشد، احتمالاً افت فشار بیشتری در جریان ایجاد شده و فشار خروجی کاهش می‌یابد. اگر گردابه کوچک‌تر باشد، تغییرات فشار کمتر خواهد بود و ممکن است فشار افزایش یا کاهش یابد. بر اساس توضیحات فوق، گزینه (۳) (AMB)، گردابه کوچک و فشار در مقطع خروجی کاهش می‌یابد) صحیح است.

۲۱- گزینه «۱» برای محاسبه ورتیسیته (Vorticity)، از رابطه مقابل استفاده می‌شود.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

در این سؤال، $v = 0$ بوده، پس $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ است. همچنین بر اساس صورت سؤال، $u = \frac{U_0 y}{H}$ بوده، پس $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{H}$ است. بر اساس این مقادیر، میزان ورتیسیته برابر $\omega_z = -\frac{U_0}{H}$ است. این مقدار در همه نقاط جریان ثابت و منفی است.

۲۲- گزینه «۳» رابطه داده شده نشان می‌دهد که سرعت جریان با X کاهش می‌یابد، یعنی گرادیان فشار منفی است. اگر L خیلی بزرگ باشد، تغییرات سرعت با X بسیار کم خواهد بود. کاهش سرعت ممکن است باعث شود لایه مرزی دچار جدایش شود، پس گزینه (۱) صحیح نیست. گرادیان فشار مساعد در مسئله برقرار نیست، زیرا سرعت در راستای X کاهش می‌یابد، بنابراین گرادیان فشار نامساعد است، پس گزینه (۲) نیز نادرست است. چون سرعت کاهش می‌یابد و احتمالاً نیروی لزجت نمی‌تواند در برابر گرادیان فشار مقاومت کند، لذا جدایش لایه مرزی رخ خواهد داد، پس گزینه (۳) صحیح است. به دلیل آنکه $U(x)$ تابعی از X است، بنابراین سرعت لایه مرزی ثابت نخواهد بود و با X تغییر می‌کند، پس گزینه (۴) نیز نادرست است.

۲۳- گزینه «۲» برای کاهش حداقل نیروی پسا (درگ) روی یک صفحه صاف در جریان باد، باید سطح مقطع مؤثر روبه‌روی جریان باد را کاهش دهیم، یعنی صفحه را طوری قرار دهیم که کمترین سطح روبه‌روی جریان باد قرار گیرد. اگر صفحه موازی با جریان باد قرار گیرد، نیروی درگ بسیار کاهش می‌یابد. در این حالت، فرقی نمی‌کند طول یا عرض در جهت باد باشد، چون هر دو در حالت موازی سطح مؤثر روبه‌روی جریان را به صفر نزدیک می‌کنند، اما از نظر جزئی، جریان لایه مرزی بهتر توسعه می‌یابد اگر طول صفحه در جهت باد باشد.

۲۴- گزینه «۴» برای حل این مسئله، ابتدا باید تأثیر چشمه به قدرت m در فاصله h از دیوار بررسی شود. حضور دیوار می‌تواند با استفاده از روش تصویر (Image Method) مدل شود، یعنی یک چشمه مشابه با قدرت m در فاصله h در طرف دیگر دیوار قرار می‌گیرد. این دو چشمه با هم یک جریان پتانسیل را ایجاد می‌کنند که شرط مرزی عدم نفوذ (عمودی بودن سرعت) روی دیوار برای آن صادق است. پتانسیل سرعت ناشی از دو چشمه در نقطه (X, y) به صورت مقابل است.

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln \left(\sqrt{x^2 + (y-h)^2} \right) + \frac{m}{2\pi} \ln \left(\sqrt{x^2 + (y+h)^2} \right)$$

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln(x^2 + h^2)$$

روی دیوار ($y = 0$)، پتانسیل سرعت به صورت مقابل ساده می‌شود:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{2x}{x^2 + h^2} = \frac{mx}{\pi(x^2 + h^2)}$$

$$P + \frac{1}{2} \rho u^2 = P_0$$

حال از معادله برنولی برای جریان پایدار و غیرلزج داریم:

که در آن P_0 فشار در دوردست (جایی که سرعت صفر است) می‌باشد. با جایگذاری رابطه سرعت (u) در رابطه فوق داریم:

$$P = P_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{mx}{\pi(x^2 + h^2)} \right)^2 = P_0 - \frac{\rho m^2 x^2}{2\pi^2 (x^2 + h^2)^2}$$

۲۵- گزینه «۳» در مکانیک محیط پیوسته، فرض می‌شود که ماده پیوسته است و خواص آن در هر نقطه به صورت پیوسته تعریف می‌شود. این فرض در مقیاس ماکروسکوپی برقرار است. اما اگر ابعاد جسم با مقیاس مولکولی یا میکروسکوپی قابل مقایسه باشد، این فرض دیگر معتبر نیست. عدد بی‌بعدی که سنجش پیوستگی را انجام می‌دهد، عدد نادسن (Knudsen number) است. کاربرد عدد بدون بعد فرود در جریان‌های سطح آزاد (مثل رودخانه‌ها، سرریز سد، موج‌ها و ...) است. این عدد معیاری است برای مقایسه بین نیروی اینرسی و نیروی گرانش. عدد اشتروال برای تحلیل پدیده‌های ناپایدار (unsteady) در جریان سیال به کار می‌رود. این عدد بیانگر نسبت فرکانس نوسان به مقیاس سرعت و طولی است. عدد رینولدز برای تعیین نوع جریان (آرام یا آشسته) استفاده می‌شود و بیانگر نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت است.