مدرسان شریف

فصل اول

«کلیات تحقیق در عملیات»

تاریخچه تحقیق در عملیات

اصل و اساس آغاز پیشرفت تحقیق در عملیات در طول جنگ جهانی دوم زمانی که ارتش انگلستان خود را با مشکلات استراتژیک مواجه دید، بر می‌گردد. شاید بتوان مبدأ پیدایش تحقیق در عملیات را به سال ۱۸۰۰ میلادی و کار تیلور دانست. در سال ۱۸۸۵، فردریک تیلور (Frederick W.Taylor) از روش‌های علمی به منظور تحلیل روش‌های ساخت و تولید استفاده کرد که مبدأ اصلی گسترش تحقیق در عملیات بود. تیلور تجارب خود را در ارتباط با یک بیل ساده به کار برد. هدف او پیدا کردن وزن مواد با بیل بود به طوری که تا حد ممکن بیشترین مقدار را با کمترین خستگی جابجا کند. بعد از آزمایش‌های زیاد با وزن‌های مختلف، او توانست مقدار بهینه مواد در هر بار استفاده از بیل را تعیین کند به طوری‌که بیشترین جابجایی مواد را در یک روز با کمترین خستگی داشته باشد. اولین انقلاب صنعتی تأثیر بسیار زیادی بر گسترش مدل‌های تحقیق در عملیات داشت. قبل از این انقلاب، بیشتر صنایع اندازه کوچکی داشتند و فقط کارکنان یدی را استخدام می‌کردند. ظهور و ورود ابزار ماشینی ـ جایگزینی ماشین با انسان ـ به عنوان منشأ قدرت و پیشرفت‌هایی که در حمل و نقل و ارتباطات حاصل شد موجب پیشرفت در صنعت گردید. در خلال جنگ جهانی دوم، ارتش انگلستان مشکلات دفاع زمینی و هوایی خود را به یک گروه تحقیقاتی متشکل از دانشمندان مختلف شامل فیزیکدان‌ها، روانشناسان، مهندسان، ریاضیدانان و غیره واگذار کرد تا بر روی مسائل تاکتیکی و استراتژیکی جنگ مطالعه کنند. بسیاری از مشکلات مطرح شده، مشکلات عملیاتی بودند. هدف این گروه تعیین موثرترین روش‌ها برای پیروزی در جنگ با توجه به منابع محدود ارتش بود. به کارگیری رادارهای جدید، تخصیص افراد نیروی هوایی انگلستان به مأموریت‌های مختلف و یافتن الگوهایی برای تشخیص زیردریایی‌های دشمن، قسمتی از کار این گروه تحقیقاتی بود. این گروه، در واقع اولین گروه یا تیم تحقیق در عملیات بودند.

نام تحقیق در عملیات ظاهراً بخاطر انجام تحقیقات بر روی عملیات نظامی پدیدار شده است. نتایج موفقیت‌آمیز اولین گروه تحقیق در عملیات باعث شد تا تیم‌ها یا گروه‌های تحقیق در عملیات دیگر، در قسمت‌های اداری ارتش انگلستان به وجود آیند. استفاده از گروه‌های تحقیق در عملیات به سرعت در غرب و به ویژه در ایالات متحده آمریکا گسترش یافت. هر چند علم تحقیق در عملیات در انگلستان پایه‌ریزی شد ولی بعداً آمریکا سردمدار اصلی گسترش این علم گردید. در آمریکا گروه‌های تحقیق در عملیات بر روی عملیات استراتژیک معادن، الگوهای جدید پرواز و برنامه‌ریزی طرح‌های دریایی کار کردند.

بلافاصله پس از جنگ، موفقیت گروه‌های تحقیق در عملیات در جنگ توجه مدیران صنعت را به خود جلب کرد که مشغول یافتن راه‌حل‌هایی برای مشکلاتشان بودند. استفاده از تحقیق در عملیات در صنعت در انگلستان و آمریکا در زمینه‌های گوناگون توسعه یافت. ترقی و پیشرفت تحقیق در عملیات در صنایع آمریکا، با ظهور انقلاب دوم صنعتی که موجب جایگزینی ماشین به جای انسان به عنوان منبع کنترل گردید، همراه بود. این انقلاب جدید حدود دهه ۱۹۴۰ میلادی آغاز شد، زمانی که کامپیوترهای الکترونیکی به صورت تجاری در دسترس قرار گرفتند. این مغزهای الکترونیکی قابلیت انجام محاسبات با سرعت بسیار بالا و امکان ذخیره‌سازی را داشتند. وجود کامپیوترهای دیجیتالی باعث رشد همه جانبه تحقیق در عملیات نشد، زیرا در تحقیق در عملیات، مسائل محاسباتی بسیار پیچیده‌ای وجود داشتند که در بسیاری از مواقع، کامپیوترهای دیجیتالی نیز نمی‌توانستند این مسائل را حل کنند.

امروزه ، تحقیق در عملیات در حوزه‌های بسیار وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بسیاری از مؤسسات آموزشی این موضوع تدریس می‌شود. رشد بی‌سابقه شرکت‌های مهندسی مشاور گواه بر افزایش استفاده از تحقیق در عملیات است. تحقیق در عملیات در حوزه‌هایی نظیر مدیریت بیمارستان‌ها، کتابخانه‌ها، برنامه‌ریزی شهری، سیستم‌های حمل و نقل، تحقیقات مربوط به جرایم و غیره به کار گرفته شده‌اند.

تعاریف تحقیق در عملیات

شاید چون موضوع تحقیق در عملیات نسبتاً جدید است نتوان آن را به طور کامل تعریف کرد. اما به هر شکل تعاریف زیادی از تحقیق در عملیات ارائه شده است. یک تعریف ساده عبارت است از تحقیق در مورد عملیاتی که باید در یک سازمان انجام شود.

برخی دیگر از تعاریف‌های پذیرفته شده عبارتند از:

۱ـ تحقیق در عملیات روش علمی و کمی برای یافتن مشکلات اجرایی بخش‌های مختلف یک سازمان و تصمیم‌گیری در ارتباط با عملیات تحت کنترل آن‌هاست (مورس و کیمبال Mors and Kimbal).

۲ـ تحقیق در عملیات به مفهوم کلی کاربرد روش‌های علمی، متدها و ابزارها برای حل مشکلات موجود در عملیات سیستم‌هاست به طوری که بتواند جواب بهینه برای مشکلات را با توجه به عملیات مختلف پیدا کند. (چرچمن، آکوف و آرنوف churchman , Ackoff and Arnoff)

مراحل تحقیق در عملیات (چگونگی کارکرد تحقیق در عملیات)

تحقیق در عملیات به مانند سایر علوم بر مبنای یک متدولوژی علمی قرار دارد که شامل مراحل زیر است:

۱ـ فرمول‌سازی مسئله
۲ـ ساختن مدلی که بیانگر سیستم مورد مطالعه است.
۳ـ حل مدل
۴ـ ارزیابی مدل و ارزیابی جواب‌های حاصل از آن
۵ـ کنترل جواب‌های بدست آمده
۶ـ اجرای مدل

قبل از طرح مدل‌های تحقیق در عملیات بهتر است تقسیم‌بندی زیر که بحث کلی‌تری است وارد شود:

روش‌های تصمیم‌سازی: ۱ـ روش آزمون و خطا ۲ـ روش مدل‌سازی

مدل‌های موجود تحقیق در عملیات

مدلی که در تحقیق در عملیات استفاده می‌شود، به صورت نمایشی وضعیت ایده‌آلی از جهانی واقعی را ارائه می‌دهد. این مدل یک یا چند جنبه از واقعیت را به معرض نمایش می‌گذارد. موارد مختلف مانند نقشه، نمودارهای چندگانه فعالیت، زندگی‌نامه، شبکه PERT، معادله نقطه سربه‌سر، ترازنامه و غیره، همه مدل هستند، زیرا هر کدام از آنها نمایانگر جنبه‌هایی از زندگی واقعی می‌باشند. مثلاً یک نقشه، مرزهای فیزیکی را نشان می‌دهد ولی ارتفاع محلهای مختلف نسبت به سطح دریا را نادیده می‌گیرد. هدف مدل، فراهم کردن ابزاری برای تحلیل رفتار سیستم به منظور بهبود عملکرد آن است.

مدل‌های احتمالی در مقابل مدل‌های غیر احتمالی

در مدل‌های قطعی، متغیرها به طور کامل تعریف می‌شوند و نتایج حاصله نیز معین هستند. قطعیت، وضعیت فرض شده این مدل‌هاست. آنها نمایانگر سیستم‌های تماماً بسته هستند و نتایج نیز مقادیری قطعی دارند. برای هر مجموعه از متغیرهای ورودی داده شده به سیستم، همیشه خروجی یکسانی به دست می‌آید. مدل EOQ (Economic order Quantity) یک مدل قطعی است که در آن اثر تغییر در اندازه سفارش بر روی هزینه کل معلوم است.

این مدلها در محیط‌های ریسک به کار برده می‌شوند. متغیرهای ورودی و یا خروجی به شکل تابع توزیع احتمال بیان می‌شوند. این مدل‌ها، مدل‌های نیمه بسته هستند و نمایانگر احتمال وقوع یک رویداد می‌باشند. بنابراین مدل‌های مذکور تا اندازه‌ای پیچیدگی جهان واقعی و عدم قطعیت موجود در آن را می‌توانند بیان کنند. به عنوان مثال، مدل هموارسازی نمایی برای پیش‌بینی تقاضا، یک مدل احتمالی است.

به طور کلی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، غیر خطی، آرمانی، حمل و نقل و تخصیص از جمله مدل‌های غیراحتمالی بوده و مدل‌های تئوری صف، تئوری بازی‌ها و شبیه‌سازی از جمله مدل‌های احتمالی می‌باشند.

انواع مدل‌های ریاضی

بسیاری از مدل‌های تحقیق در عملیات برای مسائل تجاری و صنعتی گسترش یافته و به کار گرفته شده‌اند. برخی از این مدلها عبارتند از:

۱ـ تکنیک‌های ریاضی
۲ـ تکنیک‌های آماری
۳ـ مدل‌های موجودی
۴ـ مدل‌های تخصیص
۵ـ مدل‌های توالی عملیات
۶ـ مدل‌های مسیریابی
۷ـ مدل‌های رقابتی
۸ـ مدل‌های صف
۹ـ مدل‌های برنامه‌ریزی پویا
۱۰ـ تکنیک‌های شبیه‌سازی
۱۱ـ تئوری تصمیم
۱۲ـ مدل‌های جایگزینی
۱۳ـ مدل‌های حسی
۱۴ـ برنامه‌ریزی آرمانی
۱۵ـ تئوری قابلیت اطمینان
۱۶ـ تجزیه و تحلیل مارکوف
۱۷ـ روش‌های ترکیبی

مدرسان شریف

فصل دوم

« اصول و فرضیات برنامه‌ریزی خطی »

مقدمه

یک مدل برنامه‌ریزی خطی عبارت است از یک تابع هدف خطی همراه با مجموعه‌ای از محدودیت‌های خطی مساوی یا نامساوی. تابع هدف می‌تواند به صورت تابع سود، زیان، هزینه، ظرفیت تولید یا هر معیار دیگری از کارایی باشد که باید بهینه‌ترین و بهترین راه برای آن در نظر گرفته شود. در بعضی مواقع برای بهینه شدن باید مقدار تابع هدف در کمترین مقدار خود قرار گیرد. برای نمونه می‌توان تابع هزینه را نام برد که در مسائل بهینه‌سازی می‌خواهیم آن را کمینه کنیم. برخی مواقع برعکس، می‌خواهیم مقدار تابع هدف در بیشترین مقدار خود قرار گیرد. مثلاً در یک کارخانه برای تولید یک قطعه، اگر هدف کسب حداکثر سود باشد قصد ما این است که تابع سود را ماکزیمم کنیم. محدودیت‌ها می‌توانند به صورت منابع مختلف نظیر تقاضای بازار، فرآیند تولید، تجهیزات، ظرفیت انبار، موجودی مواد اولیه و غیره بیان شوند. در واقع میزان دسترسی ما به منابع مختلف محدود است و باید مثلاً در تولید یک قطعه تولیدی، با در نظر گرفتن این منابع محدود میزان سود خود را بهینه کنیم. برای مثال ممکن است در یک کار تولیدی به ما گفته شود محدودیت بودجه وجود دارد که این محدودیت بودجه باعث می‌شود نتوانیم به اندازه کافی ماده اولیه تهیه کنیم. در واقع در مسئله بهینه‌سازی قصد داریم حداکثر استفاده از منابع محدود را در جهت بهینه کردن هدف (مثلاً ماکزیمم کردن سود)، ببریم. خطی بودن به معنی آن است که متغیرها فقط توان یک در رابطه‌های ریاضی دارند. یعنی، استفاده از منابع به طور خطی در رابطه‌های ما تأثیر دارد. به طور مثال اگر خرید یک واحد از یک ماده اولیه، ۱۰ واحد هزینه داشته باشد و ۵۰ واحد از این ماده اولیه خریده باشیم، باید هزینه $۵۰۰ = ۵۰\times۱۰$ واحد پرداخت کرده باشیم و به ازای خرید بیشتر تخفیف نمی‌گیریم به طور کلی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی به ۲ صورت کانونی (متعارفی) و استاندارد مطرح هستند:

الف ــ فرم کانونی(متعارفی) مسئله بیشینه‌سازی:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\
&\text{s.t.}\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\ ,\ i=1,2,3,\dots,m\\
&x_j\ge 0\ ,\ j=1,2,3,\dots,n
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\text{Max}Z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n\\
&\text{s.t.}\ \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\le b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\le b_2\\
\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\le b_m\\
x_1\ge 0,x_2\ge 0,\dots,x_n\ge 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

۱ـ در این مدل سطر اول نشان‌دهنده تابع هدف است که با $\max Z$ نشان داده می‌شود و بوسیله آن مقدار Z را ماکزیمم می‌کنیم. سطرهای بعدی یعنی m سطر بعد، محدودیت منابع مختلف را نشان می‌دهند و محدودیت‌های $x_j\ge 0$ نیز نشان‌دهنده نامنفی بودن متغیرهای تصمیم‌گیری است.

۲ـ x_j: متغیر تصمیم jام است که می‌تواند میزان تولید، خرید و هر چیزی باشد که قصد داریم کمترین هزینه و یا بیشترین سود را در رابطه با آن داشته باشیم.

۳ـ c_j ضرایب تابع هدف است. بدین معنی که مثلاً در یک تابع ماکزیمم‌سازی هر واحد منبع jام، به اندازه c_j واحد سود را به سازمان تزریق می‌کند.

۴ـ a_{ij} ضرایب فنی نامیده می‌شود. این ضرایب میزان استفاده منبع jام در محدودیت i ام را نشان می‌دهد.

۵ـ b_i حداکثر مقدار منبع iام می‌باشد که در اختیار است. مثلاً ممکن است در مساله‌ای بگویند حداکثر منابع مالی موجود ۱۰۰۰۰ریال است.

۶ـ در فرم کانونی هرجا تابع هدف ماکزیمم‌سازی بود، محدودیت‌ها باید به صورت $\le$ تعریف شوند و هرجا تابع هدف مینیمم سازی بود، محدودیت‌ها باید به صورت $\ge$ تعریف شوند و متغیرها باید به صورت نامنفی باشند.

ب ــ فرم کانونی(کمینه‌سازی): شکل فرم کانونی مسئله مینیمم‌سازی مشابه مسئله ماکزیمم سازی است ولی تابع هدف به صورت MinZ و محدودیت‌ها به صورت بزرگتر مساوی تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\operatorname{Min}Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\&\text{s.t.}\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i\ ,\ i=1,2,3,\dots,m\\&x_j\ge 0\ ,\ j=1,2,3,\dots,n\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\operatorname{Min}Z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\ge b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\ge b_m\\ x_i\ge 0\\ x_j\ge 0\ ,\ j=1,2,3,\dots,n\end{cases}\end{aligned}$$

ج ــ فرم استاندارد: فرم استاندارد یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}(\operatorname{Min})Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\&\text{s.t.}\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ ,\ i=1,2,3,\dots,m\\&x_j\ge 0\ ,\ j=1,2,3,\dots,n\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\operatorname{Min}/\operatorname{Max}Z=c_1x_1+\dots+c_nx_n\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_n\\ x_1\ge 0,x_2\ge 0,\dots,x_n\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

برای حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس، حتماً باید مدل را به فرم استاندارد تبدیل نمود. خصوصیات شکل استاندارد یک مدل برنامه‌ریزی خطی عبارت است از:

۱ـ لازم است تمام محدودیت‌ها، به جز شرط نامنفی بودن متغیرها، به صورت مساوی بیان شوند.

۲ـ لازم است سمت راست تمام معادلات نامنفی باشند (یعنی $b_i\ge 0\ ,\ i=1,2,3,\dots,m$).

۳ـ لازم است تمام متغیرهایی که در مسئله وجود دارند نامنفی باشند.

۴ـ هیچ محدودیتی در این شکل برای تابع هدف متصور نیست، به این معنی که تابع هدف هم می‌تواند به شکل حداکثرسازی و هم به شکل حداقل‌سازی باشد.

محدودیت‌های از نوع کوچکتر یا مساوی (بزرگتر یا مساوی) را می‌توان با اضافه کردن (کم کردن) یک متغیر جدید نامنفی به سمت چپ محدودیت‌ها، به شکل مساوی درآورد. متغیری را که به سمت چپ یک محدودیت کوچکتر یا مساوی (بزرگتر یا مساوی) اضافه (کم) می‌شود تا محدودیت مزبور به شکل مساوی تبدیل شود، متغیر کمبود (Slack) ((مازاد(Surplus)) می‌نامند. متغیر کمبود به این معنی است که با اضافه شدن آن به سمت چپ محدودیت کوچکتر یا مساوی، کمک می‌کند تا سمت چپ محدودیت مزبور مساوی مقدار سمت راست آن شود. در محدودیت‌های بزرگتر یا مساوی، سمت چپ محدودیت همواره بزرگتر یا مساوی سمت راست آن است و لذا لازم است مقدار مثبتی از سمت چپ کم شود تا مساوی سمت راست گردد. به مقدار مثبتی که از سمت چپ این محدودیت کم می‌شود و قاعدتاً مازاد سمت راست آن است اصطلاحاً متغیر مازاد می‌گویند. در واقع متغیر مازاد، منفی متغیر کمبود است. کلاً این دو متغیرها را متغیرهای تبدیل کننده (کمکی) می‌نامند. از لحاظ حل مسائل برنامه‌ریزی خطی این دو متغیر با هم تفاوت‌هایی دارند که بعداً شرح داده می‌شوند.

برای مثال محدودیت $a_1x_1+a_2x_2\le b$ که در آن b نامنفی است را در نظر بگیرید. محدودیت مزبور را با اضافه کردن متغیر نامنفی s_1 به سمت چپ آن می‌توان به صورت $a_1x_1+a_2x_2+S=b$ تبدیل کرد. تبدیل $a_1x_1+a_2x_2\le b$ به $a_1x_1+a_2x_2+s=b$ را می‌توان این گونه توضیح داد که $a_1x_1+a_2x_2$ مقداری کمتر یا مساوی b دارد، به همین دلیل علامت به صورت $\le$ نوشته شده است. حال اگر این مقدار کمبود را به آن اضافه کنیم، یعنی s را به صورت $s=b-(a_1x_1+a_2x_2)$ تعریف کرده و به سمت چپ نامعادله اضافه کنیم، نامعادله تبدیل به معادله می‌گردد، یعنی دو طرف معادله، با همدیگر مساوی می‌شوند. پس می‌توان نوشت $a_1x_1+a_2x_2+s=b$. محدودیت به شکل $\ge$ را نیز می‌توان به همین صورت تحلیل کرد.

همچنین محدودیت $p_1x_1+p_2x_2\ge q$ را با کم کردن متغیر نامنفی مازاد s_2 از سمت چپ آن می‌توان به صورت $p_1x_1+p_2x_2-s_2=q$ درآورد. مقادیر s_1 و s_2 به مقدار متغیرهای اصلی مسئله، یعنی x_1 و x_2 و همچنین p و q بستگی دارد که با توجه به سایر معادلات به دست می‌آیند.

مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی خطی

برای مدل‌سازی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی ابتدا باید هدف مسأله را تعیین نمود. هدف مسأله می‌تواند ماکزیمم کردن سود، تعداد محصولات، کیفیت و ... و یا حداقل کردن هزینه، ضایعات نیروی انسانی و ... باشد. برای بیان مسأله ماکزیمم سازی از عبارت Max و مسأله مینیمم‌سازی از عبارت Min استفاده می‌شود.

فصل سوم

« روش ترسیمی »

مقدمه

در فصل قبل با اصول و مدل‌سازی برنامه‌ریزی خطی آشنا شدید. برای حل مدل‌ها، روش‌های مختلفی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش ترسیمی است که در این فصل به ارائه کامل آن خواهیم پرداخت.

در کل، مسائل برنامه‌ریزی خطی را که از ۲ یا حداکثر ۳ متغیر تشکیل شده باشند می‌توان با این روش حل کرد. البته حل ترسیمی مسائل ۳ متغیره با توجه به اینکه در فضای ۳ بعدی صورت می‌گیرد، کمی پیچیده می‌باشد.

تعاریف مربوط به برنامه‌ریزی خطی

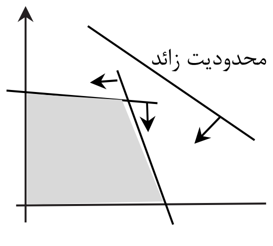
مسئله برنامه‌ریزی خطی
$$\begin{aligned} &\text{Max (Min) } Z = Cx \\ \text{s.t.}\quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$
مفروض است. در این صورت برای این مسئله خواهیم داشت:

۱ـ جواب موجه یا شدنی: مقادیری از متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ که در تمامی محدودیت‌ها صدق کنند.

۲ـ جواب غیرموجه نشدنی: مقادیری از متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ که حداقل در یکی از محدودیت‌ها مسئله صدق نکند.

۳ـ ناحیه موجه یا فضای شدنی: مجموعه جواب‌های شدنی یک مدل، ناحیه موجه آن را تشکیل می‌دهند. برای یافتن ناحیه موجه یک Lp باید ناحیه مشترک بین فضای موجه محدودیت‌های آن را بیابیم.

۴ـ جواب بهینه: جواب شدنی است که به ازای آن تابع هدف بهترین مقدار خود را اختیار می‌کند. جواب بهینه در صورت وجود حداقل در یکی از گوشه‌های فضای شدنی واقع شده است.



۵ـ محدودیت زائد: محدودیتی که وجود یا حذف آن تأثیری بر فضای شدنی نداشته باشد.

۶ـ محدودیت مؤثر: محدودیتی است که حذف آن موجب تغییر در فضای شدنی گردد.

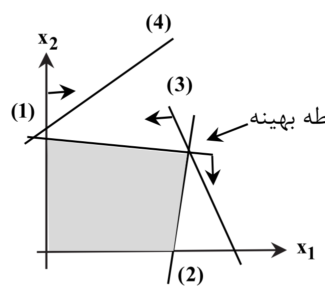
۷ـ محدودیت فعال یا الزام‌آور: محدودیتی است که از نقطه بهینه عبور نماید.

۸ـ محدودیت غیرفعال: محدودیتی است که از نقطه بهینه عبور نمی‌کند.

۹ـ محدودیت کارکردی: به تمامی محدودیت‌های مسئله اعم از زائد و غیرزائد (به جز قیود نامنفی بودن) که در مدل بالا با $Ax = b$ نمایش داده شده است، محدودیت‌های کارکردی می‌گویند.

۱۰ـ محدودیت‌های غیرکارکردی: به محدودیت‌های $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ که قیود نامنفی بودن متغیرهای مسئله هستند را محدودیت‌های غیرکارکردی گویند.

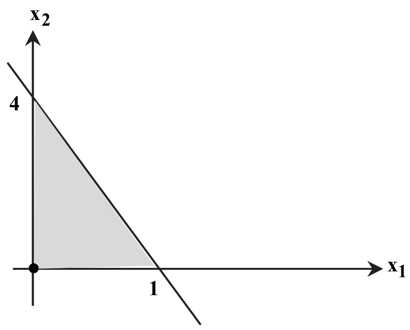
مثال۱: برای شکل زیر که ناحیه موجه آن به صورت هاشور خورده مشخص شده است داریم:



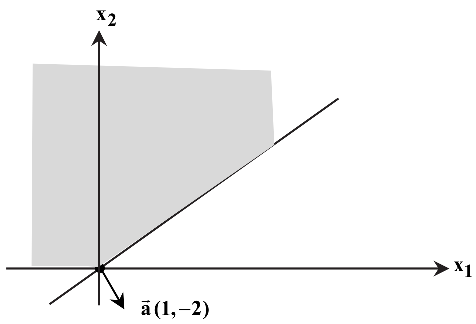
	کارکردی	غیرکارکردی	فعال	غیرفعال	زائد	غیرزائد (مؤثر)
محدودیت ۱	✓	—	✓	—	—	✓
محدودیت ۲	✓	—	✓	—	—	✓
محدودیت ۳	✓	—	✓	—	✓	—
محدودیت ۴	✓	—	—	✓	✓	—
$x_1 \geq 0$	—	✓	—	✓	—	✓
$x_2 \geq 0$	—	✓	—	✓	—	✓

حل ترسیمی مسئله برنامه‌ریزی خطی

برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی، پس از فرموله کردن آن، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



۱ـ محدودیت‌های مسئله را به صورت مساوی در نظر گرفته و آن‌ها را در فضای دو بعدی بر روی محورهای مختصات x_1 و x_2 رسم کنید. سپس منطقه موجه جواب (محدب) یا فضای شدنی جواب (feasible region) را معین کنید. برای تعیین ناحیه موجه یک محدودیت می‌توان یک نقطه‌ی فرضی را در نظر گرفت و آن را در محدودیت قرار داد، اگر محدودیت برقرار بود نقطه مفروض در سمت موجه محدودیت قرار دارد و سمت دیگر محدودیت ناموجه است و اگر پس از قرار دادن نقطه در محدودیت، محدودیت برقرار نباشد، نقطه مفروض در سمت غیرموجه محدودیت قرار دارد به طور مثال محدودیت $2x_1 + x_2 \leq 4$ را در نظر بگیرید برای رسم محدودیت ابتدا خط $2x_1 + x_2 = 4$ را رسم می‌کنیم.



حال به عنوان مثال نقطه $(0,0)$ را در محدودیت قرار می‌دهیم $(4 > 0 + 2\times 0)$. چون محدودیت برقرار است پس سمتی از محدودیت که نقطه $(0,0)$ در آن قرار دارد (سمت چپ) ناحیه موجه محدودیت است. راه دیگر برای تشخیص ناحیه موجه یک محدودیت استفاده از بردار گرادیان آن است. در محدودیت‌های کوچکتر مساوی ناحیه موجه محدودیت مخالف جهت بردار گرادیان آن و در محدودیت‌های بزرگتر مساوی به طرف بردار گرادیان می‌باشد. به طور مثال محدودیت $x_1 - 2x_2 \leq 0$ را در نظر بگیرید.

جهت بردار گرادیان محدودیت $\vec{a} = (1, -2)$ می‌باشد اما چون محدودیت به صورت کوچکتر مساوی است ناحیه موجه ناحیه مخالف جهت بردار گرادیان می‌باشد.

۲ـ تابع هدف را به ازای یک مقدار کاملاً دلخواه رسم کنید.

۳ـ بسته به نوع تابع هدف (حداکثرسازی یا حداقل‌سازی)، خط تابع هدف را در امتداد جهت C_j (به طرف بالا یا پایین) یا در راستای مخالف C_j حرکت دهید. نقطه بهینه آخرین نقطه‌ای است که از تلاقی فضای شدنی با خط تابع هدف به دست می‌آید. این گام را می‌توان با محاسبه مختصات نقاط رأسی یا گوشه‌ای فضای شدنی جواب و امتحان کردن این نقاط در تابع هدف و محاسبه مقدار تابع هدف نیز انجام داد. نقطه‌ای بهینه است که مقدار تابع هدفش از سایر نقاط گوشه‌ای بهتر باشد. (برای مسئله ماکزیمم‌سازی نقطه‌ای که مقدار تابع هدفش بیشتر و برای مینیمم‌سازی آن که مقدار تابع هدفش کمتر باشد.)

به طور کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ممکن است:

الف) جواب بهینه یکتا داشته باشد.

ب) بیش از یک جواب بهینه داشته باشد. (بهینه چندگانه)

ج) جواب بهینه بیکران داشته باشد. (در این حالت می‌گوییم مسئله جواب بهینه ندارد چون هیچ نقطه‌ای را نمی‌توان به عنوان جواب بهینه معرفی کرد ولی می‌گوییم مقدار بهینه تابع هدف بی‌نهایت است)

د) جواب نداشته باشد.

منظور از این که یک مسئله جواب دارد این است که نقطه‌ای را پیدا کنیم که بتوانیم این نقطه را به عنوان نقطه‌ای از فضای شدنی معرفی کنیم که تابع هدف را بهینه کرده است یا مقدار بهینه تابع هدف است. پس پیدا کردن مقدار بهینه برای x_jها هدف ما است و جواب بهینه در واقع همان مقادیر بهینه x_jها است و نه مقدار تابع هدف مسئله.

مدرسان شریف

فصل چهارم

« مبانی و کاربرد روش سیمپلکس »

مقدمه

همانطور که در فصل ۲ گفته شد، مسئله کلی برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت مقابل بیان کرد:

$$\text{Max}\,(\text{Min})Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\le,=,\ge) b_i \ ,\ i=1,2,3,\ldots,m$$
$$x_j \ge 0\ ,\ j=1,2,3,\ldots,n$$

در مدل فوق، a_{ij} و b_i و c_j مقادیر ثابتی هستند و x_jها متغیرهای تصمیم‌گیری نام دارند. c_jها را ضرایب هزینه یا سودآوری و b_iها را اصطلاحاً میزان منابع موجود و a_{ij} ها را ضرایب تکنولوژی (ساختاری یا فنی) می نامیم.

مسئله فوق با استفاده از نمادهای ماتریسی بصورت کلی مقابل نوشته می‌شود:

$$\text{Max}\,(\text{Min})Z=CX$$
$$\text{s.t.}$$
$$AX(\le,=,\ge)b$$
$$X\ge 0$$

در مدل فوق، A یک ماتریس $m\times n$، X یک بردار ستونی $n\times 1$، b یک بردار ستونی $m\times 1$ و C یک بردار سطری $1\times n$ است. به عبارت دیگر داریم:

$$A_{(m\times n)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\ ,\ X_{(n\times 1)}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T\ ,$$

$$b_{(m\times 1)}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m\end{pmatrix}^T\ ,\ C_{(1\times n)}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$

A را ماتریس ضرایب، X را بردار متغیرهای تصمیم‌گیری، b را بردار منابع موجود و C را بردار هزینه (یا سود) مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌نامند.

شکل متعارف مدل برنامه‌ریزی خطی بصورت مقابل است:

$$\text{Max}\,(\text{Min})Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.:}$$
$$\sum a_{ij}x_j \le (\ge) b_i \quad ,\ i=1,2,3,\ldots,m$$
$$x_j\ge 0\ ,\ j=1,2,3,\ldots,m$$

برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس، باید آن را به شکل استاندارد تبدیل کرد.

هر مدل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با تغییراتی (یا بدون تغییر) بصورت مدل استاندارد درآورد (چگونگی این کار در فصل دوم شرح داده شده است). مثلاً برای تبدیل مدل کانونی زیر به شکل استاندارد آن باید به صورت مقابل عمل نمود:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &5x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

با معرفی متغیر کمکی s_1 و متغیر مازاد s_2 مدل فوق را می‌توان بصورت مدل استاندارد مقابل نوشت.

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &5x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ &x_1 + 3x_2 - s_2 = 6 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

نکته ۱: ۱ـ اگر متغیر x_j کوچکتر یا مساوی صفر باشد برای استاندارد کردن آن می‌توان از تغییر متغیر $x_j = -x'_j$ استفاده کرد. بدیهی است وقتی $x_j \le 0$ است $x'_j \ge 0$ می‌شود.

۲ـ اگر متغیر x_j آزاد در علامت باشد (به این معنی که این متغیر بتواند هم مثبت، هم منفی و هم عدد صفر باشد) می‌توان با تغییر متغیر $(x'_j, x''_j \ge 0)$ $x_j = x'_j - x''_j$ آن را به شکل استاندارد نوشت. باید توجه داشت که هر عددی را می‌توان از اختلاف دو عدد مثبت بدست آورد. در رابطه فوق هر دو متغیر x'_j و x''_j نامنفی هستند.

مبانی روش سیمپلکس

روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ میلادی توسط ریاضی‌دان آمریکایی، جورج دانتزیگ به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متغیر ابداع شد. در این روش ابتدا یک نقطه گوشه‌ای شدنی اولیه (نقطه‌ای که در محدودیت‌های مسئله و شرط نامنفی بودن متغیرها صدق کند) برای مسئله در نظر گرفته می‌شود (معمولاً نقطه مبدأ مختصات) و با انجام یک سری محدود از مراحل که در هر مرحله مقدار تابع هدف نسبت به مرحله قبل بهبود می‌یابد یا حداقل بدتر نمی‌شود، نقطه بهینه مسئله پیدا می‌شود. لازم به ذکر است در هر مرحله فقط یک نقطه گوشه‌ای از فضای شدنی جواب مورد توجه قرار می‌گیرد. از آنجا که تعداد لبه‌های مرز جواب محدود است لذا روش سیمپلکس با تعداد محدودی از تکرارهای متوالی جواب بهینه را پیدا می‌کند.

لازم است قبل از تشریح این روش، با برخی از اصطلاحات آن آشنا شویم:

جواب: منظور از جواب، مقدار متغیرهای تصمیم‌گیری x_j است ($j = 1,2,3,\dots,n$) که در محدودیت‌های مسئله پس از استانداردسازی (یعنی محدودیت‌های $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i \;,\; i = 1,2,3,\dots,m$) صدق می‌کند.

جواب شدنی: منظور از جواب شدنی، جوابی است که هم در محدودیت‌های مسئله پس از استانداردسازی صدق می‌کند و هم شرط نامنفی بودن متغیرها را برآورده می‌سازد.

جواب شدنی پایه‌ای: منظور از جواب پایه‌ای شدنی، جوابی است که در آن بیشتر از m متغیر مثبت x_j وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر این جواب، جواب پایه‌ای است که در شرط نامنفی بودن متغیرها نیز صدق کند. (m تعداد محدودیت‌هاست) در واقع جواب پایه‌ای شدنی یک نقطه گوشه‌ای موجه است.

جواب پایه‌ای شدنی ناتباهیده: جوابی را جواب پایه‌ای شدنی ناتباهیده می‌گویند که در آن دقیقاً m متغیر پایه‌ای مثبت (غیر صفر) باشد. به همین نحو، جوابی را جواب پایه‌ای شدنی تباهیده می‌گویند اگر یک یا بیشتر از یک متغیر پایه‌ای برابر صفر باشد.

جواب بهینه: جوابی را جواب پایه‌ای شدنی بهینه می‌گویند اگر این جواب بتواند مقدار تابع هدف را به بهترین حد خود برساند و در ضمن در تمام محدودیت‌های مسئله و شرط نامنفی بودن متغیرها صدق کند.

کاربرد روش سیمپلکس

برای حل مسائلی که تمامی محدودیت‌های آن به صورت کوچکتر مساوی و اعداد سمت راست نامنفی باشد از روی سیمپلکس معمولی استفاده می‌شود. بدین منظور برای مسائلی با مشخصات بالا، ابتدا آن را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max (min) } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n c_n \\ \\ &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m \\ &x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max (Min) } Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ \\ &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + s_1 = b_1 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + s_m = b_m \\ &x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

فصل پنجم

«نظریه دوگانگی (مسئله ثانویه)»

مقدمه

هر مسئله برنامه‌ریزی خطی یک مسئله ثانویه وابسته به خود دارد. به مسئله‌ای که در ابتدا از روی اطلاعات مسئله فرموله می‌شود، مسئله «اولیه» گفته می‌شود. مسئله دیگری که با مسئله اولیه رابطه تنگاتنگی داشته و خود یک مدل برنامه‌ریزی خطی می‌باشد را مسئله «ثانویه» یا «دوگان» یا «مزدوج» و یا «همزاد» گویند. به منظور ساختن مدل ثانویه، باید مراحل زیر را دنبال کرد:

گام ۱) اگر تابع هدف مسئله اولیه به صورت MAX(MIN) باشد، تابع هدف مسئله ثانویه به صورت MIN(MAX) تبدیل می‌شود.

گام ۲) متناظر با هر محدودیت کارکردی مسئله اولیه یک متغیر اصلی برای مسئله ثانویه در نظر می‌گیریم.

گام ۳) اعداد سمت راست مسئله اولیه را به عنوان ضرایب هزینه تابع هدف مسئله ثانویه در نظر می‌گیریم.

گام ۴) ضرایب تابع هدف مسئله اولیه را به عنوان اعداد سمت راست محدودیت‌های مسئله ثانویه استفاده می‌کنیم.

گام ۵) ستون ضرایبی متغیر x_i در مسئله اولیه، محدودیت iام مسئله ثانویه را می‌سازد.

گام ۶) علامت متغیرهای مسئله ثانویه از روی علامت محدودیت مسئله اولیه و علامت محدودیت‌های مسئله ثانویه از روی علامت متغیرهای مسئله اولیه طبق جدول زیر به دست می‌آید.

	مسأله Max سازی	مسأله Min سازی	
علامت متغیرها	≥ 0	$\geq$	علامت محدودیت‌ها
	≤ 0	$\leq$	
	نامقید	$=$	
علامت محدودیت‌ها	$\leq$	≥ 0	علامت متغیرها
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	نامقید	

مثال۱: ثانویه مسئله زیر کدام گزینه است؟

$$\text{Max } Z = ۲x_1 + ۴x_2$$

s.t.

$y_1: \quad x_1 + ۳x_2 \le ۷$

$y_2: \quad ۲x_1 + ۴x_2 \le ۱۵$

$y_3: \quad ۳x_1 - ۵x_2 = ۲۳$

x_1: آزاد در علامت و $x_2 \ge ۰$

۱) $\text{Min } Z = ۷y_1 + ۱۵y_2 + ۲۳y_3$
s.t.
$y_1 + ۲y_2 + ۳y_3 = ۲$
$۳y_1 + ۴y_2 - ۵y_3 \ge ۴$
$y_1, y_2 \ge ۰$ و y_3 آزاد در علامت

۲) $\text{Max } Z = ۷y_1 + ۱۵y_2 + ۲۳y_3$
s.t.
$y_1 + ۲y_2 + ۳y_3 = ۲$
$۳y_1 + ۴y_2 - ۵y_3 \ge ۴$
$y_1, y_2 \ge ۰$ و y_3 آزاد در علامت

۳) $\text{Max } Z = ۷y_1 + ۱۵y_2 + ۲۳y_3$
s.t.
$y_1 + ۲y_2 + ۳y_3 \le ۲$
$۳y_1 + ۴y_2 - ۵y_3 = ۴$
$y_1, y_2 \ge ۰$ و y_3 آزاد در علامت

۴) $\text{Min } Z = ۷y_1 + ۱۵y_2 + ۲۳y_3$
s.t.
$y_1 + ۲y_2 + ۳y_3 = ۲$
$۳y_1 + ۴y_2 - ۵y_3 = ۴$
$y_1, y_2 \ge ۰$ و y_3 آزاد در علامت

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» براساس گام‌های تشریح شده در بالا مسئله ثانویه را می‌نویسیم: ابتدا تابع هدف را تشکیل می‌دهیم. همانطور که ملاحظه مـی‌کنیـد مسئله اولیه از نوع Max است. لذا مسئله ثانویه Min خواهد بود. همچنین در مسئله اولیه ۳ محدودیت داریـم پـس در ثانویـه ۳ متغیـر تـصمیم خـواهیم داشت. اعداد سمت راست در مسئله اولیه عبارتند از: ۷ و ۱۵ و ۲۳ که تبدیل به ضرایب تصمیم در تابع هدف ثانویه خواهند شد:

$$\text{Min} Z = ۷y_1 + ۱۵y_2 + ۲۳y_3$$

اکنون نوبت به تشکیل محدودیت‌ها می‌رسد. با توجه به اینکه در مسئله اولیه ۲ متغیر تصمیم داریم، پس در ثانویه ۲ محدودیت خواهیم داشت. جهت محدودیت‌ها از وضعیت متغیرهای مسئله اولیه بدست می‌آید. یعنی با توجه به اینکه مسئله اولیه از نوع Max است و متغیر x_2 بزرگترمساوی صفر است پس علامت محدودیت متناظر با آن یعنی محدودیت ۲، بزرگتر مساوی خواهد بود. متغیر x_1 نیز آزاد در علامت است پس جهت محدودیت متناظر با آن در ثانویه یعنی محدودیت شماره ۱، به صورت مساوی خواهد بود:

s.t.

$y_1 + ۲y_2 + ۳y_3 = ۲$

$۳y_1 + ۴y_2 - ۵y_3 \ge ۴$

دقت داشته باشید که در محدودیت اول، ضرایب متغیرها از ضرایب متغیر متناظر با آن(یعنی متغیر x_1) و در محدودیت دوم نیز از ضرایب متغیر x_2 در محدودیت‌های مسئله اولیه بدست آمده است.

برای تعیین وضعیت متغیرهای مسئله نیز به علامت محدودیت‌های مسئله اولیه توجه کنید. محدودیت‌های اول و دوم در مسئله اولیه کوچکترمساوی هستند. لذا متغیرهای متناظر با آن‌ها در ثانویه (یعنی y_1 , y_2) باید بزرگترمساوی صفر باشند. اما محدودیت سوم به صورت مساوی است. پس متغیر y_3 آزاد در علامت خواهد بود.

مثال ۲: دوگان مسئله زیر کدام است؟

$$\text{Max } Z = \frac{۱}{۳x_1 - ۵x_2}$$

s.t.

$|۲x_1 - x_2| \le ۳۰$

$x_1, x_2 \ge ۰$

۱) $\text{Max } Z_d = ۳۰y_1 - ۳۰y_2$
s.t.
$۲y_1 + ۲y_2 \ge ۳$
$-y_1 - y_2 \ge -۵$
$y_1 \ge ۰$

۲) $\text{Max } Z_d = ۳۰y_1 + ۳۰y_2$
s.t.
$۲y_1 - ۲y_2 \le -۳$
$-y_1 + y_2 \le ۵$
$y_1, y_2 \ge ۰$

۳) $\text{Max } Z_d = ۳۰y_1 + ۳۰y_2$
s.t.
$۲y_1 - ۲y_2 \le ۳$
$-y_1 + y_2 \le -۵$

۴) $\text{Max } Z_d = ۳۰y_1 + ۳۰y_2$
s.t.
$۲y_1 - ۲y_2 \le ۳$
$-y_1 + y_2 \le -۵$
$y_1, y_2 \le ۰$

مدرسان شریف

فصل ششم

« شکل ماتریسی برنامه‌ریزی خطی و روش سیمپلکس تجدید نظر شده»

شکل ماتریسی مدل برنامه‌ریزی خطی

هر مدل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان بصورت ماتریسی درآورد. این کار بیشتر به منظور استفاده از روشی جدید به نام «سیمپلکس تجدید نظر شده» صورت می‌گیرد. به طور کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به شکل مقابل نمایش داد:

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = CX\\&\text{s.t.}\\&AX \le b\\&X \ge 0\end{aligned}$$

در این شکل، A یک ماتریس $m \times n$ است که در آن m تعداد محدودیت‌های مسئله و n تعداد متغیرهای مسئله اصلی می‌باشد. عناصر ماتریس A ضرایب متغیرهای مسئله در محدودیت‌ها می‌باشد. X یک بردار ستونی $1 \times n$ است که آن را می‌توان بردار متغیرها تعریف کرد. همچنین b بردار ستونی $1 \times m$ است که عناصر این بردار، در واقع همان اعداد سمت راست محدودیت‌ها در مسئله اصلی خواهند بود. C نیز یک بردار سطری $n \times 1$ است که عناصر آن ضرایب متغیرهای مسئله در تابع هدف هستند. برای روشن‌تر شدن مطلب، مدل خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2\\&\text{s.t.}\\&x_1 + 2x_2 \le 7\\&3x_1 + 5x_2 \le 9\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

بردار ضرایب تابع هدف یعنی C عبارت است از: (۴و۲)

بردار اعداد سمت راست یا همان P_0 (یا b) عبارت است از: $\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}$

ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها یا همان A نیز برابر است با: $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$

همچنین بردار متغیرها (X) برابر است با: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

به این ترتیب مدل بالا را می‌توان به شکل ماتریسی مقابل تبدیل نمود:

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&\text{s.t.}\\&\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\{\le\}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\\&\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

همانطورکه می‌دانید در هر تکرار از روش سیمپلکس، متغیرهای مسئله به دو دسته تفکیک می‌شوند: متغیرهای پایه‌ای و متغیرهای غیر پایه‌ای. متغیرهای پایه‌ای آن دسته از متغیرهای تصمیم‌گیری بودند که در هر تکرار، در داخل ستون پایه جدول سیمپلکس نوشته می‌شدند و متغیرهای غیرپایه‌ای نیز در هر تکرار متغیرهایی بودند که در داخل ستون پایه نوشته نشده و مقدارشان برابر صفر بود. بنابراین می‌توان ملاحظه کرد که در هر

تکرار جدول سیمپلکس، متغیرهای ماتریس X را می‌توان به دو زیرماتریس X_B و X_N تجزیه کرد که در آن‌ها اندیس‌های B (Basic) و N (Nonbasic) به ترتیب نشانگر پایه‌ای و غیر پایه‌ای بودن متغیرهای تصمیم‌گیری است. بنابراین ماتریس متغیرهای تصمیم‌گیری (اعم از متغیرهای اصلی، کمکی، مازاد یا مصنوعی) X را می‌توان بصورت زیر تجزیه کرد:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب می‌توان در هر تکرار روش سیمپلکس، ماتریس یا بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف مسئله (C) را نیز به دو زیرماتریس ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف (C_B) و ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای در تابع هدف (C_N) تجزیه کرد. به عبارت دیگر داریم: $C=(c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \to (C_B \quad C_N)$

از سوی دیگر می‌توان ماتریس (A) را بصورت ماتریس $(B \quad N)$ تجزیه کرد که در آن، ماتریس B را اصطلاحاً ماتریس پایه و N را ماتریس غیر پایه می‌نامند. در واقع ماتریس B، ماتریس ضرایب متغیرهای پایه‌ای (در یک تکرار خاص سیمپلکس) در محدودیت‌های مدل اصلی است و N ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای (در همان تکرار) در محدودیت‌های مسئله اصلی است.

با تعریف این ماتریس‌ها، اکنون می‌توان مسئله اولیه استاندارد شده را به شکل کلی مقابل نوشت:

$$\text{Max } Z=(C_B \quad C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

s.t.

$$(B \quad N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b$$

$$\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

به عنوان مثال، مدل خطی زیر را به همراه جداول حل شده سیمپلکس آن در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z=4x_1+7x_2+0S_1+0S_2 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1+x_2+S_1=6 \\ &2x_1+3x_2+S_2=24 \\ &x_1,x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad \begin{aligned} &\text{Max } Z=4x_1+7x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1+x_2 \le 6 \\ &2x_1+3x_2 \le 24 \\ &x_1,x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	جواب	s_2	s_1	x_2	x_1	Z	پایه
	۰	۰	۰	−۷	−۴	۱	Z
جدول	۶	۰	۱	۱	۱	۰	s_1
ابتدا	۲۴	۱	۰	۳	۲	۰	s_2
	۴۲	۰	۷	۰	۳	۱	Z
جدول	۶	۰	۱	۱	۱	۰	X_2
انتها	۶	۱	−۳	۰	−۱	۰	s_2

در جدول اولیه این مسئله داریم:

متغیرهای پایه(B) عبارتند از: S_1,S_2، ضمن اینکه متغیرهای غیر پایه (N) هم x_1,x_2 می‌باشند. لذا باتوجه به این مطلب، C_B که بردار ضرایب متغیرهای پایه در تابع هدف بود عبارت است از: $X_B:(S_1,S_2) \qquad C_B:(0,0)$

همچنین ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در تابع هدف(یعنی ضرایب ۲ متغیر x_1,x_2 در تابع هدف) برابر است با:

$X_N:(X_1\ ,\ X_2) \qquad C_N:(4,7)$

ماتریس B هم که عبارت است از ضرایب متغیرهای پایه در محدودیت‌ها برابر است با: $B:\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ماتریس N هم ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در محدودیت‌ها است: $N:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

در جدول نهایی این مسئله داریم: $X_B:(X_2\ ,\ S_2) \quad C_N:(4,0) \quad C_B(7,0)$

$$N:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B:\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad X_N:(x_1\ ,\ s_1)$$

محاسبه ضرایب متغیرها با استفاده از ماتریس B^{-1}

همانطور که در قسمت قبل بیان شد، متغیرهای پایه‌ای را با x_B و متغیرهای غیرپایه‌ای را با x_N و همچنین ضرائب هزینه متغیرهای پایه‌ای و غیرپایه‌ای را به ترتیب با C_N, C_B نمایش می‌دهیم. اکنون محدودیت‌ها و تابع هدف مسئله را با این تجزیه‌ها بازنویسی می‌کنیم.

بازنویسی محدودیت‌ها: $Ax=B \to [B,N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b \Rightarrow Bx_B+Nx_N=b \Rightarrow Ix_B+B^{-1}NxN=B^{-1}b \Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}NxN$

مدرسان شریف

فصل هفتم

«تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری»

مقدمه

بنا به دلایلی ممکن است پارامترهایی را که ابتدا در مسئله وارد می‌شوند دچار تغییر کنیم. در تحلیل حساسیت، اثر این تغییرات بر روی جواب بهینه‌ای که بدست آورده‌ایم، تحت بررسی قرار می‌گیرد. این تغییرات می‌تواند شامل تغییرات در سمت راست محدودیت‌ها (b_i)، تغییرات در ضرایب تابع هدف (c_j)، تغییرات مربوط به ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها (a_{ij}) و یا حذف و اضافه کردن بعضی از محدودیت‌ها یا متغیرها باشد.

در اثر تغییر پارامترها، یکی ازسه حالت زیر اتفاق خواهد افتاد:

۱ـ جواب بهینه تغییر نمی‌کند به این معنی که نه متغیرهای پایه‌ای تغییر می‌کنند و نه مقدارشان.

۲ـ متغیرهای پایه‌ای تغییر نمی‌کنند ولی مقدارشان دستخوش تغییر خواهد شد.

۳ـ متغیرهای پایه‌ای تغییر می‌کنند.

مثال۱: کدام جمله درست است؟

۱) تحلیل حساسیت رویه‌ای است که بعد از به دست آوردن جواب بهینه به اجرا در می‌آید.

۲) تحلیل حساسیت در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی موجب افزایش مقدار تابع هدف می‌گردد.

۳) تحلیل حساسیت به منظور به دست آوردن جوابهای عدد صحیح مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴) هر سه گزینه صحیح هستند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تحلیل حساسیت به این منظور انجام می‌شود تا تغییرات احتمالی به وجود آمده در مسئله اصلی و جواب بهینه آن را اندازه بگیرد. به عبارت دیگر تحلیل حساسیت بعد از به دست آمدن جواب بهینه انجام می‌شود.

تحلیل حساسیت اعداد سمت راست (b_i)

در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تغییر در اعداد سمت راست محدودیت‌ها هیچ اثری بر بهینگی نخواهد داشت ولی از آن جایی که $\overline{b}=B^{-1}b$ و $Z=C_BB^{-1}b$، بنابراین تغییر در b_iها می‌تواند اعداد سمت راست جدول بهینه و مقدار تابع هدف را تغییر دهد. در تحلیل حساسیت اعداد سمت راست به دنبال دامنه تغییراتی هستیم که در اثر تغییر آن‌ها در این دامنه، جدول نهایی مسئله همچنان موجه بماند (یعنی هیچ یک از اعداد سمت راست منفی نشوند). فرض کنید $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ باشد و مقادیر سمت راست به میزان $\Delta b=\begin{pmatrix}\Delta b_1\\\Delta b_2\\\vdots\\\Delta b_m\end{pmatrix}$ تغییر یابد در این صورت خواهیم داشت:

$$\overline{b}'=B^{-1}b'=B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b$$

شرط اینکه جدول نهایی بهینه بماند این است که مقادیر سمت راست نامنفی باشند یعنی:

$$\overline{b}'=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b\geq 0$$

در غیر این صورت حتی اگر یکی از مقادیر سمت راست منفی شود، جدول غیرموجه است و جواب بهینه با استفاده از سیمپلکس دوگان بدست می‌آید.

برای توضیح بهتر مطلب را با ارائه مثالی ادامه می‌دهیم.

مثال۲: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به همراه جدول نهایی آن را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}&\mathbf{Max\,Z = ۵x_1 + ۱۲x_2 + ۴x_3}\\&\mathbf{s.t.}\\&\mathbf{x_1 + ۲x_2 + x_3 \le ۵۰}\\&\mathbf{۲x_1 - x_2 + ۳x_3 = ۲۰}\\&\mathbf{x_1, x_2, x_3 \ge ۰}\end{aligned}$$

پایه	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	جواب
Z	۱	۰	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۲۹}{۵}$	$M-\frac{۲}{۵}$	۲۸۲
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۱۶
x_1	۰	۱	۰	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۸

حال اگر عدد سمت راست محدودیت اول از ۵۰ به ۷۰ تغییر نماید جواب مسئله برابر با کدام گزینه می‌شود؟

۱) ۳۹۸　　۲) ۳۸۴　　۳) ۲۸۸　　۴) ۱۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جواب مسئله جدید را با استفاده از روابط ماتریسی و مقدار جدید ۷۰ بدست می‌آوریم:

$$X_B=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۷۰\\۲۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۴\\۲۲\end{pmatrix}\Rightarrow Z=۳۹۸$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید اعداد سمت راست جدید، غیر منفی هستند. پس این تغییر در محدوده مجاز بوده و همچنان جواب مسئله را در حالت موجه نگه داشته است. باید توجه داشت اگر بردار b به b' تغییر یابد و یک یا چند مؤلفه از اعداد سمت راست جدید $(\overline{b}'=B^{-1}b')$ منفی شوند با استفاده از روش سیمپلکس دوگان تا یافتن جواب بهینه جدید جدول را ادامه می‌دهیم. حال می‌خواهیم این محدوده مجاز را محاسبه کنیم تا بدانیم به چه میزانی می‌توان اعداد سمت راست را دستخوش تغییرات کرد بدون اینکه جواب مسئله از حالت موجه خود خارج گردد. برای این کار ابتدا سمت راست محدودیت اول را در حالت کلی b_1 فرض می‌کنیم و سمت راست محدودیت دوم را بدون تغییر در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر داریم (T یعنی ترانهاده ماتریس):

$$\begin{pmatrix}۵۰&۲۰\end{pmatrix}^T\to\begin{pmatrix}b_1&۲۰\end{pmatrix}^T$$

با توجه به اینکه تغییر در سمت راست محدودیت‌ها فقط بر روی ستون جواب جدول سیمپلکس اثر می‌گذارد لازم است مقادیر جدید X_B را بدست آوریم. مقادیر جدید X_B لازم است نامنفی باشند تا جواب فعلی شدنی باقی بماند. داریم:

$$X_B=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\۲۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵}b_1-۴\\\frac{۱}{۵}b_1+۸\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}۰\\۰\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵}b_1\\\frac{۱}{۵}b_1\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}۴\\-۸\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}b_1\\b_1\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}۱۰\\-۴۰\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b_1\ge ۱۰\Rightarrow ۱۰\le b_1\le+\infty$$

از محدودیت اول $b_1\ge ۱۰$ و از محدودیت دوم $b_1\ge -۴۰$ است که چون هر دو مقدار x_1 و x_2 لازم است مثبت شوند پس بین این دو اشتراک می‌گیریم که $b_1\ge ۱۰$ اشتراک دو مجموعه است و جواب سؤال.

رابطه بالا به این معنی است که اگر سمت راست محدودیت اول (که در حال حاضر ۵۰ است) هر عددی بین ۱۰ و مثبت بینهایت باشد پایه موجه و بهینه متشکل از متغیرهای x_2 و x_1 کماکان موجه و بهینه باقی می‌ماند مشروط بر اینکه سمت راست محدودیت دوم تغییر نکند (همان عدد ۲۰ باشد).

حال پس از تعیین دامنه مجاز برای محدودیت اول، سمت راست محدودیت دوم را در حالت کلی b_2 فرض می‌کنیم و سمت راست محدودیت اول را بدون تغییر در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{pmatrix}۵۰&۲۰\end{pmatrix}^T\to\begin{pmatrix}۵۰&b_2\end{pmatrix}^T$$

مقادیر جدید X_B لازم است نامنفی باشند تا جواب فعلی شدنی باقی بماند. داریم:

$$X_B=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۵۰\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۰-\frac{۱}{۵}b_2\\۱۰+\frac{۲}{۵}b_2\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}۰\\۰\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{۱}{۵}b_2\\\frac{۲}{۵}b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\le\\\ge\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲۰\\-۱۰\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}b_2\\b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\le\\\ge\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱۰۰\\-۲۵\end{pmatrix}\Rightarrow -۲۵\le b_2\le ۱۰۰$$

رابطه بالا به این معنی است که اگر سمت راست محدودیت دوم (که در حال حاضر ۲۰ است) هر عددی بین ۲۵- و ۱۰۰باشد پایه موجه و بهینه متشکل از متغیرهای x_2 و x_1 کماکان موجه و بهینه باقی می‌ماند مشروط بر اینکه سمت راست محدودیت اول تغییر نکند (همان عدد ۵۰ باقی بماند).

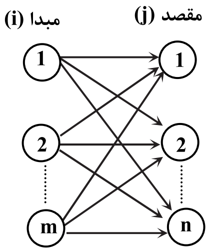
مدرسان شریف

فصل هشتم

« مدل حمل و نقل »

مقدمه

مدل حمل و نقل یکی از حالات خاص مدل برنامه‌ریزی خطی است که به علت ساختار خاصی که دارد، نمی‌توان آنرا به سادگی با روش سیمپلکس حل کرد و لذا نیاز به روش‌های دیگری است که در این فصل به آن‌ها خواهیم پرداخت. مسائل حمل و نقل معمولاً به شکل ماتریسی بیان می‌شوند. در این ماتریس، سطرها معمولاً بیانگر مبدأها و ستون‌ها بیانگر مقصدها می‌باشند. تقاطع هر سطر و ستون، یک خانه در جدول حمل و نقل خواهد بود. مسئله کلی در حمل و نقل، مینیمم کردن هزینه کل می‌باشد، در صورتی که بیشترین مقدار از مبدأ به مقصد ارسال گردد. صورت کلی مدل حمل و نقل بصورت زیر است:



$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i\,, \quad (i = 1,2,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\,, \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

$$x_{ij} \ge 0$$

در اینجا، m تعداد مبدأ و n تعداد مقصد است. x_{ij} مقدار کالای حمل شده از مبدأ i به مقصد j است. میزان کل عرضه مبدأ i ام را s_i و میزان کل تقاضای مقصد j ام را d_j در نظر بگیرید. همچنین هزینه انتقال کالا از مبدأ i ام به مقصد j ام با c_{ij} نشان داده شده است. البته در این مدل باید میزان کل عرضه با میزان کل تقاضا برابر باشد. یعنی باید:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

مسئله فوق، $m \times n$ متغیر تصمیم‌گیری و $m+n$ محدودیت دارد. اما با توجه به اینکه یکی از این $m+n$ محدودیت‌ها زائد است تعداد محدودیت‌های غیر زائد برابر $m+n-1$ خواهد شد. بنابراین مسئله حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد، $m+n-1$ متغیر پایه‌ای خواهد داشت. ضمناً توجه داشته باشید که یک مسئله حمل و نقل، همواره دارای جواب بهینه و عدد صحیح خواهد بود. اگر یک مسئله حمل و نقل به صورت خطی مدل شود یا به روش سیمپلکس حل شود تعداد متغیرهای پایه‌ای آن برابر $m+n$ خواهد بود.

مثال۱: کدام یک از مدلهای زیر بیانگر یک مسئله حمل و نقل است؟

۱) $\text{Max } Z = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} c_{ij}x_{ij}$, $\sum_j x_{ij} = s_i$, $\sum_i x_{ij} = d_j$, $x_{ij} \ge 0$

۲) $\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$, $\sum_j a_{ij}x_{ij} = s_i$, $\sum_i a_{ij}x_{ij} = d_j$, $x_{ij} \ge 0$

۳) $\text{Max } Z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$, $\sum_j x_{ij} = 1$, $\sum_i x_{ij} = 1$, $x_{ij} \ge 0$

۴) گزینه ۱ و ۳

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های ۱و۳ نمایانگر یک مدل حمل و نقل می‌باشند. البته در گزینه ۳ چون راست محدودیت‌ها عدد یک است بیانگر مدل تخصیص می‌باشد که زیرمجموعه مدل حمل و نقل به حساب می‌آید. در واقع مدل تخصیص یک مدل حمل و نقل می‌باشد که $d_j = 1, S_i = 1$ می‌باشد هم‌چنین از آنجایی که ضرایب متغیرها در مسئله حمل و نقل باید یک باشد گزینه «۲» صحیح نیست.

مثال ۲: در صورتی که یک مسئله حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد با استفاده از روش سیمپلکس حل گردد تعداد متغیرهای پایه‌ای غیر صفر آن برابر است با:

۱) $m+n-1$ ۲) $(m+n)^2$ ۳) $m+n$ ۴) n^2

پاسخ: گزینه «۱» در جدول سیمپلکس $m+n$ سطر یا متغیر پایه‌ای وجود خواهد داشت اما باید توجه داشت که یکی از محدودیت‌ها زائد است و لذا یکی از متغیرهای پایه‌ای برابر صفر است. به عبارت دیگر متغیرهای پایه‌ای غیرصفر، در صورتی که جدول تباهیده نباشد برابر $m+n-1$ است. دقت کنید در روش سیمپلکس تعداد متغیرهای پایه‌ای برابر تعداد محدودیت‌ها است؛ یعنی $m+n$. اما چون در این سؤال تعداد متغیرهای پایه‌ای غیرصفر از ما خواسته شده است لذا گزینه ۱ صحیح است. زیرا اگر یک مسئله حمل و نقل را با روش سیمپلکس حل کنیم، یکی از متغیرهای پایه‌ای در همه جدول‌ها حتماً برابر صفر خواهد شد. بد نیست بدانید این متغیر پایه‌ای یک متغیر مصنوعی است. بنابراین تمام جدول‌های روش سیمپلکس تبهگن هستند.

مثال ۳: اگر یک مسئله حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد به شکل یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله شود آنگاه مدل مزبور:

۱) m متغیر و n محدودیت دارد. ۲) n متغیر و m محدودیت دارد.
۳) m×n متغیر و m+n محدودیت دارد. ۴) m+n متغیر و m×n محدودیت دارد.

پاسخ: گزینه «۳» وقتی m مبدأ و n مقصد وجود داشته باشد، تعداد خانه‌های جدول حمل و نقل که معادل تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری است mn می‌شود. از طرفی m مبدأ معرف m محدودیت عرضه و n مقصد معرف n محدودیت تقاضا است. بنابراین تعداد محدودیت‌ها $m+n$ است.

مثال ۴: تعداد متغیرهای تصمیم یک مدل حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد برابر کدام است؟

۱) mn ۲) $m+n$ ۳) $m+n-1$ ۴) $2m+n-1$

پاسخ: گزینه «۱» تعداد متغیرهای یک مسئله حمل و نقل برابر با حاصل ضرب تعداد مبدأها در تعداد مقصدها است.

مثال ۵: در یک مسئله حمل و نقل در صورتی که m مبدأ و n مقصد وجود داشته باشد تعداد متغیرهای غیر پایه‌ای کدام است؟

۱) $m+n$ ۲) $m+n-1$ ۳) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ ۴) $(m-1)(n-1)$

پاسخ: گزینه «۴» در جدول حمل و نقلی که m مبدأ و n مقصد دارد تعدا کل متغیرها برابر mn و تعداد متغیرهای پایه‌ای برابر $m+n-1$ است. بنابراین تعداد متغیرهای غیر پایه‌ای برابر با $mn-(m+n-1)$ خواهد بود که اگر این عبارت ساده شود برابر $(m-1)(n-1)$ بدست می‌آید.

مثال ۶: کدام یک از گزینه‌های زیر برای یک مسئله حمل و نقل درست نیست؟

۱) مقدار عرضه و تقاضا در دوره برنامه‌ریزی باید ثابت فرض شود.
۲) حمل و نقل کالا بین دو مبدأ یا دو مقصد امکان‌پذیر نیست.
۳) تابع هدف یک مسئله حمل و نقل همیشه بصورت حداقل‌سازی هزینه حمل و نقل است.
۴) مسئله حمل و نقل قابل حل با روش سیمپلکس است.

پاسخ: گزینه «۳» تابع هدف مسئله حمل و نقل می‌تواند بصورت حداکثرسازی نیز باشد. در مورد سایر گزینه‌ها همانطور که گفته شد مقدار عرضه و تقاضا همواره ثابت فرض می‌شود و در اثر تغییر هر کدام، حل مسئله و مقدار Z بهینه نیز تغییر خواهد یافت.
همچنین حمل و نقل کالا بین ۲ مبدأ و ۲ مقصد امکان‌پذیر نمی‌باشد، مگر در مدل‌های حمل و نقل مرکب. در مورد گزینه ۴ هم هر نوع مدل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به روش سیمپلکس حل کرد. حمل و نقل نیز یک مدل خطی است پس از این قاعده مستثنی نیست. اما با توجه به ساختار خاصی که دارد برای جلوگیری از اتلاف وقت و سهولت در دستیابی به جواب بهینه از روش‌های خاص دیگری استفاده می‌شود.

مثال ۷: کدام یک از جملات زیر برای یک مسئله حمل و نقل صحیح است؟

۱) تعداد مبدأها و مقصدها برابرند. ۲) جواب یک مسئله حمل و نقل همواره عدد صحیح است.
۳) امکان ارسال کالا بین دو مبدأ وجود دارد. ۴) جواب یک مسئله حمل و نقل همواره غیر تبهگن است.

پاسخ: گزینه «۲» در مسئله حمل و نقل لزوماً تعداد مبدأها با تعداد مقصدها برابر نیست. لذا گزینه ۱ صحیح نیست. اگر امکان ارسال کالا بین چند مبدأ و یا چند مقصد وجود داشته باشد، مسئله حمل و نقل مرکب است و لذا گزینه ۳ هم نمی‌تواند درست باشد.
گزینه ۴ نیز صحیح نیست زیرا جواب مسائل حمل و نقل می‌تواند هم تباهیده و هم ناتباهیده باشد. گزینه ۲ درست است زیرا جواب مسائل حمل و نقل همواره عدد صحیح است و دلیل آن وجود ترتیب خاصی از ضرایب صفر و یک در محدودیت‌های مسئله است.

مدرسان شریف

فصل نهم

«مدل تخصیص»

مقدمه

مدل تخصیص حالت خاصی از مدل حمل و نقل است. وقتی در مسئله حمل و نقل عرضه هریک از مبداءها و تقاضای هریک از مقصدها برابر ۱ باشد، مدل حمل و نقل به مسئله تخصیص تبدیل می‌شود. هزینه تخصیص مبدأ A (مثلا شغل A) به مقصد ۱ (مثلا کارگر۱) برابر با C_{A1} می‌باشد. شکل کلی مدل تخصیص به صورت زیر است:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \in (0,1)$$

مثال۱: مدل زیر بیانگر کدام مدل است؟

$$\mathbf{Min\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}$$

s.t.

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\dots,n)}$$

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\dots,n)}$$

$$\mathbf{x_{ij} \in (0,1)}$$

۱) حمل و نقل مرکب
۲) تخصیص
۳) حداکثر جریان در شبکه
۴) کوتاهترین مسیر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مدل تخصیص، اعداد سمت راست محدودیت‌ها برابر ۱ هستند زیرا فقط مثلاً به هر فرد باید یک کار اختصاص یابد.

نکته ۱: اگر نتوان کار معینی را به ماشین یا کارگری واگذار کرد، c_{ij} متناظر با آن M فرض می‌شود تا تضمین‌کننده عدم واگذاری آن کار به ماشین مورد نظر باشد و اگر خواسته باشیم کار معینی حتماً به یک فرد خاص تخصیص یابد c_{ij} متناظر با آن M- در نظر گرفته می‌شود.

روش‌های حل مسئله تخصیص

همانطور که گفته شد، تخصیص یکی از حالات خاص حمل و نقل است. در نتیجه علاوه بر روش‌های برنامه‌ریزی خطی، می‌توان از طریق روش‌های حمل و نقل نیز آن را حل نمود. اما روش‌های ساده‌تری نیز برای این کار وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش مجارستانی است.

مراحل این روش به شرح زیر است:

۱ـ در هر سطر، کوچکترین عدد (هزینه) را پیدا کرده و آنرا از باقی اعداد آن سطر کم کنید. همین کار را برای ستون‌ها نیز انجام دهید. یعنی در هر ستون کوچکترین عدد را یافته و از باقی اعداد آن ستون کم کنید.

نکته ۲: دقت داشته باشید که تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها باید برابر باشد. در غیر اینصورت یک سطر یا ستون مجازی به جدول اضافه نمایید.

۲ـ با استفاده از حداقل خط‌های ممکن، سعی کنید صفرهای جدول را بپوشانید. این خطها که به خط پوشش شهرت دارند، می‌توانند افقی یا عمودی باشند. اگر تعداد خط‌های به کار برده شما برای پوشش صفرها، برابر با تعداد سطر (یا ستون) جدول باشد، به جواب بهینه دست یافته‌اید در غیر اینصورت مرحله ۳ را دنبال نمایید.

۳ـ کمترین عددی که بر روی آن خط کشیده نشده است را یافته و آن عدد را از اعدادی که روی آن‌ها خطی کشیده نشده است کم کرده و به اعدادی که در تقاطع خطوط قرار گرفته‌اند (یعنی ۲ خط بر روی آن‌ها کشیده شده است) اضافه کنید. بقیه اعداد جدول را بدون تغییر به جدول جدید منتقل کنید. مجدداً سعی کنید با حداقل خط‌های ممکن، همه صفرها را پوشش دهید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا تمامی صفرها با تعداد خطی برابر با تعداد سطرها یا ستون‌ها پوشش داده شوند.

۴ـ پس از رسیدن به جدول نهایی، سطر یا ستونی که کمترین تعداد صفر در آن باشد را انتخاب کنید و تخصیص را از آن شروع کنید.

مثال۲: جدول تخصیص زیر را در نظر بگیرید. مقدار بهینه هدف کدام گزینه است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۸
۳) ۲۳
۴) ۲۴

کار \ ماشین	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۷	۱۱	۶
۲	۸	۵	۹	۶
۳	۴	۷	۱۰	۷
۴	۱۰	۴	۸	۳

پاسخ: کمترین عدد در سطر ۱، عدد ۵، در سطر دوم عدد ۵، در سطر سوم عدد ۴ و در سطر چهارم عدد ۳ می‌باشد. هریک از این اعداد را از تمام اعداد سطر متناظرش کسر می‌کنیم. سپس در ماتریس جدید حاصل، این کار را برای ستون‌ها انجام می‌دهیم:

کار \ ماشین	۱	۲	۳	۴
۱	۰	۲	۲	۱
۲	۳	۰	۰	۱
۳	۰	۳	۲	۳
۴	۷	۱	۱	۰

حال نوبت به رسم خطهای پوشش است. صفرهای جدول بالا را می‌توان با ۳ خط پوشش داد. به صورت مقابل:

کار \ ماشین	۱	۲	۳	۴
۱	۰	۲	۲	۱
۲	۳	۰	۰	۱
۳	۰	۳	۲	۳
۴	۷	۱	۱	۰

اما چون تعداد سطرها یا ستون‌های ما برابر ۴ است (بیش از ۳ است) پس این جدول بهینه نیست. برای ادامه حل، از بین اعداد خط نخورده، کمترین عدد (یعنی ۱) را از تمامی اعداد خط نخورده کم می‌کنیم و به اعدادی که ۲ خط روی آن‌ها کشیده شده اضافه می‌کنیم (یعنی اعداد ۳ و ۱).

داریم:

کار \ ماشین	۱	۲	۳	۴
۱	۰	۱	۱	۱
۲	۴	۰	۰	۲
۰	۰	۲	۱	۳
۴	۷	۰	۰	۰

در این ماتریس کماکان می‌توان با ۳ خط صفرهای ماتریس را پوشش داد.
مجدداً مرحله قبل را تکرار می‌کنیم تا به جدول مقابل برسیم:

کار \ ماشین	۱	۲	۳	۴
۱	$\boxed{0}$	۰	۰	۰
۲	۵	$\boxed{0}$	۰	۲
۳	۰	۱	$\boxed{0}$	۲
۴	۸	۰	۰	$\boxed{0}$

فصل دهم

« شبکه»

مقدمه

مدل‌های حمل و نقل و تخصیص که در فصول قبل بررسی شدند، از زیرمجموعه‌های شبکه‌ها می‌باشند. در این فصل نیز برخی دیگر از مسائل برنامه‌ریزی خطی که به صورت شبکه مدل می‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند.

یک شبکه دارای تعدادی گره(Node) و شاخه (کمان Arc) است. گره‌ها در شبکه معمولاً بیانگر مکان یا نقاط اتصال هستند و با دایره که درون آن عددی نوشته می‌شود مشخص خواهند شد. در مسائل، گره‌ها می‌توانند بیانگر انبارها، شهرها، ترمینال‌های کامپیوتر، ماهواره‌ها، نقاط مهم در تکمیل یک پروژه و غیره باشند. از شاخه‌ها برای اتصال بین هر دو گره در شبکه استفاده می‌شود و آن‌ها معرف یک رابطه خاص بین گره‌های وصل شده به هم خواهند بود. شاخه‌ای که دو گره از یک شبکه را به هم متصل می‌کند ممکن است معرف جریان بین گره‌ها باشد. در چنین شبکه‌هایی، شاخه‌ها می‌توانند بیانگر جاده‌های ارتباطی بین شهرها، مسیرهای پرواز، سیم‌کشی جریان برق، اتصالات لوله‌کشی و غیره باشند. شاخه‌ها می‌توانند جهت‌دار (یک طرفه) یا بدون جهت (جریان آزاد ۲طرفه) باشند.

مسئله کوتاهترین مسیر

الف ـ مدلسازی مسئله

منظور از این شبکه، یافتن کوتاهترین مسیر بین یک مبدأ و یک مقصد است. در این نوع شبکه‌ها عدد نوشته شده (c_{ij}) بر روی شاخه $i\text{–}j$ معرف هزینه رفتن از گره i به گره j (یا مسافت بین دو گره i و j، یا زمان سفر بین گره‌های مزبور و یا هزینه انتقال یک واحد از چیزی بین گره‌های مزبور) است. در اینجا برای هریک از شاخه‌ها متغیر تصمیم x_{ij} تعریف می‌شود. این متغیر بیانگر میزان انتقال از گره i به گره j می‌باشد. همچنین برای هر گره، یک محدودیت با علامت مساوی تعریف می‌کنیم:

$$\text{Min}Z = \sum_{i}\sum_{i\neq j} C_{ij}X_{ij}$$

st :

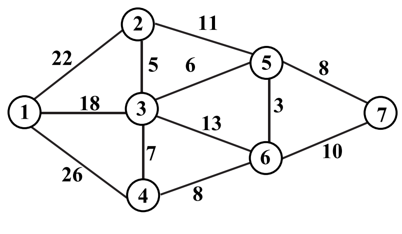
$$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = ۱$$ اگر j مبدأ باشد:

$$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = ۰$$ اگر j نه مبدأ و نه مقصد باشد:

$$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = -۱$$ اگر j مقصد باشد:

$$x_{ij} \geq ۰$$

به عنوان مثال، شبکه روبه‌رو را در نظر بگیرید:



همانطور که ملاحظه می‌کنید شاخه‌های این مسئله بدون جهت هستند، لذا انتقال در تمامی شاخه‌ها می‌تواند به صورت ۲طرفه انجام پذیرد. در نتیجه باتوجه به اینکه در اینجا ۱۲ شاخه داریم، پس ۲۴ متغیر تصمیم در نظر می‌گیریم. تابع هدف این شبکه عبارت است از:

$$\text{Min } Z = ۲۲x_{۱۲} + ۱۸x_{۱۳} + ۲۶x_{۱۴} + \dots + ۱۰x_{۶۷}$$

حال به عنوان مثال ، محدودیت‌های متناظر با گره‌های ۱، ۲ و ۷ را می نویسیم:

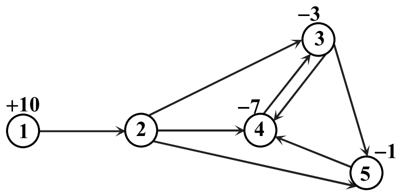
ـ گره ۱ چون مبدا است داریم: $\text{st}\quad \text{Node}۱: x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} - (x_{۲۱} + x_{۳۱} + x_{۴۱}) = ۱$

ـ گره ۲ نه مبدا است و نه مقصد.پس داریم: $\text{st}\quad \text{Node}۲: x_{۲۱} + x_{۲۳} + x_{۲۵} - (x_{۱۲} + x_{۳۲} + x_{۵۲}) = ۰$

ـ گره ۷ مقصد نهایی است. پس داریم: $\text{st}\quad \text{Node}۷: x_{۷۵} + x_{۷۶} - (x_{۵۷} + x_{۶۷}) = -۱$

برای سایر گره‌ها نیز به همین روش عمل می‌کنیم.

مثال۱: محدودیت متناظر با گره ۴ در شبکه زیر کدام است؟



۱) $-x_{۲۴} + x_{۴۳} - x_{۳۴} - x_{۵۴} = -۷$

۲) $x_{۲۴} - x_{۴۳} + x_{۳۴} + x_{۵۴} = -۷$

۳) $-x_{۲۴} + x_{۴۳} - x_{۳۴} - x_{۵۴} = ۰$

۴) $-x_{۲۴} - x_{۴۳} + x_{۳۴} + x_{۵۴} = +۷$

پاسخ: گزینه «۱» تقاضای گره ۴ برابر ۷ است و این به معنی آن است که میزان ورودی به این گره منهای میزان خروجی از این گره باید برابر ۷ باشد. به عبارت دیگر، میزان ورودی به این گره شاخه‌های ۲ـ۴، ۳ـ۴ و ۵ـ۴ هستند که باید برابر با میزان خروجی از این گره، یعنی شاخه ۴ـ۳ بعلاوه ۷ باشد. یعنی رابطه $x_{۲۴} + x_{۳۴} + x_{۵۴} = x_{۴۳} + ۷$ باید برقرار باشد.

نکته: رابطه نوشتن محدودیت‌ها در اینگونه مسائل به صورت روبرو است: عدد روی گره = ورودی به گره ـ خروجی از گره

مثال۲: در صورتی که شبکه‌ای جهت‌دار با ۵ شاخه و ۴ گره به شبکه ای بدون جهت تبدیل شود شبکه جدید دارای:

۱) ۵ شاخه و ۸ گره خواهد بود. ۲) ۱۰ شاخه و ۸ گره خواهد بود. ۳) ۱۰ شاخه و ۵ گره خواهد بود. ۴) ۱۰ شاخه و ۴ گره خواهد بود.

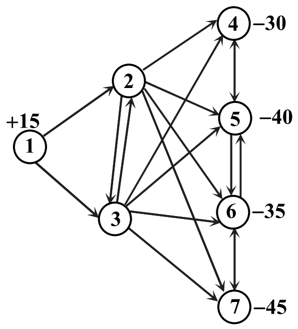
پاسخ: گزینه «۴» در حالتی که شاخه‌های جهت‌دار بدون جهت می‌شوند در واقع تعداد شاخه‌ها ۲ برابر می‌شود.

مثال۳: در یک شبکه اگر گره‌ها بیانگر «ایستگاه‌های کار» و جریان در شبکه «کارها» باشند شاخه‌ها می‌توانند:

۱) ماشین‌آلات باشند. ۲) مسیرهای حرکت مواد باشند. ۳) افراد باشند. ۴) انبار کالای نیمه ساخته باشند.

پاسخ: گزینه «۲» ایستگاههای کار که بیانگر گره‌ها هستند می‌باید کارهایی را برای پردازش دریافت کنند که این کارها باید از مسیری به ایستگاههای کار برسند. بنابراین مسیرها بیانگر حرکت مواد خواهند بود.

مثال۴: محدودیت گره ۵ در شکل زیر کدام است؟



۱) $-x_{۲۵} - x_{۳۵} - x_{۴۵} + x_{۵۳} + x_{۵۶} = -۴۰$

۲) $-x_{۲۵} - x_{۳۵} - x_{۴۵} - x_{۶۵} + x_{۵۴} + x_{۶۴} = ۴۰$

۳) $+x_{۲۵} + x_{۳۵} + x_{۴۵} + x_{۶۵} - x_{۵۴} - x_{۵۶} = ۴۰$

۴) $x_{۲۵} + x_{۳۵} + x_{۴۵} + x_{۵۴} = ۴۰$

پاسخ: گزینه «۳» باید توجه داشت که اعداد نوشته شده منفی در کنار گره‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ در واقع تقاضای این گره‌ها هستند. از طرفی ورودی به گره ۵ باید برابر خروجی از گره ۵ باشد و همچنین بتواند تقاضای گره ۵ را برآورده کند. ورودی به گره ۵ برابر $x_{۲۵} + x_{۳۵} + x_{۴۵} + x_{۶۵} + ۴۰$ و خروجی از این گره برابر $x_{۵۴} + x_{۵۶}$ است. ورودی به گره ۵ باید ۴۰ واحد بیشتر از خروجی آن باشد زیرا تقاضای گره ۵ برابر ۴۰ واحد است. با مساوی قرار دادن این دو رابطه به گزینه ۳ می‌رسیم.

فصل یازدهم

«برنامه‌ریزی عدد صحیح»

مقدمه

همانطور که می‌دانید، متغیرها در مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌توانند هر مقداری (اعم از عدد صحیح یا کسری) را به خود اختصاص دهند. اما در بسیاری از موارد، کسری شدن متغیر تصمیم بی‌معناست. مثلا فرض کنید متغیر x نشان دهنده تولید یک نوع محصول(مثل ماشین) باشد. حال اگر پس از حل مسئله، مقدار این متغیر برابر با ۲/۴ شد تکلیف چیست؟ آیا می‌توان ۲/۴دستگاه ماشین تولید کرد؟! در چنین حالتی نیاز به یک مقدار صحیح داریم. شاید با خود بگویید می‌توان این مقدار را گِرد کرد. اما هیچ تضمینی وجود ندارد که عدد گرد شده، جواب بهینه باشد. بدین ترتیب به مسائلی که تمام متغیرهای آن نیازمند صحیح بودن باشند، مسائل « برنامه‌ریزی عدد صحیح محض» گفته می‌شود.

نکته ۱: اگر فقط **برخی** از متغیرهای مسئله نیازمند صحیح بودن باشند (و نه همه)، با مسئله «برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط» مواجه خواهیم بود. روش‌های مختلفی برای حل مسائل عدد صحیح وجود دارد. در این فصل، به بررسی ۲ روش «صفحه برش» و «انشعاب و تحدید» خواهیم پرداخت.

نکته ۲: مدل‌سازی عدد صحیح همانند مدلسازی معمولی است با این تفاوت که در مدل مسئله گفته می‌شود که برخی یا همه متغیرها باید صحیح باشند.

مثال۱: در مدل برنامه ریزی عدد صحیح زیر کدام گزینه جواب بهینه مسئله است؟

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲\\&\text{s.t.}\\&\begin{cases}x_۱ + ۳x_۲ \le ۹\\ ۳x_۱ + x_۲ \le ۷\end{cases}\\&x_۱, x_۲ \ge ० \text{ and integers}\end{aligned}$$

۱) $x_۱ = ۲; x_۲ = ۳; Z = ۹$

۲) $x_۱ = ۲; x_۲ = ۲; Z = ۹$

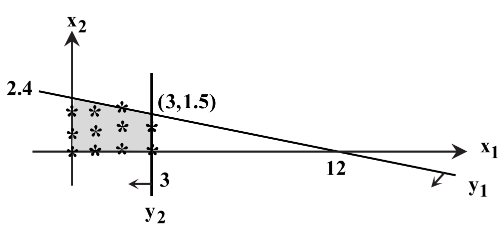
۳) $x_۱ = ०; x_۲ = ۳; Z = ۸$

۴) $x_۱ = ०; x_۲ = ۳; Z = ۹$

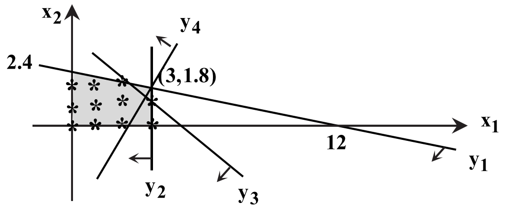
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» راحت‌ترین کار قرار دادن جواب‌ها در مسئله و امتحان شدنی بودن یا نشدنی بودن جواب‌ها است. گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیستند زیرا جواب‌های داده شده در محدودیت‌های مسئله صدق نمی‌کنند و لذا شدنی نیستند. در گزینه‌های ۳ و ۴ مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ در محدودیت‌ها صدق می‌کنند اما با قرار دادن این مقادیر در تابع هدف، مقدار تابع هدف برابر ۹ بدست می‌آید.

روش صفحه برش (برش گوموری)

اساس کار این روش، ایجاد محدودیت‌های جدیدی به مسئله به منظور کاهش منطقه موجه است به طوری که نقاط گوشه منطقه موجه جدید، عدد صحیح باشند. مثلاً فضای شدنی یک مدل برنامه‌ریزی خطی را که در روبرو نشان داده شده است، در نظر بگیرید:



قسمت هاشور زده شده نشان دهنده فضای قابل قبول برای این مسئله است. ستاره‌های مشخص شده در فضای موجه این مسئله، بیانگر نقاط عدد صحیح هستند. یعنی اگر این مسئله به مسئله برنامه ریزی عدد صحیح تبدیل شود، جواب مسئله باید حتماً یکی از این نقاط (ستاره‌ها) باشد. در روش صفحات برش لازم است محدودیت‌های جدیدی به مسئله اضافه شوند تا فضای شدنی مسئله را به نحوی تغییر دهند که این نقاط صحیح (ستاره) در گوشه‌های این منطقه موجه قرار بگیرند؛ ضمن اینکه نباید منجر به حذف هیچ یک از نقاط شدنی صحیح (ستاره) مسئله اصلی بشود.



به عنوان مثال محدودیت $y_۳$ در شکل روبرو، محدودیت درستی است زیرا نه تنها موجب حذف هیچیک از نقاط صحیح فضای شدنی مسئله نشده است، بلکه فضای شدنی جدیدی را به وجود آورده که نقاط رأسی مرتبط با این محدودیت را اعداد صحیح تشکیل می‌دهند. (یعنی منطقه تیره رنگ را از فضای شدنی حذف کرده است). در حالی که محدودیت $y_۴$ را نمی توان به مجموعه محدودیت‌های مسئله اضافه کرد.

در به کارگیری این روش لازم است تمام متغیرهای تصمیم گیری (برای مسائل عدد صحیح محض)، ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها و اعداد سمت راست محدودیت‌ها عدد صحیح باشند. در غیر اینصورت، باید با ضرب عددی مناسب در ۲ طرف محدودیت‌ها، تمام ضرایب را به عدد صحیح تبدیل نمود.

گام‌های این روش به ترتیب زیر است:

۱ـ ابتدا مسئله را بدون در نظر گرفتن محدودیت صحیح بودن متغیرها حل کنید. اگر جواب بهینه صحیح بود که هیچ، در غیر این صورت به گام ۲ بروید.

۲ـ در جدول نهایی سیمپلکس، از بین جواب‌های متغیرهای اساسی، متغیری را که جزء اعشاری بزرگتری دارد انتخاب کنید و برای آن محدودیت برش را براساس فرمول روبرو بسازید:

$$-\sum\left[a_{ij}\right]w_j \le -\left[b_i\right] \Rightarrow -\sum\left[a_{ij}\right]w_j + S_{g_i} = -\left[b_i\right]$$

توجه کنید اگر بیش از یک متغیر شرایط انتخاب شدن را داشت می‌توان یکی را به دلخواه انتخاب کرد اما بهتر است برای داشتن معادله بُرش قوی‌تر، برای همه متغیرهای منتخب، مقدار $\frac{[b_i]}{\sum[a_{ij}]}$ را محاسبه کرده و متغیری را که مقدار این عبارت برای آن بیشتر است انتخاب نمود.

در رابطه بالا، $\left[b_i\right]$ برابر با جزء اعشاری عدد سمت راست سطری است که قرار است برای آن محدودیت برش نوشته شود (سطری که در گام ۲ انتخاب شد).

S_{g_i} متغیر جدید مسئله است. $[a_{ij}]$ جزء اعشاری ضرایب متغیرها در سطر مورد نظر است و w_j نیز متغیر متناظر با این ضرایب می‌باشد.

نکته ۳: برای پیدا کردن جزء اعشاری a_{ij} باید به این صورت اقدام شود:

$$a_{ij} - \left\lfloor a_{ij} \right\rfloor = [a_{ij}]$$

a_{ij} جزء صحیح a_{ij} جزء اعشاری

مثال۲: اگر $a_{ij} = \frac{۸}{۵}$ بود جزء اعشاری a_{ij} به صورت روبرو است:

$$\frac{۸}{۵} - \left\lfloor \frac{۸}{۵} \right\rfloor = \frac{۸}{۵} - ۱ = \frac{۳}{۵}$$

حال اگر $a_{ij} = -۰/۳$ بود:

$$[a_{ij}] = -۰/۳ - \left\lfloor -۰/۳ \right\rfloor = -۰/۳ - (-۱) = ۰/۷$$

برای b_j هم به همین صورت اقدام می‌کنیم.

۳ـ محدودیت جدید ایجاد شده را وارد جدول نهایی سیمپلکس نموده و از طریق سیمپلکس دوآل آن را حل کنید. اگر جواب بدست آمده به صورت عدد صحیح بود که هیچ وگرنه به گام ۲ بروید.

مثال۳: مدل زیر به همراه جدول نهایی آن داده شده است: (مقدار بهینه تابع هدف کدام گزینه است؟)

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۱۰x_۲ \\ &\text{s.t.} \\ &x_۱ + ۵x_۲ \le ۱۲ \\ &x_۱ \le ۳ \\ &x_۱, x_۲ \in (۰,۱,۲,۳,\ldots) \end{aligned}$$

پایه	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	جواب
Z	۱	۰	۰	۲	۱	۲۷
$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۹}{۵}$
$x_۱$	۰	۱	۰	۰	۱	۳

۱) ۲۵   ۲) ۲۶   ۳) ۲۷   ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن جواب بهینه عدد صحیح این مسئله، متغیری را که جزء اعشاری بزرگتری دارد انتخاب می‌کنیم. متغیر $x_۲$ برابر با $\frac{۹}{۵}$ یا در واقع $۱\frac{۴}{۵}$ است که جزء اعشاری آن برابر با $\frac{۴}{۵}$ می‌باشد. متغیر $x_۱$ هم که جزء اعشاری ندارد (یعنی جزء اعشاری آن صفر است). بدین ترتیب سطر متناظر با متغیر $x_۲$ انتخاب و محدودیت برش برای آن نوشته می‌شود. در سطر متناظر با آن، مقادیر متناظر با متغیرهای $S_{۱,۲}$ دارای مقدار اعشار هستند.

پس جزء اعشاری آن‌ها به همراه متغیر متناظرشان در فرمول می‌آید. داریم:

$$-\tfrac{۱}{۵}s_۱ - \tfrac{۴}{۵}s_۲ + s_{g_۱} = -\frac{۴}{۵}$$

مدرسان شریف

فصل دوازدهم

«برنامه‌ریزی صفر و یک»

مقدمه

در مدل‌های برنامه‌ریزی صفر و یک، متغیرهای تصمیم‌گیری یا مقدار صفر را اختیار خواهند کرد یا یک. به عنوان مثال فرض کنید مدیر یک رستوران در صدد افتتاح یک رستوران دیگر است. اما از بین مکان‌های مختلفی که او برای ایجاد رستوران در نظر گرفته است فقط می‌خواهد یکی از آن‌ها را انتخاب کند. بدین ترتیب متغیر متناظر با مکانی که برای ایجاد رستوران انتخاب می‌شود مقدار ۱ و متغیرهای متناظر با سایر مکان‌ها که انتخاب نشده‌اند مقدار صفر را به خود اختصاص خواهند داد.

مدلسازی مسائل صفر و یک

مدل‌سازی اینگونه مسائل را با ذکر چند مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۱: فرض کنید سه پروژه A، B و C وجود دارند. تحت هر یک از شرایط زیر محدودیت یا محدودیت‌های مربوطه را بنویسید:

الف ـ پروژه‌های A و B یا هر دو انتخاب شوند و یا هیچ یک انتخاب نشوند. ب ـ هر سه پروژه انتخاب شوند.

ج ـ حداکثر ۲ پروژه انتخاب شود.

د ـ هر سه پروژه یا انتخاب شوند و یا هیچ یک انتخاب نشوند.

ه ـ انتخاب پروژه A مشروط به انتخاب پروژه‌های B و C باشد.

و ـ حداقل یک پروژه انتخاب شود.

ز ـ انتخاب A یا B مشروط به انتخاب C باشد.

ح ـ انتخاب A مشروط به عدم انتخاب C باشد.

ط ـ فقط یک پروژه انتخاب شود.

ک ـ انتخاب A و B مشروط به انتخاب C باشد.

ل ـ انتخاب A و B مشروط به عدم انتخاب C باشد.

پاسخ: با تعریف متغیرهای صفر یا یک x_j که در آن صفر معرف عدم انتخاب پروژه j ام و ۱ معرف انتخاب پروژه j ام است می‌توان موارد را به شکل زیر فرموله کرد:

الف) $x_A - x_B = ۰$ ب) $x_A + x_B + x_C = ۳$ ج) $x_A + x_B + x_C \le ۲$

د) $x_A - x_B = ۰\ ,\ x_B - x_C = ۰$ هـ) $۲x_A \le x_B + x_C$ و) $x_A + x_B + x_C \ge ۱$

ز) $x_A + x_B \le ۲x_C$ ح) $x_A = ۱ - x_C$ ط) $x_A + x_B + x_C = ۱$

ک) $x_A + x_B - x_C \le ۱$ ل) $x_A + x_B + ۲x_C \le ۱$

در قسمت الف به این دلیل از فرمول $x_A - x_B = ۰$ استفاده شده است که چنانچه هر ۲ پروژه انتخاب شوند، آنگاه $x_A = x_B = ۱$، در نتیجه $x_A - x_B = ۰$ و اگر هیچ کدام انتخاب نشوند، آنگاه $x_A = x_B = ۰$ که باز هم فرمول $x_A - x_B = ۰$ نتیجه می‌دهد. در مورد سایر گزینه‌ها نیز این استدلال به کار رفته است. در واقع فرمول موردنظر باید به گونه‌ای نوشته شود که حالت‌های مختلف خواسته شده در مسئله را نتیجه دهد.

مثال ۲: گر x_k و x_m به ترتیب متغیرهای ۰ و ۱ پروژه‌های k و m باشند محدودیت $x_k + x_m \le ۰$ به کدام معنی است اگر مقدار ۱ برای این متغیرها به معنی انتخاب شدن باشد.

۱) پروژه k نمی‌تواند انتخاب شود مگر اینکه پروژه m انتخاب شده باشد.

۲) اگر پروژه m انتخاب شده باشد پروژه k نیز باید انتخاب شود.

۳) پروژه m نمی‌تواند انتخاب شود مگر اینکه پروژه k انتخاب شده باشد.

۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه «۴» باتوجه به اینکه $x_k + x_m \le ۰$ است لذا هیچ کدام از این متغیرها نمی‌توانند مقدار ۱ را اختیار کنند. تنها مقداری که این متغیرها می‌توانند اختیار کنند صفر است که به معنای عدم اجرای پروژه‌ها است. هیچ یک از گزینه‌ها بیانگر حالت عدم انتخاب پروژه‌ها نیستند.

نکته ۱: درصورتیکه قرار باشد از ۲ محدودیت یکی انتخاب شود، ۲ راه وجود دارد.

راه اول: به سمت راست هر ۲ محدودیت، عبارت (My) و محدودیت جدید $y_1 + y_2 = 1$ را به مسئله اضافه می‌کنیم. توجه داشته باشید که متغیر جدید y، از نوع صفر یا یک است. البته اگر علامت محدودیتی به صورت بزرگتر یا مساوی $(\geq)$ باشد، به طرف راست آن باید $(-My)$ اضافه کرد.

فلسفه این کار این است که با توجه به اینکه $y_1 + y_2 = 1$ و y از نوع صفر یا یک است پس یکی از yها مقدار یک و دیگری مقدار صفر را اختیار می‌کند، در نتیجه به سمت راست یکی از محدودیت‌ها عبارت My و دیگری صفر اضافه می‌شود و چون M عدد بزرگی است پس اضافه نمودن یک مقدار زیاد به سمت راست محدودیت کوچکتر مساوی باعث می‌شود عملاً آن محدودیت زائد شود.

راه دوم: به سمت راست یکی از محدودیت‌ها عبارت (My) را اضافه کرده و به سمت راست محدودیت دیگر، عبارت $M(1-y)$. در این حالت نیازی به نوشتن معادله $y_1 + y_2 = 1$ نمی‌باشد. در واقع این راه، همان راه حل اول است. با این تفاوت که معادله $y_1 + y_2 = 1$ را در راه حل اول به معادله $y_1 = 1 - y_2$ یا $y_2 = 1 - y_1$ تبدیل و در محدودیت‌ها جایگذاری نموده‌ایم. دقت کنید M عدد بزرگی است.

مثال۳: در یک مدل لازم است فقط یکی از محدودیت‌های $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100$ یا $x_1 + 5x_2 + 0/5x_3 \leq 100$ برقرار باشد. محدودیت جایگزین کدام است؟

۱) $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 + My_1 ; x_1 + 5x_2 + 0/5x_3 \leq 100 + My_2 ; y_1 + y_2 \leq 1 ; y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1$

۲) $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 + My ; x_1 + 5x_2 + 0/5x_3 \leq 100 + M(1-y) ; y = 0 \text{ or } 1$

۳) $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq (100 + M)y_1 ; x_1 + 5x_2 + 0/5x_3 \leq 100 + My_2 ; y_1 + y_2 = 1 ; y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1$

۴) $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 + My_1 ; x_1 + 5x_2 + 0/5x_3 \leq 100 + My_2 ; y_1 + y_2 \geq 1 ; y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1$

پاسخ: گزینه «۲» در گزینه ۲ وقتی $y = 0$ می‌شود یکی از محدودیت‌ها برقرار و محدودیت دیگر زائد می‌شود و وقتی $y = 1$ می شود محدودیت زائد شده حالت قبل برقرار و محدودیت برقرار شده حالت قبل به زائد تبدیل می‌شود. بنابراین گزینه ۲ صحیح است. گزینه ۱ درست نیست زیرا y_1 و y_2 می‌توانند هر دو برابر صفر شوند، به این معنی که سمت راست محدودیت‌های ذکر شده صفر خواهند شد که غلط است. در گزینه ۳ وقتی y_1 برابر صفر می‌شود سمت راست یک محدودیت صفر خواهد شد که نمی تواند درست باشد زیرا سمت راست محدودیت باید برابر ۱۰۰ و نه صفر باشد. گزینه ۴ درست نیست زیرا جمع متغیرهای y_1 و y_2 بزرگتر یا مساوی ۱ است، به این معنی که هر دو متغیر می‌توانند مقدار ۱ را اختیار کنند. در این حالت هر دو محدودیت می‌توانند زائد باشند که درست نیست.

نکته ۲: درحالت کلی، اگر قرار باشد از میان N محدودیت، K محدودیت انتخاب شود، پس از اضافه کردن عبارت My ویا $-My$ به سمت راست محدودیت‌ها، محدودیت جدید $\sum y_i = N - K$ را به مسئله اضافه می‌کنیم.

مثال۴: اگر قرار باشد از ۳ محدودیت زیر، یکی انتخاب شود، محدودیت جایگزین کدام است؟

$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 \end{aligned}$$

۱)
$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 + My_1 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 + My_2 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 - My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

۲)
$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 - My_1 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 - My_2 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 - My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

۳)
$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 - My_1 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 - My_2 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 + My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

۴)
$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 + My_1 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 + My_2 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 - My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به ۲ محدودیت اول عبارت My (چون علامت $\leq$ دارند) و به محدودیت سوم عبارت $-My$ اضافه می‌کنیم (چون علامت $\geq$ دارد):

$$\begin{aligned} 4x_A + 5x_B + x_C &\leq 21 + My_1 \\ 3x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 18 + My_2 \\ x_A + 2x_B + 4x_C &\geq 25 - My_3 \end{aligned}$$

در اینجا N برابر با ۳ و K برابر با ۱ می‌باشد. لذا $N-K$ برابر با ۲ است. پس محدودیت جدید $y_1 + y_2 + y_3 = 2$ را به مسئله اضافه می کنیم ($y_i = 0 \text{ or } 1$).

فصل سیزدهم

« برنامه‌ریزی پویا »

مقدمه

از برنامه‌ریزی پویا یا دینامیک (Dynamic programming) برای حل مسائل چند مرحله‌ای استفاده می‌شود. اساس این تکنیک، استفاده از رویه رو به عقب (پس رو) است. البته می‌توان مسائل را با استفاده از رویه رو به جلو (پیش رو) نیز حل نمود. در واقع در برنامه‌ریزی پویا، مسائل پیچیده، تبدیل به مراحل ساده‌تری می‌شوند که با حل هر مرحله، جواب نهایی مسئله اصلی بدست می‌آید. مفاهیم مهم برنامه‌ریزی پویا عبارتند از:

ـ **مرحله (Stage):** یک مرحله بیانگر بخشی از کل مسئله است که می‌توان برای آن یک تصمیم اتخاذ کرد. در هر مرحله تعدادی گزینه وجود دارد که بهترین آن‌ها به عنوان تصمیم آن مرحله نامیده می‌شود. این تصمیم ممکن است برای مسئله اصلی بهینه نباشد اما در دستیابی به سیاست تصمیم بهینه مفید است.

ـ **وضعیت (State):** در هر مرحله، ممکن است چندین وضعیت وجود داشته باشد که با توجه به هر وضعیت، می‌توان یک تصمیم برای آن مرحله و وضعیت معین کرد. به عبارت دیگر چگونگی فرآیند تصمیم در یک مرحله، وضعیت آن مرحله نامیده می‌شود. متغیرهایی که تعیین‌کنندهٔ وضعیت فرآیند تصمیم در هر مرحله هستند، یعنی وضعیت سیستم را در یک مرحلهٔ خاص نشان می‌دهند، متغیرهای وضعیت نامیده می‌شوند. تعداد این متغیرهای وضعیت باید تا حد ممکن کم باشد زیرا هرچه تعداد این متغیرها بیشتر باشد، فرآیند تصمیم پیچیده‌تر خواهد شد. وضعیت معمولاً توسط یک معادله ریاضی بیان می‌شود که به آن تابع انتقال (Transformation Function) می‌گویند.

ـ **اصل بهینگی**: اصل بهینگی بیان می‌کند که «یک سیاست بهینه (یک توالی از تصمیمات) دارای این ویژگی است که وضعیت و تصمیم مرحله i ام هر چه که باشد، مابقی تصمیمات باید با توجه به وضعیت منتج از تصمیم i ام بهینه باشند». این بدان معنی است که یک تصمیم اشتباه در یکی از مراحل، مانع از اتخاذ تصمیمات بهینه و صحیح در سایر مراحل نمی‌شود.

در هر مرحله از برنامه‌ریزی پویا، برای تعیین ارزش تصمیم بهینه از یک معادله یا تابع تحت عنوان «تابع بازگشتی» استفاده می‌شود. این تابع به صورت مقابل است:
$$f_i(s_i, x_i) = r_i(s_i, x_i) + f_{i-1}(s_{i-1}, x_{i-1})$$

در این تابع، $f_i(s_i, x_i)$ برابر با عایدی تجمعی تا مرحله i، $r_i(s_i, x_i)$ برابر با عایدی مرحله i، و $f_{i-1}(s_{i-1}, x_{i-1})$ برابر با عایدی تجمعی تا مرحله $i-1$ است. x_i متغیر تصمیم‌گیری مرحله i ام، و s_i معرف وضعیت سیستم قبل از ورود به مرحله i ام می‌باشد.

اینک به چند مثال توجه کنید.

مثال۱: کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد یک مسئله برنامه ریزی پویا درست است؟

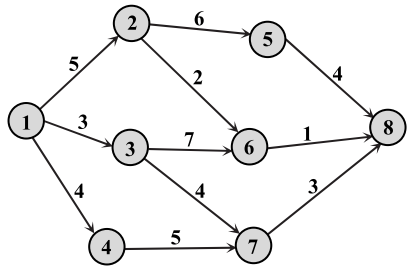
۱) هر مسئله برنامه‌ریزی پویا چندین مرحله دارد و در هر مرحله حالت‌های مختلفی وجود دارد.
۲) تصمیم در هر مرحله وابسته به تصمیمات مراحل دیگر است.
۳) یک رویه استاندارد برای حل مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد.
۴) هر سه گزینه

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه در یک مسئله برنامه‌ریزی پویا، مراحل مختلف وجود دارد و هر تصمیم در یک مرحله به سایر تصمیمات در مراحل دیگر بستگی خواهد داشت و نیز از سوی دیگر رویه یا الگوریتم استانداردی برای حل اینگونه مسائل وجود ندارد و اینکه چگونه یک مسئله حل خواهد شد بستگی به نوع مسئله خواهد داشت.

مثال۲: برنامه‌ریزی پویا رویکردی است که مسئله را به مسائل کوچکتر تقسیم می‌کند. هر یک از مسائل جزئی:

۱) یک متغیر تصمیم نامیده می‌شود. ۲) یک مرحله نامیده می‌شود. ۳) یک حالت نامیده می‌شود. ۴) هیچ کدام

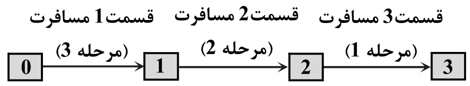
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در حل مسائل با استفاده از برنامه ریزی پویا، مسئله به مسائل کوچکتر یا جزئی‌تر تقسیم می‌شود که به هر یک از این مسائل، یک مرحله گفته می‌شود.

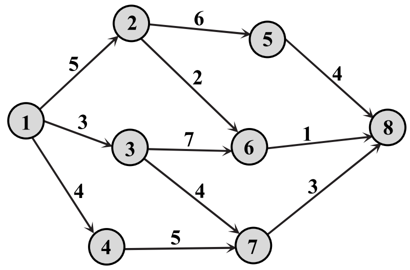


مثال۳: مسئله کوتاهترین مسیر:

در شکل روبرو فرض کنید مسافری که در شهر ۱ قرار دارد می‌خواهد به شهر ۸ بـرود. همــانطور کـه ملاحظه می‌شود مسیرهای متفاوتی برای این کار وجود دارد. اعداد نوشته شده بر روی شاخه‌ها معرف مسافت بین دو شهر است. این مسافر کدام مسیر را انتخاب کند تا کمترین فاصله را طی کند؟

۱) ۸ - ۷ - ۳ – ۱　　۲) ۸ - ۶ - ۳ – ۱　　۳) ۸ - ۷ - ۴ – ۱　　۴) ۸ - ۶ - ۲ - ۱





پاسخ: گزینه «۴» در روش محاسباتی رو به عقب یا پس رو، تحلیل مسئله را از آخرین مرحله شروع کرده و به اولین مرحله حرکت می‌کنیم. نتیجه تحلیل در هر مرحله بصورت سیاست بهینه (تصمیم‌ها) ظاهر می‌شود که این خود به وضعیت نامعلوم سیستم بخصوص در مرحله نهایی بستگی دارد. در اینجا ابتدا باید مرحله را تعریف کرد. همانگونه که ملاحظه می‌شود مسافرت را می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد که هر قسمت را می‌توان به عنوان یک مرحله در نظر گرفت. شکل زیر این مراحل را برای محاسبات پس رو نشان می‌دهد:

در روش محاسباتی پس رو، سومین قسمت از مسافرت به عنوان اولین مرحله در نظر گرفته شده و سپس برای این مرحله با توجه به وضعیت‌های نامعلومی که وجود دارد بهترین تصمیم اتخاذ می‌شود. در واقع در سومین قسمت مسافرت بهترین تصمیم برای رسیدن به گره نهایی ۸ گرفته می‌شود که این خود بستگی به این دارد که مسافر مزبور در گره ۵، گره ۶ و یا گره ۷ قرار داشته باشد. روش محاسباتی پس رو سپس به همین نحو عمل کرده و با رفتن به مراحل قبلی، بهترین تصمیم را در هر مرحله تعیین می‌کند. نتیجه حاصل از مرحله ۲ سیاست یا سیاست‌های بهینه‌ای است که برای آخرین دو مرحله بهینه هستند که مجدداً این خود بستگی به وضعیت نامعلوم سیستم در مرحله ۲ دارد، موقعی که وارد مرحله ۲ می‌شود. در مسئله کوتاه‌ترین مسیر، روش محاسباتی پس رو به قسمت ۲ مسافرت حرکت کرده و بهترین ترتیب ممکنه مسیرها را برای رسیدن به قسمت ۲ مسافرت تعیین می‌کند. آخرین مرحله حرکت به سمت مرحله ۳ (اولین قسمت از مسافرت) است که در این مرحله بهترین مسیر برای رفتن از گره ۱ به سایر گره‌ها (مراحل ۱ و ۲) معین خواهد شد. بدیهی است در این مرحله مسیر بهینه از گره ۱ به گره ۸ معین خواهد شد. حال این روش محاسباتی برای مسئله بکار برده می‌شود.

تصمیم، x_1 / وضعیت ورودی، s_1 (سفر از گره)	سفر به گره	سیاست بهینه	
	۸	تصمیم x_1^*	مسافت تجمعی f_1^*
۵	۴ = ۰ + ۴	۸	۴
۶	۱ = ۰ + ۱	۸	۱
۷	۳ = ۰ + ۳	۸	۳

جدول بالا مربوط به تصمیم‌گیری در مورد مرحله ۱ (قسمت۳) مسئله است. همانطور که ملاحظه می‌کنید، تنها مقصد در این مرحله، گره ۸ می‌باشد. در این مرحله، از ۳ گره ۵ و ۶ و۷ می‌توان به گره ۸ رسید. مسافت هریک از این گره‌ها تا مقصد مشخص شده است. کمترین فاصله مربوط به مسیر گره ۶ تا گره ۸ است. لذا تصمیم بهینه ما در این مرحله، گره ۶ (مسیر ۶ به ۸) است. حال با یک حرکت برگشتی به مرحله ۲ می‌رویم.

داریم:

تصمیم، x_2 / وضعیت ورودی، s_2 (سفر از گره)	سفر به گره			سیاست بهینه	
	۵	۶	۷	تصمیم x_2^*	مسافت تجمعی f_2^*
۲	۱۰ = ۴ + ۶	۳ = ۱ + ۲		۶	۳
۳		۸ = ۱ + ۷	۷ = ۳ + ۴	۷	۷
۴			۸ = ۳ + ۵	۷	۸

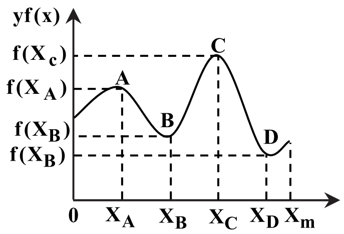
مدرسان شریف

فصل چهاردهم

«برنامه‌ریزی غیر خطی»

مقدمه

همانطور که در فصل‌های اولیه کتاب گفته شد، فرض اصلی برنامه‌ریزی خطی، خطی بودن (یا همان جمع پذیر بودن) تابع هدف و محدودیت‌هاست. علی‌رغم اینکه در بسیاری از مدل‌ها می‌توان این فرض را برقرار ساخت، اما مواردی هم پیش می‌آید که نمی‌توان این شرط را در مدل اعمال نمود. مثل حالتی که سود در سطوح مختلف فروش یکسان نباشد و به صورت منحنی رشد نماید. در چنین حالت‌هایی با برنامه‌ریزی غیرخطی مواجه هستیم. مفهوم بهینگی در مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی تفاوت عمده‌ای با برنامه‌ریزی خطی دارد. در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به دلیل وجود رابطه خطی بین متغیرها، فقط یک جواب بهینه می‌توانست وجود داشته باشد (صرف نظر از حالت خاص جواب بهینه چندگانه).



اما در مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی، امکان اینکه یک مسأله دارای چندین نقطه حداکثر یا حداقل باشد وجود دارد. در کل، ۲ نوع بهینه وجود دارد:

۱ـ بهینه مطلق که در تمام دامنه مسأله بهینه است.

۲ـ بهینه نسبی که فقط در همسایگی خود بهینه است، به این نقاط بهینه، اکسترمم نسبی نیز گفته می‌شود.

پس می‌توان علاوه بر نقطه بهینه مطلق، چندین نقطه بهینه نسبی نیز یافت.

مثلا به تابع غیر خطی روبرو توجه کنید:

در این تابع، نقطه A نقطه ماکزیمم نسبی است اما در مقابل، نقطه C ماکزیمم مطلق است زیرا در کل نمودار، نقطه‌ای بالاتر از آن وجود ندارد. یا مثلاً نقطه B نقطه مینیمم نسبی است زیرا فقط در همسایگی خود پایین‌ترین است. اما در مقابل، نقطه D مینیمم مطلق است. زیرا نه تنها در همسایگی خود، بلکه در کل نمودار، پایین‌ترین مقدار را دارد.

نکته ۱: یک بهینه‌ی مطلق قطعاً بهینه نسبی است ولی نقطه بهینه نسبی ممکن است بهینه مطلق نباشد.

حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی

در این فصل، مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به ۲ دسته مسائل «بدون محدودیت» و «بامحدودیت» تقسیم شده‌اند. مسائل بدون محدودیت خود به ۲ دسته «تک متغیره» و «چند متغیره» تقسیم شده‌اند.

الف ـ حل مسائل تک متغیره و بدون محدودیت: در اینگونه مسائل که تابع هدف فقط از یک نوع متغیر تشکیل شده است، اگر تابع از نوع درجه ۲ (یعنی با توان۲) باشد، کافی است یکبار از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار داد و ریشه آن را بدست آورد. مقدار بدست آمده برابر با نقطه بهینه این تابع خواهد بود. اما اینکه این نقطه بهینه، ماکزیمم است یا مینیمم، باید مشتق دوم تابع را بدست آورد. اگر مقدار بدست آمده بزرگتر از صفر باشد، نقطه بهینه مینیمم و اگر کوچکتر از صفر باشد، ماکزیمم خواهد بود.

مثال ۱: نقطه بهینه تابع درجه ۲ مقابل، کدام گزینه است؟ $f(x) = ۸x^۲ - ۳۲x - ۴۰$

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» همانطور که گفته شد، در تابع درجه ۲ مشتق اول را محاسبه و برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$f'(x) = ۱۶x - ۳۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس نقطه $x = ۲$ یک نقطه بهینه است. برای تعیین نوع این نقطه، مشتق دوم را محاسبه می‌کنیم. داریم: $f''(x) = ۱۶$. باتوجه به اینکه مشتق دوم بزرگتر از صفر است، لذا نقطه $x = ۲$ یک نقطه مینیمم برای این تابع می‌باشد.

اما اگر درجه تابع بیش از ۲ بود (۳ یا بیشتر)، برای تعیین نقطه بهینه، مشتق اول را محاسبه کرده برابر صفر قرار می‌دهیم. اما برای تعیین نوع این نقطه، باید مشتقات بعدی تابع را نیز بدست آورده و این نقطه بهینه را در آن‌ها گذاشت و مقدار آن‌ها را بدست آورد. n امین مشتقی که مقدار آن عددی غیر از صفر شد را در نظر بگیرید. اگر n، عددی زوج باشد، نقطه بهینه یک اکسترمم خواهد بود و اگر n فرد باشد، این نقطه، نقطه عطف تابع خواهد بود. برای تعیین نوع اکسترمم، اگر مشتق n ام مثبت باشد، نقطه اکسترمم ماکزیمم وگرنه مینیمم خواهد بود.

مثال ۲: نقطه بهینه تابع درجه ۴ مقابل، کدام گزینه است؟ $f(x) = 2(x-1)^4 + 12$

۱) ۱ و اکسترمم　　۲) ۱ و عطف　　۳) ۲ و اکسترمم　　۴) ۲ و عطف

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مشتق اول را محاسبه کرده برابر صفر قرار می‌دهیم: $f(x)' = 8(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$

پس نقطه $x = 1$ نقطه بهینه برای این تابع است. برای تعیین نوع این نقطه، مشتقات بعدی را محاسبه کرده و این نقطه را در آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$f(x)'' = 24(x-1)^2 \to x = 1 \Rightarrow 24(1-1)^2 = 0$$

$$f(x)''' = 48(x-1) \to x = 1 \Rightarrow 48(1-1) = 0$$

$$f(x)'''' = 48$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، مشتق چهارم دارای مقداری غیر از صفر شده است. در نتیجه $n = 4$. با توجه به اینکه n زوج است، نقطه $x = 1$ اکسترمم بوده و چون n مقداری مثبت است، از نوع مینیمم می‌باشد.

مثال ۳: نقطه $x = 1$ برای تابع $(2x-2)^3$ یک نقطه:

۱) ماکزیمم است.　　۲) مینیمم است.　　۳) عطف است.　　۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه «۳» مشتق اول تابع رابطه $6(2x-2)^2$، مشتق دوم رابطه $24(2x-2)$ و مشتق سوم عدد مثبت ۴۸ را بدست می‌دهد. چون مشتق سوم مثبت است لذا نقطه $x = 1$ نقطه عطف تابع است.

مثال ۴: در مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی $\text{Max } Z = -8x^2 - 14x - 32$ کدام یک از گزینه‌های زیر تابع هدف را در فاصله $1 \le x \le 10$ به حداکثر می‌رساند؟

۱) $x = 3$　　۲) $x = 10$　　۳) $x = 5$　　۴) $x = 1$

پاسخ: گزینه «۴» چون $b^2 - 4ac$ منفی است و ضریب x^2 در تابع داده شده منفی است لذا، هرچه مقدار x کمتر باشد تابع حداکثرتر می‌شود. بنابراین $x = 1$ تابع داده شده را حداکثر خواهد کرد.

مثال ۵: اگر تابع هزینه تولید یک شرکت به صورت $TC = x^3 - 50x^2 + 2x$ باشد کدام مقدار x هزینه متوسط را حداقل می‌کند؟

۱) ۲۴　　۲) ۲۵　　۳) ۲۳　　۴) ۲۶

پاسخ: گزینه «۲» هزینه متوسط از تقسیم تابع هزینه کل بر مقدار x بدست می‌آید. به عبارت دیگر تابع هزینه متوسط بصورت $\frac{x^3 - 50x^2 + 2x}{x} = x^2 - 50x + 2$ در خواهد آمد. با گرفتن مشتق و برابر صفر قرار دادن آن $x = 25$ بدست می‌آید. چون مشتق دوم مثبت است پس $x = 25$، min دستگاه است.

ب ـ حل مسائل چند متغیره و بدون محدودیت: برای تعیین نقاط پایدار (اکسترمم، عطف یا زینی) در یک تابع چند متغیره، باید مشتقات جزئی مرتبه اول آن تابع را برابر صفر قرار داد تا نقطه مورد نظر پیدا شود. در ادامه، برای تعیین نوع این نقطه مراحل زیر را دنبال نمایید:

۱ـ ماتریس هشین (H_x) را بنویسید. ماتریس هشین (یا هسیان) برای یک تابع n متغیره بصورت زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$