مدرسان شریف

فصل اول

«معادلات تعادل»

در این فصل با توجه به اهمیت موضوعات و این که ۳۵ درصد سؤالات آزمون‌های ارشد از این بخش مطرح می‌شود به موارد زیر پرداخته شده است.

۱) شناخت کمیت‌های اسکالر و برداری و توانایی تبدیل واحدها در سیستم‌های BS و SI در محدوده مورد نیاز آزمون‌های کارشناسی ارشد.

۲) شناخت بردارها و روش محاسبات مربوط به این نوع کمیت‌ها شامل: اساس کمیت‌های برداری، روش‌های گوناگون ترکیب کمیت‌های برداری (ضرب داخلی، ضرب خارجی، برآیند، ضرب مختلط و ...) و تجزیه و تصویر یک بردار (در صفحه و فضا).

۳) تعاریف اساسی و شناخت پارامترهای مهم در بحث استاتیک شامل: نیرو، گشتاور نسبت به یک نقطه و یک محور، جفت نیرو، سیستم نیروهای معادل، رنج و انواع بارهای متمرکز و گسترده.

۴) چگونگی ترسیم دیاگرام جسم آزاد یک قطعه (یا یک نقطه مادی) صُلب در صفحه و فضا، شناخت انواع تکیه‌گاه‌ها و اتصالات، روابط برداری و اسکالر تعادل در صفحه و فضا، سیستم قرقره‌های مرکب بدون اصطکاک، چگونگی حل مسائل تعادل، روش تشخیص درجه نامعینی سازه‌ها و حالات خاص تعادل مانند: اجسام دو نیرویی و سه نیرویی و نیروهای همگرا (در صفحه و فضا).

۵) بکارگیری روابط تعادل در یکی از انواع مکانیزم‌های پرکاربرد عملی و تئوری به نام قاب (ماشین) جهت حل مسائل مربوطه.

مقدمـه

به طور کلی علم مکانیک به دو شاخه اصلی استاتیک و دینامیک تقسیم می‌شود. موضوعی که در این کتاب به آن پرداخته می‌شود مبحث استاتیک است.

در این کتاب سعی شده است تمامی مطالب لازم گردآوری شود تا به شما دانشجویان گرامی برای شرکت در آزمون‌های تشریحی و تستی کمک گردد.

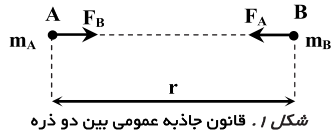
علم استاتیک این گونه تعریف می‌شود: بررسی اجسام و سیستم‌های در حال تعادل (سکون) یا در حال حرکت با سرعت ثابت.

آنچه در این فصل اهمیت دارد، معرفی مفاهیم و اصول اساسی استاتیک (صفحه‌ای و فضایی) از جمله: قوانین نیوتن، معرفی پارامترهای اصلی تعادل شامل نیروها و گشتاورها، روابط تعادل و دیگر جزئیات است. در ابتدا به عنوان اصول اولیه بحث، قانون جاذبه عمومی و قانون دوم نیوتن بررسی می‌شوند.

درسنامه (۱): قوانین عمومی و کلیات

الف) قانون جاذبه عمومی نیوتن

فرض کنید دو نقطه مادی A و B داشته باشیم، طبق قانون جاذبه عمومی، نیروی جاذبه‌ای بین این دو نقطه مادی وجود دارد که باعث می‌شود اثر هر یک روی دیگری، مساوی و مختلف‌الجهت اثر دیگری روی آن باشد.



شکل ۱. قانون جاذبه عمومی بین دو ذره

بدین معنا که جرم A نیروی جاذبه F_A به جرم B و جرم B نیروی جاذبه F_B به جرم A وارد می‌کند و داریم:

$$F_A = F_B = F$$

توجه داشته باشید که مقدار این نیرو با حاصل‌ضرب جرم‌ها نسبت مستقیم و با مجذور فاصله دو جسم از یکدیگر نسبت معکوس دارد. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$F = G\frac{m_A \cdot m_B}{r^2}$$

G، ثابت جهانی موسوم به ثابت گرانش بوده و مقدار آن در سیستم SI برابر است با:

$$۶/۶۷۳\times ۱۰^{-۱۱}\ \frac{m^3}{kg.s^2}$$

ب) قانون دوم نیوتن

این قانون را به عنوان یکی از قوانین اساسی حرکت و حتی تعادل می‌شناسند. طبق این قانون شتاب حرکت یک جرم تحت اثر نیروی F با جرم آن نسبت مستقیم دارد. این شتاب در جهتی است که نیرو بر آن اثر می‌کند، یعنی: $F = m.a$

با توجه به توضیحات فوق، روابط مقابل را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F = m_B.a_B \\ F = m_A.a_A \end{cases} \Rightarrow m_B.a_B = m_A.a_A \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}$$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری

برای اندازه‌گیری کمیات فیزیکی از واحدهای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. هر کدام از کمیت‌های طول، سطح، حجم، زمان، نیرو، سرعت، شتاب، درجه حرارت و ... با واحد مربوط به خود اندازه‌گیری می‌شوند. برای اندازه‌گیری هر یک از این کمیت‌ها یک واحد معین انتخاب می‌شود. مثلاً برای طول واحدهای میلیمتر، سانتیمتر، متر، فوت، اینچ و ... انتخاب شده است.

واضح است که در صورت تعیین واحد طول، واحدهای سطح و حجم نیز خود به خود معین می‌شوند. واحدی مثل طول «واحد اصلی» یا اولیه و واحدهایی مثل سطح و حجم که بر مبنای واحد طول تعیین می‌شوند، «واحدهای ثانویه» یا فرعی نامیده می‌شوند.

جرم نیز واحد اصلی دیگری است که خاصیت هر ماده می‌باشد. به عبارتی می‌توان گفت، دو ماده در صورتی دارای یک جرم هستند که در یک نقطه معین روی زمین، وزن مساوی داشته باشند.

برای اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی از یکی از دو سیستم انگلیسی یا متریک استفاده می‌شود که در زیر به شرح آنها پرداخته می‌شود.

الف) سیستم انگلیسی

در سیستم انگلیسی، جرم یک ماده که دارای وزن یک پوند در سطح دریا می‌باشد، واحد جرم است و پوند جرم (Pound mass) نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم «پوندال» (Poundal) است و عبارت است از نیرویی که به جسمی به جرم یک «پوند جرم»، شتاب یک فوت بر مجذور ثانیه بدهد. توجه داشته باشید که وزن یک پوند جرم، $(F = M.g)$ یک پوندال است و در آن g شتاب ثقل زمین در محل آزمایش است. اگر محل آزمایش سطح دریا باشد، وزن این جرم برابر یک پوند است و چون $g = ۳۲/۲\frac{ft}{sec^۲}$ (در سطح دریا) است، بنابراین وزن یک پوند معادل است با:

$$۱(\text{Pound}) = (\text{یک پوند جرم}) \times (۳۲/۲\frac{ft}{sec^۲}) = ۳۲/۲\ (\text{یک پوند جرم}) \times (۱\frac{ft}{sec^۲}) = ۳۲/۲(\text{Poundal})$$

ب) سیستم متریک

سیستم متریک شامل دو سیستم اندازه‌گیری MKS و CGS است که به صورت زیر می‌باشد:

ب ـ ۱) MKS: در این سیستم، واحد جرم کیلوگرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم نیوتن می‌باشد که طبق تعریف نیرویی است که به یک کیلوگرم جرم، شتاب واحد یک متر بر مجذور ثانیه را بدهد. در سطح دریا $g = ۹/۸۱\frac{m}{sec^۲}$ است، بنابراین در سیستم MKS وزن یک کیلوگرم جرم برابر با ۹/۸۱ نیوتن می‌باشد.

ب ـ ۲) CGS: واحد جرم در این سیستم، گرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این دستگاه دین (dyne) است. چون $g = ۹۸۱\frac{cm}{sec^۲}$ است، پس در این سیستم اندازه‌گیری، وزن هر گرم جرم تقریباً برابر ۹۸۱ دین می‌باشد.

پ) سیستم واحدهای مهندسی

در مکانیک از چهار واحد اندازه‌گیری برای جرم، طول، زمان و نیرو (به عنوان کمیت‌های اصلی) استفاده می‌شود. چون این واحدها طبق قوانین مکانیک به یکدیگر مرتبط هستند، واحدهایی را که برای این متغیرها به کار می‌بریم، نمی‌توانند دلخواه و مستقل از هم باشند. بنابراین از سیستم‌های تعریف شده‌ای که واحدهای قابل قبول کمیت‌ها در این سیستم‌ها هستند، استفاده می‌شود. در علوم پایه و مهندسی دو سیستم رایج وجود دارد: سیستم انگلیسی (BS) و سیستم بین‌المللی (SI).

واحدهای اصلی هر دو سیستم در جدول زیر نشان داده شده است:

کمیت	علامت قراردادی	سیستم بین‌المللی (SI)	سیستم انگلیسی (BS)
جرم	M	کیلوگرم (kg) (واحدهای پایه)	اسلاگ (slug)
طول	L	متر (m) (واحدهای پایه)	فوت (ft) (واحدهای پایه)
زمان	T	ثانیه (s) (واحدهای پایه)	ثانیه (s) (واحدهای پایه)
نیرو	F	نیوتن (N)	پوند (lb) (واحدهای پایه)

جدول ۱. واحدهای اصلی در سیستم SI و BS

در هر کدام از سیستم‌ها سه واحد پایه تعریف شده‌اند. نسبت واحد چهارم با واحدهای پایه با استفاده از قانون دوم نیوتن تعیین می‌شود. در سیستم SI نحوه این ارتباط به صورت روبرو است:

$$F = m.a \Rightarrow N = kg.\frac{m}{s^2}$$

بنابراین یک نیوتن، مقدار نیرویی است که به جسمی به جرم یک کیلوگرم، شتاب یک $\frac{m}{sec^2}$ می‌دهد.

مشابه آن‌چه در بالا به آن اشاره شد در سیستم BS نیز داریم:

$$F = m.a \Rightarrow m = \frac{F}{a} \Rightarrow slug = \frac{lb.s^2}{ft}$$

بنابراین یک اسلاگ، جرمی است که در اثر یک پوند نیرو، یک $\frac{ft}{sec^2}$ شتاب بگیرد.

دقت کنید که در هر دو سیستم SI و BS، رابطهٔ بین وزن و جرم را می‌توان از قانون دوم نیوتن و با در نظر گرفتن شتابی برابر با گرانش g به صورت زیر به‌دست آورد:

$$W = m.g$$

که در سطح دریا مقدار شتاب جاذبه (g) برابر است با:

$$g = ۹/۸۰۶۶۵\frac{m}{sec^2} \text{ یا } ۳۲/۱۷۴۰\frac{ft}{sec^2}$$

دقت داشته باشید که در حل مسائل، شتاب جاذبه زمین عموماً به صورت ۹/۸۱ و ۳۲/۲ در نظر گرفته می‌شوند. در حل تست‌ها با فرض عدم استفاده دانشجویان از ماشین حساب شتاب جاذبه زمین را (در سیستم SI) ۱۰ در نظر می‌گیرند.

۱ فوت ≡ ۱۲ اینچ ≡ ۳۰/۵ سانتیمتر ≡ ۰/۳۰۵ متر	۱ اینچ ≡ ۲/۵۴ سانتیمتر
۱ گرم ≡ $۲/۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$ پوند جرم ≡ $۰/۶۸۵ \times ۱۰^{-۴}$ اسلاگ	۱ اسلاگ ≡ ۳۲/۲ پوند جرم
۱ نیوتن ≡ $۱۰^{+۵}$ دین = ۰/۱۰۹۷ کیلوگرم نیرو	۱ پوند نیرو ≡ ۴۴۵۰۰۰ دین ≡ ۳۲/۲ پوندال

جدول ۲. روابط تبدیلی بین برخی از واحدهای اصلی

ایده‌آل نمودن مسائل استاتیک

یکی از موارد مهمی که باید در تحلیل‌های مهندسی به آن توجه شود، این است که فرضیات مناسب در حل این مسائل در نظر گرفته شود، به عبارت ساده‌تر «مسائل ایده‌آل شوند». همان‌طور که می‌دانید اکثر مسائل مهندسی پیچیده هستند. برای رفع پیچیدگی مسائل، باید با استفاده از فرضیات ساده‌کننده مدل ریاضی راحت‌تری از مسأله ارائه شود. به طور حتم در حل برخی مسائل با چنین فرضیاتی مواجه بوده‌اید. به عنوان مثال در تحلیل برخی مسائل، از وزن صرف‌نظر شده است یا نیروی اصطکاک بین سطوح را صفر در نظر می‌گیرند و مواردی از این قبیل. در زیر به برخی از این ساده‌سازی‌های متعارف که به کلیات مباحث نیز لطمه‌ای وارد نمی‌کند اشاره می‌شود:

الف) ماده متصل

همانطور که می‌دانیم همواره فضایی بین الکترون‌ها و هسته اتم مواد به ظاهر فشرده وجود دارد. با این حال از آن‌جایی که در مهندسی با موادی که نسبت به اتم خیلی بزرگ‌تر هستند سروکار داریم، فقط مقدار و میانگین خواص در حجم معین به کار برده می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که جسم یک ماده به هم پیوسته و اتصالی است.

ب) جسم صُلب (سخت) (Rigid Body)

منظور از جسم صُلب، جسمی است که در اثر نیروها یا گشتاورهایی که به آن وارد می‌شود، تغییر شکل ندهد. در واقع هر جسمی هر چند سخت، تحت اثر کوچک‌ترین نیرو تغییر شکل خواهد داد. بنابراین از لحاظ عملی جسم سخت، به صورت تعریف تئوری آن وجود ندارد، ولی فرض جسم صلب، تغییر شکل‌ها را آنقدر کوچک در نظر می‌گیرد که اثر قابل توجهی در حل مسائل و تحلیل آنها نداشته و قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

پ) نقطه جرم‌دار (ذره) (Particle)

چنانچه می‌دانید اصول مکانیک بر مبنای قوانین نیوتن بیان می‌شوند که این قوانین برای یک جرم متمرکز وضع شده‌اند. با این توضیح، امکان وجود نقطه‌ای بدون بُعد و دارای جرم در طبیعت وجود ندارد، ولی در صورتی که فرض شود چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، بسیاری از مسائل را می‌توان به راحتی تجزیه و تحلیل نمود. بنابراین در بسیاری از موارد جرم تمام ماده را در مرکز آن متمرکز فرض نموده و آنرا به صورت نقطه‌ای جرم‌دار (به جرم تمام آن جسم) فرض می‌کنیم. بر اساس این فرض است که (بعنوان مثال) در حل مسائل تعادل، کُره‌ای بزرگ را به مانند یک نقطه که دارای وزنی برابر با وزن کره بزرگ می‌باشد، در نظر می‌گیرند.

ت) نیروی متمرکز

در صورتی که محل اثر نیرو بر یک سطح بسیار کوچک از جسم باشد، می‌توان تمام نیروها را با یک نیروی متمرکز معادل کرده و نقطه اثر آن نیروی جایگزین را، نقطه اثر تمام آن نیروها فرض نمود. این فرض و ایده‌آل کردن نیرو در سهولت محاسبات بسیار مؤثر است. اگرچه در واقعیت، نیروی متمرکز وجود ندارد (زیرا نیرو برای اثر بر یک جسم به یک سطح نیاز دارد) ولی در ساده‌سازی‌ها نیرو را به صورت متمرکز در یک نقطه در نظر می‌گیرند.

قوانین پایه مکانیک

به صورت فهرست‌وار و خلاصه قوانین پایه مکانیک عبارتند از:

الف) قانون اول نیوتن

تمام اجسام به حرکت یکنواخت خود در جهت مستقیم با سرعت ثابت ادامه داده یا در حالت سکون باقی می‌مانند مگر اینکه نیرویی به آنها وارد شود که در آن صورت تغییر سرعت اجباری است.

ب) قانون دوم نیوتن

شتاب یک جسم با نیرویی که بر آن وارد می‌شود، متناسب و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

پ) قانون سوم نیوتن

برای هر عملی **(Action)**، عکس‌العملی **(Reaction)** برابر و در خلاف جهت وجود دارد.

ت) قانون جاذبه عمومی نیوتن

نیروی جاذبه بین دو نقطه مادی، در راستای خط مابین دو نقطه است و مقدار آن با حاصل‌ضرب جرم‌های دو نقطه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله آن دو نقطه نسبت عکس دارد. به عبارت دیگر نیروی جاذبه F برابر $F = G\dfrac{m_1.m_2}{r^2}$ است که در آن m_1 و m_2 جرم‌های دو نقطه و r فاصله بین آنهاست. G ثابت تناسب است و مقدار آن به واحدهای انتخابی بستگی دارد.

مدنظر باشد که در بحث استاتیک و حل مسائل مربوط به آن از قانون دوم و سوم زیاد استفاده می‌شود.

درسنامه (۲): کمیت‌های فیزیکی

کمیت‌های اسکالر و برداری (Scalar & Vectors Quantities)

کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک به دو دسته کلی اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

الف) کمیت‌های اسکالر

کمیت‌هایی را که فقط دارای مقدار هستند، کمیت‌های اسکالر گویند. به عبارتی دیگر برای توصیف آنها یک مقدار عددی کافی است. جرم، دما، زمان و طول نمونه‌هایی از این نوع کمیت‌ها هستند.

ب) کمیت‌های برداری

کمیت‌های برداری، آنهایی هستند که علاوه بر مقدار، دارای جهت (سو) و راستا (امتداد) نیز می‌باشند. از جمله این کمیت‌ها می‌توان سرعت، شتاب، نیرو و گشتاور را نام برد. برای تشخیص کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، در روابط و نوشتار، علامت بردار (سهم) را بر روی کمیت‌های برداری اضافه می‌کنند. کمیات برداری (بردارها) به نوبهٔ خود به سه دسته تقسیم می‌شوند:

ب ـ ۱) بردار آزاد (Free Vector)

برداری است که می‌توان آنرا بدون تغییر اثر و خاصیت، به هر نقطه فضا انتقال داد، به شرطی که راستا، مقدار و جهت آن تغییر نکند. دو بردار آزاد در صورتی که موازی، هم‌جهت و دارای مقدار یکسان باشند مساوی‌اند. ضمناً دو بردار آزاد مساوی را «همسنگ» می‌نامند.

ب ـ۲) بردار لغزان (Transmissible Vector)

برداری است که می‌توان آن را به هر نقطه از همان راستا انتقال داد بدون آنکه اثرش تغییر کند، البته به شرطی که جهت اولیه آن حفظ شود. دو بردار لغزانی که هر دو روی یک راستا، دارای یک جهت و یک مقدار باشند مساوی‌اند. این دو بردار لغزان «هم‌ارز» نامیده می‌شود.

پ ـ۳) بردار بسته (Bound Vector)

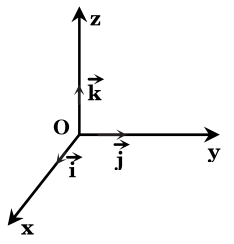
بردار بسته برداری است که نقطه اثر آن فقط یک نقطه باشد و با هر گونه تغییری در راستا و نقطه اثر آن، ویژگی و خاصیت اولیه را از دست می‌دهد.

جبر بردارها

از آن‌جایی که مبحث استاتیک در حالت سه بعدی (فضایی) به صورت برداری تحلیل می‌شود، لذا شناخت کامل کمیت‌های برداری و جبر بردارها (شامل تمام اطلاعات و اصطلاحات موجود در بردارها، قوانین و روش‌های ترکیب بردارها) الزامی است. در زیر به تفکیک به این موضوعات پرداخته می‌شود:

الف) دستگاه محورهای مختصات سه بعدی و بردارهای یکه

اگر محورهای سه بعدی oxyz طوری باشند که وقتی شخصی روی محور oz می‌ایستد و پای او روی نقطه o و سرش به طرف جهت مثبت محور z باشد، حرکت محور x به طرف محور y از طرف زاویه کوچکتر از 180°، در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) ببیند (قانون دست راست)، به چنین محورهایی، سه وجهی (دستگاه مختصات مستقیم) گویند. در غیر این صورت سه وجهی معکوس است. بردار یکه در جهت محور x با $\vec{i}$، در جهت محور y با $\vec{j}$ و در جهت محور z با $\vec{k}$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۲. دستگاه محورهای مختصات مستقیم

ب) قدر مطلق (اساس) یک بردار

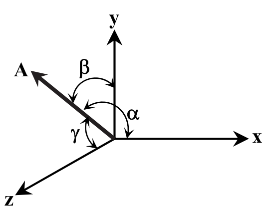
یک کمیت برداری عموماً به صورت مجموع هندسی (ترکیب i، j و k) بیان می‌شود.

طبق تعریف، جذر مجموع مربعات مؤلفه‌های طول، عرض و ارتفاع یک بردار را قدرمطلق (اساس، اندازه یا مقدار) آن بردار گویند. منظور از مقدار یک بردار عددی مثبت برابر با طول آن می‌باشد. بنابراین مقدار یک بردار $(\vec{A})$ کمیتی است اسکالر و همیشه مثبت که به صورت $|\vec{A}|$ نمایش داده می‌شود.

همان‌طور که مطرح شد اگر بردار A به صورت: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ باشد، در این صورت اندازه آن $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ خواهد بود.

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که فقط اندازه بردار صفر، صفر خواهد شد. در یک فضای سه بعدی، اگر α، β و γ به ترتیب زوایای یک بردار با محورهای سه‌گانه x، y و z باشند، کسینوس‌های هادی که زوایای بردار با سه محور مختصات می‌باشند عبارتند از:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \ell & \text{(زاویه بردار فضایی با محور x)} \\ \cos\beta = m & \text{(زاویه بردار فضایی با محور y)} \\ \cos\gamma = n & \text{(زاویه بردار فضایی با محور z)} \end{cases}$$



شکل ۳. نمایش یک بردار در فضا

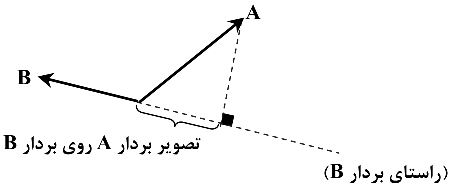
برای محاسبه کسینوس‌های هادی یک بردار $(\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})$ به روش زیر عمل می‌کنند:

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{|\vec{A}|}\ ,\quad \cos\beta=\frac{A_y}{|\vec{A}|}\ ,\quad \cos\gamma=\frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

که در آن $|\vec{A}|$ مقدار بردار A می‌باشد.

پ) تصویر یک بردار روی یک محور

از نظر هندسی برای تعیین تصویر یک بردار روی بردار دیگر، کافی است از انتهای بردار اول به راستای بردار دوم، عمودی رسم شود. به اندازه‌ای که از این ترسیم به‌دست می‌آید تصویر بردار (به شرح شکل روبرو) گویند.

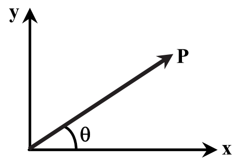


شکل ۴. روش هندسی برای تعیین تصویر یک بردار روی بردار دیگر

برای به‌دست آوردن تصویر یک بردار (صفحه‌ای) روی یک محور، به‌صورت محاسباتی کافی است اندازه بردار اولیه در کسینوس زاویه بین آن بردار با محور مورد نظر ضرب شود، لذا:

$= P.\cos\theta$ تصویر افقی بردار P (تصویر بردار P روی محور x)

$= P.\cos(90^\circ-\theta)=P.\sin\theta$ تصویر عمودی بردار P (تصویر بردار P روی محور y)



شکل ۵. نمایش یک بردار در صفحه

ت) جمع و تفریق بردارها

یکی از کاربردی‌ترین دستورالعمل‌ها در جبر بردارها، روش‌های گوناگون جمع و تفریق بردارها می‌باشد. جمع بردارهای آزاد (برآیند) در صفحه، طبق قانون مثلث (روش ترسیمی) به صورت زیر انجام می‌شود:

فرض کنید دو بردار آزاد $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وجود داشته باشند، برای اینکه بتوانید بردار برآیند را رسم کنید، ابتدا بردار اول $(\vec{A})$ را رسم کرده و از انتهای بردار اول بردار دوم $(\vec{B})$ را رسم نمایید. برداری که ابتدای $\vec{A}$ را به انتهای $\vec{B}$ متصل می‌کند، بردار برآیند می‌باشد.

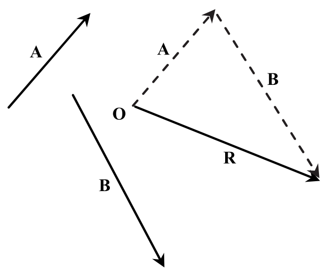
توجه داشته باشید که جمع دو بردار (برآیند) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اینگونه نوشته می‌شود:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{R}$$

ملاحظه می‌شود که ترتیب رسم دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تأثیری در اندازه برآیند آنها ندارد، بنابراین:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}=\vec{R}$$

یعنی جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد.

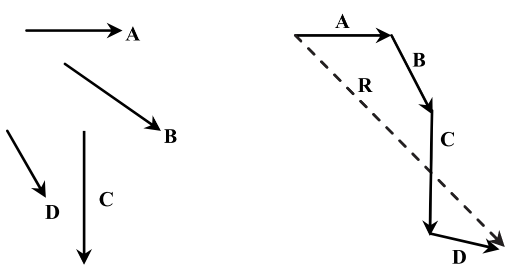


شکل ۶. برآیند دو بردار به روش مثلثی

روش مثلثی جمع بردارها را می‌توان به بیش از دو بردار نیز تعمیم داد، به این صورت که برای جمع چند بردار به روش مثلثی، کافی است بردارها بطور متوالی دنبال یکدیگر رسم شوند. در این حالت بردار برآیند، برداری است که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار متصل نماید. دقت شود که در جمع بردارها به روش مثلثی محدودیت تعداد وجود ندارد.

در حالت خاصی بردار برآیندها صفر می‌شود و آن حالتی است که بردارهای اولیه خود به خود شکل بسته‌ای به وجود آورند.

یکی دیگر از روش‌هایی که به وسیله‌ی آن می‌توان بردار برآیند را ترسیم نمود، روش متوازی‌الاضلاع است، چون این روش در هر بار ترسیم فقط می‌تواند برآیند دو بردار را نشان دهد، به نوعی کاربرد بسیار محدودتری نسبت به روش مثلثی دارد.



شکل ۷. نحوه ترسیم برآیند چند بردار به روش مثلثی

نکته۱: این نکته را مدنظر داشته باشید که در یک چند ضلعی (کثیرالاضلاع) بردارها، اگر فقط یک بردار نسبت به سایر بردارهای شکل، جهت متفاوتی داشته باشد، آن بردار، برآیند دیگر بردارها می‌باشد.

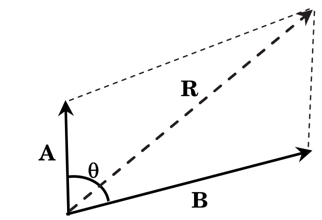
اندازه برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش تحلیلی (ریاضی) به صورت مقابل قابل محاسبه می‌باشد:

$$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2\times|\vec{A}|\times|\vec{B}|\times\cos\theta}$$

که θ در رابطه‌ی بالا زاویه بین دو بردار است زمانی که آن دو از یک نقطه مشترک رسم شده باشند.

روش تحلیلی برای محاسبه اندازه برآیند، زمانی کاربرد دارد که اندازه بردارهای اولیه و زاویه بین آن دو مشخص باشد.

نکته۲: توجه شود که برآیند دو بردار هم اندازه که زاویه بین آنها 120° باشد برابر با اندازه همان بردار خواهد شد.



شکل ۸. شماتیک برآیند دو بردار به روش تحلیلی

از آنجایی که روش تحلیلی فقط برای محاسبه برآیند دو بردار معتبر است، بنابراین برای محاسبه برآیند چند بردار (بیش از دو بردار) به روش تحلیلی، لازم است ابتدا تصویر تمامی بردارها روی جهات اصلی محورهای مختصات (x,y,z) محاسبه شود، سپس اندازه بردار برآیند به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

(در صفحه) $|\vec{R}|=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}$ (در فضا) $|\vec{R}|=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}$

در صورتی که بردارهای اولیه به صورت مؤلفه‌های هندسی داده شده باشند (به عنوان مثال: $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$)، منظور از جمع و تفریق آنها، جمع و یا تفریق مؤلفه‌ها به صورت نظیر به نظیر می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\\ \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\end{cases}\Rightarrow\ \vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}$$

در حالت کلی منظور از تفاضل دو بردار، جمع یک بردار با قرینه بردار دیگر (قرینه یک بردار، برداری است که فقط جهت آن تغییر کرده است) می‌باشد، به عبارتی: $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

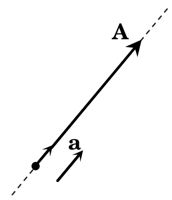
که با روش‌های ترسیمی و تحلیلی اشاره شده در بالا قابل انجام می‌باشد.

همچنین داریم: $\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2-2\left|\vec{A}\right|\times\left|\vec{B}\right|.\cos\theta}$

ث) بردار یکه (Unit Vector)

هر برداری را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب مقدار آن بردار در برداری با مقدار واحد در همان جهت نمایش داد. بنابراین بردار یکه، برداری است هم‌راستا و هم جهت با بردار اصلی. بطور مثال برای بردار $\vec{A}$ (طبق شکل روبرو) $\vec{a}$ یک بردار یکه است، لذا می‌توان نوشت:

$$\vec{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$



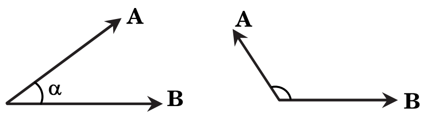
شکل ۹. یک بردار و بردار یکه آن

ج) حاصل‌ضرب داخلی (جبری، عددی) دو بردار (Scalar Product)

یکی دیگر از روش‌هایی که از طریق آن می‌توان بردارها را ترکیب نمود، ضرب داخلی است.

ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت $\vec{A}.\vec{B}$ نمایش داده می‌شود و نتیجه آن یک عدد جبری (اسکالر) است که مقدار آن، برابر حاصل‌ضرب اندازه دو بردار در کسینوس زاویه بین آن دو است.

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$



شکل ۱۰. وضعیت دو بردار دلخواه در یک صفحه

با توجه به این که α (زاویه‌ی بین دو برداری که ضرب داخلی می‌شوند) می‌تواند کمتر، بیشتر و یا برابر 90° باشد، این عدد جبری که نتیجه‌ی ضرب داخلی است، ممکن است مثبت، منفی و یا حتی صفر باشد. همچنین داریم: $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$

عبارت بالا بدین معنا است که ضرب داخلی بردارهای یکه مشابه، واحد می‌شود. همچنین توجه داشته باشید که ضرب داخلی بردارهای یکه عمود بر هم صفر می‌شود: $\vec{i}.\vec{k}=\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=0$

ضرب داخلی دو بردار از قانون جابه‌جایی پیروی می‌کند، یعنی: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

در صورتی ضرب داخلی دو بردار غیر صفر، صفر می‌شود که دو بردار بر یکدیگر عمود باشند $(\cos\alpha=0\Rightarrow\alpha=90^\circ)$:

$$(\vec{A},\vec{B}\neq0)\ \vec{A}.\vec{B}=0\Leftrightarrow\vec{A}\perp\vec{B}$$

در حالتی که بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت (مجموع هندسی) $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$ داده شده باشند، ضرب داخلی آن دو طبق تعریف برابر است با: $\vec{A}.\vec{B}=A_x.B_x+A_y.B_y+A_z.B_z$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که ضرب داخلی یک بردار با خودش برابر با مربع اندازه همان بردار است.

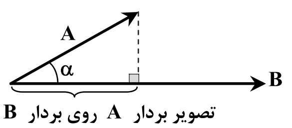
بنابراین می‌توان نوشت: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}||\vec{A}|\cos(۰)=|\vec{A}|^۲=A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲$

برای محاسبه زاویه بین دو بردار و تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر از ضرب داخلی دو بردار به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

ج ـ ۱) زاویه بین دو بردار: چنانچه توضیح داده شد، ضرب داخلی دو بردار متقاطع و هم‌صفحه به صورت $\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\alpha$ می‌باشد، بنابراین کسینوس زاویه بین دو بردار به‌صورت $\cos\alpha=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}$ و در نتیجه زاویه بین دو بردار مذکور با رابطه $\alpha=\text{Arc}\cos(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|})$ قابل محاسبه می‌شود.

ج ـ ۲) تصویر یک بردار روی بردار دیگر: با توجه به شکل، در رسم تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ از روابط مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌شود، مقدار این تصویر $|\vec{A}|.\cos\alpha$ است، بنابراین طبق تعریف ضرب داخلی خواهیم داشت:

$$|\vec{A}|.\cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$$ (اندازه تصویر $\vec{A}$ روی $\vec{B}$)



شکل ۱.۱. روش هندسی جهت نمایش تصویر یک بردار روی بردار دیگر

همچنین به روش مشابه داریم:

$$|B|.\cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$$ (اندازه تصویر $\vec{B}$ روی $\vec{A}$)

مثال ۱: در کدام حالت بردارهای $\vec{p}$ و $\vec{q}$ برهم عمودند؟

۱) $\begin{cases}\vec{P}=۳\vec{k}\\ \vec{q}=۲\vec{i}+۳\vec{j}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\vec{P}=۳\vec{i}\\ \vec{q}=\vec{i}+۴\vec{k}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\vec{P}=۲\vec{k}\\ \vec{q}=\vec{i}-\vec{k}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\vec{P}=۲\vec{i}-\vec{k}\\ \vec{q}=۲\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یکی از ساده‌ترین روش‌هایی که با توجه به آن می‌توان به عمود بودن دو بردار پی برد، صفر شدن ضرب داخلی آنهاست، که این مهم (ضرب داخلی $\vec{p}$ و $\vec{q}$) فقط در گزینه (۱) صفر می‌شود. $\vec{p}.\vec{q}=(۰\times۲)+(۰\times۳)+(۳\times۰)=۰$

مثال ۲: اندازه تصویر بردار $\vec{A}=۲\vec{i}+۳\vec{j}$ روی بردار $\vec{B}=۵\vec{i}+۲\vec{j}+\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۲/۹۲ ۲) ۲۹/۲ ۳) ۳/۵۹ ۴) ۳۵/۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که گفته شد از ضرب داخلی دو بردار برای محاسبه‌ی تصویر یک بردار روی بردار دیگر استفاده می‌شود. در نتیجه، اندازه تصویر بردار A روی بردار B برابر است با حاصل‌ضرب داخلی دو بردار A و B تقسیم بر اندازه بردار B. بنابراین می‌توان نوشت:

$|\vec{B}|=\sqrt{۲۵+۴+۱}=\sqrt{۳۰}$ (تصویر $\vec{A}$ روی $\vec{B}$) $=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|B|}=\dfrac{(۲\times۵)+(۳\times۲)}{\sqrt{۳۰}}=۲/۹۲$

مثال ۳: مقدار بردار تجزیه $\vec{A}=۵\vec{i}+۲\vec{j}$ در راستای عمود بر بردار $\vec{B}=۳\vec{i}-۴\vec{j}$، کدام است؟ (نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) $۲/۷۶\vec{i}+۳/۶۸\vec{j}$ ۲) $۳\vec{i}+۱/۶\vec{j}$ ۳) $۴\vec{i}+۱/۲\vec{j}$ ۴) $۴/۱۶\vec{i}+۳/۱۲\vec{j}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای به‌دست آوردن بردار تجزیه A روی راستای B، کافی است تصویر بردار اول (A) را روی بردار دوم (B) به‌دست آورده و در یکه بردار دوم (B) ضرب کنیم، پس داریم:

یکه بردار B: $\frac{۴}{۵}\vec{i}+\frac{۳}{۵}\vec{j}$ تصویر A روی B: $\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}=\dfrac{(۵\times۴)+(۳\times۲)}{\sqrt{۱۶+۹}}=\dfrac{۲۶}{۵}$

در نتیجه خواهیم داشت: بردار تجزیه A روی B $=(\frac{۴}{۵}\times\frac{۲۶}{۵})\vec{i}+(\frac{۳}{۵}\times\frac{۲۶}{۵})\vec{j}=۴/۱۶\vec{i}+۳/۱۲\vec{j}$

مثال ۴: کدام بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}=-\hat{i}+\hat{j}$ و $\vec{b}=-\hat{j}-\hat{k}$، می‌باشد؟ (معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) $\hat{i}+\hat{k}$ ۲) $-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ۳) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ۴) $-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شرط عمود بودن، صفر شدن ضرب داخلی است. ضرب داخلی بردار گزینه (۴) در بردارهای a و b صفر می‌شود:

$(-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}).(-\vec{j}-\vec{k})=(-۱\times-۱)+(۱\times-۱)=۰$ $(-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}).(-\vec{i}+\vec{j})=(-۱\times-۱)+(-۱\times۱)=۰$

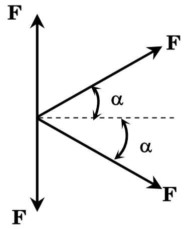
مثال۵: نیروی $F=۱۰۰KN$ در امتداد قطر مکعبی با ابعاد واحد اعمال می‌شود به طوری که کلیه مؤلفه‌های آن در امتداد سه ضلع مکعب مثبت است. تصویر این نیرو در امتداد بردار $\vec{r}=۳\vec{i}+\vec{j}-۴\vec{k}$ چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر
۲) $\frac{۱۰۰}{\sqrt{۷۸}}kN$
۳) $\frac{۳۰۰}{\sqrt{۷۸}}kN$
۴) $۱۰۰kN$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی F در امتداد قطر یک مکعب با ابعاد واحد و دارای مؤلفه‌های مثبت است، لذا حاصل‌ضرب داخلی بردار $\vec{r}$ و بردار $\vec{F}=\frac{۱۰۰}{\sqrt{۳}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ صفر است، بدین معنا که بردار $\vec{r}$ بر بردار $\vec{F}$ عمود است و اندازه تصویر آن نیز صفر خواهد شد:

$$\vec{r}.\vec{F}=(۳\vec{i}+\vec{j}-۴\vec{k}).(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=۰$$

مثال۶: شرط آنکه اندازه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل برابر یکی از آنها باشد، آن است که؟

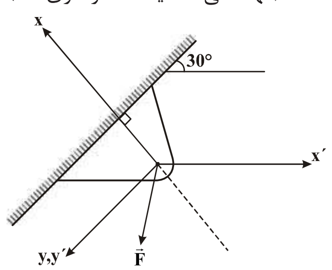


۱) $\alpha=۴۵^\circ$
۲) $\alpha=۶۰^\circ$
۳) $\alpha=۹۰^\circ$
۴) $\alpha=۱۲۰^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به توضیحات متن، برآیند دو نیروی هم‌راستا به دلیل برابری اندازه آن‌ها صفر است. از طرف دیگر شرط آنکه برآیند دو نیروی مایل برابر یکی از آن دو گردد، این است که زاویه بین دو نیرو ۱۲۰°، یعنی $\alpha=۶۰^\circ$ باشد.

مثال۷: رابطه نیروی $\vec{F}$ در سیستم مختصات متعامد xy، به‌صورت $\vec{F}=-۲۰\hat{i}+۴۰\hat{j}N$ است. مؤلفهٔ $\vec{F}$ در راستای x' چند نیوتن است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)

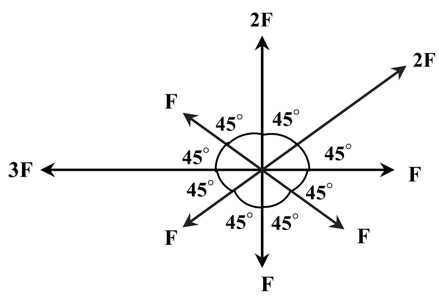


۱) $۱۰\sqrt{۳}-۲۰$
۲) $۱۰-۲۰\sqrt{۵}$
۳) $۱۰-۲۰\sqrt{۳}$
۴) $-۱۰\sqrt{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه بین دو راستای x' و x زاویه ۶۰° وجود دارد و بردار نیرو با راستاهای اصلی x و y زاویه $\tan\alpha=\frac{۴}{۲}=۲$ می‌سازد، لذا مؤلفه‌ی F در راستای x' برابر است با:

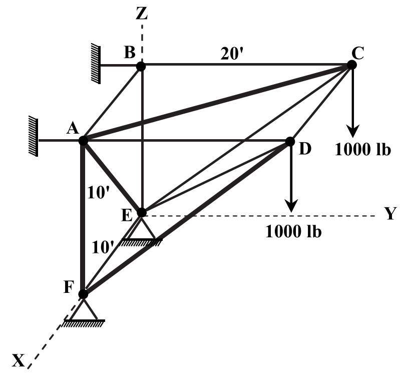
$$۲۰\cos۶۰^\circ-۴۰\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰-۲۰\sqrt{۳}$$

مثال۸: در سیستم نیروهای شکل زیر مقدار برآیند تمامی نیروها چه ضریبی از F می‌باشد؟

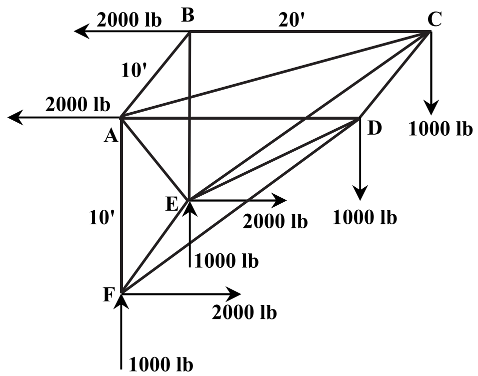


۱) $\sqrt{۶-\sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$
۳) $\sqrt{۴-\sqrt{۲}}$
۴) $\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

مثال۳۵: نیروهای منتقله به اعضای AC, AF, FD و AE از خرپای فضایی (Space Frame) شکل زیر را تعیین کنید.

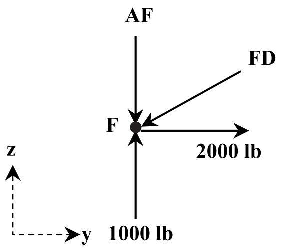


پاسخ: به آسانی می‌توان نیروهای تکیه‌گاهی این سازه را با در نظر گرفتن کل سازه به صورت یک جسم صُلب و با استفاده از تقارن بارگذاری و تقارن هندسی جسم، تعیین نمود. نتایج در شکل نشان داده شده است:



با استفاده از روش مفصل و توضیحات قبلی داریم:

مفصل F: تمام نیروهایی که بر مفصل F وارد می‌شوند در صفحه‌ای عمود بر محور x قرار دارند و با توجه به اینکه عضو FE یک عضو دو نیرویی موازی با محور x می‌باشد لذا نیروی آن باید صفر باشد. به عبارت دیگر عضو FE یک عضو صفر نیرویی می‌باشد (توضیحات در خصوص اعضای صفر نیرویی خرپا در ادامه درس خواهد آمد). سایر نیروهای وارد بر مفصل F در شکل زیر نشان داده شده‌اند. با جمع (جبری) نمودن نیروها در راستاهای y و z داریم:



$$\begin{cases}\sum F_y = ۰ \Rightarrow -FD\dfrac{۲۰}{\sqrt{۲۰^۲+۱۰^۲}}+۲۰۰۰=۰ \Rightarrow FD=۲۲۴۰\,lb \quad \text{(فشاری)}\\ \sum F_z = ۰ \Rightarrow -AF+۱۰۰۰-۲۲۴۰\dfrac{۱۰}{\sqrt{۵۰۰}}=۰ \Rightarrow AF=۱۰۰۰-۱۰۰۰=۰\end{cases}$$

مفصل B: از مفصل B مشخص است که هر دو عضو AB و BE صفر نیرویی‌اند. هیچ نیروی دیگری در راستای این اعضاء بر مفصل B وارد نمی‌شود، بنابراین مقدار نیرو در عضو کششی BC ۲۰۰۰ می‌باشد.

مفصل A : مفصل A را در نظر می‌گیریم، نیروهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ را به صورت برداری نمایش می‌دهیم:

$$\overrightarrow{AC}=AC\frac{-۱۰\vec{i}+۲۰\vec{j}}{\sqrt{۱۰^۲+۲۰^۲}}=AC(-۰/۴۴۷\vec{i}+۰/۸۹۴\vec{j}) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AE}=AE\frac{-۱۰\vec{i}-۱۰\vec{k}}{\sqrt{۱۰^۲+۱۰^۲}}=AE(-۰/۷۰۷\vec{i}-۰/۷۰۷\vec{k})$$

با استفاده از روابط تعادل اسکالر نیروها داریم:

$$\begin{cases}\sum F_y=۰ \Rightarrow ۰/۸۹۴AC+AD=۲۰۰۰\\ \sum F_x=۰ \Rightarrow -۰/۴۴۷AC-۰/۷۰۷AE=۰\\ \sum F_z=۰ \Rightarrow -۰/۷۰۷AE=۰\end{cases}$$

بنابراین: $AE=AC=۰$ و $AD=۲۰۰۰$ (کششی)

درسنامه (۲): اعضای صفر نیرویی (خنثی)

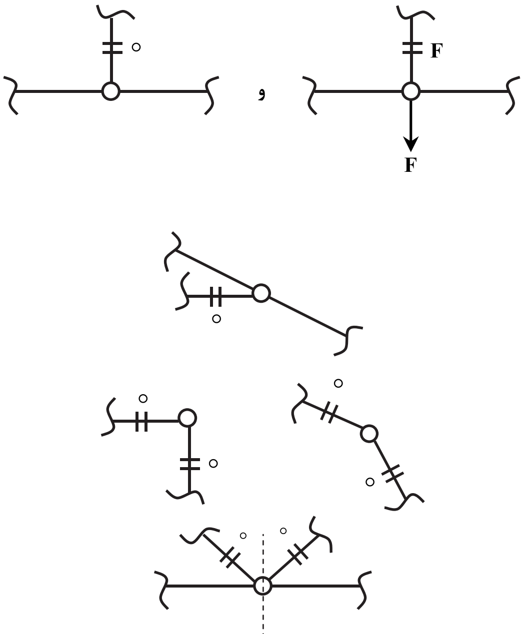
همانگونه که در برخی از مثال‌های مطرح شده در قسمت قبل ملاحظه شد ممکن است در حین محاسبه، نیروی عضوی (یا اعضایی) از یک خرپا، صفر شود. در چنین شرایطی به آن عضو (اعضا) که مقدار نیروی آن در حضور بار خارجی وارده بر خرپا صفر شده است، عضو خنثی (عضو صفر نیرویی) گویند. برای تشخیص صفر نیرویی بودن اعضاء در خرپاهای صفحه‌ای، می‌توان بدون حل تفصیلی، از شرایط زیر استفاده نمود:

۱ـ اگر از یک گره خرپا فقط سه عضو (یا نیروی) عمود بر هم عبور کنند، که دو عضو هم‌راستا و عضو سوم بر دو عضو اولیه عمود باشد به شرط آنکه به آن گره، بار خارجی وارد نشود، نیرو در عضو عمودی همواره صفر خواهد شد و در صورتی که از گره مشترک بار خارجی هم راستا با عضو عمود عبور کند، نیرو در عضو عمودی دقیقاً برابر با همان بار خارجی خواهد بود. در اشکال رسم شده می‌توان این شرایط را ملاحظه کرد.

۲ـ اگر از یک گره خرپا فقط و فقط سه عضو (یا نیرو) عبور کنند، به شرط آنکه دو تای آن اعضا در یک راستا باشند (بار خارجی بر آن گره وارد نشود) نیرو در عضو سوم همواره صفر خواهد شد.

۳ـ اگر از یک گره خرپا فقط و فقط دو عضو عبور کنند، (به شرط این که بار خارجی بر آن گره وارد نشود)، نیرو در هر دوی آن اعضا تحت هر زاویه‌ای که با یکدیگر داشته باشند (به جز 180°) صفر خواهد شد.

۴ـ همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود اگر از مفصلی که روی خط تقارن خرپا قرار دارد، چهار عضو عبور کنند، نیرو در هر دو عضو مورب صفر خواهد بود.

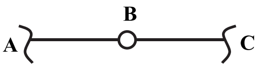


شکل ۵ . حالت‌های گوناگون تشخیص اعضاء صفر نیرویی خرپاها

با توجه به شرایط چهارگانه ذکر شده، توصیه می‌شود جهت مشاهده اعضاء صفر نیرویی خرپا، فقط بر روی گره‌هایی تمرکز کنید که یکی از حالت‌های مذکور در آن گره یافت شود.

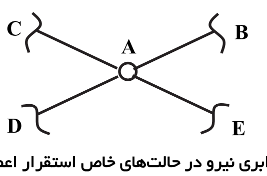
هم‌چنین توجه به نکات زیر در تشخیص مقدار نیرو در اعضای خرپا یا تشخیص اعضای صفر نیرویی مفید می‌باشد:

الف) اگر از یک گره خرپا فقط و فقط دو عضو در یک راستا عبور کند و نیروی خارجی به آن گره وارد نشود، نیرو در آن دو عضو برابر خواهد بود:



$$\Rightarrow \quad F_{AB} = F_{BC}$$

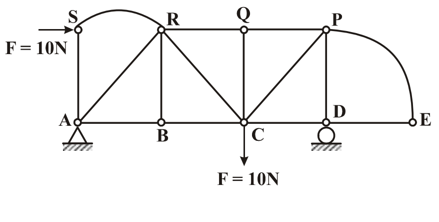
ب) اگر از یک گره خرپا فقط و فقط چهار عضو (یا نیرو) عبور کنند و نیروی خارجی به آن گره وارد نشود، به نحوی که این اعضا (یا نیروها) دو به دو در یک امتداد باشند، نیرو در عضوهای هم‌راستا برابر است، یعنی:



$$\Rightarrow \quad \begin{cases} F_{AB} = F_{AD} \\ F_{AC} = F_{AE} \end{cases}$$

شکل ۶ . برابری نیرو در حالت‌های خاص استقرار اعضاء خرپا

مثال ۳۶: در سازه زیر، چند عضو اضافی (دارای بار صفر) وجود دارد؟ (سراسری ۹۶)



۱) ۳ ۲) ۴

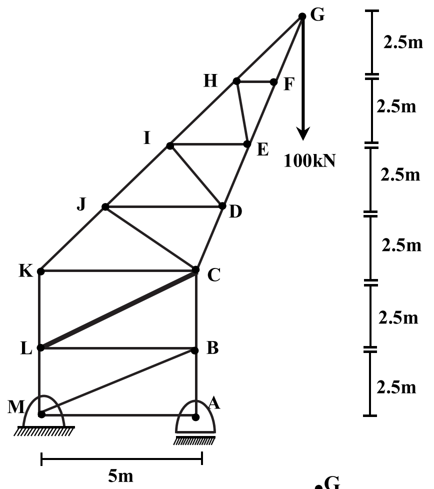
۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» خرپای مذکور ۶ عضو صفر نیرویی به قرار زیر دارد:

با مشاهده‌گره E، به راحتی مشخص می‌گردد که دو عضو DE و PE صفر نیرویی هستند.

پس از صفر شدن این دو و با ترسیم دیاگرام جسم آزاد گره D، به راحتی مشخص می‌گردد که CD نیز صفر نیرویی است. اعضاء QC و BR نیز صفر نیرویی‌اند. با توجه به هندسه نقطه S، عضو AS نیز صفر نیرویی است.

سازمان سنجش گزینه (۳) را انتخاب کرده است که با توجه به توضیحات داده شده اشتباه است.



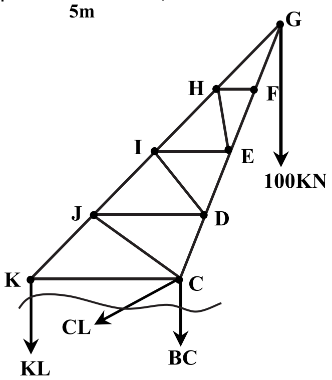
مثال۳۷: نیروی محوری عضو CL کدام است؟

۱) ۲۰۰

۲) ۱۰۰

۳) ۵۰

۴) ۰

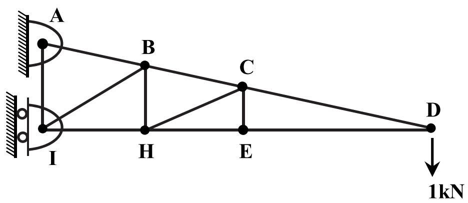


پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از یک خط برش مناسب (به صورت روبرو) و رسم دیاگرام جسم آزاد قسمت بالای خرپا ، بدون نیاز به محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow CL.\cos\alpha = 0$$

با توجه به اینکه $\cos\alpha \neq 0$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$CL = 0$$

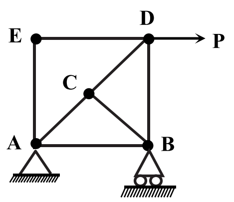


مثال ۳۸: در خرپای زیر چند عضو صفر نیرویی وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۴ ۴) ۳

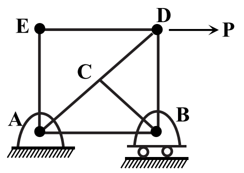
پاسخ: گزینه «۱» نیرو به ترتیب در اعضاء CE (حالت ۱ از روش‌های تشخیص عضو صفر نیرویی)، CH (حالت ۲ از روش‌های تشخیص عضو صفر نیرویی)، BH (حالت ۱)، BI (حالت ۲) و IA (حالت ۱ از روش‌های تشخیص عضو صفر نیرویی) صفر می‌باشد.



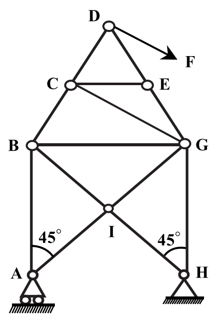
مثال۳۹: چند عضو صفر نیرویی در خرپای مقابل موجود است؟

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو

۳) ۳ عضو ۴) ۴ عضو



پاسخ: گزینه «۴» اعضا DE و AE از سمت گره E صفر نیرویی هستند. عضو BC از سمت گره C، صفر نیرویی می‌باشد.
عضو AB نیز از سمت گره B صفر نیرویی می‌باشد.



مثال۴۰: خرپای روبرو چند عضو صفر نیرویی دارد؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

مدرسان شریف

فصل چهارم

« کابل‌ها (Cables) »

در محاسبات و مسائل تئوری، عموماً از وزن اجزای انعطاف‌پذیر (کابل، زنجیر، طناب و ...) صرف‌نظر می‌شود، در صورتی که در مسائل واقعی نیروی وزن کابل بدلیل ایجاد افت (تغییر شکل کابل) باعث تغییر مقدار نیروی کشش (T) در طول آن می‌شود.

با توجه به فراوانی سؤالات این بخش در آزمون‌های کارشناسی ارشد (حدود ۲ درصد) مهم‌ترین مسائل مطرح‌شده عبارتند از:

۱) تحلیل منحنی شکل کابل، تحت تأثیر بار گسترده با شدت $\omega(x)$ و یا تحت تأثیر نیروی وزن و استفاده از شرایط مرزی جهت محاسبه ثابت‌های انتگرال‌گیری.

۲) محاسبه طول واقعی کابل در اثر نیروی وزن خودش.

۳) مقادیر کشش‌های حداقل (در پایین‌ترین نقطه آویز)، حداکثر (در بالاترین موقعیت) و کشش در هر نقطه دلخواه از کابل.

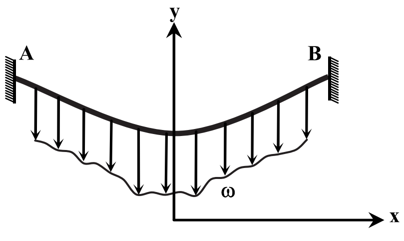
مقدمـــه

کابل‌ها (طناب‌ها و زنجیرها) اتصالاتی با خاصیت انعطاف‌پذیر می‌باشند. اگر بخواهیم این خاصیت را از لحاظ استاتیکی بیان کنیم، به این صورت می‌شود که این اعضا بار عمود بر جهت خود، نیروهای فشاری، گشتاور خمشی و نیروی برشی را تحمل نمی‌کنند و فقط نیروهایی را تحمل می‌کنند که در امتداد خودشان باشند که آن هم فقط نیروهای کششی (T) است.

درسنامه (۱): تحلیل کابل‌های واقعی

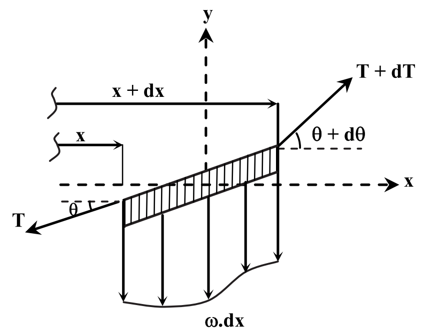
معادله انحنا شکل کابل‌ها

تاکنون در حل مسائل استاتیک در خصوص کابل‌ها، فرض بر این بوده که از وزن آنها صرف‌نظر می‌شود. اگر کابلی بدون وزن در نظر گرفته شود در دیاگرام جسم آزاد همواره به صورت یک عضو کششی رسم می‌گردد (عضو دونیرویی)، که این نیروی کششی در سراسر طول آن ثابت است. ولی واقعیت در خصوص اجزاء انعطاف‌پذیر (کابل‌ها) این است که این اتصالات حداقل تحت تأثیر نیروی وزن خودشان (بار گسترده مستطیلی) قرار دارند. در این حالت، توجه داشته باشید که نیروی کشش در طول کابل ثابت نیست و مقدار آن در بالاترین نقطه آویز کابل حداکثر و در پایین‌ترین نقطه کابل، حداقل مقدار ممکن را دارد.



شکل ۱. نمونه‌ای از یک کابل تحت تأثیر بار گسترده

فرض کنید کابلی بین نقاط A و B و تحت اثر بار گسترده $\omega(x)$ بر واحد طول قرار گرفته باشد. (شکل ۱)



شکل ۲. المان کوچکی از یک کابل واقعی

حال دیاگرام جسم آزاد یک قطعه بی‌نهایت کوچکی از آن کابل را رسم می‌کنیم. با فرض این که زاویه‌های خطوط مماس بر دو سر قطعه با محور xها به ترتیب θ و $\theta+d\theta$ باشد، با استفاده از معادلات تعادل خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \Rightarrow (T+dT)\sin(\theta+d\theta) = T\sin\theta + \omega.dx \\ \sum F_x = 0 \Rightarrow (T+dT)\cos(\theta+d\theta) = T.\cos\theta\end{cases}$$

از مثلثات داریم:

$$\begin{cases}\sin(\theta+d\theta) = \sin\theta\cos d\theta + \sin d\theta\cos\theta \\ \cos(\theta+d\theta) = \cos\theta\cos d\theta - \sin\theta\sin d\theta\end{cases}$$

چون $d\theta$ زاویه‌ای بی‌نهایت کوچک است بنابراین: $\cos d\theta \approx 1$ و $\sin d\theta \approx d\theta$

در نتیجه معادلات بالا به شکل روبرو درخواهند آمد:

$$T\sin\theta + Td\theta\cos\theta + dT\sin\theta + dT\,d\theta\cos\theta = T\sin\theta + \omega dx$$

$$T\cos\theta - T(\sin\theta)d\theta + dT\cos\theta - \sin\theta dT d\theta = T\cos\theta$$

در انتها اگر از بی‌نهایت کوچک درجه دوم ($dT\,d\theta$) در مقابل بی‌نهایت کوچک‌های درجه اول صرف‌نظر شود، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$d(T\sin\theta) = \omega.dx \quad \text{و} \quad d(T\cos\theta) = 0$$

این معادله ($d(T\cos\theta) = 0$) نشان می‌دهد که مؤلفه افقی نیروی کشش که همان حداقل کشش در کابل (T_{min}) می‌باشد در تمام طول آن ثابت است. اگر این مقدار ثابت را H فرض کنیم، به معادله‌ی مقابل می‌رسیم:

$$T\cos\theta = H \Rightarrow T = \frac{H}{\cos\theta}$$

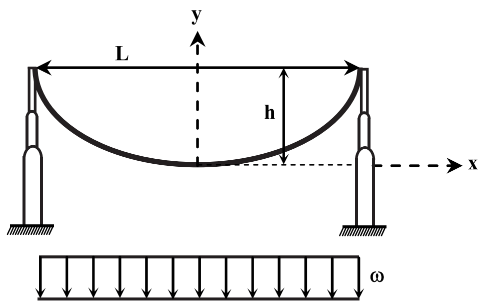
در نتیجه معادله $d(T\sin\theta) = \omega.dx$ را به صورت $d(H\tan\theta) = \omega.dx$ می‌نویسند.

با در نظر گرفتن $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ (y ارتفاع کابل در هر نقطه از محور x را نشان می‌دهد) داریم:

$$T\sin\theta = T\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta = H\tan\theta = H\frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad d(H\frac{dy}{dx}) = \omega.dx \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}$$

اگر این معادله‌ی دیفرانسیل درجه دوم حل شود و شرایط مرزی در آن جایگزین شود، می‌توان معادله انحنا شکل کابل را به دست آورد. از این معادله برای حل دو حالت مهم و پرکاربرد کابل‌ها یعنی کابل سهموی و کابل تحت اثر وزن خود استفاده می‌شود.

الف) کابل سهموی (Parabolic)



شکل ۳. کابل تحت اثر بار گسترده مستطیلی

در بعضی از مسائل، وزن کابل در مقابل بار وارده به آن ناچیز است، بنابراین می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. نمونه این مسائل کابل‌های نگهدارنده پل‌های معلق است. در این پل‌ها چون باری که به کابل‌ها اعمال می‌شود زیاد است، از وزن کابل در مقابل این بارهای وارده، صرف‌نظر می‌گردد.

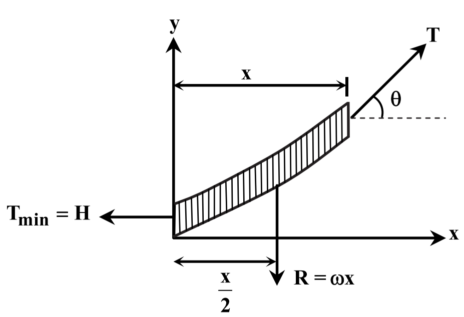
معمولاً مبدأ مختصات را در پایین‌ترین نقطه کابل که مماس بر آن افقی است (نیروی کششی در آن موقعیت افقی خواهد بود) قرار می‌دهند. با استفاده از معادله دیفرانسیل فوق و با توجه به ثابت بودن ω خواهیم داشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{H}x + C_1$$

(C_1 عدد ثابت انتگرال‌گیری است)

با توجه به افقی بودن مماس بر کابل در مبدأ مختصات داریم:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$



شکل ۴. المانی از کابل تحت اثر بار گسترده مستطیلی

با انتگرال‌گیری مجدد از معادله دیفرانسیل بالا و استفاده از مبدأ مختصات به عنوان یک شرط مرزی دیگر داریم:

$$y = \frac{\omega}{H}\frac{x^2}{2} + C_2 \qquad y|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

بنابراین معادله کابل سهمی $y = \frac{\omega}{2H}x^2$ خواهد بود.

با استفاده از این معادله، خواهیم دید که در نقطه اتصال کابل به تکیه‌گاه ($x=\frac{L}{2}$ و $y=h$) نیروی کشش افقی ثابت کابل (نیروی کشش در مبدأ مختصات) $H=\frac{\omega}{8h}L^2$ خواهد شد. بدین ترتیب مقدار نیروی کششی H را نیز می‌توان با توجه به هندسه و بارگذاری کابل تعیین نمود.

برای تعیین نیروی کشش در هر نقطه از کابل با مختصات (x,y)، قسمتی از کابل بین نقطه مینیمم (مبدأ مختصات) و آن نقطه را فرض کرده و دیاگرام جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم.

دقت کنید که با توجه به تعادل کابل می‌توان برآیند نیروهای وارد بر آن را مساوی صفر قرار داد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$T^2=H^2+\omega^2x^2 \Rightarrow T(x,y)=\sqrt{H^2+\omega^2x^2}$$

با جایگذاری مقدار H خواهیم داشت:

$$T=\omega\sqrt{x^2+(\frac{L^2}{8h})^2}$$

که این معادله کشش کابل در هر نقطه را نشان می‌دهد. ضمناً حداکثر نیروی کشش در $x=\frac{L}{2}$ بوده و برابر است با:

$$T_{max}=\frac{\omega L}{2}\sqrt{1+\frac{L^2}{16h^2}}$$

همچنین در صورتی که بخواهیم حداقل نیروی کشش در کابل (نیرو در پایین‌ترین نقطه آویز کابل) را به دست آوریم کافی است در معادله کشش کابل $x=0$ قرار داده شود، در نتیجه داریم:

$$T_{min}=\frac{\omega.L^2}{8h}$$

ضمناً طول کابل (S) نیز از رابطه $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ قابل محاسبه می‌باشد.

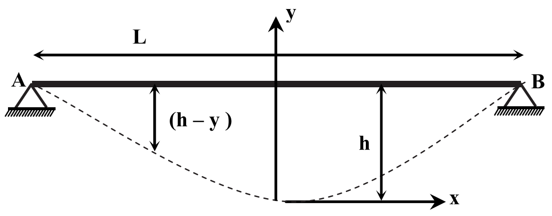
$$s=\int ds=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int\sqrt{1+y'^2}dx=\int\sqrt{1+(\frac{\omega x}{H})^2}dx$$

تذکر: در بسیاری از مسائل کابل‌ها، تکیه‌گاه‌ها در یک سطح قرار ندارند. در این حالت می‌توان کابل را به دو تکه در طرفین پایین‌ترین نقاط آویز کابل تقسیم نموده و روابط استخراج‌شده را برای هر تکه از کابل به کار برد.

ب) کابل تحت اثر وزن خود (Catenary)

از عنوان موضوع کاملاً مشخص است که منظور از این حالت، یعنی تحلیل کابل یکنواختی که از دو نقطه A و B آویزان شده است و تحت اثر وزن خود می‌باشد.

یک قطعه بی‌نهایت کوچک کابل مذکور را در نظر بگیرید، نیرویی که بر آن وارد می‌شود $R=\mu.s$ است. نیرو در واحد طول محور xها $\omega=\mu\frac{ds}{dx}$ خواهد بود،



شکل ۵ . کابل تحت اثر وزن یکنواخت

بنابراین معادله حالت کابل به صورت روبه‌رو درمی‌آید:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{H}\frac{ds}{dx}$$

از طرفی با استفاده از رابطه $ds^2=dx^2+dy^2$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{H}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

این معادله دیفرانسیل منحنی کابل تحت اثر وزن خود می‌باشد که با تغییر متغیر $P=\frac{dy}{dx}$ داریم:

$$\frac{dP}{\sqrt{1+P^2}}=\frac{\mu}{H}dx \qquad \text{Ln}\,(P+\sqrt{1+P^2})=\frac{\mu}{H}x+C$$

از طرف دیگر در نقطه $x=0$ و با فرض اینکه مبدأ مختصات نقطه مینیمم کابل باشد، داریم: $P=\frac{dy}{dx}=0$، بنابراین $C=0$ است، در نتیجه می‌توان نوشت:

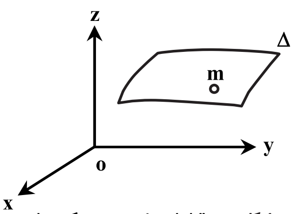
$$\frac{dy}{dx}=P=\frac{e^{\frac{\mu}{H}x}-e^{\frac{-\mu}{H}x}}{2}=\sin h\frac{\mu}{H}x$$

لذا معادله انحنای کابل تحت اثر وزن خود عبارت است از:

$$y=\frac{H}{\mu}(\cos h\frac{\mu}{H}x-1) \qquad (1)$$

درسنامه (۱): روش کار مجازی

اصل کار مجازی برای یک نقطه



شکل۳. نقطه‌ای مادی روی یک سطح

فرض کنید نقطه‌ای مادی به جرم m، تحت اثر نیروهای $k_1, k_2, ...$ و k_n روی سطح Δ (که بدون اصطکاک فرض می‌شود) حرکت کند. نیرویی که از این سطح به نقطه مادی وارد می‌شود، N (عکس‌العمل سطح) فرض می‌شود. نیروهای k_i در بحث کار مجازی به نام نیروهای فعال (Active Forces) و نیروی N به نام نیروی عکس‌العمل سطح (مانع حرکت) معرفی می‌شوند. اگر برآیند تمامی نیروهای $\vec{k}_i$ را با $\vec{k}_R$ نشان دهید، شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه مادی به صورت برداری عبارت است از: $\vec{k}_R + \vec{N} = 0$

اکنون فرض کنید تغییر مکانی بی‌نهایت کوچک روی سطح حرکت (با حفظ $\vec{k}_R$ و $\vec{N}$) به نقطه مادی داده شود. این تغییر مکان کوچک را با δr نشان داده و آن را تغییر مکان مجازی می‌نامند که ممکن است در زمان dt تغییر مکان واقعی رخ دهد که آن را با dr نشان می‌دهند.

با توجه به تعادل نقطه مادی، باید کار حاصل از تغییرمکان جزئی δr صفر باشد بنابراین: $\delta W = \vec{k}_R . \delta\vec{r} + \vec{N} . \delta\vec{r} = 0$

با توجه به این که $\vec{N}$ بر سطح حرکت و همچنین بر $\delta\vec{r}$ عمود است، پس کار حاصل از آن صفر است ($\vec{N} . \delta\vec{r} = 0$). از این رو کار مجازی سیستم نیروها برابر است با: $\delta W = \vec{k}_R . \delta\vec{r}$

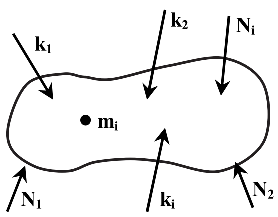
معادله فوق بیان می‌کند که کار (مجازی) انجام شده توسط نیروهای فعال موثر بر نقطه مادی (بر روی سطح بدون اصطکاک) صفر می‌باشد.

چون δr در راستای برآیند نیروها می‌باشد، کار انجام شده آن مثبت خواهد بود، لذا: $\vec{k}_R \, . \, \delta\vec{r} > 0$

اصل کار مجازی برای یک نقطه مادی چنین بیان می‌شود که:

«شرط لازم و کافی برای تداوم تعادل نقطه‌ای مادی که روی سطحی بدون اصطکاک قرار دارد این است که کار مجازی تمام تغییر مکان‌های کوچک روی سطح اتکاء برابر صفر باشد به شرط آن که محدودیتی (مثل سطح اتکاء) برای نقطه مادی وجود نداشته باشد ($N = 0$)».

اصل کار مجازی برای یک جسم سخت (صُلب)



شکل۴. یک جسم صُلب، نیروهای فعال و عکس‌العمل‌های وارد بر آن

جسم سختی را که حرکت آن دارای محدودیت بوده و نیروهای فعالی روی آن اثر می‌کنند در نظر بگیرید. نیروهای N_1، N_2 و ... N_i نیروهای عکس‌العمل سطح هستند که در اثر تماس مستقیم با اجسام غیرقابل حرکت دیگر و یا تماس غیر مستقیم با آنها (توسط لولا یا اتصالات کروی) به وجود می‌آیند. برای بررسی کار مجازی در چنین وضعیتی، جسم را متشکل از نقاط مادی فرض کرده و نتایج بحث قبلی را در مورد آنها بکار می‌بریم. ممکن است به هر یک از این نقاط (m_i) نیروهای فعال، نیروی خارجی و نیروهایی از سایر نقاط مادی وارد شود. نیروهای اخیر نیروهای داخلی (S_i) هستند که باعث سختی جسم صُلب می‌شوند.

بنابراین، شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه m_i (مطابق قوانین نیوتن) عبارت است از: $(\vec{k}_R)_i + (\vec{N}_R)_i + (\vec{S}_R)_i = 0$

با در نظر گرفتن محدودیت حرکت، تغییر مکان مجازی δr_i را موافق این محدودیت به این نقطه مادی از جسم صُلب نسبت می‌دهند. حاصل ضرب داخلی نیروها در این تغییرمکان جزئی (کار مجازی) برابر است با:

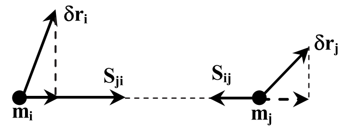
$$(\vec{k}_R)_i \cdot \delta\vec{r}_i + (\vec{N}_R)_i \cdot \delta\vec{r}_i + (\vec{S}_R)_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

کار حاصل از نیروی عکس‌العمل ($\vec{N}_R \perp \delta\vec{r}_i$) صفر است لذا: $(\vec{N}_R)_i \, . \, \delta\vec{r}_i = 0$

پس برای هر نقطه مادی از این جسم صُلب، چنین رابطه‌ای به دست می‌آید که اگر این روابط را (برای تمام نقاط مادی سازنده جسم) با هم جمع نماییم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{k}_R)_i \, . \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} (\vec{S}_R)_i \, . \delta\vec{r}_i = 0$$

ضمناً کار حاصل از نیروهای داخلی به صورت زیر بررسی می‌شود.



شکل ۵. نیروهای داخلی بین دو نقطه مادی

دقت داشته باشید که نیروهای داخلی در اثر عمل و عکس‌العمل متقابل نقاط مادی مختلف روی یکدیگر به وجود می‌آیند. اثر نقطه مادی m_j روی نقطه مـادی m_i نیـروی S_{ji} اسـت کـه بـه نقطـه m_i وارد می‌شود و اثر نقطه مادی m_i روی نقطه مادی m_j بنا به قانون سوم نیوتن، نیـروی S_{ij} اسـت کـه روی نقطه m_j از طرف نقطه m_i اثر می‌کند به نحوی که: $\vec{S}_{ij}=-\vec{S}_{ji}$ یا $|\vec{S}_{ij}|=|\vec{S}_{ji}|$.

این دو نیرو روی خطی قرار دارند که دو نقطه را به یکدیگر متصل می‌کند، پس کار حاصل از نیروهایی که در رابطه $\sum(S_R)_i.\delta r_i$ مطرح می‌شوند صفر است.

از آنجا که این موضوع درباره تمام نیروهای داخلی یک جسم صُلب صادق است، پس جمع کل این کارها نیز برابر صفر بوده و فقط خواهیم داشت:

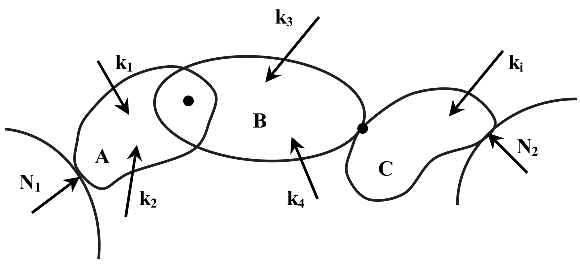
$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{k}_R)_i.\delta\vec{r}_i=0$$

پس اصل کار مجازی در یک جسم صُلب به این ترتیب بیان می‌شود که: «اگر جسم صُلب بدون اصطکاکی در حال تعادل باشد، کار حاصل از نیروهـای فعـال در تغییر مکان مجازی (با در نظر گرفتن محدودیت حرکت) صفر خواهد بود».

اصل کار مجازی برای سیستم اجسام سخت (صُلب)

چند جسم سخت را در نظر بگیریـد کـه توسـط لـولای بـدون اصـطکاک یـا تمـاس مستقیم بدون اصطکاک و یا تمـاس مسـتقیم بـا فـرض وجـود اصـطکاک بـا هـم در تماس‌اند و بعضی از این اجسام سخت با اجسام ساکن غیرمتحرک به طریقـی کـه در قسمت قبلی ذکر شد، در تماس باشند.

در هر نقطه مـادی ممکـن است نیروهـایی ماننـد: نیروهـای فعـال $(k_R)_i$، نیـروی عکس‌العمل ناشی از اجسام سـاکن $(N_R)_i$، نیـروی داخلـی ذرات دیگـر $(S_R)_i$ و نیرویی که از طرف اجسام متحرک دیگر $(D_R)_i$ (ناشی از تماس مستقیم یـا اتصـال لولایی) وارد می‌شوند، تعریف می‌گردند.



شکل ۶. شماتیک نیروهای وارد بر چند جسم صلب

بنابراین شرط لازم و کافی برای برقرای تعادل در این حالت عبارت است از:

$$(\vec{k}_R)_i+(\vec{S}_R)_i+(\vec{N}_R)_i+(\vec{D}_R)_i=0$$

با حفظ شرط جسم سخت و محدودیت حرکت، به نقطه مادی تغییر مکان مجازی δr_i داده می‌شود. از حاصل ضرب داخلی نیروهای فوق و δr_i (کـار مجـازی) رابطه‌ی روبرو را خواهیم داشت:

$$\delta W=(\vec{k}_R)_i.\delta\vec{r}_i+(\vec{S}_R)_i.\delta\vec{r}_i+(\vec{N}_R)_i.\delta\vec{r}_i+(\vec{D}_R)_i.\delta\vec{r}_i=0$$

با توجه به توضیحاتی که در قسمت قبل مبنی بر صفر بودن $(\vec{N}_R)_i.\delta\vec{r}_i$ و $(\vec{S}_R)_i.\delta\vec{r}_i$ مطرح شد، جمع جبری روابط، برای تمام نقاط مـادی اجسـام بـه صورت روبرو است:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(\vec{k}_R)_i.\delta r_i+(\vec{D}_R)_i.\delta\vec{r}_i\right]=0$$

کار انجام شده توسط $(D_R)_i$ روی نقطه m_i در تغییر مکان مجازی δr_i، با کار انجام شده توسط نیرویی که از نقطه m_i به نقطـه m_j از جسـم سـخت مجاور می‌باشد برابر است (عکس‌العمل این نیرو $(D_R)_j$ می‌باشد) و برای اینکه همیشه این دو نقطه در تمـاس بماننـد بایسـتی تغییـر مکـان دو نقطـه بـا یکدیگر برابر باشند. بنابراین جمله دوم در رابطه بالا نیز صفر می‌شود و مجدداً شرط تعادل عبارت خواهد بود از:

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{k}_R)_i.\delta\vec{r}_i=0$$

این رابطه برای تمام تغییر مکانهای مجازی δr_i که موافق محدودیت‌های حرکت باشد، صدق می‌کند.

لذا اصل کار مجازی در یک سیستم شامل اجسام صُلب به این ترتیب تعریف می‌گردد:

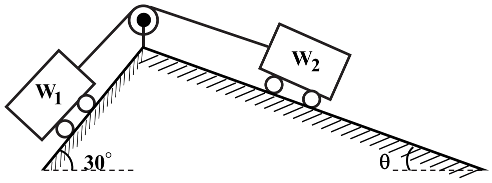
«شرط لازم و کافی برای تعادل، صفر شدن کار مجازی تمام نیروهای فعال وارد بر اجسام در اثر تغییر مکان مجازی موافق با محدودیت‌های حرکت می‌باشد».

نکته۱: در صورتی که در هر یک از حالت‌های فوق بین اتصالات، اعضاء یا سطوح در تماس، اصطکاک وجود داشـته باشـد، کـار حاصـل از نیـرو یـا نیروهای اصطکاک نیز در معادله کار مجازی لحاظ می‌شوند.

نکته۲: نیروهای موجود در تکیه‌گاه‌های متصل به زمین کار انجام نمی‌دهند، زیرا این نقاط ثابت هستند و جابه‌جایی ندارند.

ضمناً در لولاهایی که جسم را به میله‌ها متصل می‌کنند نیز کاری انجام نمی‌شود، زیرا در این لولاها نیروی عمل و عکس‌العمـل وجـود دارد کـه (دو نیـروی برابر و در خلاف جهت یکدیگر) مجموع جابه‌جایی حاصل از این دو نیروی معکوس صفر می‌باشد.

مثال۱: در صورتی که در شکل زیر $W_1 = ۱۰۰\,lb$ و $W_۲ = ۱۵۰\,lb$ باشند، مطلوب است تعیین زاویه θ برای حفظ تعادل.



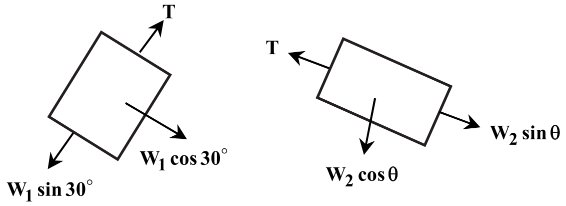
۱) $۱۲/۲^\circ$

۲) $۲۲/۷^\circ$

۳) $۱۹/۴۷^\circ$

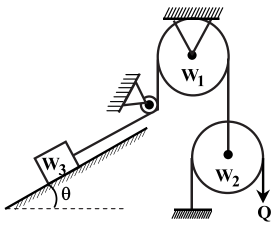
۴) ۳۰°

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از نیروی اصطکاک صرف‌نظر شده است، پس نیروهـای فعـال در مکانیزم مسأله، مؤلفه‌های در امتداد شیب وزن‌های W_1 و $W_۲$ هستند. اگـر تغییـر مکان مجازی (فرضی) δx برای وزنه $W_۲$ فرض شود، همـین تغییرمکـان (بـه دلیـل اتصال دو وزنه با یک کابل) برای وزنه W_1 وجود خواهد داشت. لذا کار مجازی وزنه $W_۲$ عبارت است از $-W_۲ \sin\theta\delta x$ و کار مجازی مربـوط بـه W_1 برابـر $W_1 \sin ۳۰^\circ\, \delta x$ است، بنابراین کل کار مجازی این سیستم عبارت است از:



$$\delta W = -W_۲ \sin\theta\delta x + W_1 \sin ۳۰^\circ\, \delta x = ۰ \Rightarrow \sin\theta = \frac{W_1 \sin ۳۰^\circ}{W_۲} = \frac{۵۰}{۱۵۰} \Rightarrow \theta = ۱۹/۴۷^\circ$$

مثال۲: در شکل زیر زاویه θ معلوم و قرقره‌ها و سطح بدون اصطکاک فرض می‌شوند. این قرقره‌ها بـه ترتیـب دارای وزن W_1 و $W_۲$ مـی‌باشـند. مقدار نیروی Q را برحسب پارامترهای مسأله، برای حفظ تعادل سیستم تعیین کنید.



۱) $Q = \dfrac{W_۳ \cos\theta - W_۲}{۲}$

۲) $Q = \dfrac{W_۳ \sin\theta - W_۲}{۲}$

۳) $Q = \dfrac{W_۳ \sin\theta - W_1}{۲}$

۴) $Q = \dfrac{W_۳ \sin\theta - W_1 - W_۲}{۲}$

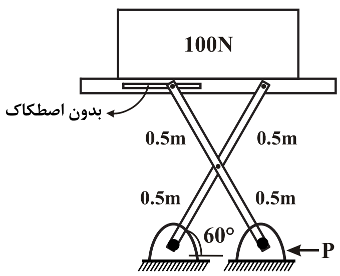
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که صورت مسأله هم گفته، نیروی اصطکاک وجود ندارد، پس نیروهای فعال سیستم (که در تغییر مکان مجازی کار انجام مـی‌دهنـد) عبارتند از: Q، $W_۲$ و $W_۳$. اگر $W_۳$ به اندازه δx تغییر مکان مجازی داشته باشد، تغییر مکان قرقره $W_۲$ نیز همان δx خواهد بـود (بـه دلیـل ارتبـاط $W_۳$ و $W_۲$ از طریق یک کابل یکپارچه)، همچنین تغییر مکان نیروی فعال Q برابر $۲\delta x$ خواهد بود (با توجه به وضعیت کابل‌هـا روی قرقـره $W_۲$). لـذا کـار مجازی سیستم برابر است با:

$$\delta W = -W_۳ .\sin\theta.\delta x + W_۲ .\delta x + Q(۲\delta x) = ۰ \Rightarrow Q = \frac{W_۳ \sin\theta - W_۲}{۲}$$

دقت کنید که W_1 نیروی فعال سیستم نیست. به عبارت دیگر مرکز جرم $W_۲$ هیچ‌گونه تغییر مکانی ندارد و کار مجازی آن صفر است.

مثال۳: در شکل نشان داده شده حداقل نیروی P برای بالا بردن وزنه ۱۰۰ نیوتنی چقدر است؟

(مهندسی مکانیک ـ آزاد ۹۲)



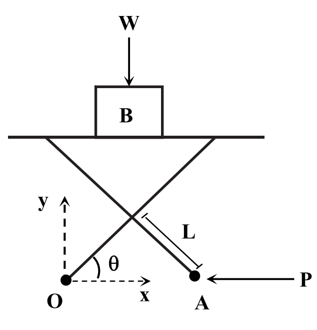
۱) ۵۰

۲) ۱۰۰

۳) $۱۰۰\sqrt{۳}$

۴) $۱۰۰\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد برای مکانیزم بالابر، از آنجایی که نیروی وزن باعث تغییرمکان عمودی در نقطه B و نیروی P باعث تغییرمکان افقی در نقطه A می‌شوند، لذا داریم:



$$x_A = ۲L\cos\theta \Rightarrow \delta x_A = -۲L\sin\theta\delta\theta$$

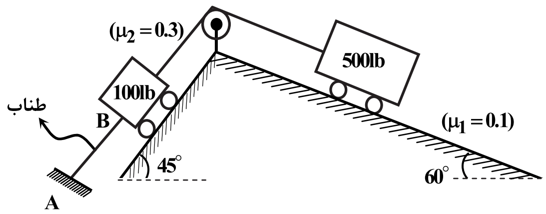
$$y_B = ۲L\sin\theta \Rightarrow \delta y_B = ۲L\cos\theta\delta\theta$$

با توجه به قانون کار مجازی برای سیستم در حال تعادل مسأله داریم:

$$\delta W = (P.\delta x_A) + (W.\delta y_B) = ۰ \Rightarrow -۲PL\sin\theta\delta\theta + ۲WL\cos\theta.\delta\theta = ۰$$

$$P = W.\cot an\theta \Rightarrow P = ۱۰۰ \times \cot an ۶۰^\circ = ۱۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال۴: در شکل زیر با معلومات داده شده، مطلوب است کشش در کابل AB . (در صورتی که در سطح تماس وزنه‌ها حداکثر اصطکاک تولید شود)



۱) ۲۱۷/۲lb
۲) ۲۱۲/۷ lb
۳) ۳۱۶ lb
۴) ۳۳۵ lb

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نگاهی به شکل مسأله متوجه می‌شویم که برای ایجاد کشش در کابل AB ، وزنه ۵۰۰ پوندی به حرکت به طرف پایین تمایل دارد و وزنه ۱۰۰ پوندی به طرف بالا.

نیروهای فعال این سیستم عبارتند از: مؤلفه‌های در امتداد شیب نیروهای وزن، نیروهای اصطکاک و کشش کابل AB که باید بطور فرضی قطع شود تا نیروی آن، نیروی فعال محسوب شود. فرض کنید وزنه ۱۰۰ پوندی دچار تغییر مکان مجازی δx شود، تغییر مکان مجازی وزنه ۵۰۰ پوندی نیز همین میزان خواهد بود و کل کار مجازی حاصل برابر است با (کشش کابل AB را T فرض کنید):

$$\delta W = (-T.\delta x) - (۱۰۰\sin ۴۵^\circ\,\delta x) - (F_{f_۲}\,\delta x) + (۵۰۰\sin ۶۰^\circ \delta x) - (F_{f_۱}\,\delta x) = ۰$$

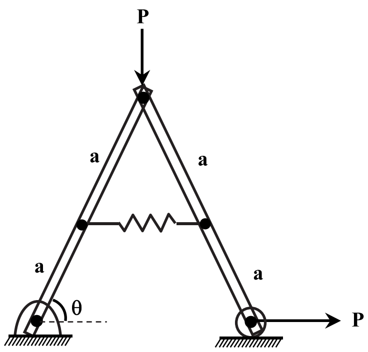
$F_{f_۲}$ نیروی اصطکاک وزنه ۱۰۰ پوندی و $F_{f_۱}$ نیروی اصطکاک وزنه ۵۰۰ پوندی هستند، پس طبق رابطه کولمب خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_{f_۲} = \mu_۲ N_۲ = \mu_۲.W_۲\cos ۴۵^\circ = ۰/۳ \times ۱۰۰ \times ۰/۷۰۷ = ۲۱/۲\text{lb} \\ F_{f_۱} = \mu_۱ N_۱ = \mu_۱.W_۱\cos ۶۰^\circ = ۰/۱ \times ۵۰۰ \times ۰/۵ = ۲۵\text{lb} \end{cases}$$

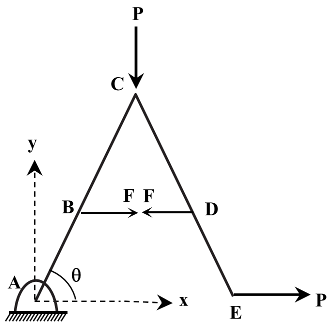
با جایگزینی مقادیر نیروهای اصطکاک در رابطه اصلی کار مجازی می‌توان نتیجه گرفت:

$$T = ۵۰۰ \times ۰/۸۶۶ - ۲۱/۲ - ۲۵ - ۱۰۰ \times ۰/۷۰۷ = ۳۱۶\text{lb}$$

مثال۵: مکانیزم شکل زیر به ازاء نیروی $P = ۱۰۰\text{N}$ و $\theta = ۳۰^\circ$ در حال تعادل است. در این وضعیت نیروی فنر چه مقدار است؟



۱) ۳۷۳/۲N
۲) ۲۵۷/۷N
۳) ۳۴۳/۱N
۴) ۲۹۲/۴N



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر دیاگرام جسم آزاد کل مکانیزم رسم شود، با توجه به محل و راستای نیروهای وارد بر آن، موقعیت طولی نقاط B، D، E و موقعیت عرضی نقطه C در اثر اعمال نیروها دچار تغییر مکان مجازی می‌شوند. با توجه به هندسه شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_B = a\cos\theta \Rightarrow \delta x_B = -a\sin\theta\delta\theta \\ x_E = ۲(۲a\cos\theta) \Rightarrow \delta x_E = -۴a\sin\theta\delta\theta \\ x_D = ۳a\cos\theta \Rightarrow \delta x_D = -۳a\sin\theta\delta\theta \\ y_C = ۲a\sin\theta \Rightarrow \delta y_C = ۲a\cos\theta\delta\theta \end{cases}$$

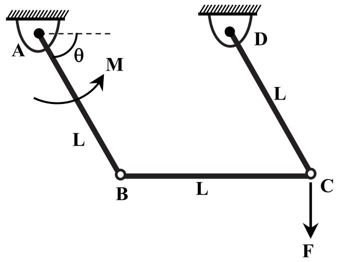
با به کارگیری اصل کار مجازی و توجه به این که نیروهای فعال سیستم، بارهای خارجی وارد بر آن و نیروی فنر می‌باشند، داریم:

$$\delta W = (F.\delta x_B) - (F.\delta x_D) + (P.\delta x_E) - (P.\delta y_C) = ۰ \Rightarrow -Fa\sin\theta\delta\theta + ۳Fa\sin\theta\delta\theta - ۴Pa\sin\theta\delta\theta - ۲Pa\cos\theta\delta\theta = ۰$$

با استفاده از مقادیر عددی P و θ داده شده خواهیم داشت:

$$F = P(۲ + \text{cotan}\theta) \Rightarrow F = ۱۰۰(۲ + \text{cotan}۳۰^\circ) = ۳۷۳/۲\ \text{N}$$

مثال۶: مقدار گشتاور لازم جهت تعادل مکانیزم شکل زیر در زاویه θ برحسب پارامترهای مسأله کدام است؟



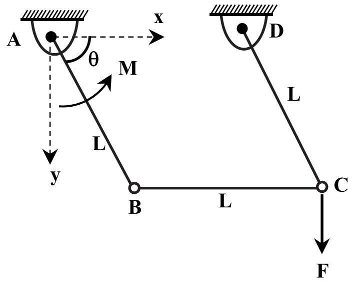
۱) $M = F.L\sin\theta$

۲) $M = F.L\tan\theta$

۳) $M = F.L\cos\theta$

۴) $M = F.L\cot an\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نیرو و گشتاور اعمال شده بر مکانیزم، مشخص است که عرض نقطه C و زاویه رأس A (θ) دچار تغییر مکان جزئی خواهند شد پس می‌توان نوشت:



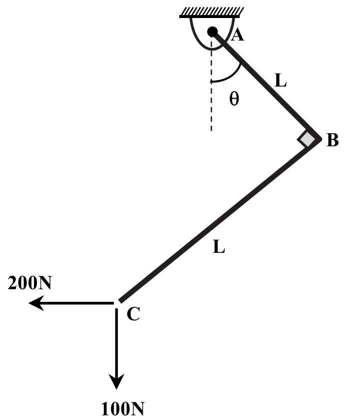
$$\begin{cases} y_C = L\sin\theta \Rightarrow \delta y_C = L\cos\theta\delta\theta \\ \theta_A = \theta \Rightarrow \delta\theta_A = \delta\theta \end{cases}$$

$$\delta W = (F.\delta y_c) + (-M.\delta\theta) = 0 \Rightarrow -F.L.\cos\theta\delta\theta + M.\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow M = F.L\cos\theta$$

(توضیح اینکه گشتاور M با علامت منفی نمایش دهنده تمایل به کاهش زاویه‌ی θ می‌باشد)

مثال۷: به ازاء چه مقدار از زاویه θ، میله ABC در وضعیت تعادل قرار می‌گیرد؟



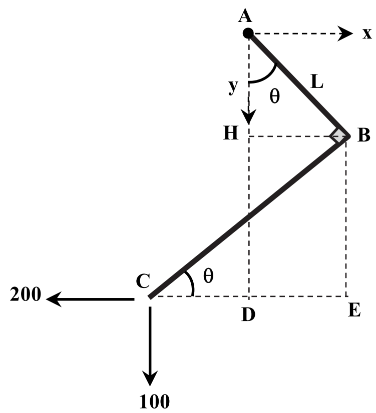
۱) $\theta = ۲۱/۴^\circ$

۲) $\theta = ۲۰/۴^\circ$

۳) $\theta = ۱۹/۴^\circ$

۴) $\theta = ۱۸/۴^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که از وزن میله صرف‌نظر شده است، پس تنها نیروهای فعال آن ۱۰۰ و ۲۰۰ نیوتن هستند. اعمال نیروهای مذکور باعث جابه‌جایی کوچک طولی و عرضی نقطه C می‌شوند. با توجه به هندسه قطعه ABC داریم:



$$\begin{cases} x_C = CD = -(CE - DE) = -(L\cos\theta - L\sin\theta) \\ = L\sin\theta - L\cos\theta \Rightarrow \delta x_C = (L\cos\theta + L\sin\theta)\delta\theta \\ y_C = AH + HD = L\cos\theta + L\sin\theta \Rightarrow \delta y_C = (L\cos\theta - L\sin\theta)\delta\theta \end{cases}$$

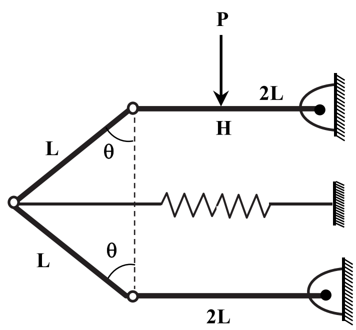
$$\delta W = (-۲۰۰ \times \delta x_C) + (۱۰۰ \times \delta y_C) = ۰$$

$$(-۲۰۰(L\cos\theta + L\sin\theta)\delta\theta) + (۱۰۰ \times (L\cos\theta - L\sin\theta)\delta\theta) = ۰$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow \theta = -۱۸/۴^\circ$$

(توضیح اینکه علامت منفی نشان می‌دهد که میله‌ی L شکل، سمت چپ محور y قرار می‌گیرد.)

مثال۸: فنر نشان داده شده در شکل، در وضعیت اولیه $(\theta = ۰)$ دارای طول طبیعی است و هیچ نیرویی در آن وجود ندارد. مقدار زاویه θ در وضعیت تعادل کدام است؟

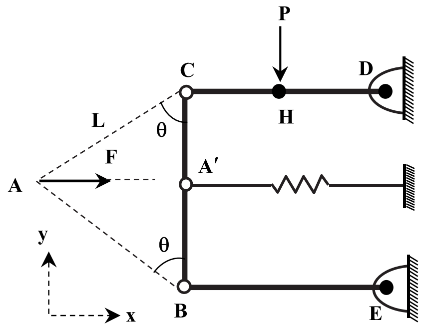


۱) $\cos\theta = \frac{۲P}{۳K.L}$

۲) $\cos\theta = \frac{P}{K.L}$

۳) $\cos\theta = \frac{۲P}{K.L}$

۴) $\cos\theta = \frac{P}{۲K.L}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دقت کنید که میزان افزایش طول فنر نسبت به حالت اولیه برابر است با طول AA' که با توجه به هندسه شکل برابر است با:

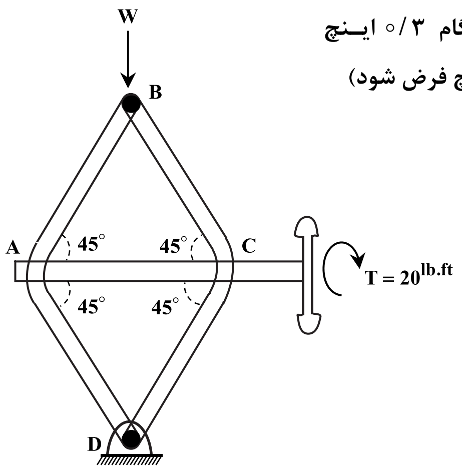
$$AA' = L\sin\theta$$

لذا مقدار نیرو در فنر خطی برابر است با: $F = K.AA' = K.L\sin\theta$ فنر

در اثر نیروهای فعال F و P، به ترتیب طول نقطه A و عرض نقطه H جابه‌جایی مجازی کوچک پیدا می‌کنند بنابراین خواهیم داشت:

$$x_A = -L\sin\theta \Rightarrow \delta x_A = -L\cos\theta\delta\theta$$
$$y_H = -L\cos\theta \Rightarrow \delta y_H = +L\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta W = (F\times\delta x_A) - (P\times\delta y_H) = 0 \Rightarrow (K.L.\sin\theta.L\cos\delta\theta) - (P\times L.\sin\theta.\delta\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{P}{K.L}$$



مثال۹: در شکل زیر گشتاور پیچشی $20^{lb.ft}$ به دسته اصلی که به آن دو پیچ مخالف هم با گام ۰/۳ اینچ وصل شده است، اعمال می‌شود. در حالت تعادل مقدار وزن (W) کدام است؟ (طول تمام اعضا ۱ اینچ فرض شود)

۱) $800\pi\ lb$

۲) $80\pi\ lb$

۳) $\frac{200\pi}{3}$

۴) $\frac{20\pi}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با روش کار مجازی می‌توان استدلال نمود که نیروی وزن W باعث جابه‌جایی عرض نقطه B می‌شود، لذا:

$$y_B = 2L\sin\theta \Rightarrow \delta y_B = 2L\cos\theta\delta\theta \qquad x_C = L\cos\theta \Rightarrow \delta x_C = -L\sin\theta\delta\theta$$

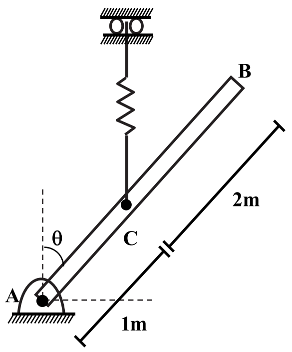
ضمناً مدنظر داشته باشید که گام پیچ به اندازه δ_x ، مقدار دورانی به صورت مقابل ایجاد می‌کند: $\delta\phi = \frac{\delta_x}{\phi}.2P$

جمع جبری کارهای مجازی انجام شده صفر است بنابراین می‌توان نوشت: $\sum W_i = (T_i.\delta\phi) + (F_i.\delta r_i) = 0$

$$[(T\times(L\sin\theta + \cos\theta))(\frac{2\pi}{p})\delta\theta)] + [-W\times 2L\cos\theta\delta\theta] = 0 \Rightarrow W = \frac{\pi.T}{P}\tan\phi$$

با جایگذاری مقادیر عددی داریم:

$$\begin{cases}\theta = 45^\circ \\ T = 20 \Rightarrow W = 800\pi\ lb \\ P = 0/3\end{cases}$$



مثال۱۰: میله AB دارای وزن $100N$ است. در حالت اولیه $(\theta = 0)$ در فنر کشیدگی وجود ندارد. زاویه θ پس از برقراری تعادل (خروج میله از حالت عمودی) کدام است؟ (سختی فنر $200\frac{N}{m}$ است)

۱) $\theta = 76^\circ$

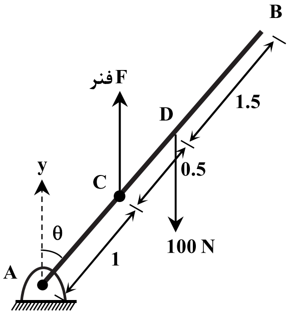
۲) $\theta = 73^\circ$

۳) $\theta = 61^\circ$

۴) $\theta = 62^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی فنر با استفاده از جابه‌جایی عمودی نقطه C از حالت $\theta = 0$ (حالت اولیه) به حالت $\theta > 0$ محاسبه می‌شود. در حالت $\theta = 0$ داریم: $y_C = 1m$

در حالت $\theta > 0$ داریم: $y_C = 1\times\cos\theta$



در نتیجه نیروی فنر برابر خواهد بود با:

$$F = K\Delta y_C = ۲۰۰\times(۱-\cos\theta)$$

ضمناً نیروهای فعال سیستم عبارتند از W و F. جابه‌جایی مجازی عرض دو نقطه C و D به ترتیب زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} y_C = \cos\theta \Rightarrow \delta y_C = -\sin\theta\delta\theta \\ y_D = ۱/۵\cos\theta \Rightarrow \delta y_D = -۱/۵\sin\theta\delta\theta \end{cases}$$

در نتیجه با استفاده از روش کار مجازی خواهیم داشت:

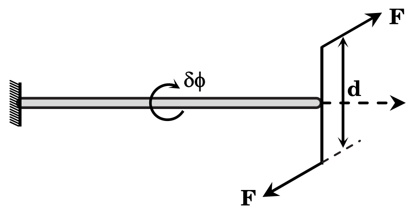
$$\delta W = (-F\delta y_C) + (W\delta y_D) = ۰ \Rightarrow (۲۰۰(۱-\cos\theta)\sin\theta\delta\theta) - (۱۰۰\times ۱/۵\sin\delta\theta) = ۰$$

بنابراین زاویه θ برابر است با:

$$۲۰۰(۱-\cos\theta) = ۱۰۰\times۱/۵ \Rightarrow \cos\theta = ۰/۲۵ \Rightarrow \theta = ۷۵/۵۲ \approx ۷۶^\circ$$

کار مجازی جفت نیرو

همانگونه که در مقدمه فصل اشاره شد، اگر به یک محور، مطابق شکل جفت نیرویی اثر کنـد دورانـی به اندازه $\delta\phi$ در آن به وجود می‌آید که مقدار کار مجازی آن به صورت زیر محاسبه می‌گردد:



شکل ۷. دوران حاصل از کوپل نیرو

$$\delta W = ۲[F.\frac{d}{۲}\delta\phi] = (F.d)\,\delta\phi$$

در صورتی که محور x بر محور دوران منطبق باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \delta W = M_x.\delta\phi \\ M_x = F.d \end{cases}$$

در حالت کلی اگر بردار گشتاور (M) و زاویه $(\delta\phi)$ دارای امتدادهای دلخواه باشند، می‌توان نتیجه بالا را گسترش داده و اینگونه نوشت: $\delta W = M.\delta\phi$

پس هرگاه به جسمی یک زوج نیرو اثر کند و چرخشی محدود در آن ایجاد شود، کل کار مجازی انجام شده برابر است با: $W = \int M.\cos\theta.d\phi$

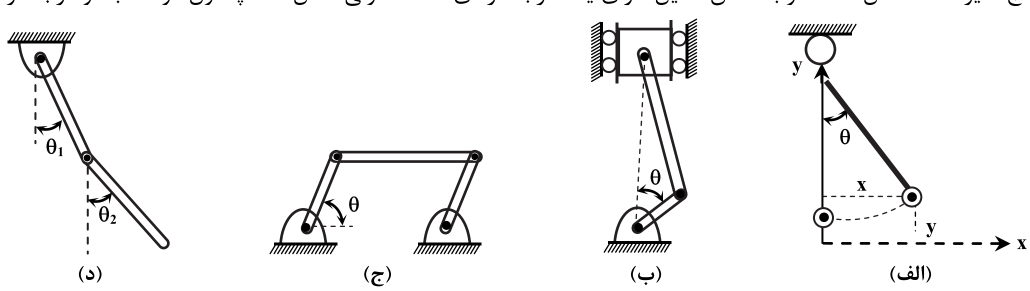
که در آن θ زاویه بین دو بردار M و $d\phi$ می‌باشد.

درجه آزادی

روابط استخراج شده برای کار مجازی، مستقل از عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها می‌باشند و می‌توان به تعداد نیروهای فعال مستقل، مجهول محاسبه نمود. بنـابراین آنچه که باید به آن توجه شود، تعداد معادلات مستقل سیستم است. لذا درجه آزادی یک سیستم به این صورت تعریف می‌گردد:

تعداد درجات آزادی یک سیستم عبارت است از تعداد مختصات مستقلی که برای تعیین وضعیت کامل جسم در یک دستگاه مختصات لازم است. به طور مثـال در شکل «الف» پاندول محدود به حرکت در صفحه است و زاویه θ به تنهایی وضعیت کامل آن را مشخص می‌کند، پس این پاندول یک درجه آزادی دارد.

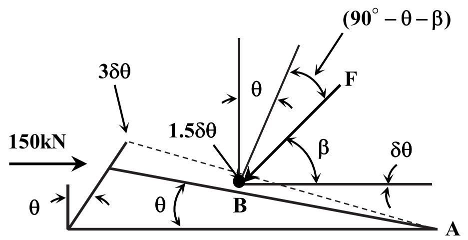
شکل‌های «ب» و «ج» نیز مانند شکل «الف» و به همان دلایل دارای یک درجه آزادی هستند. ولی شکل «د» پاندول دوگانه با دو درجه آزادی را نشان می‌دهد.



شکل ۸. نمونه‌هایی از سیستم‌های یک درجه و دو درجه آزادی

به طور کلی یک نقطه مادی در فضا سه درجه و در صفحه دو درجه آزادی دارد. تعداد درجات آزادی در اغلب موارد با مشـاهده سیسـتم، معـین و مشـخص می‌شود. از آنجا که هر درجه آزادی نشانگر یک مختصه مستقل است، لذا در یک دستگاه با n درجه آزادی، n مختصه مستقل وجود دارند که اگر به هر یک از این مختصات یک تغییر مکان مجازی مستقل نسبت داده شود، n معادله مستقل کار مجازی به دست خواهد آمد که عموماً قابل حل برای مشخص کردن n نیروی فعال مجهول خواهد بود.

براساس مطالب فوق برای حل مسائل تعادل با یک درجه آزادی با استفاده از روش کار مجازی، عموماً از مختصات نقاط تحت تأثیر نیرو و تغییر مکان جزئی مجازی آنها استفاده می‌گردد.



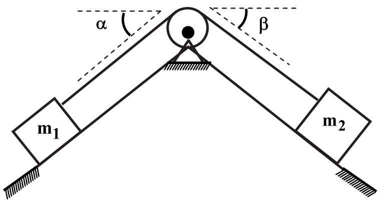
در محاسبه کار مجازی نیروی F، بهتر است از روابط هندسی و مثلثاتی استفاده شود. دلیل استفاده از روش هندسی این است که برخلاف موقعیت نیروهای فعال در حالت قبل، نیروی F نسبت به مختصات θ امتداد مناسبی ندارد. حال می‌توان از اصل کار مجازی به صورت زیر استفاده نمود:

$$\delta W = (۱۵۰)[(۳)(\delta\theta)\sin\theta] - F[۱/۵\delta\theta\cos(۹۰^\circ - \theta - \beta)] = ۰$$

$$(۱۵۰)(۳)(\delta\theta)\sin(۵/۷۵^\circ) - F[۱/۵\delta\theta\cos(۹۰^\circ - ۵/۷۰^\circ - ۶۴/۹^\circ)] = ۰$$

بنابراین: $F = ۳۱/۸KN$

مثال۱۱: وزنه‌های $m_۱$ و $m_۲$ که توسط طناب به هم متصل شده‌اند و در حال تعادل استاتیکی می‌باشند. اگر $\alpha > \beta$ و $m_۱ > m_۲$ بوده و فقط وزنهٔ $m_۲$ با سطح شیب‌دار اصطکاک داشته باشد اندازهٔ این نیروی اصطکاک چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۹)

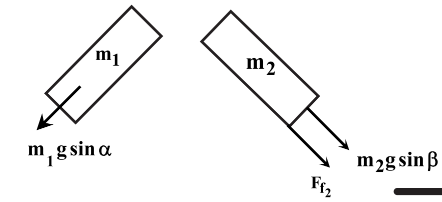


۱) $f = (m_۱\sin\alpha - m_۲\sin\beta)g$

۲) $f = (m_۱\cos\alpha - m_۲\cos\beta)$

۳) $f = m_۲\sin\beta g$

۴) $f = (m_۱ + m_۲)\cos\beta g$

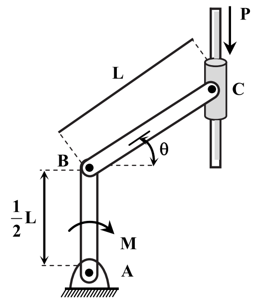


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق اصل کار مجازی، در اثر اعمال جابجایی کوچک در این سیستم، نیروهای فعال عبارتند از: مولفه‌های وزن در امتداد شیب قطعات ۱ و ۲ و نیروی اصطکاک در قطعه ۲ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\delta W = (m_۱g\sin\alpha.\delta_x) - (m_۲g\sin\beta.\delta_x) - (F_{f_۲}.\delta_x) = ۰$$

$$\Rightarrow F_{f_۲} = m_۱g\sin\alpha - m_۲g\sin\beta = (m_۱\sin\alpha - m_۲\sin\beta)g$$

مثال۱۲: مقدار M را برای تعادل شکل زیر، برحسب P، L و θ به دست آورید. (از وزن تمام اعضاء صرف‌نظر می‌شود) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

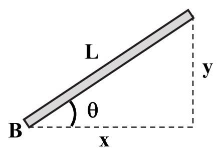


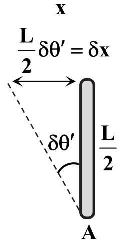
۱) $M = P.L\tan\theta$

۲) $M = \frac{P.L}{۲}\tan\theta$

۳) $M = P.L\cot an\theta$

۴) $M = \frac{P.L}{۲}\cot an\theta$





☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از هندسه شکل در میله BC داریم:

$$x^۲ + y^۲ = L^۲ \quad , \quad \frac{x}{y} = \cot an\theta$$

از قانون کار مجازی نتیجه می‌شود:

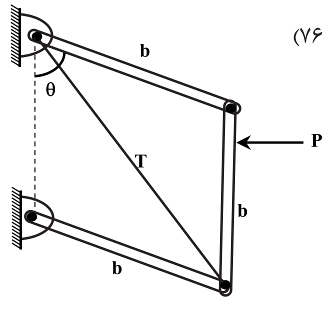
$$x\delta_x + y\delta_y = ۰ \Rightarrow \delta_y = -\frac{x}{y}\delta_x$$

به ازاء زاویه انحراف $\delta\theta'$ کوچک داریم $(\sin\delta\theta' \approx \delta\theta')$:

$$\delta_x = \frac{L}{۲}\delta\theta' \Rightarrow \delta y_C = -\frac{x_C}{y_C}\frac{L}{۲}\delta\theta' = -\cot an\theta\frac{L}{۲}\delta\theta'$$

$$\delta W = P\delta_{y_C} + M\delta\theta' = ۰ \Rightarrow -P\frac{L}{۲}\cot an\theta\delta\theta' + M\delta\theta' = ۰ \Rightarrow M = \frac{PL}{۲}\cot an\theta$$

مثال۱۳: در شکل زیر یک سیم قطری، اهرم‌بندی متوازی‌الاضلاعی نشان داده شده را تحت تأثیر نیروی افقی P در حال تعادل نگاه می‌دارد. T (کشش ایجاد شده در این سیم) برابر با کدام گزینه است؟ (جرم میله‌ها قابل اغماض است) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۶)

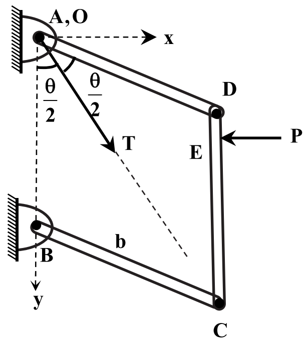


۱) $P\cot an\theta$

۲) $\dfrac{P\sin\frac{\theta}{۲}}{\cos\theta}$

۳) $P\cot an\frac{\theta}{۲}$

۴) $\dfrac{P\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{۲}}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد کل مکانیزم، به راحتی مشخص می‌شود که نیروهای فعال سیستم (که کار مجازی انجام می‌دهند) عبارتند از P و T.

نیروی P موقعیت طولی نقطه E و نیروی کشش سیم (T) راستای AC را تحت تأثیر قرار می‌دهند، بنابراین داریم:

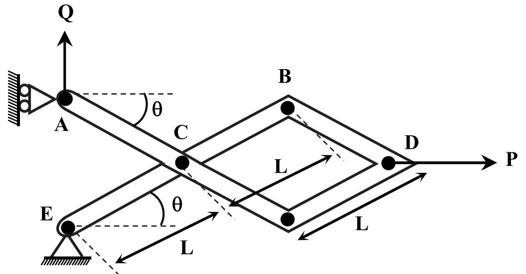
$$x_E = b\sin\theta \Rightarrow \delta x_E = b\cos\theta\delta\theta$$

$$\begin{cases} L_{AC} = \dfrac{b\sin(\pi-\theta)}{\sin\frac{\theta}{۲}} = ۲b\cos\frac{\theta}{۲} \Rightarrow \delta L_{AC} = -b\sin\frac{\theta}{۲}\delta\theta \\ (\text{در مثلث } ACD) \end{cases}$$

کار مجازی یک سیستم در حال تعادل صفر است در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\delta W = (P.\delta x_E) + (T.\delta L_{AC}) = ۰ \Rightarrow (P\times b\cos\theta\delta\theta) + (T\times -b\sin\frac{\theta}{۲}\delta\theta) = ۰ \Rightarrow T = \frac{P\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{۲}}$$

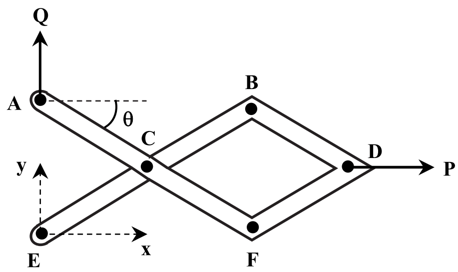
مثال۱۴: با توجه به شکل مقابل، کدام رابطه بین P و Q برقرار است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)



۱) $Q = \frac{۲}{۳}\tan\theta.P$　　۲) $Q = \frac{۳}{۲}\tan\theta.P$

۳) $Q = \frac{۴}{۳}\tan\theta.P$　　۴) $Q = \frac{۳}{۴}\tan\theta.P$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با رسم دیاگرام جسم آزاد کل سیستم و از آنجایی که نیروی P، تغییر مکان افقی برای نقطه D و نیروی Q، تغییر مکان قائم برای نقطه A ایجاد می‌کنند، با توجه به هندسه مکانیزم مسأله داریم:



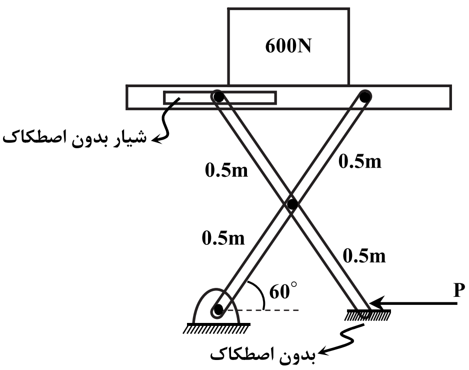
$$\begin{cases} x_D = ۳L.\cos\theta \Rightarrow \delta x_D = -۳L\sin\theta\delta\theta \\ y_A = ۲L.\sin\theta \Rightarrow \delta y_A = ۲L\cos\theta\delta\theta \end{cases}$$

از قانون کار مجازی خواهیم داشت:

$$\delta W = (P.\delta x_D) + (Q.\delta y_A) = ۰ \Rightarrow P(-۳L\sin\theta\delta\theta) + Q(۲L\cos\theta\delta\theta) = ۰ \Rightarrow -۳P\sin\theta + ۲Q\cos\theta = ۰ \Rightarrow Q = P\times\frac{۳}{۲}\tan\theta$$

مثال۱۵: با صرفنظر از اصطکاک، نیروی P لازم برای بالا بردن وزنه ۶۰۰ نیوتنی کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)



۱) $P = ۴۰۰$　　۲) $P = ۲۰۰$

۳) $P = ۴۰۰\sqrt{۳}$　　۴) $P = ۲۰۰\sqrt{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با رسم دیاگرام جسم آزاد برای مکانیزم بالابر، از آنجایی که نیروی وزن باعث تغییر مکان قائم در نقطه B و نیروی P تغییر مکان افقی در نقطه A ایجاد می‌کنند، با توجه به هندسه شکل داریم:

$$\begin{cases} x_A = ۲L.\cos\theta \Rightarrow \delta x_A = -۲L\sin\theta\delta\theta \\ y_B = h + ۲L.\sin\theta \Rightarrow \delta y_B = ۲L\cos\theta\delta\theta \end{cases}$$