# فصل اول

## «مفاهیم اساسی سیستم‌های قدرت»

**رئوس مطالب مهم این فصل:**

| | |
|---|---|
| ۱ـ ولتاژ و جریان در سیستم‌های قدرت | ۵ـ سیستم‌های سه‌فاز |
| ۲ـ تعریف عناصر سیستم در حوزه فرکانس | ۶ـ توان سه‌فاز |
| ۳ـ توان AC در مدار تک‌فاز | ۷ـ سیستم پریونیت |
| ۴ـ اصلاح ضریب توان | |

### مقدمه

منظور از یک سیستم قدرت چیست؟ این اولین سؤالی است که در بررسی یک سیستم قدرت ممکن است در ذهن ایجاد شود. سیستم قدرت شبکه‌ای است که خود سیستم‌های تولید، انتقال و توزیع را شامل می‌گردد. درواقع این شبکه در بخش تولید شکلی از انرژی (مانند انرژی سوختن زغال سنگ) را به انرژی الکتریکی تبدیل و در مرحله بعد از طریق سیستم انتقال (خطوط انتقال، ترانسفورماتورها و ...) انرژی تولیدی را منتقل کرده و در قسمت توزیع به مصرف‌کنندگان می‌رساند. چهار جزء اصلی سیستم قدرت عبارتند از: نیروگاه‌ها، ترانسفورماتورها، خطوط انتقال و پست‌ها.

اگر بخواهیم برای یک سیستم قدرت ساختار ساده‌ای را نشان بدهیم، شکل زیر شکل مناسبی خواهد بود:

نیروگاه $\xrightarrow{\text{تولید انرژی الکتریکی}}$ پست تولید $\rightarrow$ خطوط انتقال $\rightarrow$ پست توزیع $\rightarrow$ مصرف کننده

**بخش تولید**

در این بخش که شامل نیروگاه‌ها و پست‌های تولید می‌شود، انرژی الکتریکی تولید می‌گردد. توان الکتریکی ابتدا در بازه ولتاژ ۱۱kV تا ۲۵kV تولید می‌گردد، سپس توسط ترانسفورماتورهای پست تولید برای انتقال در مسافت‌های طولانی، ولتاژ افزایش پیدا می‌کند.

نیروگاه‌های توان معمول را می‌توان به سه دسته حرارتی، هسته‌ای و برق آبی دسته‌بندی کرد، هرچند که در سال‌های اخیر با تأکید ویژه بر روی استفاده از انرژی‌های پاک (انرژی بادی، خورشیدی و ...) این نیروگاه‌ها نیز جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. در سیستم تولید، ژنراتور و ترانسفورماتور نقش اصلی را ایفا می‌کنند. ژنراتور تبدیل انرژی را انجام می‌دهد و ترانسفورماتور توان را با بازده مناسب از یک سطح به سطح دیگری از ولتاژ می‌رساند. توان انتقال یافته برابر با توان قبلی است که تلفات ترانسفورماتور از آن کم شده است. دلیل اصلی استفاده از ترانسفورماتور برای افزایش ولتاژ در سمت تولید، کاهش تلفات در خط انتقال برای مسیرهای طولانی است.

**بخش انتقال**

این بخش شامل خطوط انتقال هوایی است که انرژی الکتریکی تولیدشده را در سیستم تولید به بخش توزیع می‌رساند. وظیفه این بخش این است که:

۱) انرژی تولیدشده توسط ژنراتورها را به پست بعدی برساند.

۲) دو یا چند پست تولید را به‌هم متصل نماید.

ولتاژهای انتقال در ایران شامل ۶۳kV، ۱۳۲kV، ۲۳۰kV و ۴۰۰kV می‌باشد.

پست فوق توزیع: بخشی از سیستم انتقال است که پست‌های فشارقوی را از طریق ترانسفورماتور کاهنده به پست‌های توزیع متصل می‌نماید. در این بخش خازن‌ها و راکتورهایی برای حفظ ولتاژ موردنظر وجود دارند. عملکرد این پست مشابه عملکرد سیستم توزیع است با این تفاوت که:

۱) ولتاژ سیستم فوق توزیع بیشتر است.

۲) تنها بارهای بزرگ‌تر را تأمین م‌کند.

۳) تعداد کمی پست را تغذیه می‌کند، درحالی‌که سیستم توزیع، تعداد زیادی بار را باید تأمین نماید.

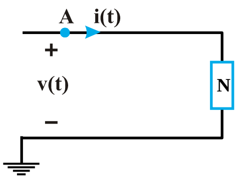
**سیستم توزیع**

بخشی از سیستم قدرت که تمامی مصرف‌کنندگان یک ناحیه را به دیگر بخش سیستم قدرت متصل می‌نماید، به‌عنوان سیستم توزیع شناخته می‌شود. پست‌های توزیع توان را بین مصرف‌کننده‌های کوچک تجاری و خانگی توزیع می‌نمایند.

## ولتاژ و جریان در سیستم قدرت

از آنجا که ولتاژها و جریان‌های عناصر سیستم‌های قدرت (سلف، خازن و ...) نیاز به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری دارند، در سیستم قدرت از ولتاژ سینوسی استفاده می‌کنیم، زیرا همانطور که می‌دانیم توابع سینوسی بعد از مشتق و انتگرال شکل سینوسی خود را حفظ می‌کنند.

شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید:




$v(t)$ و $i(t)$ به ترتیب ولتاژ و جریان لحظه‌ای نقطه‌ای مانند $A$ در شکل هستند.

$v(t)$ یک ولتاژ سینوسی و $R$ یک عنصر از سیستم قدرت است.

با توجه به عناصر سیستم قدرت (مقاومت، سلف، خازن ...) جریان نیز سینوسی خواهد بود، لذا ولتاژ و جریان را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_V)\quad,\quad i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_I)\qquad(1)$$

البته ممکن است در بعضی از کتاب‌ها ولتاژ و جریان لحظه‌ای به‌صورت زیر نمایش داده شود:

$$v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta_V)\quad,\quad i(t)=I_m\sin(\omega t+\theta_I)\qquad(2)$$

استانداردی که برای این کتاب و همچنین کنکور در نظر گرفته می‌شود، همواره روش نمایش اول است.

در بحث‌های مربوط به سیستم‌های قدرت، حالت نهایی و پایدار برای محاسبات در نظر گرفته می‌شود. لذا با توجه به این‌که ولتاژ و جریان سینوسی هستند، می‌توانیم از روش فازوری برای تحلیل آسان‌تر استفاده کنیم. در ادامه نکات مربوط به اعداد مختلط و مبحث فازور به‌صورت خلاصه مرور می‌گردد:

**اعداد مختلط**

هر عدد مختلط به فرم $Z=X+jY$ نمایش داده می‌شود، که $X$ را قسمت حقیقی عدد مختلط و $Y$ را قسمت موهومی عدد مختلط می‌نامیم، داریم:

$$X=\text{Re}(Z)\quad,\quad Y=\text{Im}(Z)$$

$$|Z|=\sqrt{X^2+Y^2}\quad,\quad \measuredangle Z=\tan^{-1}\frac{Y}{X}$$

$|Z|$ اندازه‌ی $Z$ و $\measuredangle Z$ فاز (زاویه‌ی) $Z$ است.

**نمایش در حوزه‌ی فرکانس (فازوری)**

هر تابعی به فرم $a(t)=A_m\cos(\omega t+\theta)$ را می‌توانیم به‌صورت $A_{rms}\measuredangle\theta$ (که در آن $A_{rms}=\frac{A_m}{\sqrt{2}}$ می‌باشد)، نمایش دهیم که بـه آن نمـایش در **حوزه‌ی فرکانس** یا **فازوری تابع** می‌گویند. در رابطه‌ی بالا $a(t)$ نمایش تابع در حوزه‌ی زمان و $A$ نمایش تابع در حوزه‌ی فرکانس است.

$A_{rms}$ مقدار مؤثر $A$ است. برای به‌دست آوردن مقدار مؤثر یک تابع یا شکل موج $x(t)$، در حالت کلی از رابطه‌ی $X_{rms}=\left(\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$ استفاده می‌کنیم. اگر از این رابطه برای یک تابع سینوسی مانند $A$ استفاده کنیم، مقدار $A_{rms}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{A_{rms}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_m^2\sin^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_m^2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi}(A_m^2\pi)\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{A_m}{\sqrt{2}}}$$

**نکته۱:** در صـورتی کـه بتـوان تـابع $x(t)$ را بـه‌صـورت $x(t)=\left[\sum_{m=1}^{M}a_m\cos(m\omega t+\alpha_m)+b_m\sin(m\omega t+\beta_m)\right]$ نوشـت، $X_{rms}$ را می‌توان از رابطه $X_{rms}=\sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M}(a_m^2+b_m^2)}{2}}$ به‌دست آورد.

**نکته۲:** $A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\tan^{-1}\frac{B}{A})$

**مثال ۱:** فرم فازوری توابع زیر را که در حوزه‌ی زمان هستند، به‌دست آورید.

الف) $v(t)=4\sqrt{2}\cos 5t$        ب) $v(t)=8\sqrt{2}\sin(5t+60^\circ)$

**پاسخ:** الف) تابع $v(t)$ دارای شکل استاندارد است، کافی است دو مقدار $\theta$ و $V_{rms}$ را پیدا کنیم:

$$V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4\ ,\ \theta=0\xrightarrow{\text{نوشتن نمایش فازوری}}V=4\measuredangle 0^\circ$$

ب) چون تابع سینوسی است، باید آن را به شکل استاندارد کسینوسی تبدیل کنیم و سپس آن را در حوزه‌ی فازور بنویسیم. برای تبدیل یک تابع سینوسی به یک تابع کسینوسی کافی است در شکل کسینوسی از فاز، $90^\circ$ کم نماییم، داریم:

$$v(t)=8\sqrt{2}\sin(5t+60^\circ)=8\sqrt{2}\cos(5t+60^\circ-90^\circ)=8\sqrt{2}\cos(5t-30^\circ)$$

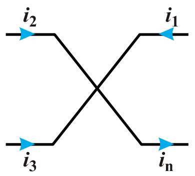
لذا $V=8\measuredangle-30^\circ$ است.

**نکته ۳:** بعضی وقت‌ها با سؤالاتی مواجه می‌شویم که مجبوریم برای حل آنها چند موج کسینوسی را با هم جمع کنیم. در این حالت اگر همه‌ی موج‌ها در حوزه‌ی زمان هم فرکانس باشند، می‌توانیم از روش فازوری برای آسان‌تر شدن حل استفاده کنیم.

**توجه:** فرم فازوری $A=A_{rms}\measuredangle\theta$ را می‌توان به‌صورت مقابل نیز نمایش داد: $A=A_{rms}\measuredangle\theta=A_{rms}e^{j\theta}=A_{rms}\cos\theta+jA_{rms}\sin\theta$

**نکته ۴:** هنگامی که در حوزه‌ی فازور اندازه و زاویه‌ی ولتاژ یا جریان را به‌دست آوردیم، برای نوشتن مقدار جریان یا ولتاژ در حوزه‌ی زمان اندازه را در $\sqrt{2}$ ضرب کرده و سپس مقدار به‌دست آمده را در $\cos(\omega t+\theta)$ ضرب می‌کنیم. $\theta$ زاویه در حوزه‌ی فازور و $\omega$ برابر با $2\pi f$ است که $f$ فرکانس می‌باشد.

**مثال ۲:** در شکل روبه‌رو مقدار جریان $i_n$ کدام است؟




$$i_1(t)=40\sqrt{2}\sin 2t\ \ A$$
$$i_2(t)=40\sqrt{2}\cos(2t-30^\circ)\ \ A$$
$$i_3(t)=40\sqrt{2}\cos(2t+30^\circ)\ \ A$$

۱) $80\cos(2t-30^\circ)\ A$        ۲) $40\cos(2t+30^\circ)\ A$        ۳) $80\sqrt{2}\cos(2t-30^\circ)\ A$        ۴) $80\sqrt{2}\cos(2t+30^\circ)\ A$

**پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که از شکل سؤال پیدا است $i_n$ مجموع سه جریان $i_3,i_2,i_1$ است، یعنی: $i_n=i_1+i_2+i_3$

با توجه به این که فرکانس در هر سه تابع یکی است، ابتدا جریان‌ها را در حالت فازوری می‌نویسیم و با جمع آنها فرم فازوری $i_n$ را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$i_1(t)=40\sqrt{2}\sin 2t=40\sqrt{2}\cos(2t-90^\circ)\xrightarrow{\text{بردن به فرم فازوری}}I_1=40\measuredangle-90^\circ\ \ A$$

$i_3,i_2$ دارای فرم استاندارد کسینوسی هستند پس می‌توانیم به‌طورمستقیم فرم فازوری آنها را بنویسیم:

$$I_2=40\measuredangle-30^\circ\ \ A\quad \text{و}\quad I_3=40\measuredangle 30^\circ\ \ A$$

در حالت فازوری $I_N$ برابر است با:

$$I_N=I_1+I_2+I_3=40e^{-j90}+40e^{-j30}+40e^{j30}$$

$$\xrightarrow[\text{با توجه به فرمول گفته شده در صفحه‌ی قبل}]{\text{تجزیه به مؤلفه‌های حقیقی و موهومی}}I_N=40(0+j\sin(-90^\circ))+40(\cos(-30^\circ)+j(\sin-30^\circ))+40(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)\ A$$

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}}I_N=-j40+40\cos 30^\circ-40j\sin 30^\circ+40\cos 30^\circ+40j\sin 30^\circ\ A$$

مقادیرکسینوس و سینوس‌ها را محاسبه کرده و قسمت‌های موهومی و حقیقی را با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه:

$$I_N=40\sqrt{3}-j40\ A$$

اندازه و زاویه $I_N$ را با توجه به این‌که $I_N$ یک عدد مختلط است و با استفاده از روابط گفته شده برای اندازه و زاویه‌ی یک عدد مختلط به‌دست می‌آوریم:

$$I_{N_{rms}}=\sqrt{(40\sqrt{3})^2+40^2}=\sqrt{3\times 40^2+40^2}=2\times 40=80\ \ A$$

$$\measuredangle I_N=\tan^{-1}\left(\frac{-40}{40\sqrt{3}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=-30^\circ$$

با داشتن فاز و اندازه‌ی $I_N$ می‌توانیم آن را به‌صورت فازوری بنویسیم: $I_N=I_{N_{rms}}\measuredangle I_N=80\measuredangle-30^\circ\ \ A$

با توجه به این‌که گزینه‌ها در حوزه‌ی زمان هستند باید $I_N$ را نیز به حوزه‌ی زمان برگردانیم:

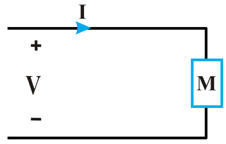
$$i_n(t)=\sqrt{2}I_{N_{rms}}\cos(\omega t+\theta)=80\sqrt{2}\cos(2t-30^\circ)\ \ A$$

## امپدانس و ادمیتانس

همگی رابطه یک مقاومت الکتریکی را به‌خاطر داریم که برابر اندازه ولتاژ دو سر عنصر تقسیم بر اندازه جریان عبوری از آن است. درواقع همان‌طور که از این تعریف مشخص است مقدار مقاومت یک مدار الکتریکی سنجشی است از نحوه عبور جریان از آن مدار. درواقع هرچه مقاومت پایین‌تر، جریان الکتریکی ساده‌تر شارش پیدا می‌کند و برعکس. با اضافه شدن عناصر جدید به مدار مانند خازن و سلف و در نظر گرفتن منبع جریان متناوب بررسی عملکرد مدار دچار پیچیدگی بیشتری می‌شود. در این راستا برای مدار الکتریکی در حوزه فازور تعاریف جدیدی ارائه می‌شود.

امپدانس: معیاری برای سنجش مخالفت یک مدار الکتریکی در برابر شارش جریان است هنگامی‌که به دو سر آن ولتاژ اعمال می‌گردد.

**ادمیتانس**: این مفهوم در مقابل امپدانس قرار می‌گیرد و معیاری است برای سنجش رسانایی الکتریکی یا همان‌طور که از معنای واژه مشخص است، مقدار ادمیتانس یک مدار مشخص‌کننده این است که جریان چقدر اجازه عبور از آن را دارد.




شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. M یکی از اجزای شبکه است که در دو سر خود دارای ولتاژ V است و جریان I از آن عبور می‌کند.

$$V = V_{rms} \measuredangle \theta_V \quad , \quad I = I_{rms} \measuredangle \theta_I$$

**امپدانس** M به‌صورت نسبت فازور ولتاژ دو سر عنصر M به فازور جریان عبوری از آن تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{rms} \measuredangle \theta_V}{I_{rms} \measuredangle \theta_I} = \frac{V_m}{I_m} \measuredangle (\theta_V - \theta_I) \Omega$$

**ادمیتانس** M به‌صورت نسبت فازور جریان عبوری از عنصر M به فازور ولتاژ دو سر آن تعریف می‌شود:

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{I_{rms} \measuredangle \theta_I}{V_{rms} \measuredangle \theta_V} = \frac{I_m}{V_m} \measuredangle (\theta_I - \theta_V) \mho$$

امپدانس و ادمیتانس عکس یکدیگر هستند $(Y = \frac{1}{Z})$. یعنی می‌توان با داشتن یکی از این دو، دیگری را نیز به‌دست آورد.

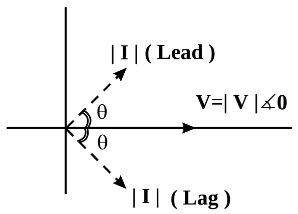
به‌طورخلاصه:

$$\boxed{Z_{\text{(امپدانس)}} = \frac{V_m}{I_m} \measuredangle \theta \quad , \quad Y_{\text{(ادمیتانس)}} = \frac{I_m}{V_m} \measuredangle -\theta \quad , \quad \theta = \theta_V - \theta_I}$$

**نکته۵:** $\theta$ (زاویه‌ی امپدانس) به‌صورت $\measuredangle \theta = \measuredangle (\theta_V - \theta_I)$ تعریف می‌شود. به $\cos\theta$ **ضریب توان (power factor)** می‌گویند.

## تعریف عناصر سیستم‌های قدرت در حوزه‌ی فرکانس

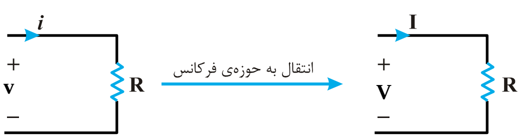
قبل از پرداختن به تعاریف عنصرها در حوزه فرکانس و محاسبه امپدانس آنها، بد نیست دو واژه پرکاربرد پس‌فاز (Lag) و پیش‌فاز (Lead) را یادآوری نماییم. درسیستم قدرت معمولاً به‌جای اعلام دقیق زوایای جریان و ولتاژ، زاویه ولتاژ به‌عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و آدرس زاویه جریان به‌وسیله ضریب توان $(\cos\theta)$ و پس‌فاز یا پیش‌فاز بودن مشخص می‌گردد. مقدار زاویه برابر (ضریب توان) $\cos^{-1}$ است. پس‌فاز یا پیش‌فاز ممکن است مقداری گیج‌کننده باشد. اما اگر به واژه‌های اصلی مراجعه کنیم می‌بینیم که نامگذاری مناسبی صورت گرفته است. شکل مقابل را در نظر بگیرید:




ولتاژ مشخص و زاویه آن به‌عنوان مرجع درنظر گرفته شده است. فرض کنید به شما گفته می‌شود مقدار جریان $|I|$ بوده و ضریب توان $\cos\theta$ پس‌فاز (Lag) است. باتوجه به این اطلاعات به‌سادگی می‌توانید جریان را در شکل مشخص کنید. پس‌فاز معادل Lag یا عقب بودن است. مثلاً در یک بازی اینترنتی بعضی از بازیگرها دارای Lag بوده و از روند بازی عقب‌تر هستند. در نقطه مقابل اگر ضریب توان $\cos\theta$ پیش‌فاز (Lead) باشد این یعنی جریان جلوتر از ولتاژ است مانند یک Leader یا پیشوا که از بقیه جلوتر است!

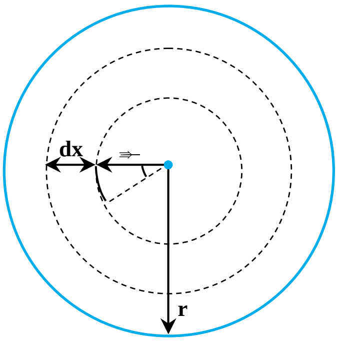
### مقـاومت اهمی

رابطه‌ی ولتاژ و جریان مقاومت در حوزه‌ی فرکانس مشابه حوزه‌ی زمان است و ولتاژ و جریان فاز یکسانی دارند.




$$R = \frac{V}{I} = Z \;,\; Y = \frac{1}{R}$$

## اندوکتانس داخلی هادی




شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. با توجه به این که کل جریان عبوری از هادی برابر I است، جریان عبوری از قسمت مشخص شده با شعاع x برابر می‌شود با:

$$I_x = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} I = \frac{x^2}{r^2} I = (\frac{x}{r})^2 I$$

در واقع چون جریان کل I به صورت حجمی در هادی پخش شده است، جریان‌های داخلی بـه نسـبت مساحت‌ها تقسیم می‌گردند.

با توجه به قانون آمپر داریم:

$$\int H_x . dx = I_x$$

$H_x$ شدت میدان مغناطیسی در مسیر دایره‌ای به شعاع x است. $H_x$ ثابت و مؤلفه‌ی شعاعی ندارد، لذا با توجه به مسیر انتگرال‌گیری داریم:

$$H_x \times 2\pi x = I_x \Rightarrow H_x = \frac{I_x}{2\pi x}$$

$I_x$ را برحسب I محاسبه کردیم، با جایگذاری مقدار $I_x$ در رابطه قبل $H_x$ برابر می‌شود با:

$$H_x = \frac{1}{2\pi x}\frac{x^2}{r^2} I = \frac{xI}{2\pi r^2} \qquad (1)$$

همانطور که گفتیم جنس هادی‌های خط انتقال معمولاً آلومینیوم است $(\mu_r = 1)$، لذا:

$$B_x = \mu H_x = \mu_r \mu_\circ H_x \xrightarrow{\mu_r = 1} B_x = \mu_\circ H_x \xrightarrow{\text{جایگذاری } H_x \text{ از رابطه‌ی (1)}} B_x = \frac{\mu_\circ x I}{2\pi r^2} \;,\; \varphi = BA \Rightarrow d\varphi = BdA$$

با توجه به شکل، در واحد طول برای dA خواهیم داشت: $dA = dx \times 1$ و با توجه به تعریف شار، $d\varphi$ برابر است با:

$$d\varphi = BdA = \frac{\mu_\circ x I}{2\pi r^2} \times dx \times 1$$

شار دور (شار پیوندی) برابر حاصل‌ضرب شار در تعداد دور است:

$$\lambda = N\varphi \Rightarrow d\lambda = N d\varphi$$

$\lambda$ مقداری از شار است، که توسط N دور در برگرفته می‌شود. پس برای $d\lambda$ عبارت سمت راست تساوی به صورت زیر ساده می‌شود:

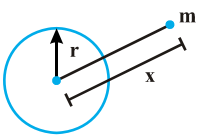
$$d\lambda = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} d\varphi \xrightarrow{\text{جایگذاری مقدار } d\varphi} d\lambda = \frac{\mu_\circ x^3 I}{2\pi r^4} dx$$

با انتگرال‌گیری در کل هادی مقدار شار دور کل به دست می‌آید:

$$\lambda_{\text{کل (داخل هادی)}} = \int_\circ^r d\lambda = \int_\circ^r \frac{\mu_\circ x^3 I}{2\pi r^4} dx = \frac{\mu_\circ}{8\pi} I \xrightarrow{\mu_\circ = 4\pi \times 10^{-7}} \lambda = \frac{1}{2} \times 10^{-7}\, I \xrightarrow{\lambda = LI} \boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \; \frac{H}{m}}$$

**نکته۲:** اندوکتانس داخلی هادی در واحد طول مقداری ثابت بوده و به قطر و ضخامت هادی بستگی ندارد.

## اندوکتانس خارجی هادی




شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم شدت میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی m به فاصله‌ی x از مرکـز هـادی پیدا کنیم. با توجه به قانون آمپر داریم:

$$\oint H_x . dx = I \xrightarrow{\text{ثابت } H_x} H_x \times 2\pi x = I \Rightarrow B_x = \frac{\mu_\circ I}{2\pi x}$$

$$d\varphi_x = BdA \xrightarrow{\text{dA را برابر dx در واحد طول در نظر می‌گیریم}} d\varphi = \frac{\mu_\circ I}{2\pi x} \times dx \times 1 \; (\frac{wb}{m})$$

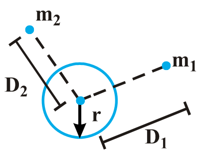
در اینجا چون m خارج از هادی است، شار دور همه‌ی شار را در برمی‌گیرد و برابر خواهد شد با:

$$d\lambda = N d\varphi = d\varphi$$

در مرحله‌ی بعد در خارج از هادی از $d\lambda$ انتگرال می‌گیریم:

$$\lambda = \int_r^x d\lambda = \int_r^x \frac{\mu_\circ I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_\circ}{2\pi} I \ln\frac{x}{r} \xrightarrow{L = \frac{\lambda}{I}} \boxed{L = \frac{\mu_\circ}{2\pi} \ln\frac{x}{r} \qquad H/m}$$

**مثال۸:** در شکل نشان داده شده زیر اندوکتانس بین دو نقطه‌ی $m_1$ و $m_2$ کدام است؟




۱) $4\times10^{-7}\ln\frac{D_2}{D_1}$　۲) $2\times10^{-7}\ln\frac{D_2}{D_1}$

۳) $2\times10^{-7}\ln D_1D_2$　۴) $4\times10^{-7}\ln D_1D_2$

**پاسخ:** گزینه «۲» $m_1$ و $m_2$ هر دو خارج از هادی قرار دارند در نتیجه $d\lambda=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx$ بوده و از $D_1$ تا $D_2$ انتگرال می‌گیریم:

$$\lambda_{m_1m_2}=\int_{D_1}^{D_2}d\lambda=\int_{D_1}^{D_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln x\Big|_{D_1}^{D_2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{D_2}{D_1}\xrightarrow{\mu_0=4\pi\times10^{-7}}\lambda_{m_1m_2}=2\times10^{-7}I\ln\frac{D_2}{D_1}$$

داریم $\lambda=LI$ لذا:

$$L=\frac{\lambda}{I}=2\times10^{-7}\ln\frac{D_2}{D_1}\quad H/m$$

## اندوکتانس کل هادی

اندوکتانس کل هادی به صورت حاصل جمع اندوکتانس داخلی و خارجی تعریف می‌شود:

$$L_{\text{کل}}=L_{\text{داخلی}}+L_{\text{خارجی}}\ ,\ L_{tot}=L_{int}+L_{ext}$$

اندوکتانس داخلی را می‌توانیم به صورت روبه‌رو نیز بنویسیم:

$$L_{in}=\frac{1}{2}\times10^{-7}=2\times10^{-7}\ln e^{\frac{1}{4}}=2\times10^{-7}\ln\frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}}\quad H/m$$

حال اگر بخواهیم اندوکتانس کل را محاسبه نماییم، خواهیم داشت:

$$L_{\text{کل}}=L_{\text{داخلی}}+L_{\text{خارجی}}=2\times10^{-7}\ln\frac{1}{e^{\frac{-1}{4}}}+2\times10^{-7}\ln\frac{x}{r}=2\times10^{-7}\ln\frac{x}{re^{\frac{-1}{4}}}$$

$r'=re^{\frac{-1}{4}}$ را **شعاع متوسط هندسی** هادی تعریف می‌کنیم. با جایگذاری $r'$ در تساوی $L_{\text{کل}}$ داریم:

$$\boxed{L_{\text{کل}}=2\times10^{-7}\ln\frac{x}{r'}}\quad H/m$$

**مثال۹:** اندوکتانس کل یک هادی با شعاع $r=e^{\frac{5}{4}}\,m$ در فاصله‌ی $e^5$ متری از آن چه قدر است؟

۱) $8\times10^{-7}\ H/m$　۲) $4\times10^{-7}\ H/m$　۳) $7/5\times10^{-7}\ H/m$　۴) $3/5\times10^{-7}\ H/m$

**پاسخ:** گزینه «۱» اندوکتانس کل خواسته شده است. لذا از رابطه‌ی $L=2\times10^{-7}\ln\frac{x}{r'}$ استفاده می‌کنیم.

x فاصله‌ی مرکز هادی تا مکان m است که هدف، محاسبه‌ی اندوکتانس در آن نقطه است درنتیجه $x=e^5\,m$. آنچه در صورت سؤال داده شده مقدار r است، $r'$ به صورت روبه‌رو بدست می‌آید:

$$r'=e^{-\frac{1}{4}}r=e^{-\frac{1}{4}}\times e^{\frac{5}{4}}=e^1$$

با جایگذاری $r'$ و x به دست آمده در فرمول اندوکتانس خواهیم داشت:

$$L=2\times10^{-7}\ln\frac{e^5}{e}=2\times10^{-7}\ln e^4=8\times10^{-7}\ H/m$$

در صورتی که r به $r'$ تبدیل نشود گزینه ۳ به دست می‌آید که صحیح نیست.

**مثال۱۰:** در مثال قبل اگر طول هادی $10km$ باشد، اندوکتانس کل کدام است؟

۱) $8\times10^{-2}\ H$　۲) $8mH$　۳) $64\times10^{-7}\ H$　۴) $8\times10^{-7}\ H$

**پاسخ:** گزینه «۲» در مثال قبل اندوکتانس را در واحد طول به دست آوردیم $L=8\times10^{-7}\ H/m$، این اندوکتانس در واحد طول بوده که در اینجا واحد طول متر است: $H/m$. اگر بخواهیم اندوکتانس را به دست آوریم باید آن را در طول داده شده ضرب نماییم اما به این نکته نیز توجه داریم که واحد طول متر است ولی در صورت سؤال طول به km داده شده لذا $L_{\text{کل}}=8\times10^{-7}\times10\times10^3=8\times10^{-3}\ H$.

**نکته۳:** در سؤالات بررسی کنکور کارشناسی ارشد مربوط به این فصل ممکن است در واحدها تغییراتی ایجاد شود. لذا تنها با به دست آوردن یک عدد و بدون تطبیق واحدها گزینه‌ای را انتخاب نکنید! در ادامه فصل مثال‌های بیشتری با توجه به این موضوع طراحی شده‌اند.

**مثال۱۱: برای یک هادی تکی با شعاع $r=e^{\frac{9}{4}}m$ اندوکتانس در فاصله‌ی $e^{8}$ متری چند برابر اندوکتانس داخلی آن است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۸

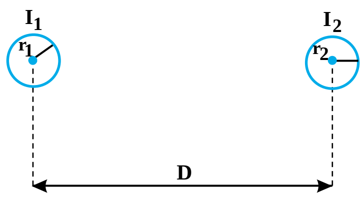
**پاسخ:** گزینه «۲» منظور از اندوکتانس در این سؤال اندوکتانس کل در واحد طول است. با توجه به این که اندوکتانس داخلی در واحد طول ثابت است، فقط کافی است مقدار اندوکتانس کل را محاسبه کنیم، لذا داریم:

$$L=2\times10^{-7}\ln\frac{x}{r'}\quad,\quad r'=re^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow L_{\text{کل}}=2\times10^{-7}\ln\frac{e^{8}}{e^{\frac{9}{4}}e^{-\frac{1}{4}}}=2\times10^{-7}\ln\frac{e^{8}}{e^{2}}=2\times10^{-7}\ln e^{6}=12\times10^{-7}\ \text{H/m}$$

سؤال نسبت اندوکتانس کل به اندوکتانس داخلی برابر است با:

$$\frac{\text{اندوکتانس کل}}{\text{اندوکتانس داخلی}}=\frac{12\times10^{-7}}{0/5\times10^{-7}}=24$$

## اندوکتانس خط تک فاز دو سیمه




یک خط تک فاز دو سیمه مانند شکل نشان داده شده دارای دو هادی توپر است.

یکی از هادی‌ها رفت و دیگری برگشت خواهد بود، لذا:

$I=$ جریان سیم رفت

$-I=$ جریان سیم برگشت

اندوکتانس این خط را می‌توان با دو اندوکتانس سری مدل کرد و اندوکتانس معادل، حاصل جمع این دو خواهد بود در نتیجه داریم:

$$L_{\text{معادل}}=L_{\text{رفت}}+L_{\text{برگشت}}=L_1+L_2$$

با توجه به فرمول به دست آمده برای اندوکتانس یک هادی در صورتی که $x$ را فاصله‌ی مرکز یک هادی تا مرکز هادی دیگر در نظر بگیریم $x=D$ خواهد بود، لذا:

$$L_1=2\times10^{-7}\ln\frac{D}{r_1'}\ \text{H/m}\quad,\quad L_2=2\times10^{-7}\ln\frac{D}{r_2'}\ \text{H/m}\Rightarrow L_{\text{کل}}=L_1+L_2=2\times10^{-7}\ln\frac{D^2}{r_1'r_2'}\ \text{H/m}$$

$$\xrightarrow{\text{اگر } r_1'=r_2'=r}\boxed{L_{\text{کل}}=2\times10^{-7}\ln\left(\frac{D}{r'}\right)^2=4\times10^{-7}\ln\frac{D}{r'}}\quad \text{H/m}$$

**مثال۱۲: اگر در یک خط تک فاز دو سیمه مقدار D (فاصله‌ی بین دو هادی) را دو برابر نماییم اندوکتانس کل در واحد طول چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) دو برابر می‌شود. ۲) افزایش می‌یابد. ۳) نصف می‌شود. ۴) کاهش پیدا می‌کند.

**پاسخ:** گزینه «۲» نحوه‌ی تغییرات را با توجه به فرمول اندوکتانس خط دو سیمه بررسی می‌کنیم:

$$L=4\times10^{-7}\ln\frac{D}{r'}$$

فرض کنیم $r'$ ثابت است اگر D دو برابر شود مقدار L بیشتر می‌شود، ولی الزاماً دو برابر نمی‌شود، لذا گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

**مثال۱۳: اندوکتانس یک خط تک فاز دو سیمه $(D=5r\ ,\ r_1'=0/5r\ ,\ r_2'=2r_1')$ کدام است؟** $(\ln5=1/6\ ,\ \ln2=0/7)$

۱) $7/8\times10^{-7}$ H/m ۲) $8/7\times10^{-7}$ H/m ۳) $4/5\times10^{-9}$ H/m ۴) $9/5\times10^{-8}$ H/m

**پاسخ:** گزینه «۱» در این حالت با توجه به این که $r_1\neq r_2$ نمی‌توانیم از رابطه‌ی ساده شده استفاده کنیم. در حالتی که شعاع‌ها با هم برابر نباشند از رابطه‌ی $L=2\times10^{-7}\ln\frac{D^2}{r_1'r_2'}$ استفاده خواهیم کرد. با جایگذاری فواصل داده شده در این رابطه داریم:

$$L=2\times10^{-7}\ln\frac{(5r)^2}{r\times0/5r}=2\times10^{-7}\ln\frac{25r^2}{0/5r^2}=2\times10^{-7}\ln50\ \text{H/m}$$

با توجه به مقادیر داده شده در صورت سؤال $\ln50$ را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\ln50=\ln5^2\times2=2\ln5+\ln2=3/9\Rightarrow L=2\times10^{-7}\ln50=7/8\times10^{-7}\ \text{H/m}$$

**مثال ۱۴:** در مثال قبل اگر $D = 8r$ و $r'_1 = r'_2 = r$ باشد، اندوکتانس در واحد طول کدام است؟ $(\ln 2 = 0/7)$

۱) $9/25\ mH/m$　　۲) $8/4\times10^{-7}\ H/m$　　۳) $7/9\times10^{-7}\ H/m$　　۴) $5/5\times10^{-6}\ H/m$

**پاسخ:** گزینه «۲» در این حالت چون $r_1 = r_2$ می‌توانیم از فرمول ساده شده استفاده کنیم در نتیجه:

$$L = 4\times10^{-7}\ln\frac{D}{r'} = 4\times10^{-7}\ln\frac{8r}{r} = 4\times10^{-7}\ln 8$$

این جواب در گزینه‌ها نیست و باید مقدار ln را نیز به دست آورد:

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\times\ln 2 = 2/1 \Rightarrow L = 8/4\times10^{-7}\ H/m$$

**مثال ۱۵:** در صورتی که در یک خط تک فاز دو سیمه داشته باشیم $D = 2m\ ,\ r'_1 = 80cm\ ,\ r'_2 = 40cm$ اندوکتانس خط کدام است؟ (مقادیر برحسب $H/m$ هستند).

۱) $4\times10^{-7}\ln\frac{25}{2}$　　۲) $4\times10^{-7}\ln\frac{5}{\sqrt{2}}$　　۳) $2\times10^{-7}\ln\frac{50}{4}$　　۴) $2\times10^{-7}\ln\frac{25}{4}$

**پاسخ:** گزینه «۲» در این حالت $r_1 \neq r_2$ لذا $L = 2\times10^{-7}\ln\frac{D^2}{r'_1 r'_2}$ است. نکته‌ای که در حل باید به آن توجه داشته باشیم این است که عبارت نوشته شده در ln باید بدون واحد باشد لذا یا D را به سانتی‌متر تبدیل می‌کنیم یا $r'_1$ و $r'_2$ را به متر.

$$D = 2m = 200cm \Rightarrow L = 2\times10^{-7}\ln\frac{(200)^2}{80\times40} = 2\times10^{-7}\ln\frac{4\times10^4}{32\times10^2} = 2\times10^{-7}\ln\frac{100}{8} = 2\times10^{-7}\ln\frac{25}{2}\ H/m$$

این جواب در گزینه‌ها نیست، و باید با توجه به گزینه‌های داده شده، جواب را ساده‌تر کنیم:

$$D = 2\times10^{-7}\ln\frac{25}{2} = 2\times10^{-7}\ln(\frac{5}{\sqrt{2}})^2 = 4\times10^{-7}\ln\frac{5}{\sqrt{2}}\ H/m$$

## اندوکتانس خودالقا و القای متقابل

برای یک خط تک فاز دو سیمه می‌توانیم شار دور را به صورت روبه‌رو نمایش دهیم:

$$\lambda_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \quad , \quad \lambda_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

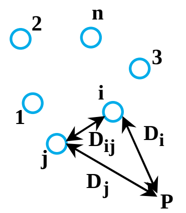
که $L_{11}$ و $L_{22}$ اندوکتانس خود القای هادی‌های ۱و۲ بوده و $L_{12}$ و $L_{21}$ اندوکتانس متقابل بین این دو هستند. برای خط دو سیمه $I_1 = -I_2 = I$ است. با جایگذاری این مقادیر در عبارت $\lambda_i$ ها داریم:

$$\lambda_1 = (L_{11} - L_{12})I \quad , \quad \lambda_2 = (-L_{21} + L_{22})I$$

با مقایسه‌ی این روابط و روابط به دست آمده برای اندوکتانس خط تک فاز خواهیم داشت:

$$\boxed{L_{11} = 2\times10^{-7}\ln\frac{1}{r'_1}\ H/m \quad , \quad L_{22} = 2\times10^{-7}\ln\frac{1}{r'_2}\ H/m \quad , \quad L_{12} = L_{21} = 2\times10^{-7}\ln\frac{1}{D}\ H/m}$$

این روابط را توسعه می‌دهیم و شار دور یک هادی را که درون گروهی از هادی‌ها قرار گرفته محاسبه می‌کنیم. شکل روبه‌رو را که مجموعه‌ای از هادی‌ها را نشان می‌دهد، در نظر بگیرید. مجموع جریان‌های عبوری از هادی‌ها را صفر فرض می‌کنیم.




$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

شار دور ناشی از جریان هادی k در نقطه‌ی p، از هادی i تا p برابر است با:

$$\lambda_{ipk} = 2\times10^{-7} I_k \ln\frac{D_{kp}}{r'_k}$$

$\lambda_{ip}$ (شار دور بین هادی i تا نقطه‌ی p ناشی از همه‌ی هادی‌ها) برابر می‌شود با:

$$\lambda_{ip} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{ipk} = 2\times10^{-7}(I_1\ln\frac{D_{1p}}{D_{1i}} + \cdots + I_i\ln\frac{D_{ip}}{r'_i} + \cdots) = 2\times10^{-7}[(I_1\ln\frac{1}{D_{1i}} + \cdots + I_i\ln\frac{1}{r'_i} + \cdots) + (I_1\ln D_{1p} + \cdots + I_i\ln D_{ip} + \cdots)]$$

فرض کردیم مجموع جریان‌ها صفر باشد، لذا برای $I_n$ داریم:

$$\sum I = 0 \Rightarrow I_n = -(I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1})$$

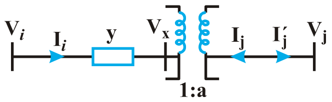
با جایگذاری $I_n$ در $\lambda_{ip}$ و هم‌چنین میل دادن p به سمت $\infty$ عبارت $\lambda_i$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_i = 2\times10^{-7}(I_1\ln\frac{1}{D_{1i}} + \cdots + I_i\ln\frac{1}{r'_i} + \cdots + I_n\ln\frac{1}{D_{ni}})$$

## ترانسفورماتورهای با قابلیت تغییر تپ

در عمل همه‌ی ترانسفورماتورهای قدرت و بسیاری از ترانسفورماتورهای توزیع، دارای تپ دریک یا تعداد بیشتری از سیم‌پیچی‌ها (برای تغییر نسبت تبدیل) هستند. این روش به خاطر این که امکان کنترل ولتاژ را در سطح‌های متفاوتی فراهم می‌کند، بسیار رایج است. با توجه به این‌که این روش امکان تغییر اندازه‌ی ولتاژ را می‌دهد و با تغییر اندازه‌ی ولتاژ، توان راکتیو نیز تغییر می‌کند، از این روش می‌توان برای کنترل پخش توان راکتیو در سیستم استفاده کرد.

شکل روبرو قسمتی از یک سیستم که در آن از **ترانسفورماتور با قابلیت تغییر تپ** (ترانسفورماتور تنظیم) استفاده شده است، را نشان می‌دهد. بسته به این که نسبت تبدیل به چه صورتی باشد، مدار معادل‌های متفاوتی برای شکل بالا به دست می‌آید.




با توجه به شکل نشان داده شده $V_x$ و $V_j$ ولتاژهای دو طرف ترانسفورماتور هستند، لذا:

$$V_j = aV_x \qquad (۱)$$

توان مختلط در دو طرف ترانسفورماتور یکسان است، با توجه به رابطه‌ی توان مختلط ($S = VI^*$) داریم:

$$V_x I_i^* = V_j I_j'^* \qquad (۲)$$

با جایگذاری ولتاژ $V_x$ از رابطه‌ی (۱) در تساوی (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{V_j}{a} I_i^* = V_j I_j'^* \Rightarrow I_i = I'_j a^*$$

رابطه‌ی بالا در صورتی حاصل می‌شود، که جریان $I'_j$ رو به بیرون باشد. اگر جهت جریان را مانند $I_j$ در نظر بگیریم، داریم:

$$I_i = -a^* I_j$$

حال که روابط جریان و ولتاژها را داریم برای به‌دست آوردن ماتریس ادمیتانس سیستم بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا جریان $I_i$ را برحسب ولتاژهای مشخص شده در شکل می‌نویسیم:

$$I_i = y(V_i - V_x) \Rightarrow I_i = yV_i - yV_x$$

با توجه به نسبت ترانسفورماتور و رابطه‌ی (۱) $V_x = \frac{V_j}{a}$، لذا:

$$I_i = yV_i - y\frac{V_j}{a}$$

برای جریان‌ها به‌دست آوردیم $I_j = -\frac{1}{a^*} I_i$، $I_j$ برابر می‌شود با:

$$I_j = \frac{-1}{a^*}\left(yV_i - \frac{yV_j}{a}\right) = -\frac{yV_i}{a^*} + \frac{yV_j}{|a|^2}$$

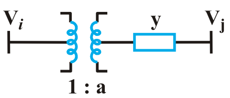
با نوشتن روابط $I_i$ و $I_j$ به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \frac{-y}{a} \\ \frac{-y}{a^*} & \frac{y}{|a|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $I = YV$ ($I$ ماتریس جریان شین، $V$ ماتریس ولتاژ شین) است، ماتریس ادمیتانس برابر است با:

$$Y = \begin{bmatrix} y & -\frac{y}{a} \\ \frac{-y}{a^*} & \frac{y}{|a|^2} \end{bmatrix}$$

فرض کنید ادمیتانس y درسمت راست ترانسفورماتور قرار بگیرد. در این حالت روابط ولتاژ و جریان با توجه به شکل به صورت زیر خواهد بود:




$$I_j = yV_j - ayV_i \quad , \quad I_i = -a^* yV_j + |a|^2 yV_i$$

در نتیجه ماتریس ادمیتانس برابر است با:

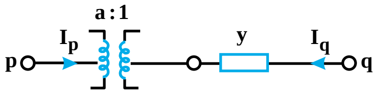
$$Y = \begin{bmatrix} |a|^2 y & -a^* y \\ -ay & y \end{bmatrix}$$

**مثال ۱۴: از ترانسفورماتورهای با قابلیت تغییر تپ، که در آن تپ ترانسفورماتور عدد حقیقی باشد برای کنترل کدام یک از موارد زیر استفاده می‌شود؟**

۱) ضریب توان ۲) پخش توان راکتیو ۳) زاویه ولتاژ ۴) اندازه‌ی جریان

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از این نوع ترانسفورماتور می‌توان پخش توان راکتیو را کنترل کرد اما کنترل ضریب توان و زاویه ولتاژ ممکن نیست.

**مثال ۱۵:** کدام یک از ماتریس‌های داده شده برای شکل زیر صحیح است؟ (با فرض اینکه a مختلط نیست)



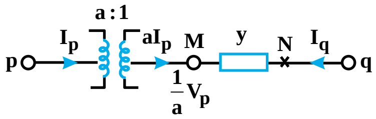

۱) $\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{a} & -y \\ -y & \frac{y}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p \\ V_q \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p \\ V_q \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{a^2} & -\frac{y}{a} \\ -\frac{y}{a} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p \\ V_q \end{bmatrix}$

۴) گزینه‌ی ۲ و ۳

**پاسخ:** گزینه «۳» برای تحلیل بهتر، شکل مدار را دوباره رسم می‌کنیم:




هدف پیدا کردن روابطی بین $I_p$ و $I_q$ با $V_p$ و $V_q$ است. بعد از انتقال ولتاژ و جریان $V_p$ و $I_p$ به سمت راست ترانسفورماتور، با توجه به شکل مدار و با استفاده از KCL در نقطه‌ی M داریم:

$$-aI_p + y(\frac{V_p}{a} - V_q) = 0 \Rightarrow aI_p = y\frac{V_p}{a} - yV_q$$

با نوشتن KCL در نقطه‌ی N داریم:

$$-I_q + y(V_q - \frac{V_p}{a}) = 0 \Rightarrow I_q = -y\frac{V_p}{a} + yV_q$$

با مرتب کردن روابط به دست آمده به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

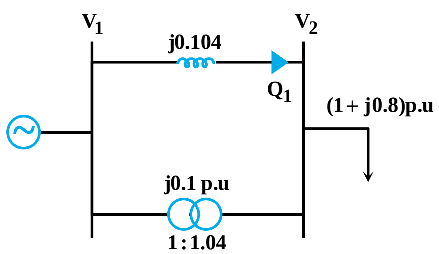
$$\begin{bmatrix} aI_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}V_p \\ V_q \end{bmatrix}$$

با توجه به گزینه‌های جواب، $I_p$ و $I_q$ را با استفاده از ماتریس به دست آمده برحسب $V_p$ و $V_q$ می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{a^2} & -\frac{y}{a} \\ -\frac{y}{a} & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_q \end{bmatrix}$$

---

**مثال ۱۶:** در سیستم زیر اندازه‌ی ولتاژ شین ۲، ۱/۰۴p.u است. $Q_1$ چقدر است؟




۱) $0.2\,p.u$

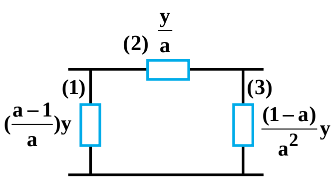
۲) $-0.1\,p.u$

۳) $0.4\,p.u$

۴) $-0.3\,p.u$

**پاسخ:** گزینه «۱» برای حل سؤال ابتدا باید مدل ترانسفورماتور تپ‌دار را جایگذاری کنیم. این مدل به صورت زیر است.

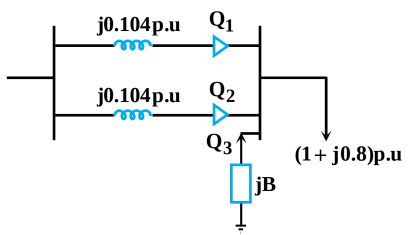
برای حل سؤال تنها به دو ادمیتانس ۲ و ۳ احتیاج داریم. قبل از به دست آوردن مدل کلی باید مقادیر این ادمیتانس‌ها را محاسبه کنیم:




$$y_1 = \frac{y}{a} = \frac{1}{j0.1 \times (1.04)} = \frac{1}{j0.104} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{y_1} = j0.104\,p.u$$

$$y_2 = \frac{(1-a)}{a^2}y = \frac{1-1.04}{(1.04)^2} \times \frac{1}{j0.1} = \frac{j0.4}{(1.04)^2}\,p.u = jB$$

در نتیجه مدل سیستم به صورت مقابل خواهد شد:




توان راکتیو بار باید تأمین شود یعنی $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.8\,p.u$. با توجه به این که امپدانس شاخه‌هایی که $Q_1$ و $Q_2$ را دارند یکسان است، $Q_1 = Q_2$ خواهد بود. بنابراین برای محاسبه‌ی $Q_1$ کافی است $Q_3$ به دست آید. از طرفی $Q_3$ برابر است با:

$$Q_3 = BV_2^2 = \frac{0.4}{(1.04)^2} \times (1.04)^2 = 0.4\,p.u \Rightarrow 2Q_1 = 0.8 - 0.4 = 0.4 \Rightarrow Q_1 = 0.2\,p.u$$