مدرسان شریف

فصل اول

«سیگنال‌ها»

قبل از ورود به هر مبحثی درباره تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، ابتدا باید با مفهوم سیگنال و روابط حاکم بر آن‌ها آشنا شویم. این فصل به نوعی مهمترین فصل این کتاب بوده و دریچه‌ای برای ورود به بحث اصلی است. تا انتهای این کتاب به دفعات از روابط مطرح‌شده در این فصل استفاده خواهد شد. این فصل در چهار درسنامه تنظیم شده است. ابتدا در درسنامه اول با مقدمات و برخی از تعاریف آشنا می‌شویم. در این درسنامه روش‌های مختلف نمایش سیگنال‌ها و نحوه رسم شکل آن‌ها را بیان خواهیم کرد. در درسنامه دوم انواع تبدیلات بر روی سیگنال‌ها را مطرح می‌کنیم. با برخی از این تبدیلات در ریاضیات پایه آشنا شده‌اید. درسنامه سوم مربوط به ویژگی‌های سیگنال‌ها است که برای هر سیگنال چهار ویژگی مختلف را بررسی می‌کنیم. در نهایت در درسنامه چهارم با سیگنال‌های اصلی و مهم آشنا می‌شویم. سؤالات بسیار کمی به‌صورت مستقیم از این فصل مطرح می‌شود اما ابداً این فصل را دست‌کم نگیرید زیرا پیش‌نیازی برای تمامی فصل‌های بعدی است.

فصل اول در یک نگاه و بودجه‌بندی سؤالات کنکور

کنکور ارشد		کنکور دکتری	
سال	**تعداد**	**سال**	**تعداد**
۱۳۹۰	۱	۱۳۹۰	ــ
۱۳۹۱	۰	۱۳۹۱	۰
۱۳۹۲	۱	۱۳۹۲	۰
۱۳۹۳	۰	۱۳۹۳	۱
۱۳۹۴	۰	۱۳۹۴	۰
۱۳۹۵	۰	۱۳۹۵	ــ
۱۳۹۶	۰	۱۳۹۶	۰
۱۳۹۷	۰	۱۳۹۷	۰
۱۳۹۸	۱	۱۳۹۸	۰
۱۳۹۹	۰	۱۳۹۹	۰
۱۴۰۰	۰	۱۴۰۰	۰

✓ ***پیش‌نیاز این فصل:*** این فصل خود پیش‌نیاز تمام فصل‌های بعدی است.

درصدی که با خواندن این فصل انتظار می‌رود کسب کنید	سطح اهمیت	سطح سؤالات
۲ درصد	بسیار بالا	ساده

درسنامه (۱): مقدمات

در این درسنامه به بررسی مقدمات و تعاریفی درباره سیگنال‌ها می‌پردازیم. همچنین نحوه نمایش و رسم شکل یک سیگنال را نیز بررسی می‌کنیم.

مفهوم سیگنال

در حالت کلی سیگنال به عنوان یک مدل ریاضی از پدیده‌های فیزیکی تعریف می‌شود. برای مثال سیگنال‌های مالی در بازار بورس نحوه تغییر قیمت یک سهام را در یک بازه زمانی مشخص می‌کنند. یا سیگنال ولتاژ دو سر یک مقاومت طبق رابطه $v(t) = Ri(t)$ تغییرات ولتاژ و جریان یک مقاومت را نشان می‌دهد. به بیان ساده‌تر، سیگنال، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است. این متغیر مستقل می‌تواند از هر جنسی باشد. برای مثال، سیگنال تصویر که آن را به صورت $I(x,y)$ نشان می‌دهیم، روشنایی هر پیکسل از تصویر را بر حسب طول (x) و عرض (y) آن نشان می‌دهد. بنابراین $I(x,y)$ تابعی از دو متغیر مستقل y,x است که این متغیرها از جنس مکان هستند. در این درس صرفاً سیگنال‌هایی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم که دارای یک متغیر مستقل از جنس زمان یا فرکانس هستند. فصل اول تا سوم مربوط به سیگنال‌های زمانی و فصول چهارم تا هشتم مربوط به سیگنال‌های فرکانسی خواهند بود. در این درسنامه صرفاً تعاریف ابتدایی از سیگنال‌های فرکانسی بررسی شده و بحث اصلی بر روی این سیگنال‌ها از فصل چهارم شروع می‌شود.

بعد از این توضیحات ابتدایی به تعریف سیگنال می‌پردازیم که صرفاً مختص این کتاب است و نمی‌توان این تعریف را تعمیم داد.

تعریف سیگنال: به تابعی از متغیر مستقل زمان یا فرکانس به ترتیب سیگنال‌های زمانی یا فرکانسی گفته می‌شود که یک بیان ریاضی از پدیده‌های فیزیکی هستند.

اجزای سیگنال

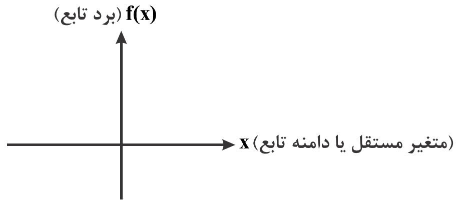
یک سیگنال از اجزای زیر تشکیل می‌شود:

۱ـ نام سیگنال: سیگنال‌های زمانی را با حروف کوچک انگلیسی $(x, y, h, w, \dots)$ و سیگنال‌های حوزه‌ی فرکانس را با حروف بزرگ انگلیسی $(X, Y, H, W, \dots)$ نامگذاری می‌کنیم.

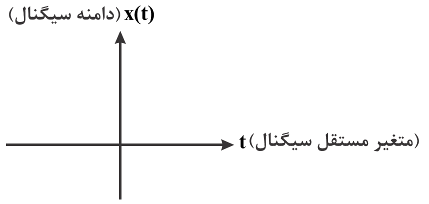
۲ـ متغیر مستقل: متغیری که تابع هیچ متغیر دیگری نبوده و از جنس زمان یا فرکانس است. متغیرهای مستقل از جنس زمان را با t یا n نشان می‌دهیم. t در حوزه‌ی اعداد حقیقی $(t \in \mathbb{R})$ و n در حوزه اعداد صحیح $(n \in \mathbb{Z})$ تغییر می‌کنند. متغیرهای مستقل از جنس فرکانس را با ω، s یا z نشان می‌دهیم. ω در حوزه اعداد حقیقی $(\omega \in \mathbb{R})$، s, z نیز در حوزه‌ی اعداد مختلط $(s, z \in \mathbb{C})$ تغییر می‌کنند.

۳ـ دامنه‌ی سیگنال: متغیری که تابع متغیر مستقل بوده و در حوزه‌ی اعداد مختلط تغییر می‌کند. برای نشان دادن دامنه‌ی سیگنال، نام آن را نوشته و در مقابل آن یک پرانتز یا کروشه باز و بسته قرار می‌دهیم. به عنوان مثال دامنه‌ی سیگنال‌های زمانی را به صورت $x()$ یا $x[]$ و دامنه‌ی سیگنال‌های فرکانسی را به صورت $X()$ یا $X[]$ نشان می‌دهیم. گاهی به دامنه‌ی سیگنال، «متغیر تابع» یا «مقدار سیگنال» نیز گفته می‌شود.

تذکر۱: در حوزه تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها، دامنه یک سیگنال (Amplitude) معادل برد یک تابع در حوزه تجزیه و تحلیل توابع است، آن را با دامنه توابع اشتباه نگیرید (صرفاً نامگذاری‌ها متفاوت هستند)



«حوزه تابع»



«حوزه سیگنال»

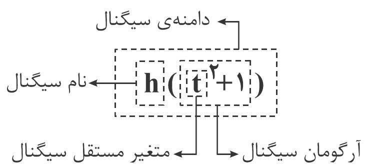
۴ـ آرگومان سیگنال: به عبارتی که در داخل پرانتز یا کروشه‌ی مقابل نام سیگنال قرار دارد، آرگومان سیگنال گفته می‌شود. آرگومان سیگنال شامل خود متغیر مستقل یا تابعی از آن است.

دسته‌بندی سیگنال‌های زمانی

سیگنال‌های زمانی با توجه به پیوسته یا گسسته بودن متغیر مستقل به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

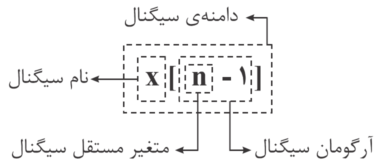
۱ـ سیگنال‌های زمان پیوسته (CT(Continuous Time: در این سیگنال‌ها، متغیر مستقل که از جنس زمان است، پیوسته بوده و در حوزه اعداد حقیقی تغییر می‌کند. متغیر مستقل سیگنال‌های زمان پیوسته را با t نشان می‌دهند. آرگومان این سیگنال‌ها را عموماً داخل یک پرانتز باز و بسته ( ) قرار می‌دهند.

به عنوان مثال به سیگنال زمان پیوسته مقابل و اجزای تشکیل‌دهنده آن توجه کنید.



۲ـ سیگنال‌های زمان گسسته (DT(Discrete Time: در این سیگنال‌ها، متغیر مستقل که از جنس زمان است، گسسته بوده و در حوزه‌ی اعداد صحیح تغییر می‌کند. متغیر مستقل سیگنال‌های گسسته را با n و گاهی با k یا m نیز نشان می‌دهند. آرگومان این سیگنال‌ها را عموماً داخل یک کروشه باز و بسته [ ] قرار می‌دهند اما می‌توان آن را داخل یک پرانتز باز و بسته نیز نشان داد.

به عنوان مثال به سیگنال زمان گسسته مقابل و اجزای تشکیل‌دهنده آن توجه کنید.



تذکر۲: دامنه سیگنال‌های گسسته تنها به‌ازای $n \in \mathbb{Z}$ هایی که باعث صحیح شدن مقدار آرگومان سیگنال می‌شوند، تعریف می‌شود. در نتیجه دامنه یک سیگنال گسسته را به‌ازای $n \notin \mathbb{Z}$ های یا n های صحیحی که باعث غیرصحیح شدن مقدار آرگومان می‌شوند، صفر در نظر می‌گیریم.

تذکر۳: به دامنه سیگنال‌های گسسته نمونه یا sample نیز گفته می‌شود.

۳ـ سیگنال‌های دیجیتال: به سیگنال‌های زمان گسسته‌ای که دامنه آن‌ها فقط در حوزه‌ی اعداد صحیح تغییر کند، سیگنال‌های دیجیتال گفته می‌شود.

در جدول زیر انواع سیگنال‌های زمانی و حوزه تغییرات متغیرهای این سیگنال‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم.

دامنه	متغیر مستقل	نوع سیگنال
$x() \in \mathbb{C}$	$t \in \mathbb{R}$	زمان پیوسته
$x[] \in \mathbb{C}$	$n \in \mathbb{Z}$	زمان گسسته
$x[] \in \mathbb{Z}$	$n \in \mathbb{Z}$	دیجیتال

ضابطه سیگنال

رابطه بین متغیر مستقل (n/t) و دامنه سیگنال $(x[n]/x(t))$، ضابطه سیگنال نامیده می‌شود. هر سیگنال توسط ضابطه خود بیان می‌شود و بـه کمـک آن می‌توان دامنه سیگنال را در هر زمان دلخواه تعیین کرد. فرم کلی ضابطه سیگنال از رابطه زیر تبعیت می‌کند. (هم پیوسته و هم گسسته):

فرم کلی ضابطه سیگنال :	**فرم ریاضی :** $h(x(g(t))) = f(t)$ $h(x[g(n)]) = f(n)$	**فرم بیانی :** تابعی از دامنه سیگنال (قسمت(۱)) (تابعی از متغیر مستقل) (قسمت(۲)) = تابعی از متغیر مستقل (قسمت(۳))

اما در اغلب موارد ضابطه سیگنال‌ها در فرم زیر بیان می‌شود، که به آن فرم استاندارد گفته می‌شود (هم پیوسته و هم گسسته):

فرم استاندارد ضابطه سیگنال :	**فرم ریاضی :** $x(t) = f(t)$ $x[n] = f(n)$	**فرم بیانی :** دامنه سیگنال (متغیر مستقل) = تابعی از متغیر مستقل

به عنوان مثال به دو سیگنال پیوسته و گسسته زیر که در فرم کلی بیان شده‌اند توجه کنید:

تابعی از دامنه سیگنال $(\log x[\ ])$

$$\log x\left[\frac{۱}{n}\right] = \cos(\pi n) + n^{۳}$$

آرگومان سیگنال که تابعی از متغیر مستقل است $(\frac{۱}{n})$　　تابعی از متغیر مستقل

تابعی از دامنه سیگنال $(\sqrt{x()})$

$$\sqrt{x(۲t-۱)} = \frac{۱}{t^{۲}+۴}$$

آرگومان سیگنال که تابعی از متغیر مستقل است $(۲t-۱)$　　تابعی از متغیر مستقل

تذکر۴: طبق تعریف این کتاب برای سیگنال‌ها به عنوان تابعی از اطلاعات، ضابطه بیان شده برای یک سیگنال باید به گونه‌ای باشد کـه شـرایط تـابع برقـرار باشد. بنابراین اگر به ازای یک زمان، بیشتر از یک مقدار برای دامنه سیگنال محاسبه شود، ضابطه بیان شده نمی‌تواند نشان‌دهنده یک سیگنال باشد.

به سیگنال‌های زیر که با ضابطه خود بیان شده‌اند، توجه کنید.

۱ـ $x(t) = -t^{۲} + ۱$

قسمت ۱: تابعی از دامنه سیگنال که در این مثال خود دامنه یعنی $x(\ )$ است.

قسمت ۲: آرگومان سیگنال که باید متغیر مستقل یا تابعی از آن باشد که در این مثال خود متغیر مستقل یعنی (t) است.

قسمت ۳: تابعی از متغیر مستقل که در این مثال $(-t^{۲}+۱)$ است.

ضابطه‌ی این سیگنال در فرم استاندارد بیان شده است.

طبق ضابطه داده شده باید بتوان دامنه سیگنال را در هر زمان دلخواه به دست آورد. برای مثال دامنه سیگنال را در زمان‌های $t=۱$، $t=-\frac{۳}{۲}$ و $t=+\infty$ تعیین می‌کنیم.

$$t = ۱ \rightarrow x(۱) = -(۱)^{۲} + ۱ \Rightarrow x(۱) = ۰$$

$$t = -\frac{۳}{۲} \rightarrow x(-\frac{۳}{۲}) = -(-\frac{۳}{۲})^{۲} + ۱ \Rightarrow x(-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۵}{۴}$$

$$t = +\infty \rightarrow x(+\infty) = -(\infty)^{۲} + ۱ \Rightarrow x(+\infty) = -\infty$$

۲ـ $x(t-۱) = -t^{۲} + ۱$

در این مثال، قسمت دوم ضابطه سیگنال یعنی آرگومان آن را تغییر دادیم. آرگومان را به صورت تابعی از متغیـر مسـتقل یعنـی $(t-۱)$ نوشـتیم. بنـابراین ضابطه این سیگنال در فرم استاندارد بیان نشده است. در این مثال نیز ضابطه سیگنال را به‌ازای $t=۱$، $t=-\frac{۳}{۲}$ و $t=+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$t = ۱ \rightarrow x(۱-۱) = -(۱)^{۲} + ۱ \Rightarrow x(۰) = ۰$$

$$t = -\frac{۳}{۲} \rightarrow x(-\frac{۳}{۲}-۱) = -(-\frac{۳}{۲})^{۲} + ۱ \Rightarrow x(-\frac{۵}{۲}) = -\frac{۵}{۴}$$

$$t = +\infty \rightarrow x(\infty-۱) = -(\infty)^{۲} + ۱ \Rightarrow x(+\infty) = -\infty$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این مثال با جایگذاری $t=1$ در ضابطه سیگنال دامنه سیگنال $x(t)$ در $t=0$ یعنی $x(0)$ به دست آمد، در حالی که در مثال قبل با جایگذاری $t=1$، دامنه سیگنال $x(t)$ در همان $t=1$ یعنی $x(1)$ محاسبه شد. این اختلاف به این دلیل است که آرگومان سیگنال در این مثال برابر با متغیر مستقل (t) نبوده و تابعی از آن است. در واقع دامنه سیگنال $x(t-1)$ در $t=1$ یعنی $x(1-1)=x(0)$ با دامنه سیگنال $x(t)$ در $t=0$ یعنی $x(0)$ برابر است.

۳ـ $x^2(t)=-t^2+1$

در این مثال، قسمت اول ضابطه سیگنال یعنی دامنه آن را تغییر داده و آن را به صورت تابعی از $x(\,)$ یعنی $x^2(\,)$ نوشتیم. بنابراین ضابطه این سیگنال در فرم استاندارد بیان نشده است. حال ضابطه سیگنال را در سه زمان $t=1$، $t=-\frac{3}{2}$ و $t=+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$t=1\to x^2(1)=-(1)^2+1\Rightarrow x(1)^2\Rightarrow x(1)=0$$

$$t=-\frac{3}{2}\to x^2(-\frac{3}{2})=-(-\frac{3}{2})^2+1\Rightarrow x^2(-\frac{3}{2})=-\frac{5}{4}\Rightarrow x(-\frac{3}{2})=\pm j\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$t=+\infty\to x^2(+\infty)=-(\infty)^2+1\Rightarrow x^2(+\infty)=-\infty\Rightarrow x(+\infty)=\pm j(\infty)$$

دامنه سیگنال در دو زمان $t=-\frac{3}{2}$ و $t=+\infty$ به صورت قطعی به دست نیامد ($x(-\frac{3}{2})$ برابر با $+j\frac{\sqrt{5}}{2}$ است یا $-j\frac{\sqrt{5}}{2}$؟)؛ بنابراین با توجه به تعریف سیگنال در این کتاب که آن را تابعی از متغیر مستقل در نظر می‌گیریم، چنین ضابطه‌ای نشان‌دهنده یک سیگنال نیست (در هر تابع به ازای یک مقدار از متغیر مستقل حداکثر باید یک مقدار از متغیر تابع موجود باشد).

۴ـ $x[n]=-n^2+1$

در ضابطه این سیگنال، متغیر مستقل n است. بنابراین این ضابطه نشان‌دهنده یک سیگنال زمان گسسته است. دامنه این سیگنال را در زمان‌های $n=1$، $n=-\frac{3}{2}$ و $n=+\infty$ به دست می‌آوریم.

$$n=1\to x[1]=-(1)^2+1\Rightarrow x[1]=0$$

$x[-\frac{3}{2}]$ تعریف نمی‌شود یا به عبارتی برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$n=-\frac{3}{2}\to n\notin\mathbb{Z}\to x[-\frac{3}{2}]=0$$

$$n=+\infty\to x[+\infty]=-(\infty)^2+1\Rightarrow x[+\infty]=-\infty$$

۵ـ $x[\sqrt{n}]=-n^2+1$

در این مثال، آرگومان سیگنال را به صورت تابعی از n یعنی $\sqrt{n}$ در نظر گرفتیم. حال دامنه این سیگنال را در زمان‌های $n=-1$، $n=2$، $n=4$ و $n=\frac{5}{2}$ به دست می‌آوریم.

آرگومان یعنی $\sqrt{-1}$ در حوزه اعداد صحیح تعریف نشده است، بنابراین $x[\sqrt{-1}]$ تعریف نشده و صفر در نظر گرفته می‌شود. $n=-1\to x[\sqrt{-1}]=0$

آرگومان یعنی $\sqrt{2}$ عضو اعداد صحیح نیست، بنابراین $x[\sqrt{2}]$ تعریف نشده و صفر در نظر گرفته می‌شود. $n=2\to x[\sqrt{2}]=0$

$\sqrt{4}=\pm2\in\mathbb{Z}$ است، بنابراین $x[\sqrt{4}]$ نشان‌دهنده $x[-2]$ و $x[+2]$ است. $n=4\to x[\sqrt{4}]=-(4)^2+1\Rightarrow x[-2]=x[+2]=-15$

$$n=\frac{5}{2}\to n\notin\mathbb{Z}\to x[\sqrt{\frac{5}{2}}]=0$$

تذکر۵: دامنه سیگنال‌های گسسته به ازای $n\notin\mathbb{Z}$ های و n های صحیحی که به ازای آنها آرگومان عددی صحیح نباشد، صفر در نظر گرفته می‌شود.

در این مثال سه حالت زیر رخ داد:

۱ـ $n=\frac{5}{2}$: $n\notin\mathbb{Z}$ است و دامنه سیگنال در این زمان صفر در نظر گرفته می‌شود. $x[\sqrt{\frac{5}{2}}]=0$

۲ـ $n=-1$ و $n=2$: با وجود اینکه $n\in\mathbb{Z}$ بود اما باعث غیرصحیح شدن آرگومان شدند. در نتیجه در $n=-1$ و $n=2$ دامنه سیگنال صفر در نظر گرفته می‌شود. $x[\sqrt{-1}]=x[\sqrt{2}]=0$

۳ـ $n=4$: $n\in\mathbb{Z}$ است و آرگومان نیز به‌ازای این n صحیح می‌باشد. بنابراین دامنه سیگنال در $n=4$ قابل تعریف است.

شکل سیگنال

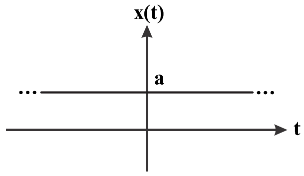
برای رسم شکل سیگنال‌ها از همان روش‌های مرسوم رسم شکل توابع و نقطه‌گذاری‌های مناسب استفاده می‌کنیم. شکل سیگنال‌ها را در مختصات دوبعدی رسم می‌کنیم که محور افقی مربوط به متغیر مستقل $(n\in\mathbb{Z}\,/\,t\in\mathbb{R})$ و محور عمودی مربوط به دامنه سیگنال $(x[n]\in\mathbb{C}\,/\,x(t)\in\mathbb{C})$ است.

توجه به نکات زیر برای رسم شکل سیگنال‌ها مفید هستند.

۱) در رسم شکل سیگنال‌های پیوسته عموماً با چند سیگنال زیر روبرو خواهید بود.

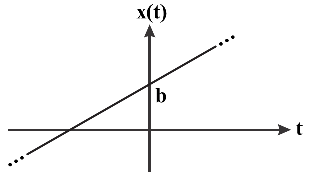
الف) سیگنال ثابت: سیگنالی که ضابطه‌ی آن به ازای تمامی زمان‌ها یک عدد مختلط ثابت است.

$x(t)=a \xrightarrow{\text{شکل}}$



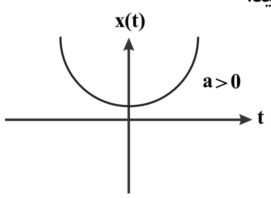
ب) سیگنال خطی: سیگنالی که ضابطه‌ی آن یک چندجمله‌ای درجه اول برحسب متغیر مستقل t است. برای رسم چنین سیگنالی از هر روشی که بـه خـاطر داریـد می‌توانید استفاده کنید، امـا انتخـاب دو نقطـه و وصـل کـردن آن‌هـا بـه یکـدیگر سریع‌ترین روش است.

$x(t)=at+b \xrightarrow{\text{شکل}}$

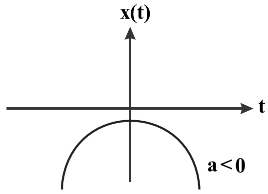


ج) سیگنال درجه دوم (سهمی): سیگنالی که ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه دوم برحسب متغیر مستقل t است. نیازی به رسم دقیق شکل این سـیگنال نیست بلکه کافیست با پیداکردن رأس سهمی و نقطه‌گذاری مناسب شکل کلی را رسم کنید.

$x(t)=at^۲+bt+c \xrightarrow{\text{شکل}}$

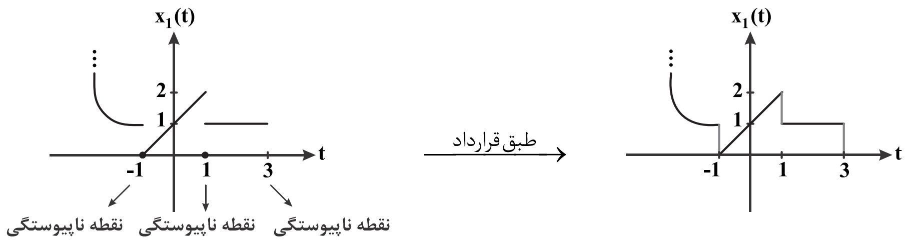


،

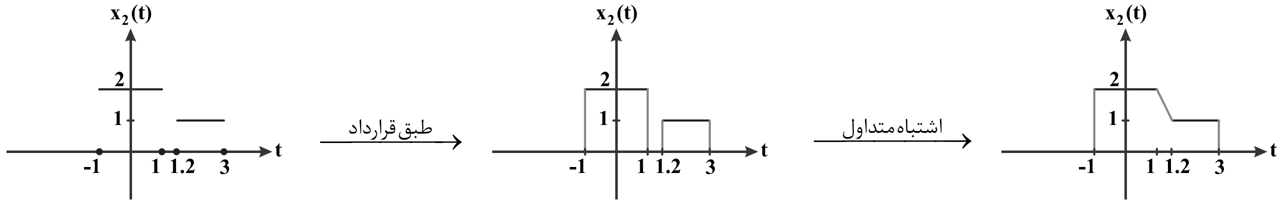


د) سیگنال‌های اصلی: با ضابطه این سیگنال‌ها و شکل آن‌ها در درسنامه (۴) به طور کامل آشنا خواهید شد.

۲) اگر سیگنال $x(t)$ در لحظه $t=t_۰$ دارای نقطه ناپیوستگی باشد، طبق یک قرارداد، دامنه سیگنال در $t_۰^-$ و $t_۰^+$ را با یک خط عمود به یکدیگر وصل می‌کنیم.



توجه کنید دامنه $x_۱(t)$ در $t=۳^-$ برابر با ۱ و در $t=۳^+$ برابر با صفر است. بنابراین در $t=۳$ کافیست با یک خط عمود دامنه ۱ را به صفر وصل کنیم.



$x_۲(t)$ در چهار نقطه ۳و۱/۲،۱،۱− = t ناپیوستگی دارد. براساس یک اشتباه متداول، دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t=۱$ به دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t=۱/۲$ با یک خط مورب وصل می‌شود، در صورتی‌که باید با یک خط عمود دامنه سیگنال در $t=۱^-$ یعنی $x_۲(۱^-)=۲$ به دامنه‌ی آن در $t=۱^+$ یعنی $x_۲(۱^+)=۰$ وصل شود.

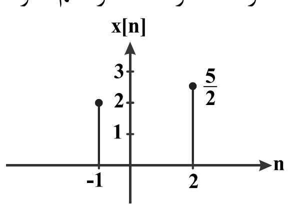
تذکر۶: مقدار دامنه سیگنال در نقطه ناپیوستگی $t=t_۰$ از رابطه $x(t_۰)=\frac{x(t_۰^-)+x(t_۰^+)}{۲}$ به دست می‌آید.

برای مثال مقادیر سیگنال‌های $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ در نقاط پیوستگی آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$x_۱(۱)=\frac{x_۱(۱^-)+x_۱(۱^+)}{۲}=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\quad,\quad x_۲(۳)=\frac{x_۲(۳^-)+x_۲(۳^+)}{۲}=\frac{۱+۰}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۳) برای رسم سیگنال‌های گسسته کافیست به جای n اعداد صحیح جایگذاری کرده و دامنه سیگنال را طبـق ضـابطه حسـاب کنیـد. دامنـه سـیگنال‌هـای گسسته را به ازای nهای غیرصحیح و nهای صحیحی که باعث غیرصحیح شدن آرگومان می‌شوند، صـفر در نظر مـی‌گیـریم. مقـدار دامنـه $x[n]$ در هـر لحظه‌ی $n_۰$ را با یک خط عمودی که در بالای آن یک نقطه توپر قرار گرفته است، نشان می‌دهیم. این خط عمودی را به اندازه مقـدار دامنـه رسـم کـرده و مقدار دامنه را کنار دایره توپر یادداشت می‌کنیم.

به عنوان مثال شکل سیگنال $x[n]$ که در $n=-۱$ برابر با ۲ و در $n=۲$ برابر با $\frac{۵}{۲}$ است به صورت مقابل رسم می‌شود.



درسنامه (۲): خواص اساسی سیستم‌ها

هر سیستم با توجه به ضابطه خود می‌تواند ویژگی‌ها و خواص مختلفی داشته باشد. در این درس شش خاصیت اصلی برای سیستم‌ها در نظر می‌گیریم. این شش خاصیت عبارتند از: ۱ـ بدون حافظه بودن ۲ـ علّی بودن ۳ـ پایدار بودن ۴ـ خطی بودن ۵ـ تغییرناپذیر با زمان بودن ۶ـ معکوس‌پذیر بودن.

دو تیپ سؤال درباره بررسی این شش خاصیت برای سیستم‌ها مطرح می‌شود. در تیپ اول خواص سیستم‌هایی را بررسی می‌کنیم که ضابطه آن‌ها مشخص است و در تیپ دوم این خواص را برای سیستم‌هایی بررسی می‌کنیم که ضابطه آن‌ها مشخص نیست اما یک یا چند ورودی ـ خروجی از این سیستم را در دست داریم. بررسی سؤالات تیپ اول به مراتب ساده‌تر از سؤالات تیپ دوم است (خوشبختانه بیش از ۹۵% سؤالات مربوط به تیپ اول است). در این درسنامه تیپ اول سؤالات را بررسی کرده و تیپ دوم سؤالات را به دلیل پیچیدگی‌های خاص خود و البته اهمیت کمتر در فصل نهم بررسی می‌کنیم. این درسنامه یکی از مهمترین بخش‌های این کتاب است چرا که هر سال حداقل یکی از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد. بنابراین سعی کنید مطالب و مفاهیم بیان‌شده را به خوبی یاد گرفته و به اندازه کافی تمرین داشته باشید. سعی می‌شود روش‌های کوتاه و تستی برای حل سؤالات مطرح شود. خواهید دید که با کمی تسلط، می‌توانید سؤالات این بخش را در کوتاه‌ترین زمان و حتی بدون دخالت دست حل کنید. مثال‌های مطرح‌شده بعد از معرفی هر یک از خواص، بسیار جامع و مفید هستند. سیستم‌های مطرح شده در این مثال‌ها تمامی نکات مربوط به تعیین خواص را پوشش می‌دهند، بنابراین پاسخ‌های مطرح شده در این مثال‌ها را با دقت بخوانید.

خاصیت بدون حافظه بودن

سیستم‌های بدون حافظه (لحظه‌ای)

اگر خروجی در هر زمان مشخص (n_0, t_0) به **ورودی** و **خروجی** در همان زمان مشخص (n_0, t_0) (زمان حال) وابسته باشد، سیستم بدون حافظه است.

سیستم‌های حافظه‌دار

اگر خروجی در هر زمان مشخص (n_0, t_0) به ورودی و خروجی در زمان‌های گذشته یا آینده وابسته باشد، سیستم حافظه‌دار است. در واقع اگر سیستم بدون حافظه نباشد، حافظه‌دار است.

برای مثال اگر مقاومت الکتریکی و خازن را سیستم‌هایی پیوسته در نظر بگیریم که ورودی و خروجی آن به‌ترتیب جریان و ولتاژ باشد، مقاومت سیستمی بدون حافظه و خازن سیستمی حافظه‌دار خواهند بود، چرا که ضابطه سیستم مقاومت به‌صورت $v(t) = Ri(t)$ است که خروجی (ولتاژ) در هر زمان t_0 به ورودی (جریان) در همان زمان بستگی دارد ولی با توجه به ضابطه سیستم خازن $v(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$، خروجی (ولتاژ) در هر زمان t_0 به ورودی (جریان) از زمان‌های 0 تا t_0 بستگی دارد، چرا که برای محاسبه $\int_0^{t_0} i(\tau)\,d\tau$ به همه مقادیر جریان از لحظات 0 تا t_0 نیاز داریم و سیستم باید این مقادیر را در حافظه خود ثبت کرده باشد.

روش بررسی خاصیت بدون حافظه بودن سیستم‌ها

گام اول: تنها آرگومان سیگنال‌های ورودی و خروجی و عملگرهای مؤثر بر آرگومان را در نظر بگیرید و بقیه موارد موجود در ضابطه سیستم را نادیده بگیرید.

گام دوم: آرگومان سیگنال‌های ورودی و خروجی را به ازای تمامی زمان‌های ممکن با یکدیگر مقایسه کنید.

ـ اگر به ازای تمامی زمان‌های ممکن آرگومان خروجی برابر با آرگومان ورودی باشد سیستم بدون حافظه است.

ـ اگر حداقل یک لحظه وجود داشته باشد که آرگومان خروجی با آرگومان ورودی برابر نباشد سیستم حافظه‌دار است.

مثال۹: خاصیت بدون حافظه بودن را برای سیستم‌های زیر بررسی کنید.

۱) $S_1 : y[n] = x[n]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی (n) به ازای تمامی زمان‌ها با آرگومان ورودی (n) برابر است، بنابراین سیستم بدون حافظه است.

۲) $S_2 : y[n] = x^2[n]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی (n) به ازای تمامی زمان‌ها با آرگومان ورودی (n) برابر است، بنابراین سیستم بدون حافظه است. توجه کنید هرگونه تغییر در دامنه سیگنال نقشی در تعیین بدون حافظه بودن سیستم ندارد و فقط به آرگومان‌ها نگاه می‌کنیم.

۳) $S_3 : y[n] = x[n^2]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی (n) به ازای تمامی زمان‌ها با آرگومان ورودی (n^2) برابر نیست. به عنوان مثال، برای محاسبه خروجی در لحظه $n = 2$ یعنی $y[2]$، باید مقدار ورودی در لحظه $n^2 = 2^2 = 4$ یعنی $x[4]$ مشخص باشد. پس سیستم باید در لحظه $n = 2$، $x[4]$ را که ورودی در لحظات آینده محسوب می‌شود، در حافظه خود نگه دارد، یعنی سیستم حافظه‌دار است.

۴) $S_4 : y[n^2] = x[n]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی (n^2) به ازای تمامی زمان‌ها با آرگومان ورودی (n) برابر نیست، پس سیستم حافظه‌دار است. کافی است ضابطه سیستم را به ازای $n = 2$ در نظر بگیرید.

۵) $S_5 : y[n^2] = x[n^2]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی (n^2) به ازای تمامی زمان‌ها با آرگومان ورودی (n^2) برابر است، پس سیستم بدون حافظه است.

۶) $S_6 : y(t) = \text{Re}\{x(t)\}$

☑ **پاسخ:** آرگومان‌ها برابر است، پس سیستم بدون حافظه است.

۷) $S_7 : y[n] = x[n] + y[n-1]$

☑ **پاسخ:** آرگومان خروجی در سمت چپ رابطه (n) با آرگومان خروجی در سمت راست رابطه $(n-1)$ برابر نیست، بنابراین سیستم حافظه‌دار است. برای مثال رابطه سیستم در $n = 1$ برابر با $y[1] = x[1] + y[0]$ است. سیستم برای محاسبه $y[1]$ باید مقدار $y[0]$ را از حافظه خود فراخوانی کند و این به معنی حافظه‌داری سیستم است.

۸) $S_8 : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

☑ **پاسخ:** در ظاهر، آرگومان خروجی و ورودی برابر هستند. اما دقت کنید که سیگما عملگری است که علاوه بر دامنه ورودی بر روی آرگومان آن نیز اثر می‌کند. اگر رابطه را به‌ازای چند شمارنده از سیگما باز کنیم خواهیم داشت: $y[n] = \cdots + x[n-2] + x[n-1] + x[n]$

در نتیجه برای محاسبه خروجی در لحظه (n) به مقادیر ورودی در لحظه (n)، $(n-1)$، $(n-2)$ و ... یعنی به مقادیر ورودی از زمان‌های $-\infty$ تا n نیاز داریم. بنابراین سیستم حافظه‌دار است.

۹) $S_9 : y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

☑ **پاسخ:** در این سیستم نیز به ظاهر آرگومان خروجی و ورودی برابر است ولی مشتق نیز همانند انتگرال و سیگما عملگری است که علاوه بر دامنه سیگنال، بر روی آرگومان سیگنال نیز اثر می‌کند. $\frac{d}{dt}$ در واقع نمادی برای نشان دادن مشتق است و رابطه اصلی سیستم به‌صورت $S_9 : y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$ بیان می‌شود. در نتیجه خروجی در زمان t به ورودی در زمان $(t+\Delta)$ بستگی داشته و سیستم حافظه‌دار است.

۱۰) $S_{10} : y[n] = x[n] + 1$

☑ **پاسخ:** خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی دارد، چرا که آرگومان‌ها با یکدیگر برابر هستند پس سیستم بدون حافظه است.

۱۱) $S_{11} : y[n] = x[n] + x[1]$

☑ **پاسخ:** به دلیل وجود عبارت $x[1]$ در ضابطه سیستم، این سیستم حافظه‌دار است، چرا که برای محاسبه خروجی در تمام زمان‌ها به غیر از $n = 1$، سیستم باید مقدار ورودی در لحظه $n = 1$ یعنی $x[1]$ را از حافظه خود فراخوانی کند.

۱۲) $S_{12} : y(t) = x(t^2)\delta(t)$

☑ **پاسخ:** به ظاهر آرگومان خروجی و ورودی برابر نیستند، اما باید به تأثیر سیگنال ضربه بر روی آرگومان ورودی دقت کنید. به کمک خاصیت غربالی سیگنال ضربه، ضابطه سیستم را بازنویسی می‌کنیم.

$$S_{12} : y(t) = x(t^2)\delta(t) \xrightarrow[\text{خاصیت غربالی}]{x(f(t))\delta(t) = x(f(0))\delta(t)} y(t) = x(0)\delta(t)$$

در رابطه به‌دست آمده نیز به نظر می‌رسد آرگومان خروجی (t) با آرگومان ورودی (0) به ازای تمامی زمان‌ها برابر نیست. اما دقت کنید که اثر سیگنال ضربه به‌صورت کامل بررسی نشده است. به کمک تعریف سیگنال ضربه، ضابطه سیستم را به شکلی دیگر بازنویسی می‌کنیم.

$$S_{12} : y(t) = x(0)\delta(t) \xrightarrow{\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}} y(t) = \begin{cases} x(0)\delta(t) & , \quad t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

برای محاسبه خروجی در لحظه $t = 0$ یعنی $y(0)$ فقط به $x(0)$ نیاز داریم، پس سیستم در ضابطه اول بدون حافظه است. برای محاسبه خروجی در لحظات $t \neq 0$، نیازی به ورودی نیست و خروجی همواره صفر است، پس در ضابطه دوم نیز سیستم بدون حافظه بوده و در حالت کلی سیستم S_{12} بدون حافظه است.

۱۳) $S_{13}: y(t) = x(t-1)\delta(t)$

☑ **پاسخ:** مانند مثال قبلی ابتدا تأثیر سیگنال ضربه را بر روی آرگومان ورودی بررسی کرده، سپس در مورد برابری آرگومان‌های ورودی و خروجی اظهارنظر می‌کنیم.

$$S_{13}: y(t) = x(\underset{t=0}{t-1})\delta(t) \qquad y(t) = x(-1)\delta(t) = \begin{cases} x(-1)\delta(t) & , \ t = 0 \\ 0 & , \ t \neq 0 \end{cases}$$

در ضابطه اول، خروجی در لحظه $t = 0$ یعنی $y(0)$ به ورودی در لحظه $t = -1$ یعنی $x(-1)$ وابسته است، پس در این ضابطه سیستم حافظه‌دار بوده و نیازی به بررسی ضابطه دوم نیست و سیستم در حالت کلی حافظه‌دار است.

۱۴) $S_{14}: y[n] = \begin{cases} x[n]u[n] & , \ n \geq 0 \\ x[-n]u[n] & , \ n < 0 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** به نظر می‌رسد، در ضابطه دوم آرگومان خروجی (n) با آرگومان ورودی $(-n)$ برابر نیست و سیستم حافظه‌دار است. اما فراموش نکنید که ابتدا باید تأثیر سیگنال پله را بر روی آرگومان ورودی مشخص کرده و ضابطه سیستم را ساده کنید.

$$S_{14}: y[n] = \begin{cases} x[n]u[n] & , \ n \geq 0 \\ x[-n]u[n] & , \ n < 0 \end{cases} \xrightarrow{u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0\end{cases}} y[n] = \begin{cases} x[n] & , \ n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$$

در ضابطه اول آرگومان خروجی و ورودی برابر بوده و در ضابطه دوم خروجی به ورودی بستگی ندارد، بنابراین سیستم بدون حافظه است.

۱۵) $S_{15}: y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t^2+1)dt$

☑ **پاسخ:** به نظر می‌رسد سیستم حافظه‌دار است، چرا که به دلیل وجود عملگر $\int_{-\infty}^{+\infty}$، خروجی در هر لحظه به ورودی از لحظات $-\infty$ تا $+\infty$ بستگی دارد. اما دقت کنید که از تأثیر سیگنال $\delta(t^2+1)$ بر روی آرگومان ورودی غفلت نکنید. سیگنال $\delta(t^2+1)$ همواره صفر است چرا که آرگومان آن به ازای هیچ $t \in \mathbb{R}$ صفر نمی‌شود. بنابراین $y(t)$ همواره برابر صفر بوده و S_{15} یک سیستم ثابت است. همان‌طور که در مثال‌های قبلی توضیح دادیم سیستم‌های ثابت به ورودی وابسته نبوده و همواره بدون حافظه هستند.

$$S_{15}: y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t^2+1)dt \xrightarrow{t^2+1\neq 0 \to \delta(t^2+1)=0} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\times 0 \, dt = 0$$

خاصیت علّی بودن

سیستم‌های علّی

اگر خروجی در هر زمان مشخص (n_0, t_0) به ورودی در همان زمان (زمان حال) یا زمان‌های گذشته وابسته باشد، سیستم علّی است.

سیستم‌های غیرعلّی

اگر خروجی حداقل در یک زمان مشخص (n_0, t_0) به ورودی در زمان‌های آینده بستگی داشته باشد، سیستم غیرعلّی است. در واقع اگر سیستم علّی نباشد، غیرعلّی است.

سیستم‌های ضدعلّی

اگر خروجی در هر زمان مشخص (n_0, t_0) به ورودی در زمان‌های آینده بستگی داشته باشد، سیستم ضدعلّی است.

سیستم‌های غیرضدعلّی

اگر خروجی حداقل در یک زمان مشخص (n_0, t_0) به ورودی در همان زمان (زمان حال) یا زمان‌های گذشته وابسته باشد، سیستم غیرضدعلّی است. در واقع اگر سیستم ضدعلّی نباشد، غیرضدعلّی است.

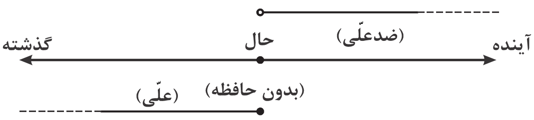
برای مثال با توجه به رابطه ولتاژ و جریان در خازن الکتریکی $(v(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau)$، با یک سیستم علّی روبه‌رو هستیم، چرا که برای محاسبه خروجی (ولتاژ) در لحظه مشخص $t = t_0$ به مقادیر ورودی (جریان) از لحظه $t = 0$ تا $t = t_0$ نیاز داریم که لحظات حال $(t = t_0)$ و گذشته $(0 \leq t < t_0)$ محسوب می‌شوند. علّیت برای یک سیستم فیزیکی که متغیر مستقل آن از جنس زمان است به معنی عدم پیشگویی آن سیستم معنی می‌شود. همان‌طور که می‌دانید جریان الکتریکی اعمال‌شده به یک خازن، درون آن ذخیره می‌شود و برای محاسبه ولتاژ دو سر خازن در لحظه t به جریان‌های ذخیره‌شده از لحظه 0 تا t نیاز داریم. خازن از جریان‌های اعمالی بعد از زمان t اطلاعی ندارد چرا که در زمان t، این جریان‌ها اصلاً به وجود نیامده‌اند. بنابراین خازن نمی‌تواند جریان‌های اعمال‌شده در زمان‌های آینده را پیشگویی کند و خاصیت علّیت برای چنین سیستم‌های فیزیکی یک خاصیت ذاتی در نظر گرفته می‌شود. اما یک سیستم تقویت‌کننده صدا را در نظر بگیرید که ورودی آن صدای یک شخص در حال صحبت نیست بلکه صدایی از قبل ضبط شده است. برای چنین سیستم فیزیکی می‌توان قدرت پیشگویی را تعریف کرد چرا که سیستم برای تقویت صدا در لحظه t_0 به‌عنوان خروجی سیستم می‌تواند صداهای ضبط‌شده در لحظات بعد از t_0 یعنی آینده را به‌عنوان ورودی سیستم فراخوانی کند.

با توجه به تعاریف ارائه شده برای خاصیت بدون حافظه و علّی بودن می‌توان نکات زیر را مطرح کرد:

نکته۱: ارتباط بین سیستم‌های بدون حافظه، علّی و ضدعلّی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱ـ سیستم‌های بدون حافظه حتماً علّی هستند. ۲ـ سیستم‌های علّی لزوماً بدون حافظه نیستند. ۳ـ سیستم‌های غیرعلّی حتماً حافظه‌دار هستند.
۴ـ سیستم‌های بدون حافظه حتماً غیرضدعلّی هستند. ۵ـ سیستم‌های ضدعلّی حتماً حافظه‌دار هستند.

این ارتباط را به‌صورت شماتیک در محور زمان می‌توان نشان داد:



نیازی به به‌خاطر سپردن این ارتباط‌ها نیست، کافی است با یک تحلیل ساده ارتباط‌ها را به‌دست آورید.

روش بررسی خاصیت علّی بودن سیستم‌ها

گام اول: تنها آرگومان سیگنال‌های ورودی و خروجی و عملگرهای مؤثر بر آرگومان را در نظر بگیرید و بقیه موارد موجود در ضابطه سیستم را نادیده بگیرید.

گام دوم: آرگومان سیگنال‌های ورودی و خروجی را به ازای تمامی زمان‌های ممکن با یکدیگر مقایسه کنید.

- اگر به ازای تمامی زمان‌های ممکن آرگومان خروجی ≤ آرگومان ورودی ⇐ سیستم علّی است.
- اگر حداقل یک لحظه وجود داشته باشد که آرگومان خروجی > آرگومان ورودی ⇐ سیستم غیرعلّی است.
- اگر به ازای تمامی زمان‌های ممکن آرگومان خروجی > آرگومان ورودی ⇐ سیستم ضدعلّی است.
- اگر حداقل یک لحظه وجود داشته باشد آرگومان خروجی ≤ آرگومان ورودی ⇐ سیستم غیرضدعلّی است.

مثال۱۰: خاصیت علّیت را برای سیستم‌های زیر بررسی کنید.

۱) $S_1 : y[n] = x[n-1]$

پاسخ: به ازای تمامی زمان‌ها، ((n) آرگومان خروجی > $(n-1)$ آرگومان ورودی) است، پس سیستم علّی می‌باشد.

۲) $S_2 : y[n] = n^2 x^2[-|n|]$

پاسخ: به ازای تمامی زمان‌های منفی و صفر، ((n) آرگومان خروجی = $(-|n|)$ آرگومان ورودی) است. بـه ازای تمـامی زمـان‌هـای مثبـت، ((n) آرگومان خروجی > $(-|n|)$ آرگومان ورودی) است. بنابراین در حالت کلی به ازای تمامی زمان‌ها، (آرگومان خروجی ≤ آرگومان ورودی) اسـت و سیسـتم علّی است. توجه کنید که هرگونه تغییر بر روی دامنه ورودی نقشی در تعیین علّیت یک سیستم ندارد. یعنی روند تعیین خاصـیت علّیـت بـرای دو سیسـتم $y[n] = n^2 x^2[-|n|]$ و $y[n] = x[-|n|]$ کاملاً یکسان است.

۳) $S_3 : y(t) = x(t^2)$

پاسخ: آرگومان خروجی (t) و آرگومان ورودی (t^2) را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} t^2 \geq t \quad , \quad t \geq 1 \quad \rightarrow \text{در این بازه سیستم غیرعلّی است} \\ t^2 < t \quad , \quad 0 < t < 1 \rightarrow \text{در این بازه سیستم علّی است} \\ t^2 \geq t \quad , \quad t \leq 0 \quad \rightarrow \text{در این بازه سیستم غیرعلّی است} \end{cases} \rightarrow \text{درنهایت سیستم غیرعلّی است}$$

۴) $S_4 : y(t) = x(-t)$

پاسخ: آرگومان خروجی (t) و آرگومان ورودی $(-t)$ را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} -t \leq t \quad , \quad t \geq 0 \quad \rightarrow \text{در این بازه سیستم علّی است} \\ -t > t \quad , \quad t < 0 \quad \rightarrow \text{در این بازه سیستم غیرعلّی است} \end{cases} \rightarrow \text{درنهایت سیستم غیرعلّی است}$$

البته برای بررسی غیرعلّی بودن سیستم‌های S_3 و S_4 کافی است یک مثال نقض بزنیم.

$S_3 : y(t) = x(t^2) \xrightarrow{t=2} y(2) = x(4) \rightarrow$
سیستم غیرعلّی است ← خروجی در لحظه $t = 2$ یعنی $y(2)$ به ورودی در لحظه آینده یعنی $x(4)$ بستگی دارد

$S_4 : y(t) = x(-t) \xrightarrow{t=-2} y(-2) = x(2) \rightarrow$
سیستم غیرعلّی است ← خروجی در لحظه $t = -2$ یعنی $y(-2)$ به ورودی در لحظه آینده یعنی $x(2)$ بستگی دارد.

۵) $S_5 : y(t) = x(t) + x(1)$

پاسخ: خروجی در لحظه $t = 0$ به ورودی در لحظه $t = 0$ و $t = 1$ بستگی دارد. $x(1)$ نسبت به $y(0)$ آینده محسوب شده و سیستم غیرعلّی خواهد شد.

درسنامه (۲): خواص سری فوریه

تغییرات سیگنال در حوزه زمان می‌تواند باعث تغییراتی در ضرایب سری فوریه شود. این رابطه دوطرفه است و با تغییرات ضرایب سری فوریه در حوزه فرکانس، سیگنال زمانی می‌تواند دچار تغییراتی شود. برای بیان ارتباط این تغییرات در دو حوزه زمان و فرکانس از خواص سری فوریه استفاده می‌کنیم. خواص سری فوریه اکثراً برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته یکسان است، بنابراین این خواص را صرفاً برای حالت پیوسته بیان می‌کنیم، مگر در مواردی که بین حالت پیوسته و گسسته اختلافی وجود داشته باشد. توجه داشته باشید تمامی خواص و نکات گفته شده در این درسنامه دوطرفه هستند. یعنی با داشتن روابط حوزه زمان می‌توان روابط حوزه فرکانس و همچنین با داشتن روابط حوزه فرکانس می‌توان روابط حوزه زمان را نتیجه گرفت.

$$\boxed{\text{زمان} \rightleftarrows \text{فرکانس}}$$

در بیان تمامی خواص، فرض شده است که سیگنال $x(t)$، $x[n]$ دارای ضرایب سری فوریه a_k و سیگنال $y(t)$، $y[n]$ دارای ضرایب سری فوریه b_k هستند.

$$x(t)\xleftrightarrow{F.S}a_k \quad , \quad y(t)\xleftrightarrow{F.S}b_k \qquad\qquad x[n]\xleftrightarrow{F.S}a_k \quad , \quad y[n]\xleftrightarrow{F.S}b_k$$

خاصیت خطی

خاصیت خطی از اجماع دو خاصیت همگنی و جمع‌پذیری ایجاد می‌شود.

خاصیت همگنی: اگر سیگنالی در یک ثابت مختلط ضرب شود، ضرایب سری فوریه نیز در همان ثابت، ضرب خواهند شد.

$$\boxed{\mathbf{Ax(t)\xleftrightarrow{F.S}Aa_k}}$$

خاصیت جمع‌پذیری: اگر چند سیگنال **با دوره تناوب یکسان** با یکدیگر جمع شوند، ضرایب سری فوریه آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌شود.

$$\boxed{\mathbf{x(t)+y(t)\xleftrightarrow{F.S}a_k+b_k}}$$

خاصیت خطی: اگر چند سیگنال **با دوره تناوب یکسان** با یکدیگر ترکیب خطی شوند، ضرایب سری فوریه آن‌ها نیز با همان ضرایب، ترکیب خطی می‌شوند.

$$\boxed{\mathbf{Ax(t)+By(t)\xleftrightarrow{F.S}Aa_k+Bb_k}}$$

تذکر ۳: خاصیت خطی به شکل گفته شده تنها در حالتی برقرار است که دوره تناوب سیگنال‌های ترکیب خطی شده، یکسان باشد. خاصیت خطی برای سیگنال‌هایی با دوره تناوب غیریکسان را در انتهای این درسنامه بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱۳: ضرایب سری فوریه قطار ضربه $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}۳\delta(۲t-kT_\circ)$ برابر است با: (آزاد ۸۰)

۱) $a_k=\frac{۶}{T_\circ}$ ۲) $a_k=\frac{۳}{T_\circ}$ ۳) $a_k=\frac{۳}{۲T_\circ}$ ۴) $a_k=\frac{۲}{T_\circ}$

پاسخ: گزینه «۲» سیگنال $x(t)$ یک قطار ضربه است اما برای اینکه شبیه به یک قطار ضربه متداول شود، از خواص سیگنال ضربه استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}۳\delta(۲(t-k\frac{T_\circ}{۲}))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{۳}{۲}\delta(t-k\frac{T_\circ}{۲})$$

همان‌طور که قبلاً دیدیم، ضریب سری فوریه قطار ضربه واحد برابر با معکوس دوره تناوب آن است. به کمک خاصیت خطی ضرایب سری فوریه $x(t)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\frac{T_\circ}{۲})\xleftrightarrow{FS}\frac{۲}{T_\circ}\Rightarrow\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{۳}{۲}\delta(t-k\frac{T_\circ}{۲})\xleftrightarrow[\text{خطی}]{FS}a_k=\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{T_\circ}=\frac{۳}{T_\circ}$$

خاصیت انتقال زمانی و فرکانسی

اگر متغیر مستقل در سیگنال زمانی انتقال زمانی پیدا کند $(t\to t-t_\circ)$، ضرایب سری فوریه در یک سیگنال نمایی فرکانسی $(e^{-jk\omega_\circ t_\circ})$ ضرب می‌شود و اگر متغیر مستقل در ضرایب سری فوریه انتقال فرکانسی پیدا کند $(k\to k-k_\circ)$، سیگنال زمانی در یک سیگنال نمایی زمانی $(e^{jk_\circ\omega_\circ t})$ ضرب می‌شود.

خاصیت انتقال زمانی	حفظ علامت $\mathbf{x(t-t_\circ)\xleftrightarrow{F.S}a_k e^{-jk\omega_\circ t_\circ}}$
خاصیت انتقال فرکانسی	تغییر علامت $\mathbf{e^{+jk_\circ\omega_\circ t}x(t)\xleftrightarrow{F.S}a_{k-k_\circ}}$

در این دو خاصیت سیگنال نمایی ضرب‌شده $e^{jk\omega_\circ t}$ می‌باشد. این سیگنال دو متغیر t و k دارد. در خاصیت انتقال زمانی، مقدار انتقال زمانی $(-t_\circ)$ را با حفظ علامت در سیگنال نمایی جایگذاری کرده ($e^{jk\omega_\circ t}\Big|_{t=-t_\circ} = e^{-jk\omega_\circ t_\circ}$) و این سیگنال نمایی با متغیر مستقل k را در ضرایب سری فوریه ضرب می‌کنیم. در خاصیت انتقال فرکانسی نیز، مقدار انتقال فرکانسی $(-k_\circ)$ را با تغییر علامت در سیگنال نمایی جایگذاری کرده ($e^{jk\omega_\circ t}\Big|_{k=+k_\circ} = e^{jk_\circ\omega_\circ t}$) و این سیگنال نمایی با متغیر مستقل t را در سیگنال زمانی ضرب می‌کنیم.

تذکر۴: در خاصیت انتقال فرکانسی، همواره باید $k_\circ \in \mathbb{Z}$ باشد. این خاصیت را برای حالت‌هایی که $k_\circ \notin \mathbb{Z}$ در انتهای این درسنامه بررسی می‌کنیم.

خاصیت قرینگی زمانی / فرکانسی

اگر متغیر مستقل در سیگنال زمانی قرینه شود $(t \to -t)$، متغیر مستقل در ضرایب سری فوریه نیز قرینه خواهد شد $(k \to -k)$.

$$\boxed{x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k}}$$

طبق این خاصیت می‌خواهیم درباره ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زوج و فرد بحث کنیم. فرض کنید $x(t)$ زوج باشد، در این‌صورت در مورد ضرایب سری فوریه این سیگنال می‌توان گفت:

$$x(t) = x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = a_{-k} \xrightarrow{\text{یعنی}}$$ ضرایب سری فوریه نیز زوج می‌باشند.

حال فرض کنید $x(t)$ فرد باشد، در این‌صورت داریم:

$$x(t) = -x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = -a_{-k} \xrightarrow{\text{یعنی}}$$ ضرایب سری فوریه نیز فرد هستند.

طبق روابط بالا نکته مهم زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته۳: اگر سیگنالی زوج (فرد) باشد، ضرایب سری فوریه آن نیز زوج (فرد) خواهد بود.

$$\boxed{x(t)_{\text{زوج}} \longleftrightarrow a_{k\,\text{زوج}}} \quad , \quad \boxed{x(t)_{\text{فرد}} \longleftrightarrow a_{k\,\text{فرد}}}$$

حال می‌خواهیم ضرایب سری فوریه قسمت زوج و فرد یک سیگنال را بررسی کنیم. می‌دانیم قسمت زوج و فرد یک سیگنال از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{۲} \quad , \quad x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{۲}$$

حال به کمک خواص خطی و قرینگی زمانی و فرکانسی از طرفین روابط بالا سری فوریه می‌گیریم:

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{۲} \xleftrightarrow{F.S} b_k = \frac{a_k + a_{-k}}{۲} \qquad x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{۲} \xleftrightarrow{F.S} b_k = \frac{a_k - a_{-k}}{۲}$$

$\frac{a_k + a_{-k}}{۲}$ تعریف قسمت زوج a_k و $\frac{a_k - a_{-k}}{۲}$ تعریف قسمت فرد a_k است. بنابراین نکته زیر را می‌توان مطرح کرد.

نکته۴: ضرایب سری فوریه قسمت زوج (فرد) یک سیگنال برابر با قسمت زوج (فرد) ضرایب سری فوریه خود سیگنال است.

$$\boxed{x_e(t) \xleftrightarrow{F.S} a_e[k]} \quad , \quad \boxed{x_o(t) \xleftrightarrow{F.S} a_o[k]}$$

تذکر۵: $a_e[k]$ و $a_o[k]$ را می‌توان به‌صورت $ev\{a_k\}$ و $od\{a_k\}$ نیز نشان داد.

خاصیت مزدوجی

اگر از سیگنال زمانی مزدوج‌گیری شود $(x() \to x^*())$، ضرایب سری فوریه مزدوج‌شده $(a \to a^*)$ و متغیر مستقل آن قرینه می‌شود $(k \to -k)$.

$$\boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{F.S} a^*_{-k}}$$

اگر از ضرایب سری فوریه مزدوج‌گیری شود $(a \to a^*)$، سیگنال زمانی آن مزدوج $(x() \to x^*())$ و متغیر مستقل آن قرینه می‌شود $(t \to -t)$.

$$\boxed{a^*_k \xleftrightarrow{F.S^{-1}} x^*(-t)}$$

طبق خاصیت مزدوجی می‌خواهیم درباره ضرایب سری فوریه سیگنال‌های حقیقی بحث کنیم. فرض کنید $x(t)$ حقیقی باشد. بنابراین رابطه $x(t)=x^*(t)$ برقرار است. از طرفین این رابطه طبق خاصیت مزدوجی سری فوریه می‌گیریم:

$$x(t)=x^*(t)\xleftrightarrow{F.S}a_k=a_{-k}^*\xrightarrow[k\to -k]{\text{تغییر متغیر}}\boxed{a_{-k}=a_k^*}$$

حال اگر از طرفین رابطه به‌دست آمده اندازه‌گیری و فازگیری کنیم، داریم:

$$a_{-k}=a_k^*\begin{cases}\to |a_{-k}|=|a_k^*|\xrightarrow{|a_k^*|=|a_k|}\boxed{|a_{-k}|=|a_k|}\\ \to \measuredangle a_{-k}=\measuredangle a_k^*\xrightarrow{\measuredangle a_k^*=-\measuredangle a_k}\boxed{\measuredangle a_{-k}=-\measuredangle a_k}\end{cases}$$

در ادامه از طرفین رابطه $a_{-k}=a_k^*$، Re گیری و Im گیری می‌کنیم:

$$a_{-k}=a_k^*\begin{cases}\to \mathrm{Re}\{a_{-k}\}=\mathrm{Re}\{a_k^*\}\xrightarrow{\mathrm{Re}\{a_k^*\}=\mathrm{Re}\{a_k\}}\boxed{\mathrm{Re}\{a_{-k}\}=\mathrm{Re}\{a_k\}}\\ \to \mathrm{Im}\{a_{-k}\}=\mathrm{Im}\{a_k^*\}\xrightarrow{\mathrm{Im}\{a_k^*\}=-\mathrm{Im}\{a_k\}}\boxed{\mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}}\end{cases}$$

حال رابطه بین $\mathrm{Re}\{a_k\}$ و $ev\{a_k\}$ و رابطه بین $\mathrm{Im}\{a_k\}$ و $od\{a_k\}$ را برای یک سیگنال حقیقی بررسی می‌کنیم:

$$\mathrm{Re}\{a_k\}=\frac{a_k+a_k^*}{۲}\xrightarrow{a_k^*=a_{-k}}\mathrm{Re}\{a_k\}=\frac{a_k+a_{-k}}{۲}\Rightarrow\boxed{\mathrm{Re}\{a_k\}=ev\{a_k\}}$$

$$\mathrm{Im}\{a_k\}=\frac{a_k-a_k^*}{۲j}\xrightarrow{a_k^*=a_{-k}}\mathrm{Im}\{a_k\}=\frac{a_k-a_{-k}}{۲j}\Rightarrow j\mathrm{Im}\{a_k\}=\frac{a_k-a_{-k}}{۲}\Rightarrow\boxed{j\mathrm{Im}\{a_k\}=od\{a_k\}}$$

طبق روابط گفته شده نکته بسیار مهم زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته۵: ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی خواص زیر را دارا است. به این خواص، تقارن هرمیتی گفته می‌شود:

$x(t)$ حقیقی:

- $\boxed{a_k^*=a_{-k}}$: برای مزدوج‌گیری از ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی، کافی است آن‌ها را قرینه فرکانسی کنیم (نتیجه: ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی لزوماً حقیقی نیست).
- $\boxed{|a_k|=|a_{-k}|\ ,\ \measuredangle a_k=-\measuredangle a_{-k}}$: اندازه ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی سیگنالی زوج و فاز آن سیگنالی فرد است.
- $\boxed{\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}\ ,\ \mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}}$: قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی، سیگنالی زوج و قسمت موهومی آن سیگنالی فرد است.
- $\boxed{\mathrm{Re}\{a_k\}=ev\{a_k\}\ ,\ j\mathrm{Im}\{a_k\}=od\{a_k\}}$: قسمت حقیقی و قسمت زوج ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی برابرند. همچنین j برابر قسمت موهومی و قسمت فرد ضرایب نیز با یکدیگر برابرند.
- $\boxed{x_e(t)\xleftrightarrow{FS}\mathrm{Re}\{a_k\}\ ,\ x_o(t)\xleftrightarrow{FS}j\mathrm{Im}\{a_k\}}$: ضرایب سری فوریه قسمت زوج و فرد یک سیگنال به‌ترتیب برابر قسمت حقیقی و j برابر قسمت موهومی ضرایب سری فوریه سیگنال است.

تذکر۶: طبق نکته گفته شده مقدار dc یک سیگنال حقیقی، باید حقیقی باشد. $a_k^*=a_{-k}\xrightarrow{k=۰}a_۰^*=a_{-۰}\Rightarrow a_۰^*=a_۰\to$ $a_۰$ حقیقی

تذکر۷: تمامی روابط گفته شده را در مورد سیگنال‌هایی با ضرایب سری فوریه حقیقی نیز می‌توان استخراج کرد. در این‌صورت کافی است در نکته گفته شده به جای $x(t)$، a_k و به جای a_k، $x(t)$ بنویسید.

می‌توان در مورد ضرایب سری فوریه سیگنال‌های موهومی نیز روابطی را استخراج کرد اما مانند روابط مربوط به ضرایب سری فوریه سیگنال‌های حقیقی اهمیت چندانی ندارد. بنابراین تنها به بیان روابط اکتفا کرده و از اثبات آن‌ها اجتناب می‌کنیم. سعی کنید به عنوان تمرین روابط مطرح شده در نکته زیر را اثبات کنید.

نکته۶: ضرایب سری فوریه یک سیگنال موهومی خواص زیر را دارا است:

$x(t)$ موهومی:

- $a_k^*=-a_{-k}$
- $|a_k|=|a_{-k}|\ ,\ \measuredangle a_k=-\measuredangle a_{-k}\pm\pi$
- $\mathrm{Re}\{a_k\}=-\mathrm{Re}\{a_{-k}\}\ ,\ \mathrm{Im}\{a_k\}=\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$
- $\mathrm{Re}\{a_k\}=od\{a_k\}\ ,\ j\mathrm{Im}\{a_k\}=ev\{a_k\}$

تذکر۸: تمامی روابط گفته شده را در مورد سیگنال‌هایی با ضرایب سری فوریه موهومی نیز می‌توان استخراج کرد. در این‌صورت کافی است در نکته گفته شده به‌جای $x(t)$، a_k و به جای a_k، $x(t)$ بنویسید.

حال می‌خواهیم به کمک خواص قرینگی زمانی/ فرکانسی و در مورد حقیقی / موهومی و زوج / فرد بودن سیگنال‌ها و ضرایب سری فوریه آن‌ها بحث کنیم.

فرض کنید $x(t)$ همزمان ویژگی‌های زیر را داشته باشد. در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} x(t)\ \text{حقیقی} \to a_k^* = a_{-k} \\ x(t)\ \text{زوج} \to a_k = a_{-k} \end{cases} \to \boxed{a_k^* = a_k} \xrightarrow{\text{یعنی}} a_k\ \text{حقیقی است}$$

$$\begin{cases} x(t)\ \text{حقیقی} \to a_k^* = a_{-k} \\ x(t)\ \text{فرد} \to -a_k = a_{-k} \end{cases} \to \boxed{a_k^* = -a_k} \xrightarrow{\text{یعنی}} a_k\ \text{موهومی است}$$

$$\begin{cases} x(t)\ \text{موهومی} \to a_k^* = -a_{-k} \\ x(t)\ \text{زوج} \to a_k = a_{-k} \end{cases} \to \boxed{a_k^* = -a_k} \xrightarrow{\text{یعنی}} a_k\ \text{موهومی است}$$

$$\begin{cases} x(t)\ \text{موهومی} \to a_k^* = -a_{-k} \\ x(t)\ \text{فرد} \to a_k = -a_{-k} \end{cases} \to \boxed{a_k^* = a_k} \xrightarrow{\text{یعنی}} a_k\ \text{حقیقی است}$$

طبق روابط گفته شده نکته مهم زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته۷: در مورد (حقیقی / موهومی) و (زوج / فرد) بودن سیگنال‌ها و ضرایب سری فوریه آن‌ها می‌توان گفت:

سیگنال حقیقی و زوج	$\longleftrightarrow$	**ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج**
سیگنال موهومی و زوج	$\longleftrightarrow$	**ضرایب سری فوریه موهومی و زوج**
سیگنال حقیقی و فرد	$\longleftrightarrow$	**ضرایب سری فوریه موهومی و فرد**
سیگنال موهومی و فرد	$\longleftrightarrow$	**ضرایب سری فوریه حقیقی و فرد**

تذکر۹: برای به خاطر سپردن رابطه بالا توجه داشته باشید که در مورد خاصیت (حقیقی / موهومی) بودن، سیگنال‌ها و ضرایب سری فوریه زوج وضعیتی مشابه و سیگنال‌ها و ضرایب سری فوریه فرد وضعیتی عکس دارند.

مثال۱۴: در مورد یک سیگنال حقیقی، گسسته و متناوب $x(n)$ با دوره تناوب ۵ و با ضرایب سری فوریه a_k: $a_7 = 2$، $a_{-1} = 1$ و $a_5 = 0$. این سیگنال کدام است؟
(مهندسی کامپیوتر (گرایش معماری) ـ سراسری ۹۸)

۱) $2\cos(\frac{\pi}{5}n) + 4\cos(\frac{2\pi}{5}n)$

۲) $4\cos(\frac{\pi}{5}n) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}n)$

۳) $2\cos(\frac{2\pi}{5}n) + 4\cos(\frac{4\pi}{5}n)$

۴) $4\cos(\frac{2\pi}{5}n) + 2\cos(\frac{4\pi}{5}n)$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه سیگنال $x(n)$ به تمام ضرایب سری فوریه آن نیاز داریم. چون سیگنال گسسته و متناوب با $N = 5$ است، پس a_k نیز با $N = 5$ متناوب خواهد بود. بنابراین ۵ ضریب سری فوریه داریم. سه ضریب داده شده و دو ضریب باقی‌مانده را به کمک حقیقی بودن سیگنال $x(n)$ و متناوب بودن a_k به‌دست می‌آوریم.

چون سیگنال حقیقی است طبق خاصیت مزدوجی داریم:

$$x[n]\ \text{حقیقی} \to a_{-k} = a_k^* \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = a_1^* = 1 \\ a_{-2} = a_2^* \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم ضرایب سری فوریه با دوره تناوب N متناوب هستند یعنی:

$$a_k = a_{k+N} \Rightarrow a_k = a_{k+5} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{k=0} a_0 = a_5 = 0 \\ \xrightarrow{k=2} a_2 = a_7 = 2 \Rightarrow a_2^* = a_{-2} = 2 \end{cases}$$

حال طبق رابطه‌ی بسط سری فوریه سیگنال $x(n)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{jk\frac{2\pi}{5}n} = a_{-2}e^{-j2(\frac{2\pi}{5})n} + a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{5}n} + a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{5}n} + a_2 e^{j2(\frac{2\pi}{5})n}$$

$$= 2a_2\cos(\frac{4\pi}{5}n) + 2a_1\cos(\frac{2\pi}{5}n) + a_0 = 4\cos(\frac{4\pi}{5}n) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}n)$$

درسنامه (۲): خواص تبدیل فوریه

تغییرات سیگنال در حوزه زمان می‌تواند باعث تغییراتی در تبدیل فوریه شود. همچنین تغییرات تبدیل فوریه در حوزه فرکانس می‌تواند تغییراتی را در سیگنال زمانی ایجاد کند. این تغییرات را به کمک خواص تبدیل فوریه بررسی می‌کنیم.

خواص تبدیل فوریه اکثراً برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته یکسان هستند. بنابراین این خاصیت‌ها را صرفاً در حالت پیوسته بیان می‌کنیم. مگر در مواردی که بین حالت پیوسته و گسسته اختلافی وجود داشته باشد. تمامی خواص و نکات گفته شده در این درسنامه دوطرفه هستند. یعنی با داشتن روابط حوزه زمان می‌توان روابط حوزه فرکانس و با داشتن روابط حوزه فرکانس، روابط حوزه زمان را نتیجه گرفت.

فرکانس $\rightleftarrows$ زمان

در بیان تمامی خواص و نکات فرض می‌شود که تبدیل فوریه سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب برابر با $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ است.

$$x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega) \quad , \quad y(t)\xleftrightarrow{F}Y(j\omega)$$

خاصیت خطی

خاصیت خطی در واقع در کنار هم قرار گرفتن دو خاصیت همگنی و جمع‌پذیری است.

خاصیت همگنی: اگر سیگنالی در یک ثابت مختلط ضرب شود، تبدیل فوریه نیز در همان ثابت ضرب خواهد شد. $Ax(t)\xleftrightarrow{F}AX(j\omega)$

خاصیت جمع‌پذیری: اگر چند سیگنال با یکدیگر جمع شوند، تبدیل فوریه آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌شوند. $x(t)+y(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)+Y(j\omega)$

خاصیت خطی: اگر چند سیگنال با یکدیگر ترکیب خطی شوند، تبدیل فوریه آن‌ها نیز با همان ضرایب ترکیب خطی می‌شوند.

$$\boxed{\mathbf{Ax(t)+By(t)\xleftrightarrow{F}AX(j\omega)+BY(j\omega)}}$$

خاصیت انتقال زمانی و فرکانسی

اگر متغیر مستقل در سیگنال زمانی انتقال زمانی پیدا کند $(t\to t-t_0)$، تبدیل فوریه در یک سیگنال نمایی فرکانسی ضرب می‌شود.

حفظ علامت

$$\boxed{\mathbf{x(t-t_0)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)e^{-j\omega t_0}}}$$

اگر متغیر مستقل تبدیل فوریه انتقال فرکانسی پیدا کند $(\omega\to\omega-\omega_0)$، سیگنال زمانی در یک سیگنال نمایی زمانی ضرب می‌شود.

تغییر علامت

$$\boxed{\mathbf{e^{+j\omega_0 t}x(t)\xleftrightarrow{F}X(j(\omega-\omega_0))}}$$

در این دو خاصیت سیگنال نمایی ضرب شده $e^{j\omega t}$ است. این سیگنال دو متغیر t و ω دارد. در خاصیت انتقال زمانی، مقدار انتقال زمانی $(-t_0)$ را با حفظ علامت در سیگنال نمایی جایگذاری کرده $\left(e^{j\omega t}\Big|_{t=-t_0}=e^{-j\omega t_0}\right)$ و این سیگنال نمایی با متغیر مستقل ω را در تبدیل فوریه سیگنال ضرب می‌کنیم. در خاصیت انتقال فرکانسی نیز، مقدار انتقال فرکانسی $(-\omega_0)$ را با تغییر علامت در سیگنال نمایی جایگذاری کرده $\left(e^{j\omega t}\Big|_{\omega=+\omega_0}=e^{j\omega_0 t}\right)$ و این سیگنال نمایی با متغیر مستقل t را در سیگنال زمانی ضرب می‌کنیم.

مثال ۴: تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\mathbf{x(t)=\delta(t-t_0)}$

☑ **پاسخ:** از مثال‌های قبلی می‌دانیم که:

$$\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$$

$$\Rightarrow \delta(t-t_0)\xleftrightarrow[\text{انتقال زمانی}]{F}(1)e^{-j\omega t_0} \Rightarrow \boxed{x(t)=\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=e^{-j\omega t_0}}$$

۲) $\mathbf{x[n]=\delta[n-n_0]}$

☑ **پاسخ:** از مثال‌های قبلی می‌دانیم که:

$$\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$$

$$\Rightarrow \delta[n-n_0]\xleftrightarrow[\text{انتقال زمانی}]{F}(1)e^{-j\omega n_0} \Rightarrow \boxed{x[n]=\delta[n-n_0]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}}$$

دقت کنید که $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب $T=2\pi$ متناوب است.

$$X(e^{j(\omega+2\pi)})=e^{-j(\omega+2\pi)n_0}=e^{-j\omega n_0}\times\underbrace{e^{-j2\pi n_0}}_{1}=e^{-j\omega n_0}=X(e^{j\omega})$$

خاصیت قرینگی زمانی / فرکانسی

اگر متغیر مستقل در سیگنال زمانی قرینه شود $(t \to -t)$، متغیر مستقل در تبدیل فوریه سیگنال نیز قرینه خواهد شد $(\omega \to -\omega)$.

$$\boxed{x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)}$$

مثال۵: تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $x(t) = e^{-a|t|}\ ,\ Re\{a\} > 0$

پاسخ: سعی می‌کنیم $x(t)$ را به فرم سیگنال‌هایی که تبدیل فوریه آن‌ها را از قبل در خاطر داریم، بنویسیم. برای این منظور کافی است قدرمطلق t را به‌گونه‌ای حذف کنیم:

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & , \quad t \ge 0 \\ e^{-a(-t)} & , \quad t \le 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-at} & , \quad t \ge 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & , \quad t \ge 0 \\ e^{at} & , \quad t \le 0 \end{cases} = e^{-at} \underbrace{\begin{cases} 1 & , \quad t \ge 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases}}_{u(t)} + e^{at} \underbrace{\begin{cases} 0 & , \quad t \ge 0 \\ 1 & , \quad t \le 0 \end{cases}}_{u(-t)}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

از مثال‌های قبل می‌دانیم که:

$$e^{-at}u(t)\ ,\ Re\{a\} > 0 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$$

از طرفی طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی داریم:

$$e^{-a(-t)}u(-t)\ ,\ Re\{a\} > 0 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j(-\omega)}$$

حال طبق خاصیت خطی می‌توان گفت:

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{a - j\omega + a + j\omega}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-a|t|}, Re\{a\} > 0 \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

۲) $x[n] = a^{|n|}\ ,\ |a| < 1$

پاسخ: همانند مثال قبلی $x[n]$ را به‌صورت سیگنال‌هایی می‌نویسیم که تبدیل فوریه آن‌ها را به خاطر داریم. کافی است قدرمطلق n را به گونه‌ای حذف کنیم.

$$x[n] = a^{|n|} = \begin{cases} a^n & , \quad n \ge 0 \\ a^{-n} & , \quad n < 0 \end{cases} = \begin{cases} a^n & , \quad n \ge 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & , \quad n \ge 0 \\ a^{-n} & , \quad n < 0 \end{cases} = a^n \underbrace{\begin{cases} 1 & , \quad n \ge 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}}_{u[n]} + a^{-n} \underbrace{\begin{cases} 0 & , \quad n \ge 0 \\ 1 & , \quad n < 0 \end{cases}}_{u[-n-1]}$$

$$\Rightarrow x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1]$$

از مثال‌های قبلی می‌دانیم که:

$$a^n u[n]\ ,\ |a| < 1 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

از طرفی طبق خاصیت انتقال زمانی داریم:

$$a^{n-1}u[n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

حال طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی داریم:

$$a^{-n-1}u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j(-\omega)}}{1 - ae^{-j(-\omega)}}$$

حال طبق خاصیت خطی داریم:

$$a \times a^{-n-1}\ u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} \Rightarrow a^{-n}u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$x[n] = a^n u[n] + a^{-n}u[-n-1] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - ae^{j\omega} + ae^{j\omega} - a^2}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - a(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) + a^2} \Rightarrow \boxed{x[n] = a^{|n|}, |a| < 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$$

توجه کنید که $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب $T = 2\pi$ متناوب است.

$$X(e^{j(\omega + 2\pi)}) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \underbrace{\cos(\omega + 2\pi)}_{\cos\omega} + a^2} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2} = X(e^{j\omega})$$

۳) $\mathbf{x(t) = sgn(t)}$

☑ **پاسخ:** سیگنال علامت را می‌توان به‌صورت جمع دو سیگنال پله نوشت: $x(t) = sgn(t) = u(t) - u(-t)$

از مثال‌های قبل می‌دانیم که: $u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \dfrac{۱}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

حال طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی داریم: $u(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \dfrac{۱}{j(-\omega)} + \pi\delta(-\omega)$

طبق خاصیت خطی نیز داریم:

$$x(t) = u(t) - u(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{۱}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{۱}{-j\omega} - \pi\underbrace{\delta(-\omega)}_{\delta(\omega)} \Rightarrow \boxed{x(t) = sgn(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{۲}{j\omega}}$$

طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی می‌خواهیم درباره تبدیل فوریه سیگنال‌های زوج و فرد بحث کنیم. فرض کنید $x(t)$ زوج باشد، در این‌صورت در مورد تبدیل فوریه این سیگنال طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی می‌توان گفت:

$$x(t) \text{ زوج است.} \Rightarrow x(t) = x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = X(-j\omega) \rightarrow X(j\omega) \text{ زوج است.}$$

حال فرض کنید $x(t)$ فرد باشد، در این‌صورت طبق خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی و خاصیت خطی داریم:

$$x(t) \text{ فرد است.} \Rightarrow x(t) = -x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = -X(-j\omega) \rightarrow X(j\omega) \text{ فرد است.}$$

طبق روابط بالا نکته مهم زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته۲: اگر سیگنالی زوج (فرد) باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج (فرد) خواهد بود.

$$\boxed{x(t)\text{ زوج} \longleftrightarrow X(j\omega)\text{ زوج}} \quad , \quad \boxed{x(t)\text{ فرد} \longleftrightarrow X(j\omega)\text{ فرد}}$$

حال می‌خواهیم تبدیل فوریه قسمت زوج و فرد یک سیگنال را بررسی کنیم. می‌دانیم قسمت زوج و فرد یک سیگنال از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{۲} \quad , \quad x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{۲}$$

حال به کمک خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی و خاصیت خطی از طرفین روابط بالا تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{۲} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega) + X(-j\omega)}{۲} \quad , \quad x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{۲} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega) - X(-j\omega)}{۲}$$

$\dfrac{X(j\omega) + X(-j\omega)}{۲}$ تعریف قسمت زوج $X(j\omega)$ و $\dfrac{X(j\omega) - X(-j\omega)}{۲}$ تعریف قسمت فرد $X(j\omega)$ است. طبق این توضیحات نکته زیر را مطرح می‌کنیم.

نکته۳: تبدیل فوریه قسمت زوج (فرد) یک سیگنال، برابر با قسمت زوج (فرد) تبدیل فوریه آن سیگنال است.

$$\boxed{x_e(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_e(j\omega)} \quad , \quad \boxed{x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_o(j\omega)}$$

خاصیت مزدوجی

اگر از دامنه سیگنال زمانی مزدوج‌گیری شود $(x() \rightarrow x^*())$، دامنه تبدیل فوریه آن مزدوج شده $(X() \rightarrow X^*())$ و متغیر مستقل در آن قرینه می‌شود $(\omega \rightarrow -\omega)$.

$$\boxed{x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)}$$

اگر از دامنه تبدیل فوریه مزدوج‌گیری شود $(X() \rightarrow X^*())$، دامنه سیگنال زمانی آن مزدوج شده $(x() \rightarrow x^*())$ و متغیر مستقل در آن قرینه می‌شود $(t \rightarrow -t)$.

$$\boxed{X^*(j\omega) \overset{F^{-۱}}{\longleftrightarrow} x^*(-t)}$$

طبق خاصیت مزدوجی می‌خواهیم درباره تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی بحث کنیم. فرض کنید $x(t)$ حقیقی باشد. بنابراین رابطه $x(t) = x^*(t)$ برقرار است. از طرفین این رابطه طبق خاصیت مزدوجی تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$x(t) = x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow -\omega]{\text{تغییر متغیر}} \boxed{X(-j\omega) = X^*(j\omega)}$$

حال اگر از طرفین رابطه به‌دست آمده اندازه‌گیری و فازگیری کنیم داریم:

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)\begin{cases}|X(-j\omega)|=|X^*(j\omega)|\xrightarrow{|X^*(j\omega)|=|X(j\omega)|}\boxed{|X(-j\omega)|=|X(j\omega)|}\\ \measuredangle X(-j\omega)=\measuredangle X^*(j\omega)\xrightarrow{\measuredangle X^*(j\omega)=-\measuredangle X(j\omega)}\boxed{\measuredangle X(-j\omega)=-\measuredangle X(j\omega)}\end{cases}$$

در ادامه از طرفین رابطه $X(-j\omega)=X^*(j\omega)$، Re گیری و Im گیری می‌کنیم:

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)\begin{cases}Re\{X(-j\omega)\}=Re\{X^*(j\omega)\}\xrightarrow{Re\{X^*(j\omega)\}=Re\{X(j\omega)\}}\boxed{Re\{X(-j\omega)\}=Re\{X(j\omega)\}}\\ Im\{X(-j\omega)\}=Im\{X^*(j\omega)\}\xrightarrow{Im\{X^*(j\omega)\}=-Im\{X(j\omega)\}}\boxed{Im\{X(-j\omega)\}=-Im\{X(j\omega)\}}\end{cases}$$

حال رابطه بین $Re\{X(j\omega)\}$ و $X_e(j\omega)$ و رابطه بین $Im\{X(j\omega)\}$ و $X_o(j\omega)$ را برای یک سیگنال حقیقی بررسی می‌کنیم.

$$X_e(j\omega)=\frac{X(j\omega)+X(-j\omega)}{۲}\xrightarrow[X(-j\omega)=X^*(j\omega)]{\text{حقیقی } x(t)}X_e(j\omega)=\frac{X(j\omega)+X^*(j\omega)}{۲}\Rightarrow\boxed{X_e(j\omega)=Re\{X(j\omega)\}}$$

$$X_o(j\omega)=\frac{X(j\omega)-X(-j\omega)}{۲}\xrightarrow[X(-j\omega)=X^*(j\omega)]{\text{حقیقی } x(t)}X_o(j\omega)=\frac{X(j\omega)-X^*(j\omega)}{۲}\Rightarrow\boxed{X_o(j\omega)=jIm\{X(j\omega)\}}$$

طبق روابط گفته‌شده، نکته بسیار مهم زیر را مطرح می‌کنیم:

نکته۴: تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی خواص زیر را داراست، به این خواص، تقارن هرمیتی گفته می‌شود:

حقیقی $x(t)$

۱ـ $X^*(j\omega)=X(-j\omega)$

برای مزدوج‌گیری از تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، کافی است متغیر مستقل آن را قرینه کنیم (نتیجه: تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، لزوماً حقیقی نیست).

۲ـ $|X(j\omega)|=|X(-j\omega)|\ ,\ \measuredangle X(j\omega)=-\measuredangle X(-j\omega)$

اندازه تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی سیگنالی زوج و فاز تبدیل فوریه آن سیگنالی فرد است.

۳ـ $Re\{X(j\omega)\}=Re\{X(-j\omega)\}\ ,\ Im\{X(j\omega)\}=-Im\{X(-j\omega)\}$

قسمت حقیقی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، سیگنالی زوج و قسمت موهومی آن سیگنالی فرد است.

۴ـ $Re\{X(j\omega)\}=X_e\{j\omega\}\ ,\ jIm\{X(j\omega)\}=X_o(j\omega)$

قسمت حقیقی و قسمت زوج تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی برابرند. همچنین j برابر قسمت موهومی و قسمت فرد تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی نیز برابرند.

طبق نکته گفته شده، مقدار DC یک سیگنال حقیقی باید حقیقی باشد.

$$X^*(j\omega)=X(-j\omega)\xrightarrow{\omega=۰}X^*(j۰)=X(-j(۰))\Rightarrow X^*(۰)=X(۰)\rightarrow \text{حقیقی } X(۰)$$

تذکر۲: این روابط دوطرفه هستند و در صورت برقراری هریک از موارد ۱ تا ۴ می‌توان گفت سیگنال زمانی حقیقی است.

تذکر۳: تمامی روابط گفته شده را می‌توان برای سیگنال‌هایی با تبدیل فوریه حقیقی نیز استخراج کرد. در این صورت کافی است در نکته گفته شده به‌جای $x(t)$، $X(j\omega)$ و به‌جای $X(j\omega)$، $x(t)$ بنویسید.

می‌توان در مورد تبدیل فوریه سیگنال‌های موهومی نیز روابطی استخراج کرد اما مانند روابط مربوط به تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی اهمیت چندانی ندارد. بنابراین تنها به بیان روابط اکتفا کرده و از اثبات آن‌ها اجتناب می‌کنیم. سعی کنید به عنوان تمرین روابط مطرح‌شده در نکته زیر را اثبات کنید.

نکته۵: تبدیل فوریه یک سیگنال موهومی خواص زیر را دارد:

$$\boxed{\text{موهومی } x(t)\rightarrow x^*(t)=-x(t)\begin{cases}X^*(j\omega)=-X(-j\omega)\\ |X(j\omega)|=|X(-j\omega)|\ ,\ \measuredangle X(j\omega)=-\measuredangle X(-j\omega)\pm\pi\\ Re\{X(j\omega)\}=-Re\{X(-j\omega)\}\ ,\ Im\{X(j\omega)\}=Im\{X(-j\omega)\}\\ Re\{X(j\omega)\}=X_o(j\omega)\ ,\ jIm\{X(j\omega)\}=X_e(j\omega)\end{cases}}$$

تذکر۴: تمامی روابط گفته شده را می‌توان در مورد سیگنال‌هایی با تبدیل فوریه موهومی نیز استخراج کرد. در این صورت کافی است در نکته گفته شده به‌جای $x(t)$، $X(j\omega)$ و به جای $X(j\omega)$، $x(t)$ جایگذاری کرد.

حال می‌خواهیم به کمک خاصیت قرینگی زمانی/ فرکانسی و خاصیت مزدوجی در مورد حقیقی/ موهومی و زوج/ فرد بودن سیگنال‌ها و تبدیل فوریه آن‌ها بحث کنیم.

روابط تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس سیگنال زمانی پیوسته $x(t)$ را با $X(s)$ نشان داده و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{\text{رابطه تبدیل لاپلاس}: X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt}$$

در مورد رابطه تبدیل لاپلاس گفته شده به چند نکته زیر توجه کنید. این موارد در به خاطر سپردن و درک مفهوم این رابطه کمک زیادی می‌کنند.

- $x(t)$ سیگنالی متناوب نیست. بنابراین انتگرال در کل بازه زمانی یعنی از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$ بر روی متغیر مستقل سیگنال (t) بسته می‌شود $(\int_{-\infty}^{+\infty}dt)$.
- تبدیل لاپلاس سیگنال پیوسته $x(t)$، یعنی $X(s)$ یک سیگنال پیوسته غیرمتناوب با متغیر مستقل s محسوب می‌شود. s یک مقدار مختلط است و آن را به‌صورت $\sigma,\omega\in\mathbb{R}$ و $s=\sigma+j\omega$ نشان می‌دهند $(\omega=\text{Im}\{s\},\sigma=\text{Re}\{s\})$.
- سیگنال e^{-st} دارای فرکانس مختلط s است. به همین دلیل گفته می‌شود که تبدیل لاپلاس، یک سیگنال را برحسب فرکانس‌های مختلط $(s=\sigma+j\omega ،\sigma,\omega\in\mathbb{R})$ بسط می‌دهد.
- تبدیل لاپلاس در واقع معادل فرکانسی یک سیگنال زمانی پیوسته است و نشان می‌دهد که سیگنال زمانی در هر فرکانس مختلط $s=\sigma+j\omega ،\sigma,\omega\in\mathbb{R}$ چه مقداری دارد.

برای مثال در ادامه خواهید دید که تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=e^{-۲t}u(t)$ برابر با سیگنال $X(s)=\frac{۱}{s+۲}$ است. حال می‌توان گفت معادل فرکانسی سیگنال زمانی $x(t)$ در فرکانس $s=۳+j۲$ دارای مقدار $X(۳+j۲)=\frac{۱}{۳+j۲+۲}=\frac{۱}{۵+j۲}$ است.

- رابطه عکس تبدیل لاپلاس به‌صورت روبه‌رو بیان می‌شود: $x(t)=\frac{۱}{۲\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$

برای محاسبه این انتگرال مختلط می‌توان از قضیه مانده‌ها که احتمالاً در ریاضیات مهندسی با آن آشنا شده‌اید، استفاده کرد. هرچند در این درس به هیچ‌وجه از این رابطه استفاده نکرده و برای محاسبه $x(t)$ از روی $X(s)$ روش‌های دیگری ذکر خواهد شد.

- رابطه بین سیگنال و تبدیل لاپلاس را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x(t)\xleftrightarrow{L}X(s) \quad , \quad L\{x(t)\}=X(s)$$

$$X(s)\xleftrightarrow{L^{-۱}}x(t) \quad , \quad L^{-۱}\{X(s)\}=x(t)$$

- تبدیل لاپلاس مختص سیگنال‌های زمانی پیوسته است. برای سیگنال‌های زمانی گسسته تبدیل Z تعریف می‌شود که در فصل بعد با این تبدیل آشنا می‌شویم.

اولین قدم در حل سؤالات این فصل، پیدا کردن تبدیل لاپلاس یک سیگنال زمانی پیوسته است. در مثال زیر، تبدیل لاپلاس چند سیگنال مهم را به کمک رابطه تبدیل لاپلاس به‌دست می‌آوریم.

مثال۱: تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زمانی زیر را به‌دست آورید.

۱) $x(t)=e^{-at}u(t)\ ,\ a\in\mathbb{C}$

پاسخ: کافی است سیگنال $x(t)$ را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری کنیم.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}u(t)e^{-st}dt\xrightarrow{u(t)=\begin{cases}۱ & ,\ t>۰\\ ۰ & ,\ t<۰\end{cases}}X(s)=\int_{۰}^{+\infty}e^{-(a+s)t}dt=-\frac{۱}{a+s}e^{-(a+s)t}\Big|_{۰}^{+\infty}$$

$$=-\frac{۱}{a+s}(e^{-(a+s)(+\infty)}-\underbrace{e^{-(a+s)(۰)}}_{۱})$$

همگرا و واگرا شدن عبارت $e^{-(a+s)(+\infty)}$ به مقادیر a و s بستگی دارد. a و s هر دو مقادیری مختلط هستند $(s=\text{Re}\{s\}+j\text{Im}\{s\}=\sigma+j\omega)$. بنابراین داریم:

$$e^{-(a+s)(+\infty)}=e^{-(\text{Re}\{a\}+j\text{Im}\{a\}+\sigma+j\omega)(+\infty)}=e^{-(\text{Re}\{a\}+\sigma)(+\infty)}\times e^{-j(\text{Im}\{a\}+\omega)(+\infty)}$$

عبارت $e^{-j(\text{Im}\{a\}+\omega)(+\infty)}$، نوسانی است و نمی‌تواند واگرا شود. اما در مورد عبارت $e^{-(\text{Re}\{a\}+\sigma)(+\infty)}$ می‌توان گفت:

$$e^{-(\text{Re}\{a\}+\sigma)(+\infty)}=\begin{cases}e^{-\infty}=۰\ (\text{همگرا}) & \text{Re}\{a\}+\sigma>۰\\ e^{+\infty}=\infty\ (\text{واگرا}) & \text{Re}\{a\}+\sigma<۰\end{cases}$$

بنابراین در مورد تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ می‌توان نوشت:

$$X(s)=\begin{cases}-\frac{1}{a+s}(0-1) & , \quad Re\{a\}+\sigma>0 \\ -\frac{1}{a+s}(\infty-1) & , \quad Re\{a\}+\sigma<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{a+s} & , \quad \sigma>-Re\{a\} \\ -\infty & , \quad \sigma<-Re\{a\}\end{cases}$$

ضابطه $X(s)$ به‌صورت دو ضابطه‌ای محاسبه شد. $X(s)$ در ناحیه $\sigma>-Re\{a\}$ همگرا و در ناحیه $\sigma<-Re\{a\}$ واگرا می‌شود. برای بیان ساده‌تر فقط ضابطه $X(s)$ در ناحیه‌ای که همگرا شده را به همراه ناحیه همگرایی می‌نویسیم. بدیهی است در نواحی دیگر که نوشته نشده است، حاصل $X(s)$ واگرا $(X(s)=\infty)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\boxed{x(t)=e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{a+s} \quad , \quad \sigma>-Re\{a\}}$$

۲) $x(t)=-e^{-at}u(-t)$, $a\in\mathbb{C}$

☑ **پاسخ:** همانند مثال قبل داریم:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-at}u(-t)e^{-st}dt \xrightarrow{u(-t)=\begin{cases}0 & , \ t>0 \\ 1 & , \ t<0\end{cases}} X(s)=\int_{-\infty}^{0}-e^{-(a+s)t}dt=\frac{1}{a+s}e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{a+s}(\underbrace{e^{-(a+s)(0)}}_{1}-e^{-(a+s)(-\infty)})$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر s و a را جدا می‌کنیم.

$$e^{-(a+s)(-\infty)}=e^{-(Re\{a\}+\sigma)(-\infty)}\times\underbrace{e^{-j(Im\{a\}+\omega)(-\infty)}}_{\text{نوسانی است و هرگز واگرا نمی‌شود}}$$

$$e^{-(Re\{a\}+\sigma)(-\infty)}=\begin{cases}e^{-\infty}=0\ (\text{همگرا}) & , \ Re\{a\}+\sigma<0 \\ e^{+\infty}=\infty\ (\text{واگرا}) & , \ Re\{a\}+\sigma>0\end{cases}\Rightarrow X(s)=\begin{cases}\frac{1}{a+s}(1-0) & , \ Re\{a\}+\sigma<0 \\ \frac{1}{a+s}(1-\infty) & , \ Re\{a\}+\sigma>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{a+s} & , \ \sigma<-Re\{a\} \\ \infty & , \ \sigma>-Re\{a\}\end{cases}$$

در نتیجه برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ داریم:

$$\boxed{x(t)=-e^{-at}u(-t)\xleftrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{a+s} \quad , \quad \sigma<-Re\{a\}}$$

تذکر: همان‌طور که مشاهده کردید، دو سیگنال $e^{-at}u(t)$ و $-e^{-at}u(-t)$ دارای تبدیل لاپلاس‌هایی با ضابطه یکسان ولی با نواحی همگرایی متفاوت هستند. بنابراین تبدیل لاپلاس بدون ناحیه همگرایی خود معنا نداشته و همواره باید ناحیه همگرایی برای آن ذکر شود.

۳) $x(t)=e^{-at}$, $a\in\mathbb{C}$

☑ **پاسخ:**

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a+s)t}dt=-\frac{1}{a+s}e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=-\frac{1}{a+s}(e^{-(a+s)(+\infty)}-e^{-(a+s)(-\infty)})$$

در دو مثال قبل همگرایی دو عبارت $e^{-(a+s)(+\infty)}$ و $e^{-(a+s)(-\infty)}$ را به صورت زیر بررسی کردیم:

$$e^{-(a+s)(+\infty)}=\begin{cases}0 & , \ Re\{a\}+\sigma>0 \\ \infty & , \ Re\{a\}+\sigma<0\end{cases} \quad , \quad e^{-(a+s)(-\infty)}=\begin{cases}0 & , \ Re\{a\}+\sigma<0 \\ \infty & , \ Re\{a\}+\sigma>0\end{cases}$$

بنابراین $X(s)$ به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$X(s)=\begin{cases}-\frac{1}{a+s}(0-\infty) & , \ Re\{a\}+\sigma>0 \\ -\frac{1}{a+s}(\infty-0) & , \ Re\{a\}+\sigma<0\end{cases}=\begin{cases}\infty & , \ \sigma>-Re\{a\} \\ \infty & , \ \sigma<-Re\{a\}\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید $X(s)$ همواره واگرا می‌شود. بنابراین سیگنال $x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد.

$$\boxed{x(t)=e^{-at}\xleftrightarrow{L}\text{تبدیل لاپلاس ندارد}}$$

۴) $x(t)=\delta(t)$

☑ **پاسخ:**

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\delta(t)e^{-st}}_{\text{غربالی}\ (t=0)}dt=\underbrace{e^{-s(0)}}_{1}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt}_{1}=1$$

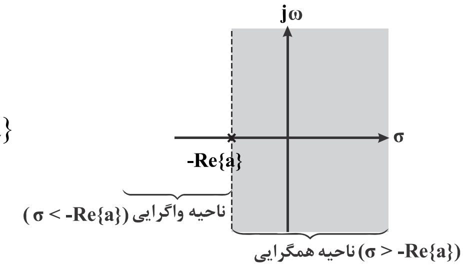
تبدیل لاپلاس سیگنال ضربه به‌صورت یک سیگنال ثابت محاسبه شد که هیچ وابستگی به متغیر s ندارد. بنابراین می‌توان گفت هیچ محدودیتی بر روی متغیر s در رابطه با همگرا شدن $X(s)$ وجود ندارد و $X(s)=۱$ همواره همگرا است. در نتیجه ناحیه همگرایی آن شامل کل صفحه s می‌شود.

$$\boxed{x(t)=\delta(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=۱ \quad \text{کل صفحه } s}$$

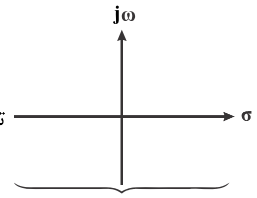
همگرایی تبدیل لاپلاس

در دو فصل قبل درباره همگرایی سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته مطالبی را بیان کردیم. گفتیم که در صورت برقراری شرایط دیریکله برای سیگنال $x(t)$، سری و تبدیل فوریه همگرا خواهند شد. اما در مورد همگرایی تبدیل لاپلاس چه می‌توان گفت؟ طبق مثال‌های حل‌شده در ابتدای فصل، مشاهده کردید که همگرایی تبدیل لاپلاس $X(s)$ به‌طور مستقیم به همگرایی رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ بستگی دارد. در واقع اگر حاصل رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ به‌ازای $s_\circ$هایی همگرا (یعنی یک عدد مختلط و غیربی‌نهایت) شود، $X(s)$ به‌ازای همان $s_\circ$ها همگرا و اگر حاصل این رابطه به‌ازای $s_\circ$هایی واگرا (یعنی بی‌نهایت) شود، $X(s)$ به‌ازای همان $s_\circ$ها واگرا می‌شود. s در حالت کلی یک مقدار مختلط است و همگرایی عبارت $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ فقط به قسمت حقیقی s بستگی دارد و قسمت موهومی آن هیچ نقشی در تعیین همگرا شدن این عبارت ندارد. با توجه به مختلط بودن s، می‌توان $s_\circ$هایی را که باعث همگرا یا واگرا شدن $X(s)$ می‌شوند، در صفحه اعداد مختلط نشان داد. این صفحه از دو محور عمود بر هم تشکیل می‌شود که محور افقی و عمودی آن به ترتیب نشان‌دهنده قسمت حقیقی (σ) و قسمت موهومی (ω) متغیر s است. با این کار در واقع صفحه مختلط s را به سه قسمت ناحیه همگرایی، ناحیه واگرایی و مرز ناحیه همگرایی و واگرایی تقسیم می‌کنیم. مرز ناحیه همگرایی و واگرایی را با یک خط‌چین عمود نشان داده و ناحیه همگرایی را رنگ کرده یا هاشور می‌زنیم. به‌عنوان نمونه ناحیه همگرایی مثال‌های حل‌شده را در صفحه s به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$x(t)=e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=\frac{۱}{s+a}\ \ ,\ \ \sigma>-\mathrm{Re}\{a\}$$

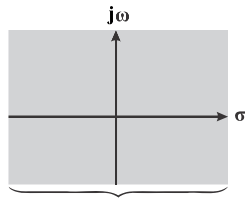


$x(t)=e^{-at}\xleftrightarrow{L}$ تبدیل لاپلاس ندارد



کل صفحه ناحیه واگرایی است و مرزی وجود ندارد.

$x(t)=\delta(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=۱$, s کل صفحه



کل صفحه ناحیه‌همگرایی است و مرزی وجود ندارد.

انواع تبدیل لاپلاس

همان‌طور که گفته شد، تبدیل لاپلاس یعنی $X(s)$ سیگنالی پیوسته از متغیر مستقل s است. تبدیل لاپلاس‌هایی را که در این درس به آن‌ها می‌پردازیم، می‌توان در دو نوع دسته‌بندی کرد:

۱ـ تبدیل لاپلاس گویا

اگر $X(s)$ به‌صورت کسری بوده و صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌هایی برحسب s باشد، چنین تبدیل لاپلاسی، گویا نامیده می‌شود.

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_m s^m+\cdots+a_۲s^۲+a_۱s+a_\circ}{b_n s^n+\cdots+b_۲s^۲+b_۱s+b_\circ}\quad ,\quad a_i,b_i\in\mathbb{C}$$

$N(s)$: چندجمله‌ای صورت ← **درجه صورت:** بزرگترین توان متغیر s در چندجمله‌ای صورت

$D(s)$: چندجمله‌ای مخرج ← **درجه مخرج:** بزرگترین توان متغیر s در چندجمله‌ای مخرج

برای مثال به تبدیل لاپلاس‌های زیر توجه کنید:

$X(s)=\dfrac{s^۲-۳s}{s^۳+۳s+۱}$: درجه صورت $=۲$, درجه مخرج $=۳$, $Y(s)=\dfrac{\frac{۱}{۲}s-s^۴}{\sqrt{۲}s-۳js}$: درجه صورت $=۴$, درجه مخرج $=۱$

$W(s)=\dfrac{\sqrt{۲s}-۱}{s-۱}\rightarrow$ گویا نیست، چراکه صورت به فرم چندجمله‌ای نمی‌باشد.

۲ـ تبدیل لاپلاس شبه‌گویا

اگر در تبدیل لاپلاس گویا، عبارت‌هایی به فرم $e^{t_0 s}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ ظاهر شود، تبدیل لاپلاس، شبه‌گویا نامیده می‌شود. برای مثال به تبدیل لاپلاس‌های زیر توجه کنید:

$$X(s)=\frac{e^{-s}(s-1)}{s^2-s-1}:$$ درجه صورت $=1$, درجه مخرج $=2$

$$Y(s)=\frac{\sqrt{s}-1}{e^{2s}(s+1)} \rightarrow$$ گویا نیست در نتیجه شبه‌گویا نیز نمی‌باشد.

تذکر۱: در اغلب موارد تبدیل لاپلاس‌هایی که در این درس خواهید دید، از نوع گویا هستند و در مواردی نادر (به ویژه در کنکور دکتری) تبدیل لاپلاس‌های شبه‌گویا نیز مشاهده می‌شوند.

بعد از معرفی انواع تبدیل لاپلاس‌ها، به تعریف صفر و قطب می‌پردازیم. صفر و قطب مفهوم بسیار مهمی در تبدیل لاپلاس‌های گویا و شبه‌گویا محسوب می‌شوند. در ادامه درس هرجا از لفظ تبدیل لاپلاس استفاده شود، منظور تبدیل لاپلاس گویا است و در صورت شبه‌گویا بودن تبدیل لاپلاس، به آن اشاره خواهد شد.

صفر و قطب

تعریف صفر $X(s)$

به s_iهایی که به‌ازای آن‌ها $X(s)=0$ می‌شوند، صفر (zero) تبدیل لاپلاس گفته می‌شود و آن را با z_i نشان می‌دهیم:

$$\boxed{z_i=\{s_i \mid \lim_{s\to s_i} X(s)=0\}}$$

ممکن است $X(s)\big|_{s=s_i}$ مبهم شود، به همین دلیل در تعریف صفر، از $\lim$ استفاده می‌شود تا در صورت لزوم رفع ابهام انجام شود.

نحوه به‌دست آوردن صفر تبدیل لاپلاس $X(s)$

در تبدیل لاپلاس گویا ($n=$ درجه مخرج، $m=$ درجه صورت، $X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$) با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی صفرها را به‌دست آورد.

گام اول: صورت را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های صورت $X(s)$، صفرهای $X(s)$ هستند. زیرا به‌ازای ریشه‌های صورت، صورت صفر شده و در نتیجه $X(s)=0$ می‌شود.

گام دوم: اگر (درجه صورت $(m) > (n)$ درجه مخرج) باشد، $X(s)$ یک صفر مرتبه $(n-m)$ در $s=\pm\infty$ دارد. زیرا در این‌صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{s\to\pm\infty} X(s)=0$ است.

تذکر۲: اگر تبدیل لاپلاس شبه‌گویا باشد، فارغ از درجه صورت و مخرج، $X(s)$ می‌تواند صفرهایی در $s=\pm\infty$ داشته باشد. کافی است صحت رابطه $\lim_{s\to\pm\infty} X(s)=0$ را بررسی کنید. در این حالت ممکن است صفری در $s=+\infty$ یا $s=-\infty$ داشته باشد.

تعریف قطب $X(s)$

به s_iهایی که به‌ازای آن‌ها $X(s)=\pm\infty$ می‌شود، قطب (pole) تبدیل لاپلاس گفته می‌شود و آن را با p_i نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{p_i=\{s_i \mid \lim_{s\to s_i} X(s)=\pm\infty\}}$$

نحوه به‌دست آوردن قطب تبدیل لاپلاس $X(s)$

در تبدیل لاپلاس گویا ($n=$ درجه مخرج، $m=$ درجه صورت، $X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$) با انجام مراحل زیر می‌توان تمامی قطب‌ها را به‌دست آورد.

گام اول: مخرج را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ریشه‌های مخرج $X(s)$، قطب‌های $X(s)$ هستند. زیرا به‌ازای ریشه‌های مخرج، مخرج صفر شده و در نتیجه $X(s)=\pm\infty$ می‌شود.

گام دوم: اگر (درجه صورت $(m) > (n)$ درجه مخرج) باشد، $X(s)$ یک قطب مرتبه $(m-n)$ در $s=\pm\infty$ دارد. زیرا در این‌صورت با توجه به قوانین حدگیری در چندجمله‌ای‌ها، $\lim_{s\to\pm\infty} X(s)=\pm\infty$ است.

تذکر۳: اگر تبدیل لاپلاس شبه‌گویا باشد، فارغ از درجه صورت و مخرج، $X(s)$ می‌تواند قطب‌هایی در $s=\pm\infty$ داشته باشد. کافی است صحت رابطه $\lim_{s\to\pm\infty} X(s)=\pm\infty$ را بررسی کنید. در این حالت ممکن است قطبی در $s=+\infty$ یا $s=-\infty$ داشته باشد.

نکته۱: صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین صفرها و قطب‌های برابر را باید حذف کرد. در صورتی‌که قبل از محاسبه صفرها و قطب‌ها کسر تبدیل لاپلاس را تا حد امکان ساده کنیم، دیگر صفرها و قطب‌هایی که با یکدیگر برابر هستند، محاسبه نخواهند شد.

نکته۲: تعداد صفرها با تعداد قطب‌های تبدیل لاپلاس گویا با احتساب تعداد تکرار و صفرها و قطب‌های در بی‌نهایت، برابر است (صفر و قطب در $s=\pm\infty$ را در کنار هم و یک واحد در نظر می‌گیریم).

مثال۲: صفرها و قطب‌های تبدیل لاپلاس‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $X(s)=\dfrac{s-1}{s^2-1}$

☑ **پاسخ:** مشخص است که $X(s)$ قابل ساده شدن است. ابتدا آن را ساده می‌کنیم.

$$X(s)=\frac{s-1}{(s-1)(s+1)}=\frac{1}{s+1}$$

ریشه‌های صورت صفر هستند ← صورت ریشه‌ای ندارد.

ریشه‌های مخرج قطب هستند ← $s+1=0 \Rightarrow p_1=-1$

$0=$ درجه صورت $<1=$ درجه مخرج ← $X(s)$ یک صفر مرتبه $1-0=1$ در $s=\pm\infty$ دارد.

$X(s)$ یک قطب $(p_1=-1)$ و یک صفر در $s=\pm\infty$ دارد. همان‌طور که می‌بینید تعداد صفرها با تعداد قطب‌ها برابر است.

تذکر: برای یافتن صفرها و قطب‌های در بی‌نهایت نیازی به بررسی درجه صورت و مخرج نیست. بلکه کافی است ریشه‌های مخرج را به‌عنوان قطب و ریشه‌های صورت را به به‌عنوان صفر به‌دست آورد. در نهایت تبدیل لاپلاس به اندازه اختلاف تعداد ریشه‌های مخرج و صورت با احتساب درجه تکرار ریشه‌ها در بی‌نهایت قطب یا صفر خواهد داشت.

---

۲) $X(s)=\dfrac{s^2-1}{s^2+4s+3}$

☑ **پاسخ:** ریشه‌های صورت صفر هستند ← $s^2-1=0 \Rightarrow s^2=1 \Rightarrow z_1=1\ ,\ z_2=-1$

ریشه‌های مخرج قطب هستند ← $s^2+4s+3=0 \Rightarrow (s+3)(s+1)=0 \Rightarrow p_1=-3\ ,\ p_2=-1$

مشاهده می‌شود که صفر در $s=-1\ \ (z_2=-1)$ و قطب در $s=-1\ \ (p_2=-1)$ با یکدیگر برابر هستند. بنابراین اثر همدیگر را خنثی کرده و حذف می‌شوند. توجه کنید، اگر قبل از محاسبه صفرها و قطب‌ها کسر $X(s)$ را ساده می‌کردیم، دیگر صفر و قطب در $s=-1$ به‌دست نمی‌آمد.

$$X(s)=\frac{s^2-1}{s^2+4s+3}=\frac{(s-1)(s+1)}{(s+3)(s+1)}=\frac{s-1}{s+3}\ \longrightarrow \begin{cases} s-1=0 \rightarrow z_1=1 \\ s+3=0 \rightarrow p_1=-3 \end{cases}$$

بنابراین $X(s)$ یک صفر در $s=1\,(z_1=1)$ و یک قطب در $s=-3\,(p_1=-3)$ دارد. چون تعداد ریشه‌های صورت و مخرج برابر است، بنابراین $X(s)$ در بینهایت قطب یا صفری نخواهد داشت. این موضوع از برابری درجه صورت و مخرج نیز مشهود است.

---

۳) $X(s)=\dfrac{s+1}{s^2-2s+1}$

☑ **پاسخ:** ریشه‌های صورت صفر هستند← $s+1=0 \Rightarrow s=-1 \Rightarrow z_1=-1$

ریشه‌های مخرج قطب هستند ← (مرتبه دوم) $p_1=1 \Leftarrow$ (مرتبه دوم) $s^2-2s+1=0 \Rightarrow (s-1)^2=0 \Rightarrow s=1$

$X(s)$ یک صفر در $s=-1\ \ (z_1=-1)$ و یک قطب مرتبه دوم در $s=1\ \ (p_1=1)$ دارد. اختلاف تعداد ریشه‌های مخرج و صورت با احتساب تعداد تکرار ریشه‌ها برابر $2-1=1$ می‌شود. بنابراین $X(s)$ باید یک صفر مرتبه اول در $s=\pm\infty$ داشته باشد تا تعداد صفرها و قطب‌ها برابر شوند. از اختلاف درجه صورت $(=1)$ و درجه مخرج $(=2)$ نیز مشهود است که $X(s)$ یک صفر مرتبه اول $(2-1=1)$ در $s=\pm\infty$ دارد.

$$X(s)\begin{cases} \xrightarrow{\text{zeroes}} z_1=-1\ ,\ z_2=\pm\infty \\ \xrightarrow{\text{poles}} p_1=1 \ \text{(مرتبه دوم)}:\text{(۲واحد قطب)} \end{cases}$$

---

۴) $X(s)=\dfrac{e^s(s-j)}{s^2+1}$

☑ **پاسخ:** تبدیل لاپلاس شبه‌گویا است. ابتدا بدون در نظر گرفتن عامل e^s، ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم.

ریشه‌های صورت صفر هستند← $s-j=0 \Rightarrow s=j \Rightarrow z_1=j$

ریشه‌های مخرج قطب هستند ← $s^2+1=0 \Rightarrow s^2=-1 \Rightarrow s=\pm j \Rightarrow p_1=j\ ,\ p_2=-j$

$z_1=j$ و $P_1=j$ یکسان بوده و حذف می‌شوند.

تبدیل لاپلاس شبه‌گویاست و فارغ از درجه صورت و مخرج می‌تواند صفرها و قطب‌هایی در $s=\pm\infty$ داشته باشد. کافی است حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{s\to\pm\infty} X(s)=\lim_{s\to\pm\infty}\frac{e^{s}(s-j)}{s^{۲}+۱}=\begin{cases}۰ & , \ s=-\infty\\ \infty & , \ s=+\infty\end{cases}$$

بنابراین $s=-\infty$ صفر و $s=+\infty$ قطب $X(s)$ محسوب می‌شود.

$$X(s)\begin{cases}\xrightarrow{\text{zeroes}} z_{۱}=-\infty\\[2ex] \xrightarrow{\text{poles}} p_{۱}=-j \ , \ p_{۲}=+\infty\end{cases}$$

تذکر: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، لزوماً در تبدیل لاپلاس شبه‌گویا تعداد صفرها و قطب‌ها با یکدیگر برابر نیستند.

نکته ۳: با داشتن تمامی صفرها و قطب‌های محدود می‌توان ضابطه $X(s)$ را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\boxed{X(s)=k\frac{\prod_{i}(s-z_i)}{\prod_{j}(s-p_j)}}$$

z_i ها و p_j ها به‌ترتیب صفرها و قطب‌های $X(s)$ هستند. برای تعیین k (ضریب ثابت $X(s)$) و ناحیه همگرایی $X(s)$، نیاز به اطلاعات بیشتری است.

مثال ۳: ضابطه تبدیل لاپلاس $X(s)$ را که یک صفر در $s=-۱$ و دو قطب در $s=+۱$ و $s=-۲$ دارد و $X(۰)=۳$ می‌باشد، تعیین کنید.

پاسخ: طبق نکته بیان شده، ضابطه $X(s)$ به‌صورت مقابل تعیین می‌شود:

$$X(s)=k\frac{(s-(-۱))}{(s-(-۲))(s-۱)}=k\frac{s+۱}{(s+۲)(s-۱)}$$

طبق رابطه $X(۰)=۳$ برای تعیین k، کافی است به‌جای s، صفر جایگذاری کنیم.

$$X(۰)=k\frac{۰+۱}{(۰+۲)(۰-۱)}=۳\Rightarrow\frac{k}{-۲}=۳\Rightarrow k=-۶$$

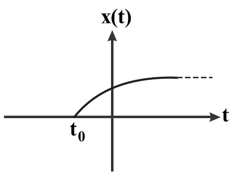
در نتیجه ضابطه $X(s)$ به‌صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$X(s)=\frac{-۶(s+۱)}{(s+۲)(s-۱)}$$

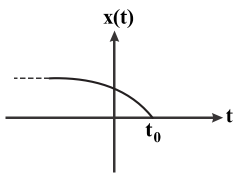
دسته‌بندی انواع سیگنال‌ها از نظر ناحیه همگرایی

سیگنال‌های زمانی را با توجه به رفتار آن‌ها در بازه‌های زمانی مختلف، می‌توان به چهار دسته، طبقه‌بندی کرد. از این طبقه‌بندی در بررسی ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زمانی استفاده خواهیم کرد.

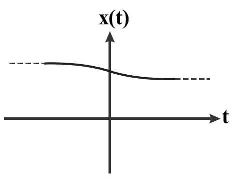
۱ـ سیگنال‌های دست‌راستی (راست‌سو): سیگنال‌هایی که از سمت چپ محدود و از سمت راست نامحدود هستند. به عبارت دیگر سیگنال‌هایی که برای $t<t_۰$ صفر بوده و تا $t=+\infty$ ادامه دارند.



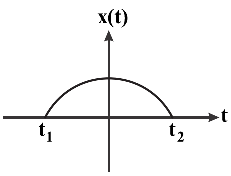
۲ـ سیگنال دست‌چپی (چپ سو): سیگنال‌هایی که از سمت راست محدود و از سمت چپ نامحدود هستند. به عبارت دیگر سیگنال‌هایی که برای $t>t_۰$ صفر بوده و از $t=-\infty$ شروع می‌شوند.



۳ـ سیگنال‌های دوطرفه (دوسمتی): سیگنال‌هایی که از دو سمت نامحدود هستند.
به عبارت دیگر از $t=-\infty$ شروع و تا $t=+\infty$ ادامه دارند.



۴ـ سیگنال‌های دوره محدود: سیگنال‌هایی که از سمت راست و چپ محدود باشند. به عبارت دیگر سیگنال‌هایی که برای $t<t_۱$ و $t>t_۲$ صفر باشند.



مدرسان شریف

فصل هشتم

«تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس»

بعد از بررسی ۴ ابزار ریاضی یعنی سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z آموختیم که چگونه معادل فرکانسی سیگنال‌های زمانی مختلف را به‌دست آوریم. حال در این فصل به کمک این ابزار، سیستم‌های LTI را در حوزه فرکانس تجزیه و تحلیل می‌کنیم. تمامی روابط و مفاهیمی که در فصل سوم برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان مطرح شده بودند، در حوزه فرکانس بررسی می‌شوند. خواهید دید که روابط حوزه فرکانس بسیار ساده‌تر بوده و کاربرد بیشتری دارند. حتی در مواردی سؤالاتی که در حوزه زمان قابل حل نیستند در حوزه فرکانس به راحتی حل می‌شوند. این فصل مهمترین فصل این کتاب بوده و به همراه فصل پنجم بیشترین سهم از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد.

این فصل از چهار درسنامه تشکیل شده است. در درسنامه اول روش‌های مختلف توصیف سیستم‌ها را بیان خواهیم کرد. با این روش‌ها به‌طور اجمالی در فصل دوم آشنا شدید. درسنامه بعدی مربوط به تعیین خواص سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس خواهد بود. در درسنامه بعدی که مهمترین بخش این کتاب است پاسخ سیستم‌های LTI را به انواع مختلف ورودی‌ها در حوزه فرکانس به‌دست خواهیم آورد. در نهایت در درسنامه چهارم فیلترها را بررسی خواهیم کرد.

فصل هشتم در یک نگاه و بودجه‌بندی سؤالات کنکور

کنکور ارشد		کنکور دکتری	
سال	تعداد	سال	تعداد
۱۳۹۰	۵	۱۳۹۰	—
۱۳۹۱	۴	۱۳۹۱	۷
۱۳۹۲	۳	۱۳۹۲	۴
۱۳۹۳	۵	۱۳۹۳	۵
۱۳۹۴	۴	۱۳۹۴	۵
۱۳۹۵	۴	۱۳۹۵	—
۱۳۹۶	۳	۱۳۹۶	۴
۱۳۹۷	۵	۱۳۹۷	۴
۱۳۹۸	۲	۱۳۹۸	۱
۱۳۹۹	۴	۱۳۹۹	۵
۱۴۰۰	۵	۱۴۰۰	۴

✓ **پیش‌نیاز این فصل:** تمامی فصل‌های قبلی

درصدی که با خواندن این فصل انتظار می‌رود کسب کنید	سطح اهمیت	سطح سؤالات
۳۵ درصد	بسیار بالا	متوسط و دشوار

در فصل دوم، سیستم‌های LTI را معرفی و دلیل اهمیت این سیستم‌ها را روشن کردیم. تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس به مراتب ساده‌تر از حوزه زمان است. در این فصل با استفاده از ابزارهای ریاضی سری و تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z، سیستم‌های LTI را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم. مباحث این فصل شامل چهار بخش نمایش سیستم‌های LTI، تحلیل خواص سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس، محاسبه خروجی سیستم‌های LTI و فیلتر می‌باشد. این فصل مهم‌ترین فصل در کنکورهای ارشد و دکتری محسوب شده و همه ساله بیشترین سهم از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد.

درسنامه (۱): نمایش سیستم‌های LTI

سیستم‌های LTI را می‌توان به چهار فرم جبری، توصیفی، بلوک دیاگرامی و معادلاتی نمایش داد. از بین این چهار فرم، دو فرم آخر اهمیت بالاتری دارند. برای تحلیل سیستم‌های LTI چه در حوزه فرکانس و چه در حوزه زمان، ابتدا باید با این چهار فرم آشنا شد.

نمایش جبری

نمایش جبری، رابطه بین ورودی و خروجی سیستم‌های LTI را به صورت یک رابطه جبری بیان می‌کند. متداول‌ترین نوع نمایش سیستم‌های LTI و به‌طور کلی هر نوع سیستمی، به‌صورت جبری است. برای نمایش جبری سیستم‌های LTI تنها می‌توان از عملگرهایی استفاده کرد که خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان سیستم را حفظ می‌کنند. به مثال‌های زیر که نمایش جبری چند سیستم LTI است دقت کنید:

الف) $y(t-2)=x(t-1)$ **ب)** $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ **ج)** $Y(j\omega)=X(j\omega)G(j\omega)$ **د)** $Y(z)=X(z)z^{-2}$ **هـ)** $y(t)=x(t)*\delta(t-1)$

توجه کنید مثال‌های بالا نمایش جبری یک سیستم LTI هستند؛ زیرا عملگرهای جبری اعمال‌شده روی ورودی و خروجی، خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان سیستم را حفظ می‌کنند.

نمایش توصیفی

اگر رابطه بین ورودی و خروجی در یک سیستم LTI با استفاده از جملاتی بیان شده باشد که خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان را حفظ می‌کنند، سیستم را به صورت توصیفی نمایش داده‌ایم. به‌طور کلی هر سیستمی را می‌توان به این شکل نمایش داد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) سیستمی با پاسخ ضربه $\delta(t-1)$: این عبارت نمایش توصیفی یک سیستم LTI است.

دقت کنید لفظ پاسخ ضربه تنها برای سیستم‌های LTI استفاده می‌شود.

به‌عنوان مثال در تست ۵۲ فصل دوم کارشناسی ارشد سال ۹۴، برای یافتن گزینه صحیح باید توجه می‌کردید که لفظ پاسخ ضربه تنها مختص سیستم‌های LTI است و برای سیستم‌های غیر LTI از مفهوم پاسخ به ورودی ضربه واحد استفاده می‌کنیم.

ب) سیستمی که ورودی را با یک سیگنال دلخواه مستقل از ورودی کانولوشن کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی یک سیستم LTI است.

تذکر۱: اگر سیگنال دلخواه، مستقل از ورودی نباشد، سیستم LTI نخواهد بود، مانند $y(t)=x(t)*h(t)x(t)$.

ج) سیستمی پیوسته که ورودی را مجذور کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی برای یک سیستم LTI نیست؛ زیرا اگر ورودی به توان برسد خاصیت خطی حفظ نمی‌شود.

د) سیستمی گسسته که در ورودی، یک واحد تأخیر زمانی ایجاد کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی یک سیستم LTI است؛ زیرا می‌دانیم تأخیر زمانی، خاصیت خطی و تغییرناپذیری با زمان را حفظ می‌کند.

هـ) سیستم پیوسته‌ای که در ورودی، یک واحد تأخیر فرکانسی ایجاد کرده و به خروجی منتقل می‌کند: این عبارت نمایش توصیفی برای یک سیستم LTI نیست؛ زیرا می‌دانیم تأخیر فرکانسی معادل ضرب یک سیگنال نمایی در ورودی در حوزه زمان است و چنین سیستمی خاصیت تغییرناپذیری با زمان را حفظ نمی‌کند.

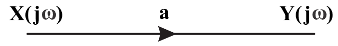
تذکر۲: در صورتی‌که در سؤالی با نمایش توصیفی یک سیستم برخورد کردید، ابتدا باید نمایش جبری سیستم را به‌دست آورده و در قدم بعدی خواسته‌های سؤال را به‌دست آورید. برای مثال نمایش جبری سیستم‌های الف تا هـ از روی نمایش توصیفی آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

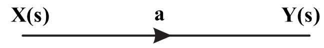
الف) $y(t)=x(t)*\delta(t-1)$ یا $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau-1)d\tau$ **ب)** $y(t)=x(t)*h(t)$ یا $y[n]=x[n]*h[n]$

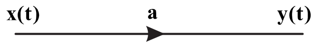
ج) $y(t)=x^2(t)$ **د)** $y[n]=x[n-1]$ **هـ)** $Y(j\omega)=X(j(\omega-1))$ یا $Y(s)=X(s-1)$

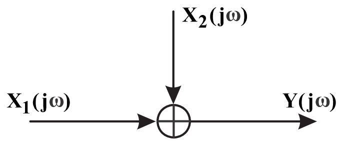
نمایش بلوک دیاگرامی

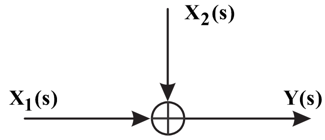
نمایش بلوک دیاگرامی در واقع استفاده از شکل‌هایی استاندارد برای بیان رابطه ورودی و خروجی در یک سیستم است. هر نوعی از سیستم‌ها را می‌توان به‌صورت بلوک دیاگرام نمایش داد. اگر رابطه سیستمی به‌صورت بلوک دیاگرام بیان شود، ابتدا باید نمایش جبری سیستم را از روی نمایش بلوک دیاگرامی سیستم به‌دست آوریم. معادل جبری هر بلوک دیاگرام را در حوزه زمان و فرکانس می‌توانید در جدول زیر مشاهده کنید. توجه کنید بلوک دیاگرام‌های رسم‌شده در حوزه فرکانس (به غیر از عملگر ضرب) معادل بلوک دیاگرام حوزه زمان است.

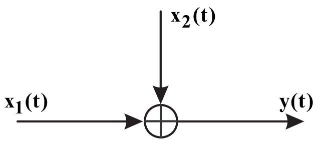
<table>
<tr><th>حوزه فرکانس</th><th>حوزه زمان</th></tr>
<tr><td colspan="2">عملگر ضرب اسکالر (یکسان برای پیوسته و گسسته)</td></tr>
<tr><td>


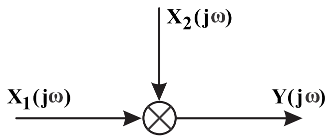
معادل جبری: $Y(j\omega)=aX(j\omega)$


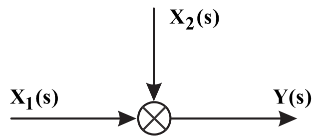
معادل جبری: $Y(s)=aX(s)$
</td><td>


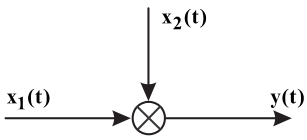
معادل جبری: $y(t)=ax(t)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">عملگر جمع (یکسان برای پیوسته و گسسته)</td></tr>
<tr><td>


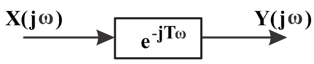
معادل جبری: $Y(j\omega)=X_1(j\omega)+X_2(j\omega)$


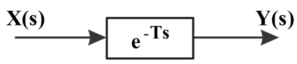
معادل جبری: $Y(s)=X_1(s)+X_2(s)$
</td><td>


معادل جبری: $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">عملگر ضرب (یکسان برای پیوسته و گسسته)</td></tr>
<tr><td>


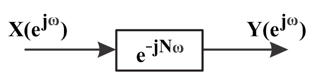
معادل جبری: $Y(j\omega)=X_1(j\omega)X_2(j\omega)$


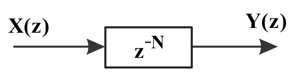
معادل جبری: $Y(s)=X_1(s)X_2(s)$
تذکر: بلوک دیاگرام‌های رسم‌شده در حوزه فرکانس مختص عملگر ضرب در حوزه فرکانس هستند و معادل عملگر ضرب در حوزه زمان محسوب نمی‌شوند. بلوک دیاگرام فرکانسی که معادل بلوک دیاگرام عملگر ضرب در حوزه زمان باشد، اهمیت چندانی ندارد.
</td><td>


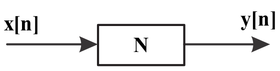
معادل جبری: $y(t)=x_1(t)x_2(t)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه T مختص حالت پیوسته</td></tr>
<tr><td>


معادل جبری: $Y(j\omega)=e^{-jT\omega}X(j\omega)$


معادل جبری: $Y(s)=e^{-Ts}X(s)$
</td><td>


معادل جبری: $y(t)=x(t-T)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">عملگر تأخیر زمانی به مقدار دلخواه N مختص حالت گسسته</td></tr>
<tr><td>


معادل جبری: $Y(e^{j\omega})=e^{-jN\omega}X(e^{j\omega})$


معادل جبری: $Y(z)=z^{-N}X(z)$
</td><td>


معادل جبری: $y[n]=x[n-N]$
</td></tr>
</table>