# فصل اول

## «معرفی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل هندسی»

### درسنامه (۱): مفاهیم اولیه برنامه‌ریزی خطی

در جهان رقابتی امروز، بقای یک سازمان به تصمیمات مدیرانش وابسته است. اما با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمان‌ها و شرکت‌ها امر تصمیم‌گیری و هم‌چنین تخصیص منابع موجود بین فعالیت‌های بخش‌های مختلف آن به منظور دستیابی به حداکثر کارایی، مشکل شده و نیاز به سیستماتیک نمودن تصمیمات است. یکی از دانش‌هایی که با بسیاری از مسائل محوری تصمیم‌گیری مدیران در ارتباط است، تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی) است. اگرچه این علم هنوز در زمره‌ی علم نو محسوب می‌شود ولی به خوبی توانایی خود را در حل مسائلی مثل برنامه‌ریزی تولید، تخصیص منابع، کنترل موجودی، تبلیغات و ... نشان داده است.

### معرفی برنامه‌ریزی خطی

**به تخصیص منابع محدود به فعالیت‌های تعریف شده جهت افزایش بازدهی و انتخاب بهترین راه حل «برنامه‌ریزی خطی» می‌گویند.** در واقع وجود منابع محدود موجب محدود شدن گزینه‌های تصمیم‌گیری می‌شود و هدف از برنامه‌ریزی خطی، انتخاب بهترین گزینه از بین گزینه‌های محدود شده است. هر مدل برنامه‌ریزی خطی **دارای تعدادی محدودیت خطی تشکیل یافته از متغیرهای مستقل** است.

متغیرهای مستقل متغیرهایی هستند که مقدار آن‌ها توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند.

هم‌چنین هر مدل با بهینه کردن متغیر وابسته‌ای که به صورت خطی با متغیرهای مستقل در ارتباط است، تعریف می‌شود.

متغیرهای وابسته معمولاً در تابع هدف که اغلب بیانگر مفاهیم اقتصادی مانند سود، هزینه، درآمد، تولید، فروش، مسافت، زمان و ... است، ارائه می‌گردند.

**متغیرهای مستقل** در برنامه‌ریزی خطی به عنوان **متغیرهای تصمیم** شناخته می‌شوند که مقدارشان توسط تصمیم‌گیرنده بعد از حل مدل به دست می‌آید. معمولاً این متغیرها در مدل با $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به نمایش گذاشته می‌شوند.

مدل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{Max(Min)}: Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

$$\text{Subject to (s.t)}:$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \;(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)\; b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \;(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)\; b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \;(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)\; b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد (نامقید)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادل}} \text{Max(Min)}: Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\text{s.t}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)\; b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا نامقید} \qquad j = 1, \dots, n$$

در مدل گفته شده، $C_j$ و $b_i$ و $a_{ij}$ **مقادیر ثابتی** هستند و $x_j$ ها **متغیرهای تصمیم‌گیری (فعالیت‌ها)** نام دارند. $C_j$ها را **ضرایب هزینه یا سودآوری** و $b_i$ها را **اعداد سمت راست** می‌نامیم که **بیان‌کننده مقدار منابع یا امکانات موجود ما** می‌باشد. $b_i$ها می‌توانند مواد اولیه، زمان، ظرفیت ماشین‌آلات و ... باشند.

هم‌چنین $a_{ij}$ها بیانگر مقداری از منبع $i$ام است که برای انجام یک واحد از فعالیت $j$ ام مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه شده از سه قسمت تشکیل می‌شود:

۱) **تابع هدف:** تابعی ریاضی است که **نشان‌دهنده خواسته تصمیم‌گیرنده به منظور حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه** است. تابع هدف برنامه‌ریزی خطی عمدتاً به یکی از دو صورت مقابل است:

$$MaxZ=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j \quad \text{یا} \quad MinZ=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j$$

در اینجا $Z$ **متغیر وابسته‌ای** است که به وسیله‌ی **متغیرهای مستقل $x_j$** تعیین می‌شود و **هدف از مدل برنامه‌ریزی خطی به دست آوردن مقادیری از $x_j$ هاست که مقدار $Z$ حداکثر یا حداقل می‌شود.**

۲) **محدودیت:** محدودیت‌ها که در مدل بالا به صورت $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b_i$ می‌باشند، نشان‌دهنده کل مصرف فعالیت‌ها از منبع $i$ ام است و آن‌ها را **محدودیت‌های کارکردی** می‌نامیم.

وجود محدودیت‌ها در مدل موجب محدود شدن مقادیر قابل انتخاب برای متغیرهای تصمیم‌گیری ($x_j$ها) می‌شود.

۳) **وضعیت متغیرهای تصمیم:** متغیر تصمیم با توجه به مصداق تعریف شده برای آن به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

الف) متغیر تصمیم غیرمنفی ($x_j\ge 0$) ب) متغیر تصمیم غیرمثبت ($x_j\le 0$).

ج) متغیر تصمیم آزاد در علامت (نامقید: $x_j$): در این حالت $x_j$ می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر را انتخاب کند.

برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی از **شکل ماتریسی متغیرها** استفاده می‌شود که برای مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&Max(Min): Z=CX\\&\qquad AX(\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b\\&\qquad X\ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد}\end{aligned}$$

که در آن:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n} \qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}_{n\times 1},\ C=[C_1,C_2,\ldots,C_n]_{1\times n},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

**فرم کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)**

مدل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{تابع هدف: } Max\ (Min): Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n$$

Subject to:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b_m\end{cases}$$

$$x_1,\ldots,x_n\ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}&Max\ (Min): Z=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j\\&S.t.\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge)b_i \qquad for\quad i=1,\ldots,m\\&x_j\ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد} \qquad for\quad j=1,\ldots,n\end{aligned}$$

در این مدل، $C_j$ و $b_i$ و $a_{ij}$ **مقادیر ثابتی** هستند و **$x_j$ ها متغیرهای تصمیم‌گیری (فعالیت‌ها)** نام دارند. **$C_j$ها را ضرایب هزینه یا سودآوری** و $b_i$ها را **اعداد سمت راست** می‌نامیم. **$a_{ij}$ها را ضرایب تکنولوژی** می‌نامیم و اگر $b_i$ بیانگر **منبع $i$ ام** باشد، $a_{ij}$ بیانگر **مقداری از منبع $i$ ام است که برای انجام یک واحد از فعالیت $j$ ام** مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع $z=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ را تابع هدف (objective Function) می‌نامیم که **نشان‌دهنده خواسته تصمیم‌گیرنده به منظور حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه است.** محدودیت $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\le b_i$ **نشان‌دهنده کل مصرف فعالیت‌ها از منبع $i$ ام است و آنها را محدودیت‌های کارکردی می‌نامیم.**

**مفروضات برنامه‌ریزی خطی**

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) باید در **چهار فرض** زیر صدق نماید:

**الف) فرض تناسب:** این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم **مستقل از همدیگر** هستند و **آهنگ تغییر تابع هدف و محدودیت‌ها متناسب با تغییرات متغیر** است. نتایج حاصل از فرض تناسب به صورت زیر می‌باشد:

۱ـ تابع هدف و محدودیت‌ها خطی می‌باشند.

۲ـ همه متغیرها توان اول هستند.

۳ـ مقدار مشتق تابع هدف نسبت به هر یک از متغیرها همواره مقدار ثابتی بوده و برابر ضریب هزینه $(C_j)$ آن متغیر خواهد بود.

۴ـ هر فعالیت از فعالیت‌های دیگر مستقل است؛ بدین معنا که کالاها مکمل یا جانشین یکدیگر نبوده و تغییر قیمت یک فعالیت بر فعالیت دیگر بی‌اثر است.

**ب) فرض جمع‌پذیری:** بدین معنی است که در تابع هدف و محدودیت‌ها رابطه ریاضی بین متغیرها به صورت **جمع جبری** بیان می‌گردد. طبق این فرض، **رابطه متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد** یعنی **رابطه‌ی حاصل‌ضربی بین متغیرها وجود ندارد.**

**ج) فرض بخش‌پذیری:** این فرض بیان می‌کند که **متغیرهای تصمیم فقط مقادیر پیوسته** را اختیار می‌کنند.

**د) فرض معین بودن:** مقادیر پارامترهای $C_j$ ، $b_i$ و $a_{ij}$ **اعدادی ثابت و مشخص** می‌باشند و **نمی‌توانند** حالت‌های **احتمالی یا تصادفی** داشته باشند.

**مثال۱: یکی از محدودیت‌های موجود در یک مدل به صورت $x_1^2 + x_2 + x_2x_3 = 10$ می‌باشد، کدام‌یک از مفروضات برنامه‌ریزی خطی در این محدودیت نقض شده است؟**

۱) معین بودن　　۲) تناسب　　۳) جمع‌پذیری　　۴) گزینه ۲ و ۳

**پاسخ:** گزینه «۴» از آنجایی که در این محدودیت $x_1^2$ وجود دارد، پس میزان مصرف منبع این قید (یعنی ۱۰) متناسب با توان دوم $x_1$ است، مثلاً اگر $x_1 = 2$ در این صورت $x_1^2 = 4$ یعنی ۴ واحد از منبع مصرف می‌گردد. فرض تناسب ایجاب می‌کند که توان متغیرها در تمام قسمتهای مدل، ۱ باشد. همچنین به دلیل وجود $x_2x_3$ فرض جمع‌پذیری نقض شده است.

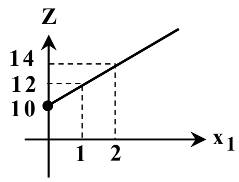
---

**مثال ۲: در تابع هدف $Z = 2x_1 + 3x_2 + 10$ کدام‌یک از مفروضات برنامه‌ریزی خطی نقض شده است؟**

۱) جمع‌پذیری　　۲) تناسب　　۳) بخش‌پذیری　　۴) همه فرض‌ها رعایت شده است.

**پاسخ:** گزینه «۲»

| $x_1$ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| Z | ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ |




ملاحظه می‌شود که تغییرات Z متناسب با تغییرات $x_1$ نمی‌باشد.

---

**نکته ۱: مدل برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح (I.L.P)** یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که در آن **فرض بخش‌پذیری** نقض شده است، زیرا متغیرها **مجازند فقط مقادیر صحیح** را اختیار کنند.

**تذکر ۱: فرض‌های تناسب و جمع‌پذیری** را فرض‌های خطی می‌گوییم، یعنی اگر هر کدام نقض شوند، **مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (N.L.P)** خواهد بود.

## مدل‌سازی

مهم‌ترین موضوع در برخورد با یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی، مدل‌سازی صحیح آن می‌باشد. مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی خطی شامل مراحل زیر است:

**۱) تعریف متغیرهای تصمیم:** متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که مقادیر آن‌ها **مجهول** است و می‌خواهیم در موردشان **تصمیم‌گیری** کنیم.

**۲) تعریف تابع هدف:** تابع هدف بیانگر هدفی است که مسئله دنبال می‌کند. **هدف** بیان شده مسئله می‌تواند **حداکثر کردن سود (Max سازی)**، **حداقل کردن هزینه‌ها (Min سازی)** و ... باشد.

**۳) استخراج محدودیت‌ها: محدودیت‌ها** برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی در حالت کلی دربرگیرنده **روابط میان «متغیرهای تصمیم»، روابط میان «متغیرهای تصمیم و منابع کم‌یاب»** و **روابط میان «متغیرهای تصمیم با هدف مسئله»** است.

یکی از معروف‌ترین مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، **مدل تولید** است.

در این قسمت به بیان یک مثال در زمینه‌ی تولید می‌پردازیم:

**مثال۳: در یک کارگاه دو نوع لیوان (شربت‌خوری و تجملی) تولید می‌شود. زمان تولید هر جعبه لیوان شربت‌خوری ۴ دقیقه و هر جعبه لیوان تجملی ۳ دقیقه است. هر جعبه لیوان شربت‌خوری ۱۰ فوت مکعب و هر جعبه لیوان تجملی ۲۰ فوت مکعب فضای انبار را اشغال می‌کند. هم‌چنین می‌دانیم که لیوان شربت‌خوری بیشتر از ۹۰۰ جعبه تقاضا ندارد. اگر سود هر جعبه لیوان شربت‌خوری و هر جعبه لیوان تجملی به ترتیب ۵ و ۴/۵ واحد باشد و میزان زمان موجود برای تولید لیوان ۸۰ ساعت و کل فضای موجود در انبار ۱۵۰۰۰ فوت مکعب باشد، چه تعداد لیوان تولید شود تا تولیدکننده حداکثر سود را به دست آورد؟**

☑ **پاسخ:** داده‌های مسئله در جدول زیر خلاصه می‌شود:

| تولیدات | زمان تولید هر جعبه (دقیقه) | فضای لازم برای هر جعبه (فوت مکعب) | سود هر جعبه | حداکثر تقاضا |
|---|---|---|---|---|
| لیوان شربت‌خوری | ۴ | ۱۰ | ۵ | ۹۰۰ |
| لیوان تجملی | ۳ | ۲۰ | ۴/۵ | - |
| ظرفیت | ۴۸۰۰ | ۱۵۰۰۰ | - | - |

گام‌های مدل کردن مسئله به صورت زیر است:

**۱) تعریف متغیرهای تصمیم:** در این مسئله، هدف تعیین میزان تولید از هر نوع لیوان است تا حداکثر سود حاصل شود. پس برای متغیرهای تصمیم، مقدار عددی تولید هر محصول را مدنظر قرار می‌دهیم: تعداد جعبه لیوان تجملی = $x_۲$ تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری = $x_۱$

**۲) تعریف تابع هدف:** هدف این مسئله حداکثر کردن سود می‌باشد. در این مسئله سود کارگاه عبارت است از:

سود کل : تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری تولید شده × سود هر جعبه لیوان شربت‌خوری + تعداد جعبه لیوان تجملی × سود هر جعبه لیوان تجملی تولید شده

$\rightarrow$ سود کل = ۵ × تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری + ۴/۵ × تعداد جعبه لیوان تجملی

در رابطه‌ی فوق از آنجایی که تعداد تولید هر نوع لیوان مشخص نیست و در واقع به دنبال تعیین میزان تولید هر کدام هستیم، متغیرهای تصمیم مسئله یعنی $x_۱$ و $x_۲$ را جایگزین تعداد هر جعبه تولید لیوان می‌کنیم و میزان سود کل را با $Z$ نمایش می‌دهیم: $Z = ۵x_۱ + ۴/۵x_۲$

**۳) تعریف محدودیت‌ها:** در این مسئله سه نوع محدودیت داریم:۱ـ زمان در دسترس برای تولید۲ـ فضای انبار ۳ـ تقاضا

توجه کنید که کل زمان در دسترس برای تولید لیوان ۸۰ ساعت است و برای تولید هر جعبه لیوان شربت‌خوری و تجملی به ترتیب ۴ و۳ دقیقه زمان لازم است. اگر $x_۱$ میزان تولید تعداد جعبه‌های لیوان شربت‌خوری و $x_۲$ میزان تولید تعداد جعبه‌های لیوان تجملی باشد، مجموع زمان تولید تعداد جعبه‌های لیوان عبارت است از:

زمان تولید تعداد جعبه‌های لیوان : $۴x_۱ + ۳x_۲$

اما حداکثر میزان زمان موجود ۸۰ ساعت می‌باشد. دقت کنیم که واحدهای مورد استفاده باید یکسان باشند. از آنجایی که زمان تولید هر جعبه لیوان برحسب دقیقه است، زمان موجود نیز باید به دقیقه تبدیل شود. پس: $۴x_۱ + ۳x_۲ \le ۴۸۰۰$

توجه شود که در این محدودیت از علامت کوچکتر مساوی ($\le$) برای نامعادله استفاده شده است، یعنی می‌توان از تمام زمان موجود برای تولید استفاده نکرد.

به طور مشابه، برای محدودیت مربوط به فضای انبار و تقاضا داریم:

محدودیت تقاضا: $x_۱ \le ۹۰۰$ محدودیت فضای موجود : $۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \le ۱۵۰۰۰$

از آنجایی که مقادیر تولید لیوان نمی‌تواند منفی و غیرصحیح باشد، محدودیت‌های زیر به مدل اضافه می‌شود:

$x_۱ \ge ۰ \quad , \quad x_۲ \ge ۰$ $\quad$ $x_i :$ عدد صحیح $\quad i = ۱,۲$

به این ترتیب، مدل به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۴/۵x_۲ \\
&\text{s.t} \\
&\quad ۴x_۱ + ۳x_۲ \le ۴۸۰۰ \\
&\quad ۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \le ۱۵۰۰۰ \\
&\quad x_۱ \le ۹۰۰ \\
&\quad x_۱, x_۲ \ge ۰ \\
&\quad x_i : \text{عدد صحیح} \quad i = ۱,۲
\end{aligned}
$$

**نکته ۲:** اگر بتوانیم مسئله‌ای را به دو صورت فرموله کنیم که هر دو مدل حاصل برنامه‌ریزی خطی و از نظر بیان مشابه باشند و مدل اول دارای ۱۰۰متغیر و ۱۰۰۰محدودیت و مدل دوم دارای ۱۰۰۰متغیر و ۱۰۰محدودیت باشد، از نظر حجم محاسبات معمولاً مدل دوم بهتر است. در حالت کلی جهت حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی هرچه مقدار محدودیت‌ها کمتر باشد، سرعت حل و یا به عبارتی حجم محاسبات کمتر خواهد بود.

**مثال۴:** (مسئله کوله‌پشتی: **knapsack Problem**): **n نوع کالای مختلف وجود دارد، به طوری که کالای نوع i به اندازه‌ی $W_i$ کیلوگرم وزن دارد و به اندازه $C_i$ تومان ارزش دارد. می‌خواهیم یک کوله‌پشتی با حداکثر ظرفیت W کیلوگرم را با این کالاها پر کنیم، به گونه‌ای که ارزش کالاهای درون کوله‌پشتی ماکزیمم شود. فرض می‌کنیم کالاها قابل تقسیم بوده و بتوانند به تعداد ناصحیح نیز انتخاب شوند. مدل LP این مسئله را بنویسید.**

☑ **پاسخ:** متغیر تصمیم‌گیری $x_i$ را به عنوان مقدار کالای نوع i در نظر می‌گیریم.
در این صورت، مدل LP مسئله به صورت مقابل است:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = C_1x_1 + \dots + C_nx_n \\ &\text{S.t.} \\ &\qquad W_1x_1 + \dots + W_nx_n \le W \\ &\qquad x_1, \dots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

---

**مثال۵: فرض کنید $x_i$ میزان ماده خام نوع i را نشان می‌دهد و $i = 1,2,3$. محصول A از ترکیب این سه نوع ماده خام حاصل می‌شود، با این محدودیت که حداقل ۲۰ درصد محصول A از ماده خام نوع ۲ باشد، کدام گزینه این محدودیت را نشان می‌دهد؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) $x_1 - 20x_2 + x_3 \le 0$  ۲) $x_1 - 20x_2 + x_3 \ge 0$  ۳) $20x_1 - 80x_2 + 20x_3 \le 0$  ۴) $20x_1 - 80x_2 + 20x_3 \ge 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $x_1 + x_2 + x_3$ تشکیل یک واحد محصول A دهند، نسبت ماده خام دوم $x_2$ به کل مواد خام باید بیشتر از ۰/۲ باشد.

$$\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \ge 0/2 \rightarrow 0/2x_1 - 0/8x_2 + 0/2x_3 \le 0 \rightarrow 20x_1 - 80x_2 + 20x_3 \le 0$$

---

**مثال ۶: زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد از محصول اول ثلث زمان تولید یک واحد از محصول دوم و دو برابر زمان تولید یک واحد از محصول سوم است. اگر تمام زمان نیروی انسانی صرف تولید محصول دوم گردد، حداکثر می‌توان ۹۰۰ واحد از آن را تولید نمود. کدام گزینه بیانگر این محدودیت است؟**

۱) $x_1 + 3x_2 + \frac{x_3}{2} \le 900$  ۲) $x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} \le 2700$  ۳) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 2700$  ۴) $x_1 + 3x_2 + \frac{x_3}{2} \le 2700$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** اگر تمام زمان صرف تولید محصول $x_2$ گردد (یعنی $x_1 = x_3 = 0$)، حداکثر ۹۰۰ واحد از آن را می‌توان تولید کرد؛ یعنی $x_2 \le 900$ که گزینه (۳) و (۴) بیان‌گر این مطلب هستند. چون زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد از محصول $x_1$ ثلث زمان موردنیاز تولید هر واحد از محصول $x_2$ است، پس اگر تمام زمان صرف تولید محصول $x_1$ گردد ($x_2 = x_3 = 0$)، حداکثر ۲۷۰۰ واحد از محصول $x_1$ را می‌توان تولید کرد، یعنی $x_1 \le 2700$. از آن‌جا که زمان موردنیاز تولید هر واحد از محصول $x_3$ نصف زمان مورد نیاز تولید هر واحد محصول $x_1$ است، پس اگر تمام زمان صرف تولید $x_3$ شود ($x_1 = x_2 = 0$)، حداکثر ۵۴۰۰ واحد از محصول $x_3$ را می‌توان تولید کرد؛ یعنی $x_3 \le 5400$ که گزینه (۴) این مطلب را نشان می‌دهد.

**روش دوم:** فرض کنیم $t_i$ برای $i = 1,2,3$ زمان مورد نیاز جهت ساخت یک واحد از محصول i ام باشد. بنابراین $t_ix_i$ زمان مورد نیاز جهت ساخت $x_i$ واحد از محصول i ام است و کل زمان موجود $900t_2$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 \le 900t_2 \quad \text{و} \quad t_1 = \frac{t_2}{3} = 2t_3$$

بنابراین با قرار دادن $t_1 = \frac{t_2}{3}$ و $t_3 = \frac{t_2}{6}$ در محدودیت بالا داریم:

$$\frac{t_2}{3}x_1 + t_2x_2 + \frac{t_2}{6}x_3 \le 900t_2 \Rightarrow x_1 + 3x_2 + \frac{x_3}{2} \le 2700$$

---

**مثال ۷: از دو نوع نفت تصفیه شده داخلی و خارجی دو نوع بنزین نوع R و P تولید می‌شود. ماکزیمم فشار بخار و مینیمم درجه اکتان موجود در نفت‌ها و مورد نیاز در بنزین‌ها در هر بشکه در جدول زیر داده شده است. اگر میزان مصرف نفت در تولید بنزین بر حسب بشکه مطابق جدول زیر باشد، میزان درجه اکتان مورد نیاز در بنزین نوع R چقدر است؟**

| بنزین / نفت | R | P |
|---|---|---|
| داخلی | $x_1$ | $x_3$ |
| خارجی | $x_2$ | $x_4$ |

| | ماکزیمم فشار بخار | مینیمم درجه اکتان |
|---|---|---|
| نفت داخلی | ۲۰ | ۷۸ |
| نفت خارجی | ۱۸ | ۸۹ |
| بنزین R | ۲۴ | ۸۵ |
| بنزین P | ۲۲ | ۹۶ |

۱) $7x_1 - 4x_2 \le 0$  ۲) $7x_1 - 4x_2 \ge 0$  ۳) $7x_1 + 8x_2 \ge 0$  ۴) $7x_1 + 8x_2 \le 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مینیمم درجه اکتان هر بشکه نفت داخلی ۷۸ است، در حالی که در بنزین نوع R، مینیمم درجه اکتان مورد نیاز ۸۵ می‌باشد. پس با استفاده از هر بشکه نفت داخلی با کمبود ۷ درجه اکتان مواجه می‌شویم و با به کار بردن $x_1$ بشکه نفت داخلی در مینیمم ساخت بنزین نوع R با کمبود $7x_1$ در درجه اکتان مواجه می‌شویم. با همین توضیح با بکار بردن $x_2$ شبکه نفت خارجی در ساخت بنزین نوع R با مازاد $4x_2$ در درجه اکتان مواجه می‌شویم. باید از ترکیبی از نفت داخلی و خارجی استفاده کنیم به گونه‌ای که با کمبود درجه اکتان در بنزین نوع R روبرو نشویم؛ یعنی $-7x_1 + 4x_2 \geq 0$ و در نتیجه $7x_1 - 4x_2 \leq 0$.

**مثال ۸: شرکتی الوارهایی با طول استاندارد ۱۲ متر را در طول‌های ۴ متر و ۵ متر برش می‌دهد. یک مشتری نیاز به حداقل ۱۰۰ قطعه ۴ متری و حداقل ۱۲۵ قطعه ۵ متری دارد. مسئله را به گونه‌ای فرموله کنید که:**

**الف) با حداقل برش، خواسته مشتری برآورده گردد. ب) با حداقل ضایعات، خواسته مشتری برآورده گردد.**

☑ **پاسخ:** یک الوار ۱۲ متری را به سه روش زیر می‌توان برش داد تا قطعه‌های ۴ متری و ۵ متری حاصل گردد:

| ۴m | ۴m | ۴m |
|---|---|---|

برش نوع ۱

| ۵m | ۴m | ۳m |
|---|---|---|

برش نوع ۲

| ۵m | ۵m | ۲m |
|---|---|---|

برش نوع ۳

معرفی متغیرهای تصمیم‌گیری:

$$x_i : i \text{ تعداد برش نوع } \quad ; \quad i = 1,2,3$$

تعداد قطعه‌های ۴ و ۵ متری در برش نوع ۱ و ۲ و ۳ طبق جدول زیر است:

| طول قطعه \ نوع برش | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۳ |
|---|---|---|---|
| ۴متری | ۳ | ۱ | ۰ |
| ۵ متری | ۰ | ۱ | ۲ |
| ضایعات | ۰ | ۳ | ۲ |

الف) مدل LP به منظور حداقل کردن تعداد برش مسئله به صورت مقابل است:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 \\ &\text{s.t} \\ &3x_1 + x_2 \geq 100 \\ &x_2 + 2x_3 \geq 125 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ب) به منظور حداقل کردن ضایعات:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = 3x_2 + 2x_3 \\ &\text{s.t} \\ &3x_1 + x_2 \geq 100 \\ &x_2 + 2x_3 \geq 125 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که تابع هدف دو مدل، حداقل کردن ضایعات و حداقل کردن تعداد برش متفاوت است و لزوماً جواب بهینه این دو یکسان نخواهد بود.

**مثال ۹: راکتور هسته‌ای باید در پایان هر سال تعمیر اساسی و یا تعویض گردد. هزینه اساسی سالانه به میزان عمر آن بستگی دارد و مطابق جدول زیر است:**

| عمر | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| هزینه تعمیر | ۱ | ۴ | ۹ | ۱۵ | ۲۱ |

**اگر قیمت راکتور نو ۲۰۰۰۰ واحد پولی باشد و اگر طول عمر کل فرایند از ابتدای شروع به کار ۱۲ سال در نظر گرفته شود، طرح تعمیر و تعویض راکتور در این فرآیند طی این ۱۲ سال به نحوی که جمع هزینه‌های تعمیر و تعویض به حداقل برسد، عبارت است از:** (دکتری ۹۱)

۱) تعویض در پایان سال‌های ۳، ۶ و ۹ و مابقی سال‌ها تعمیر اساسی با هزینه ۸۰۰۰۰

۲) تعویض در پایان سال‌های ۵ و ۱۰ و مابقی سال‌ها تعمیر اساسی با هزینه ۷۰۰۰۰

۳) تعویض در سال‌های ۶ و ۱۲ و مابقی سال‌ها تعمیر اساسی با هزینه ۹۰۰۰۰

۴) تعویض در پایان سال‌های ۵، ۸ و ۱۱ و مابقی سال‌ها تعمیر اساسی با هزینه ۷۰۰۰۰

مدرسان شریف

# فصل دوم

## «جبر خطی»

### درسنامه (۱): یادآوری و مفاهیم پایه

در این فصل بعضی از مطالب اساسی جبر خطی که در تمام فصول کتاب استفاده می‌شود را مرور می‌کنیم. در قسمت ابتدایی این مبحث، بعضی نتایج مقدماتی بردار و جبر مقدماتی مرور می‌شود که خواننده در صورت آشنایی با مطالب می‌تواند از آن صرف نظر کند. در ادامه مباحث مفاهیم مجموعه‌های محدب، مخروط‌های محدب، ابرصفحه‌ها و مجموعه‌های چند وجهی بیان می‌شود که در برنامه‌ریزی خیلی مهم هستند و از این رو، مطالعه کامل آن‌ها ضروری است.

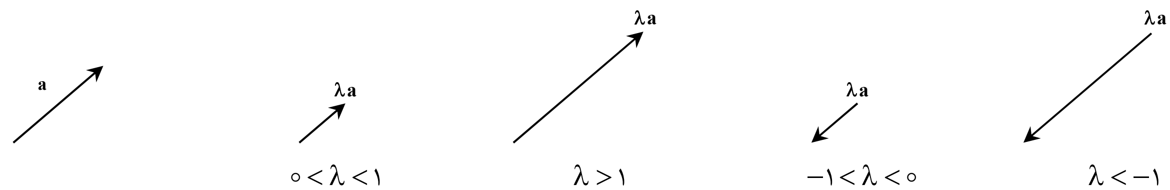
**بردار $a=(x_1,\dots,x_n)$ : پاره‌خطی جهت‌دار** است که **ابتدایش مبدأ مختصات و انتهایش نقطه $(x_1,\dots,x_n)$ باشد.**

**اندازه (طول) بردار:** اندازه بردار $a=(x_1,\dots,x_n)$ به صورت $|a|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ تعریف می‌شود.

**فضای اقلیدسی n بعدی:** مجموعه تمام بردارهای n مؤلفه‌ای است و آن را با $E^n$ نمایش می‌دهیم.

**تذکر۱:** بردار $x\in E^n$ مفروض است، وقتی می‌گوییم $x\geq 0$ یعنی تمام مؤلفه‌های آن بزرگتر یا مساوی صفر هستند و وقتی $x=0$، یعنی تمام مؤلفه‌های آن صفر هستند.

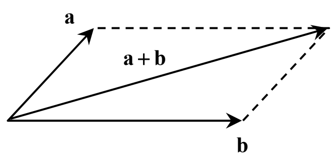
**ضرب عدد در بردار:** اگر $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ , $\lambda\in R$ در این صورت $\lambda a$ یک بردار است و داریم: $\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n)$. نمایش هندسی $\lambda a$ به ازای مقادیر مختلف $\lambda$، با a مقایسه شده است:




اگر $\lambda>0$ در این صورت $\lambda a$ با a هم‌جهت است و اگر $\lambda<0$ در این صورت $\lambda a$ در خلاف جهت a است و اگر $|\lambda|<1$ در این صورت اندازه (طول) $\lambda a$ کوچکتر از طول a است و اگر $|\lambda|>1$ باشد، اندازه $\lambda a$ بزرگتر از اندازه a است.

**جمع بردارها**

اگر $a=(a_1,\dots,a_n)$ و $b=(b_1,\dots,b_n)$، پس $a+b$ به صورت $a+b=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ می‌باشد.




نمایش هندسی جمع بردارها

**ضرب داخلی (نقطه‌ای) بردارها**

اگر $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$ در این صورت ضرب داخلی a و b به صورت $a.b=a_1b_1+\dots+a_nb_n$ تعریف می‌شود که حاصل آن **یک عدد** است.

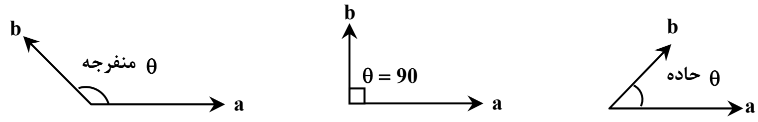
**نکته۱:** اگر زاویه بین بردارهای ناصفر a و b برابر θ باشد، در این صورت $\boxed{\cos\theta=\dfrac{a.b}{|a|\times|b|}}$ و در نتیجه:

$$\boxed{a.b=|a||b|\cos\theta}$$

**نکته۲:** با توجه به این که به ازای هر $\theta$، $|\cos\theta| \le 1$ می‌باشد. همواره داریم:

$$\boxed{-|a|\times|b| \le a.b \le |a|\times|b|}$$

که:




$a.b < 0$ $a.b = 0$ $a.b > 0$

**نکته۳:** اگر ضرب داخلی دو بردار a و b صفر شود دو بردار را متعامد گویند.

$$a.b = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

## ترکیب خطی، آفینی و محدب نقاط در $E^n$

**ترکیب خطی** : نقطه (بردار) b را به صورت ترکیب خطی نقاط (بردارهای) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ نوشته‌ایم، هرگاه:

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k \quad ; \ \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, k$$

مجموعه تمام ترکیب‌های خطی نقاط (بردارهای) $a_1, \ldots, a_k$ را پوسته خطی آنها گوییم.

**نکته۴:** پوسته خطی نقطه $x \in E^2$ خط واصل بین نقطه x و مبدأ مختصات است. با فرض متمایز بودن نقاط $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ داریم:

پوسته خطی نقاط $x_1, x_2 \in E^2$ کل فضای $E^2$ (یعنی صفحه مختصات) است.

پوسته خطی نقاط $x_1, x_2 \in E^3$ صفحه شامل مبدأ مختصات و نقاط $x_1, x_2$ است.

پوسته خطی نقاط $x_1, x_2, x_3 \in E^3$ کل فضای $E^3$ (یعنی فضای سه‌بعدی) است.

### ترکیب آفینی

نقطه (بردار) b را به صورت ترکیب آفینی نقاط (بردارهای) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ نوشته‌ایم، هرگاه:

$$\begin{cases} b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ for } \ i = 1, \ldots, k \end{cases}$$

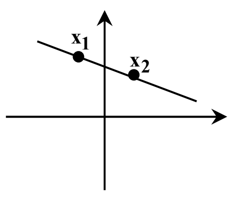
مجموعه تمام ترکیبات آفینی نقاط (بردارهای) $a_1, \ldots, a_k$ را **پوسته آفینی** آنها گوییم.

**نکته۵:** پوسته آفینی نقطه x خود نقطه است. با فرض متمایز بودن نقاط $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ داریم:

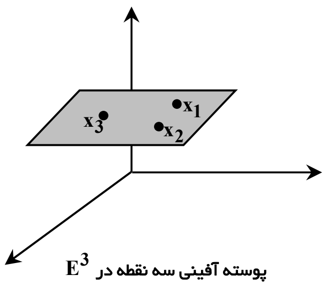
پوسته آفینی نقاط $x_1, x_2$ خط واصل این دو نقطه است.

پوسته آفینی نقاط $x_1, x_2, x_3 \in E^2$ کل فضای $E^2$ است.

پوسته آفینی نقاط $x_1, x_2, x_3 \in E^3$ صفحه عبورکننده از این سه نقطه است.

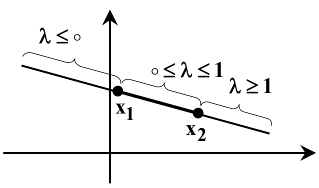



پوسته آفینی دو نقطه در $E^2$




پوسته آفینی سه نقطه در $E^3$

**تذکر۲:** نقاط متمایز $x_1$ و $x_2$ مفروضند. پوسته آفینی این دو نقطه مجموعه $S = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \mid \lambda \in R\}$ است ($\lambda_1 = \lambda$ و $\lambda_2 = 1 - \lambda$ و داریم $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) که نمایش هندسی مجموعه S، خط واصل نقاط $x_1$ و $x_2$ است. در شکل مقابل به ازای مقادیر مختلف عدد حقیقی $\lambda$ قسمت‌های خط مشخص شده‌اند: اگر $0 \le \lambda \le 1$ باشد در این صورت $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ پاره خط واصل نقاط $x_1$ و $x_2$ است. اگر $\lambda \ge 1$ باشد، در این صورت $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ نیم‌خطی است که از $x_1$ شروع می‌شود. اگر $\lambda \le 0$ باشد، $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ نیم‌خطی است که از $x_2$ شروع می‌شود.




پوسته آفینی نقاط $x_1, x_2$

**ترکیب محدب:** نقطه (بردار) $b$ را به صورت ترکیب محدب نقاط (بردارهای) $a_1, a_2, \dots, a_k$ نوشته‌ایم، هرگاه:

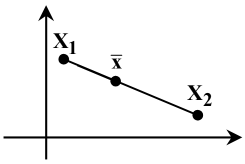
$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 \ , \ \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_k \ge 0$$

مجموعه تمام ترکیبات محدب چند نقطه را **پوسته محدب** آنها گوییم.

**نکته۶:** اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ مجموعه‌ای از نقاط باشد، در این صورت داریم:

**پوسته خطی نقاط $S \subseteq$ پوسته آفینی نقاط $S \subseteq$ پوسته محدب نقاط $S$**

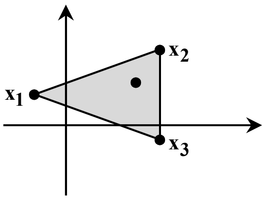
**ترکیب محدب دو نقطه**




ترکیب محدب نقاط متمایز $X_1$ و $X_2$ به صورت $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ که $0 \le \lambda \le 1$ نوشته می‌شود ($\lambda_1 = \lambda$ و $\lambda_2 = 1 - \lambda$ پس $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) و **از نظر هندسی ترکیب محدب دو نقطه، تمام نقاط روی پاره‌خطِ واصلِ آن دو نقطه است.**

$\bar{x}$ یک ترکیب محدب $X_1$ و $X_2$ است $\Leftrightarrow \bar{x} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \ , \ 0 \le \lambda \le 1$

**تذکر۳:** در ترکیب محدب اگر داشته باشیم: $1 > \lambda > 0$ می‌گوییم **ترکیب محدب اکید یا غیر بدیهی** است.

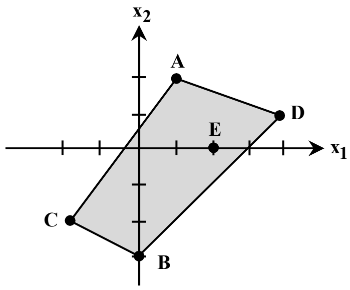



**مثال۱: پوسته محدب نقاط متمایز $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ در $E^2$ مثلثی با رئوس $x_1, x_2, x_3$ و نقاط درون مثلث است. هر نقطه مانند $x$ که درون این مثلث باشد را می‌توان بر حسب ترکیب محدب نقاط $x_1, x_2, x_3$ نوشت یعنی $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ که $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$.**

---

**مثال۲: مجموعه تمام ترکیبات محدب (پوسته محدب) نقاط $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ کدام است؟**

۱) نقاط روی محیط پنج‌ضلعی ACBED
۲) نقاط روی محیط چهارضلعی ACBD
۳) نقاط روی محیط و درون پنج‌ضلعی ACBED
۴) نقاط روی محیط و درون چهارضلعی ACBD




**پاسخ:** گزینه «۴» نقطه E درون چهارضلعی ADBC قرار دارد پس می‌توان آن را برحسب ترکیب محدب چهار نقطه دیگر نوشت. بنابراین نقطه E نقطه گوشه‌ای نیست.

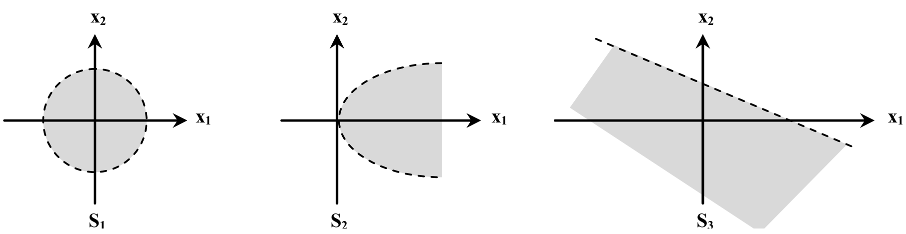
---

**مثال۳: کدام یک از مجموعه‌های زیر محدب هستند؟** (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

$$S_1 = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \qquad S_2 = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2^2 > 0\right\} \qquad S_3 = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 < 1\right\}$$

۱) $S_1$ ، $S_2$ و $S_3$ محدب هستند.
۲) $S_3$ محدب است ولی $S_1$ و $S_2$ محدب نیست.
۳) $S_1$ و $S_3$ محدب است ولی $S_2$ محدب نیست.
۴) $S_2$ و $S_3$ محدب است ولی $S_1$ محدب نیست.

**پاسخ:** گزینه «۱» ناحیه شدنی مجموعه‌های $S_1$ و $S_2$ و $S_3$ به صورت زیر می‌باشد:



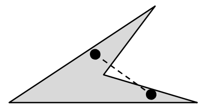

با توجه به تعریف ناحیه محدب هر سه مجموعه محدب هستند.

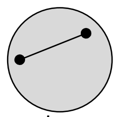
## مجموعه محدب، نقطه گوشه، مخروط

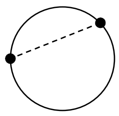
**مجموعه محدب: مجموعه $A$ را محدب می‌نامیم هرگاه ترکیب محدب هر دو نقطه آن، نقطه‌ای در $A$ باشد.** یعنی:

$$\forall x_1, x_2 \in A; x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$$
$$0 \le \lambda \le 1$$

به عبارت دیگر فضایی را محدب می‌گویند که هرگاه دو نقطه دلخواه متعلق به این فضا را در نظر بگیریم پاره‌خط واصل آن‌ها نیز کاملاً متعلق به این فضا باشد و به عبارتی دیگر، فضای محدب فضایی است که هرگاه هر وجه از این فضا را امتداد دهیم، فضای مربوط در یک طرف وجه امتداد یافته قرار گیرد.


محدب نیست


محدب است


محیط دایره، مجموعه محدب نیست

**نکته۷:** مجموعه‌های $S_1 = \{x \mid Ax \ge b, x \ge 0\}, S_2 = \{x \mid Ax = b, x \ge 0\}, S_3 = \{x \mid Ax = b\}$ مجموعه‌های محدب هستند که در آن $A$ ماتریس $m \times n$ و $b$ یک $m$ بردار است.

**نکته۸: مجموعه جواب‌های شدنی (فضای شدنی)** یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) **همواره مجموعه‌ای محدب** است.

**نکته ۹: اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی محدب، مجموعه‌ای محدب است. اما اجتماع هر تعداد مجموعه محدب، ممکن است محدب نباشد.**

**مثال۴: کدام گزینه بیانگر یک مجموعه محدب است؟**

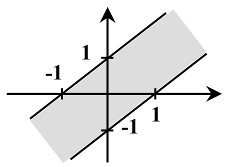
۱) $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$
۲) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 = 4\}$
۳) $A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1 - x_2| \le 1\}$
۴) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$

**پاسخ:** گزینه «۳»

گزینه «۱» دایره‌ای است که فاقد مرکزش می‌باشد و محدب نیست.

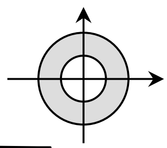
گزینه «۲» نقاط روی محیط کره $(x_1+1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$ است که محدب نیست.

گزینه «۳» به صورت




است که محدب است.

گزینه «۴» به صورت



است که محدب نیست.

**مثال۵: مجموعهٔ $S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \ge |x_1|\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $S$ یک مجموعه .......... و .......... نقطه گوشه است.**

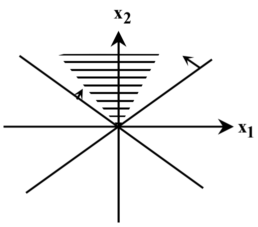
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) محدب، با یک
۲) محدب، با بینهایت
۳) غیر محدب، با یک
۴) محدب، بدون

**پاسخ:** گزینه «۱» با رسم ناحیه موجه مشخص است که مجموعه $S$ محدب با یک نقطه گوشه‌ای $(0,0)$ است.

$$|x_1| \le x_2 \Rightarrow -x_2 \le x_1 \le x_2$$

$$\begin{cases} -x_2 \le x_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 \le x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 \ge 0 \end{cases}$$




**مثال۶: مجموعه $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 4x_3 = 29\}$ از چه نوع است؟**

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) غیر محدب
۲) مقعر
۳) محدب
۴) محدب به ازای تمام ضرایب مثبت تابع است.

**پاسخ:** گزینه «۳» $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 4x_3 = 30$ که یک منحنی محدب می‌باشد.

**مثال۷: مسئله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:**

$$\text{Min}.Z = x_۱ + x_۲ + ۳x_۳$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ < ۱۴ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ < ۷ \\ x_۱ > ۰, x_۲ > ۰, x_۳ > ۰ \end{cases}$$

**مجموعه قابل قبول این مسئله ......... و ......... است.** (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) محدب ـ باز　　۲) غیر محدب ـ بسته　　۳) غیر محدب ـ باز　　۴) محدب ـ بسته

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مجموعه‌ی قابل قبول هر مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی یک مجموعه محدب است و فضای موجه آن به صورت زیر است:

$$X = \{(x_۱, x_۲, x_۳) | x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ < ۱۴, ۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ < ۷, x_۱ > ۰, x_۲ > ۰, x_۳ > ۰\}$$

از آنجا که در محدودیت‌ها، علامت تساوی را نداریم، بنابراین مجموعه قابل قبول مسئله محدب و باز است.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۸: تعداد نقاط فرین (Extreme Points)، مجموعه قابل قبول سؤال قبل چقدر است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای تعیین نقاط فرین مسئله قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۱۴ \quad (۱) \\ & ۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ = ۷ \quad (۲) \\ & x_۱ = ۰ \quad (۳) \\ & x_۲ = ۰ \quad (۴) \\ & x_۳ = ۰ \quad (۵) \end{aligned}$$

با توجه به معادله‌های داده شده داریم:

$$\begin{matrix}(۱)\\(۲)\\(۳)\end{matrix}\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۱۴ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ = ۷ \\ x_۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۱ \\ x_۳ = ۴ \end{cases}$$

این نقطه در محدودیت $x_۱ > ۰$ صدق نمی‌کند، بنابراین این نقطه رأسی نیست. به همین ترتیب دیگر نقاط مسئله عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \frac{۱۴}{۳} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۷ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \frac{۷}{۲} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ -۷ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{۷}{۳} \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

هیچ‌کدام از این نقاط با توجه به محدودیت‌های مسئله رأسی نیستند. همچنین از اول هم می‌توانستیم به جواب برسیم. چرا که اصلاً یک مجموعه باز نقطه فرین ندارد.

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۹: مجموعه M را به‌صورت مقابل در نظر بگیرید:** $M = \{(b, z) \mid Ax = b, x \geq ۰, c^T x = z,$ برای برخی از xها$\}$

**کدام گزینه در مورد M همواره صادق است؟** (دکتری ۹۶)

۱) M یک مجموعه بی‌کران است.　　۲) M یک فضای خطی است.

۳) M یک مجموعه غیرمحدب است.　　۴) M یک مجموعه محدب است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» سه گزاره زیر که برای مجموعه M ارائه شده، نشانگر LP بودن ناحیه شدنی و محدب بودن مجموعه می‌باشد.

$$\left.\begin{aligned} & Ax = b \\ & x \geq ۰ \\ & C^T x = Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{LP ناحیه شدنی} \Rightarrow \text{مجموعه محدب}$$

◆ ◆ ◆ ◆

**مثال۱۰: اگر فضای موجه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بی‌کران باشد، در این صورت هر نقطه موجه این فضا را می‌توان به صورت ......... نقاط گوشه و ......... جهت‌های حدی موجود در آن نوشت. به ترتیب در محل‌های خالی چه کلماتی مناسب است؟** (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) ترکیب محدب، ترکیب محدب　　۲) ترکیب خطی غیر منفی، ترکیب خطی غیر منفی

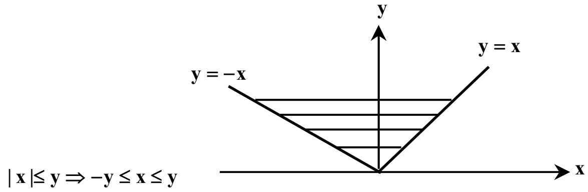
۳) ترکیب محدب، ترکیب خطی غیر منفی　　۴) ترکیب خطی غیر منفی، ترکیب محدب

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر فضای موجه یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی بی‌کران باشد، در این صورت هر نقطه‌ی موجه این فضا را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه‌ای و ترکیب خطی غیرمنفی جهت‌های حدی موجود در آن نوشت.

**مثال۱۱: مجموعه $L=\{(x,y)\mid y\ge |x|\}$ را در نظر بگیرید، در این صورت L چه مجموعه‌ای و با چند گوشه است؟** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) محدب با یک گوشه ۲) محدب با بی‌نهایت گوشه ۳) غیرمحدب با یک گوشه ۴) محدب بدون گوشه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ناحیه موجه مجموعه L به صورت زیر است. پس مجموعه فوق محدب با یک نقطه گوشه $(0,0)$ می‌باشد.




**مثال۱۲: در مورد مجموعه ناتهی $S=\{x\in\mathbb{R}^n\mid g(x)\le k\}$ برای یک k مشخص، می‌توان گفت:** (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۷)

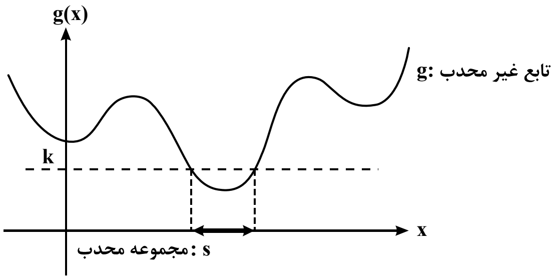
۱) اگر S محدب باشد، g می‌تواند تابعی غیرمحدب باشد. ۲) اگر S محدب باشد، g تابعی محدب است.

۳) اگر S محدب نباشد، g تابعی مقعر است. ۴) اگر S محدب نباشد، g می‌تواند تابعی محدب باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid g(x)\le k\right\}$$

اگر S محدب باشد، g می‌تواند تابعی غیرمحدب باشد. شکل مقابل را در نظر بگیرید:



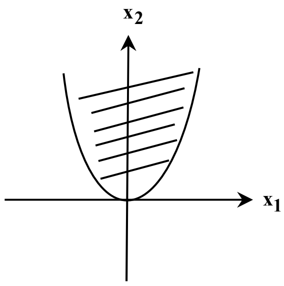

**مثال۱۳: مجموعه‌های A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند:** (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

$$A=\{(x_1,x_2): x_2-x_1^2\ge 0\} \quad ; \quad B=\{(x_1,x_2): x_1=1, |x_2|\le 4\}$$

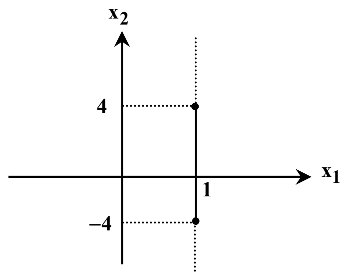
۱) هر دو مجموعه محدب هستند. ۲) مجموعه‌های A و B هیچ‌کدام محدب نیستند.

۳) مجموعهٔ A محدب است ولی مجموعهٔ B محدب نیست. ۴) مجموعهٔ A محدب نیست ولی مجموعهٔ B محدب است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ناحیه شدنی مجموعه‌های A و B به صورت زیر می‌باشد:




نمایش هندسی مجموعه A




نمایش هندسی مجموعه B

با توجه به تعریف مجموعه محدب هر دو مجموعه A و B محدب می‌باشند.

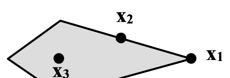
**تعریف نقطه رأسی (گوشه‌ای) (Extreme Point)**

گوشه نقطه‌ای است که نمی‌توان آن را به صورت ترکیب **اکیداً محدب** (هیچ دو نقطه‌ی **متمایز دیگری**) از فضای حل مسئله نوشت.

توجه داشته باشید که در این تعریف اگر کلمه‌ی **«دیگری»** حذف شود، تعریف نادرست است، زیرا هر گوشه را می‌توان از **ترکیب محدب خودش با یک نقطه‌ی دلخواه دیگر از فضای حل مسئله نوشت.**

مانند شکل مقابل: $X=\lambda X+(1-\lambda)Y \ , \ 0\le\lambda\le 1$

که اگر $\lambda=1$ شود، ترکیب محدب بالا برقرار است.




$x_1$ نقطه رأسی است ولی $x_2$ , $x_3$ خیر

مدرسان شریف

# فصل سوم

## «روش سیمپلکس»

## درسنامه (۱): تشکیل جدول ابتدایی و به‌روز آوری سیمپلکس

روش سیمپلکس (simplex) در سال ۱۹۴۷ توسط پروفسور دانتزیک ابداع گردید. در این روش که به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متغیر ابداع شد، ابتدا **یک نقطه‌ی گوشه‌ای شدنی اولیه** برای مسأله در نظر گرفته می‌شود (**معمولاً مبدأ مختصات**) و با انجام یک سری محدود از مراحل که در هر مرحله **مقدار تابع هدف نسبت به مرحله قبل بهبود می‌یابد یا حداقل بدتر نمی‌شود، نقطه‌ی بهینه** مسأله پیدا می‌شود. لازم به ذکر است که در هر مرحله فقط یک نقطه‌ی گوشه‌ای از فضای شدنی جواب مورد توجه قرار می‌گیرد. از آن‌جایی که تعداد لبه‌های مرز جواب محدود است، لذا روش سیمپلکس با **تعداد محدودی از تکرارهای متوالی** جواب بهینه را پیدا می‌کند.

### الگوریتم سیمپلکس

الگوریتم سیمپلکس معمولی برای حل مسائلی است که **محدودیت‌هایش به صورت $\le$ و اعداد سمت راست آن نامنفی** باشند. برای حل یک مسأله LP به روش سیمپلکس(SP) ابتدا آن را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم، سپس گام‌های الگوریتم را به صورت زیر اجرا می‌کنیم:

**گام ۱ (تشکیل اولین جدول)**

فرض می‌کنیم مسأله به فرم $\begin{array}{l} \max/\min \; Cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}$ بوده و آن را به فرم استاندارد $\begin{array}{l} \max/\min \; Cx + 0S \\ Ax + Is = b \\ x,s \ge 0 \end{array}$ تبدیل می‌کنیم. حال اولین جدول سیمپلکس را تشکیل می‌دهیم.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $S_1$ | $\dots$ | $S_m$ | R.H.S | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Z$ | $-C_1$ | $-C_2$ | $\dots$ | $-C_n$ | $0$ | $\dots$ | $0$ | $0$ | ← سطر هدف |
| متغیرهای پایه‌ای | $S_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | $1$ | $\dots$ | $0$ | $b_1$ | |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | ← محدودیت‌ها |
| | $S_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ | $0$ | $\dots$ | $1$ | $b_m$ | |

در اولین جدول سیمپلکس متغیرهای کمکی $S_1$ تا $S_m$ متغیر پایه‌ای هستند و مقادیر متغیرهای پایه‌ای هر جدول در ستون R.H.S قابل دسترس است و متغیرهای $x_1$ تا $x_n$ غیر پایه‌ای هستند و همواره متغیرهای غیر پایه مقدار صفر دارند، پس اولین جدول سیمپلکس متناظر با گوشه مبدأ مختصات $o(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ می‌باشد.

**گام ۲ (تست بهینگی جدول)**

**شرط بهینگی در مسأله Max : اگر تمام ضرایب سطر هدف نامنفی باشند** جدول بهینه است.

**شرط بهینگی در مسأله Min: اگر تمام ضرایب سطر هدف نامثبت باشند** جدول بهینه است.

اگر یک جدول سیمپلکس بهینه باشد متوقف می‌شویم و می‌توان مختصات نقطه بهینه $(x^*)$ و مقدار بهینه تابع هدف $(z^*)$ را از این جدول به دست آورد، در غیر این صورت به گام ۳ می‌رویم.

**گام۳ (تعیین متغیر ورودی به پایه و خروجی از پایه)**

اگر یک جدول سیمپلکس بهینه نباشد یعنی، گوشه‌ای از فضای موجه که متناظر با این جدول سیمپلکس است بهینه نمی‌باشد. بنابراین با **ورود یک متغیر غیرپایه‌ای به پایه و خروج یک متغیر پایه‌ای از پایه در عدم تباهیدگی به گوشه موجه مجاور** حرکت می‌کنیم.

**تعیین متغیر ورودی به پایه:** در مسأله Max هر متغیر غیر پایه‌ای **که عدد سطر هدفش منفی** باشد می‌تواند وارد پایه گردد و **مقدار تابع هدف(Z) را بهبود بخشد، اما الگوریتم سیمپلکس متغیری را برای ورود به پایه انتخاب می‌کند که عدد سطر هدف آن منفی‌ترین باشد؛** البته ممکن است انتخاب متغیر دیگری برای ورود به پایه، مقدار Z را بیشتر بهبود دهد.

**انتخاب متغیر ورودی در مسأله Max: منفی‌ترین عدد در سطر هدف، متغیر ورودی به پایه** را نشان می‌دهد.

**انتخاب متغیر ورودی در مسأله Min: مثبت‌ترین عدد در سطر هدف، متغیر ورودی به پایه** را نشان می‌دهد.

پس از انتخاب متغیر ورودی به پایه، ستون این متغیر در جدول را **ستون لولا** می‌نامیم.

**تعیین متغیر خروجی از پایه:**

اعداد ستون سمت راست جدول (R.H.S) را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می‌کنیم و کوچکترین نسبت را می‌یابیم، متغیر پایه‌ای متناظر با این کمترین نسبت نشان دهنده متغیر خروجی از پایه است و سطر متناظر با متغیر خروجی را **«سطر لولا»** می‌نامیم و ستون متغیر ورودی به پایه را **«ستون لولا»** می‌نامیم. عنصری که در محل برخورد سطر لولا و ستون لولا واقع است را **«عنصر لولا»** می‌گوییم. به عمل یافتن کوچکترین نسبت، تست min نسبت گویند که با $\theta$ نمایش می‌دهند که اگر فرض کنیم اندیس متغیر خروجی از پایه با r نمایش داده شود و اندیس متغیر ورودی به پایه با k نمایش داده شود، $\theta$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\theta=\min\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\,|\,y_{ik}>0\}=\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}}$$

که $\bar{b}_i$، مقدار سمت راست متناظر با هر سطر در جدول می‌باشد.

**مثال۱: اگر در روش سیمپلکس روی یک مسأله با تابع هدف مینیمم‌سازی، یک متغیر از پایه خارج شود و مقدار تابع هدف در جدول جدید کاهش یابد، آن متغیر در جدول جدید ............ .** (ریاضی ـ سراسری ۹۵)

۱) اگر وارد پایه شود، جدول بعدی تباهیده خواهد بود.

۲) می‌تواند وارد پایه شود ولی مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۳) نمی‌تواند نامزد ورود به پایه باشد.

۴) ممکن است وارد پایه بشود یا نشود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» متغیر خارج شده از پایه در مرحله بعد، شرط ورود به پایه را ندارد.

**مثال۲: برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:**

| متغیر اساسی | شماره معادله | z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | ۰ | ۱ | ۳ | ۰ | ۰ | ۱/۵ | ۰/۵ | ۸ |
| $x_3$ | ۱ | ۰ | ۱− | ۰ | ۱ | ۱/۵ | ۰/۵− | ۱ |
| $x_2$ | ۲ | ۰ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰/۵− | ۰/۵ | ۲ |

**این مسأله را با روش سیمپلکس حل کرده‌ایم. آخرین جدول آن مربوط (به جواب بهینه) به نرخ جدول فوق است. $S_2,S_1$ سطرهای (Slack vareiable) هستند. اگر $x_1$ به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب شود، کدام‌یک از مطالب زیر صحیح است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) اگر $x_2,x_1$ سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است.

۲) اگر $x_3,x_1$ سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.

۳) اگر $x_2,x_1$ سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده بهینه است.

۴) اگر $x_2,x_1$ سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.

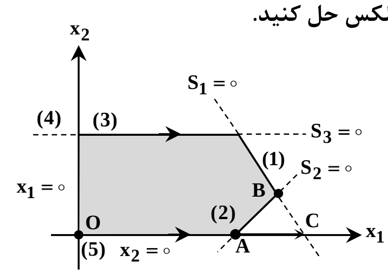
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ورود $x_1$ به پایه متغیر اگر $x_2$ از پایه خارج شود، $x_1$ و $x_3$ در تکرار بعدی متغیر اساسی خواهند بود و جواب حاصل، شدنی است ولی بهینه نیست و اگر $x_1$ را وارد پایه و $x_3$ را خارج کنیم، در جدول بعدی $x_1$ و $x_2$ پایه خواهند بود و جواب حاصل نشدنی و غیربهینه است.

**گام ۴ (به روزآوری جدول سیمپلکس)**

با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ستون لولا را در محل عنصر لولا به یک ستون یکه تبدیل کرده و همزمان تغییرات را روی بقیه اجزاء جدول نیز اجرا می‌کنیم و به گام ۲ می‌رویم.

**مثال ۳: مسأله برنامه ریزی مقابل را به روش سیمپلکس حل کنید.**

$$\begin{aligned}&\textbf{Max}\quad Z=۴x_۱+x_۲\\&\textbf{S.t}\\&(۱)\quad x_۱+x_۲\le ۱۰\\&(۲)\quad x_۱-x_۲\le ۸\\&(۳)\quad x_۲\le ۴\\&(۴,۵)\quad x_۱,x_۲\ge ۰\end{aligned}\xrightarrow{\text{فضای موجه}}$$




☑ **پاسخ:** ابتدا مسأله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\text{Max}\quad Z=۴x_۱+x_۲\\&\text{S.t}\\&\quad x_۱+x_۲+S_۱=۱۰\\&\quad x_۱-x_۲+S_۲=۸\\&\quad x_۲+S_۳=۴\\&\quad x_۱,x_۲,S_۱,S_۲,S_۳\ge ۰\end{aligned}\xrightarrow{\text{ماتریس ضرایب}}A=\begin{bmatrix}a_۱&a_۲&a_۳&a_۴&a_۵\\ ۱&۱&۱&۰&۰\\ ۱&-۱&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

برای تشکیل اولین جدول سیمپلکس تابع هدف را به شکل $Z-۴x_۱-x_۲=۰$ می‌نویسیم.

| | ↓ $x_۱$ | $x_۲$ | $S_۱$ | $S_۲$ | $S_۳$ | R.H.S | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۴ | -۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ← تابع هدف |
| $S_۱$ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱۰ | |
| ← $S_۲$ | ۱ | -۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۸ | ← محدودیت‌ها |
| $S_۳$ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۴ | |

در اولین جدول سیمپلکس متغیرهای پایه‌ای $x_B=(S_۱,S_۲,S_۳)$ و متغیرهای غیر پایه $x_N=(x_۱,x_۲)$ می‌باشند و پایه $B=[a_۳,a_۴,a_۵]$ متناظر این جدول است و این جدول جواب پایه‌ای موجه $X(x_۱=۰,x_۲=۰,S_۱=۱۰,S_۲=۸,\ S_۳=۴)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه شدنی $O(x_۱=۰,x_۲=۰)$ از فضای موجه است و مقدار سود نیز $Z=۰$ می‌باشد.

این جدول بهینه نیست، زیرا در سطر هدف عدد منفی وجود دارد. متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ شرط ورود به پایه را دارند یعنی با تولید محصول ۱ یا ۲ می‌توان سود را افزایش داد.

الگوریتم سیمپلکس، متغیر $x_۱$ را جهت ورود به پایه (بالا آمدن از سطح صفر) انتخاب می‌کند. با ورود $x_۱$ به پایه مقدار آن شروع به زیاد شدن می‌کند، پس از نظر هندسی از گوشه O خارج و به سمت گوشه A حرکت می‌کنیم. اما سؤال این است که مقدار $x_۱$ چقدر زیاد شود به گونه‌ای که به گوشه شدنی مجاور، یعنی گوشه A برسیم. پاسخ این سؤال تست مینیمم نسبت را به ما می‌دهد.

تست مینیمم نسبت: $\theta=\text{Min}\{\frac{۱۰}{۱}=۱۰,\frac{۸}{۱}=۸\}=۸\Rightarrow$ متغیر خروجی $S_۲$

بنابراین اگر متغیر $x_۱$ را به مقدار $\theta=۸$ افزایش دهیم به گوشه شدنی مجاور یعنی A می‌رسیم. وقتی به گوشه A برسیم خواهیم داشت: $S_۲=۰$ یعنی $S_۲$ از پایه خارج می‌شود. دقت کنید که اگر $x_۱$ را به مقدار بیشتر از ۸ افزایش دهیم از فضای موجه خارج می‌شویم. به ویژه اگر $x_۱$ را تا مقدار ۱۰ افزایش دهیم به گوشه غیر موجه C می‌رسیم. متغیر $x_۱$ ورودی به پایه و متغیر $S_۲$ خروجی از پایه است و با این جابه‌جایی به گوشه شدنی مجاور یعنی گوشه A می‌رویم.

جدول بعدی سیمپلکس به صورت زیر است:

| | $x_۱$ | ↓ $x_۲$ | $S_۱$ | $S_۲$ | $S_۳$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | ۰ | -۵ | ۰ | ۴ | ۰ | ۳۲ |
| ← $S_۱$ | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۰ | ۲ |
| $x_۱$ | ۱ | -۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۸ |
| $S_۳$ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۴ |

در جدول بالا متغیرهای پایه‌ای $x_B=(S_۱,x_۱,S_۳)$ و متغیرهای غیرپایه‌ای $x_N=(x_۲,s_۲)$ می‌باشند و پایه $B=[a_۳,a_۱,a_۵]$ متناظر با این جدول است و این جدول جواب پایه‌ای موجه $(x_۱=۸,x_۲=۰,S_۱=۲,S_۲=۰,S_۳=۴)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه شدنی $A(x_۱=۸,x_۲=۰)$ از فضای موجه است یعنی، از محصول اول ۸ واحد و محصول دوم تولید نمی‌شود و میزان سود $Z=۳۲$ است. با توجه به سطر هدف هنوز جدول بهینه نیست زیرا در سطر هدف عدد زیر $x_۲$ مقدار ۵- است، یعنی با تولید هر واحد از محصول $x_۲$ می‌توان سود را به میزان ۵ واحد افزایش داد. بنابراین متغیر $x_۲$ برای ورود به پایه انتخاب می‌شود. با ورود $x_۲$ به پایه مقدار $x_۲$ شروع به مثبت شدن می‌کند یعنی، از گوشه A خارج و به سمت گوشه B حرکت می‌کند. برای تعیین متغیر خروجی و میزان افزایش مجاز $x_۲$ تست مینیمم نسبت را انجام می‌دهیم.

تست مینیمم نسبت: $\theta=\text{Min}\{\frac{۲}{۲}=۱,\frac{۴}{۱}=۴\}=۱\Rightarrow$ متغیر خروجی $S_۱$

بنابراین اگر $x_۲$ را از صفر به مقدار $\theta = ۱$ افزایش دهیم به گوشه شدنی مجاور یعنی، B می‌رسیم و در گوشه B داریم: $S_۱ = ۰$ و از پایه خارج می‌شود. جدول بعد به صورت مقابل است:

| | $x_۱$ | $x_۲$ | $S_۱$ | $S_۲$ | $S_۳$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | ۰ | ۰ | $\frac{۵}{۲}$ | $\frac{۳}{۲}$ | ۰ | ۳۷ |
| $x_۲$ | ۰ | ۱ | $\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{۲}$ | ۰ | ۱ |
| $x_۱$ | ۱ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | ۹ |
| $S_۳$ | ۰ | ۰ | $-\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱ | ۳ |

از آن‌جایی که تمامی ضرایب سطر هدف مثبت هستند، پس جدول اخیر بهینه است. این جدول جواب پایه‌ای موجه $X^*(x_۱ = ۹, x_۲ = ۱, S_۱ = ۰, S_۲ = ۰, S_۳ = ۳)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه بهینه $B(x_۱ = ۹, x_۲ = ۱)$ است و مقدار بهینه تابع هدف $Z^* = ۳۷$ می‌باشد.

**نکته ۱:** زمان حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی در درجه اول به تعداد محدودیت‌های آن بستگی دارد و بنابراین هرچه تعداد محدودیت‌ها کمتر باشد زمان حل کمتر می‌شود.

**مثال۴: جدول مقابل را برای یک مسأله ماکزیمم‌سازی در نظر بگیرید، اگر $x_۴$ وارد پایه گردد و باعث ۱۰۰واحد افزایش در تابع هدف شود چه رابطه‌ای بین $\delta, \alpha$ برقرار است؟** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

| | $x_۱$ | $x_۲$ | $x_۳$ | $x_۴$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_۱$ | ۱ | ۰ | ۰ | $-۲$ | ۲۰ |
| $x_۲$ | ۰ | ۱ | ۰ | $\delta$ | ۱۰ |
| $x_۳$ | ۰ | ۰ | ۱ | $-۳$ | ۱۲ |
| $c_j - z_j$ | ۰ | ۰ | ۰ | $\alpha$ | |

۱) $\alpha = -۱۰\delta$ ۲) $\alpha = +۱۰\delta$

۳) $\alpha = \delta$ ۴) $\delta = ۱۰\alpha$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر متغیر $x_j$ وارد پایه شود و $\theta$ مقدار حاصل از تست مینیمم نسبت باشد، مقدار تغییر تابع هدف برابر $\Delta Z = -(Z_j - C_j) \times \theta$ خواهد بود. توجه شود در سطر هدف مقادیر $C_j - Z_j$ داده شده، پس اگر $x_۴$ وارد پایه شود خواهیم داشت: $Z_۴ - C_۴ = -\alpha$ و $\theta = \frac{۱۰}{\delta}$

بنابراین می‌توان نوشت: $۱۰۰ = -(Z_۴ - C_۴) \times \theta \Rightarrow ۱۰۰ = \alpha \times \frac{۱۰}{\delta} \to \alpha = ۱۰\delta$

**مثال۵: اگر در یکی از مراحل روش سیمپلکس، متغیری از پایه خارج شود، در مرحله بعد این متغیر:** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حتماً وارد پایه نخواهد شد.

۲) ممکن است وارد پایه شود.

۳) حتماً وارد پایه خواهد شد.

۴) اگر جواب آن مرحله منحط (Degenerate) نباشد، حتماً وارد پایه نخواهد شد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $x_k$ وارد پایه شود و $x_r$ از پایه خارج گردد، در این صورت $Z_r - C_r$ در جدول بعدی به صورت $Z_r - C_r = -\frac{۱}{\bar{a}_{rk}}(Z_K - C_K)$ می‌باشد. با فرض Max بودن مسأله داریم: $Z_k - C_k < ۰$ (چون $x_k$ ورودی به پایه است) و همچنین در $\bar{a}_{rk} > ۰$ زیرا عنصر لولا می‌باشد. در نتیجه $Z_r - C_r$ در مرحله بعد مثبت است و شرط ورود به پایه را ندارد. البته در حالت بهینه چندگانه اگر $x_k$ متغیر ورودی به پایه باشد $(Z_k - C_k = ۰)$ و متغیر $x_r$ متغیر خروجی از پایه باشد، در این صورت در مرحله بعدی مقدار $Z_r - C_r$ عبارت است از:

$Z_r - C_r = -\frac{۱}{\bar{a}_{rk}}\underbrace{(Z_k - C_k)}_{۰} = ۰$، یعنی $x_r$ شرط ورود به پایه را داراست.

**نکات الگوریتم سیمپلکس**

**نکته ۲:** هر جدول سیمپلکس متناظر با یک جواب پایه‌ای موجه (BFS) و یا گوشه شدنی فضای موجه مسأله L.P است و اگر گوشه تباهیده باشد ممکن است بیش از یک جدول سیمپلکس متناظر با آن گوشه وجود داشته باشد.

**نکته ۳:** انتخاب متغیر ورودی به پایه با معیار ذکر شده در الگوریتم سیمپلکس تضمین می‌کند که مقدار تابع هدف(Z) در جدول بعدی بدتر نشود.

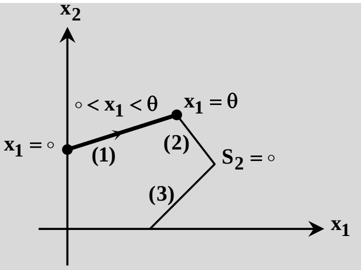
**نکته ۴:** انتخاب متغیر خروجی از پایه با معیار ذکر شده (تست مینیمم نسبت) تضمین می‌کند که از ناحیه شدنی (موجه) مسأله خارج نشویم و جدول بعدی یک گوشه موجه(BFS) از فضای حل را نشان دهد و همچنین استقلال خطی بردارهای پایه در جدول بعد حفظ شود.

**نکته ۵:** به تعداد مؤلفه‌های مثبت ستون لولا، گوشه‌ی موجه و غیرموجه روبروی جهت حرکت وجود دارد که اولین آنها گوشه‌ی موجه است و با تعیین متغیر خروجی طبق تست مینیمم نسبت می‌توان به این گوشه‌ی موجه رسید. به تعداد مؤلفه‌های منفی ستون لولا، گوشه‌ی غیرموجه پشت جهت حرکت وجود دارد و به تعداد مؤلفه‌های صفر در ستون لولا محدودیت موازی جهت حرکت وجود دارد.

به طور مثال در اولین جدول سیمپلکس مثال ۳ در ستون لولا دو عدد مثبت وجود دارد. با توجه به شکل فضای موجه ملاحظه می‌شود که از گوشه O به دو گوشه A و C جهت روبرو برای حرکت وجود دارد و همچنین ستون لولا دارای یک مؤلفه صفر است، یعنی یک محدودیت موازی جهت حرکت وجود دارد (محدودیت ۳).

**نکته ۶:** اگر متغیر $x_r$ متغیر ورودی به پایه شد، پس متغیر $x_r$ شروع به مثبت شدن می‌کند و حداکثر مقدار افزایش $x_r$ برابر $\theta$ یعنی، عدد حاصل از تست مینیمم نسبت (در صورت وجود) است.

اگر $x_r$ مقداری کمتر از $\theta$ بگیرد هنوز به گوشه مجاور نرسیده‌ایم و اگر $x_r = \theta$ در این صورت به گوشه موجه مجاور می‌رسیم و اگر $x_r$ مقداری بیشتر از $\theta$ بگیرد از فضای موجه خارج می‌شویم.




**نکته ۷:** مقدار متغیر ورودی به پایه در جدول بعد همان مقدار تست مینیمم نسبت $(\theta)$ می‌باشد.

**نکته ۸: میزان تغییر** تابع هدف از یک جدول سیمپلکس به جدول بعد عبارت است از:

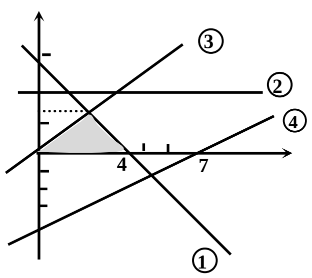
$$\boxed{\Delta Z = -\ \text{(عدد زیرمتغیر ورودی در سطر هدف)} \times \text{(مقدار تست مینیمم نسبت)}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{Z_{\text{جدول بعد}} = Z_{\text{جدول}} + \Delta Z}$$

**مثال۶: فرض کنید یک مسأله LP که شکل آن به صورت مقابل است، در حال حل با روش سیمپلکس است. اگر از نقطه $(۴,\circ)$ بخواهیم به تکرار بعد برویم و متغیر $x_۲$ وارد شونده به پایه باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر جزء مقادیر حاصل از انجام تست نسبت برای تعیین متغیر خارج شونده نمی‌باشد؟**

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری۹۱)




۱) ۱ ۲) ۲

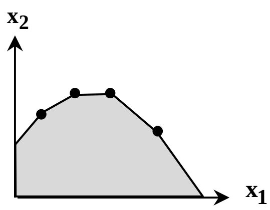
۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه «۱» از فرض مسأله می‌دانیم متغیر $x_۲$ متغیر غیرپایه‌ای وارد شونده به پایه است، یعنی باید از سطح صفر افزایش یابد. افزایش هرچه بیشتر $x_۲$ باعث بهبود هرچه بیشتر تابع هدف می‌گردد. البته باید توجه داشت که متغیر $x_۲$ را تا جایی می‌توانیم افزایش دهیم که حداقل یکی از متغیرهای پایه‌ای به سطح صفر کاهش پیدا کند (حداقل یک محدودیت مسدودکننده وجود داشته باشد). با توجه به شکل داده شده در این مسأله، با ورود متغیر $x_۲$ به پایه محدودیت‌های ۲$(x_۲ = ۳)$، محدودیت ۳$(x_۱ = x_۲)$ و بردار $x_۱ = \circ$، محدودیت‌های مسدودکننده هستند. اما محدودیت ۴$(۷x_۱ - ۴x_۲ = -۸)$ محدودیت مسدودکننده نیست؛ زیرا با حرکت $x_۲$ به سمت محدودیت ۴، مقدار $x_۲$ به اندازه‌ی ۱ واحد (با توجه به شکل) کاهش خواهد یافت. بنابراین گزینه (۱) جواب مسأله است.

---

**مثال۷: منطقه موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف $\text{Max}\, z = ۵x_۱ + x_۲$ به صورت مقابل است. تعداد جدول‌های لازم برای حل این مسأله به روش سیمپلکس چه تعداد است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

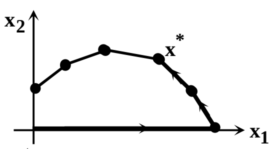



۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۶

**پاسخ:** گزینه «۴» متغیر $x_۱$ در اولین جدول ورودی به پایه است و مسیر حرکت سیمپلکس به سمت گوشه بهینه به صورت شکل مقابل است.

هر نقطه گوشه‌ای در مسیر متناظر با یک جدول است.




ورودی به پایه $x_1$

---

**نکته۹:** اگر در مرحله‌ای از روش سیمپلکس، سطر لولا یگانه نباشد، در مرحله بعد حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر می‌گردد.

**نکته ۱۰:** با انتخاب متغیر ورودی به پایه مقدار تابع هدف لزوماً بیشترین افزایش (در مسأله Max) را نخواهد داشت. علت آن هم این است که روش سیمپلکس برای تعیین متغیر ورودی **شیب بهبود را مبنا قرار می‌دهد نه میزان بهبود را.**

**نکته ۱۱:** روش سیمپلکس لزوماً مسیر کوتاهتر برای رسیدن به نقطه بهینه را طی نمی‌کند.

**نکته ۱۲:** در روش سیمپلکس اگر متغیری از پایه خارج شود، بلافاصله در تکرار بعد وارد پایه نخواهد شد. (چرا؟)

**نکته ۱۳:** تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر جدول سیمپلکس بسته به تعداد محدودیت‌هاست.

**مثال۸: جدول مقابل یکی از مراحل سیمپلکس است. اگر مقدار تابع هدف جدول بعد ۲۰ باشد، مقدار $\alpha$ کدام است؟**

| Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ۰ | ۳ | $\alpha$ | ۵ | ۰ | ۱۲ |
| $x_2$ | | | ۶ | | | ۱۲ |
| $S_2$ | | | ۳ | | | ۹ |

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۳-   ۴) ۴-

**پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به افزایش مقدار تابع هدف از جدول فعلی به جدول بعدی $(۲۰ \to ۱۲)$ متوجه می‌شویم که مسأله max سازی می‌باشد و شرط ورود به پایه منفی بودن سطر هدف در جدول فعلی می‌باشد. پس متغیر $x_3$ ورودی به پایه است، زیرا $x_2$ و $S_1$ شرط ورود به پایه را ندارند و همچنین $\Delta Z = ۲۰ - ۱۲ = ۸$ بنابراین:

$$\Delta Z = -(\alpha)(\frac{۱۲}{۶}) \Rightarrow ۸ = -۲\alpha \Rightarrow \alpha = -۴$$

---

**نکته۱۴:** در روش سیمپلکس اولیه آزمون نسبت $\left(\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} \text{ معادل } \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}\right)$ غیرمنفی ماندن متغیرهای پایه را تضمین می‌کند.

**مثال۹: جدول زیر یکی از مراحل حل یک LP مینیمم سازی است، بیشترین کاهش ممکن برای Z در جدول مرحله بعد کدام است؟**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | ۳ | ۲ | | | ۱- | |
| $x_1$ | | ۶ | ۲ | | | ۴ | ۱۲ |
| $S_1$ | | ۱ | ۱ | | | ۱- | ۴ |
| $S_2$ | | ۰ | ۱- | | | ۰ | ۳ |

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۳   ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه «۲» باید توجه داشت که انتخاب متغیر ورودی به پایه، طبق روش سیمپلکس (انتخاب مثبت‌ترین ضریب سطر هدف) لزوماً بیشترین بهبود را برای تابع هدف ایجاد نمی‌کند. پس در این مسأله باید میزان کاهش تابع هدف برای تمامی متغیرهایی که شرط ورود به پایه را دارا هستند بررسی کنیم.

اگر $x_3$ ورودی باشد: $\Delta Z = -(۲)(\frac{۴}{۱}) = -۸$    اگر $x_2$ ورودی باشد: $\Delta Z = -(۳)(\frac{۱۲}{۶}) = -۶$

پس با ورود $x_3$ به پایه میزان کاهش Z در مرحله بعد بیشتر است، هر چند که الگوریتم سیمپلکس متغیر $x_2$ را برای ورود به پایه انتخاب می‌کند.

---

**مثال۱۰: جدول زیر یکی از مراحل حل یک مسأله Max با روش سیمپلکس است، با ورود $x_4$ و خروج $x_5$ گوشه مجاور ........**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | | ۳ | ۳ | ۳ | | ۱۶ |
| $x_1$ | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۸ |
| $x_5$ | ۰ | ۳ | ۱- | ۱ | ۱ | ۱۲ |

۱) ناموجه ولی بهینه است.   ۲) موجه و بهینه است.
۳) موجه ولی نابهینه است.   ۴) نا موجه و نابهینه است.

**پاسخ:** گزینه«۴» متغیر $x_4$ شرط ورود به پایه را ندارد، پس جدول بعدی از بهینگی خارج می‌شود. همچنین اگر $x_4$ وارد شود، طبق تست مینیمم نسبت، باید $x_1$ از پایه خارج گردد اما اگر $x_5$ را از پایه خارج کنیم جدول بعد یک گوشه ناموجه را نشان می‌دهد.

---

**مثال۱۱: جدول مقابل دو تکرار متوالی از الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بیشینه‌سازی (Max) را نشان می‌دهد. مقدار a برابر است با ......... .**

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

| | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | ۱ | | ۲- | | | ۴ |
| $x_1$ | ۰ | | ۲ | | | ۶ |
| $s_1$ | ۰ | | a | | | ۸ |
| z | ۱ | | | | | ۸ |
| $x_1$ | ۰ | | | | | ۲ |
| $x_2$ | ۰ | | | | | ۲ |

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸

**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به تکرار جدول متغیر $x_2$ ورودی به پایه و متغیر $S_1$ خروجی از پایه می‌باشد.

نسبت Min تست $= \frac{۸}{a}$    $b_2 = \frac{۸}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴$

مدرسان شریف

# فصل چهارم

## «دوگان و تحلیل حساسیت»

## درسنامه (۱): دوگان

متناظر با هر مسأله برنامه‌ریزی خطی، مسأله برنامه‌ریزی خطی دیگری وجود دارد که به آن مسـأله **دوگان، ثانویه، مزدوج یا همـزاد** گفتـه مـی‌شـود. در حقیقت با حل مسأله اصلی (مسأله اولیه یا Primal) به طور هم زمان مسأله دوگان (Dual) نیز حل می‌شود. جواب بهینه مسأله دوگـان حـاوی اطلاعـات مهمی برای مسأله اولیه است. در ادامه روش‌های نوشتن مسأله دوگان را از روی مسأله اولیه می‌آمـوزیم و سـپس بـه ارتبـاط‌هـای ریاضـی بـین دو مسـأله می‌پردازیم و همچنین تفسیرهای اقتصادی مسأله دوگان را مطرح خواهیم کرد و پس از مسأله دوگان نیز به تحلیل حساسیت خواهیم پرداخت.

### شیوه نوشتن مسأله دوگان

برای نوشتن مسأله دوگان (D) از روی مسأله اولیه (P) مراحل زیر را طی می‌کنیم:
۱) اگر تابع هدف مسأله P به‌صورت Max (Min) باشد، تابع هدف مسأله D به‌صورت Min (Max) است.۲) متناظر با هر محدودیت کارکردی مسـأله P یک متغیر اصلی برای مسأله D درنظر می‌گیریم.۳) اعداد سمت راست قیود مسأله P را به‌عنوان ضـرایب هزینـه تـابع هـدف مسـأله D درنظـر مـی‌گیـریم. ۴) ضرایب هزینه تابع هدف مسأله P را به عنوان اعداد سمت راست محدودیت‌های مسأله D استفاده می‌کنـیم.۵) سـتون ضـرایب متغیـر $x_i$ در مسـأله P، محدودیت i ام مسأله D را می‌سازد.۶) علامت متغیرهای مسأله D از روی علامت محدودیت‌های مسأله P و علامت محدودیت‌های مسأله D از روی علامت متغیرهای مسأله P طبق جدول زیر به‌دست می‌آید:

| مسأله Max سازی | مسأله Min سازی |
|---|---|
| علامت متغیرها | علامت محدودیت‌ها |
| $\geq 0$ | $\geq$ |
| $\leq 0$ | $\leq$ |
| نامقید | $=$ |
| علامت محدودیت‌ها | علامت متغیرها |
| $\leq$ | $\geq 0$ |
| $\geq$ | $\leq 0$ |
| $=$ | نامقید |

**مثال۱: دوگان مسأله** $P: \underset{s.t.}{\text{Min}}\ Z = 2x_1 - x_2 + x_3$ **را بنویسید.**

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 \le 4 && \leftarrow y_1 \\ &2x_1 + 3x_3 = 6 && \leftarrow y_2 \\ &4x_2 - x_3 \ge 7 && \leftarrow y_3 \\ &x_1 \text{ نامقید};\ x_2 \text{ و } x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

**پاسخ:** متناظر با هر محدودیت i ام مسأله P ، یک متغیر $y_i\,(i = 1,2,3)$ برای مسأله D درنظر می‌گیریم.

| مسأله‌ی اولیه | | مسأله‌ی ثانویه |
|---|---|---|
| Min سازی | $\rightarrow$ | Max سازی |
| $x_1$ نامقید: | $\rightarrow$ | محدودیت اول به صورت تساوی (=) |
| $x_2, x_3 \ge 0$ | $\rightarrow$ | محدودیت‌های دوم و سوم به صورت کوچکتر مساوی (≤) |
| محدودیت اول به صورت کوچکتر مساوی (≤) | $\rightarrow$ | $y_1 \le 0$ |
| محدودیت دوم به صورت تساوی (=) | $\rightarrow$ | $y_2$ نامقید: |
| محدودیت سوم به صورت بزرگتر مساوی (≥) | $\rightarrow$ | $y_3 \ge 0$ |

بنابراین مسأله‌ی D به صورت زیر در می‌آید:

$$D: \underset{s.t.}{\text{Max}}\ W = 4y_1 + 6y_2 + 7y_3$$

$$\begin{aligned} &y_1 + 2y_2 = 2 \\ &-y_1 + 4y_3 \le -1 \\ &y_1 + 3y_2 - y_3 \le 1 \\ &y_1 \le 0;\ \text{نامقید } y_2\ ;\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

**نکته ۱:** تعداد متغیرهای مسأله دوگان برابر تعداد محدودیت‌های مسأله اولیه است و تعداد محدودیت‌هـای مسـأله دوگـان برابـر تعـداد متغیرهـای مسأله اولیه است.

**نکته ۲:** اگر در یک LP تعداد محدودیت‌ها بیشتر از تعداد متغیرها باشد، در مسأله دوگان تعداد محدودیت‌ها کمتر از تعداد متغیرها خواهد بـود و حل مسأله دوگان توسط کامپیوتر حجم محاسبات و زمان کمتری خواهد داشت (**حجم محاسبات و زمان سپری شـده** در حـل سـیمپلکس بـه **تعداد محدودیت‌ها** وابسته است **نه متغیرها**).

**مثال۲: مسأله دوگان متناظر با مسأله روبرو را بنویسید.**

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\,(\text{Max}\{3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\})$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \le 20 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

**پاسخ:** ابتدا مسأله اولیه را به شکل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کنیم. با فرض $x_3 = \text{Max}\{3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\}$ داریم:

$$\begin{aligned} &\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = x_3 \\ &3x_1 + x_2 \le x_3 \\ &x_1 - 2x_2 \le x_3 \\ &2x_1 + x_2 \le 20 \\ &x_1, x_2 \ge 0\ ;\ x_3: \text{آزاد} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = x_3 \\ &3x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ &x_1 - 2x_2 - x_3 \le 0 \\ &2x_1 + x_2 \le 20 \\ &x_1, x_2 \ge 0\ ;\ x_3: \text{آزاد} \end{aligned}$$

مسأله دوگان به صورت زیر است:

$$\underset{s.t.}{\text{Max}}\ W = 0y_1 + 0y_2 + 20y_3$$

$$\begin{aligned} &3y_1 + y_2 + 2y_3 \le 0 \\ &y_1 - 2y_2 + y_3 \le 0 \\ &-y_1 - y_2 = 1 \\ &y_1 \le 0\ ,\ y_2 \le 0\ ,\ y_3 \le 0 \end{aligned}$$

در مسأله گفته‌شده می‌توان $y_i \le 0$ را به $y_i \ge 0$ تبدیل کرد، که برای انجام این کار باید ضرایب $y_i$ را در همه جای مسأله قرینه کرد. بنابراین می‌توان مسأله دوگان را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} W = -20y_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad -3y_1 - y_2 - 2y_3 \le 0 \\ &\quad -y_1 + 2y_2 - y_3 \le 0 \\ &\quad y_1 + y_2 = 1 \\ &\quad y_1 \ge 0 \;,\; y_2 \ge 0 \;,\; y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

**مثال ۳: مسأله** $\underset{\substack{\text{s.t}\\ Ax\le C\\ x\ge 0}}{\operatorname{Min}} C^T x$ **که** $A^T = -A$ **مفروض است. ثابت کنید که دوگان این مسأله خودش است؟**

**پاسخ:**

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Min} C^T x & & \operatorname{Max} yC \\ \text{s.t} & & \text{s.t} \\ Ax \le C & \xrightarrow{\text{دوگان}} & yA \le C^T \\ x \ge 0 & & y \le 0 \end{array}$$

مسأله دوگان به طور معادل به صورت $\underset{\substack{\text{s.t.}\\ A^T y^T\le C\\ y^T\le 0}}{\operatorname{Max}} C^T y^T$ می‌باشد. در این مسأله با ضرب ۱− در تابع هدف، آن را به مینیمم‌سازی تبدیل می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $A^T = -A$ و مسأله به فرم $\underset{\substack{\text{s.t.}\\ A(-y^T)\le C\\ -y^T\ge 0}}{\operatorname{Min}} C^T(-y^T)$ درمی‌آید. حال با فرض $-y^T = x$ داریم: $\underset{\substack{\text{s.t}\\ Ax\le C\\ x\ge 0}}{\operatorname{Min}} C^T x$

**نکته ۳:** مسائلی به فرم $\underset{\substack{\text{s.t.}\\ Ax\le C\\ x\ge 0}}{\operatorname{Min}} C^T x$ که در آن‌ها $A^T = -A$، مسائل "self – Dual" هستند یعنی دوگان آنها خودشان است.

**مثال ۴: کدام گزینه معادل دوگان مسئله زیر را نمایش می‌دهد؟** (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{aligned} &\mathbf{max}\ x_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ &\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\ &\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, s_1 \ge 0 \end{aligned}$$

۱)
$$\begin{aligned} &\max\ y_0 = -5y_1 - 2y_2 \\ &\text{st}: y_1 + 2y_2 \ge 5 \\ &\quad y_2 - 2y_1 \le -12 \\ &\quad y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ &\quad -y_1 \le 0 \text{ , آزاد در علامت } y_2 \end{aligned}$$

۲)
$$\begin{aligned} &\max\ y_0 = 5y_1 + 2y_2 \\ &\text{st}: y_1 + 2y_2 \ge 5 \\ &\quad y_2 - 2y_1 \le -12 \\ &\quad y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ &\quad y_1 \ge 0 \text{ , آزاد در علامت } y_2 \end{aligned}$$

۳)
$$\begin{aligned} &\min\ y_0 = 5y_1 + 2y_2 \\ &\text{st}: -y_1 - 2y_2 \le -5 \\ &\quad 2y_1 - y_2 \ge 12 \\ &\quad y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ &\quad y_1 , y_2 \text{ آزاد در علامت} \end{aligned}$$

۴)
$$\begin{aligned} &\min\ y_0 = 5y_1 + 2y_2 \\ &\text{st}: y_1 + 2y_2 \le 5 \\ &\quad 2y_1 - y_2 \le 12 \\ &\quad y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ &\quad y_1 , y_2 \text{ آزاد در علامت} \end{aligned}$$

**پاسخ:** «۱» $s_1$ متغیرکمکی محدودیت اول می‌باشد. با حذف این متغیر، محدودیت اول به صورت کوچک‌تر مساوی شده و متغیر متناظر این محدودیت در مسئله مینیمم‌سازی دوگان به صورت $\ge$ خواهد بود. اما با توجه به اینکه محدودیت دوم به صورت مساوی برقرار می‌باشد، متغیر دوگان متناظر آن، آزاد در علامت خواهد بود.

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Min} w = 5y_1 + 2y_2 & & \operatorname{Max}(w') = -5y_1 - 2y_2 \\ \text{s.t}: y_1 + 2y_2 \ge 5 & & \text{s.t}: y_1 + 2y_2 \ge 5 \\ 2y_1 - y_2 \ge 12 & \rightarrow & y_2 - 2y_1 \le -12 \\ y_1 + 3y_2 \ge 4 & & y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 \ge 0 & & y_2, -y_1 \le 0 \text{ آزاد در علامت} \end{array}$$

**مثال۵: برای یک مسأله اولیه با ساختار زیر، ساختار محدودیت‌های مدل ثانویه (Dual) کدام است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

$$\max(z)=\sum_{j=1}^{3}c_jx_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j\le b_1\\ \sum_{j=1}^{3}a_{2j}x_j\ge b_2\\ \sum_{j=1}^{3}a_{3j}x_j\ge b_3\end{cases}$$

$x_1$ آزاد در علامت و $x_2,x_3\ge 0$

۱) $\sum_{i=1}^{3}a_{i1}w_i=c_1,\sum_{i=1}^{3}a_{i2}w_i\le c_2,\sum_{i=1}^{3}a_{i3}w_i\ge c_3\quad w_1,w_2\le 0$

۲) $\sum_{i=1}^{3}a_{i1}w_i\le c_1,\sum_{i=1}^{3}a_{i2}w_i\ge c_2,\mp\sum_{i=1}^{3}a_{i3}w_i\le c_3\quad w_1,w_2\le 0$

۳) $\sum_{i=1}^{3}a_{i1}w_i\le c_1,\sum_{i=1}^{3}a_{i2}w_i\ge c_2,\sum_{i=1}^{3}a_{i3}w_i\ge c_3\quad w_1,\ge 0,w_2\ge 0$

۴) $\sum_{i=1}^{3}a_{i1}w_i\ge c_1,\sum_{i=1}^{3}a_{i2}w_i\ge c_2,\sum_{i=1}^{3}a_{i3}w_i\ge c_3\quad w_1,\ge 0,w_2\ge 0$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

| محدودیت اولیه | متغیر دوگان | متغیر اولیه | محدودیت دوگان |
|---|---|---|---|
| $\le$ | $w_1\ge 0$ | $x_1$ :آزاد | تساوی $(=)$ |
| $\ge$ | $w_2\le 0$ | $x_2\ge 0$ | $\ge$ |
| $=$ | $w_3$ :آزاد | $x_3\ge 0$ | $\ge$ |

**مثال۶: مسأله همزاد (Dual) یا ثانویه متناظر با مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر کدام است؟**

**e بردار $m\times 1$ و درایه‌های آن همه یک است. ماتریس A یک ماتریس $m\times n$ است.** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

$$\min x_0$$
$$\text{s.t}\quad AX-X_0e\le b$$
$$x,x_0\ge 0$$

۱) $\text{Max}\,b^Ty$   s.t $A^Ty-e^Ty\le 1$, $y\le 0$

۲) $\min b^Ty$   s.t $A^Ty-e^Ty\ge 1$, $y\ge 0$

۳) $\min b^Ty$   s.t $A^Ty\ge 0$, $e^Ty\le 1$, $y\le 0$

۴) $\text{Max}\,b^Ty$   s.t $A^Ty\ge 0$, $e^Ty\ge 1$, $y\le 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه (۱) صحیح است و در زیر دلیل اشتباه بودن گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم. ضریب x در صورت سؤال صفر می‌باشد، بنابراین دوال محدودیت $Ax\le b$ برابر است با $A^Ty\le 0$. با توجه به اینکه تابع هدف دوال Max می‌باشد ضریب x در سؤال، یک می‌باشد. محدودیت دوال آن برابر است با $-e^Ty\le 1$.

$$\begin{array}{l}\text{Min }x_0\\ \text{s.t}\quad Ax-x_0e\le b\\ \quad x,x_0\ge 0\end{array}\longrightarrow\begin{array}{l}\text{Max}\,b^Ty\\ \text{s.t}\quad A^Ty\le 0\\ \quad -e^Ty\le 1\\ \quad y\le 0\end{array}\xrightarrow{Y=-y}\begin{array}{l}\min b^Ty\\ \text{s.t}\quad A^Ty\ge 0\\ \quad e^Ty\le 1\\ \quad y\ge 0\end{array}\longrightarrow\begin{array}{l}\min b^Ty\\ \text{s.t}\quad A^Ty-e^Ty\ge -1\\ \quad y\ge 0\end{array}$$

**مثال۷: مسئله زیر مفروض است. در جواب بهینه‌ی این مسئله، چه می‌توان گفت؟** (دکتری ۹۵)

$$\text{Min }z=y$$
$$\begin{cases}y-cx=0\\ Ax=b\\ x\ge 0\ \text{و}\ y\ \text{آزاد}\end{cases}$$

۱) مقدار تمام متغیرهای دوگان می‌توانند منفی باشند.

۲) مقدار متغیر دوگان محدودیت اول، برابر یک است.

۳) مقدار متغیر دوگان محدودیت اول، حتماً مقداری منفی است.

۴) مقدار متغیر دوگان محدودیت اول می‌تواند مقداری مثبت یا منفی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\begin{array}{ll} \text{Min} \quad z = y & \qquad \text{Max} \quad z' = bt \\ \begin{cases} y - Cx = 0 \to u \\ Ax = b \to t \\ x \ge 0, \text{آزاد } y \end{cases} \xrightarrow{\text{Dual}} & \begin{cases} u = 1 \\ -Cu + tA \le 0 \\ \text{آزاد } u, \text{آزاد } t \end{cases} \end{array}$$

بنابراین مقدار متغیر دوگان متناظر با محدودیت اول، برابر یک است.

## ارتباط بین مسائل اولیه و ثانویه (قضایای دوالیتی)

**قضیه ۱:** دوگان دوگان هر مسأله برنامه‌ریزی خطی، خود آن مسأله است.

**قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوگان):** مسأله اولیه و دوگان آن مفروضند، یکی از آن‌ها Min سازی و دیگری Max سازی است. اگر $x^\circ$ یک نقطه شدنی مسأله Min سازی با تابع هدف Z و $y^\circ$ یک نقطه شدنی مسأله Max سازی با تابع هدف W باشد، همواره داریم: $W(y^\circ) \le Z(x^\circ)$.

پس مقدار تابع هدف به ازای هر نقطه شدنی در مسأله مینیمم‌سازی همواره بزرگتر یا مساوی مقدار تابع هدف به ازای هر نقطه شدنی در مسأله ماکزیمم‌سازی است.

**اثبات:** فرض می‌کنیم $P: \text{Min } Z = cx \ \text{s.t } Ax \ge b,\ x \ge 0$ مسأله اولیه و دوگان آن $D: \text{Max } W = yb \ \text{s.t. } yA \le C,\ y \ge 0$ باشد. همچنین $x^\circ$ یک نقطه شدنی دلخواه مسأله P و $y^\circ$ یک نقطه شدنی دلخواه مسأله D باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x^\circ \ge 0}{Ax^\circ \ge b} \xrightarrow{\text{از سمت چپ در } y^\circ \ge 0 \text{ ضرب}} y^\circ A x^\circ \ge y^\circ b \\ \underset{y^\circ \ge 0}{y^\circ A \le C} \xrightarrow{\text{از سمت راست در } x^\circ \ge 0 \text{ ضرب}} y^\circ A x^\circ \le C x^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y^\circ b \le y^\circ A x^\circ \le c x^\circ \Rightarrow y^\circ b \le c x^\circ \Rightarrow w(y^\circ) \le z(x^\circ)$$

**مثال ۸: کدام گزینه شرایط بهینگی KKT را برای مسأله زیر به درستی نشان می‌دهد؟ (بردارهای y و z ضرایب لاگرانژ (متغیرهای دوگان) هستند.)** (ریاضی ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & Dx \ge d \end{array}$$

۱) $\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \le 0,\ z \ge 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \le 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \ge 0,\ z \le 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \le 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \le 0,\ z \ge 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \ge 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \ge 0,\ z \le 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \ge 0 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در شرایط KKT فاصله بهینگی بین مسئله اولیه و ثانویه صفر است، در واقع هر دو مسئله اولیه و ثانویه به‌طور همزمان شدنی و دارای جواب بهینه یکسان می‌باشند.

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \max by + dz \\ \text{s.t.} Ax + S_1 = b & \xrightarrow{\text{دوگان}} & A^T y + D^T z = c \\ Dx - S_2 = d & & y \le 0, z \ge 0 \\ S_1 \ge 0, S_2 \ge 0 & & \end{array}$$

$$S_1 \ge 0 \to Ax - b \le 0 \xrightarrow{y \le 0} (Ax-b)\, y \ge 0$$

$$S_2 \ge 0 \to Dx - d \ge 0 \xrightarrow{z \ge 0} (Dx-d) z \ge 0$$

**مثال۹: مدل مقابل را درنظر بگیرید.** (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۶)

**کدام گزینه، در مورد جواب‌های بهینه مدل مقابل و دوگان آن صدق می‌کند؟ ( $y_3, y_2, y_1$ متغیرهای مزدوج محدودیت‌های اول تا سوم هستند و دامنه تغییرات $t$ عبارت است از $[0, c_2 - c_1]$ و دامنه تغییرات $z$ عبارت است از $[c_1, c_2]$).**

$$\begin{aligned} \max \quad & x_0 = -c_1x_1 + c_2x_2 \\ st: \quad & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \qquad (0 < c_1 < c_2) \end{aligned}$$

۱) حل بهینه مسئله اولیه $(x_1, x_2) = (0,0)$ و حل بهینه مزدوج $y_1 = -z$ و $y_2 = 0$ و $y_3 = 0$

۲) حل بهینه مسئله اولیه $(x_1, x_2) = (0,0)$ و حل بهینه مزدوج $y_1 = -c_1 - c_2 - t$ و $y_2 = t$ و $y_3 = -t$

۳) حل بهینه مسئله اولیه $(x_1, x_2) = (1,1)$ و حل بهینه مزدوج $y_1 = z$ و $y_2 = -c_1 - z$ و $y_3 = c_2 + z$

۴) حل بهینه مسئله اولیه $(x_1, x_2) = (1,1)$ و حل بهینه مزدوج $y_1 = -c_1 - t$ و $y_2 = t$ و $y_3 = c_2 - c_1 - t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به محدودیت اول مسئله $x_1 = x_2$ بوده و با جایگزینی متغیر $x_1$ به جای $x_2$ جواب بهینه به دست می‌آید. از آنجایی که جواب بهینه مسئله اولیه برابر مسئله دوگان می‌باشد، داریم:

$$x_1 - x_2 = 0 \to x_1 = x_2 \Rightarrow \max \lambda = -c_1x_1 + c_2x_1 = (c_2 - c_1)x_1$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_1 > 0} x_1^* = 1\,,\ x_2^* = 1$$

$$\max x_0 = -c_1 + c_2 \xrightarrow{\text{جواب بهینه دوگان}} c_2 - c_1$$

$$\min w = y_2 + y_3 = c_2 - c_1 \xrightarrow{\text{گزینه «۴»}} \underbrace{c_2 - c_1 - t}_{y_3} + \underbrace{t}_{y_2} = c_2 - c_1$$

---

**مثال۱۰: مسئله زیر را درنظر بگیرید. در جواب بهینه مسئله دوگان، مقدار متغیر دوگان متناظر با اولین محدودیت، در کدام گزینه همواره صدق می‌کند؟** (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_0 = z \\ st: \quad & 2z - c^T x = 0 \\ & Ax = b \\ & x \ge 0, z \ge 0 \end{aligned}$$

۱) مقدار آن منفی است. ۲) مقدار آن مثبت است.

۳) مقدار آن برابر ۲ است. ۴) مقدار آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافی است صورت دوگان مسئله را بنویسیم:

$$\begin{array}{ll} \max x_0 = Z & \\ 2Z - C^T x = 0 & \theta \\ Ax = b & w \\ x \ge 0, x \ge 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \min\ 0 \times \theta + bw \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\theta \ge 1 \\ -\theta C^T + wA \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \theta \ge \frac{1}{2} \end{array}$$

بنابراین تنها گزینه (۲) می‌تواند پاسخ سؤال باشد.

---

**مثال۱۱: مسأله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید، که در آن u برداری معلوم است. دوگان این مسأله را (D) بنامید. کدام گزینه صحیح است؟**

(ریاضی ـ سراسری ۹۵)

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \qquad\qquad (P) \\ & Ax = 0 \\ & 0 \le x \le u \end{aligned}$$

۱) (D) یا جواب بهینه دارد، یا بی‌کران است. ۲) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

۳) اگر (D) شدنی باشد، آن‌گاه جواب بهینه دارد. ۴) (D) می‌تواند ناشدنی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید توجه داشت که $x = 0$ یک جواب شدنی برای مسأله اولیه است. از طرفی با توجه به اینکه $x \le u$ و $u$ یک مقدار محدود و کران‌دار می‌باشد، لذا $Z = c^T x$ نیز یک مقدار کران‌دار خواهد بود. پس مسأله اولیه دارای جواب بهینه شدنی و محدود می‌باشد، درنتیجه مسأله ثانویه نیز دارای جواب بهینه شدنی و محدود می‌باشد.

**توجه:** پاسخ سازمان سنجش گزینه (۱) می‌باشد که با توجه به توضیحات داده شده، مسأله اولیه شدنی و D نمی‌تواند نامحدود باشد.

# فصل پنجم

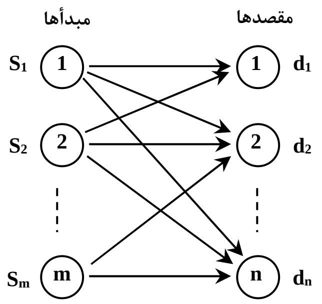
## «مدل حمل و نقل و تخصیص و مدل‌های شبکه»

### درسنامه (۱): مفاهیم پایه‌ای در مدل حمل و نقل

دسته مهمی از مسائل برنامه‌ریزی خطی، **مسأله حمل و نقل** می‌باشد. در مسأله حمل و نقل $m$ مبدأ (انبار) عرضه‌کننده کالا و $n$ مقصد (مشتری) تقاضاکننده کالا وجود دارد و هزینه حمل یک واحد کالا از هر مبدأ به هر مقصد مشخص است و هدف، مینیمم‌سازی هزینه حمل و نقل کالاها از مبدأها به مقصدها می‌باشد. همچنین **در مدل حمل و نقل ساده امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا دو مقصد وجود ندارد.**

از آنجایی‌که مسأله حمل و نقل حالت خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی است، می‌توان به روش سیمپلکس آن را حل کرد اما به دلیل ساختار ویژه آن تکنیک‌های حل دیگری که کارایی محاسباتی بیشتری دارند نیز برای حل مدل حمل و نقل ارائه شده است که در این فصل به بررسی آنها می‌پردازیم. مدل تخصیص نیز حالت خاصی از مدل حمل و نقل است.

### مدل سازی مسأله حمل و نقل




در یک مسأله حمل و نقل **$m$ مبدا (انبار) عرضه‌کننده** کالا وجود دارد و $S_i$ برای $i=1,\dots,m$ **موجودی کالای انبار $i$ ام** می‌باشد. همچنین **$n$ مقصد (مشتری) تقاضاکننده** کالا داریم که **مقدار کالای مورد نیاز مشتری $j$ ام** برابر $d_j$ برای $j=1,\dots,n$ می‌باشد. برای هر $1\le i\le m, 1\le j\le n$ فرض می‌کنیم $s_i>0, d_j>0$ زیرا اگر یکی از $S_i$ها یا $d_j$ها صفر باشد، می‌توان انبار یا مشتری متناظر با آن را از مسأله حذف کرد. **هزینه حمل یک واحد کالا از مبدأ $i$ ام به مقصد $j$ ام برابر $C_{ij}$ است.** متغیر تصمیم $x_{ij}$ را **مقدار کالایی فرض می‌کنیم که از انبار $i$ ام برای مقصد $j$ ام ارسال می‌گردد.** ساختار شبکه‌ای یک مسأله حمل و نقل به صورت مقابل است.

در یک مسأله حمل و نقل می‌خواهیم مقدار کالایی که باید از هر مبدأ به هر مقصد ارسال شود را بیابیم به گونه‌ای که هزینه حمل و نقل مینیمم شود و مقدار کالای ارسالی از هر انبار از موجودی کالای آن انبار تجاوز نکند و همچنین هر مقصد، حداقل کالای مورد تقاضایش را دریافت نماید. مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله حمل و نقل به صورت مقابل است:

$$\text{Min } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$
s.t.

قیدهای عرضه انبارها: $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le S_i \quad \text{for } i=1,\dots,m$

قیدهای تقاضای مقصدها: $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge d_j \quad \text{for } j=1,\dots,n$

$$x_{ij}\ge 0 \quad \text{for} \quad i=1,\dots,m\,;\; j=1,\dots,n$$

در مدل بالا $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ **نشان‌دهنده مجموع کالایی است که از انبار $i$ ام خارج می‌شود که نباید از $S_i$ تجاوز کند** و $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$ **نشان‌دهنده مجموع کالاهای ارسال شده برای مشتری $j$ ام است که باید حداقل به اندازه $d_j$ باشد.** مدل حمل و نقل بالا را **«غیراستاندارد»** می‌نامیم.

اگر در یک مسأله حمل و نقل $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ (مجموع تقاضا= مجموع عرضه)، در این صورت باید هر انبار تمام موجودی کالای خود را عرضه نماید تا تقاضای همه مشتریان برآورده شود و نیز می‌بایست هر مشتری دقیقاً به اندازه تقاضایش کالا دریافت کند زیرا اگر یک مشتری بیشتر از تقاضایش کالا دریافت کند، تمام تقاضای برخی از مشتریان برآورده نمی‌شود. پس با شرط برابری مجموع عرضه و مجموع تقاضا، مدل حمل و نقل به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \quad \text{for } i = 1,\dots,m \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \text{for } j = 1,\dots,n$$

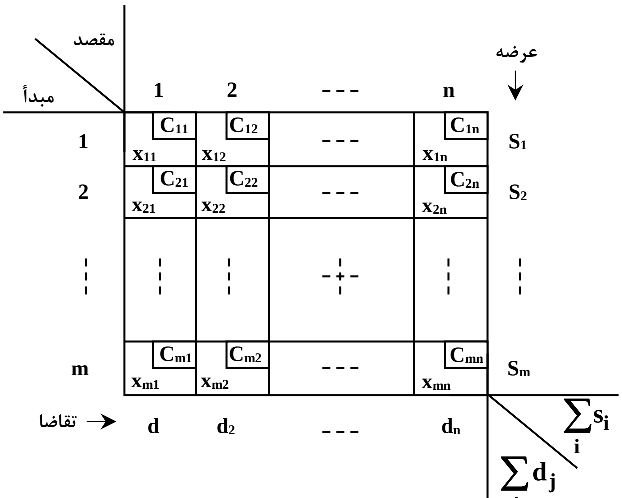
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,m\ ;\ j = 1,\dots,n$$

مدل حمل و نقل اخیر را حالت «**استاندارد**» می‌نامیم.

**تذکر:** روش‌هایی که برای حل یک مدل حمل و نقل ارائه می‌شود مربوط به حالت **استاندارد** می‌باشد و در ادامه فصل هرجا صحبت از مدل حمل‌ونقل می‌کنیم منظورمان حالت استاندارد می‌باشد و $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$. اگر در یک مسأله حمل و نقل $\sum_{i=1}^{m} S_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j$ در این صورت مسأله حمل و نقل **غیرمتوازن** است و می‌توان آن را با **افزودن مبدأ مجازی یا مقصد مجازی** به یک مسأله حمل و نقل متوازن یا استاندارد تبدیل کرد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

### نمایش جدولی مسأله حمل و نقل

هر مسأله حمل و نقل با $m$ مبدأ و $n$ مقصد که مقدار عرضه مبدأ $i$ ام برابر $S_i$ و میزان تقاضای مقصد $j$ ام برابر $d_j$ است و هزینه حمل یک واحد کالا از مبدأ $i$ ام به مقصد $j$ ام برابر $C_{ij}$ می‌باشد را می‌توان در جدول مقابل جای داد:




**مثال۱: در صورت حل مسأله حمل و نقل به روش سیمپلکس سطر تابع سیمپلکس متناظر با این جدول حمل و نقل متناظر است با:**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

| | $D_1$ | $D_2$ | |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | ۴ ۱ | ۳ ۵ | ۶ |
| $S_2$ | ۵ ۴ | ۶ | ۴ |
| | ۵ | ۵ | |

۱)

| | z | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | $-1$ | ۴ | ۳ | ۵ | ۶ | | ۳۹ |
| | | | | | | | |

۲)

| | z | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | $-1$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۲ | | ۳۹ |
| | | | | | | | |

۳)

| | z | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | | ۱ | ۵ | ۴ | ۰ | | ۳۹ |
| | | | | | | | |

۴)

| | z | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | | ۲ | ۰ | ۰ | ۲ | | ۳۹ |
| | | | | | | | |

**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جدول حمل و نقل متغیرهای $x_{11}$ و $x_{12}$ پایه‌ای می‌باشند پس ضریب سطر هدف آنها باید صفر باشد و فقط گزینه (۲) می‌تواند درست باشد.

## خواص مدل حمل و نقل

هر مدل حمل و نقل به دلیل ساختار ویژه‌اش دارای خواصی است که به بررسی آنها می‌پردازیم.

### ۱. شدنی بودن مسأله حمل و نقل

مسأله حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید. اگر میزان عرضه مبدا i ام برابر $S_i$ و میزان تقاضای مقصد j ام برابر $d_j$ باشد، می‌توان **یک جواب شدنی** به صورت مقابل ارائه کرد:

$$x_{ij} = \frac{S_i \times d_j}{L} \quad \text{for} \quad i = ۱,\dots,m \ ; \ j = ۱,\dots,n$$

که $L = \sum_{i=۱}^{m} S_i = \sum_{j=۱}^{n} d_j$. اثبات شدنی بودن این جواب به شرح زیر است:

از آنجایی که در مسأله حمل و نقل فرض کردیم: $d_j > ۰, S_i > ۰$، پس برای هر i و j داریم: $x_{ij} > ۰$. همچنین متغیرهای $x_{ij}$ با مقادیر داده شده در قیود عرضه و تقاضا صدق می‌کنند زیرا:

$$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = S_i \Rightarrow \sum_{j=۱}^{n} \frac{S_i \times d_j}{L} = \frac{S_i}{L}\sum_{j=۱}^{n} d_j = \frac{S_i}{L} \times L = S_i \qquad \text{for} \quad i = ۱,\dots,m$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = d_j \Rightarrow \sum_{i=۱}^{m} \frac{S_i \times d_j}{L} = \frac{d_j}{L}\sum_{i=۱}^{m} S_i = \frac{d_j}{L} \times L = d_j \qquad \text{for} \quad j = ۱,\dots,n$$

**نکته۱:** همانگونه که دیدیم می‌توان **جوابی شدنی برای یک مسأله حمل و نقل یافت که همه مؤلفه‌هایش مثبت باشند.**

**نکته۲: فضای شدنی** یک مسأله حمل و نقل **همواره ناتهی و محدود** است.

**نکته۳:** چون فضای شدنی مسأله حمل و نقل **محدود** است پس هر مسأله حمل و نقل **حتماً دارای جواب بهینه متناهی** خواهد بود.

**مثال۲: بخشی از فلسفه روش سیمپلکس حمل و نقل عبارت است از:** (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) انجام ندادن تست نسبت سیمپلکس

۲) به دست آوردن یک جواب بهینه با مقدار صحیح

۳) به طور مستقیم از جواب پایهٔ اولیه قابل قبول به جواب پایه بهینه رفتن

۴) به دست آوردن یک پایه قابل قبول (شدنی) اولیه بدون استفاده از متغیرهای مصنوعی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون محدودیت‌های مسأله حمل و نقل متوازن به صورت تساوی هستند، باید از روش M بزرگ یا روش دو فازی و با استفاده از متغیرهای مصنوعی یک جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به دست آورد ولی در سیمپلکس حمل و نقل بدون استفاده از متغیرهای مصنوعی یک BFS اولیه به دست می‌آوریم.

### ۲. تعداد متغیرها و محدودیت‌های مسأله حمل و نقل

هر مسأله حمل و نقل با **m مبدأ و n مقصد** دارای **$m \times n$ متغیر تصمیم‌گیری** است و **$m + n$ محدودیت دارد** که همواره یکی از محدودیت‌های مدل حمل و نقل زائد می‌باشد، به مثال زیر توجه کنید.

**مثال۳: مسأله حمل و نقل مقابل مفروض است:**

**مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله را بنویسید و زائد بودن یک محدودیت را در آن بررسی نمائید.**

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 50 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 40 |
| | 10 | 35 | 45 | |

☑ **پاسخ:**

$$\text{Min } z = ۲x_{۱۱} + ۳x_{۱۲} + x_{۱۳} + ۴x_{۲۱} + ۵x_{۲۲} + ۳x_{۲۳}$$
s.t.

$$\text{محدودیت‌های عرضه}\begin{cases} x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} = ۵۰ & :(۱) \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} = ۴۰ & :(۲) \end{cases} \qquad \text{محدودیت‌های تقاضا}\begin{cases} x_{۱۱} + x_{۲۱} = ۱۰ & :(۳) \\ x_{۱۲} + x_{۲۲} = ۳۵ & :(۴) \\ x_{۱۳} + x_{۲۳} = ۴۵ & :(۵) \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq ۰$$

مدل فوق دارای ۵ محدودیت است. یکی از محدودیت‌های این مدل، زائد است و می‌توان آن را از سایر محدودیت‌ها به دست آورد:

$$(۱) + (۲) - (۳) - (۴) : x_{۱۳} + x_{۲۳} = ۴۵$$

در بالا نشان دادیم که می‌توان محدودیت (۵) را با استفاده از دیگر محدودیت‌ها به دست آورد. این محدودیت زائد می‌تواند هر یک از محدودیت‌ها باشد.

### ۳. خواص ماتریس ضرایب تکنولوژی مسأله حمل و نقل

ماتریس ضرایب تکنولوژی مدل حمل و نقل مثال ۳ به صورت زیر است:

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۵\times ۶} \end{array}$$

ملاحظه می‌گردد که **ماتریس ضرایب تکنولوژی** یک مدل حمل و نقل **ماتریسی ۱,۰** است. این ماتریس در حالت کلی دارای **$(m+n)$ سطر و $m\times n$ ستون** است. از آنجائی‌که هر متغیر تصمیم‌گیری **یک‌بار در محدودیت‌های عرضه و یک‌بار در محدودیت‌های تقاضا** ظاهر می‌گردد پس هر ستون این ماتریس دارای **دو درایه با مقدار ۱** است و **بقیه درایه‌های ستون، صفر** هستند و می‌توان گفت:

تعداد درایه‌های ۱ ماتریس $A$ $=۲mn$ ؛ تعداد درایه‌های ۰ ماتریس $A$ $=(m+n)(m\times n)-۲mn$

**نکته۴:** رتبه ماتریس ضرایب تکنولوژی $A$ در یک مدل حمل و نقل با $m$ مبدأ و $n$ مقصد عبارت است از: $\boxed{RANK(A)=m+n-۱}$ زیرا **یکی از محدودیت‌ها زائد** است.

**نکته۵:** هر **زیرماتریس مربعی** که از ماتریس $A$ در مدل حمل و نقل انتخاب گردد، **دترمینانش ۰ یا ۱ یا ۱-** است. از آنجایی که ماتریس پایه $B$ نیز یک زیرماتریس مربعی از ماتریس $A$ است، پس $\boxed{\det(B)=-۱ \text{ یا } ۱}$. همچنین همه درایه‌های ماتریس پایه $B$ **صفر یا یک** هستند پس در **ماتریس $B^{-۱}$ همه درایه‌ها ۰ یا ۱ یا ۱-** می‌باشند.

**نکته ۶:** در مدل حمل و نقل با $m$ مبدأ و $n$ مقصد ستون $a_{ij}$ ماتریس ضرایب تکنولوژی به صورت زیر است:

$$a_{ij}^T=[\overbrace{۰,\overset{\text{تا}}{\dots},\underset{\uparrow}{۱},\dots,۰}^{m},\overbrace{۰,\overset{\text{تا}}{\dots},\underset{\uparrow}{۱},\dots,۰}^{n}]$$

مکان $i$ام مکان $j$ام

به عنوان مثال در یک مسأله حمل و نقل با $m=۲$ مبدأ و $n=۳$ مقصد، ستون $a_{۲۳}$ ماتریس ضرایب تکنولوژی به صورت مقابل است: $a_{۲۳}^T=(۰,۱,۰,۰,۱)$

**نکته۷:** در یک مدل حمل و نقل اگر **مقادیر عرضه و تقاضا** همگی **عدد صحیح** باشند، در این صورت مقادیر متغیرهای پایه در هر **جواب پایه‌ای شدنی** و از جمله **جواب بهینه، اعداد صحیح** خواهند بود.

**اثبات:** مقادیر متغیرهای پایه عبارتند از : $X_B=B^{-۱}b$. مؤلفه‌های بردار $b$ همان مقادیر عرضه و تقاضا هستند، پس مؤلفه‌های بردار $b$ همگی عدد صحیح می‌باشند. همانطور که گفته شد همه درایه‌های ماتریس $B^{-۱}$ به صورت ۰، ۱ یا ۱- می‌باشند پس مؤلفه‌های $X_B$ یعنی مقادیر متغیرهای پایه نیز عدد صحیح خواهند بود.

**نکته۸:** هر ماتریس پایه در مسأله حمل و نقل یک **ماتریس مثلثی** است.

### ۴. تعداد متغیرهای پایه‌ای هر BFS در مسأله حمل و نقل

مسأله حمل و نقل را می‌توان با استفاده از روش **$M$- بزرگ** حل کرد. برای این کار به **$m+n$ متغیر مصنوعی** نیاز داریم زیرا همه محدودیت‌ها به صورت **تساوی** هستند و بعد از خروج متغیرهای مصنوعی از پایه **همواره یکی از آنها با مقدار صفر در پایه باقی می‌ماند** (زیرا یکی از محدودیت‌های مسأله حمل و نقل **زائد** است) و همه جداول سیمپلکس در حالت **تباهیده** می‌باشند.

پس اگر مسأله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود، **تعداد متغیرهای پایه در هر جدول** $m+n$ (به تعداد **محدودیت**هاست) که همواره یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه قرار دارد و **$m+n-۱$ متغیر پایه‌ای دیگر از متغیرهای اصلی** مسأله حمل و نقل می‌باشند. هنگام نمایش یک جواب پایه‌ای شدنی در جدول حمل و نقل فقط $m+n-۱$ متغیر پایه‌ای که از متغیرهای تصمیم اصلی می‌باشند را ذکر می‌کنیم. **متغیر پایه‌ای مصنوعی که مقدار صفر دارد در جدول حمل و نقل نشان داده نمی‌شود.**

**نکته۹: تعداد متغیرهای پایه‌ای هر جواب پایه‌ای شدنی (BFS)** در جدول حمل و نقل **$m+n-۱$** است.

**مثال۴: اگر مسئله حمل‌ونقل متوازن با $m$ مبدأ و $n$ مقصد به روش سیمپلکس استاندارد حل شود، تعداد متغیرهای غیرپایه در تابلوی بهینه و حداکثر تعداد عناصر غیرصفر در جواب بهینه به‌ترتیب برابر کدام است؟** (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۷)

۱) $m+n-۱\ ,\ mn-(n+m)-۱$ ۲) $m+n-۱\ ,\ m(n-۱)-n+۱$

۳) $m+n\ ,\ m(n-۱)-n$ ۴) $m+n\ ,\ mn-(n+m)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\begin{cases} \text{تعداد کل متغیرها} = mn \\ \text{تعداد پایه‌ای‌ها} = m+n-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد غیرپایه‌ای‌ها} = mn-m-n+۱=m(n-۱)-n+۱$$

حداکثر تعداد عناصر غیرصفر $=m+n-۱$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ سؤال است.

**مثال۵: هر حل امکان‌پذیر (موجه) در یک مدل حمل و نقل با $m$ نقطه عرضه و $n$ نقطه تقاضا:**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری۹۱)

۱) $(m+n-1)$ متغیر دارای مقدار غیر منفی دارد.
۲) حداکثر $(m+n-1)$ متغیر دارای مقدار غیر منفی دارد.
۳) حداکثر به تعداد $(m \times n)$ متغیر با مقدار مثبت دارد.
۴) $(m+n-1)$ متغیر دارای مقدار مثبت دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون گفته هر حل امکان‌پذیر یعنی یک نقطه از فضای شدنی انتخاب شده است که این نقطه می‌تواند حداکثر همه متغیرهایش مثبت باشد بنابراین حداکثر $m \times n$ متغیر با مقدار مثبت دارد. اینجا باید دقت کرد که نقطه موجه گفته شده است نه نقطه موجه گوشه‌ای.

**مثال۶: در مسئله زیر اگر یک محدودیت حذف شود:** (دکتری ۹۷)

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 + x_3 = 1 \\ & x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) ناحیه موجه مسئله بزرگتر می‌شود.
۲) جواب بهینه مسئله تغییری نمی‌کند.
۳) رتبه ماتریس ضرایب تکنولوژی کاهش می‌یابد.
۴) ممکن است جواب بهینه مسئله بهتر شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مدل ارائه شده در حقیقت یک مدل شبکه می‌باشد که دارای یک محدودیت زائد است. بنابراین با حذف یکی از محدودیت‌های مسئله، هیچ تغییری در فضای موجه مسئله اتفاق نمی‌افتد و در نتیجه جواب بهینه مسئله نیز تغییری نخواهد کرد.

## متوازن کردن مسأله حمل و نقل غیرمتوازن

روش‌های حلی که برای یک مسأله حمل و نقل در ادامه بیان خواهد شد، برای حل یک مسأله حمل و نقل استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرند و شرط اینکه یک مسأله حمل و نقل به حالت **استاندارد** تبدیل شود، **برابری مجموع عرضه‌ها و مجموع تقاضاها** است $\left(\sum_i S_i = \sum_j d_j\right)$. اگر در مسأله‌ای $\sum_i S_i \neq \sum_j d_j$ در این صورت برای تبدیل آن به یک مسأله متوازن دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

### ۱. اگر $\sum_i S_i < \sum_j d_j$

یعنی **مجموع تقاضاها بیشتر از مجموع عرضه‌ها** باشد، بدیهی است که در نهایت برخی از مشتریان مقداری از تقاضایشان را دریافت نخواهند کرد. در این حالت **مبدا مجازی $m+1$ام** با **مقدار عرضه** $S_{m+1} = \sum_j d_j - \sum_i S_i$ و **ضرایب هزینه** $C_{m+1,j} = 0$ برای $j = 1, \ldots, n$ را به مسأله می‌افزائیم تا متوازن گردد.

**نکته۱۰:** اگر در جواب بهینه داشته باشیم $x^*_{m+1,t} = a > 0$، به این معنی است که بـه انـدازه $a$ واحـد از نیـاز مشـتری $t$ از یـک انبـار مجـازی (که وجود خارجی ندارد) برآورده شده است؛ به عبارت دیگر در جواب بهینه، **مشتری $t$ به اندازه $a$ واحد از تقاضای خود را دریافت نکرده است.**

### ۲. اگر $\sum_i S_i > \sum_j d_j$

یعنی **مجموع تقاضاها کمتر از مجموع عرضه‌هاست،** پس در نهایت مقداری از کالاها در بعضی از انبارها باقی خواهد ماند. در این حالت، **مقصد مجازی $n+1$ام** با **مقدار تقاضای** $d_{n+1} = \sum_i S_i - \sum_j d_j$ و **ضرایب هزینه** $C_{i,n+1} = 0$ برای $i = 1, \ldots, m$ را به مسأله می‌افزائیم تا متوازن گردد.

**نکته۱۱:** اگر در جواب بهینه داشته باشیم: $x^*_{t,n+1} = b > 0$، به این معنی است که در جواب بهینه، **$b$ واحد کالا در انبار $t$ ام باقی مانده است.**

**نکته۱۲:** وجود مقصد مجازی در مسأله حمل و نقل نشانه اضافه عرضه در مبداها است.

**مثال۷: در یک مسأله برنامه‌ریزی حمل و نقل، اگر تعداد مراکز عرضه ۶ و تعداد مراکز تقاضا ۵ باشد و مجموع عرضه و تقاضا با یکدیگر برابر نباشند، آنگاه تعداد متغیرهای پایه‌ای چه تعداد است؟** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون مسأله متوازن نیست، باید یک مقصد مجازی به مسأله اضافه کنیم. در نتیجه تعداد متغیرهای پایه‌ای $m+n-1 = 6+6-1 = 11$ خواهد بود.

**مثال۸:** مسأله حمل و نقل غیرمتوازن زیر را متوازن کنید:

| | 1 | 2 | 3 | عرضه |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 30 |
| 2 | 5 | -1 | 1 | 50 |
| 3 | 6 | 1 | 9 | 20 |
| تقاضا | 40 | 70 | 60 | 100 / 170 |

**پاسخ:** یک مبدأ مجازی با عرضه ۷۰ واحد به مسأله می‌افزاییم:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 30 |
| 2 | 5 | -1 | 1 | 50 |
| 3 | 6 | 1 | 9 | 20 |
| 4 : مبدأ مجازی | 0 | 0 | 0 | 70 |
| | 40 | 70 | 60 | 170 / 170 |

**مثال۹:** فرض کنید $a'_i$ ، $a''_i$ ، $b'_j$ ، $b''_j$ اعداد مثبت دارای شروط $a'_i \le a''_i , b'_j \le b''_j$ برای $(i=1,\dots,m)$ , $(j=1,\dots,n)$ باشند. مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید، مدل زیر حل قابل قبول دارد؛ اگر و فقط اگر داشته باشیم: (دکتری ۹۶)

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

st :

$$a'_i \le \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a''_i \quad (i=1,\dots,m)$$

$$b'_j \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b''_j \quad (j=1,\dots,n)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i=1,\dots,m \;,\; j=1,\dots,n)$$

۱) $\sum_{i=1}^{m} a''_i \ge \sum_{i=1}^{m} a'_i \;,\; \sum_{j=1}^{n} b''_j \ge \sum_{j=1}^{n} b'_j$

۲) $\sum_{i=1}^{m} a''_i \ge \sum_{j=1}^{n} b'_j \;,\; \sum_{i=1}^{m} a'_i \le \sum_{j=1}^{n} b''_j$

۳) $\sum_{i=1}^{m} a''_i \le \sum_{j=1}^{n} b'_j \;,\; \sum_{i=1}^{m} a'_i \ge \sum_{j=1}^{n} b''_j$

۴) $\sum_{i=1}^{m} a''_i + \sum_{j=1}^{n} b''_j \ge \sum_{i=1}^{m} a'_i + \sum_{j=1}^{n} b'_j$

**پاسخ:** گزینه «۴» در این سؤال تنها از نامساوی‌های ارائه شده در داخل سؤال استفاده می‌کنیم و برای مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل داده شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j x_{ij} \le a''_i \Rightarrow \sum_i\sum_j x_{ij} \le \sum_i a''_i \\ \sum_i x_{ij} \le b''_j \Rightarrow \sum_j\sum_i x_{ij} \le \sum_j b''_j \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{ⓐ}{\boxed{\sum_i\sum_j x_{ij} + \sum_j\sum_i x_{ij} \le \sum_i a''_i + \sum_j b''_j}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j x_{ij} \ge a'_i \Rightarrow \sum_i\sum_j x_{ij} \ge \sum_i a'_i \\ \sum_i x_{ij} \ge b'_j \Rightarrow \sum_j\sum_i x_{ij} \ge \sum_j b'_j \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{ⓑ}{\boxed{\sum_i\sum_j x_{ij} + \sum_j\sum_i x_{ij} \ge \sum_i a'_i + \sum_j b'_j}}$$

$$\xrightarrow{ⓐ,ⓑ} \sum_i a'_i + \sum_j b'_j \le \sum_i a''_i + \sum_j b''_j$$

**مثال۱۰:** در یک مسأله برنامه‌ریزی حمل و نقل تعداد مراکز عرضه ۴ و تعداد مراکز تقاضا ۳ است. اگر مجموع عرضه و تقاضا با هم برابر نباشند، آنگاه:

۱) تعداد متغیرهای پایه‌ای در جواب پایه‌ای شدنی ۷ است.
۲) تعداد متغیرهای پایه‌ای در جواب پایه‌ای شدنی ۶ است.
۳) تعداد متغیرهای پایه‌ای در جواب پایه‌ای شدنی ۸ است.
۴) تعداد متغیرهای پایه‌ای در جواب پایه‌ای شدنی ۵ است.

**پاسخ:** گزینه «۱» چون مسأله متوازن نیست پس باید یک مبدأ یا مقصد مجازی به مسأله بیفزاییم و در نتیجه $m+n=8$ خواهد شد و تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر جواب پایه‌ای شدنی $m+n-1=7$ می‌باشد.