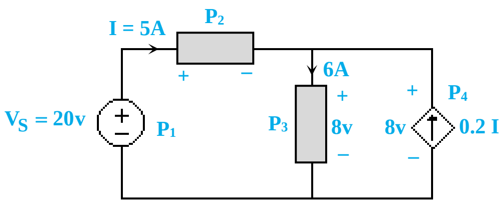
فصل اول

«مبانی و قضایای اولیه مدارهای الکتریکی و قضایای تونن و نورتن»

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: در مدار شکل زیر توان هر یک از عناصر را پیدا کنید.

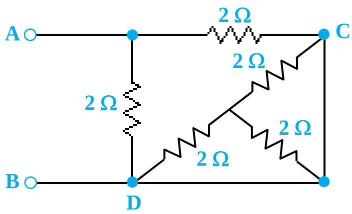


پاسخ:

$$\begin{cases} P_1 = -20\times5 = -100\,w &, \quad P_2 = 12\times5 = 60\,w \\ P_3 = 8\times6 = 48\,w &, \quad P_4 = (-8)(0/2I) = -8\times0/2\times5 = -8\,w \end{cases}$$

منبع ولتاژ مستقل و منبع جریان وابسته هر کدام به ترتیب ۱۰۰ و ۸ وات توان تولید و دو عنصر مداری دیگر هر دو توان مصرف می‌کنند. توجه شود که اندازه مجموع توان تولید شده با اندازه مجموع توان مصرفی برابر است. بنابراین جمع توان‌ها در یک شبکه صفر است.

مثال۲: مقاومت معادل در شکل روبرو از دو پایانه A و B چند اهم است؟



۱) ۱

۲) ۱/۳۳

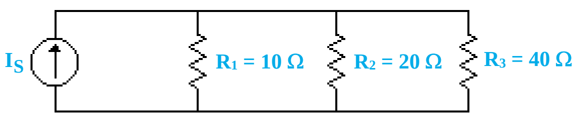
۳) ۱/۴

۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» با دقت در شکل مدار مشاهده می‌شود که مقاومت‌های ۲ اهمی شاخه بالا و سمت چپ مدار با هم موازی هستند (به علت اتصال کوتاه بودن نقاط C و D، مقاومت‌های شاخه مثلثی شکل در واقع اتصال کوتاه شده‌اند.) حال داریم:

$$R_{AB} = \frac{2\times2}{2+2} = 1\Omega$$

مثال۳: در شکل مقابل توان مصرفی در مقاومت R_2 برابر ۵۰۰ وات است. جریان مقاومت R_3 چند آمپر است؟



۱) ۲/۵

۲) ۵

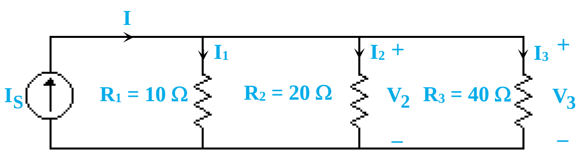
۳) ۱۰

۴) ۶۲/۵

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ولتاژ مقاومت R_2 را با توجه به این‌که توان تلف شده در آن معلوم است، محاسبه می‌کنیم:

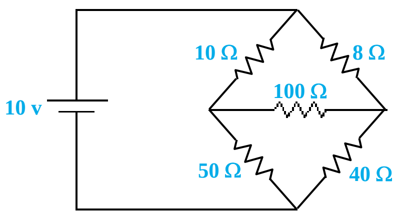
$$P_{R_2} = \frac{(V_2)^2}{R_2} \Rightarrow 500 = \frac{(V_2)^2}{20} \Rightarrow V_2 = 100v$$

حال با استفاده از این نکته که ولتاژ دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است، می‌توان جریان I_3 را حساب کرد:



$$V_2 = V_3 \Rightarrow I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{100}{40} = 2/5\,A$$

مثال۴: در مدار مقابل جریان عبوری از مقاومت 100Ω چند میلی آمپر است؟



۱) ۰

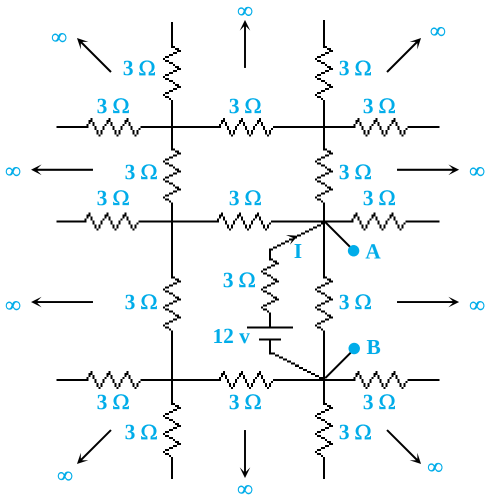
۲) ۱۰

۳) ۲۰

۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۱» مدار یک پل وتستون در حال تعادل است $(8\times50 = 10\times40)$ و جریان عبوری از مقاومت ۱۰۰ اهم صفر است.

مثال۵: در مدار زیر مقدار جریان I کدام است؟



۱) ۳/۶۶A

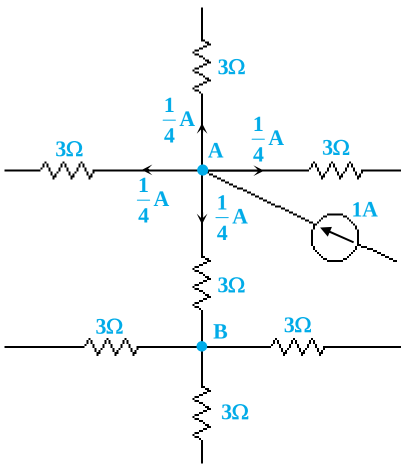
۲) ۰/۶۶A

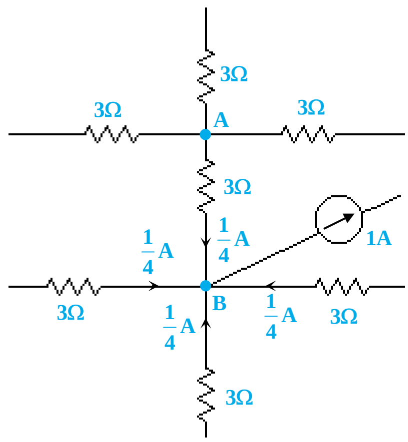
۳) ۲/۶۶A

۴) ۱/۶۶A

پاسخ: گزینه «۳» برای بدست آوردن جریان I لازم است که ابتدا مقاومت معادل بین نقاط B و A محاسبه شود. لذا ابتدا منبع جریان یک آمپری را به نقطه A وارد کرده و با استفاده از قانون تقسیم جریان و تقارن مدار، جریان مقاومت‌های موجود بین پایه‌های B و A را در کوتاهترین مسیر مابین نقاط B و A بدست می‌آوریم. سپس با نوشتن KVL مابین دو نقطه B و A در مسیر مذکور، V_{AB} را در اثر ورود منبع جریان محاسبه می‌کنیم.

در ادامه حل، منبع جریان یک آمپری را از نقطه B خارج کرده و همان مراحل ذکر شده در بالا را اجرا می‌کنیم تا V_{AB} در اثر خروج منبع جریان یک آمپری محاسبه شود. حال ولتاژهای بدست آمده در اثر ورود و خروج منبع جریان را با هم جمع می‌کنیم تا V_{AB} نهایی بدست آید و سپس از فرمول $R_{eq}=\frac{V_{AB}}{۱A}$ مقدار R_{eq} را محاسبه می‌کنیم. حال با توجه به موارد فوق، منبع جریان یک آمپری را به نقطه A وارد می‌کنیم. در این حالت با توجه به تقارن مدار، جریان در نقطه A به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. در ادامه حل، منبع جریان یک آمپری را از نقطه B خارج می‌کنیم. در این صورت نیز جریان ۱A از ۴ مسیر متصل به نقطه B به صورت مساوی تأمین می‌شود.

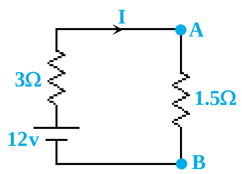




$(V_{AB}$ در اثر ورود منبع جریان یک آمپری$)=۳\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}v$ و $(V_{AB}$ در اثر خروج منبع جریان یک آمپری$)=۳\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}v$

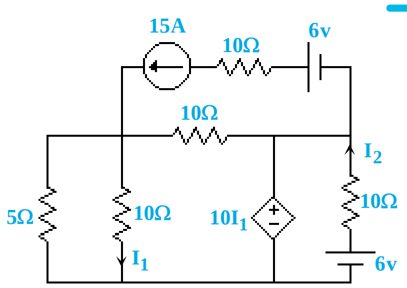
V_{AB} در اثر ورود و خروج منبع جریان یک آمپری $=۳\times\frac{۱}{۴}+۳\times\frac{۱}{۴}=\frac{۶}{۴}=۱/۵v \Rightarrow R_{eq}(A,B)=\frac{V_{AB}}{۱A}=\frac{۱/۵v}{۱A}=۱/۵\Omega$

حال با قرار دادن مقاومت معادل بین نقاط A و B داریم:



$$I=\frac{۱۲}{۳+۱/۵}=۲/۶۶A$$

مثال۶: در مدار مقابل جریان $I_۱+I_۲$ کدام است؟



۱) ۰/۴A

۲) ۰/۶A

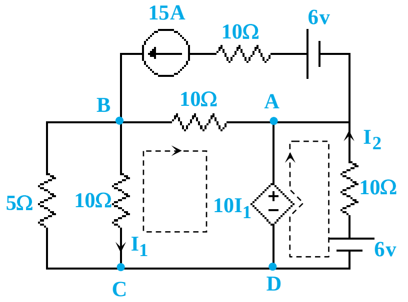
۳) ۱/۶A

۴) ۱/۴A

پاسخ: گزینه «۲» مطابق شکل زیر ولتاژ شاخه BC برابر $۱۰I_۱$ و ولتاژ شاخه AD نیز $۱۰I_۱$ است. حال با نوشتن KVL در حلقه مرکزی داریم:

$$-V_{BC}-V_{AB}+V_{AD}+V_{DC}=۰\Rightarrow -۱۰I_۱-V_{AB}+۱۰I_۱+۰=۰\Rightarrow V_{AB}=۰\Rightarrow i_{AB}=\frac{V_{AB}}{۱۰}=۰$$

بنابراین جریان مقاومت ۱۰Ω مابین نقاط A و B صفر است. حال منبع جریان ۱۵A بین مقاومت‌های ۱۰Ω و ۵Ω در سمت چپ مدار تقسیم می‌شود.



$$I_1 = 15\times\frac{5}{10+5} = 5A$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$-10I_1 - 10I_2 + 6 = 0 \Rightarrow -10\times 5 - 10\times I_2 + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 5A \\ I_2 = -4/4A \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I_1 + I_2 = 0/6A}$$

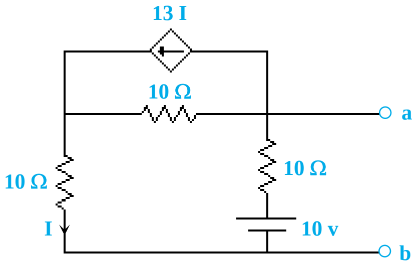
مثال ۷: در مدار مقابل V_{ab} چند ولت است؟

۱) ۱۱-

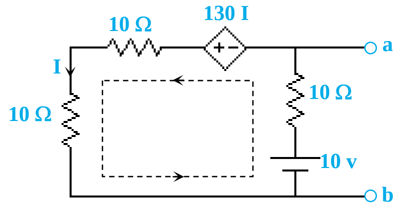
۲) ۹-

۳) ۹

۴) ۱۱



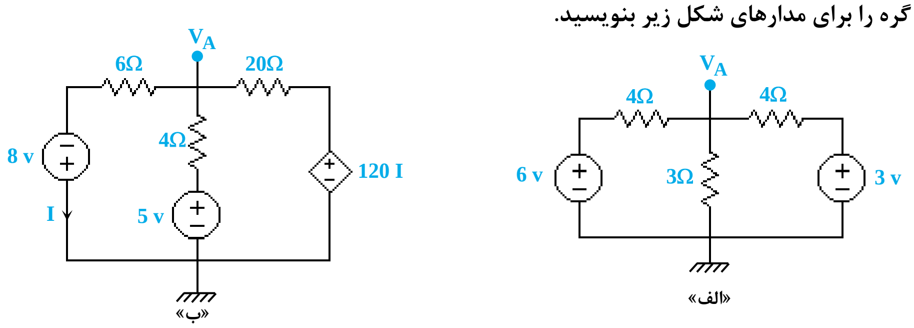
پاسخ: گزینه «۴» با تبدیل منبع جریان وابسته به منبع ولتاژ وابسته و نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



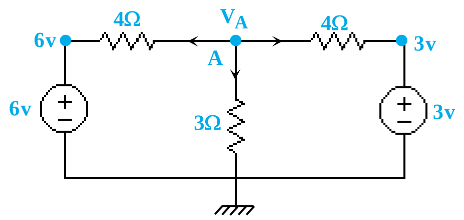
$$-130I + (10+10)I - 10 + 10I = 0 \Rightarrow 100I = -10 \Rightarrow I = -\frac{1}{10}A$$

$$V_{ab} = -10I + 10 = -10\times\frac{-1}{10} + 10 \Rightarrow \mathbf{V_{ab} = 11v}$$

مثال ۸: معادلات گره را برای مدارهای شکل زیر بنویسید.

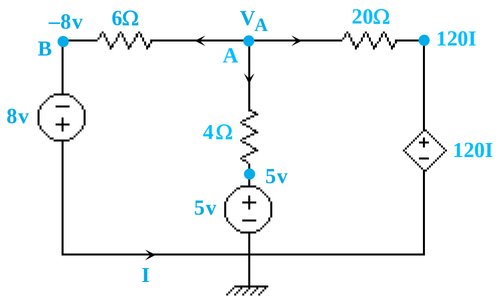


در مدار (الف) در بالای مدار سه گره وجود دارد. با توجه به اینکه فقط گره A، محل تقاطع بیش از دو المان است، برای KCL مناسب می‌باشد. با فرض خارج شونده بودن جریان‌ها از گره A، رابطه KCL را می‌نویسیم.



(با استفاده از قرارداد جریان‌های خارج‌شونده با علامت مثبت) $\frac{V_A - 6}{4} + \frac{V_A}{3} + \frac{V_A - 3}{4} = 0$

در مدار (ب) نیز فقط یک گره که شامل تقاطع بیش از دو المان باشد، وجود دارد. با نام‌گذاری این گره با نام A، رابطه KCL را در این گره می‌نویسیم.



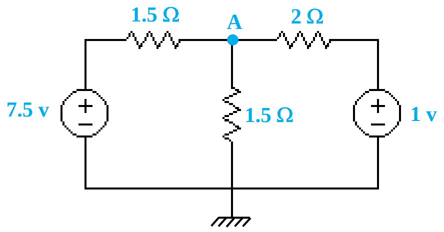
$$\frac{V_A - (120I)}{20} + \frac{V_A - 5}{4} + \frac{V_A - (-8)}{6} = 0 \qquad (1)$$

حال با توجه به قانون اهم داریم:

$$\frac{V_A - (-8)}{6} = I \qquad (2)$$

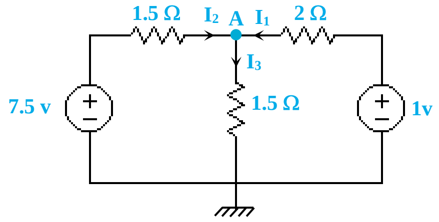
با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول شامل معادلات (۱) و (۲)، ولتاژ V_A را بدست می‌آوریم.

مثال ۹: در شکل روبرو ولتاژ نقطه A چند ولت است؟



۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید انتخاب جهت جریان اختیاری می‌باشد. به عنوان مثال در حل این سؤال I_1 و I_2 را وارد شونده فرض کردیم. حال با نوشتن معادله KCL در گره A داریم:

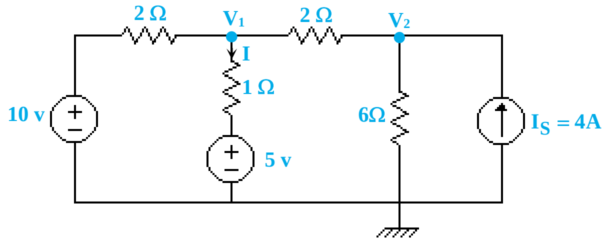


$$\underbrace{\frac{1-V_A}{2}}_{I_1}+\underbrace{\frac{7.5-V_A}{1.5}}_{I_2}=\underbrace{\frac{V_A}{1.5}}_{I_3}\xrightarrow{\text{با ضرب طرفین تساوی در عدد ۶}}$$

$$3(1-V_A)+4(7.5-V_A)=4V_A$$

$$\Rightarrow 3-3V_A+30-4V_A-4V_A=0 \Rightarrow 11V_A=33 \Rightarrow V_A=\frac{33}{11}=3\,\text{v}$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر مقدار V_2 چند ولت است؟

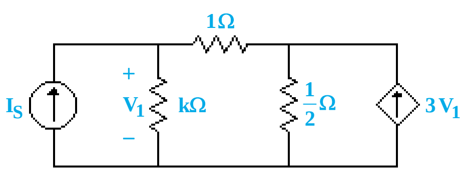


۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۲۴
۴) ۴۸

پاسخ: گزینه «۲» با نوشتن KCL در دو گره مدار (با فرض این‌که همه جریان‌ها خارج شونده از گره‌ها هستند) داریم:

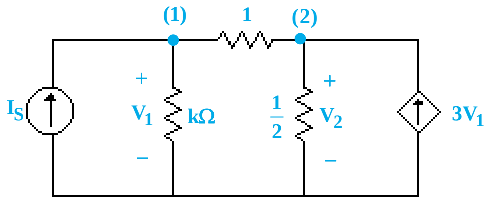
$$\begin{cases}\frac{V_1-10}{2}+\frac{V_1-5}{1}+\frac{V_1-V_2}{2}=0\\ \frac{V_2-V_1}{2}+\frac{V_2}{6}-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}V_1-10+2(V_1-5)+V_1-V_2=0\\ 3\times(V_2-V_1)+V_2-24=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4V_1-V_2=20\\ -3V_1+4V_2=24\end{cases} \Rightarrow V_2=12\,\text{v}$$

مثال ۱۱: اگر بخواهیم مدار شکل زیر جواب یکتایی داشته باشد، مقدار k باید کدام مقدار نباشد؟



۱) $\frac{1}{3}$
۲) ۳
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» گره‌های (۱) و (۲) در مدار را بصورت زیر در نظر گرفته و شروع می‌کنیم به KCL زدن.

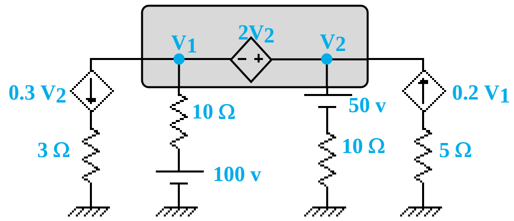


ابتدا از گره (۲) شروع می‌کنیم: $\frac{V_2-V_1}{1}+\frac{V_2}{0.5}-3V_1=0 \Rightarrow V_2=\frac{4}{3}V_1$

و حالا برای گره (۱) داریم: $-I_S+\frac{V_1}{k}+\frac{V_1-V_2}{1}=0 \xrightarrow{V_2=\frac{4}{3}V_1} -I_S+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{k}\right)V_1=0$

از رابطه‌ی بدست آمده، مشخص است برای این که بتوان V_1 را بطور یکتا برحسب I_S محاسبه نمود، باید k مخالف ۳ باشد تا ضریب V_1 صفر نشود.

مثال ۱۲: در مدار زیر مقدار ولتاژ $V_۱ - V_۲$ کدام است؟



۱) $۰ V$

۲) $۶۲V$

۳) $-۶۰ V$

۴) $-۶۲V$

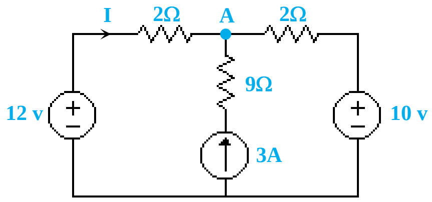
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نوشتن KCL در ابرگره مدار، مقدار $V_۱$ و $V_۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{V_۱ - ۱۰۰}{۱۰} + ۰/۳V_۲ + \dfrac{V_۲ - ۵۰}{۱۰} = ۰/۲V_۱ \\ V_۲ - V_۱ = ۲V_۲ \quad \Rightarrow \quad V_۲ = -V_۱ \end{cases}$$

با حل معادلات بالا برای $V_۱$ و $V_۲$ داریم:

$$V_۲ = ۳۰ v \ , V_۱ = -۳۰ v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_۱ - V_۲ = -۶۰ v}$$

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر مقدار جریان I چند آمپر است؟



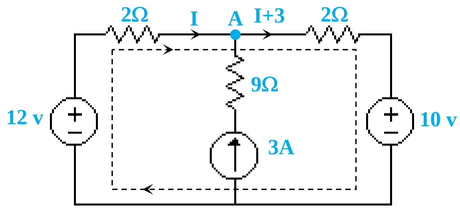
۱) -۱

۲) ۲

۳) ۳

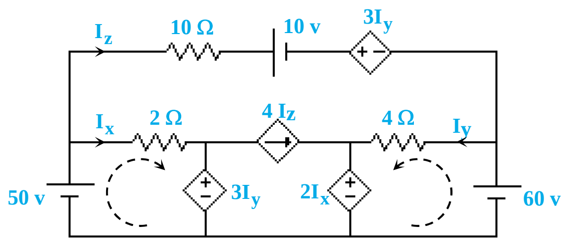
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جریان مش سمت چپ برابر I است. اگر KCL را در گره A بنویسیم، جریان مش سمت راست، برابر $\mathbf{I+۳}$ بدست می‌آید. حالا با نوشتن KVL در ابرمش مدار داریم:



$$(۲ \times I) + ۲(I+۳) + ۱۰ - ۱۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴I = -۴ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I = -۱A}$$

مثال ۱۴: در مدار زیر مقدار I_z کدام است؟



۱) $-۱۰ A$

۲) $۱۰ A$

۳) $۵A$

۴) $-۵A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه I_z، ابتدا با نوشتن KVL در حلقه‌های سمت چپ و راست مدار، مقادیر I_x و I_y را محاسبه می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-۵۰ + ۲I_x + ۳I_y = ۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$-۶۰ + ۴I_y + ۲I_x = ۰ \qquad (۲)$$

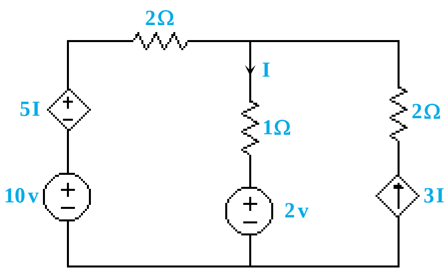
با حل دستگاه شامل روابط (۱) و (۲) داریم:

$$I_x = ۱۰ A \qquad \text{و} \qquad I_y = ۱۰ A$$

برای محاسبه I_z، در حلقه بیرونی مدار KVL می‌نویسیم:

$$-۵۰ + ۱۰I_z + ۱۰ + ۳I_y + ۶۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad -۵۰ + ۱۰I_z + ۱۰ + ۳ \times ۱۰ + ۶۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_z = -۵A}$$

مثال ۱۵: در مدار زیر مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



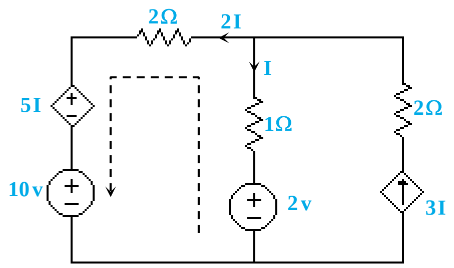
۱) -۱

۲) ۱

۳) ۲

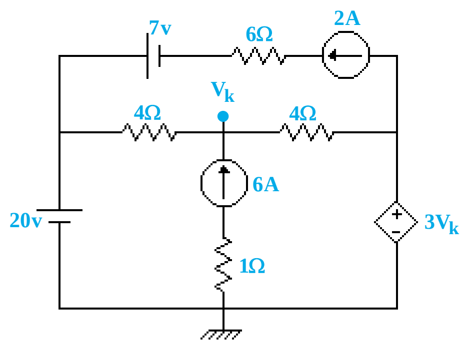
۴) -۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وجود منبع جریان وابسته در حلقه سمت راست، فقط حلقه سمت چپ برای KVL مناسب است. بنابراین با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:



$$-2-I+2I\times2+5I+10=0 \Rightarrow \mathbf{I=-1A}$$

مثال ۱۶: در مدار زیر مقدار V_k برحسب ولت کدام است؟



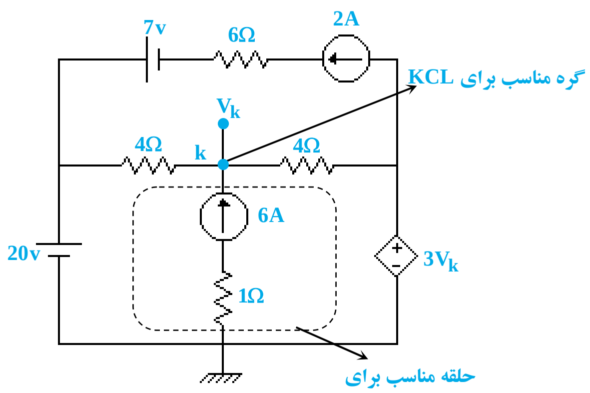
۱) -22

۲) -44

۳) 22

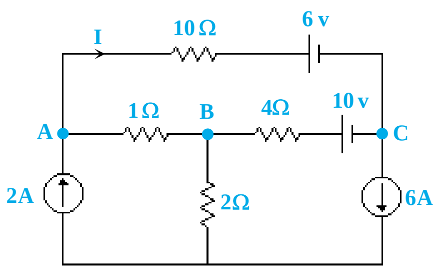
۴) 44

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۳ گره است. با توجه به این‌که ولتاژ گره‌های سمت راست و چپ به ترتیب $3V_k$ و $20v$ است، لذا در گره‌های فوق اعمال KCL مناسب نمی‌باشد و برای حل مدار از روش گره فقط باید در گره وسط مدار اعمال KCL شود. با توجه به وجود منبع جریان در شاخه وسطی در مدار، حلقه‌های سمت راست و چپ در پایین مدار برای KVL مناسب نیست. همچنین به علت وجود یک منبع جریان در شاخه بالای مدار، حلقه بالای مدار برای اعمال KVL مناسب نیست. بنابراین مدار دارای فقط یک حلقه به صورت نشان داده شده در شکل روبرو است. با توجه به این‌که مدار دارای یک حلقه و یک گره است، باید به مجهول مدار توجه شود و با توجه به مجهول بودن V_k از روش KCL استفاده می‌شود. با نوشتن KCL در گره k داریم:



$$\frac{V_k-20}{4}+\frac{V_k-3V_k}{4}=6 \Rightarrow V_k-20+V_k-3V_k=24 \Rightarrow \mathbf{V_k=-44v}$$

مثال ۱۷: در مدار زیر مقدار جریان I برحسب آمپر کدام است؟



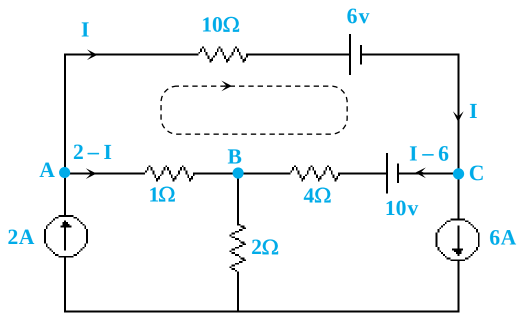
۱) ۸

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

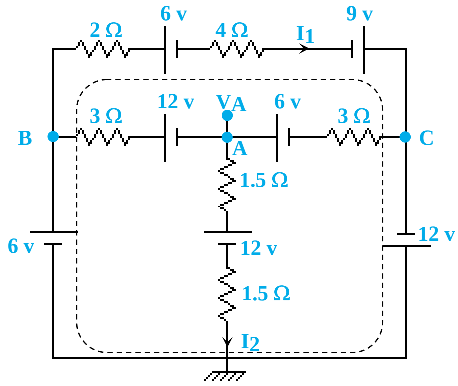
۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با دقت در مدار دیده می‌شود که حلقه‌های پایین مدار در سمت چپ و راست دارای منبع جریان بوده و برای KVL مناسب نیستند. لذا مدار فقط دارای یک حلقه مناسب برای KVL است و حلقه فوق در بالای مدار موجود است. همچنین مدار دارای ۳ گره با نام‌های C و B و A بوده و لذا دارای ۳ معادله KCL است. حال با توجه به تعداد حلقه‌ها و گره‌ها دیده می‌شود که روش KVL مناسب‌تر خواهد بود. برای اعمال KVL در حلقه بالای مدار باید جریان یا ولتاژ تمام المان‌های موجود در حلقه مشخص شود. لذا با نوشتن KCL در نقاط A و C جریان مقاومت‌های 1Ω و 4Ω مشخص می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه (بالای مدار) داریم:



$$10I+6-10+4(I-6)-1\times(2-I)=0 \Rightarrow \mathbf{I=\frac{30}{15}=2A}$$

مثال۱۸: در مدار زیر مقادیر جریان‌های $I_۲$ و $I_۱$ کدام است؟



۱) $I_۱ = ۳A \quad , \quad I_۲ = -۴A$

۲) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = ۳A$

۳) $I_۱ = -۴A \quad , \quad I_۲ = ۳/۵A$

۴) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = -۴A$

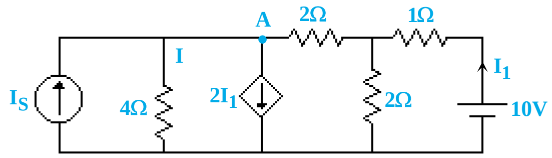
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ نقاط C و B نسبت به زمین مشخص است و فقط گره A با ولتاژ نامعین موجود است، بنابراین مدار با یک KCL در نقطه A حل شده و به KVL در سه حلقه مدار نیاز نیست. با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A + ۱۲ - ۶}{۳} + \frac{V_A - ۶ + ۱۲}{۳} + \frac{V_A - ۱۲}{۱/۵ + ۱/۵} = ۰ \Rightarrow V_A = ۰ \Rightarrow I_۲ = \frac{V_A - ۱۲}{۱/۵ + ۱/۵} = \frac{-۱۲}{۳} = -۴A$$

با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده در مدار داریم:

$$-۶ + ۲I_۱ + ۶ + ۴I_۱ - ۹ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \mathbf{I_۱ = ۳/۵A}$$

مثال۱۹: در مدار شکل زیر در صورتی که $I = ۰$ باشد، مقدار منبع I_S (برحسب آمپر) کدام است؟



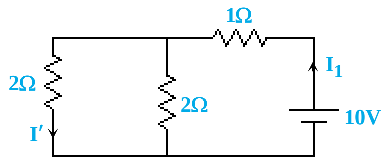
۱) ۲/۵

۲) ۷/۵

۳) ۲۲/۵

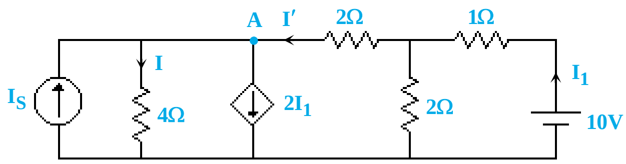
۴) ۲۷/۵

پاسخ: گزینه «۲» در صورتی که $I = ۰$ باشد، ولتاژ دو سر مقاومت $۴Ω$ صفر بوده و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



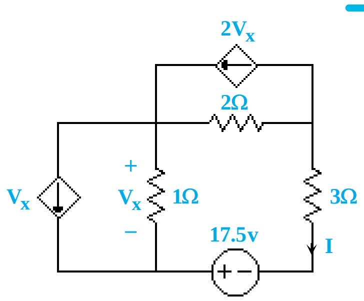
$$I_۱ = \frac{۱۰}{۱ + ۲ \| ۲} = ۵A \Rightarrow I' = \frac{۱}{۲} \times I_۱ = ۲/۵A$$

حال دوباره به مدار اول بازمی‌گردیم. با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$I_S + I' = I + ۲I_۱ \Rightarrow I_S + ۲/۵ = ۰ + ۱۰ \Rightarrow \mathbf{I_S = ۷/۵A}$$

مثال۲۰: در شکل زیر مقدار جریان I چند آمپر است؟



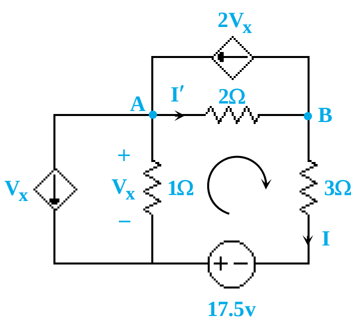
۱) ۵-

۲) ۲/۵

۳) ۵

۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳» با نوشتن KCL در گره A جریان مقاومت ۲ اهمی، صفر بدست می‌آید:

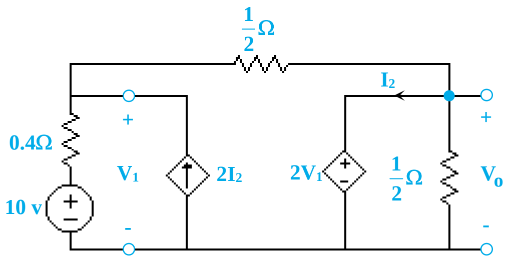


$$۲V_x - V_x - V_x - I' = ۰ \Rightarrow I' = ۰$$

از طرفی با نوشتن KCL در گره B، $I = -۲V_x$ بدست می‌آید. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-۱۷/۵ - V_x + ۰ + (-۲V_x) \times ۳ = ۰ \Rightarrow V_x = -۲/۵v \Rightarrow \mathbf{I = -۲ \times (-۲/۵) = ۵A}$$

مثال ۲۱: ولتاژ خروجی V_o در مدار شکل مقابل کدام است؟



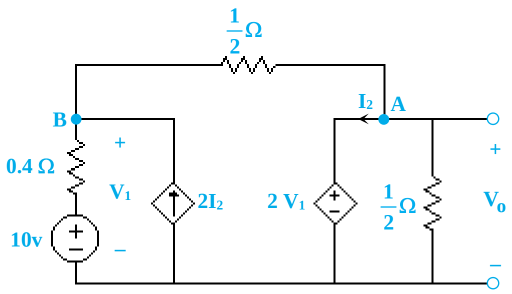
۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» با نوشتن KCL در گره A در مدار داریم:



$$I_۲+\frac{۲V_۱}{\frac{۱}{۲}}+\frac{۲V_۱-V_۱}{\frac{۱}{۲}}=۰ \Rightarrow I_۲+۶V_۱=۰ \qquad (۱)$$

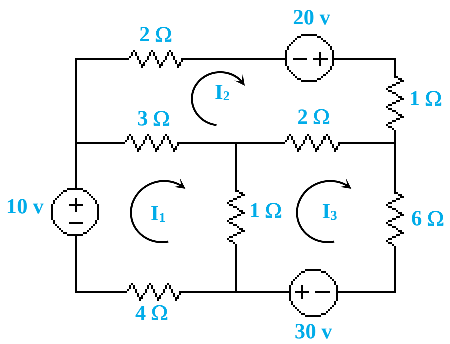
با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_۱-۲V_۱}{۰/۵}+\frac{V_۱-۱۰}{۰/۴}=۲I_۲ \Rightarrow V_۱-۴I_۲=۵۰ \qquad (۲)$$

با حل دستگاه شامل معادلات ۱ و ۲ داریم:

$$\begin{cases} I_۲+۶V_۱=۰ \\ V_۱-۴I_۲=۵۰ \end{cases} \Rightarrow V_۱=۲v \Rightarrow \mathbf{V_o=۲V_۱=۴v}$$

مثال ۲۲: معادلات ماتریسی مربوط به مدار شکل زیر را بنویسید.



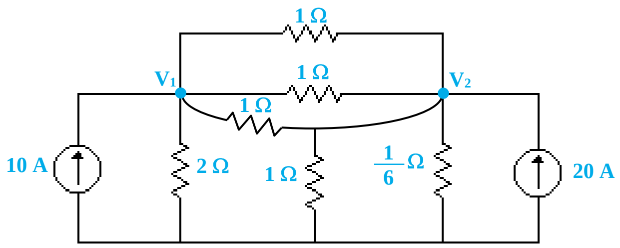
پاسخ: بـا اسـتفاده از روش ذکـر شـده در قسـمت قبـل، ابتـدا مـاتریس امپدانس و در ادامه بردار $[E_S]$ یا همـان بـردار منـابع ولتـاژ حلقـه را تشـکیل می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} (۳+۱+۴) & -۳ & -۱ \\ -۳ & (۲+۳+۲+۱) & -۲ \\ -۱ & -۲ & (۲+۱+۶) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۰ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم مقادیر $I_۱$ و $I_۲$ و $I_۳$ را با توجه به دستور کرامر در حل معادلات جبری بدست آوریم:

$$I_۱=\frac{\begin{vmatrix} ۱۰ & -۳ & -۱ \\ ۲۰ & ۸ & -۲ \\ ۳۰ & -۲ & ۹ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸ & -۳ & -۱ \\ -۳ & ۸ & -۲ \\ -۱ & -۲ & ۹ \end{vmatrix}} \quad , \quad I_۲=\frac{\begin{vmatrix} ۸ & ۱۰ & -۱ \\ -۳ & ۲۰ & -۲ \\ -۱ & ۳۰ & ۹ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸ & -۳ & -۱ \\ -۳ & ۸ & -۲ \\ -۱ & -۲ & ۹ \end{vmatrix}} \quad , \quad I_۳=\frac{\begin{vmatrix} ۸ & -۳ & ۱۰ \\ -۳ & ۸ & ۲۰ \\ -۱ & -۲ & ۳۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸ & -۳ & -۱ \\ -۳ & ۸ & -۲ \\ -۱ & -۲ & ۹ \end{vmatrix}}$$

مثال ۲۳: در مدار شکل زیر مقدار ولتاژ $V_۱$ چند ولت است؟



۱) $\frac{۸۰}{۱۳}$

۲) $\frac{۱۳}{۸۰}$

۳) $\frac{۱۳}{۲۰}$

۴) $\frac{۲۰}{۱۳}$

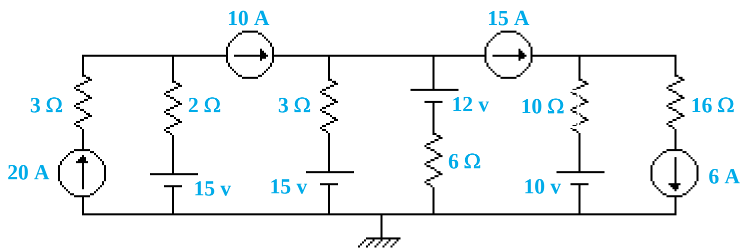
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا با استفاده از روش ذکر شده، ماتریس ادمیتانس را تشکیل می‌دهیم و سپس با رابطه زیر مقدار $V_۱$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Y=\begin{bmatrix} ۱+\frac{۱}{۲}+۱+۱ & -۱-۱-۱ \\ -۱-۱-۱ & ۶+۱+۱+۱+۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳/۵ & -۳ \\ -۳ & ۱۰ \end{bmatrix} \quad , \quad [I_S]=[Y][E]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3/5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1=\frac{\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3/5 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}}=\frac{10\times 10-20\times(-3)}{10\times 3/5-(-3)\times(-3)} \Rightarrow \mathbf{V_1=\frac{80}{13}v}$$

توضیح: توجه شود مقاومت $\frac{1}{6}\Omega$ در واقع معادل رسانایی $6℧$ و مقاومت 2Ω در واقع معادل رسانایی $0/5℧$ است. مقاومت‌های یک اهمی نیز معادل رسانایی‌های یک مهو (℧) هستند.

مثال ۲۴: در مدار زیر مقدار توان مصرفی مقاومت ۶ اهمی کدام است؟



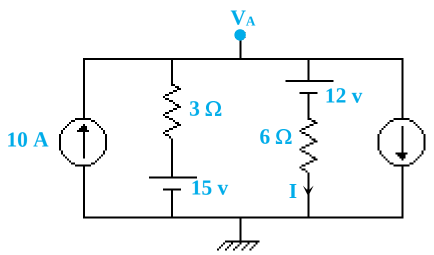
۱) ۹/۳w

۲) ۲/۴w

۳) ۱۰/۶w

۴) ۱۱/۵w

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۰A در سمت چپ مدار حذف می‌شود و همچنین شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۵A در سمت راست مدار هم حذف می‌شود و مدار ساده شده به صورت زیر است. حال با نوشتن KCL، ولتاژ V_A را محاسبه و سپس مقدار جریان I را بدست می‌آوریم.

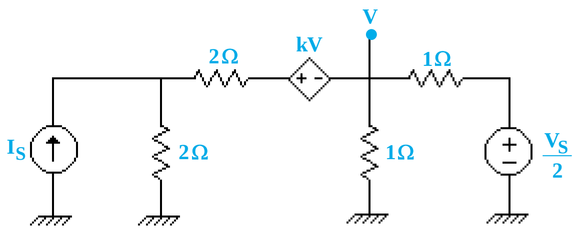


$$\frac{V_A-15}{3}+\frac{V_A-12}{6}+15=10 \Rightarrow V_A=4v$$

$$\Rightarrow I=\frac{V_A-12}{6}=\frac{4-12}{6}=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}A$$

$$\mathbf{P_{6\Omega}=|I|^2\times 6=(\frac{4}{3})^2\times 6=10/6w}$$

مثال ۲۵: در مدار زیر با برقراری کدام شرط، مقدار ولتاژ V ناشی از منبع جریان مدار، برابر با ولتاژ V ناشی از منبع ولتاژ مدار است؟



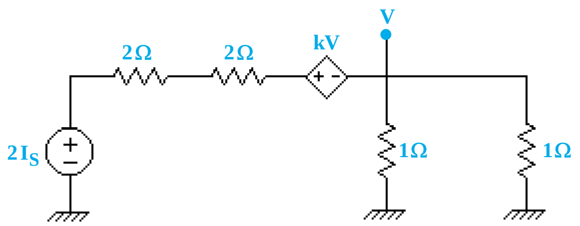
۱) $V_S=I_S \ , \ k=1$

۲) $V_S=2I_S \ , \ k=2$

۳) $V_S=I_S$

۴) $V_S=2I_S$

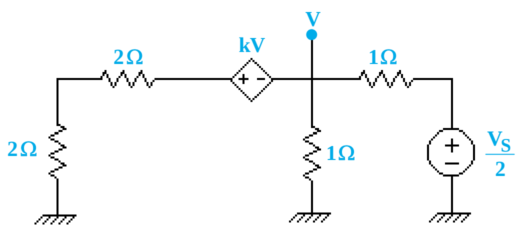
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا ولتاژ V در اثر منبع جریان I_S را با غیر فعال کردن منبع V_S، محاسبه می‌کنیم. با تبدیل منابع در سمت چپ مدار و نوشتن قانون KCL در گره شامل ولتاژ V داریم:



$$\frac{V+kV-2I_S}{4}+\frac{V}{1}+\frac{V}{1}=0$$

$$\Rightarrow V+kV-2I_S+8V=0 \Rightarrow V=\frac{2I_S}{9+k}$$

در ادامه ولتاژ V ناشی از منبع ولتاژ V_S را با غیر فعال کردن منبع I_S و با نوشتن KCL در گره شامل ولتاژ V محاسبه می‌کنیم.



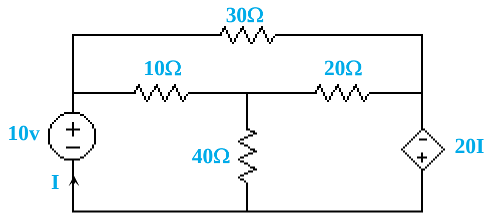
$$\frac{V+kV}{4}+\frac{V}{1}+\frac{V-\frac{V_S}{2}}{1}=0$$

$$V+kV+4V+4V-2V_S=0 \Rightarrow V=\frac{2V_S}{9+k}$$

با برابر قرار دادن ولتاژ V ناشی از منابع V_S و I_S داریم:

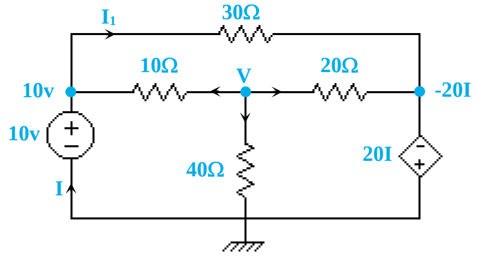
$$\frac{2V_S}{9+k}=\frac{2I_S}{9+k} \Rightarrow \mathbf{V_S=I_S} \quad \text{و} \quad (k\neq -9)$$

مثال ۲۶: در مدار شکل مقابل، منبع ولتاژ ۱۰ ولتی .... وات توان .... می‌کند.



۱) ۱۶ ـ مصرف
۲) ۱۶ ـ تولید
۳) ۳۲ ـ مصرف
۴) ۳۲ ـ تولید

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای مشخص شدن ساده‌ترین روش حل مدار، تعداد حلقه‌های مدار را شمارش می‌کنیم. با توجه به وجود سه حلقه در مدار، ۳ معادله KVL برای اعمال روش حلقه خواهیم داشت که حل آنها بسیار وقت‌گیر خواهد بود. اما با دقت در مدار دیده می‌شود که از میان سه گره موجود در مدار، ولتاژ گره‌های سمت راست و چپ معلوم بوده و لذا فقط گره وسطی برای اعمال KCL مناسب خواهد بود. بنابراین در صورت استفاده از روش KCL، فقط یک معادله حاصل شده و حل آن نیز ساده خواهد بود. حال با اعمال KCL در گره وسطی داریم:



$$\frac{V-(-۲۰I)}{۲۰}+\frac{V-۱۰}{۱۰}+\frac{V}{۴۰}=۰$$

$$۲(V+۲۰I)+۴(V-۱۰)+V=۰ \Rightarrow ۷V+۴۰I=۴۰ \quad (۱)$$

حالا باید یک معادله دیگر بین I و V پیدا کنیم. بنابراین با نوشتن KCL در گره سمت چپ داریم:

$$\frac{V-۱۰}{۱۰}+I=I_۱ \Rightarrow \frac{V-۱۰}{۱۰}+I=\frac{۱۰-(-۲۰I)}{۳۰} \xrightarrow{\times ۳۰} ۳(V-۱۰)+۳۰I=۱۰+۲۰I \Rightarrow ۳V+۱۰I=۴۰ \quad (۲)$$

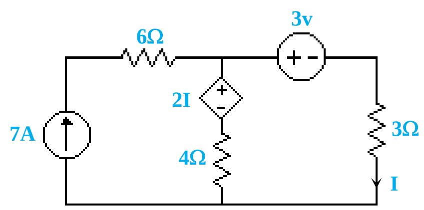
با حل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{matrix} ۳\times \\ -۷\times \end{matrix}\begin{cases} ۷V+۴۰I=۴۰ \\ ۳V+۱۰I=۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۱V+۱۲۰I=۱۲۰ \\ -۲۱V-۷۰I=-۲۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۵۰I=-۱۶۰ \Rightarrow I=-\frac{۱۶۰}{۵۰}=-۳/۲A$$

$$\mathbf{P=-V.I=-(۱۰)(-۳/۲)=+۳۲w}$$

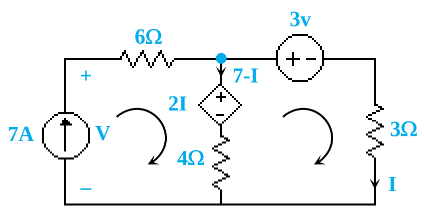
چون علامت مثبت است، لذا منبع ولتاژ توان مصرف می‌کند.

مثال ۲۷: در مدار شکل زیر، منبع ولتاژ .... وات توان مصرف می‌کند و منبع جریان .... وات توان تولید می‌کند.



۱) ۱۶ و ۴۲۰
۲) ۱۵ و ۴۲۰
۳) ۹ و ۲۱۰
۴) ۹ و ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تحلیل حلقه بهترین راه‌حل برای این تست است. دقت کنید از آن‌جایی که می‌خواهیم توان منبع جریان و منبع ولتاژ را حساب کنیم، باید ولتاژ دو سر منبع جریان و جریان عبوری از منبع ولتاژ را حساب کنیم. پس در این حالت مجبور هستیم در حلقه شامل منبع جریان KVL بنویسیم. بنابراین ولتاژ دو سر منبع جریان را V نام‌گذاری می‌کنیم.



برای نوشتن KVL در دو حلقه سمت چپ و راست باید جریان شاخه وسط معلوم شود. به راحتی با نوشتن KCL در گره بالایی جریان شاخه وسط برابر $۷-I$ می‌شود:

$$\begin{cases} ۶\times۷+۲I+۴(۷-I)-V=۰ \\ ۳+۳I-۴(۷-I)-۲I=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲I-V=-۷۰ \\ ۵I=۲۵ \Rightarrow I=۵A \end{cases} \Rightarrow -۲(۵)-V=-۷۰ \Rightarrow V=۶۰v$$

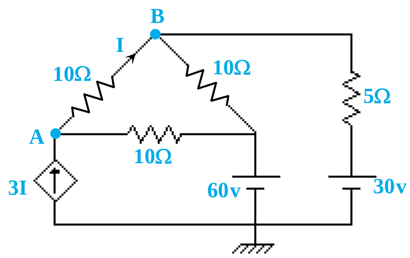
توان منبع جریان برابر است با:

$$P_I=-V.I=-(۶۰)(۷)=\mathbf{-۴۲۰w}$$

اما توان منبع ولتاژ با توجه به این‌که جریان به پلاریته مثبت منبع ولتاژ وارد می‌شود، به صورت روبرو است:

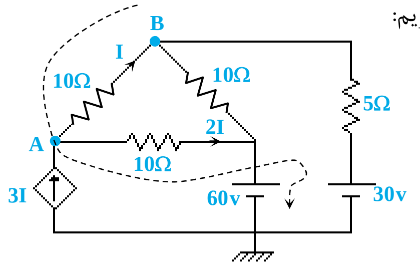
$$P_V=+V.I=۳\times۵=\mathbf{۱۵w}$$

مثال ۲۸: در مدار زیر اندازه توان منبع وابسته برحسب وات کدام است؟



۱) ۰
۲) ۳۸۴۰
۳) ۳۶۴۰
۴) ۳۱۴۰

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه توان منبع جریان وابسته لازم است که ولتاژ دو سر آن را محاسبه و در جریان آن ضرب نماییم. حال با نوشتن KCL در نقاط A و B و محاسبه V_B در مسیر نشان داده شده داریم:

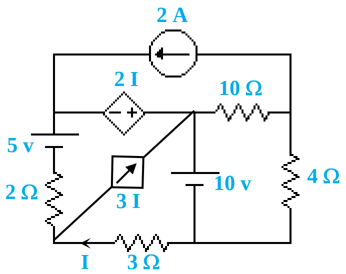


$$\begin{cases} \dfrac{V_A-۶۰}{۱۰}+I=۳I \;\Rightarrow\; \dfrac{V_A-۶۰}{۲۰}=I & (۱) \\ \dfrac{V_B-۳۰}{۵}+\dfrac{V_B-۶۰}{۱۰}+\dfrac{V_B-V_A}{۱۰}=۰ & (۲) \\ V_B=-۱۰I+۲۰I+۶۰=۱۰I+۶۰ & (۳) \xrightarrow{(۱),(۳)} V_B=۱۰(\dfrac{V_A-۶۰}{۲۰})+۶۰ \quad (۴) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۴),(۲)} \begin{cases} \dfrac{V_B-۳۰}{۵}+\dfrac{V_B-۶۰}{۱۰}+\dfrac{V_B-V_A}{۱۰}=۰ \\ V_B=۱۰(\dfrac{V_A-۶۰}{۲۰})+۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A=۰v \\ V_B=۳۰v \end{cases}$$

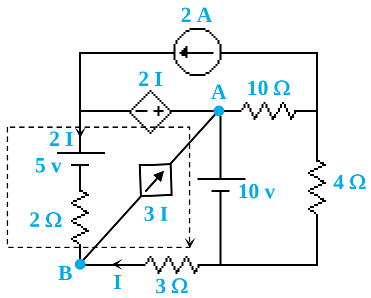
$$\Rightarrow \quad \text{توان منبع وابسته}=|۳I|\times|V_A|=|۳\times(I)|\times|۰|=۰w$$

مثال ۲۹: در مدار مقابل توان منبع جریان وابسته کدام است؟



۱) ۲۵w
۲) ۵۰w
۳) ۷۵w
۴) ۱۰۰w

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه توان منبع وابسته لازم است که ولتاژ دو سر آن در جریان آن ضرب شود. حال بـا نوشـتن KVL در حلقـه مشـخص شده داریم:

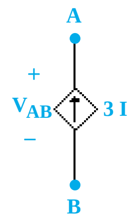


$$۳I-(۲I\times۲)-۵-۲I+۱۰=۰ \;\Rightarrow\; I=\frac{۵}{۳}A$$

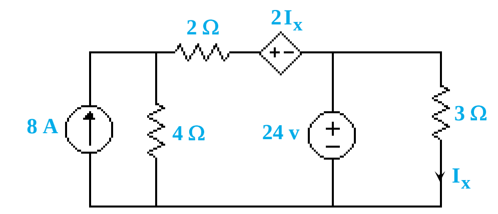
$$V_{AB}=۱۰+۳I=۱۰+(۳\times\frac{۵}{۳})=۱۵v$$

$$\text{توان منبع وابسته}=V_{AB}\times(-۳I)=۱۵\times(-۵)=-۷۵\,w$$

$$\Rightarrow \text{اندازه‌ی توان}=|-۷۵|=۷۵\,w$$

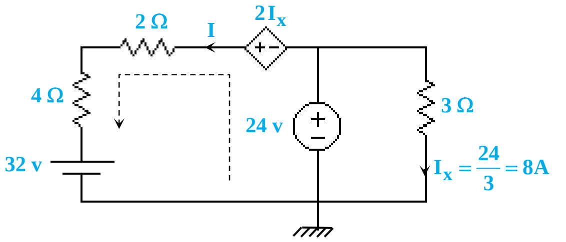


مثال۳۰: در مدار شکل داده شده توان منبع ولتاژ وابسته چند وات است؟



۱) ۳۲/۵
۲) ۲۱/۳۳−
۳) ۳۲/۵−
۴) ۲۱/۳۳

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا قانون تبدیل منابع را برای منبع جریان ۸A و مقاومت ۴Ω در سمت چپ مدار اجرا می‌کنیم. در ادامه حل در حلقه سمت چپ KVL می‌نویسیم و جریان I را بدست می‌آوریم. برای محاسبه توان منبع وابسته، ولتاژ و جریان منبع وابسته را در هم ضرب می‌کنیم.

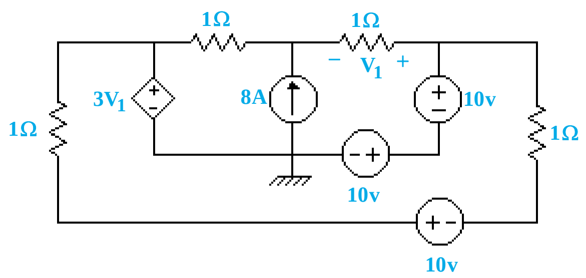


$$-۲۴-۲I_x+۲I+۴I+۳۲=۰$$

$$\Rightarrow\quad -۲۴-۲\times ۸+۶I+۳۲=۰ \quad\Rightarrow\quad I=\frac{۸}{۶}A$$

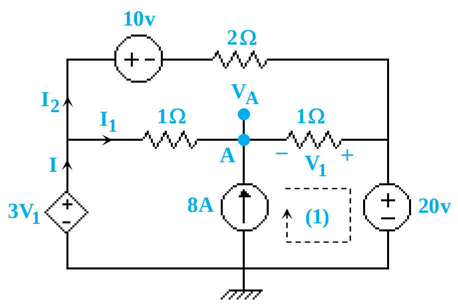
$$P=-۲I_x.I=-۲\times ۸\times \frac{۸}{۶}=-۲۱/۳۳w$$

مثال۳۱: در مدار زیر توان مصرفی منبع وابسته بر حسب وات و به صورت تقریبی مطابق با کدام گزینه است؟



۱) ۵۷
۲) ۱۵۷−
۳) ۱۵۷
۴) ۵۷−

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مدار را ساده می‌کنیم. حال می‌توان نوشت:



$$KVL(۱):V_A=-V_۱+۲۰ \qquad (۱)$$

$$KCL(A):\frac{V_A-۳V_۱}{۱}=\frac{V_۱}{۱}+۸ \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

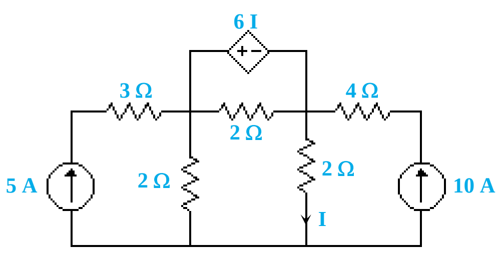
$$\frac{-V_۱+۲۰-۳V_۱}{۱}=\frac{V_۱}{۱}+۸ \Rightarrow V_۱=\frac{۱۲}{۵}v \Rightarrow V_A=۱۷/۶v$$

با نوشتن KCL در گره سمت چپ مدار داریم:

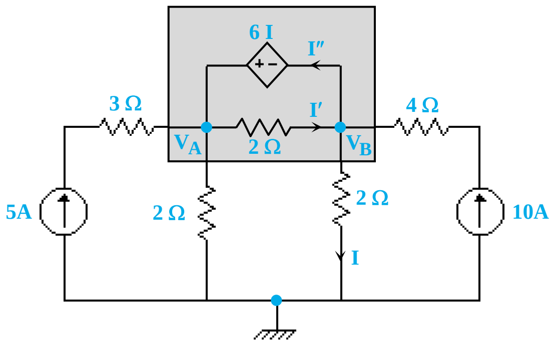
$$I=I_۱+I_۲=\frac{۳V_۱-V_A}{۱}+\frac{۳V_۱-۱۰-۲۰}{۲} \Rightarrow I=\frac{۳\times\frac{۱۲}{۵}-۱۷/۶}{۱}+\frac{۳\times\frac{۱۲}{۵}-۳۰}{۲}=-۲۱/۸(A)$$

$$\Rightarrow P(\text{منبع وابسته})=-۳V_۱\times I=(-۳)\times\frac{۱۲}{۵}\times(-۲۱/۸)\simeq ۱۵۷w$$

مثال۳۲: در مدار شکل داده شده، اندازه توان منبع وابسته چند وات است؟



۱) ۱۲۰
۲) ۱۴۴
۳) ۴۴۸
۴) ۲۸۸



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه توان منبع ولتاژ وابسته باید ولتاژ و جریان منبع را محاسبه کرده و در یکدیگر ضرب کنیم. با نوشتن KCL برای ابرگره داریم:

$$\begin{cases} \frac{V_A}{۲} - ۵ + \frac{V_B}{۲} - ۱۰ = ۰ \Rightarrow V_A + V_B = ۳۰ \\ V_A - V_B = ۶I = ۶(\frac{V_B}{۲}) \Rightarrow V_A = ۴V_B \end{cases} \Rightarrow V_A = ۲۴v, V_B = ۶v$$

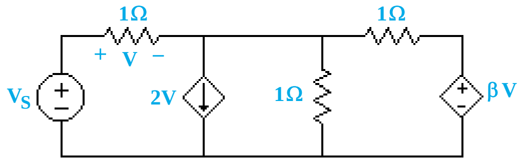
$$I = \frac{V_B}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳A \quad , \quad I' = \frac{۶I}{۲} = \frac{۱۸}{۲} = ۹A$$

حال با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$I'' - I' + I - ۱۰ = ۰ \Rightarrow I'' - ۹ + ۳ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow I'' = ۱۶A$$

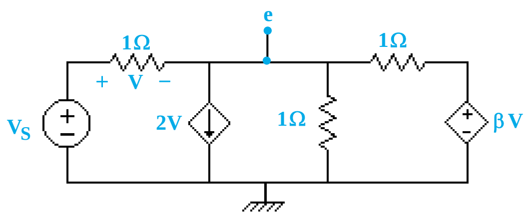
اندازه توان منبع وابسته $= ۶I \times I'' = ۶ \times ۳ \times ۱۶ = ۲۸۸w$

مثال ۳۳: در مدار زیر به ازای چه مقدار β، منبع جریان وابسته هیچ توانی مصرف یا تولید نمی‌کند؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) هیچ مقدار β

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن KCL در گره با ولتاژ e داریم:



$$(e - V_S) + ۲V + e + (e - \beta V) = ۰$$

$$V = V_S - e \Rightarrow e - V_S + ۲(V_S - e) + e + e - \beta(V_S - e) = ۰$$

$$\Rightarrow (۱ + \beta)e = (\beta - ۱)V_S \Rightarrow e = \frac{\beta - ۱}{\beta + ۱}V_S$$

برای این که توان منبع وابسته صفر باشد باید:

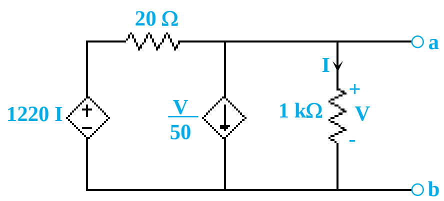
$$e(۲V) = ۰ \Rightarrow ۲e(V_S - e) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} e = ۰ \\ e = V_s \end{cases}$$

$$e = ۰ \Rightarrow \frac{\beta - ۱}{\beta + ۱}V_S = ۰ \Rightarrow \beta = ۱$$

$e = V_S \Rightarrow \frac{\beta - ۱}{\beta + ۱}V_S = V_S \Rightarrow \frac{\beta - ۱}{\beta + ۱} = ۱ \Rightarrow$ پاسخی برای β ندارد.

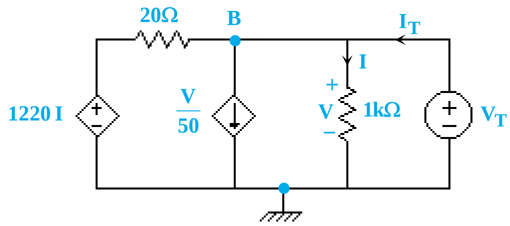
پس $e = ۰$ و $\beta = ۱$ است.

مثال ۳۴: در مدار شکل زیر مقدار R_{th} از دیدگاه دو نقطه a و b چند اهم است؟



۱) ۱۰۰
۲) ۰/۱
۳) ۱۰
۴) ۰/۰۰۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در این مدار منبع مستقل نداریم. لذا با وصل کردن یک منبع ولتاژ V_T که به مدار جریان I_T تزریق می‌کند و همچنین با در نظر گرفتن این که $I = \frac{V_T}{۱۰۰۰}$ و $V_T = V$ است، با نوشتن KCL در گره B داریم:

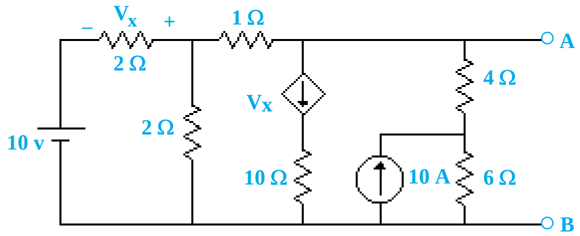


$$I_T = \frac{V_T}{۱۰۰۰} + \frac{V_T}{۵۰} + \frac{V_T - ۱۲۲۰(\frac{V_T}{۱۰۰۰})}{۲۰}$$

$$\Rightarrow I_T = ۰/۰۰۱V_T + ۰/۰۲V_T + ۰/۰۵V_T - \frac{۶۱}{۱۰۰۰}V_T = ۰/۰۱V_T$$

$$\Rightarrow V_T = ۱۰۰ I_T \Rightarrow R_{th} = ۱۰۰\Omega$$

مثال ۳۵: در مدار زیر مقدار مقاومت تونن از دو سر B و A تقریباً کدام است؟



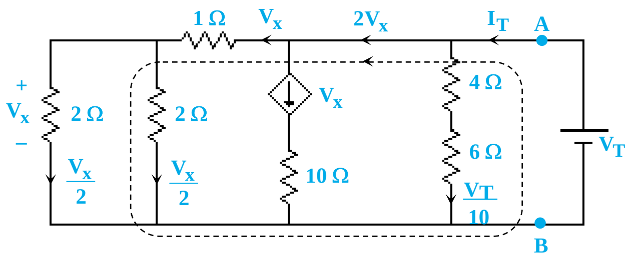
۱) $0/9\Omega$

۲) $0/1\Omega$

۳) 2Ω

۴) 3Ω

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا منابع مستقل را غیرفعال کرده و برای اندازه‌گیری R_{th} در ورودی مدار منبع ولتاژ V_T را قرار می‌دهیم. حال با نوشتن KCL در گره اتصال V_T و نوشتن KVL در مسیر منبع V_T داریم:

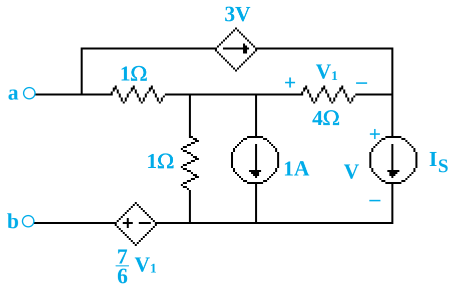


$$\begin{cases} I_T = 2V_x + \dfrac{V_T}{10} & (1) \\ V_T = V_x \times 1 + V_x = 2V_x \Rightarrow V_T = 2V_x & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} I_T = 2\left(\frac{V_T}{2}\right) + \frac{V_T}{10}$$

$$\Rightarrow I_T = V_T \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) \Rightarrow \mathbf{R_{th}} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}} = \frac{10}{11} \simeq 0/9\Omega$$

مثال ۳۶: مقاومت معادل از دو سر **a** و **b** چند اهم است؟



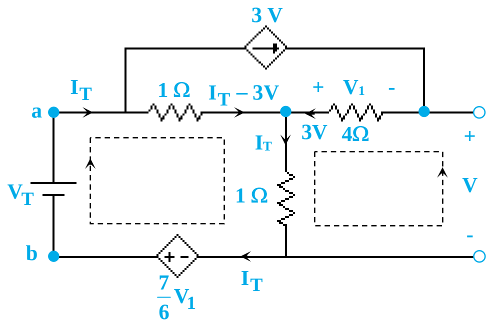
۱) $\frac{5}{11}$

۲) ۱

۳) ۳

۴) $\frac{39}{11}$

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن مقاومت تونن، منابع مستقل جریان مدار باز شده و منابع ولتاژ مستقل در صورت وجود، اتصال کوتاه می‌شوند. سپس منبع V_T به پایه‌های b و a اعمال می‌شود و جریان I_T اندازه‌گیری می‌شود.



$$V_1 = -3V \times 4 \Rightarrow V_1 = -12V \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-V_T + (I_T - 3V) \times 1 + I_T \times 1 - \frac{7}{6}V_1 = 0 \Rightarrow V_T = 2I_T - 3V - \frac{7}{6}V_1 \qquad (2)$$

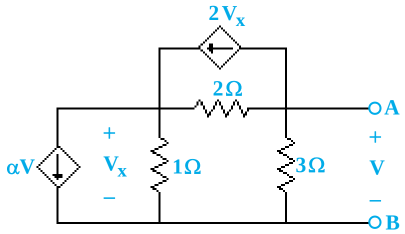
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-V - V_1 + I_T = 0 \Rightarrow I_T = V + V_1 \qquad (3)$$

$$(1),(3) \Rightarrow I_T = V + (-12V) \Rightarrow I_T = -11V \Rightarrow V = \frac{-1}{11}I_T \qquad (4)$$

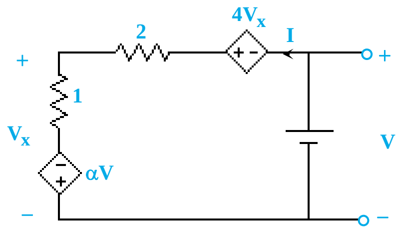
$$(1),(2),(4) \Rightarrow V_T = 2I_T + 11 \times \frac{I_T}{-11} \Rightarrow \mathbf{R_{th}} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}} = 1\Omega$$

مثال ۳۷: در مدار شکل زیر به ازای چه مقادیری از α مقاومت تونن دیده شده در سرهای A و B، بینهایت می‌شود؟



۱) ۱
۲) $\frac{1}{6}$
۳) $\frac{2}{9}$
۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» بیایید برای حل این تست ابتدا مقاومت معادل مدار را از سمت چپ مقاومت ۳ اهمی بدست آوریم. برای آسان‌تر کردن محاسبات، منابع جریان را به منـابع ولتـاژ معادل تبدیل می‌کنیم؛ در این صورت مداری به شکل روبرو خواهیم داشت:



با یک KVL ساده داریم:

$$V = -\alpha V + 3I - 4V_x$$

از طرفی مشخص است که $V_x = I - \alpha V$. پس می‌توان نوشت:

$$V = -\alpha V + 3I - 4(I - \alpha V) \Rightarrow (1-3\alpha)V = -I \Rightarrow R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{1}{3\alpha - 1}$$

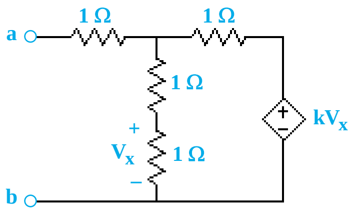
حال می‌توان نوشت:

$$R_{th} = R_{eq} \parallel 3 = \frac{3R_{eq}}{3 + R_{eq}}$$

زمانی مقاومت معادلِ دو مقاومت موازیِ غیرصفر، بی‌نهایت خواهد شد که مجموع این دو مقاومت صفر باشد؛ یعنی باید R_{eq} برابر ۳- باشد:

$$\frac{1}{3\alpha - 1} = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9}$$

مثال ۳۸: در مدار شکل مقابل، به ازای چه مقدار k، مقاومت دیده شده در سرهای a و b منفی است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۴

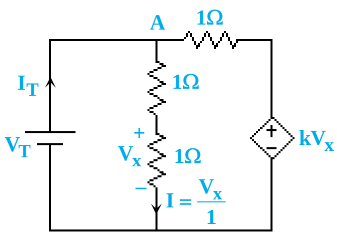
پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مقاومت ۱Ω را از مدار جدا کرده و R_{th} را با اعمال منبع V_T و محاسبه I_T برحسب V_T بدست می‌آوریم و آنگاه حاصل را با مقاومت ۱Ω جمع می‌کنیم.

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_T = V_x + V_x \times 1 = 2V_x \qquad (1)$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$I_T = V_x + \frac{2V_x - kV_x}{1} \qquad (2)$$



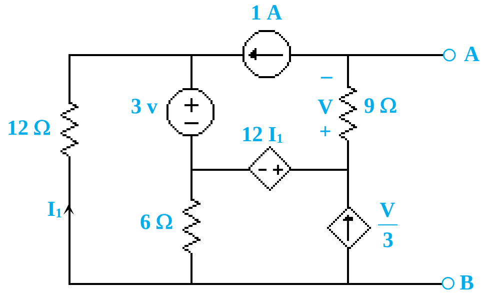
$$(1),(2) \Rightarrow R_{th} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{2V_x}{V_x(3-k)} = \frac{2}{3-k}$$

$$R_{th}\ (\text{نهایی}) = \frac{2}{3-k} + 1 = \frac{5-k}{3-k}$$

$$\text{if} \quad R_{th}\ (\text{نهایی}) < 0 \Rightarrow \frac{5-k}{3-k} < 0 \Rightarrow 3 < k < 5$$

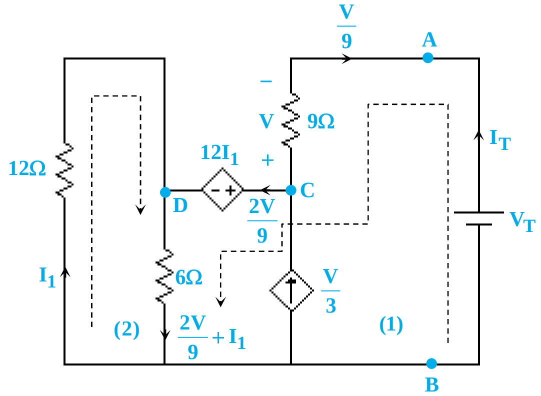
و تنها گزینه (۴) در شرط فوق صدق می‌کند.

مثال۳۹: در مدار شکل مقابل مقاومت تونن از دید دو نقطه A و B برحسب اهم کدام گزینه است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه مقدار مقاومت تونن از دید دو نقطه A و B، منبع ولتاژ V_T را به دو سر A و B متصل کرده و رابطه جریان I_T با V_T را محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است که در این حالت منابع مستقل جریان و ولتاژ را غیرفعال می‌کنیم.



$$\text{KCL(C)}: \quad \text{جریان منبع ولتاژ وابسته} = \frac{V}{3} - \frac{V}{9} = \frac{2V}{9}$$

$$\text{KCL(D)}: \quad \text{جریان مقاومت ۶ اهمی} = I_1 + \frac{2V}{9}$$

با نوشتن KVL در حلقه (۱) داریم:

$$-V_T + 9I_T + 12I_1 + 6 \times (\frac{2V}{9} + I_1) = 0 \quad (1)$$

با نوشتن قانون اهم برای مقاومت 9Ω داریم:

$$V = -9I_T \quad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-V_T + 9I_T + 12I_1 + 6(\frac{2 \times (-9I_T)}{9} + I_1) = 0 \Rightarrow -V_T + 18I_1 - 3I_T = 0 \quad (3)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$12I_1 + 6(\frac{2V}{9} + I_1) = 0 \Rightarrow 12I_1 + \frac{12}{9}V + 6I_1 = 0 \Rightarrow V = -\frac{27}{2}I_1 \quad (4)$$

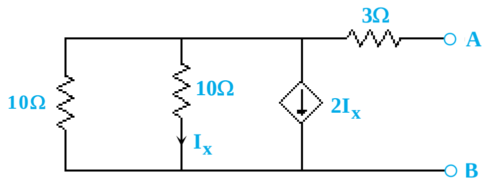
با ترکیب روابط (۲) و (۴) داریم:

$$-9I_T = -\frac{27}{2}I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{3}I_T \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۳) داریم:

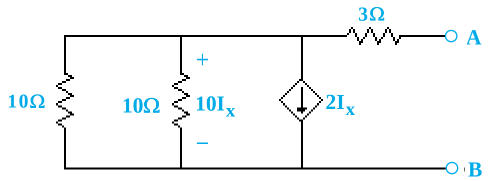
$$-V_T + 18 \times \frac{2}{3}I_T - 3I_T = 0 \Rightarrow V_T = 9I_T \Rightarrow \mathbf{R_{th}} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}} = 9\Omega$$

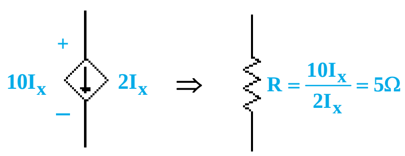
مثال۴۰: در مدار زیر مقدار مقاومت تونن از دید پایه‌های B و A برحسب اهم کدام است؟



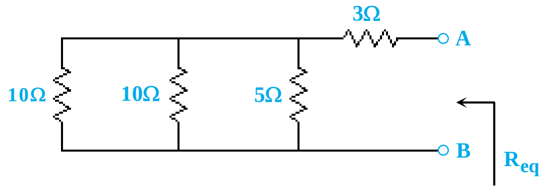
۱) ۵/۵
۲) ۶
۳) ۶/۵
۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وجود منبع جریان وابسته در مدار، باید ابتدا ولتاژ دو سر آن را بدست آورده و با توجه به روش ذکر شده در بالا، مقاومت معادل آن را بدست آوریم. لازم به ذکر است که در اغلب مسائل ولتاژ دو سر منبع جریان را باید در شاخه‌های مقاومتی و موازی با آن جستجو کنیم. حال داریم:



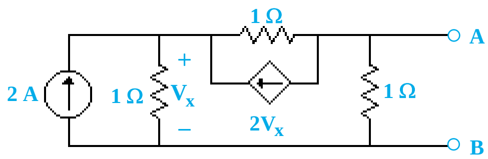


با جایگذاری مقاومت معادل منبع جریان وابسته در مدار داریم:



$$\mathbf{R_{eq}} = 3 + 10 \,||\, 10 \,||\, 5 = 5/5\Omega$$

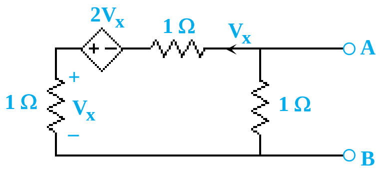
مثال۴۱: در مدار شکل مقابل مقاومت تونن، از دید A و B کدام است؟



۱) صفر　　۲) $\frac{۲}{۳}\Omega$

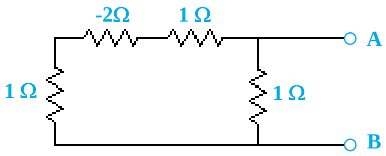
۳) ۱Ω　　۴) بینهایت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با غیر فعال کردن منبع جریان مستقل و تبدیل منبع جریان وابسته و مقاومت موازی آن به منبع ولتاژ و مقاومت سری معادل داریم:



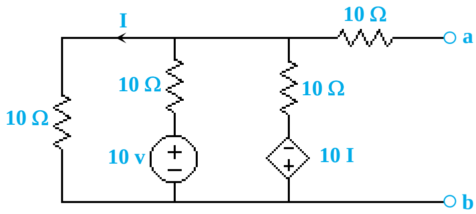
$$R\ (\text{منبع وابسته}) = \frac{-۲V_x}{V_x} = -۲\Omega$$

با جایگذاری مقاومت معادل منبع ولتاژ وابسته $۲V_x$ داریم:



$$R_{th} = ۱ \parallel ۰ = ۰\Omega$$

مثال۴۲: ولتاژ معادل تونن از دو نقطه a و b مدار زیر چند ولت است؟



۱) ۲/۵

۲) ۵

۳) ۷/۵

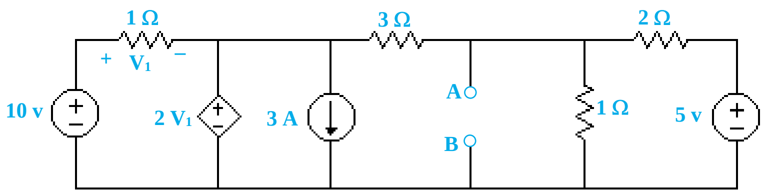
۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KCL در گره بالایی مدار برحسب ولتاژ مدار باز V_{ab} داریم: (توجه شود چون مدار باز است از مقاومت ۱۰ اهم شاخه بالایی سمت راست هیچ جریانی عبور نمی‌کند.)

$$\frac{V_{ab}}{۱۰} + \frac{V_{ab}-۱۰}{۱۰} + \frac{V_{ab}-(-۱۰I)}{۱۰} = ۰ \xrightarrow[\text{طرفین ضرب در عدد ۱۰}]{I=\frac{V_{ab}}{۱۰}} V_{ab} + V_{ab} - ۱۰ + V_{ab} - (-۱۰\times\frac{V_{ab}}{۱۰}) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴V_{ab} = ۱۰ \Rightarrow V_{ab} = ۲/۵\,v$$

مثال۴۳: معادل تونن شبکه شکل زیر از دید پایانه‌های A و B کدام است؟



۱) $R_{th} = \frac{۶}{۱۱}\Omega$ و $V_{th} = \frac{۳۳}{۵۵}v$

۲) $R_{th} = \frac{۱۱}{۶}\Omega$ و $V_{th} = \frac{۸۵}{۳۳}v$

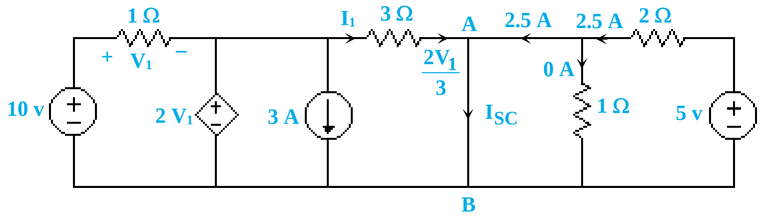
۳) $R_{th} = \frac{۶}{۱۱}\Omega$ و $V_{th} = \frac{۸۵}{۳۳}v$

۴) $R_{th} = \frac{۱۱}{۶}\Omega$ و $V_{th} = \frac{۳۳}{۵۵}v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این تست راحت‌تر است که مقدار R_{th} و I_{SC} را محاسبه کرده و سپس از روی آنها V_{th} را بدست آوریم. ابتدا I_{SC} را محاسبه می‌کنیم. با اتصال کوتاه کردن دو سر A و B، مقاومت یک اهمی سمت راست نیز اتصال کوتاه می‌شود و جریان مقاومت ۲ اهم برابر $\frac{۵}{۲} = ۲/۵A$ خواهد بود.

از طرفی ولتاژ دو سر مقاومت ۳ اهمی برابر $۲V_۱$ می‌باشد، لذا $I_۱ = \frac{۲V_۱}{۳}$ بدست می‌آید.

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

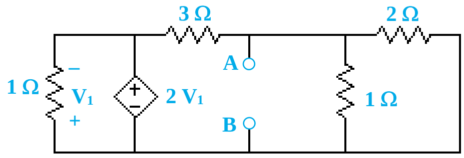


$$V_1 + 2V_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{10}{3}(v)$$

$$I_1 = \frac{2}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{20}{9} A$$

$$I_{SC} = 2/5 + I_1 = 2/5 + \frac{20}{9} = \frac{85}{18}(A)$$

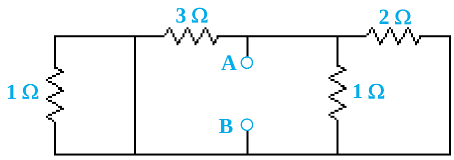
توضیح: لازم به ذکر است که اگر پس از محاسبه جریان اتصال کوتاه، با استفاده از رابطه $I_{SC} = \frac{V_{th}}{R_{th}}$ گزینه‌ها را چک کنید، مشاهده می‌کنیـد کـه رابطـه مذکور فقط در گزینه (۳) صادق است و نیازی به محاسبه R_{th} نمی‌باشد.



مقدار R_{th} مدار با اتصال کوتاه کردن منبـع ولتـاژ مسـتقل و بـاز کـردن منبـع جریان از مدار مشخص خواهد شد:

توجه شود در مدار سمت چپ داریم: $V_1 = -2V_1 \Rightarrow V_1 = 0$

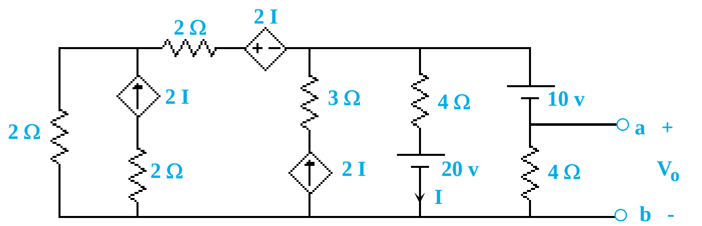
بنابراین منبع ولتاژ وابسته به صورت اتصال کوتاه عمل کرده و بدیهی است مقاومت یک اهمی موازی با آن نیز بی‌اثر خواهد شد؛ بنابراین داریم:



$$\mathbf{R_{th} = 2 \| 1 \| 3 = \frac{6}{11}\,\Omega}$$

$$\mathbf{V_{th} = R_{th}.I_{s.c} = \frac{6}{11} \times \frac{85}{18} = \frac{85}{33} v}$$

مثال ۴۴: در مدار زیر مقدار ولتاژ تونن از دو سر (a و b) برحسب ولت کدام است؟



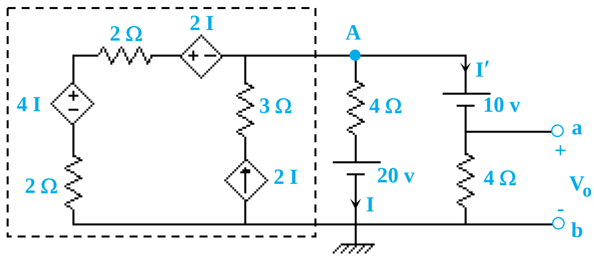
۱) ۲۵

۲) ۵۰

۳) −۲۵

۴) −۵۰

پاسخ: گزینه «۴» با حذف مقاومت ۲Ω سری با منبع جریان ۲I و با اعمال تبدیل منابع در سمت چپ مدار و نوشتن KCL در گره A داریم:



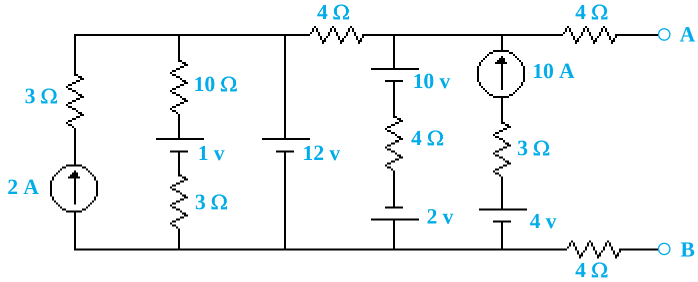
$$\begin{cases} \frac{V_A + 2I - 4I}{2+2} + \frac{V_A - 20}{4} + \frac{V_A - 10}{4} = 2I \quad \Rightarrow \quad 3V_A = 10I + 30 \quad (1) \\ I = \frac{V_A - 20}{4} \qquad (2) \end{cases}$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} I = \frac{V_A - 20}{4} \\ 3V_A = 10I + 30 \end{cases} \Rightarrow V_A = -40\,v \Rightarrow I' = \frac{V_A - 10}{4} = \frac{-40-10}{4} = -12/5 A$$

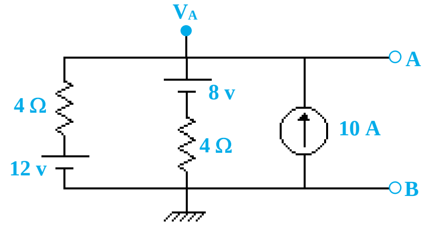
$$\Rightarrow V_o = 4I' = 4 \times (-12/5) \Rightarrow \mathbf{V_o = -50\,v}$$

مثال۴۵: در مدار زیر ولتاژ تونن از دو سر B و A برحسب ولت کدام است؟



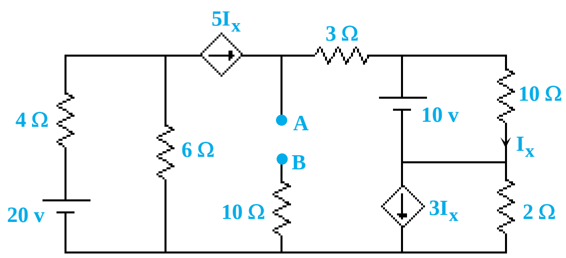
۱) ۴۰
۲) ۲۰
۳) ۱۰
۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کلیه شاخه‌های موازی با منبع ولتاژ مستقل و همچنین کلیه المان‌های سری با منبع جریان مستقل در مدار حذف می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که مقاومت‌های 4Ω متصل به A و B حاوی جریان صفر هستند و حذف می‌شوند و مدار به صورت روبرو ساده می‌شود. حال با نوشتن KCL در گره A داریم:



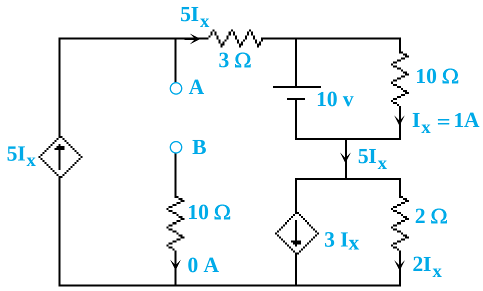
$$\frac{V_A-12}{4}+\frac{V_A-8}{4}=10 \Rightarrow V_A=30\,v \Rightarrow \mathbf{V_{AB}=V_{th}=30\,v}$$

مثال۴۶: در مدار زیر مقدار ولتاژ تونن یا V_{AB} بر حسب ولت کدام است؟



۱) ۲۹
۲) ۳۰
۳) ۳۲
۴) ۲۸

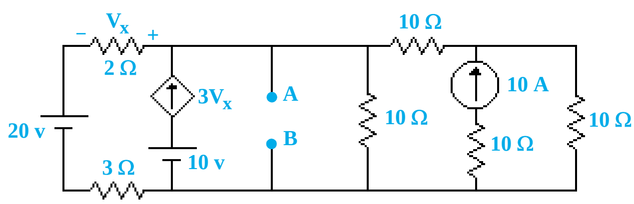
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به موازی بودن منبع $10\,v$ با مقاومت $10\,\Omega$ در سمت راست مدار، $I_x=\frac{10}{10}=1A$ خواهد بود. در ادامه، ولتاژ نقطه B را صفر فرض می‌کنیم و ولتاژ V_A را از نقطه A تا زمین محاسبه می‌کنیم. برای این کار ولتاژ کلیه المان‌ها را از نقطه A تا زمین با لحاظ علامت مربوطه می‌نویسیم و المان‌های سری با منبع جریان وابسته $5I_x$ را حذف می‌کنیم.



$$V_{AB}=(3\times 5I_x)+10+(2\times 2I_x)+(0\times 10)$$

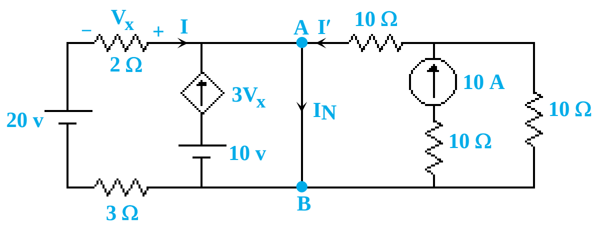
$$\Rightarrow \mathbf{V_{AB}=19I_x+10=29v}$$

مثال۴۷: در مدار زیر اندازه جریان نورتن I_N برحسب آمپر کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۲۹
۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با اتصال کوتاه شدن پایه‌های B و A، مقاومت موازی اتصال کوتاه حذف می‌شود و مدار به صورت زیر ساده می‌شود.



$$I=\frac{20}{2+3}=4A \Rightarrow V_x=-2I=-8v$$

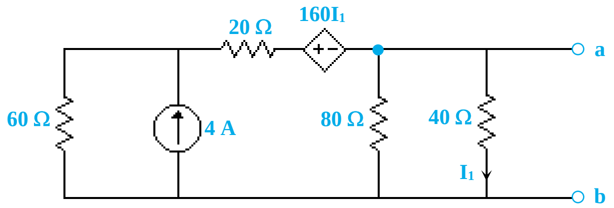
با توجه به قانون تقسیم جریان داریم:

$$I'=10\times\frac{1}{2}=5A$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$I_N=I+3V_x+I'=4+3(-8)+5 \Rightarrow \mathbf{|I_N|=15A}$$

مثال ۴۸: جریان نورتن و ولتاژ تونن شبکه شکل زیر از دید پایانه‌های a و b کدام است؟



۱) $I_{S.C}=1A$ و $V_{th}=40v$

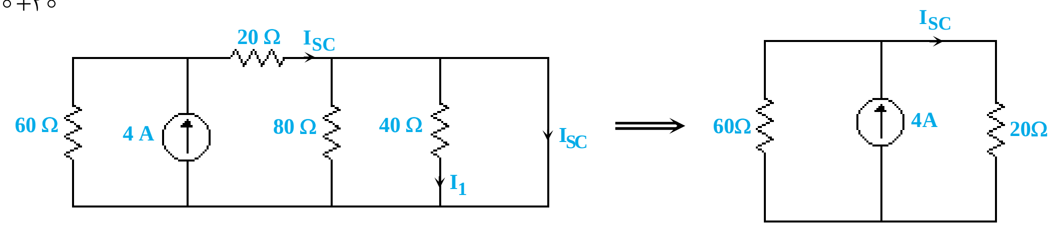
۲) $I_{S.C}=1A$ و $V_{th}=30v$

۳) $I_{S.C}=3A$ و $V_{th}=40v$

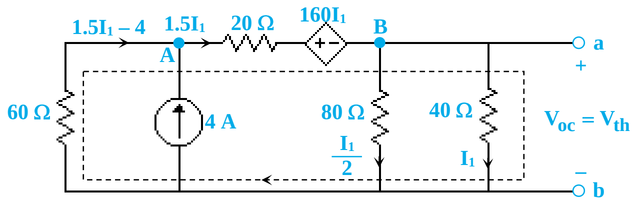
۴) $I_{S.C}=3A$ و $V_{th}=30v$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا I_{SC} را حساب می‌کنیم. با اتصال کوتاه کردن دو سر a و b، مقدار $I_1=0$ است و در نتیجه مقدار منبع ولتاژ وابسته نیز برابر صفر خواهد بود و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:

$$I_{S.C}=4\times\frac{60}{60+20}=3A$$



حال به سراغ محاسبه V_{th} می‌رویم. ملاحظه می‌شود که جریان مقاومت ۸۰ اهم، نصف جریان مقاومت ۴۰Ω یعنی $\frac{I_1}{2}$ خواهد بود و با نوشتن KCL در گره B جریان مقاومت ۲۰Ω برابر $1/5I_1$ و با نوشتن KCL در گره A جریان مقاومت ۶۰Ω برابر $1/5I_1-4$ خواهد بود.

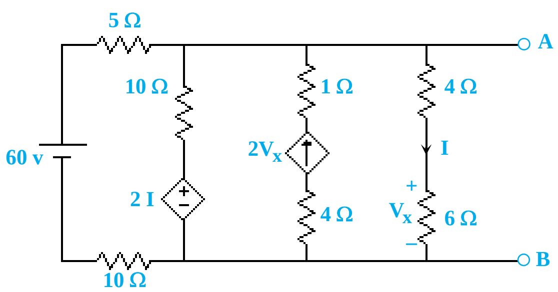


حال با نوشتن KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:

$$60(1/5I_1-4)+20(1/5I_1)+160I_1+40I_1=0 \Rightarrow 320I_1=240 \Rightarrow I_1=0/75A$$

$$V_{o.c}=40I_1=40\times0/75=30v$$

مثال ۴۹: در مدار روبرو مقدار جریان نورتن برحسب آمپر کدام است؟



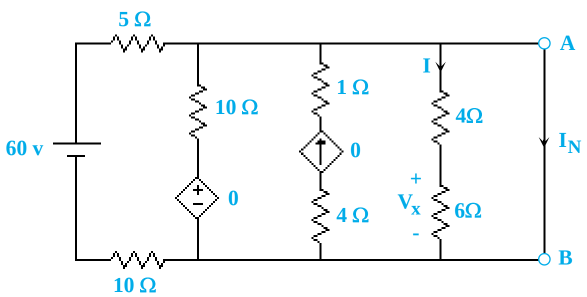
۱) ۱

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۳

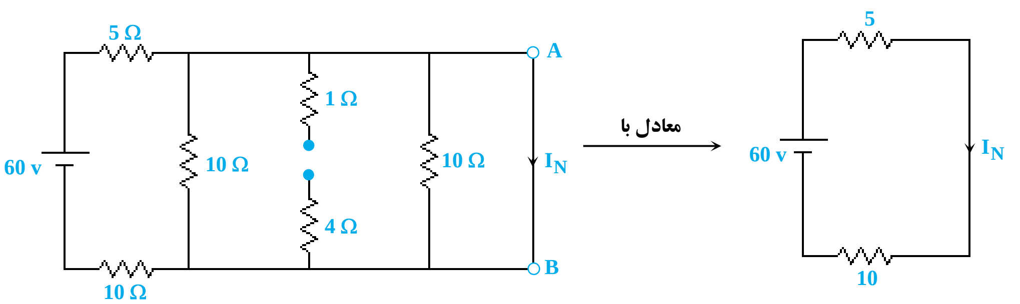
پاسخ: گزینه «۲» جهت محاسبه I_N، پایانه‌های A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم. حال مقادیر I و V_x هر دو صفر می‌شوند، زیرا شاخه شامل مقاومت‌های ۴ و ۶ اهمی با شاخه اتصال کوتاه موازی است. به عبارت دیگر:



$$V_{ab}=0 \Rightarrow (4+6)\times I=0 \Rightarrow I=0$$

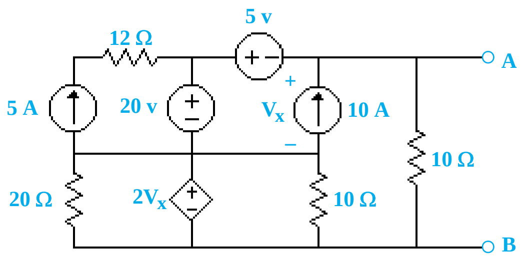
$$\Rightarrow V_x=6I=6\times0=0 \Rightarrow I=V_x=0$$

حال با اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ وابسته با مقدار صفر و مدار باز کردن منبع جریان وابسته با مقدار صفر داریم:



$$I_N=\frac{60}{5+10}=4A$$

مثال ۵۰: مدار معادل تونن در سرهای (A و B) مدار شکل مقابل کدام است؟



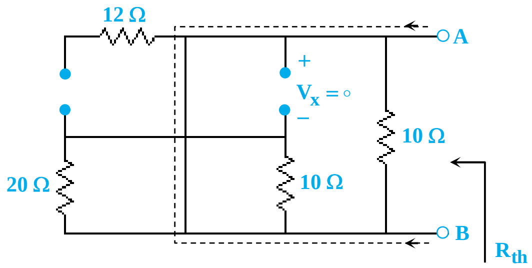
۱) $V_{th}=۴۵v$, $R_{th}=۰$

۲) $V_{th}=۴۵v$, $R_{th}=۱۰\Omega$

۳) $V_{th}=۱۵v$, $R_{th}=۱۰\Omega$

۴) $V_{th}=۳۰v$, $R_{th}=۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه R_{th}، ذکر این نکته لازم است که چون V_x کاملاً مشخص بوده و مستقل است، لذا منبع وابسته $۲V_x$ نیز در حکم منبع مستقل بوده و برای محاسبه R_{th} اتصال کوتاه خواهد شد؛ به عبارت واضح‌تر چنانچه منابع مستقل را صفر کنیم، آن‌گاه $V_x=۰$ بدست می‌آید و این یعنی منبع ولتاژ وابسته هم اتصال کوتاه می‌شود.



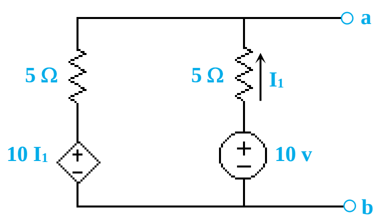
حال با توجه به اینکه بین نقاط A و B اتصال کوتاه وجود دارد (با توجه به شکل روبرو)، مقدار $R_{th}=۰$ است.

برای محاسبه V_{th} نیز کافی است V_x را در مدار اصلی بدست آوریم:

$$V_x=-۵+۲۰=۱۵v$$

$$V_{AB}=-۵+۲۰+۲\times۱۵=۴۵v \Rightarrow \mathbf{V_{th}=۴۵v}$$

مثال ۵۱: در مدار زیر، ولتاژ و مقاومت معادل تونن در پایانه‌های a و b کدام است؟



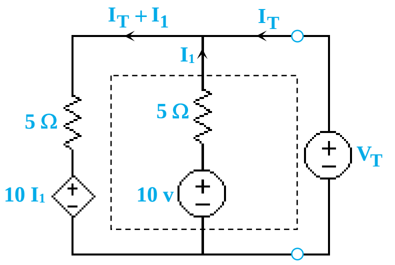
۱) $۴\Omega,۲۵v$

۲) $۲/۵\Omega,۱۵v$

۳) $\frac{۵}{۴}\Omega,۱۰v$

۴) $۱/۲۵\Omega,۷/۵v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با وصل یک منبع ولتاژ V_T به دو سر a و b و با نوشتن KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:



$$۵(I_T+I_۱)+۱۰I_۱=V_T \Rightarrow V_T=۱۵I_۱+۵I_T \quad (۱)$$

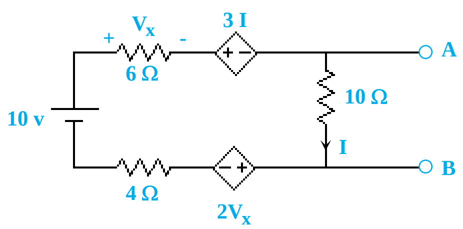
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_T=-(۵I_۱-۱۰) \Rightarrow I_۱=\frac{-V_T+۱۰}{۵} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} V_T=۱۵(\frac{-V_T+۱۰}{۵})+۵I_T \Rightarrow V_T=-۳V_T+۳۰+۵I_T \Rightarrow ۴V_T=۵I_T+۳۰$$

$$\Rightarrow V_T=\frac{۵}{۴}I_T+\frac{۳۰}{۴}=\underbrace{\boxed{۱/۲۵}}_{R_{th}}I_T+\underbrace{\boxed{۷/۵}}_{V_{th}}$$

مثال ۵۲: در مدار زیر حداکثر توان انتقالی از پایانه‌های A و B برحسب وات کدام است؟



۱) ۰/۲۱

۲) ۰/۱

۳) ۰/۵۱

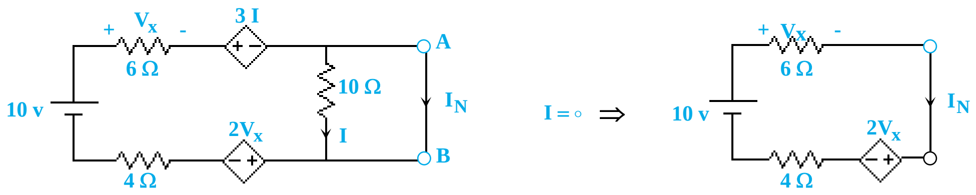
۴) ۰/۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا V_{th} را با KVL در حلقه مدار محاسبه کرده و سپس مقدار I_N را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} -۱۰+۶I+۳I+۱۰I+۲V_x+۴I=۰ \\ V_x=۶I \end{cases} \Rightarrow -۱۰+۶I+۳I+۱۰I+۱۲I+۴I=۰ \Rightarrow I=\frac{۱۰}{۳۵}A$$

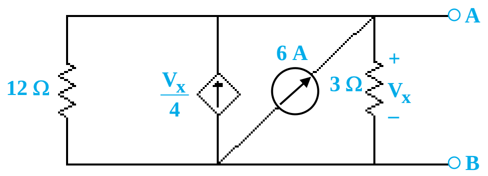
$$\mathbf{V_{th}}=۱۰\times I=\frac{۱۰۰}{۳۵}=۲/۸۵v$$

برای محاسبه I_N، دو سر A و B اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین داریم:



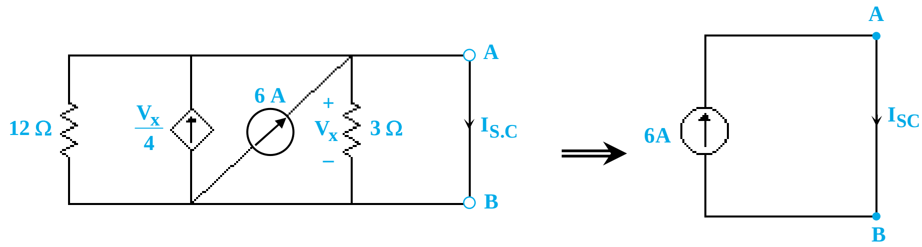
$$\begin{cases}-10+6I_N+2V_x+4I_N=0\\ V_x=6I_N\end{cases} \Rightarrow I_N=\frac{10}{22}A \Rightarrow P_{(max)}=\frac{1}{4}V_{th}\times I_N=\frac{1}{4}\times 2/85\times\frac{10}{22} \Rightarrow P_{(max)}=0/32w$$

مثال ۵۳: ماکزیمم توان انتقالی از دو پایانه A و B در مدار شکل مقابل چند وات است؟

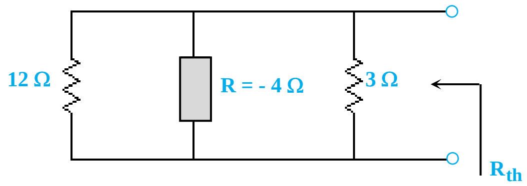


۱) ۳۶
۲) ۵۴
۳) ۷۲
۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینه «۲» باید ولتاژ و مقاومت تونن را محاسبه کنیم. با اتصال کوتاه کردن دو سر A و B، مقاومت ۳ اهم نیز اتصال کوتاه می‌شود و در نتیجه $V_x=0$ شده و لذا منبع جریان وابسته نیز از مدار باز می‌شود. حال فقط منبع جریان ۶ آمپری به عنوان منبع تولید جریان در مدار باقی می‌ماند، پس $I_{S.C}=6A$ است.



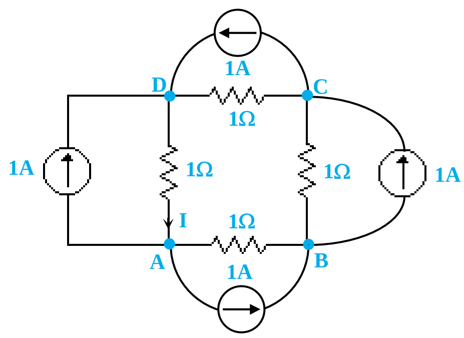
برای پیدا کردن مقاومت تونن، منبع جریان مستقل را از مدار حذف و مقاومت معادل منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم، مطابق شکل داریم:



$$R=-\frac{V_x}{\frac{V_x}{4}}=-4\Omega\ \ ,\ \ R_{th}=12\,\|\,(-4)\,\|\,3=6\Omega$$

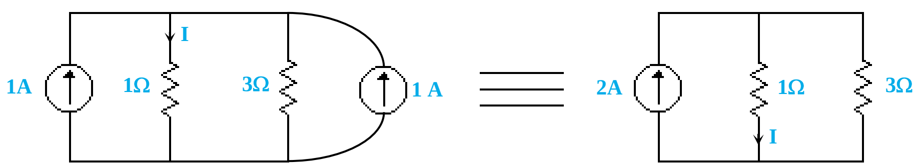
$$V_{th}=R_{th}\times I_{S.C}=6\times6=36v \quad \text{و} \quad P_{max}=\frac{V_{th}^2}{4\times R_{th}}=\frac{(36)^2}{4\times6}=54w$$

مثال ۵۴: در مدار شکل زیر مقدار جریان I چند آمپر است؟



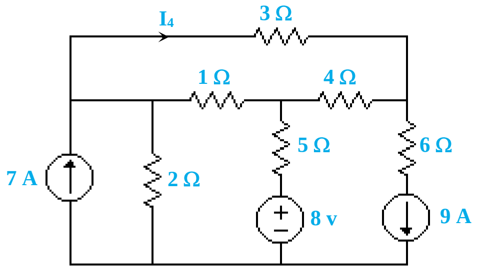
۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۳
۳) ۲
۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قاعده پرش خرگوش در گره‌های A و B و سپس بین گره‌های B و C و همچنین بین گره‌های C و D، مدار شکل زیر را داریم:



$$\Rightarrow I=\frac{3}{1+3}\times2=\frac{6}{4} \Rightarrow I=\frac{3}{2}A$$

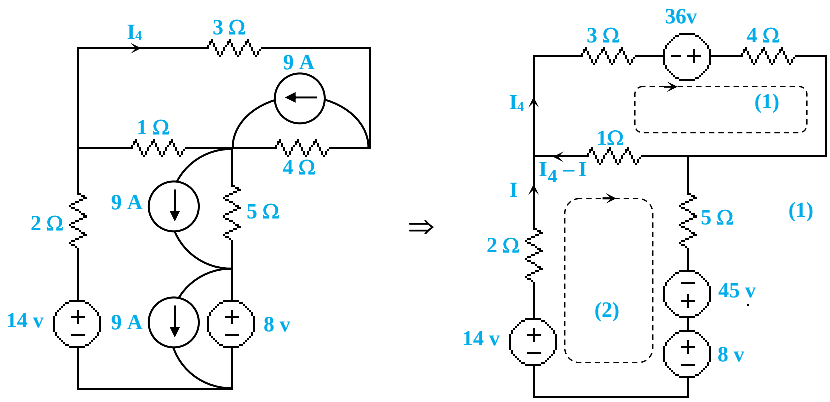
مثال۵۵: در مدار زیر جریان $I_۴$ برحسب آمپر برابر با کدام گزینه است؟



۱) $\frac{۱۰۵}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۰۵}$

۳) $\frac{۲۱}{۱۱۳}$ ۴) $\frac{۱۱۳}{۲۱}$

پاسخ: گزینه «۴» با حذف مقاومت ۶Ω سری با منبع جریان $۹A$ و اعمال قضیه پرش خرگوش برای این منبع جریان و همچنین با قانون تبدیل منابع برای مقاومت ۲Ω و منبع جریان $۷A$، مدار به صورت مقابل ساده می‌شود:



حال با نوشتن قانون KVL در حلقه شماره (۱) داریم:

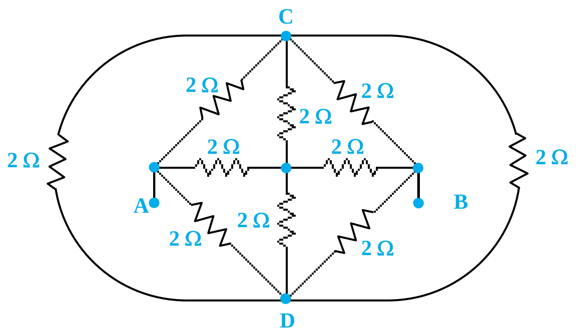
$$۳I_۴ - ۳۶ + ۴I_۴ + (I_۴ - I) = ۰ \qquad (۱)$$

و با نوشتن قانون KVL در حلقه شماره (۲) داریم:

$$(I - I_۴) + ۵I - ۴۵ + ۸ - ۱۴ + ۲I = ۰ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} ۸I_۴ - I = ۳۶ \\ -I_۴ + ۸I = ۵۱ \end{cases} \Rightarrow I_۴ = \frac{۱۱۳}{۲۱}A$$

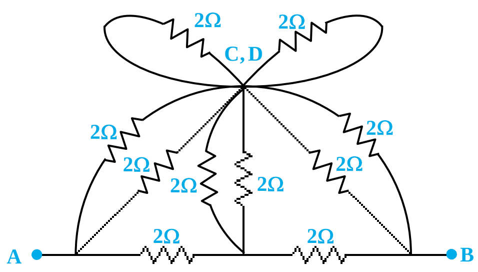
مثال۵۶: در مدار زیر مقاومت معادل از دید دو نقطه A و B کدام است؟



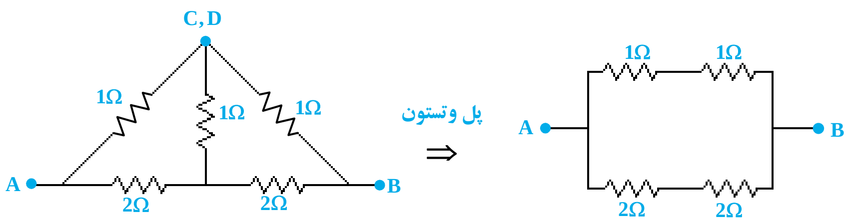
۱) $\frac{۴}{۳}\Omega$ ۲) $\frac{۲}{۳}\Omega$

۳) $\frac{۱}{۳}\Omega$ ۴) $\frac{۱}{۲}\Omega$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به هم‌پتانسیل بودن نقاط D و C به علت تقارن مدار، نقاط C و D را اتصال کوتاه می‌کنیم. لذا قسمت پایین مدار به بالای مدار منتقل می‌شود و شکل روبرو حاصل می‌شود:

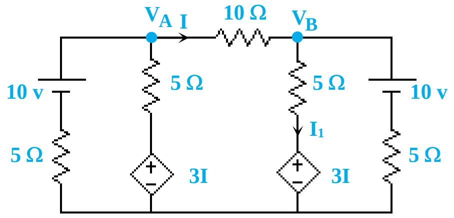


مقاومت‌های ۲Ω متصل به نقطه C یا همان نقطه D در بالای مدار، اتصال کوتاه بوده و حذف می‌شوند و همچنین مقاومت‌های ۲Ω موازی با یکدیگر نیز ساده می‌شوند. حال داریم:



$$R_{eq} = (۲+۲) \| (۱+۱) = ۴ \| ۲ = \frac{۴}{۳}\Omega$$

مثال ۵۷: در مدار زیر مقدار جریان I_1 کدام است؟



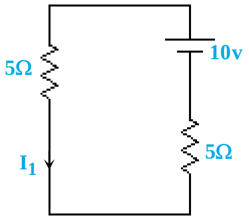
۱) ۱A

۲) ۲A

۳) ۳A

۴) ۴A

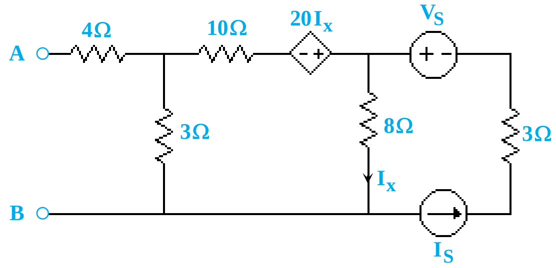
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به قضیه تقارن ولتاژ V_A برابر V_B است. بنابراین $I = ۰$ خواهد بود. حال منبع وابسته ۳I نیز صفر بوده و اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:



$$۵I_۱ + ۵I_۱ - ۱۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_۱ = ۱A}$$

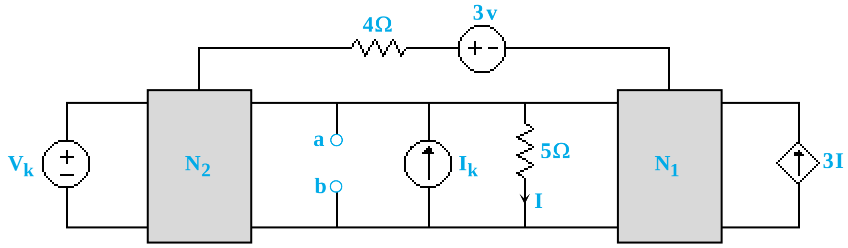
آزمون فصل اول

۱ـ مقدار مقاومت تونن در مدار زیر از دید A و B برحسب اهم کدام است؟



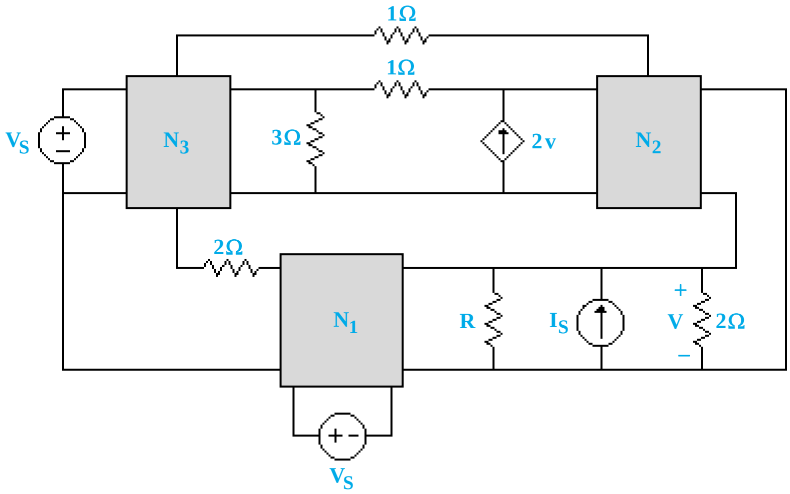
۱) ۲
۲) ۲-
۳) ۱
۴) ۱-

۲ـ در شبکه زیر N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی تشکیل شده‌اند. مقدار منبع جریان $I = ۰/۲۸۵(V_k + I_k)$ است. حال به جای مقاومت 5Ω چه مقاومتی قرار گیرد که مقاومت کل از دو سر a,b برابر $\frac{۶}{۷}\Omega$ شود؟



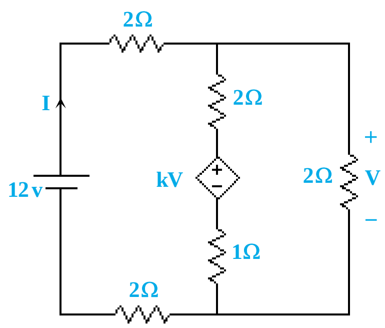
۱) $\frac{۳}{۲}\Omega$
۲) $\frac{۲}{۳}\Omega$
۳) $\frac{۱۰}{۳}\Omega$
۴) $\frac{۳}{۱۰}\Omega$

۳ـ در مدار زیر N_1 و N_2 ،N_3 شبکه‌های شامل مقاومت‌های خطی هستند. اگر $R = ۲\Omega$ باشد، $V = \frac{۲}{۳}I_S + ۶V_S$ است. حال به ازای کدام مقدار R برحسب اهم توان آن حداکثر است؟



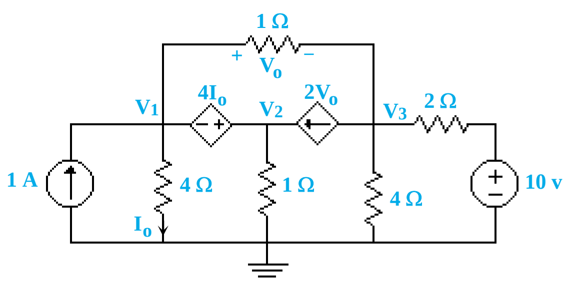
۱) ۳
۲) ۱-
۳) ۳-
۴) ۱

۴ـ در مدار مقابل مقدار k کدام باشد تا مقدار جریان I برابر ۲A شود؟



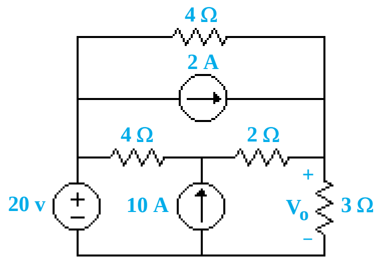
۱) ۱۰
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۲

۵ـ در مدار زیر مقدار ولتاژ V_o برحسب ولت کدام است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۶ـ در مدار زیر مقدار ولتاژ V_o برحسب ولت کدام است؟



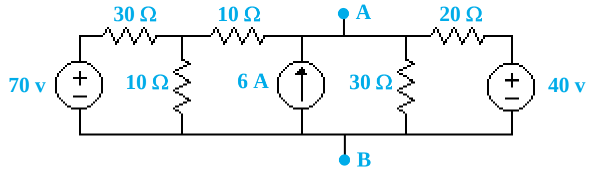
۱) ۲۲/۷

۲) ۳۰/۱

۳) ۳۱/۱

۴) ۲۸/۱

۷ـ در مدار زیر مقدار جریان نورتن از پایه‌های B و A چند آمپر است؟



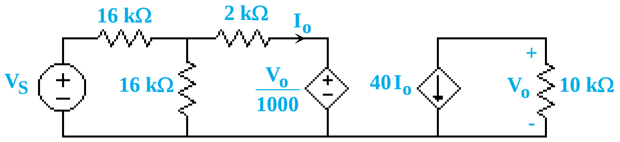
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۰

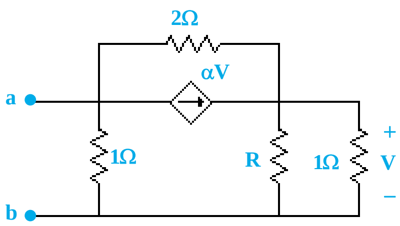
۸ـ در مدار زیر اندازه V_o برحسب ولت کدام است؟ $(V_S = ۱۰۰v)$



۱) ۱۸۲۱ ۲) ۱۹۵۲

۳) ۲۰۸۳ ۴) ۱۰۳۸

۹ـ به ازای کدام مقدار α، مقاومت دیده شده از دو سر a و b برابر $\frac{۲-R}{۳}$ می‌شود؟



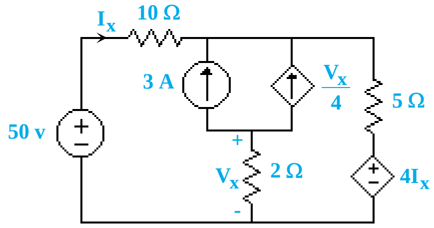
۱) $\alpha = ۱$

۲) $\alpha = ۲$

۳) $\alpha = ۳$

۴) $\alpha = ۴$

۱۰ـ در مدار زیر مقادیر I_x و V_x به ترتیب کدام است؟



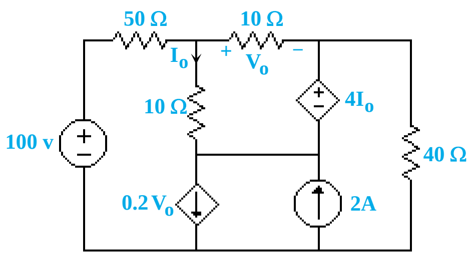
۱) $-۳v\ ,\ ۲/۱A$

۲) $۴v\ ,\ ۱/۲A$

۳) $-۴v\ ,\ ۲/۱A$

۴) $۳v\ ,\ ۱/۲A$

۱۱ـ در مدار زیر مقدار V_o برحسب ولت کدام است؟



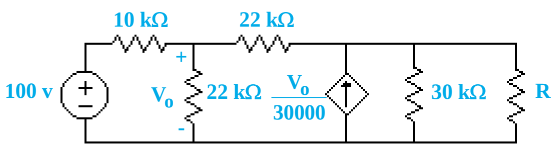
۱) ۴/۱۵

۲) ۱/۱۷

۳) ۲/۲۱

۴) ۱/۲

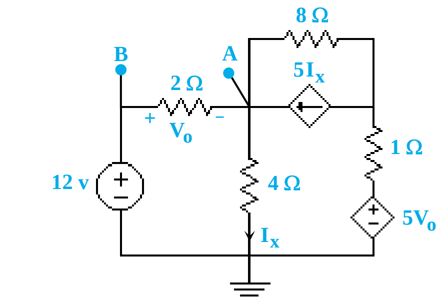
۱۲ـ در مدار زیر مقدار حداکثر توان جذبی توسط مقاومت R برحسب میلی‌وات کدام است؟



۱) ۶۰/۱۱ ۲) ۸۰/۵

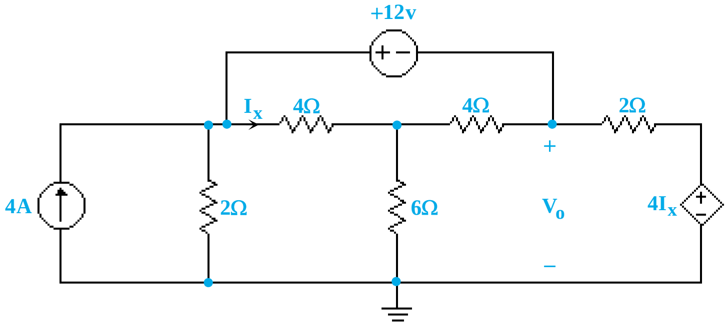
۳) ۹۰/۴۳ ۴) ۷۰/۹۲

۱۳ـ در مدار زیر مقدار ولتاژ تونن از دید پایانه‌های B و A حدوداً چند ولت است؟



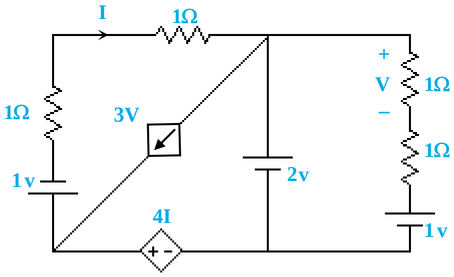
۱) ۵
۲) −۵
۳) ۳
۴) −۳

۱۴ـ در مدار شکل مقابل مقدار V_0 برابر کدام است؟



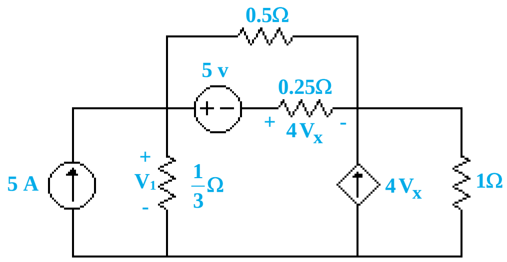
۱) −۷ ولت
۲) +۷ ولت
۳) +۳/۵ ولت
۴) −۳/۵ ولت

۱۵ـ در مدار مقابل شدت جریان I برحسب آمپر کدام است؟



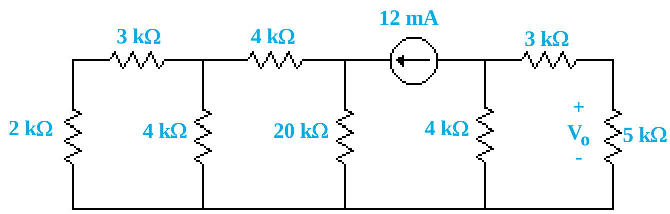
۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) −۰/۵

۱۶ـ در مدار شکل زیر ولتاژ $V_۱$ چند ولت است؟



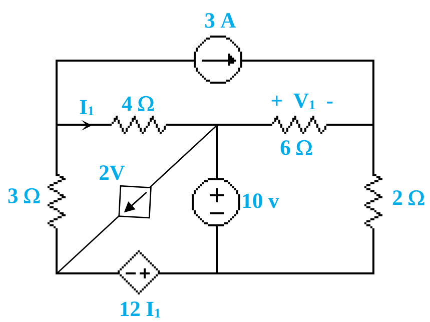
۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $-\frac{۵}{۳}$
۴) $-\frac{۵}{۱۲}$

۱۷ـ مقدار V_0 در مدار شکل زیر چند ولت است؟



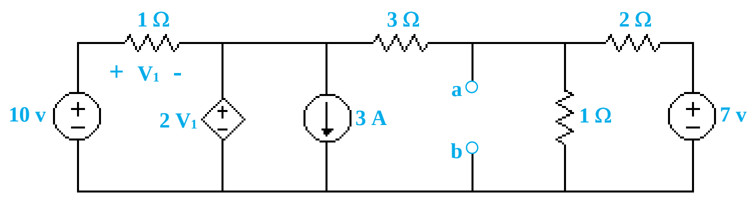
۱) −۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) −۴۰

۱۸ـ در مدار شکل زیر توانی که منبع جریان مستقل به مدار تحویل می‌دهد، چند وات است؟



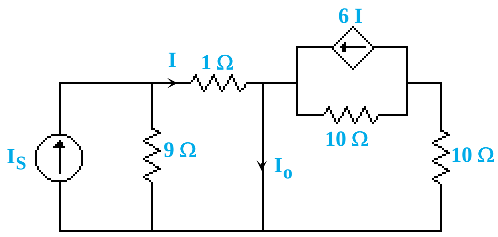
۱) ۱۳
۲) ۸
۳) ۳
۴) ۵

۱۹ـ ولتاژ تونن شکل زیر از دید پایانه‌های a و b حدوداً چند ولت است؟



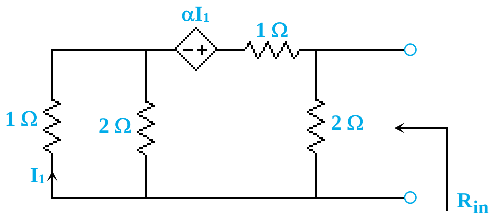
۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۰ـ در مدار زیر نسبت $\frac{I_o}{I_S}$ کدام گزینه است؟



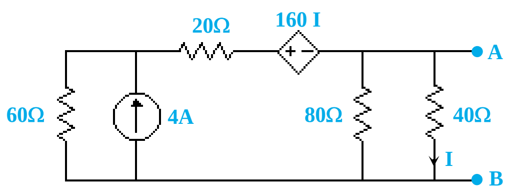
۱) ۳/۶
۲) ۳
۳) ۷/۲
۴) ۶

۲۱ـ در مدار شکل زیر مقدار α چقدر باشد تا مقاومت ورودی شبکه صفر شود؟



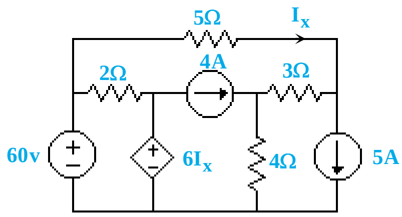
۱) ۲/۵
۲) ۱/۵
۳) ۵/۵
۴) ۳/۵

۲۲ـ با توجه به شکل زیر مقاومت معادل نورتن بین A و B برحسب اهم چقدر است؟



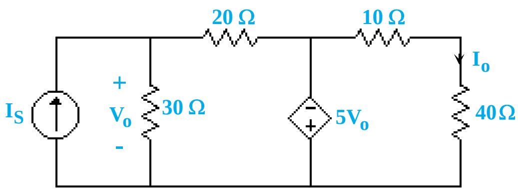
۱) ۱۸/۵۶
۲) ۳۲/۲۹
۳) ۲۳/۳۳
۴) ۳۷/۰۲

۲۳ـ در شکل زیر جریان I_x چند آمپر است؟



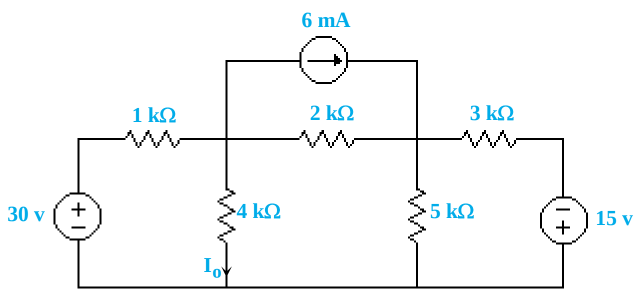
۱) ۱/۷۳
۲) ۶/۵۸
۳) ۳/۴۶
۴) ۳/۲۹

۲۴ـ مقدار عددی $\frac{I_o}{I_S}$ در مدار شکل زیر کدام است؟



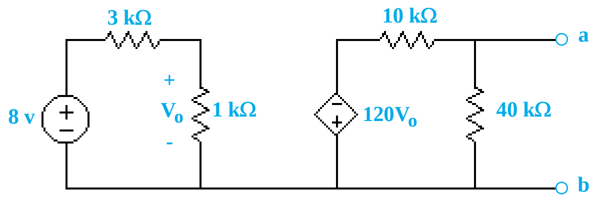
۱) ۳
۲) ۰/۳−
۳) ۳-
۴) ۰/۳

۲۵ـ مقدار I_o در مدار شکل زیر چند میلی‌آمپر است؟



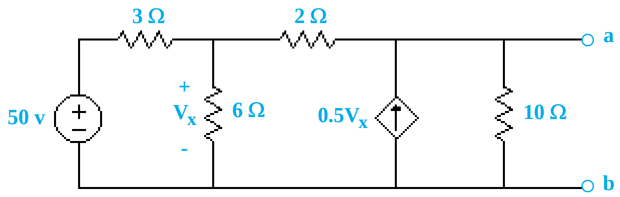
۱) ۴/۰۵۸
۲) ۶/۵۸
۳) ۶۵/۸
۴) ۴۰/۵۸

۲۶ـ در مدار شکل زیر مقاومت چند کیلو اهمی در پایانه a و b قرار دهیم تا ماکزیمم توان را از مدار جذب کند؟



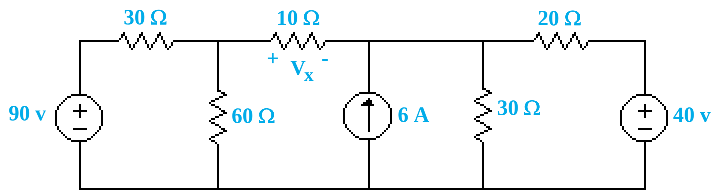
۱) ۱۰
۲) ۳
۳) ۸
۴) ۴

۲۷ـ مقدار مقاومت تونن از دید دو پایانه a و b در مدار شکل زیر چند اهم است؟



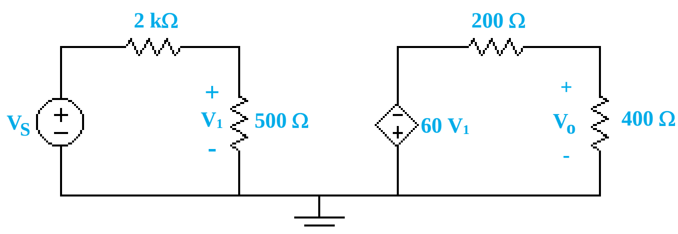
۱) ۴
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) ۲۰

۲۸ـ مقدار V_x در مدار شکل زیر چند ولت است؟



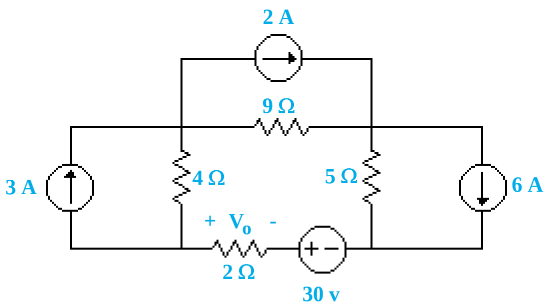
۱) ۸۵/۷-
۲) ۸/۵۷-
۳) ۷/۵۸
۴) صفر

۲۹ـ در مدار شکل زیر مقدار $\frac{V_o}{V_S}$ کدام است؟



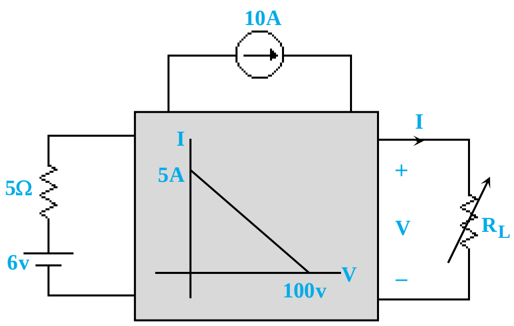
۱) ۸
۲) ۴
۳) ۴-
۴) ۸-

۳۰ـ در مدار شکل زیر مقدار قدر مطلق V_o چند ولت است؟



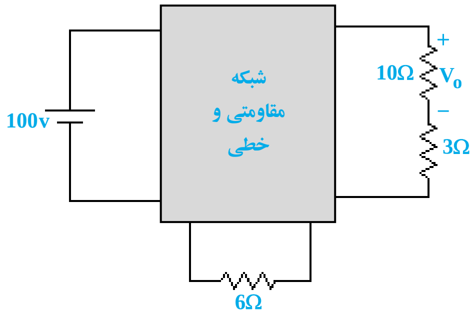
۱) ۲
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۹

۳۱ـ در مدار زیر حداکثر توان جذبی مقاومت R_L برحسب وات کدام است؟



۱) ۱۵۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۰۰
۴) ۵۰

۳۲ـ در مدار زیر اگر منبع ولتاژ از ۱۰۰ ولت به ۱۵۰ ولت تغییر کند، ولتاژ V_o و توان مقاومت ۶Ω به ترتیب در کدام گزینه وجود دارد؟



$$\begin{cases} V_o = ۳۰\,v \\ P_{۶\Omega} = ۱۰\,mw \end{cases}$$

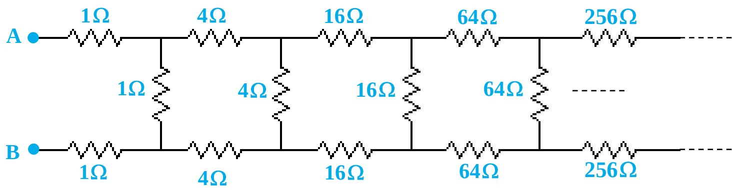
۱) $P_{۶\Omega} = ۲۲/۵mw$, $V_o = ۴۵v$

۲) $P_{۶\Omega} = ۱۰mw$, $V_o = ۳۰v$

۳) $P_{۶\Omega} = ۴/۴۴mw$, $V_o = ۲۰v$

۴) $P_{۶\Omega} = ۱۵mw$, $V_o = ۲۰v$

۳۳ـ مقدار مقاومت معادل در مدار زیر از دید پایانه‌های B و A برحسب اهم کدام است؟



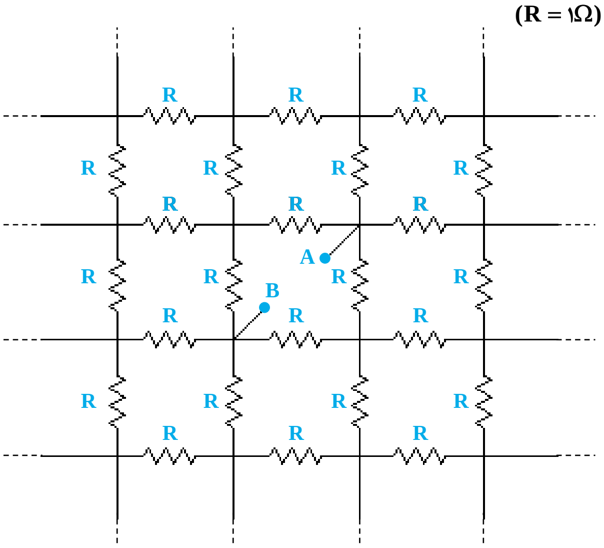
۱) ۱/۶۹

۲) ۲/۹۲

۳) ۲/۳۸

۴) ۳/۹۲

۳۴ـ در شکل زیر مقاومت معادل از پایانه‌های B و A برحسب اهم کدام است؟ $(R = ۱\Omega)$



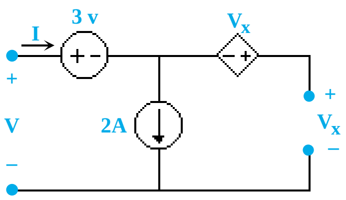
۱) ۰/۴۴

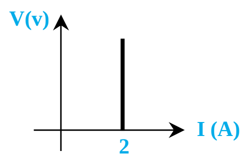
۲) ۰/۳۳

۳) ۰/۵۵

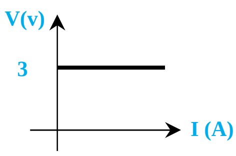
۴) ۰/۶۶

۳۵ـ مشخصه‌ی ولت آمپر مدار زیر کدام است؟

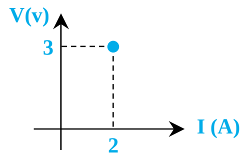




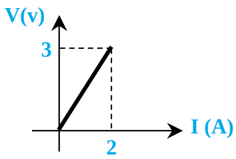
(۱)



(۲)



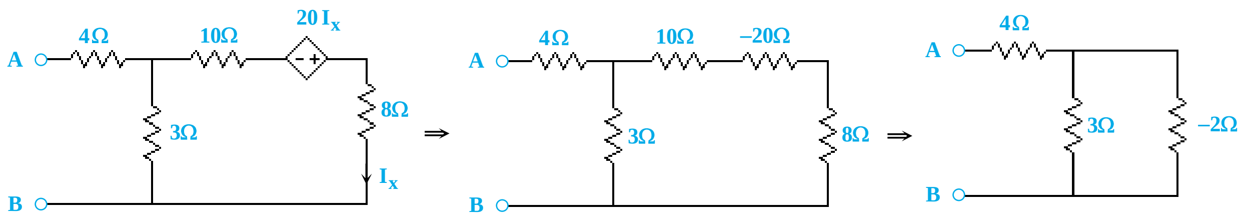
(۳)



(۴)

پاسخنامه تشریحی آزمون فصل اول

۱ـ گزینه «۲» برای به‌دست آوردن مقاومت تونن کافی است منابع ولتاژ و جریان را بی‌اثر کنیم. در این صورت شاخه‌ی سمت راست حذف می‌شود. حال از آنجایی که در این سؤال، ولتاژ منبع وابسته برحسب جریان آن حاصل می‌شود، لذا نیازی به منبع تست نبوده و به‌راحتی می‌توان مقاومت معادل آن را که برابر ۲۰− اهم است، گذاشت.



$$\Rightarrow \quad R_{th} = ۴+۳\,\|\,(-۲) = ۴+\frac{-۶}{۱} = -۲\Omega$$

۲ـ گزینه «۱» برای به‌دست آوردن مقاومت معادل از دو سر a و b باید یک منبع جریان I_T با ولتاژ دو سر V_T را به این دو سر تزریق کنیم. با توجه به وجود منبع جریان I_k می‌توانیم از آن به عنوان منبع جریان I_T استفاده کنیم. از طرفی ولتاژ دو سرش همان ۵I می‌باشد. بنابراین:

$I_T = I_k$

$V_T = ۵I = ۱/۴۲۵(V_k + I_T)$

$V_T = ۱/۴۲۵ I_T \quad \Rightarrow \quad R_{ab} = ۱/۴۲۵$

از طرفی برای به‌دست آوردن مقاومت معادل، تمامی منابع را خنثی می‌کنیم. در نتیجه حال مقاومت دو سر a و b را بدون حضور مقاومت ۵ اهمی به‌دست می‌آوریم.

$R'_{th} \,\|\, ۵ = ۱/۴۲۵ \quad \Rightarrow \quad R'_{th} \simeq ۲$

حال مقاومت جدیدی که باید با R'_{th} موازی شود تا مقدار $\frac{۶}{۷}$ به‌وجود آید را به‌دست می‌آوریم.

$۲\,\|\,R = \frac{۶}{۷} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{۳}{۲}\Omega$

۳ـ گزینه «۴» با توجه به داشتن مقدار V برحسب I_S می‌توانیم مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع جریان I_S را به‌دست آوریم:

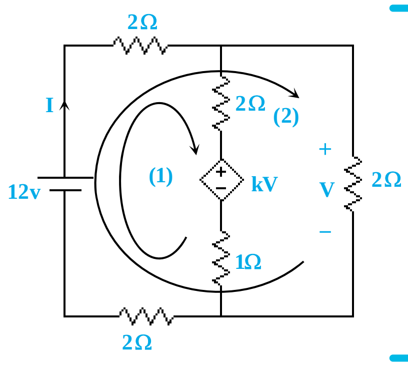
$V = \frac{۲}{۳}I_S + ۶V_S \xrightarrow{V_S = ۰} R_{th} = \frac{۲}{۳}\Omega$

حال مقاومت معادل دیده‌شده از دو سر منبع جریان I_S را بدون حضور مقاومت R به‌دست می‌آوریم.

$۲\,\|\,R'_{th} = \frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow \quad R'_{th} = ۱\Omega$

بنابراین به ازای $R = R'_{th}$ توان انتقالی به آن حداکثر می‌شود.

۴ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در دو حلقه‌ی موجود و همچنین قرار دادن $I = ۲$ در معادلات KVL داریم:



KVL در حلقه‌ی (۱):

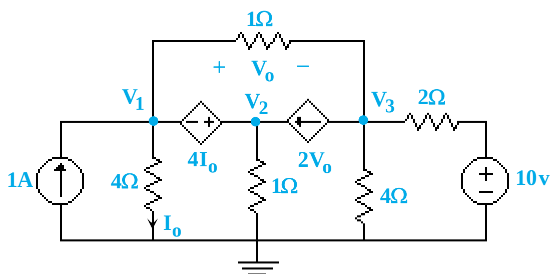
$$-۱۲ + ۴I + ۳(I - \frac{V}{۲}) + KV = ۰ \quad \Rightarrow \quad (k - ۱/۵)V + ۲ = ۰ \quad (۱)$$

KVL در حلقه‌ی (۲):

$$-۱۲ + ۴I + V = ۰ \quad \Rightarrow \quad V = ۴ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (k - ۱/۵)\times ۴ + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad k = ۱$$

۵ـ گزینه «۲» با اعمال KCL در گره سمت راست و گره مرکب سمت چپ داریم:



KCL در گره $V_۳$:

$$۲V_o + \frac{V_۳}{۴} + \frac{V_۳ - ۱۰}{۲} - V_o = ۰ \Rightarrow ۴V_o + ۳V_۳ = ۲۰ \quad \Rightarrow \quad V_۳ = \frac{۲۰ - ۴V_o}{۳} \quad (۱)$$

با اعمال KCL در گره مرکب $V_۱$ و $V_۲$:

$$V_۲ - ۲V_O + I_O - ۱ + V_O = ۰ \Rightarrow V_۲ - V_O + I_O = ۱ \qquad (۲)$$

از طرفی داریم:

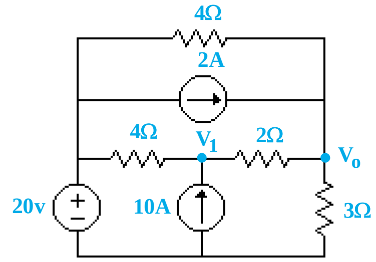
$$\begin{cases} V_۲ - V_۱ = ۴I_O & (۳) \\ V_۱ - V_۲ = V_O & (۴) \\ V_۱ = ۴I_O & (۵) \end{cases}$$

$$(۳),(۵) \longrightarrow V_۲ = ۸I_O \xrightarrow{+(۲)} ۹I_O = V_O + ۱ \qquad (۶)$$

$$(۱),(۴) \longrightarrow V_O + ۳V_۱ = ۲۰ \xrightarrow{+(۵)} V_O + ۱۲I_O = ۲۰ \qquad (۷)$$

$$(۶),(۷) \longrightarrow I_O = ۱A \;,\; V_O = ۸volt$$

۶ـ گزینه «۱» با نوشتن معادلات گره مربوط به مدار مقدار V_O را به‌دست می‌آوریم:



KCL در گره (V_O):

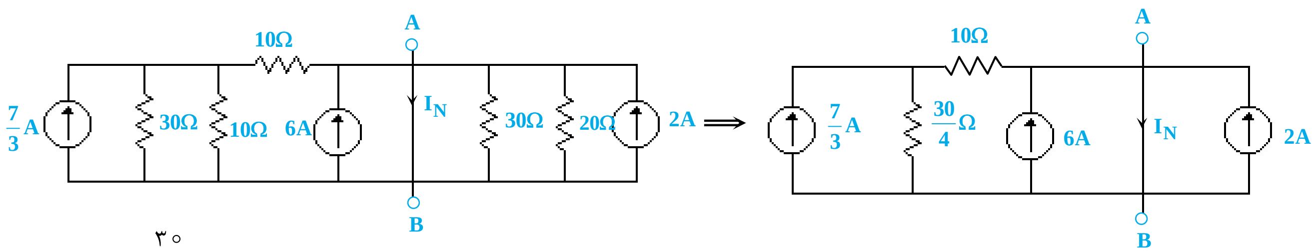
$$\frac{V_O}{۳} + \frac{V_O - V_۱}{۲} + \frac{V_O - ۲۰}{۴} = ۲ \Rightarrow ۱۳V_O - ۶V_۱ = ۸۴ \qquad (۱)$$

KCL در گره ($V_۱$):

$$\frac{V_۲ - ۲۰}{۴} + \frac{V_۱ - V_O}{۲} = ۱۰ \Rightarrow ۳V_۱ - ۲V_O = ۶۰ \qquad (۲)$$

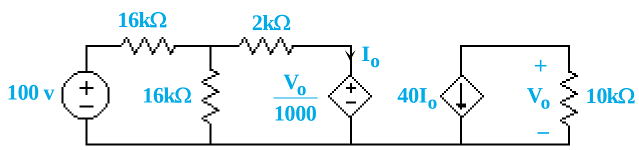
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۳V_O - ۴V_O - ۱۲۰ = ۸۴ \Rightarrow ۹V_O = ۲۰۴ \Rightarrow V_O = \frac{۲۰۴}{۹} = ۲۲/۷۷$$

۷ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن جریان نورتن کافی است پایه‌های A و B را اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را به‌دست آوریم.



$$I_N = ۲ + ۶ + \frac{\frac{۳۰}{۴}}{\frac{۳۰}{۴} + ۱۰} \times \frac{۷}{۳} = ۹A$$

۸ـ گزینه «۳» با توجه به شکل مدار داریم:

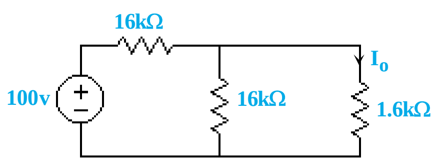


$$V_O = -۴۰ I_O \times ۱۰^۴ = -۴ \times ۱۰^۵ \, I_O$$

حال مقدار مقاومت معادل منبع ولتاژ وابسته را به‌دست می‌آوریم:

$$R_{\text{منبع ولتاژ وابسته}} = \frac{V_O}{۱۰۰۰ I_O} = -۴۰۰ = -۰/۴k\Omega$$

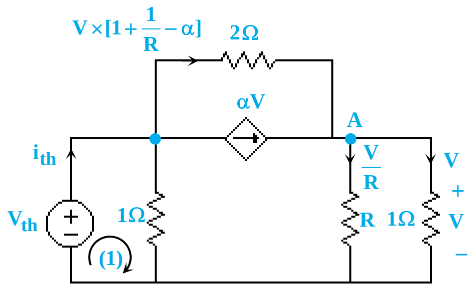
حال مدار به صورت زیر ساده می‌شود:

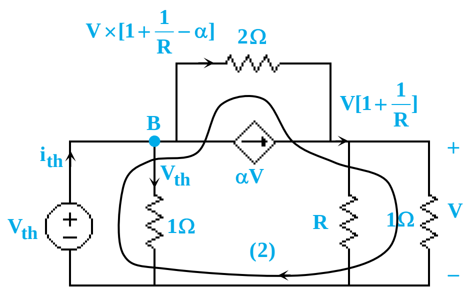


$$V_O = -۴ \times ۱۰^۵ \, I_O = -۴ \times ۱۰^۵ \times \frac{۱۶}{۱۶ + ۱/۶} \times \frac{۱۰۰}{۱۶۰۰۰ + (۱۶۰۰۰ \,||\, ۱۶۰۰)}$$

$$V_O = -۲۰۸۳/۳۳ \Rightarrow |V_O| \simeq ۲۰۸۳v$$

۹ـ گزینه «۲» برای حل سؤال باید منبع ولتاژ V_{th} با جریان تزریقی i_{th} را به دو سر a و b بسته و به دنبال محاسبه مقاومت دیده شده از این دو سر باشیم.





با توجه به موازی بودن مقاومت R و ۱Ω و این‌که ولتاژ هر دو V می‌باشد، جریان هر کدام در جهت نشان داده شده بر روی شکل برابر $\frac{V}{R}$ و V می‌شود.

بـا درنظر گـرفتن KCL در گـره A، جریـان مقاومت ۲Ω در جهت نشان داده شـده برابر $V\times[۱+\frac{۱}{R}-\alpha]$ می‌گردد.

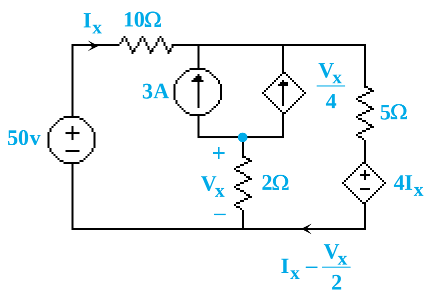
با درنظر گرفتن رابطه KVL در حلقه ۱، جریان مقاومت ۱Ω داخل ایـن حلقـه، در جهـت نشان داده شده برابر V_{th} می‌شود.

حال کافی است که رابطه KCL را در گره B و رابطه KVL را برای حلقه ۲ بنویسیم.

$$\begin{cases} KCL_B: i_{th}=V_{th}+V\times[۱+\frac{۱}{R}] & (۱)\\ KVL_۲: V_{th}=۲\times V\times[۱+\frac{۱}{R}-\alpha]+V & (۲)\end{cases} \xrightarrow{(۱)\ و\ (۲)} V_{th}=\frac{(۳-۲\alpha)\times R+۲}{(۴-۲\alpha)\times R+۳}\times i_{th} \Rightarrow R_{th}=\frac{(۳-۲\alpha)\times R+۲}{(۴-۲\alpha)\times R+۳}$$

$$R_{th}=\frac{۲-R}{۳} \Rightarrow \frac{(۳-۲\alpha)\times R+۲}{(۴-۲\alpha)\times R+۳}=\frac{۲-R}{۳} \Rightarrow \boxed{\alpha=۲}$$

۱۰ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره شاخه‌ی میانی مقدار V_x به‌راحتی قابل محاسبه است. یعنی:



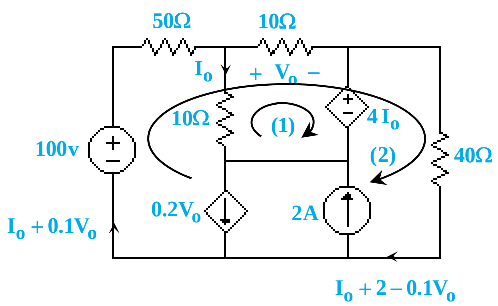
با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$۳+\frac{V_x}{۴}+\frac{V_x}{۲}=۰ \Rightarrow ۳V_x=-۱۲ \Rightarrow V_x=-۴v \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

حال با اینکه گزینه‌ی مورد نظر به‌دست آمده است، با اعمال KVL در حلقه‌ی خارجی مقـدار I_x را هم به‌دست می‌آوریم. با نوشتن KVL داریم:

$$-۵۰+۱۰I_x+۵\times(I_x-\frac{V_x}{۲})+۴I_x=۰ \Rightarrow ۱۹I_x=۴۰ \Rightarrow I_x=۲/۱A$$

۱۱ـ گزینه «۲» با مشخص‌کردن جریان شاخه‌ها و با اعمال KVL در دو حلقه‌ی مشخص شده مقدار V_o را محاسبه می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه‌ی (۱) داریم:

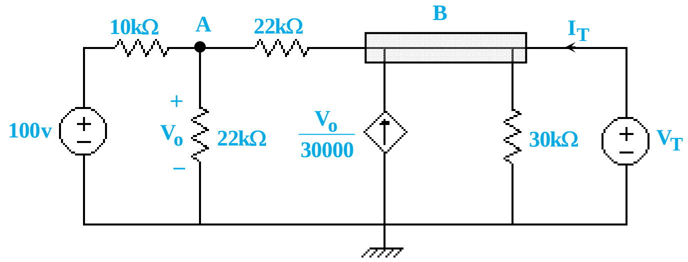
$$V_o+۴I_o-۱۰I_o=۰ \Rightarrow V_o=۶I_o \quad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه‌ی (۲) داریم:

$$-۱۰۰+۵۰\times(I_o+۰/۱V_o)+V_o+۴۰\times(I_o+۲-۰/۱V_o)=۰$$

$$\Rightarrow ۲V_o+۹۰I_o=۲۰ \xrightarrow{(۱)} ۱۷V_o=۲۰ \Rightarrow V_o=۱/۱۷v$$

۱۲ـ گزینه «۴» برای به دست آوردن حداکثر توان جذبی توسط مقاومت R کافی است مدار معادل تونن دیده شده از دو سر R را به‌دست آوریم.



با اعمال KCL در گره‌های A و B داریم:

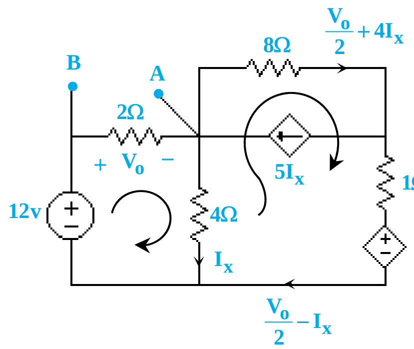
$$KCL(A):\frac{V_o-۱۰۰}{۱۰\times۱۰^۳}+\frac{V_o}{۲۲\times۱۰^۳}+\frac{V_o-V_T}{۲۲\times۱۰^۳}=۰\Rightarrow۴۲V_o-۱۰V_T=۲۲۰۰\quad(۱)$$

$$KCL(B):\frac{V_T}{۳۰\times۱۰^۳}+\frac{V_T-V_o}{۲۲\times۱۰^۳}=\frac{V_o}{۳۰۰۰۰}+I_T\Rightarrow۱۳V_T-۱۳V_o=۱۶۵\times۱۰^۳I_T\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}۳۲V_T=۵۳۳/۰۸\times۱۰^۳I_T+۲۲۰۰\Rightarrow V_T=۱۶/۶۶\times۱۰^۳I_T+۶۸/۷۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R_{th}=۱۶/۶۶k\Omega\\V_{th}=۶۸/۷۵v\end{cases}\Rightarrow P_{max}=\frac{۱}{۴}\frac{V_{th}^۲}{R_{th}}=۷۰/۹۲\times۱۰^{-۳}=۷۰/۹۲mw$$

۱۳ـ گزینه «۲» با مشخص‌کردن جریان شاخه‌های مدار و اعمال KVL در حلقه‌های چپ و راست مدار مقدار V_{AB} را به‌راحتی می‌توان محاسبه کرد.



KVL در حلقه (سمت چپ):

$$-۱۲+V_o+۴I_x=۰\Rightarrow V_o+۴I_x=۱۲\quad(۱)$$

KVL در حلقه (سمت راست):

$$۸\times(\frac{V_o}{۲}+۴I_x)+۱\times(\frac{V_o}{۲}-I_x)+۵V_o-۴I_x=۰\Rightarrow۹/۵V_o=۲۷I_x\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}V_o+۴\times\frac{۹/۵}{۲۷}V_o=۱۲\Rightarrow V_o=\frac{۱۲}{۲/۴۱}\simeq۵\Rightarrow V_{AB}=-۵v$$

۱۴ـ گزینه «۲» مدار رسم شده در شکل مقابل را درنظر می‌گیریم:

معادلات گره را می‌نویسیم:

$$\text{در گره ۲}\Rightarrow\frac{V_۱-V_۲}{۴}+\frac{V_o-V_۲}{۴}=\frac{V_۲}{۶}$$

$$\text{در ابرگره}\Rightarrow۴=\frac{V_۱}{۲}+\frac{V_۲}{۶}+\frac{V_o-V_۳}{۲}$$

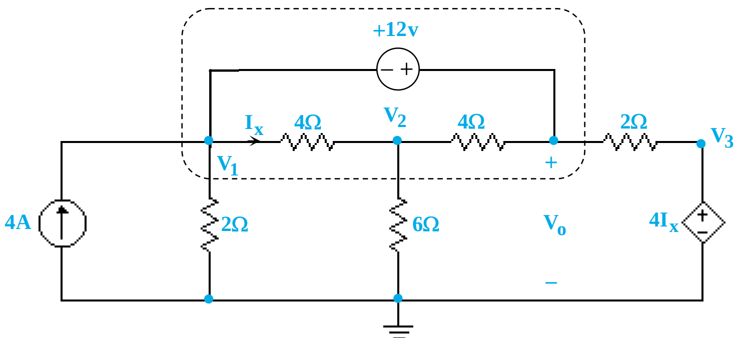
از طرفی داریم: $V_o=V_۱+۱۲\quad,\quad V_۳=۴I_x=V_۱-V_۲$

حالا معادلات را حل می‌کنیم؛ V_o را در معادله گره ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{V_۱}{۲}+۳=\frac{۲}{۳}V_۲$$

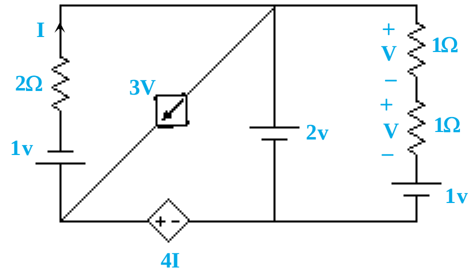
V_o و $V_۳$ را در معادله ابرگره قرار می‌دهیم:

$$\frac{V_۱}{۲}+\frac{۲}{۳}V_۲+۲=۰$$



$$V_۱=-۵v\Rightarrow V_o=V_۱+۱۲=+۷v$$

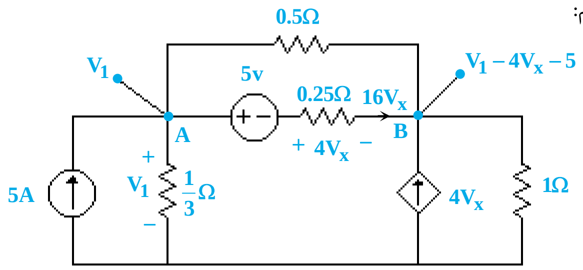
۱۵ـ گزینه «۱» ابتدا با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت راست مقدار V را محاسبه می‌کنیم.



با اعمال KVL در حلقه (سمت راست) داریم: $-۲+۲V+۱=۰ \Rightarrow V=\frac{۱}{۲}v$

حال با اعمال KVL در حلقه‌ی خارجی داریم: $+۱+۲I+۲V+۱-۴I=۰ \Rightarrow I=۱/۵A$

۱۶ـ گزینه «۱» با اعمال KCL در دو گره موجود داریم:

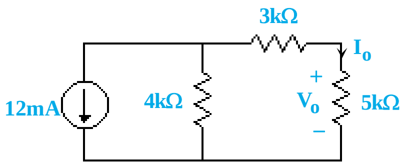


KCL در گره A : $۳V_۱+۱۶V_x+\frac{۴V_x+۵}{۰/۵}=۵ \Rightarrow ۳V_۱+۲۴V_x=-۵ \quad (۱)$

KCL در گره B: $\frac{V_۱-۴V_x-۵}{۱}=۴V_x+۱۶V_x+\frac{۴V_x+۵}{۰/۵} \Rightarrow V_۱=۳۲V_x+۱۵ \quad (۲)$

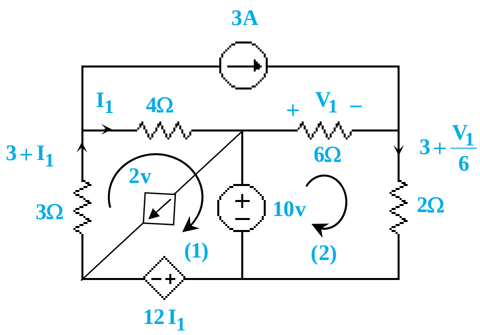
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_۱=۳۲\times\frac{-۳V_۱-۵}{۲۴}+۱۵ \Rightarrow ۵V_۱=\frac{۲۵}{۳} \Rightarrow V_۱=\frac{۵}{۳}v$$

۱۷ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه المان‌های سری با منبع جریان حذف می‌شود، به راحتی می‌توان المان‌های سمت چپ منبع جریان را حذف کرد. حال با اعمال تقسیم جریان در مدار ساده شده، مقدار V_o را به‌دست می‌آوریم.



$$I_o=\frac{۴}{(۳+۵)+۴}\times(-۱۲)=-۴mA \Rightarrow V_o=(-۴)\times۵=-۲۰\,v$$

۱۸ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن توان تحویلی منبع جریان کافی است ولتاژ دو سرش یعنی $۴I_۱+V_۱$ را به‌دست آوریم.



با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

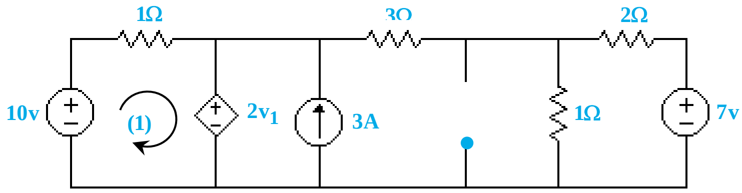
KVL در حلقه (۱): $۳(I_۱+۳)+۴I_۱+۱۰+۱۲I_۱=۰ \Rightarrow ۱۹I_۱+۱۹=۰ \Rightarrow I_۱=-۱A$

KVL در حلقه (۲): $+V_۱+۲\times(۳+\frac{V_۱}{۶})-۱۰=۰ \Rightarrow \frac{۴V_۱}{۳}=۴ \Rightarrow V_۱=۳V$

بنابراین توان تولیدی منبع جریان به صورت زیر قابل محاسبه است.

$P=VI=(۴I_۱+V_۱)\times۳=-۳$ مصرفی $\Rightarrow P=۳\,w$ تولیدی

۱۹ـ گزینه «۴» با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت چپ مقدار $V_۱$ به آسانی قابل محاسبه است.

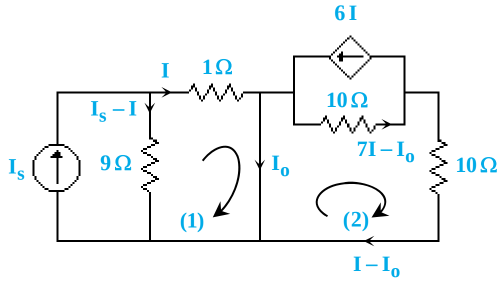


$$۳V_۱ = ۱۰ \Rightarrow V_۱ = \frac{۱۰}{۳}V \qquad (۱)$$

می‌دانیم که می‌توانیم شاخه‌های موازی با منابع ولتاژ را حذف کنیم. لذا منبع جریان ۳A و شاخه‌ی سمت چپ را حذف کرده و در گره a، KCL می‌نویسیم:

$$\frac{V_a - ۲V_۱}{۳} + \frac{V_a}{۱} + \frac{V_a - V}{۲} = ۰ \xrightarrow{(۱)} V_a = \frac{۱۰۱}{۳۳} \simeq ۳v$$

۲۰ـ گزینه «۱» ابتدا جریان شاخه‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) نسبت $\frac{I_o}{I_S}$ را به‌دست می‌آوریم.

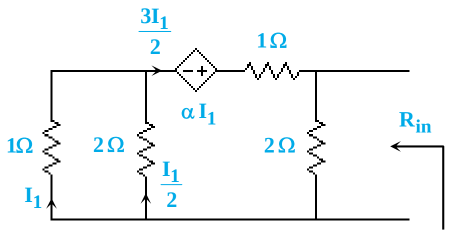


KVL در حلقه (۱): $\quad I + ۹\times(I - I_S) = ۰ \;\Rightarrow\; I_S = \frac{۱۰}{۹}I \qquad (۱)$

KVL در حلقه (۲): $\quad ۱۰\times(۷I - I_o) + ۱۰\times(I - I_o) = ۰ \;\Rightarrow\; ۸۰I = ۲۰I_o \;\Rightarrow\; ۴I = I_o \qquad (۲)$

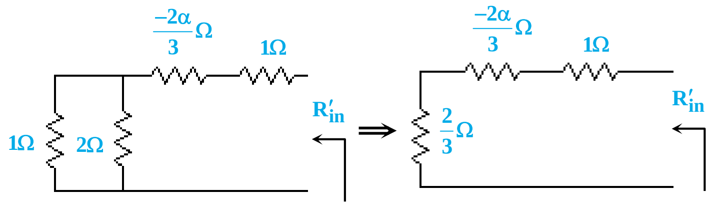
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{I_o}{I_S} = \frac{۴I}{\frac{۱۰}{۹}I} = ۳/۶$$

۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا با مشخص کردن جریان منبع ولتاژ وابسته، مقاومت معادل آن را به‌دست آورده سپس مقاومت ورودی را برحسب α به‌دست می‌آوریم.



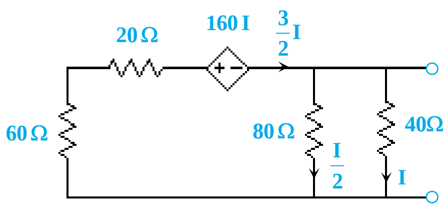
$$R = \frac{\alpha I_۱}{-\frac{۳}{۲}I_۱} = -\frac{۲\alpha}{۳}$$ معادل منبع ولتاژ وابسته

برای صفر شدن مقاومت ورودی کافی است مقاومت معادل دیده شده از پشت مقاومت ۲ اهمی صفر باشد.

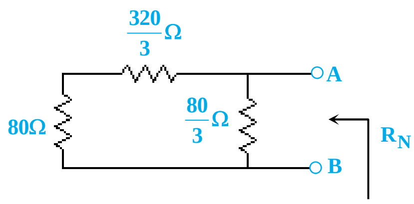


$$\Rightarrow R'_{in} = \frac{۵}{۳} - \frac{۲\alpha}{۳} = ۰ \Rightarrow \alpha = ۲/۵$$

۲۲ـ گزینه «۳» ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس جریان منبع ولتاژ وابسته را برحسب I به‌دست می‌آوریم و با جایگزینی مقاومت معادل آن، مقاومت نورتن دیده شده از دو سر A و B را به‌دست می‌آوریم.

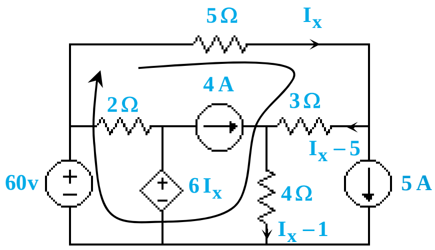


$$R = \frac{۱۶۰I}{\frac{۳}{۲}I} = \frac{۳۲۰}{۳}\Omega$$ معادل منبع ولتاژ وابسته



$$\Rightarrow R_N = \overbrace{(۸۰ + \frac{۳۲۰}{۳})}^{\frac{۵۶۰}{۳}} \| \frac{۸۰}{۳} = \frac{۷۰}{۳} = ۲۳/۳۳\Omega$$

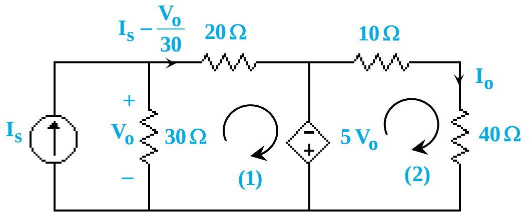
۲۳ــ گزینه «۲» با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:



$$KVL: ۵I_x + ۳\times(I_x - ۵) + ۴\times(I_x - ۱) - ۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow\ ۱۲I_x = ۷۹ \ \Rightarrow\ I_x = ۶/۵۸\,A$$

۲۴ــ گزینه «۲» با اعمال KVL در حلقه‌های میانی و سمت راست داریم:



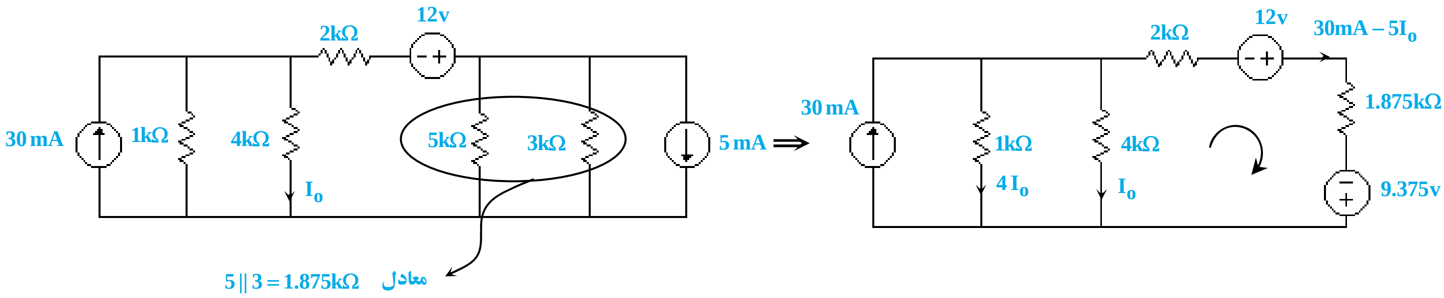
$$KVL\ (۱): -V_o + ۲۰\times(I_S - \frac{V_o}{۳۰}) - ۵V_o = ۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{-۲۰}{۳}V_o + ۲۰I_S = ۰ \ \Rightarrow\ V_o = ۳I_S \qquad (۱)$$

$$KVL\ (۲): ۵V_o + ۱۰I_o + ۴۰I_o = ۰ \ \Rightarrow\ V_o = -۱۰I_o \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{I_o}{I_S} = -۰/۳$$

۲۵ــ گزینه «۱» با تبدیل معادل نورتن به تونن و برعکس، مدار را ساده می‌کنیم.



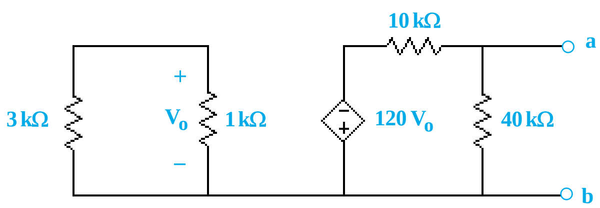
با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$-۴\times۱۰^{۳}\,I_o + ۲\times۱۰^{۳}\times(۳۰\times۱۰^{-۳} - ۵I_o) - ۱۲ + ۱۸۷۵\times(۳۰\times۱۰^{-۳} - ۵I_o) - ۹/۳۷۵ = ۰$$

$$\Rightarrow\ I_o = \frac{۹۴/۸۷۵}{۲۳۳۷۵} = ۴/۰۵۸\times۱۰^{-۳}\,A = ۴/۰۵۸\,mA$$

۲۶ــ گزینه «۳» زمانی یک مقاومت ماکزیمم توان را از شبکه می‌گیرد که با مقاومت تونن دیده شده از دو سرش مساوی باشد. بنابراین کافی است مقاومت تونن دیده شده از دو سر a و b را به‌دست آوریم.

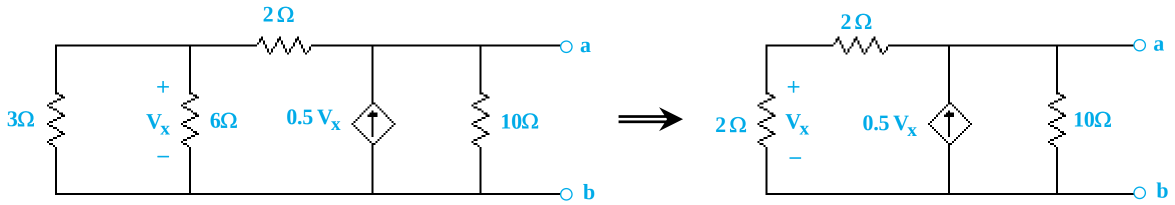
برای این‌کار منبع ولتاژ را بی‌اثر می‌کنیم و مقاومت معادل از دو سر a و b را به‌دست می‌آوریم:



با توجه به صفر شدن منبع ولتاژ، ولتاژ V_o برابر صفر می‌باشد. بنابراین منبع ولتاژ وابسته نیز اتصال کوتاه می‌شود. در این صورت داریم:

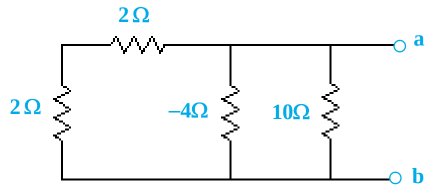
$$R_{ab} = ۴۰ \,||\, ۱۰ = \frac{۴۰\times۱۰}{۵۰} = ۸\,k\Omega$$

۲۷ـ گزینه «۲» ابتدا منبع ولتاژ را بی‌اثر می‌کنیم. سپس ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته را برحسب V_x به‌دست می‌آوریم و با جایگذاری مقاومت معادل آن، مقاومت دیده شده از دو سر a و b را به‌دست می‌آوریم.



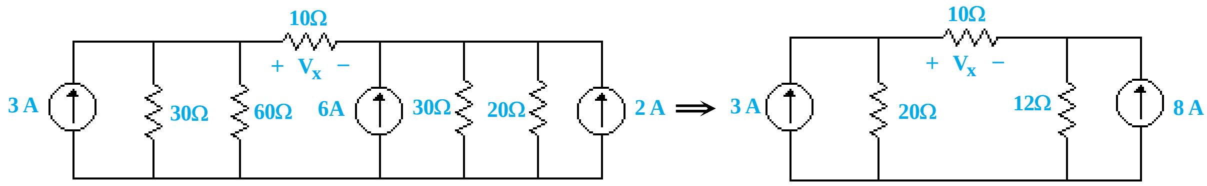
با توجه به سری بودن مقاومت‌های ۲ اهمی ولتاژ دو سرشان با هم برابر است. بنابراین ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته $۲V_x$ می‌باشد.

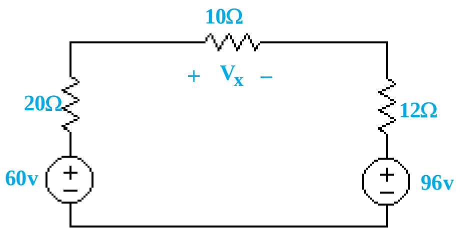
معادل منبع جریان وابسته $R = \frac{۲V_x}{-۰/۵V_x} = -۴\Omega \Rightarrow$



$\Rightarrow R_{ab} = ۱۰ \,\|\, \overbrace{(۴ \,\|\, (-۴))}^{\infty} = ۱۰\,\Omega$

۲۸ـ گزینه «۲» با تبدیل معادل تونن به نورتن و برعکس، مدار را ساده کرده و سپس با تقسیم ولتاژ مقدار V_x را به‌دست می‌آوریم.





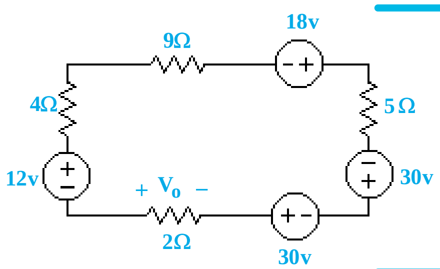
$$\Rightarrow V_x = \frac{۱۰}{۴۲} \times (۶۰ - ۹۶) = -۸/۵۷V$$

۲۹ـ گزینه «۴» با استفاده از دو مرحله تقسیم ولتاژ به راحتی می‌توان این نسبت را به‌دست آورد.

$$V_۱ = \frac{۰/۵}{۲+۰/۵} V_S = \frac{V_S}{۵}$$

$$V_o = \frac{۴۰۰}{۴۰۰+۲۰۰}(-۶۰V_۱) = -۴۰V_۱ \Rightarrow V_o = -۸V_S \Rightarrow \frac{V_o}{V_S} = -۸$$

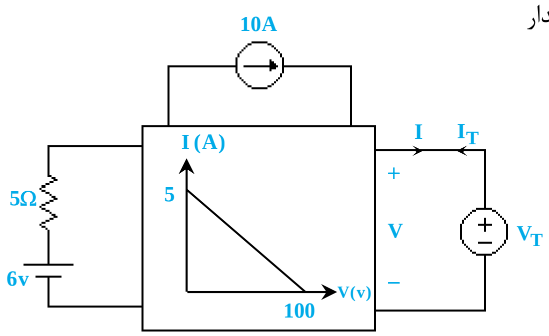
۳۰ـ گزینه «۴» با تبدیل نورتن به تونن داریم:



با استفاده از تقسیم ولتاژ داریم:

اندازه $V_o = \frac{۲}{۲+۴+۹+۵} \times (۱۲+۱۸+۳۰+۳۰) = ۹v$

۳۱ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی ماکزیمم توان قابل جذب توسط مقاومت R_L کافی است مدار معادل تونن دیده شده از دو سر مقاومت R_L را به‌دست آوریم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V_T = V & (۱) \\ I_T = -I & (۲) \end{cases}$$

از طرفی با توجه به مشخصه‌ی شبکه داریم:

$$V=-۲۰I+۱۰۰ \xrightarrow{(۱),(۲)} V_T=۲۰I_T+۱۰۰ \Rightarrow R_{th}=۲۰\Omega, V_T=۱۰۰v$$

بنابراین برای انتقال توان ماکزیمم داریم:

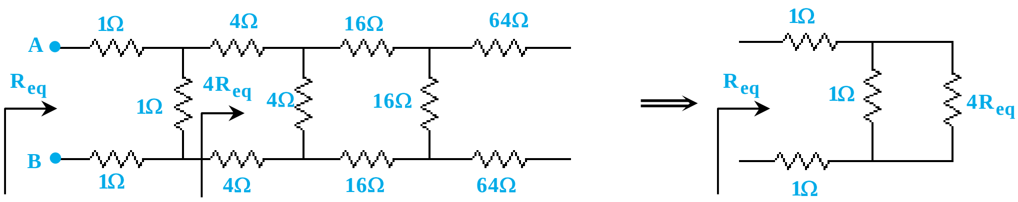
$$R_L=R_T=۲۰ \Rightarrow P=\frac{۱}{۴}\frac{V_{th}^۲}{R_{th}}=\frac{(۱۰۰)^۲}{۴\times۲۰}=۱۲۵\,w$$

۳۲ـ گزینه «۱» با توجه به مقاومتی بودن شبکه، ولتاژ و جریان مقاومت‌ها رابطه‌ی خطی با منبع دارند. بنابراین اگر منبع ولتاژ از ۱۰۰ به ۱۵۰ ولت تغییر کند، یعنی ۱/۵ برابر شود، ولتاژ و جریان همه‌ی مقاومت‌ها ۱/۵ برابر می‌شود. همچنین با توجه به رابطه‌ی $P=RI^۲$، توان مقاومت‌ها $(۱/۵)^۲$ برابر می‌شود.

$$V_o=۱/۵\times۳۰=۴۵v$$

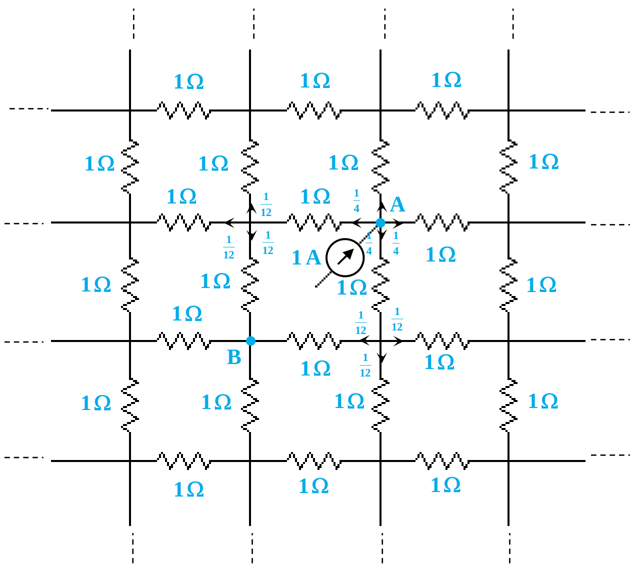
$$P_{۶\Omega}=(۱/۵)^۲\times۱۰=۲۲/۵\,mw$$

۳۳ـ گزینه «۲» با توجه به شکل داریم:



$$R_{eq}=۲+۱\|۴R_{eq}=۲+\frac{۴R_{eq}}{۱+۴R_{eq}} \Rightarrow ۴R_{eq}^۲+R_{eq}=۱۲R_{eq}+۲ \Rightarrow ۴R_{eq}^۲-۱۱R_{eq}-۲=۰$$

$$\Rightarrow R_{eq_۱}=۲/۹۲ \text{ ق‌ق} \qquad R_{eq_۲}=-۰/۱۷ \text{ غ‌ق‌ق}$$

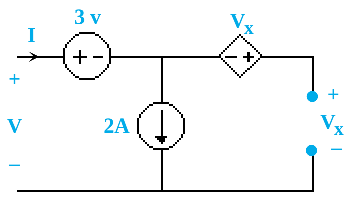


۳۴ـ گزینه «۴» برای به‌دست آوردن مقاومت معادل دیده شده از دو سر A و B، ابتدا اختلاف ولتاژ دو سر A و B را بر اثر تزریق جریان ۱ آمپری از سر A و جریان ۱- آمپری از سر B به‌طور جداگانه به‌دست می‌آوریم. حال مقاومت معادل برابر مجموع این دو ولتاژ است. از آنجا که ولتاژ دو سر A و B ناشی از هر دو جریان تزریقی یکسان است، یک حالت را به‌دست آورده و دو برابر می‌کنیم.

$$V_{AB}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳}v$$

$$R_{th}=۲V_{AB}=\frac{۲}{۳}=۰/۶۶\Omega$$

۳۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه حلقه‌ی سمت راست مدار باز است، بنابراین همواره $I=۲A$ می‌باشد.



از طرفی با اعمال KVL در حلقه‌ی خارجی داریم:

$$KVL:-V+۳-V_x+V_x=۰ \Rightarrow V=۳v$$

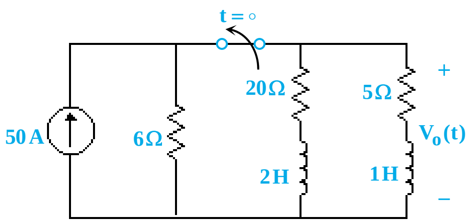
بنابراین مشخصه‌ی ولت آمپر مدار تنها یک نقطه به مختصات (۲,۳) می‌باشد.

فصل دوم

«مدارهای مرتبه اول»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال ۱: در مدار شکل زیر، کلید در $t=\circ$ باز می‌شود. معادله‌ی ولتاژ $V_0(t)$ کدام است؟



۱) $-۱\circ\delta(t)-(-۱\circ+\frac{۴\circ}{۳}e^{-\frac{۲۵}{۳}t})u(t)$

۲) $-۲\circ\delta(t)-\frac{۴\circ}{۶}e^{-\frac{۲۵}{۳}}u(t)$

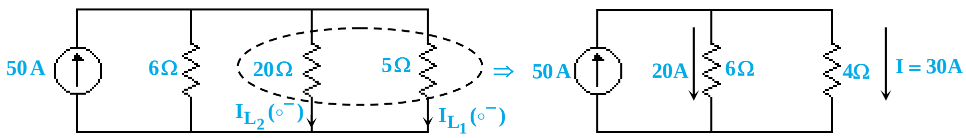
۳) $-۲\circ\delta(t)-\frac{۴\circ}{۳}e^{-\frac{۲۵}{۳}t}u(t)$

۴) چون جریان اولیه سلف‌ها معلوم نیست، قابل تعیین نیست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون به طور ناگهانی دو سلف با جریان‌های اولیه متفاوت با هم سری می‌شوند، لذا در سلف‌ها جهش جریان داریم.

نکته: جهش جریان در سلف باعث ایجاد تابع ضربه در ولتاژ سلف می‌شود.

گام اول: ابتدا جریان اولیه سلف‌ها را به دست می‌آوریم. چون تا قبل از $t=\circ$ مدار به مدت طولانی در همین وضعیت بوده، سلف‌ها را اتصال کوتاه فرض می‌کنیم.



یعنی به دو سلف جریان $I=۳\circ A$ وارد می‌شود. سهم هر سلف برابر است با: $(L_۱=۱H\ ,\ L_۲=۲H)$

$$I_{L_۱}(\circ^-)=\frac{R_۲}{R_۱+R_۲}\times I=\frac{۲\circ}{۲۵}\times ۳\circ=۲۴A\quad ,\quad I_{L_۲}(\circ^-)=۳\circ-۲۴=۶A$$

گام دوم: در این گام ولتاژ در دو مرحله محاسبه می‌شود:

(I) از $t=\circ^-$ تا $t=\circ^+$

(II) از $t=\circ^+$ تا $t=\infty$

دو سلف در لحظه $t=\circ^+$ سری شده و جریان از رابطه زیر به دست می‌آید:

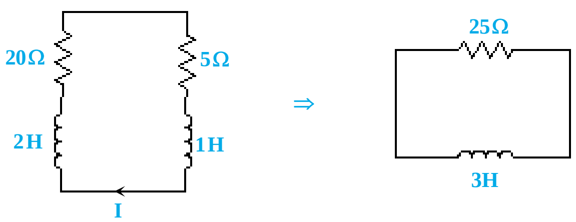
$$I_L(\circ^+)=\frac{+I_{L_۱}(\circ^-)L_۱-I_{L_۲}(\circ^-)L_۲}{L_۱+L_۲}=\frac{+۲۴\times ۱-۶\times ۲}{۳}\Rightarrow I_L(\circ^+)=\frac{۱۲}{۳}=۴A=I_{L_۱}(\circ^+)=-I_{L_۲}(\circ^+)$$

در فاصله $t=\circ^-$ تا $t=\circ^+$، ولتاژ V_0 به صورت ضربه است و آن را به صورت $V_0=\alpha\delta(t)$ در نظر می‌گیریم. داریم: $\frac{۱}{L_۱}\int_{\circ^-}^{\circ^+}V_0(t)dt=I_{L_۱}(\circ^+)-I_{L_۱}(\circ^-)$

با جایگذاری داریم:

$$\Rightarrow \alpha\underbrace{\int_{\circ^-}^{\circ^+}\delta(t)dt}_{۱}=۴-۲۴=-۲\circ\Rightarrow \alpha=-۲\circ\Rightarrow V_0(t)=-۲\circ\delta(t)$$

گام سوم: ولتاژ در فاصله $t=\circ^+$ تا $t=\infty$:



ثابت زمانی $\Rightarrow \tau=\frac{L}{R}=\frac{۳}{۲۵}$

حال با نوشتن V_0 بر حسب I داریم:

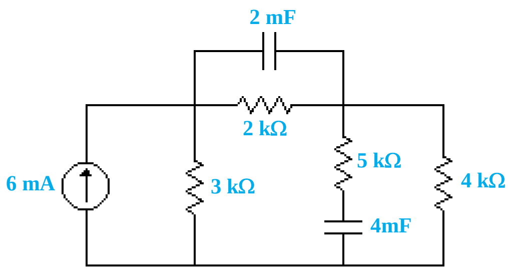
$$I=I_\circ e^{\frac{-t}{\tau}}=۴e^{-\frac{۲۵}{۳}t}$$

$$V_o = 5\times I + 1\times\frac{dI}{dt} = (20e^{-\frac{25}{3}t} - \frac{100}{3}e^{-\frac{25}{3}t})u(t) \Rightarrow V_o(t) = \frac{60-100}{3}e^{-\frac{25}{3}t} = -\frac{40}{3}e^{-\frac{25}{3}t}u(t)$$

پس معادله کلی $V_o(t)$ برابر است با:

$$V_o(t) = -20\delta(t) - \frac{40}{3}e^{-\frac{25}{3}t}u(t)$$

مثال ۲: مجموع انرژی ذخیره شده در خازن‌های مدار شکل زیر چند میلی‌ژول می‌باشد؟



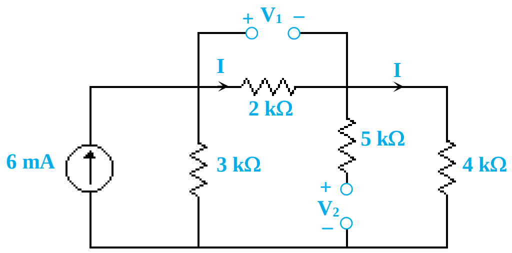
۱) ۱۳۴

۲) ۱۴۲

۳) ۱۴۴

۴) ۱۲۸

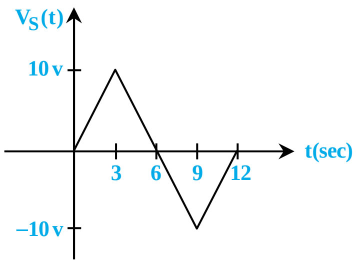
پاسخ : گزینه «۳» با توجه به اینکه منبع تغذیه مدار از نوع DC است، خازن‌ها را با مدار باز مدل می‌کنیم. حال ولتاژ دو سر خازن‌های مدار را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور با نوشتن قانون تقسیم جریان مقدار I را حساب می‌کنیم.

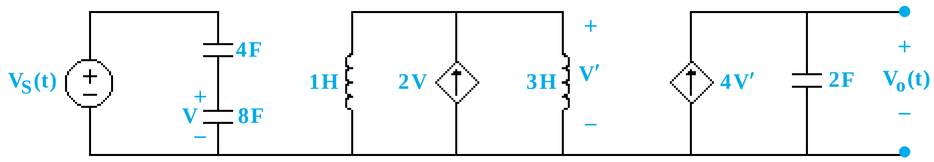


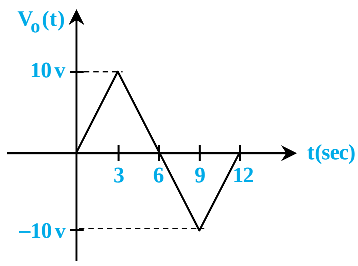
$$I = \frac{2(k\Omega)}{(3+2+4)k\Omega}\times 6(mA) = 2mA \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 2k\Omega\times I = 2k\Omega\times 2mA = 4v \\ V_2 = 4k\Omega\times I = 4k\Omega\times 2mA = 8v \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}(2\times 10^{-3})(4)^2 = 16mJ \\ W_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}(4\times 10^{-3})(8)^2 = 128mJ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{W_1 + W_2 = 144mJ}$$

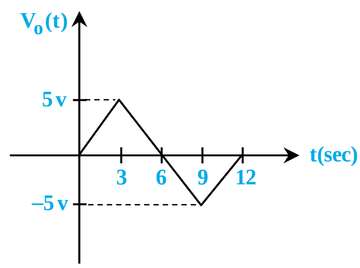
مثال ۳: در صورتیکه شکل موج $V_S(t)$ به صورت زیر باشد، شکل موج ولتاژ خروجی در کدام گزینه وجود دارد؟ (شرایط اولیه صفر می‌باشد.)



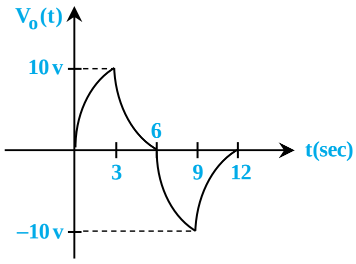




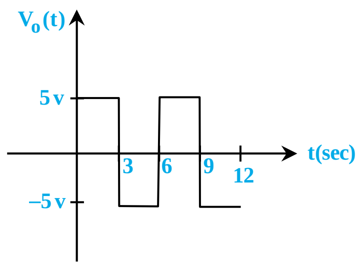
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا از تقسیم ولتاژ بین خازن‌های ۴F و ۸F، ولتاژ V را به دست می‌آوریم.

$$V = V_S(t)\times\frac{۴F}{۴F+۸F}=\frac{۱}{۳}V_S(t) \qquad (۱)$$

با استفاده از قانون تقسیم جریان، مقدار جریان سلف ۳H را به دست آورده و ولتاژ V' را محاسبه می‌کنیم.

$$I_{۳H}=۲V\times\frac{۱H}{۱H+۳H}=\frac{۱}{۲}V \quad\Rightarrow\quad V'=\frac{LdI_L}{dt}=\frac{۳d(\frac{۱}{۲}V)}{dt}=\frac{۳}{۲}\frac{dV}{dt}$$

در ادامه با بدست آمدن V'، ولتاژ خازن ۲F یا همان $V_o(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

با فرض صفر بودن شرایط اولیه‌ی عناصر مدار می‌توان نوشت:

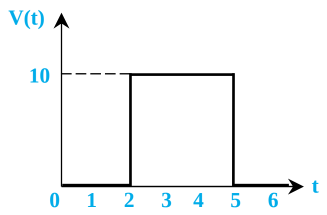
$$V_o(t)=V_{۲F}=\frac{۱}{C}\int I_C dt=\frac{۱}{۲}\int ۴V'dt=\frac{۱}{۲}\int ۴\times\frac{۳}{۲}\frac{dV}{dt}dt \quad\Rightarrow\quad V_o(t)=۳V \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V_o(t)=۳V=۳\times\frac{۱}{۳}V_S(t)=V_S(t)$$

بنابراین شکل موج ورودی و خروجی با هم برابر است.

مثال ۴: معادله پالس نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $V(t)=۱۰u(t-۲)-u(t-۵)$

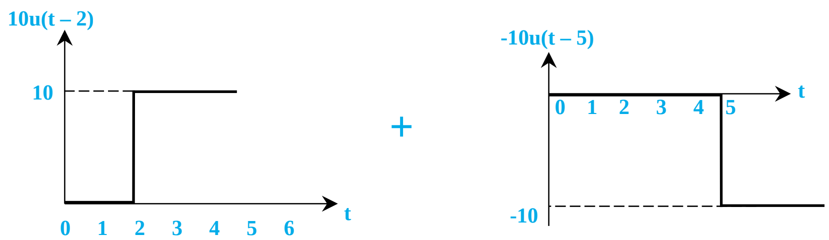
۲) $V(t)=۱۰[u(t-۲)-u(t-۵)]$

۳) $V(t)=۱۰[u(t-۲)+u(t-۵)]$

۴) $V(t)=۱۰u(t-۲)+u(t-۵)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

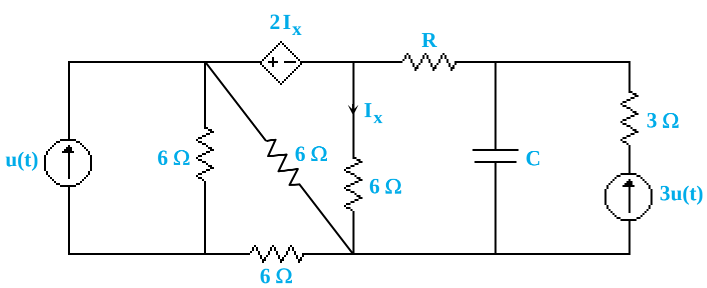
روش اول: مطابق شکل‌های زیر، پالس فوق از مجموع دو تابع پله زیر تشکیل شده است:



روش دوم: با توجه به اینکه اولین پرش در زمان $t=۲$ بوده و مقدار تابع از عدد صفر به ۱۰رسیده است، لذا اولین قسمت از تابع ولتاژ $V(t)$ به صورت $+۱۰u(t-۲)$ می‌باشد. در زمان $t=۵$، تابع پله از مقدار ۱۰v به مقدار ۰v تغییر اندازه داده است. با توجه به اینکه مقدار تابع کم شده است، لذا قسمت دوم تابع $V(t)$ به صورت $-۱۰u(t-۵)$ است. حال تابع $V(t)$ به صورت مقابل بدست می‌آید: $V(t)=۱۰u(t-۲)-۱۰u(t-۵)$

دقت کنید که علامت مثبت پشت تابع $u(t)$ به معنی افزایش دامنه و ضریب آن نشان‌دهنده میزان افزایش نسبت به حالت قبلی است و علامت منفی آن به معنی کاهش دامنه و ضریب آن نشان‌دهنده میزان کاهش دامنه است. علاوه بر این، ریشه عبارت درون پرانتز نیز زمان وقوع افزایش یا کاهش دامنه را نشان می‌دهد.

مثال ۵: در مدار زیر به جای خازن C یک سلف با اندازه $L=۹C$ قرار می‌دهیم. مقدار R برابر با چند اهم باشد تا مقدار ثابت زمانی مدار تغییری نکند؟



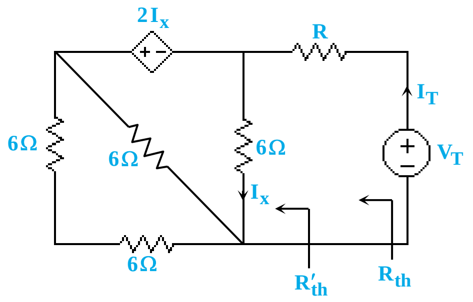
۱) ۱

۲) ۲

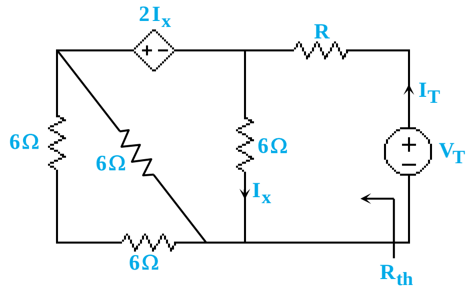
۳) ۳

۴) ۴

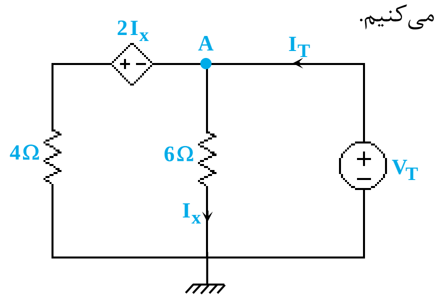
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مقدار ثابت زمانی را برای حالتی که خازن وجود داشته باشد، به دست می‌آوریم و سپس ثابت زمانی را برای حالتی که سلف به جای خازن قرار گیرد، محاسبه می‌کنیم و در ادامه از تساوی دو ثابت زمانی بدست آمده، مقدار R را پیدا می‌کنیم. برای محاسبه مقاومت تونن از دو سر خازن، در همان دو نقطه، منبع V_T را متصل کرده و رابطه V_T را با I_T محاسبه می‌کنیم. در این حالت منابع مستقل ولتاژ و جریان را غیرفعال می‌کنیم.



برای ساده‌تر شدن حل سؤال، ابتدا می‌توان مقاومت R'_{th} را محاسبه کرد و سپس مقدار $R_{th} = R'_{th} + R$ را بدست آورد. بنابراین مقاومت R را حذف کرده و R'_{th} را محاسبه می‌کنیم.



⇒



با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_T}{۶} + \frac{V_T + ۲I_x}{۴} = I_T \quad , \quad I_x = \frac{V_T}{۶}$$

با ترکیب روابط بالا داریم:

$$\frac{V_T}{۶} + \frac{V_T + ۲(\frac{V_T}{۶})}{۴} = I_T \Rightarrow V_T = ۲I_T \Rightarrow R'_{th} = \frac{V_T}{I_T} = ۲\Omega \Rightarrow R_{th} = R'_{th} + R = R + ۲$$

در ادامه حل، ثابت زمانی را با فرض حضور خازن محاسبه می‌کنیم:

$$\tau_C = R_{th} \cdot C \Rightarrow \tau_C = (R + ۲) \cdot C$$

در حالتی که سلف به جای خازن قرار گیرد، ثابت زمانی به صورت مقابل است:

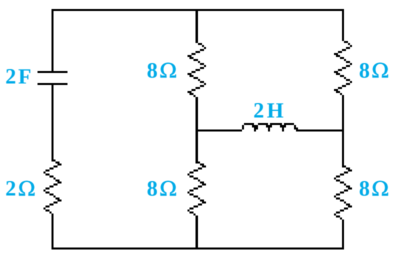
$$\tau_L = \frac{L}{R_{th}} \Rightarrow \tau_L = \frac{L}{R + ۲}$$

در صورت تساوی $\tau_L = \tau_C$ داریم:

$$(R + ۲) \cdot C = \frac{L}{R + ۲} \quad , \quad L = ۹C$$

$$\Rightarrow (R + ۲) \cdot C = \frac{۹C}{R + ۲} \Rightarrow (R + ۲)^۲ = ۹ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱\Omega \ \checkmark \\ R = -۵\Omega \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال ۶: در مدار زیر اگر مقاومت‌های ۸ اهمی به ۴ اهمی تبدیل شود، بیشترین ثابت زمانی مدار چه تغییری دارد؟



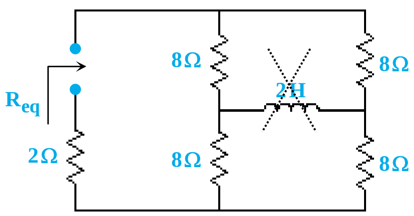
۱) ۸ ثانیه کم می‌شود.

۲) ۸ ثانیه زیاد می‌شود.

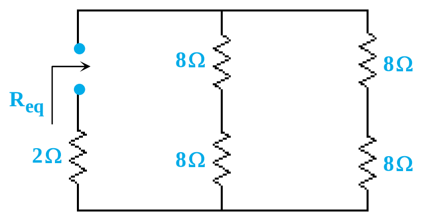
۳) ۴ ثانیه کم می‌شود.

۴) ۴ ثانیه زیاد می‌شود.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای حل مدار ابتدا لازم است مشخص شود که بیشترین ثابت زمانی در اثر سلف است یا خازن. دقت کنید در نگاه اول شاید این استنباط شود که مدار مرتبه دوم است و ثابت زمانی برای آن تعریف نمی‌شود، ولی در ادامه حل خواهیم دید که مدار را می‌توان به صورت دو مدار مرتبه اول در نظر گرفت. ابتدا ثابت زمانی را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. در این حالت از دو سر خازن مقاومت معادل را حساب می‌کنیم. با توجه به حضور پل وتستون در مدار، از سلف جریانی عبور نمی‌کند و از دیدگاه خازن، سلف در مدار وجود ندارد. حال داریم:

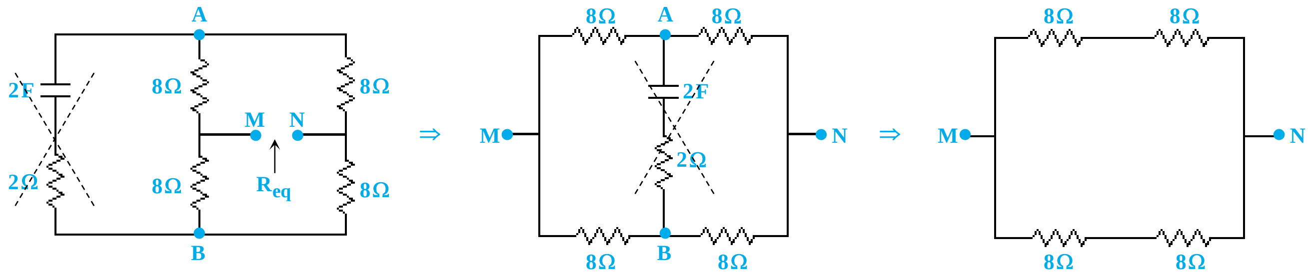


⇒



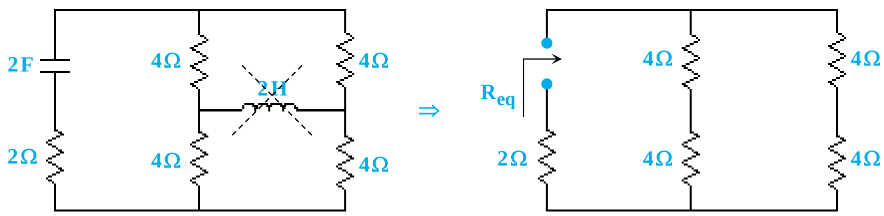
$R_{eq} = ۲+(۸+۸)||(۸+۸)=۱۰\Omega \Rightarrow \tau_۱ = R_{eq}.C = ۱۰\times ۲F = ۲۰(sec)$

در ادامه ثابت زمانی را در اثر سلف محاسبه می‌کنیم. در این حالت با توجه به تقارن مدار از دیدگاه سلف، نقاط A و B هم‌پتانسیل هستند و از خـازن مـدار جریان عبور نمی‌کند و شاخه RC قابل حذف می‌باشد. لازم به ذکر است که با ترسیم دوباره مدار، علت حذف شاخه RC را وجـود پـل وتسـتون از دیـدگاه سلف نیز می‌توان در نظر گرفت.



$R_{eq} = (۸+۸)||(۸+۸)=۸\Omega \Rightarrow \tau_۲ = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}(sec)$

با توجه به این که ثابت زمانی در اثر خازن، بزرگتر از ثابت زمانی در اثر سلف است، لذا با تعویض مقاومت‌های ۸ اهمی با مقاومت‌های ۴ اهمی، ثابـت زمـانی جدید مدار را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. حال داریم:



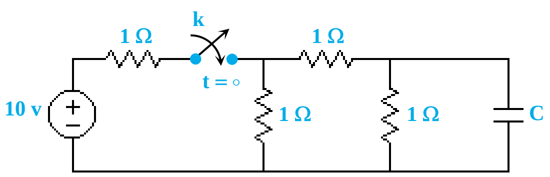
$R_{eq} = ۲+(۴+۴)||(۴+۴)=۶\Omega$

$\tau_۳ = R_{eq}.C = ۶\times۲=۱۲(sec) \Rightarrow \Delta\tau = \tau_۳-\tau_۱ = ۱۲-۲۰=-۸(sec)$

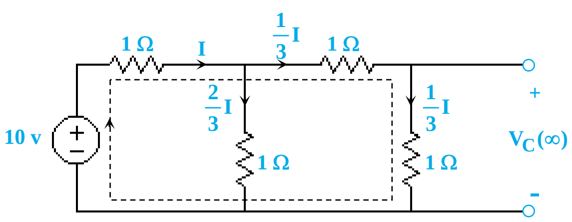
بنابراین بیشترین ثابت زمانی مدار، به اندازه ۸ ثانیه کم می‌شود.

مثال ۷: در مدار شکل مقابل اگر کلید k در $t=۰$ بسته شود، خازن تا چه ولتاژی برحسب ولت شارژ می‌شود؟

۱) ۲/۵
۲) ۱۰
۳) ۲
۴) صفر



پاسخ: گزینه «۳» تست از ما ولتاژ نهایی خازن یا $V_C(\infty)$ را می‌خواهد. برای ترسیم مدار در $t=\infty$، بعد از کلیدزنی به جای خازن در مدار، مدار باز قرار می‌دهیم. برای بدست آوردن ولتاژ دو سر خازن که همان ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی سمت راست می‌باشد، فرض مـی‌کنـیم جریـان منبـع برابـر I باشد، طبق قانون تقسیم جریان، جریان شاخه سمت راست برابر $\frac{۱}{۳}I$ می‌شود. حالا با نوشتن قانون KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:



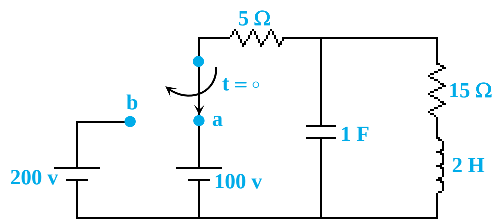
$۱\times I+\frac{۱}{۳}I\times۱+\frac{۱}{۳}I\times۱=۱۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}I=۱۰ \Rightarrow I=۶A$

یا $I=\frac{۱۰v}{R_{eq}}=\frac{۱۰v}{۱+(۱||۲)}=\frac{۱۰}{۱+\frac{۲}{۳}}=۶A$

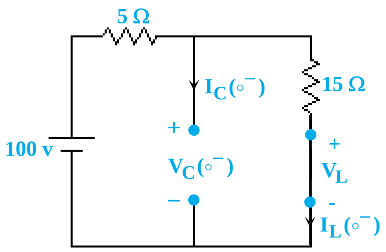
با توجه به اینکه ولتاژ خازن، همان ولتاژ مقاومت ۱ اهم در سمت راست است، داریم:

$V_C(\infty)=V_{1\Omega}=(\frac{۱}{۳}I)\times۱=\frac{۱}{۳}(۶)\times۱=\mathbf{۲v}$

مثال۸: در مدار زیر مقادیر جریان سلف و خازن و ولتاژ سلف و خازن را در زمان‌های $t=\circ^-$ و $t=\circ^+$ و $t=\infty$، بدست آورید. (کلید در $t=\circ$ از وضعیت a به b می‌رود.)

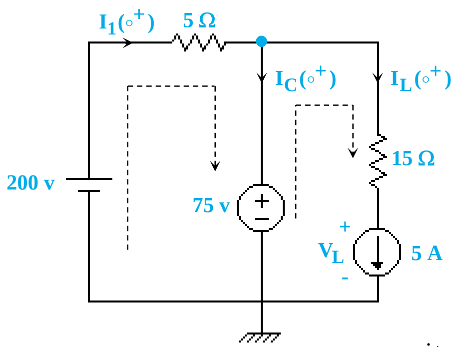


پاسخ: ابتدا مدار را در $t=\circ^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید در وضعیت a بوده و مدار در حالت ماندگار کار می‌کرده است، پس سلف با اتصال کوتاه و خازن با مدار باز مدل می‌شوند. حال داریم:



$$I_L(\circ^-)=\frac{۱۰۰}{۵+۱۵}=۵A \quad \text{و} \quad V_L(\circ^-)=\circ$$ (به علت اتصال کوتاه شدن سلف)

$$V_C(\circ^-)=(\frac{۱۵}{۵+۱۵})\times ۱۰۰=۷۵\,v \quad \text{و} \quad I_C(\circ^-)=\circ$$ (به علت مدار باز شدن خازن)



حال با اطلاعات بدست آمده در $t=\circ^-$، مدار معادل را در $t=\circ^+$ ترسیم می‌کنیم. در این حالت به جای خازن یک منبع ولتاژ با مقدار $V_C(\circ^-)=۷۵\,v$ و به جای سلف یک منبع جریان با اندازه $I_L(\circ^-)=۵A$ قرار می‌دهیم. جریان سلف و ولتاژ خازن در $t=\circ^+$ با مقادیر آنها در $t=\circ^-$ برابر است، یعنی $I_L(\circ^+)=I_L(\circ^-)=۵A$ و مقدار $V_C(\circ^+)=V_C(\circ^-)=۷۵\,v$ می‌باشد.

حال مقادیر $V_L(\circ^+)$ و $I_C(\circ^+)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در حلقه سمت چپ KVL می‌نویسیم:

$$۵\times I_۱(\circ^+)+۷۵=۲۰۰ \Rightarrow I_۱(\circ^+)=۲۵A$$

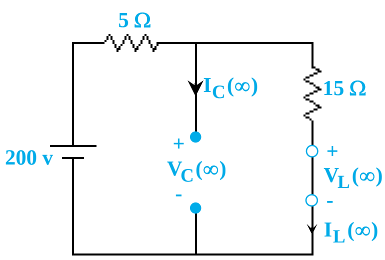
با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:

$$I_۱(\circ^+)=I_C(\circ^+)+I_L(\circ^+) \Rightarrow ۲۵=I_C(\circ^+)+۵ \Rightarrow I_C(\circ^+)=۲۰A$$

از طرفی با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$۱۵\times I_L(\circ^+)+V_L(\circ^+)=۷۵ \Rightarrow ۱۵\times ۵+V_L(\circ^+)=۷۵ \Rightarrow V_L(\circ^+)=\circ$$

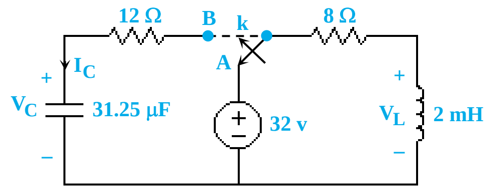
حالا مدار را در $t=\infty$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید به حالت b تغییر وضعیت داده است و خازن با مدار باز و سلف با اتصال کوتاه مدل می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه مدار به سادگی مقدار I_L محاسبه می‌شود.



$$I_L(\infty)=\frac{۲۰۰}{۵+۱۵}=۱۰A \quad \text{و} \quad V_L(\infty)=\circ$$

$$V_C(\infty)=\frac{۲۰۰\times ۱۵}{۵+۱۵}=۱۵۰v \quad \text{و} \quad I_C(\infty)=\circ$$

مثال۹: در مدار شکل مقابل کلید **k** مدت زیادی در وضعیت **A** بوده است و در لحظه $t=۰$ به وضعیت **B** برده می‌شود. مقدار $V_L(۰^+)$ بعد از تغییر وضعیت کلید چقدر است؟ $(V_C(۰)=۰)$



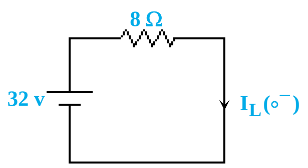
۱) صفر

۲) ۳۲- ولت

۳) ۸۰- ولت

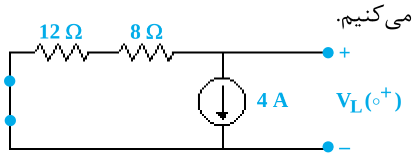
۴) بینهایت

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه $V_L(۰^+)$، ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم و $V_C(۰^-)$ و $I_L(۰^-)$ را بدست می‌آوریم. در ادامه حل، مدار را در $t=۰^+$ ترسیم می‌کنیم و مقدار $V_L(۰^+)$ را محاسبه می‌کنیم. حال با قرار دادن اتصال کوتاه به جای سلف، مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم.



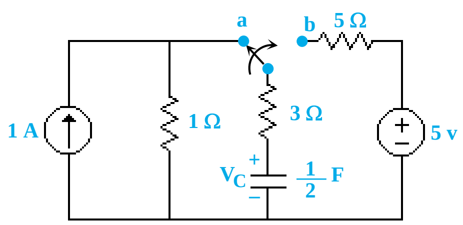
$$I_L(۰^\pm)=\frac{۳۲}{۸}=۴A \quad , \quad V_C(۰^\pm)=۰$$

حال با قرار دادن منبع جریان ۴A به جای سلف و اتصال کوتاه به جای خازن، مدار را در $t=۰^+$ ترسیم می‌کنیم.



$$V_L(۰^+)=-۴\times(۸+۱۲)=-۸۰\,v$$

مثال۱۰: در مدار شکل زیر در لحظه $t=۰$ کلید را از وضعیت **a** به وضعیت **b** می‌بریم. معادله زمانی ولتاژ خازن برای $t>۰$ کدام است؟



۱) $۵-۲e^{-\frac{t}{۴}}$

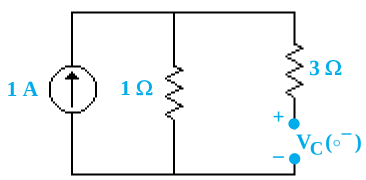
۲) $۵+۲e^{-\frac{t}{۴}}$

۳) $۵+۴e^{-\frac{t}{۴}}$

۴) $۵-۴e^{-\frac{t}{۴}}$

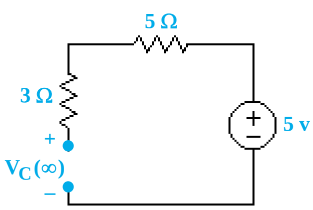
پاسخ : گزینه «۴»

ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید در وضعیت a بوده و خازن مدار باز است.



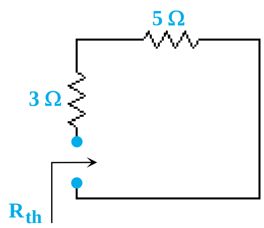
$$V_C(۰^-)=V_C(۰^+)=۱\times۱=۱v$$

در $t=\infty$ کلید در وضعیت b بوده و خازن با مدار باز معادل‌گذاری می‌شود.



$$\Rightarrow \quad V_C(\infty)=۵v$$

برای محاسبه R_{th} منبع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم و از دو سر خازن، مقاومت معادل را حساب می‌کنیم:

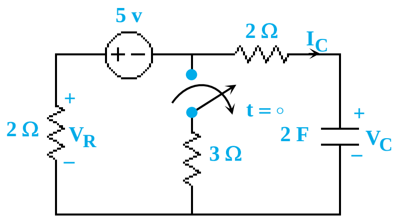


$$R_{th}=۸\Omega \quad\Rightarrow\quad \tau=R_{th}\times C=۸\times\frac{۱}{۲}=۴\ sec$$

با توجه به اطلاعات بدست آمده، معادله ولتاژ خازن به صورت زیر است:

$$V_C(t)=V_C(\infty)+[V_C(۰^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V_C(t)=۵-۴e^{-\frac{t}{۴}}}$$

مثال۱۱: در مدار شکل زیر معادله زمانی $V_R(t)$ برای $t > 0$ کدام است؟



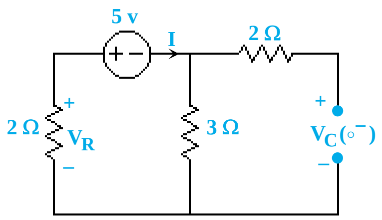
۱) $V_R(t) = 2e^{-\frac{t}{8}}$

۲) $V_R(t) = 2e^{-\frac{t}{4}}$

۳) $V_R(t) = e^{-\frac{t}{4}}$

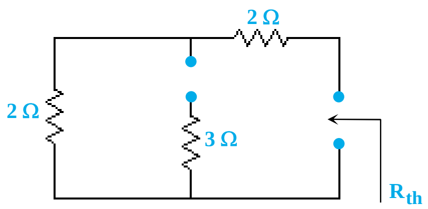
۴) $V_R(t) = e^{-\frac{t}{8}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** با توجه به اینکه در $t > 0$، مقدار V_R برابر $-2I_C$ است، می‌توان ابتدا معادله تغییرات V_C را محاسبه کرده و با توجه به رابطه $I_C = C\frac{dV_C}{dt}$، معادله I_C را بدست آوریم و در ادامه معادله V_R را نیز محاسبه کنیم. حال در لحظه $t = 0^-$ مدار شکل زیر را داریم:



$$V_C(0^-) = V_C(0^+) = \boxed{\overset{I}{\uparrow}\ (-\frac{5}{2+3})} \times 3 = -3\,v$$

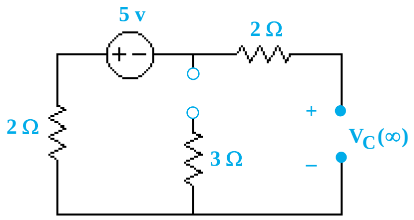
برای محاسبه R_{th} پس از تغییر وضعیت کلید و اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ، مقاومت معادل از دو سر خازن را محاسبه می‌کنیم. (دقت شود هدف $t > 0$ است ← بعد از کلیدزنی)



$$R_{th} = 2 + 2 = 4\Omega$$

$$\tau = R_{th} \times C = 4 \times 2 = 8\,sec$$

برای محاسبه $V_C(\infty)$، در $t = \infty$ مدار را ترسیم و به جای خازن، مدار باز قرار می‌دهیم:



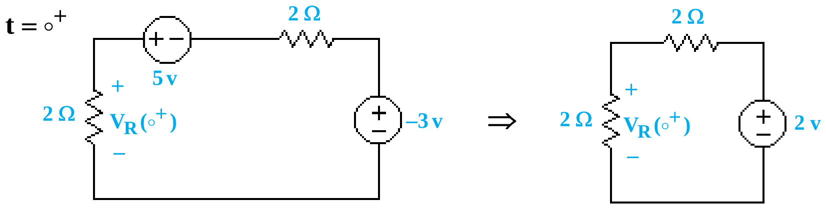
$$V_C(\infty) = -5v$$

حال با توجه به شکل سؤال، برای $t > 0$ داریم:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(0^+) - V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_C(t) = -5 + [-3 - (-5)]e^{-\frac{t}{8}} = 2e^{-\frac{t}{8}} - 5$$

$$I_C(t) = C\frac{dV_C}{dt} = 2[\frac{d}{dt}(2e^{-\frac{t}{8}} - 5)] = 2[2(-\frac{1}{8})e^{-\frac{t}{8}} + 0] = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{8}} \Rightarrow \mathbf{V_R(t) = -2I_C(t) = -2[-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{8}}] = e^{-\frac{t}{8}}}$$

روش دوم: ابتدا مقدار τ را مطابق با روش گفته شده در بالا محاسبه می‌کنیم. با چک کردن گزینه‌ها، دیده می‌شود که گزینه‌های (۲) و (۳) غلط هستند. حال با توجه به تفاوت گزینه‌های باقیمانده در $V_R(0^+)$، می‌توان فقط مدار را در $t = 0^+$ تحلیل کرد. حال داریم:

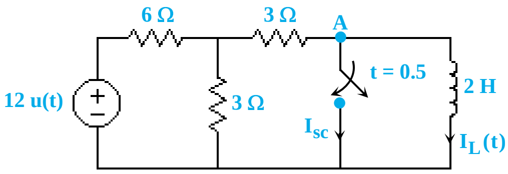


با تقسیم ولتاژ در مدار داریم:

$$V_R(0^+) = 2 \times \frac{2}{2+2} = 1V$$

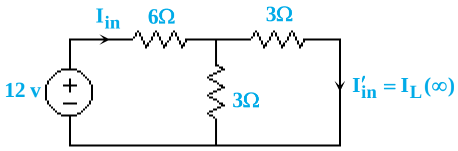
با چک کردن گزینه‌های (۴) و (۱) در زمان $t = 0^+$ فقط گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۱۲: در مدار زیر در حالت عدم وجود جریان اولیه در سلف در زمان $t = ۰/۵sec$ کلید بسته می‌شود. جریان اتصال کوتاه در زمان $t = ۱sec$ کدام است؟ ($e^{-۱/۲۵} = ۰/۲۸۷۵$)



۱) $۰/۹۱A$
۲) $۰/۲۳A$
۳) $۱/۱۵A$
۴) $۰/۲۱A$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار در بازه زمانی $۰ < t < ۰/۵$ تحلیل می‌شود و در این بازه زمانی جریان سلف در بینهایت فرضی (یعنی با فرض عدم کلیدزنی در مدار) بدست می‌آید. لذا داریم:



$$I_{in} = \frac{۱۲}{۶+۳\|۳} = \frac{۱۲}{۷/۵} = ۱/۶A$$

$$I_L(\infty) = I_{in} \times \frac{۳}{۳+۳} = ۰/۸A = I'_{in}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} \quad , \quad R_{th} = ۳+۳\|۶ = ۵\Omega \ \Rightarrow \ \tau = \frac{۲}{۵} = ۰/۴sec \quad , \quad I_L(t) = I_L(\infty) + \left[I_L(۰^+) - I_L(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \ I_L(t) = ۰/۸ + [۰ - ۰/۸]e^{-۲/۵t} \quad , \quad I_L(t=۰/۵) = ۰/۸ - ۰/۸e^{-۱/۲۵} \ \Rightarrow \ I_L(t=۰/۵) = ۰/۵۷A$$

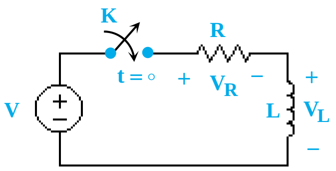
حال مدار را در بازه زمانی $۰/۵ < t < ۱$ بررسی می‌کنیم. در این حالت با بسته شدن کلید اتصال کوتاه در مدار برقرار است. حال با توجه بـه حضـور اتصال کوتاه دو سر سلف، مقدار τ برابر با بینهایت می‌شود. لذا جریان سلف از این زمان به بعد در عدد $۰/۵۷A$ ثابت می‌ماند.

$$I_L(t=۱) = ۰/۵۷A$$

حال جریان شاخه اتصال کوتاه با توجه به مدار فوق و مدار اصلی در $t = ۱sec$ برابر است با:

$$I_{sc} = I'_{in} - I_L(t=۱) = ۰/۸ - ۰/۵۷ = \mathbf{۰/۲۳A}$$

مثال ۱۳: در یک مدار RL سری، ولتاژ ثابت V در لحظه $t = ۰$ اعمال می‌شود. در چه زمانی برحسب ثانیه، مقدار $V_R = V_L$ خواهد شد؟ $(R = L)$



۱) $t = ۲Ln۲$
۲) $t = Ln۲$
۳) $t = ۱$
۴) $t = \frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:** بعد از وصل کلید، جریان مقاومت و سلف با هم برابر و طبق معادله جریان در مدار RL سری برابر $\mathbf{I_R = I_L = \frac{V}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$ می‌باشد. ولتاژ دو سر سلف از رابطه $V_L = L\frac{dI_L}{dt}$ و ولتاژ دو سر مقاومت از رابطه $V_R = R.I_R$ حساب می‌شود. پس کافی است، این دو مقدار را برابر هم قرار دهیم. با مشتق گرفتن از معادله جریان داریم:

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L[-\frac{V}{R} \times (-\frac{۱}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}] = \frac{L}{R}.\frac{V}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau \times \frac{V}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ve^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (۱)$$

$$V_R = R.I_R = R.\frac{V}{R}(۱-e^{-\frac{t}{\tau}}) = V(۱-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (۲)$$

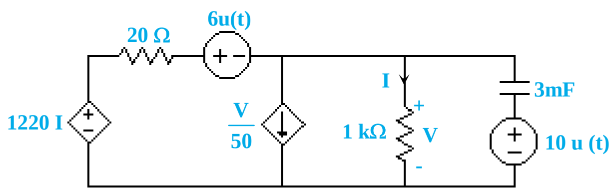
$$V_L = V_R \xrightarrow{(۲),(۱)} Ve^{-\frac{t}{\tau}} = V(۱-e^{-\frac{t}{\tau}}) \ \Rightarrow \ e^{-\frac{t}{\tau}} = ۱-e^{-\frac{t}{\tau}} \ \Rightarrow \ e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{۱}{۲}$$

$$-\frac{t}{\tau} = Ln(\frac{۱}{۲}) \ \Rightarrow \ t = -\tau Ln\frac{۱}{۲} = -\tau Ln(۲^{-۱}) = -\tau(-۱)Ln۲ \ \Rightarrow \ t = \tau Ln۲ \ , \ \tau = \frac{L}{R} = ۱(sec) \ \Rightarrow t = Ln۲(sec)$$

روش دوم: با توجه به نکته ذکر شده در قبل، زمان مذکور برابر $t = \tau Ln۲$ است. حال داریم:

$$\tau = \frac{L}{R} = ۱\,(sec) \ \Rightarrow \ \mathbf{t = Ln۲\,(sec)}$$

مثال ۱۴: در مدار زیر مقدار ثابت زمانی چند میلی‌ثانیه است؟



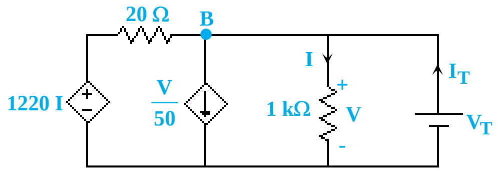
۱) ۳۰۰

۲) ۱۰۰

۳) ۲۰۰

۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه «۱» برای بدست آوردن ثابت زمانی مدار، ابتدا باید مقاومت تونن از دو سر خازن دیده شود، لذا منابع مستقل را غیرفعال کرده و از دو سر خازن به مدار منبع V_T اعمال می‌کنیم و رابطه آن را با I_T بدست می‌آوریم.



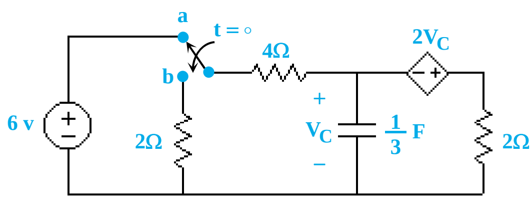
$$I=\frac{V_T}{۱۰۰۰}\quad,\quad V=V_T$$

با نوشتن رابطه KCL در گره B داریم:

$$I_T=\frac{V_T}{۱۰۰۰}+\frac{V_T}{۵۰}+\frac{V_T-۱۲۲۰(\frac{V_T}{۱۰۰۰})}{۲۰}\Rightarrow I_T=۰/۰۰۱V_T+۰/۰۲V_T+۰/۰۵V_T-۰/۰۶۱V_T=۰/۰۱V_T$$

$$R_{th}=\frac{V_T}{I_T}=۱۰۰\Omega\Rightarrow\tau=R_{th}.C=۱۰۰\times۳mF=۳۰۰\,msec$$

مثال ۱۵: در مدار زیر معادله $V_C(t)$، با کلیدزنی از a به b کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۶}e^{-\frac{t}{۵}}$

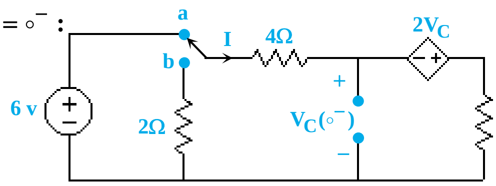
۲) $\frac{۷}{۶}e^{-۵t}$

۳) $\frac{۶}{۷}e^{-\frac{t}{۵}}$

۴) $\frac{۶}{۷}e^{-۵t}$

پاسخ: گزینه «۴» برای بدست آوردن معادله $V_C(t)$، به سه پارامتر $V_C(۰^+)$ و $V_C(\infty)$ و τ نیاز داریم. ابتدا مقدار $V_C(۰^+)$ را با محاسبه $V_C(۰^-)$ بدست می‌آوریم. بدین منظور مدار معادل را در $t=۰^-$ به صورت روبرو ترسیم می‌کنیم.

$t=۰^-$:



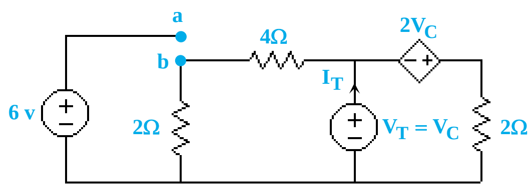
با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ، معادله (۱) و با نوشتن KVL در حلقه سمت راست، معادله (۲) را داریم:

$$\begin{cases}-۶+۴I+V_C(۰^-)=۰ & (۱)\\ -V_C(۰^-)-۲V_C(۰^-)+۲I=۰ & (۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴I+V_C(۰^-)=۶\\ I=\frac{۳}{۲}V_C(۰^-)\end{cases}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$V_C(۰^-)=V_C(۰^+)=\frac{۶}{۷}v$$

حال برای بدست آوردن τ، از دو سر خازن، مقاومت تونن را محاسبه می‌کنیم. برای این کار یک منبع ولتاژ V_T را به جای خازن قرار می‌دهیم و رابطه V_T را برحسب I_T بدست می‌آوریم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



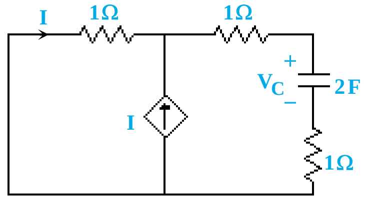
$$I_T=\frac{V_C}{۶}+\frac{V_C+۲V_C}{۲}\quad,\quad V_C=V_T\Rightarrow I_T=\frac{V_T}{۶}+\frac{V_T+۲V_T}{۲}$$

$$\Rightarrow V_T=\frac{۳}{۵}I_T\Rightarrow R_{th}=\frac{۳}{۵}\Omega\Rightarrow\tau=R_{eq}.C=\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۵}sec$$

با توجه به اینکه در زمان $t=\infty$، مدار دارای منبع ولتاژ نمی‌باشد، لذا می‌توان با قاطعیت $V_C(\infty)=۰$ را در نظر گرفت. حال معادله ولتاژ خازن را می‌نویسیم:

$$V_C(t)=V_C(\infty)+[V_C(۰^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow V_C(t)=۰+[\frac{۶}{۷}-۰]e^{-۵t}\Rightarrow \mathbf{V_C(t)=\frac{۶}{۷}e^{-۵t}}$$

مثال۱۶: در مدار زیر اگر در $t=۲sec$ ولتاژ خازن ۳v باشد، در چه زمانی ولتاژ خازن ۱/۵v خواهد شد؟



۱) $۵Ln\sqrt{۲}$

۲) $Ln\sqrt{۲}$

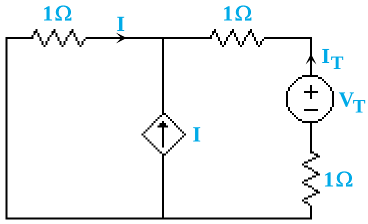
۳) $۵Ln۲$

۴) $۲Ln۵$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به عدم حضور منابع مستقل در مدار، در $t=\infty$ مقدار $f(\infty)=۰$ است و مدت زمان لازم برای نصف شدن ولتاژ خازن برابر $t=\tau Ln۲$ است. حال از دو سر خازن مقاومت تونن را برای محاسبه τ بدست می‌آوریم. بدین منظور با نوشتن KVL در حلقه مدار رابطه V_T را با I_T محاسبه می‌کنیم.

$$-V_T+I_T\times ۱-I\times ۱+I_T\times ۱=۰$$

با نوشتن رابطه KCL در گره بالای مدار داریم:



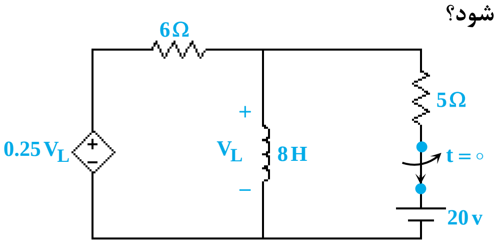
$$۲I=-I_T \Rightarrow I=-\frac{I_T}{۲} \quad و \quad -V_T+I_T-(-\frac{I_T}{۲})+I_T=۰$$

$$\Rightarrow \frac{V_T}{I_T}=۲/۵\Omega=R_{th}$$

روش دیگر محاسبه R_{th}: $R_{th}=۱+۱+۱||۱=۲/۵\Omega \Rightarrow$ مقاومت معادل منبع وابسته$=\frac{I}{I}=۱\Omega$

$$\Rightarrow \tau=R_{th}.C=۲/۵\times ۲=۵sec \Rightarrow \mathbf{t=۵Ln۲\ sec}$$

مثال۱۷: در مدار زیر چه مدت زمان لازم است تا انرژی سلف نسبت به مقدار اولیه آن، نصف شود؟



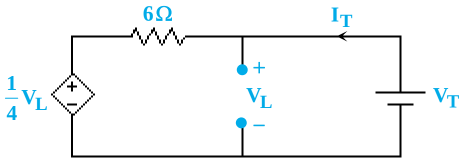
۱) $Ln\sqrt{۲}$

۲) $۲Ln\sqrt{۲}$

۳) $۸Ln۲$

۴) $\sqrt{۲}Ln۸$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه مدار مرتبه اول است و در $t=\infty$، دارای منابع مستقل نمی‌باشد، لذا مقدار $f(\infty)$ برای هر مجهولی صفر است. بنابراین زمان نصف شدن انرژی سلف برابر $\tau Ln\sqrt{۲}$ خواهد بود. حال مقدار τ را بعد از کلیدزنی محاسبه می‌کنیم. بدین منظور باید از دو سر سلف، مقاومت معادل را بعد از کلیدزنی بدست آوریم. با اتصال V_T به دو نقطه‌ای که سلف قبلاً متصل بوده است، رابطه I_T را با V_T بدست می‌آوریم.

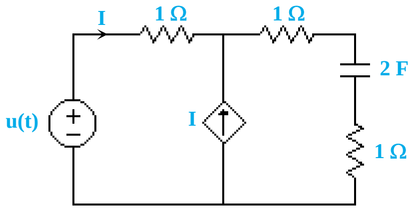


$$V_T=V_L \quad , \quad V_T=۶I_T+\frac{۱}{۴}V_L \Rightarrow V_T=۶I_T+\frac{۱}{۴}V_T \Rightarrow \frac{V_T}{I_T}=۸\Omega=R_{th}$$

$$\tau=\frac{L}{R_{th}}=\frac{۸H}{۸\Omega}=۱sec \Rightarrow \mathbf{t=\tau Ln\sqrt{۲}=Ln\sqrt{۲}}$$

روش دیگر محاسبه R_{th}: $R_{th}=۲\Omega+۶\Omega=۸\Omega \Rightarrow$ مقاومت معادل منبع وابسته$=\frac{\frac{۱}{۴}V_L}{(\frac{\frac{۳}{۴}V_L}{۶})}=۶\times\frac{۱}{۳}=۲\Omega$

مثال ۱۸: در مدار شکل زیر، معادله پاسخ پله مدار برای جریان $I(t)$ کدام گزینه است؟

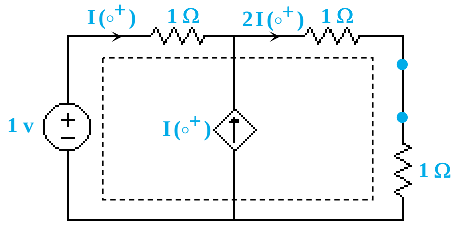


۱) $\frac{-۱}{۵}e^{-\frac{t}{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۵}e^{-\frac{t}{۵}}$

۳) $۵e^{-۵t}$ ۴) $-۵e^{-۵t}$

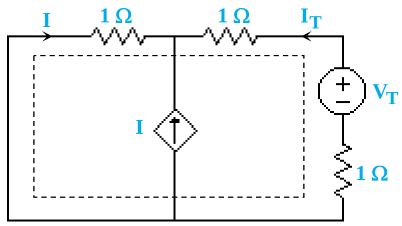
☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

روش اول: در $t=\circ^-$ منبع ولتاژ فعال نیست و مدار در حالت غیر فعال است. لذا جریان مدار و در نتیجه ولتاژ خازن برابر صفر است. در $t=\circ^+$ منبع ۱ ولتی به مدار وصل می‌شود و چون $V_C(\circ^-)=\circ$ است، لذا باید خازن را در $t=\circ^+$ به صورت اتصال کوتاه مدل کنیم. بنابراین در $t=\circ^+$ مداری به شکل زیر داریم:



با نوشتن KCL در گره مدار، جریان شاخه سمت راست برابر $۲I(\circ^+)$ بدست می‌آید. حال با نوشتن KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:

$$۱\times I(\circ^+)+۱\times ۲I(\circ^+)+۲I(\circ^+)\times ۱=۱ \Rightarrow ۵I(\circ^+)=۱ \Rightarrow I(\circ^+)=\frac{۱}{۵}A$$



اما در $t=\infty$ خازن مدار باز می‌شود و جریان آن که برابر ۲I است، برابر صفر و در نتیجه $I(\infty)=\circ$ می‌شود. در ادامه برای محاسبه ثابت زمانی باید مقاومت تونن از دو سر خازن را حساب کنیم. ابتدا منبع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم و با وصل منبع V_T به مدار، معادله KVL در حلقه مدار را می‌نویسیم:

$$I\times ۱-I_T+V_T-I_T=\circ \Rightarrow V_T=۲I_T-I \qquad (۱)$$

از طرفی با نوشتن KCL در گره مدار $I_T=-۲I$ و در نتیجه $I=-\frac{I_T}{۲}$ می‌شود و لذا با جایگذاری این مقدار در رابطه (۱) داریم:

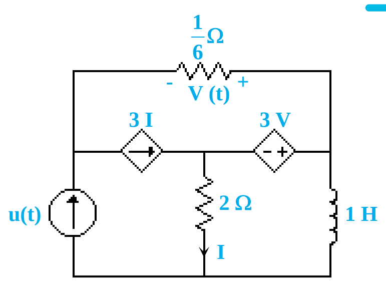
$$V_T=۲I_T-(-\frac{I_T}{۲}) \Rightarrow V_T=\underbrace{\boxed{\frac{۵}{۲}}}_{R_{th}}I_T \Rightarrow \tau=R_{th}C=\frac{۵}{۲}\times ۲=۵(sec)$$

$$\Rightarrow I(t)=I(\infty)+[I(\circ^+)-I(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \mathbf{I(t)=\frac{۱}{۵}e^{-\frac{t}{۵}}}$$

روش دیگر محاسبه R_{th}: $R_{th}=۱+۱+(۱||۱)=۲/۵\Omega$ مقاومت معادل منبع وابسته $=\frac{I}{I}=۱\Omega$

روش دوم: با توجه به تفاوت گزینه‌ها در مقدار $I(\circ^+)$، با محاسبه این پارامتر به سادگی می‌توان پاسخ را پیدا کرد. با توجه به اینکه $I(\circ^+)$ برابر با $\frac{۱}{۵}A$ محاسبه شده، می‌توان فقط با تست گزینه‌ها به پاسخ صحیح یعنی همان گزینه (۲) رسید.

مثال ۱۹: در مدار زیر پاسخ پله خروجی برای $V(t)$ کدام است؟

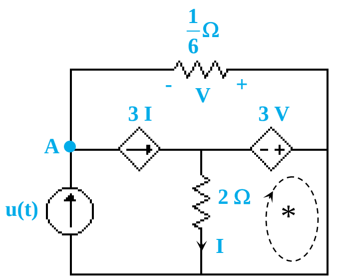


۱) $\circ/\circ۹+\circ/\circ۲۴e^{-\frac{۷t}{۲}}$

۲) $\circ/۵۴(۱-e^{-\frac{۱}{۳}t})$

۳) $-\circ/۵۴(۱-e^{-\frac{۱}{۳}t})$

۴) $-\circ/\circ۹۵+\circ/۴۲e^{-\frac{۷t}{۲}}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** برای بدست آوردن پاسخ پله ابتدا مدار را در $t=\infty$ تحلیل می‌کنیم تا مقدار $V(\infty)$ بدست آید. با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

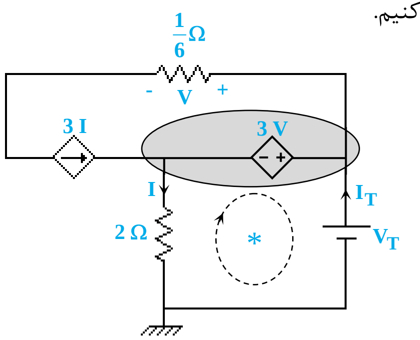
$$-۳V-۲I=\circ \Rightarrow I=-\frac{۳}{۲}V$$

با نوشتن رابطهٔ KCL در گره A داریم:

$$۶V+۱=۳I \Rightarrow I=\frac{۱}{۳}(۶V+۱)$$

با حل دستگاه بدست آمده از معادلات بالا داریم:
$$-\frac{3}{2}V=\frac{1}{3}(6V+1) \Rightarrow -\frac{7}{2}V=\frac{1}{3} \Rightarrow V=-\frac{2}{21}v \Rightarrow V(\infty)=-0/095v$$

حال مقدار R_{th} را از دو سر سلف محاسبه می‌کنیم. برای این کار با اتصال V_T رابطه V_T با I_T را محاسبه می‌کنیم.

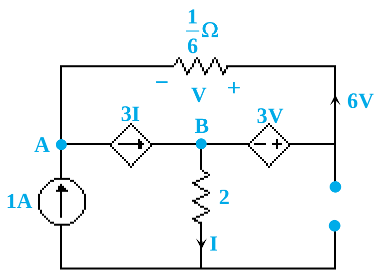


با نوشتن KCL در ابرگره مشخص شده داریم:
$$I_T-3I=I-3I \Rightarrow I_T=I \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:
$$V_T=3V+2I \qquad (2)$$
$$V=\frac{3I\times 1}{6} \qquad (3)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:
$$V_T=3\times\frac{3}{6}I_T+2I_T=\frac{7}{2}I_T \Rightarrow R_{th}=\frac{V_T}{I_T}=\frac{7}{2}\Omega \Rightarrow \tau=\frac{L}{R_{th}}=\frac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}sec$$

با توجه به شرایط اولیه صفر، مدار را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم.



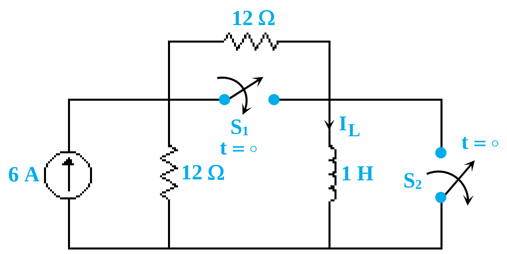
با نوشتن KCL در گره A داریم:
$$1+6V=3I \qquad (4)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:
$$6V+I=3I \qquad (5)$$
$$(5) \Rightarrow 6V=2I \Rightarrow I=3V \qquad (6)$$
$$(4),(6) \Rightarrow 1+6V=3\times 3V \Rightarrow V=\frac{1}{3}v \Rightarrow V(0^+)=\frac{1}{3}v$$

حال با جایگذاری $V(\infty)$ و $V(0^+)$ و τ، معادله $V(t)$ را بدست می‌آوریم:
$$V(t)=V(\infty)+\left[V(0^+)-V(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$V(t)=-0/095+[\frac{1}{3}+0/095]e^{-\frac{7t}{2}} \Rightarrow \mathbf{V(t)=-0/095+0/42e^{-\frac{7t}{2}}}$$

روش دوم: با توجه به اینکه مقدار $V(t)$ در زمان $t=\infty$ در تمام گزینه‌ها متفاوت است، می‌توان مقدار $V(t)$ را در زمان $t=\infty$ بدست آورده و تست را سریع‌تر حل کرد. با توجه به اینکه در روش اول مقدار $V(t=\infty)$ را محاسبه کردیم و مقدار آن برابر $-0/095v$ شد، لازم است که فقط گزینه‌ها در $t=\infty$ چک شود. با دقت در گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط در گزینه (۴) در زمان $t=\infty$ مقدار $V(t)$ برابر $-0/095v$ است و لذا همان گزینه پاسخ صحیح است.

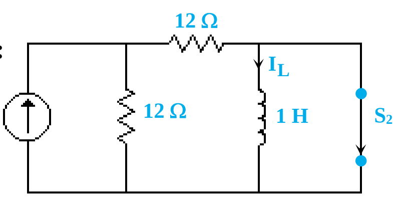
مثال ۲۰: در مدار شکل زیر معادله جریان $I_L(t)$ برای $t>0$ کدام است؟ (کلید S_1 در $t=0$ بسته می‌شود و کلید S_2 نیز در همین لحظه باز می‌شود.)



۱) $6(1-e^{-12t})$
۲) $6(1+e^{-12t})$
۳) $6(1-e^{-\frac{1}{12}t})$
۴) $6(1+e^{-\frac{1}{12}t})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به اینکه هر دو کلید، همزمان عمل می‌کنند، روش حل همانند قبل است. حال شکل مدار را در $t=0^-$ به صورت روبرو ترسیم می‌کنیم. در این حالت دو سر سلف اتصال کوتاه می‌شود و از آن جریانی عبور نمی‌کند.

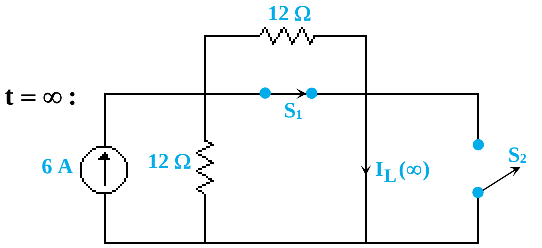
$t=0^-$:



$$I_L(0^-)=I_L(0^+)=0$$

در $t=\infty$ مدار شکل زیر را داریم:

کل جریان منبع از سلف (که اتصال کوتاه می‌باشد) عبور می‌کند. $\qquad I_L(\infty)=6A$



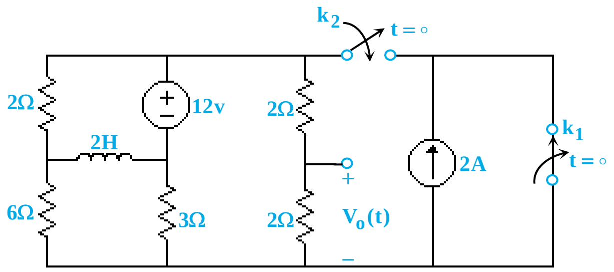
مقاومت معادل با باز کردن منبع جریان از مدار فوق و از دو سر سلف محاسبه می‌گردد. حال مقاومت ۱۲ اهم بالایی اتصال کوتاه است و لذا $R_{eq}=۱۲\Omega$ می‌باشد. پس ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{۱}{۱۲}(\text{sec})$$

حال معادله زمانی $I_L(t)$ در $t>۰$ برابر است با:

$$I_L(t)=I_L(\infty)+[I_L(۰^+)-I_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=۶-۶e^{-۱۲t}=۶(۱-e^{-۱۲t})$$

مثال ۲۱: در مدار شکل زیر، کلید $k_۱$ در $t=۰$ باز و کلید $k_۲$ در $t=۰$ بسته می‌شود. معادله‌ی $V_o(t)$، برای $t>۰$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}+\frac{۴}{۵۱}e^{-\frac{۲۷}{۳۴}t}$

۲) $\frac{۱۶}{۳}+\frac{۲}{۵۱}e^{-\frac{۲۷}{۳۴}t}$

۳) $\frac{۱۶}{۳}+\frac{۴}{۵۱}e^{-\frac{۱۶}{۱۷}t}$

۴) $\frac{۱۶}{۳}+\frac{۲}{۵۱}e^{-\frac{۱۶}{۲۷}t}$

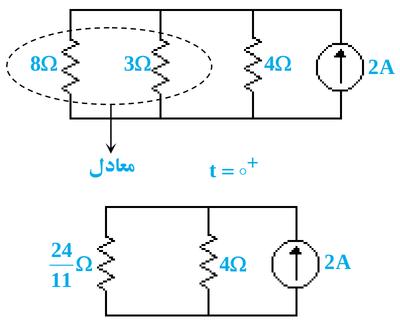
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» V_o برابر رابطه کلی زیر است:

$$V_o(t)=[V_o(۰^+)-V_o(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}+V_o(\infty)$$

از آن‌جا که منبع ولتاژ ۱۲v به طور دائمی روشن بوده است، اثرش در $V_o(۰^+)$ و $V_o(\infty)$ یکی است. بنابراین در اختلاف این دو مقدار به حساب نمی‌آید.

پس کافی است $V_o(۰^+)$ و $V_o(\infty)$ را تنها با حضور منبع جریان حساب کنیم. (منبع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم)

هنگامی که $t=۰^+$ است، سلف را مدار باز فرض می‌کنیم.



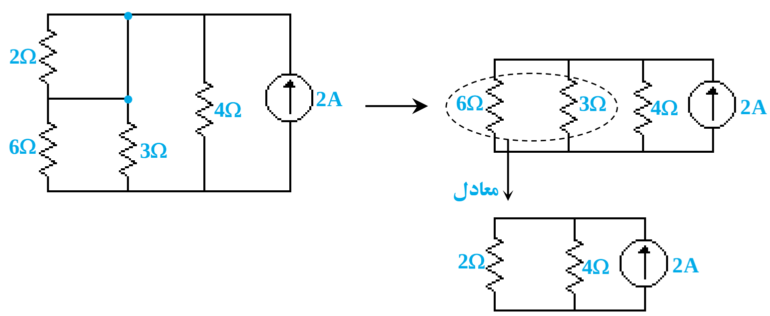
جریان عبوری از مقاومت ۴Ω برابر است با:

$$\frac{\frac{۲۴}{۱۱}}{۴+\frac{۲۴}{۱۱}}\times ۲=\frac{۲۴}{۶۸}\times ۲=\frac{۱۲}{۱۷}\text{A}$$

در نتیجه داریم:

$$V_o(۰^+)=۲\times\frac{۱۲}{۱۷}=\frac{۲۴}{۱۷}\text{v}\ \text{(فقط به ازای منبع جریان)}$$

هنگامی که t به سمت بی‌نهایت می‌رود، سلف اتصال کوتاه فرض می‌شود:



در نتیجه داریم:

$$\text{جریان عبوری از مقاومت ۴Ω}=\frac{۲}{۲+۴}\times ۲=\frac{۱}{۳}\times ۲=\frac{۲}{۳}\text{A}$$

در نتیجه:

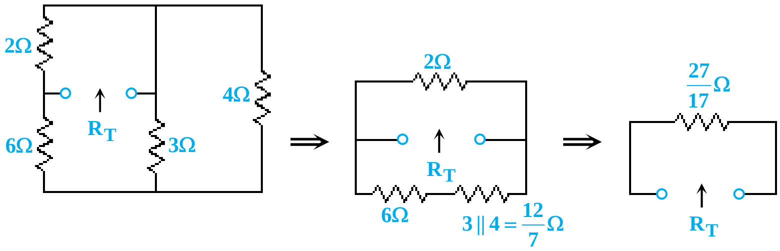
$$V_o(\infty)=۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}\text{v}\ \text{(فقط به ازای منبع جریان)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_o(۰^+)-V_o(\infty)}_{\text{به ازای منبع ولتاژ و منبع جریان}}=\underbrace{V_{o_i}(۰^+)-V_{o_i}(\infty)}_{\text{به ازای منبع جریان}}=\frac{۲۴}{۱۷}-\frac{۴}{۳}=\frac{۷۲-۶۸}{۵۱}=\frac{۴}{۵۱}\text{v}$$

از آن‌جایی که پاسخ حالت ماندگار در تمام گزینه‌ها یکی است، نیازی به محاسبه اثر منبع ولتاژ ۱۲۷ نیست و داریم:

$$V_o(t)=\frac{۱۶}{۳}+\frac{۴}{۵۱}e^{\frac{-t}{\tau}} \quad , \quad \tau=\frac{L}{R_T}$$

برای به‌دست آوردن R_T تمامی منابع مستقل را صفر فرض می‌کنیم.

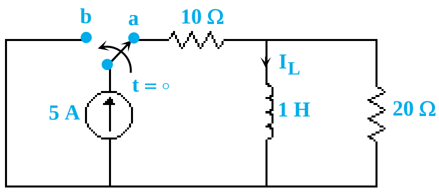


$$\Rightarrow R_T=\frac{۲۷}{۱۷}\Omega \Rightarrow \tau=\frac{L}{R_T}=\frac{۲}{\frac{۲۷}{۱۷}}=\frac{۳۴}{۲۷}\sec$$

با بدست آمدن ثابت زمانی معادله V_o بدست می‌آید:

$$V_o(t)=\frac{۱۶}{۳}+\frac{۴}{۵۱}e^{-\frac{۲۷}{۳۴}t}$$

مثال ۲۲: در مدار شکل روبرو مقدار $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ چند آمپر بر ثانیه است؟



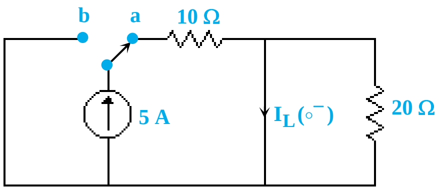
۱) ۵

۲) -۱۰۰

۳) ۱۰۰

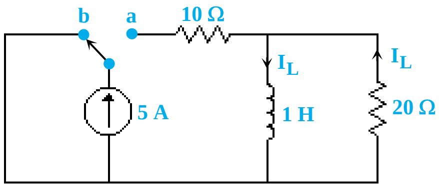
۴) -۵

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ ترسیم و تحلیل می‌کنیم.



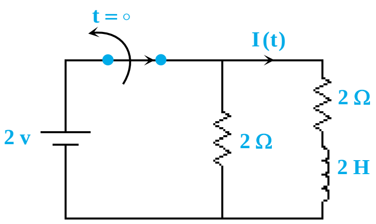
$$I_L(۰^-)=I_L(۰^+)=۵A$$

دقت شود که به جای استفاده از فرمول $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}=\frac{V_L(۰^+)}{L}$ می‌توان در حلقه سمت راست KVL زده و از رابطه حاصل شده، مقدار $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ را محاسبه کرد. حال برای $t>۰$ مدار شکل روبرو را خواهیم داشت:



$$۱\times\frac{dI_L(۰^+)}{dt}+۲۰I_L(۰^+)=۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=-۲۰I_L(۰^+)=-۱۰۰(\frac{A}{sec})$$

مثال ۲۳: در شکل زیر، مدار در حالت پایدار بوده است. در لحظه $t=۰$ کلید را باز می‌کنیم. مقدار $\frac{dI}{dt}(۰^+)$ کدام است؟



۱) صفر

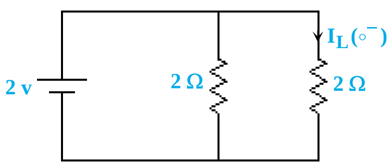
۲) $-۰/۵(\frac{A}{sec})$

۳) $-۱(\frac{A}{sec})$

۴) $-۲(\frac{A}{sec})$

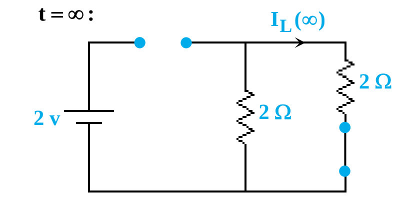
پاسخ : گزینه «۴» دقت شود که برای محاسبه $\frac{dI(۰^+)}{dt}$، علاوه بر استفاده از روش ذکر شده در نکته مربوطه، می‌توان رابطه $I(t)$ را محاسبه کرد و از آن مشتق گرفت و مقدار آن را در $t=۰$ حساب کرد. حال در $t=۰^-$ مدار شکل زیر را داریم:

$t=۰^-$:



$$I_L(۰^-)=I_L(۰^+)=\frac{۲}{۲}=۱A$$

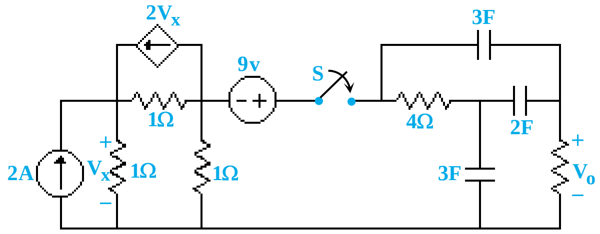
در $t=\infty$ مدار شکل زیر را داریم. سلف در بینهایت اتصال کوتاه بوده و منبع از مدار قطع است؛ پس داریم: $I_L(\infty)=۰$



از طرفی $\tau=\frac{L}{R}=\frac{۲}{۲+۲}=\frac{۱}{۲}sec$ می‌باشد. لذا معادله جریان سلف به صورت زیر است.

$$I(t)=I(۰^+)e^{-\frac{t}{\tau}}=۱\times e^{-۲t} \Rightarrow \frac{dI}{dt}(۰^+)=\frac{dI(t)}{dt}\Big|_{t=۰}=-۲\times e^{-۲t}=-۲e^{۰}=-۲(\frac{A}{sec})$$

مثال ۲۴: **در مدار شکل زیر، کلید S در $t=۰$ بسته می‌شود. مقدار $V_0(۰^+)$ چند ولت است؟ (ولتاژ اولیه خازن‌ها در $t=۰^-$ صفر است)**



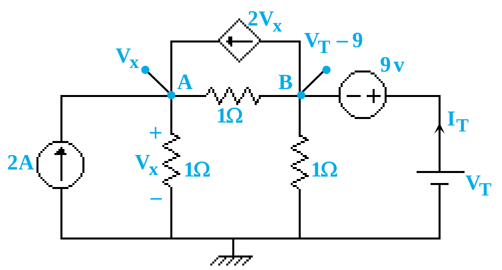
۱) ۲

۲) ۳

۳) صفر

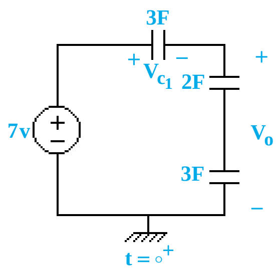
۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ اولیه خازن‌ها برابر صفر است، تنها زمانی $V_0(۰^+)$ مخالف صفر خواهد بود که مدار سمت چپ کلید S، به صورت یک منبع ولتاژ عمل کرده و پس از بسته شدن کلید حلقه خازنی در مدار ایجاد شود. برای بررسی این مسئله مدار معادل تونن این قسمت را محاسبه می‌کنیم:



$$KCL\ \ (A): \frac{V_x}{۱}-۲+\frac{V_x-V_T+۹}{۱}-۲V_x=۰ \Rightarrow V_T=۷v$$

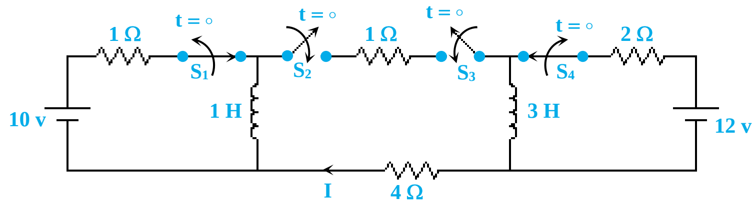
بنابراین، این مدار دقیقاً مشابه یک منبع ولتاژ ۷ ولتی عمل می‌کند. حال با تحلیل مدار در $t=۰^+$ داریم:



$$V_{C_1}(۰^+)=\frac{\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}}{۳}\times ۷=۲v$$

$$V_0(۰^+)=۷-V_{C_1}(۰^+)=۷-۲=۵v$$

مثال ۲۵: **در مدار زیر معادله جریان I کدام گزینه است؟**



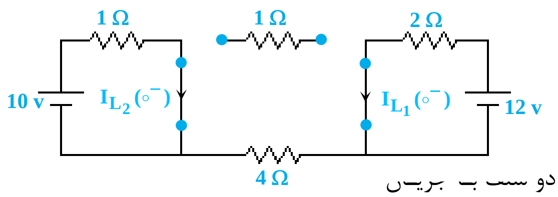
۱) $e^{-\frac{۴}{۵}t}$

۲) $e^{-\frac{۵}{۴}t}$

۳) $۲e^{-\frac{۵}{۴}t}$

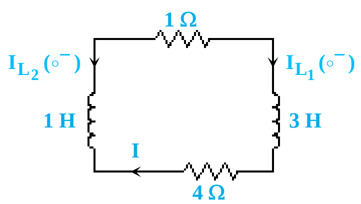
۴) $۲e^{-\frac{۴}{۵}t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان S_1 و S_4 بسته و S_3 و S_2 باز هستند.



$$I_{L_۲}(۰^-)=\frac{۱۰}{۱}=۱۰A \quad , \quad I_{L_۱}(۰^-)=\frac{۱۲}{۲}=۶A$$

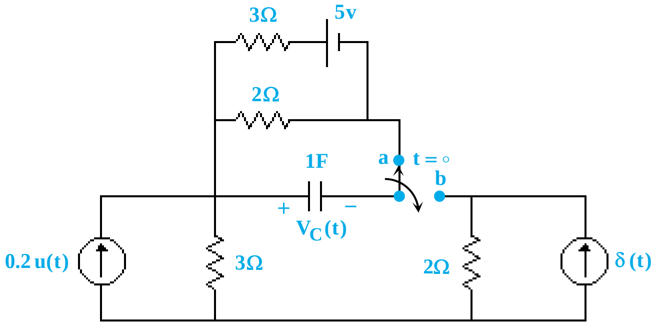
حالا مدار را در $t>۰$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان S_1 و S_4 باز و S_2 و S_3 بسته می‌شوند. دو سست به بریـن اولیه با هم سری می‌شوند، لذا مقدار جریان نهایی آنها به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$I_L(۰^+)=\frac{L_۱I_{L_۱}(۰^-)-L_۲I_{L_۲}(۰^-)}{L_۱+L_۲}=\frac{۶\times۳-۱۰\times۱}{۱+۳}=\frac{۸}{۴}=۲A$$

$$\tau=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۱+۳}{۱+۴}=\frac{۴}{۵}(sec) \quad و \quad \mathbf{I_L(t)=I_L(۰^+)e^{-\frac{t}{\tau}}=۲e^{-\frac{۵}{۴}t}}$$

مثال ۲۶: در مدار مقابل معادله ولتاژ $V_C(t)$ برای زمان $t>0$ کدام است؟



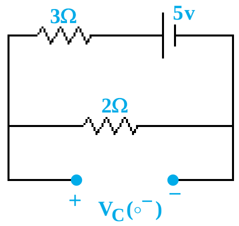
۱) $e^{-\frac{t}{5}}+\frac{3}{5}$

۲) $\frac{12}{5}e^{-\frac{t}{5}}+\frac{3}{5}$

۳) $2e^{-\frac{t}{5}}+\frac{3}{5}$

۴) $\frac{7}{5}e^{-\frac{t}{5}}+\frac{3}{5}$

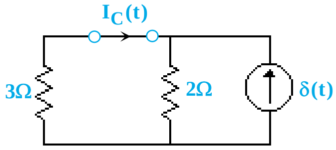
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم.



در این زمان کلید در وضعیت a می‌باشد و خازن با مدار باز مدل می‌شود.

$$V_C(0^-)=\frac{5\times 2}{3+2}=2v$$

حال مدار را در $t=0^+$ با در نظر گرفتن منبع جریان $\delta(t)$ و غیرفعال کردن منبع $0/2u(t)$ تحلیل می‌کنیم و تابع جریان خازن را محاسبه می‌کنیم. در این حالت خازن با اتصال کوتاه مدل می‌شود.

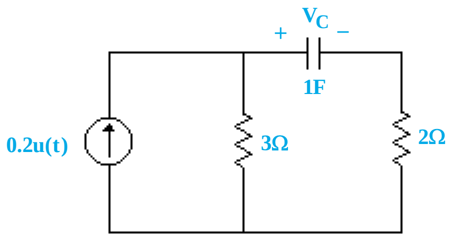


$$I_C(t)=-\delta(t)\times\frac{2}{3+2}=-\frac{2}{5}\delta(t)$$

حال با استفاده از رابطه ذکر شده در نکته قبل داریم:

$$V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} I_C(t)dt=2+\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}-\frac{2}{5}\delta(t)d \;\Rightarrow\; V_C(0^+)=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}v$$

با بدست آمدن $V_C(0^+)$ مدار را در $t>0$ تحلیل می‌کنیم:



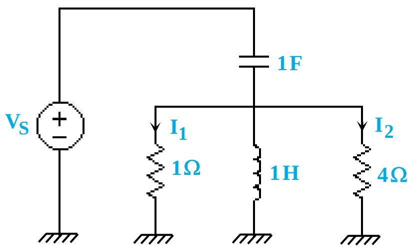
$$V_C(\infty)=0/2\times 3=0/6v$$

$$\tau=RC=(3+2)\times 1=5\sec$$

$$V_C(t)=V_C(\infty)+(V_C(0^+)-V_C(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow V_C(t)=0/6+e^{-\frac{t}{5}}(v)$$

مثال ۲۷: در مدار زیر در صورتی که منبع V_S به اندازه α واحد، تغییر لحظه‌ای داشته باشد، تغییرات لحظه‌ای جریان‌های I_1 و I_2 کدام است؟



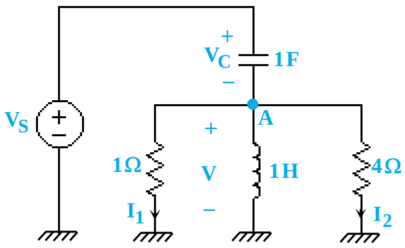
۱) تغییرات لحظه‌ای برای جریان I_1 به اندازه α و برای جریان I_2 برابر $\frac{\alpha}{2}$ است.

۲) تغییرات لحظه‌ای برای جریان‌های I_1 و I_2 برابر α است.

۳) تغییرات لحظه‌ای برای جریان I_1 به اندازه α و برای جریان I_2 به اندازه $\frac{\alpha}{4}$ است.

۴) جریان‌های I_1 و I_2 تغییرات لحظه‌ای ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ساختار مدار داریم: $V_S=V_C+V \;\Rightarrow\; \Delta V_S=\Delta V_C+\Delta V$



با توجه به اینکه در این مدار خازن تغییر لحظه‌ای ولتاژ ندارد، لذا ΔV_C برابر صفر است. حال داریم:

$$\Delta V_S=\Delta V \;\Rightarrow\; \Delta V=\alpha$$

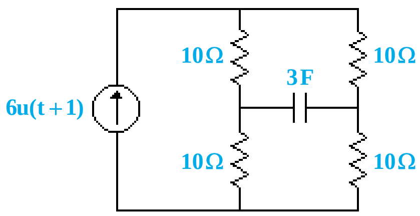
$$V=I_1\times 1=I_1 \;\Rightarrow\; \Delta I_1=\alpha$$

$$V=4I_2 \;\Rightarrow\; \Delta V=\alpha \;\Rightarrow\; \Delta(4I_2)=\alpha \;\Rightarrow\; \Delta I_2=\frac{\alpha}{4}$$

توضیح: برای این که ولتاژ خازن بخواهد تغییر ناگهانی داشته باشد باید طبق $I_C=C\frac{dV_C}{dt}$، جریان ∞ از آن عبور کند. این جریان طبق KCL در گره‌ی A باید یا از مقاومت‌ها و یا از سلف بگذرد که ممکن نیست زیرا اگر از مقاومت بگذرد، ولتاژ دو سر مقاومت نامحدود می‌شود که این طبق KVL و این که ولتاژ منبع V_S محدود است، تناقض دارد، و اگر از سلف بگذرد، طبق $V_L=L\frac{dI}{dt}$، ولتاژ نامحدودی در دو سر سلف انتظار می‌رود که به دلیل V_S محدود ممکن نیست. لذا عبور جریان نامحدود از خازن ممکن نیست و در نتیجه ولتاژ خازن تغییر ناگهانی را در این مدار نمی‌پذیرد.

آزمون فصل دوم

۱ـ در مدار زیر پس از گذشت چه مدت زمان مقدار V_C نصف می‌شود؟ $(V_C(\circ^-)=۶v)$



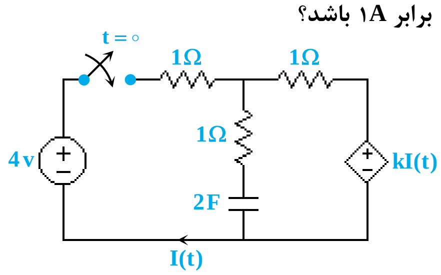
۱) $\frac{۱۰}{Ln۲}$

۲) $\frac{۳۰}{Ln۲}$

۳) $۳۰Ln۲$

۴) $۱۰Ln۲$

۲ـ در شکل مقابل k کدام باشد تا معادله تغییرات $I(t)$ در زمان $t=\circ$ برابر $۱/۶A$ و در $t=\infty$ برابر $۱A$ باشد؟



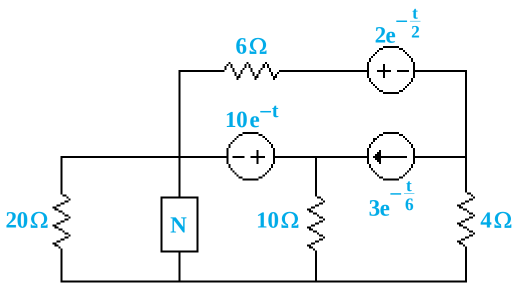
۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۴

۳ـ در مدار زیر زمان صفر شدن تمام ولتاژها و جریان‌ها برابر $۳۰ sec$ است. حال کدام عبارت در مورد شبکه N صحیح است؟



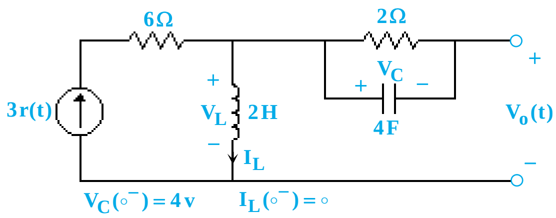
۱) یک مقاومت خطی با مقدار دلخواه

۲) یک خازن با مقدار حداکثر $\frac{۳}{۲}F$

۳) یک سلف با حداقل مقدار $\frac{۳}{۲}H$

۴) موارد ۱ و ۲

۴ـ در مدار زیر تابع $V_o(t)$ کدام گزینه است؟



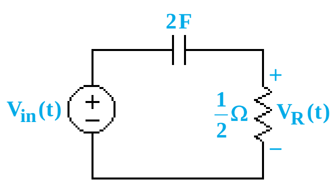
۱) $۶-۴e^{\frac{-t}{۸}}$

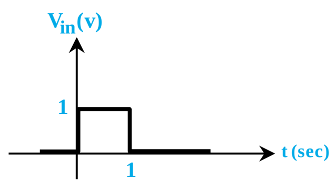
۲) $۶-۴e^{-۸t}$

۳) $۴e^{-۸t}$

۴) $۴e^{\frac{-t}{۸}}$

۵ـ در مدار زیر معادله ولتاژ مقاومت کدام گزینه است؟





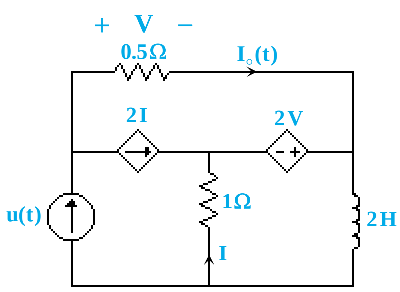
۱) $e^{-t}-e^{-(t+۱)}u(t+۱)$

۲) $e^{-t}-e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

۳) $۵e^{-t}-۵e^{-(t+۱)}u(t+۱)$

۴) $۵e^{-t}-۵e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

۶ـ در مدار زیر پاسخ جریان $I_\circ(t)$ کدام است؟



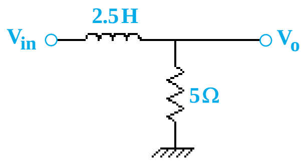
۱) $\frac{۱+۸e^{-\frac{۲}{۳}t}}{۳}$

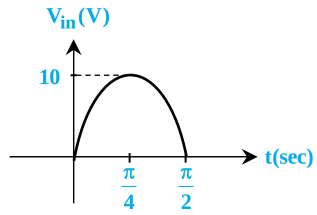
۲) $\frac{۱+۵e^{-\frac{۲}{۳}t}}{۳}$

۳) $\frac{۱+۸e^{-\frac{۳}{۲}t}}{۳}$

۴) $\frac{۱+۵e^{-\frac{۳}{۲}t}}{۳}$

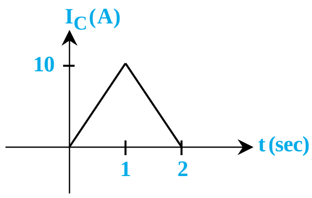
۷ـ در مدار زیر ولتاژ خروجی در $t=\frac{\pi}{۲}\text{sec}$ برحسب ولت کدام است؟





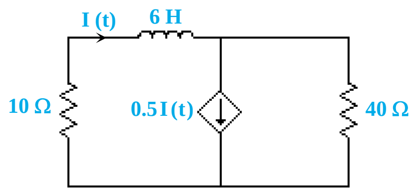
۱) ۴/۱۲
۲) ۶/۲۳
۳) ۳/۱۲
۴) ۵/۲۱

۸ـ جریان عبوری از یک خازن ۲۰۰µF به صورت مقابل است. مقدار انرژی ذخیره شده در آن کدام است؟



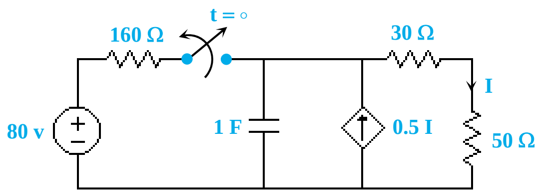
۱) ۲۵۰kJ
۲) ۱۲۵kJ
۳) ۲۵۰J
۴) ۲۲۵kJ

۹ـ معادله $I(t)$ با فرض $I_L(۰^+)=۲A$ در جهت جریان $I(t)$ کدام گزینه است؟



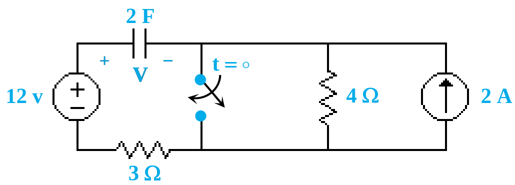
۱) $۳e^{-۵t}$
۲) $۲e^{-۵t}$
۳) $۲e^{-t}$
۴) $۵e^{-t}$

۱۰ـ معادله $I(t)$ در $t>۰$ کدام گزینه است؟



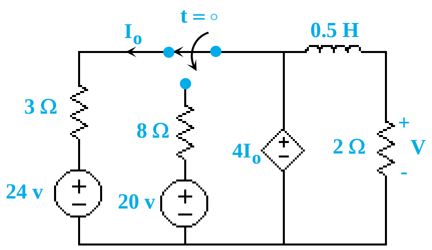
۱) $۰/۵e^{-\frac{t}{۱۶۰}}$
۲) $۰/۵e^{-۱۶۰t}$
۳) $۰/۸e^{-۱۶۰t}$
۴) $۰/۸e^{-\frac{t}{۱۶۰}}$

۱۱ـ در مدار زیر معادله $V(t)$ در $t>۰$ کدام گزینه است؟



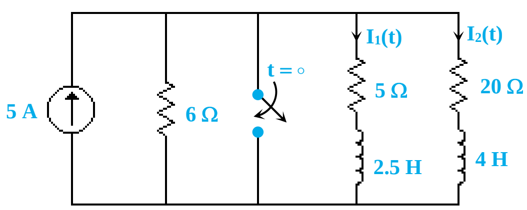
۱) $۱۲-۸e^{-\frac{t}{۶}}$
۲) $۱۲-۸e^{-۶t}$
۳) $۴-۳e^{-۶t}$
۴) $۴-۳e^{-\frac{t}{۶}}$

۱۲ـ برای زمان‌های $t>۰$ معادله $V(t)$ کدام گزینه است؟



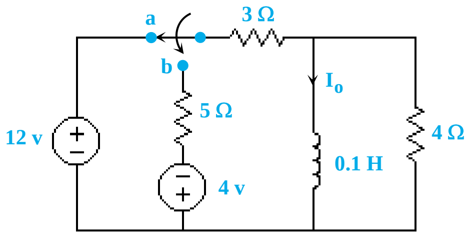
۱) $۹۶e^{-۴t}$
۲) $۴+۹۲e^{-۴t}$
۳) $۴+۹۲e^{-۲۰t}$
۴) $۹۶e^{-۲۰t}$

۱۳ـ معادله $I_۲(t)$ در $t>۰$ برای مدار زیر کدام گزینه است؟



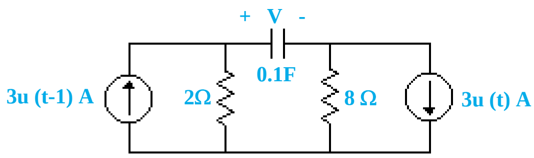
۱) $۰/۶e^{-۵t}$
۲) $۰/۳e^{-۰/۲t}$
۳) $۰/۶e^{-۰/۲t}$
۴) $۰/۳e^{-۵t}$

۱۴ـ معادله $I_o(t)$ بعد از کلیدزنی کدام گزینه است؟



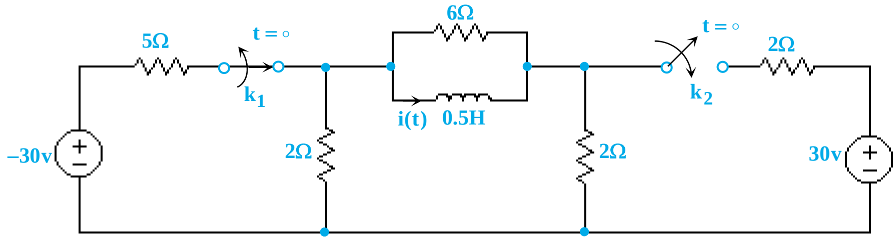
۱) $۲/۵e^{-\frac{۸۰t}{۳}}$
۲) $۴/۵e^{-\frac{۸۰t}{۳}}$
۳) $-۰/۵+۴/۵e^{-\frac{۸۰t}{۳}}$
۴) $۰/۵+۴/۵e^{-\frac{۸۰t}{۳}}$

۱۵ـ در مدار شکل زیر معادله ولتاژ دو سر خازن برای $۰<t<۱$ کدام است؟



۱) $V(t)=۲۴$
۲) $V(t)=۲۴(۱-e^{-t})$
۳) $V(t)=۳۰-۲۴e^{-(t-۱)}$
۴) $V(t)=۳۰$

۱۶ـ در مدار شکل زیر کلید $(k_۱)$ در لحظه $t=۰$ باز می‌شود و کلید $(k_۲)$ در لحظه $t=۰$ بسته می‌شود. معادله جریان $i(t)$ برای $t>۰$ به چه صورتی است؟

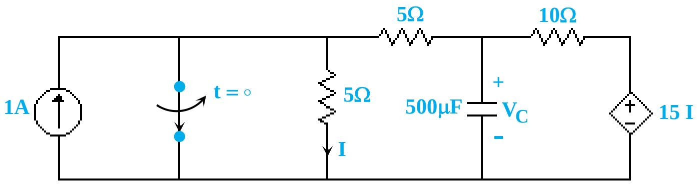


۱) $-۵+۲/۵e^{-\frac{t}{۴}}$
۲) $-۲/۵-۲/۵e^{-\frac{t}{۴}}$
۳) $-۵+۲/۵e^{-۴t}$
۴) $-۲/۵-۲/۵e^{-\frac{t}{۴}}$

۱۷ـ جریان در یک سلف $۱۰mH$ با رابطه $I_L(t)=\begin{cases}۰ & ;\ t<۰\\ ۵te^{-t} & ;\ t>۰\end{cases}$ بیان می‌شود. در چه زمانی حداکثر توان جذب سلف می‌شود؟

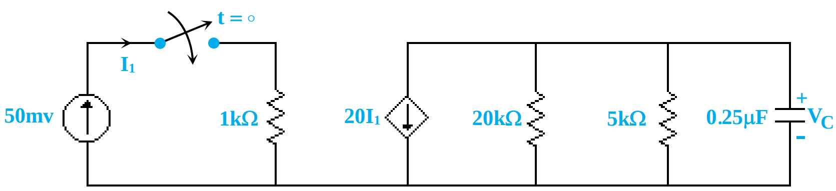
۱) ۰/۳　۲) ۰/۵　۳) ۰/۸　۴) ۱

۱۸ـ کلید مدار شکل زیر مدت‌ها بسته بوده است. اگر در $t=۰$ باز شود، معادله ولتاژ خازن برای $t\ge ۰$ کدام است؟



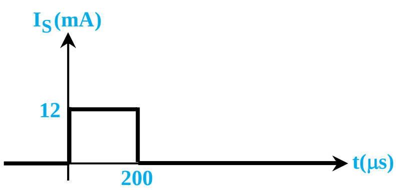
۱) $۲۵(۱-e^{-۱۰۰t})$
۲) $۲۵(۱-e^{-۱۰t})$
۳) $۱۵(۱-e^{-۱۰۰t})$
۴) $۱۵(۱-e^{-۱۰t})$

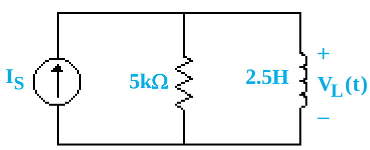
۱۹ـ کلید مدار شکل زیر مدت‌ها باز بوده است. اگر در $t=۰$ بسته شود، معادله ولتاژ خازن برای $t\ge ۰$ کدام خواهد بود؟



۱) $-۴+۴e^{-۱۰۰t}$
۲) $۴-۴e^{-۱۰۰۰t}$
۳) $۴-۴e^{-۱۰۰t}$
۴) $-۴+۴e^{-۱۰۰۰t}$

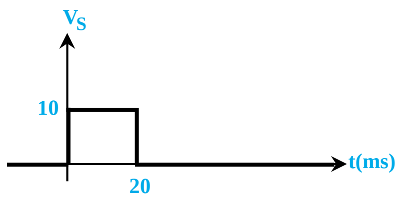
۲۰ـ پالس زیر به مدار اعمال می‌شود، معادله ولتاژ دو سر سلف برای $۰<t<۲۰۰\mu s$ برحسب ولت کدام است؟

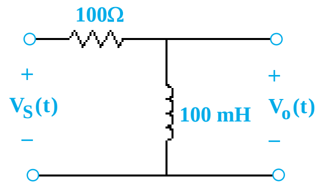




۱) $۶۰(۱-e^{۲۰۰t})$
۲) $۶۰(۱-e^{۲۰۰۰t})$
۳) $۶۰e^{-۲۰۰t}$
۴) $۶۰e^{-۲۰۰۰t}$

۲۱ـ اگر پالس زیر به مدار شکل داده شده اعمال شود، معادله ولتاژ خروجی برای $t > ۲۰ms$، کدام است؟





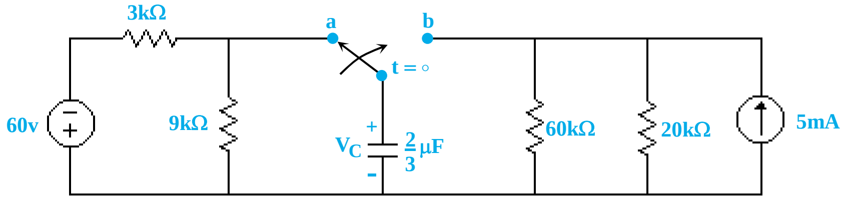
۱) $V_o(t) = -۰/۱(۱-e^{-۱۰۰۰t})$

۲) $V_o(t) = -۱۰(۱-e^{(t-۰/۰۲)})$

۳) $V_o(t) = -۱۰e^{-۱۰۰۰(t-۰/۰۲)}$

۴) $V_o(t) = ۰/۱(۱-e^{-۱۰۰۰t})$

۲۲ـ کلید مدار شکل زیر مدت‌ها در وضعیت a بوده است و در $t = ۰$ ناگهان به وضعیت b می‌رود، معادله $V_C(t)$، $t \geq ۰$ کدام است؟



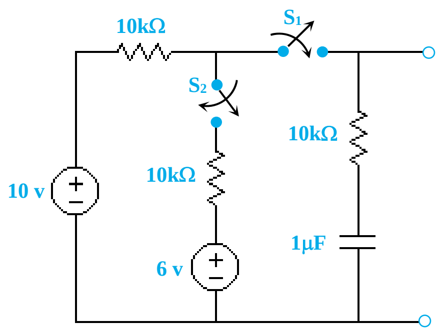
۱) $۷۵-۱۲۰e^{-۱۰t}$

۲) $۷۵-۱۲۰e^{-۱۰۰t}$

۳) $۷۵+۱۲۰e^{-۱۰t}$

۴) $۷۵+۱۲۰e^{-۱۰۰t}$

۲۳ـ با توجه به شکل مقابل، کلید $S_۱$ در $t_۱ = ۰$ و کلید $S_۲$ در $t_۲ = ۱۳/۸ms$ بسته می‌شود، جریان عبوری از خازن در $۱۳/۸^+ms$ برحسب میلی‌آمپر چقدر است؟ $(Ln۲ = ۰/۶۹)$



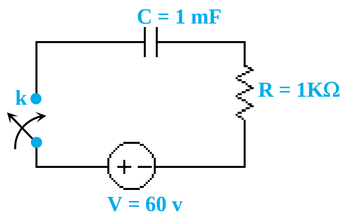
۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۲

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۵

۲۴ـ در مدار شکل مقابل چند ثانیه پس از اتصال کلید k ولتاژ دو سر خازن ۳ برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۱ اهمی می‌شود؟



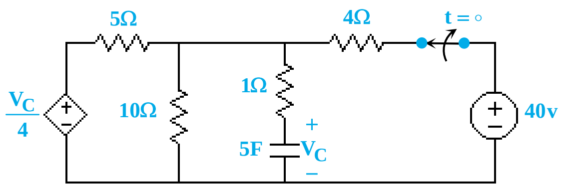
۱) Ln۴

۲) Ln۲

۳) Ln۳

۴) ۲Ln۳

۲۵ـ در شکل زیر، کلید برای مدت زمان زیادی بسته بوده و در $t = ۰$ باز می‌شود. رابطه‌ی $V_C(t)$ برای $t \geq ۰$ کدام است؟



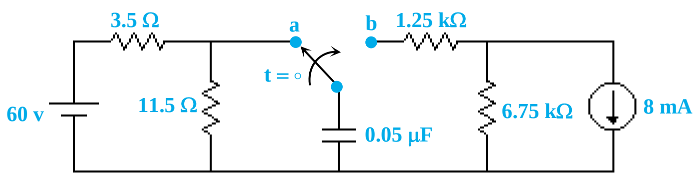
۱) $V_C(t) = ۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$

۲) $V_C(t) = ۲۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۳) $V_C(t) = ۱۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$

۴) $V_C(t) = ۱۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۲۶ـ در مدار شکل زیر در لحظه $t = ۰$ کلید را از وضعیت a به وضعیت b می‌بریم، بعد از چند ثانیه ولتاژ خازن صفر می‌شود؟ (τ ثابت زمانی مدار است).



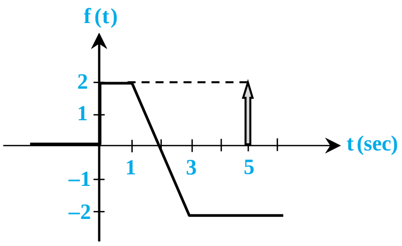
۱) $-\tau Ln۲$

۲) $+\tau Ln۲$

۳) $+\tau Ln۰/۵۴$

۴) $-\tau Ln۰/۵۴$

۲۷ـ نمودار شکل زیر با کدام‌یک از معادلات زیر بیان می‌شود؟



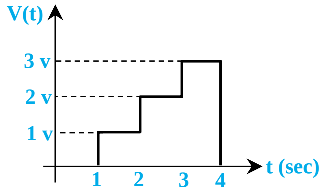
۱) $f(t) = ۲r(t) + ۴r(t-۱) + ۲r(t-۲) + ۲\delta(t-۵)$

۲) $f(t) = u(t) + ۴r(t-۱) - ۲r(t+۲) + ۲\delta(t-۵)$

۳) $f(t) = ۲u(t) + ۴r(t-۱) - ۲r(t-۲) + ۲\delta(t+۳)$

۴) $f(t) = ۲u(t) - ۲r(t-۱) + ۲r(t-۳) + ۲\delta(t-۵)$

۲۸ـ معادله شکل موج نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



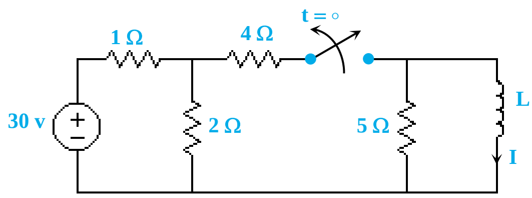
۱) $u(t-۱) + u(t-۲) + u(t-۳)$

۲) $u(t-۱) + ۲u(t-۲)$

۳) $u(t) + u(t-۱) + u(t-۲) + u(t-۴)$

۴) $u(t-۱) + u(t-۲) + u(t-۳) - ۳u(t-۴)$

۲۹ـ مقدار L چند هانری باشد تا در لحظه $t = ۰/۱s$، جریان I برابر $۱/۱۴A$ باشد؟



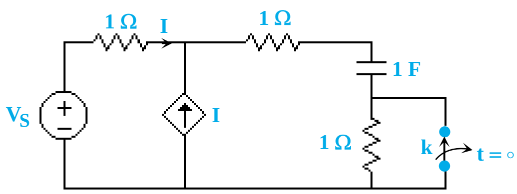
۱) $-\frac{۰/۵}{Ln۲۶}$

۲) $-۰/۵Ln۲۶$

۳) $-\frac{۵}{Ln۰/۲۶}$

۴) $-\frac{۰/۵}{Ln۰/۲۶}$

۳۰ـ در شبکه زیر کلید k به مدت طولانی بسته بوده و در $t = ۰$ باز می‌شود، اگر $V_S = u(t)$ باشد، پاسخ $I_C(t)$ کدام است؟



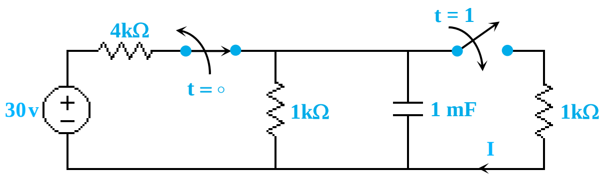
۱) $\frac{۱}{۵}e^{-\frac{۲}{۵}t}u(t)$

۲) $\frac{۲}{۵}e^{-\frac{۲}{۵}t}u(t)$

۳) $\frac{۱}{۵}e^{\frac{۲}{۵}t}u(t)$

۴) $-\frac{۱}{۵}e^{-\frac{۲}{۵}t}u(t)$

۳۱ـ در مدار شکل زیر جریان I در لحظه $t = ۲s$، تقریباً چند میکروآمپر است؟



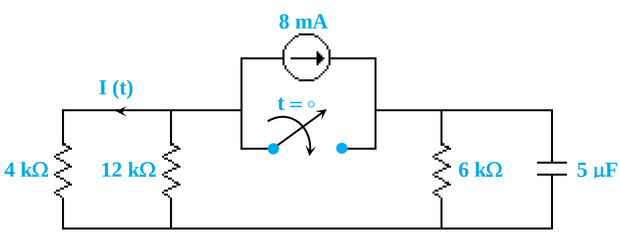
۱) ۴۰

۲) ۱۶۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۸۰

۳۲ـ در مدار شکل مقابل اگر کلید در $t = ۰$ بسته شود، $I(t)$ برای $t > ۰$ برحسب میلی‌آمپر کدام است؟



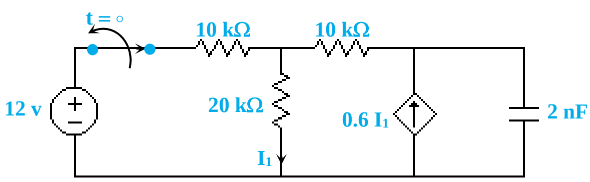
۱) $-۶e^{-۰/۱t}$

۲) $۱۲e^{-۱۰۰t}$

۳) $-۱۲e^{-۱۰۰t}$

۴) $۱۲e^{-۰/۰۱t}$

۳۳ـ در مدار شکل زیر ولتاژ خازن در لحظه $t = ۰$ چند ولت است؟



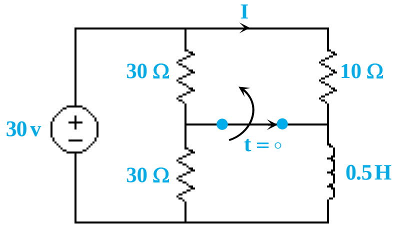
۱) ۱۳

۲) ۱۱

۳) ۸

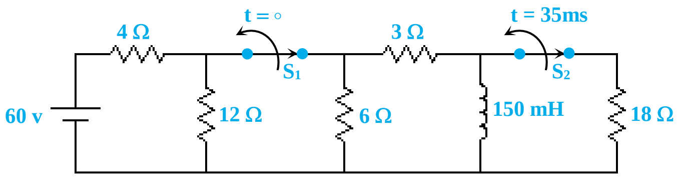
۴) ۹

۳۴ــ در مدار شکل زیر، کلید مدت زمان زیادی بسته بوده و در $t = 0$ باز می‌شود، جریان I در لحظه $t = 50\,ms$ حدوداً چند آمپر است؟



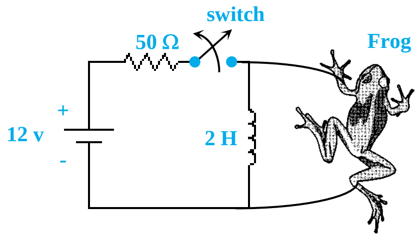
۱) ۳
۲) ۳/۶۹
۳) ۴/۱۵
۴) ۲/۵

۳۵ــ در مدار شکل زیر در $t = 0$ کلید S_1 و در $t = 35ms$ کلید S_2 باز می‌شود. ولتاژ دو سر سلف در لحظه $t = 35^+ms$ تقریباً چند ولت است؟



۱) -۱۳/۳
۲) ۱۳/۳
۳) ۸/۹
۴) -۸/۹

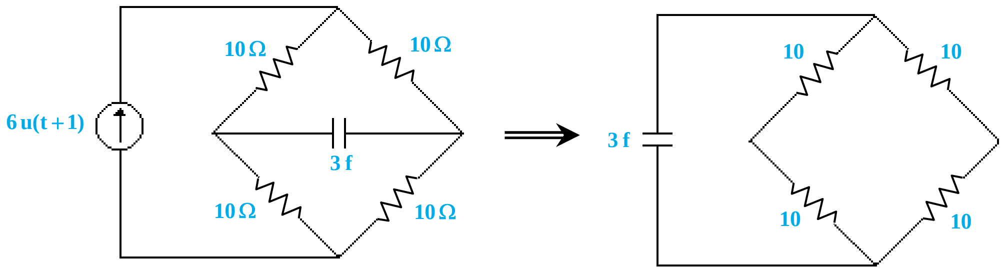
۳۶ــ یک دانشجوی زیست‌شناسی با استفاده از مدار شکل زیر می‌خواهد مقاومت بدن قورباغه را به‌دست آورد! وقتی کلید بسته بود قورباغه تحرک خیلی کمی داشت، اما ۵ ثانیه پس از باز شدن کلید، قورباغه لرزش‌ها و تکان‌های شدیدی از خود نشان داد. اگر جریان عبوری از بدن قورباغه $10\,mA$ ثبت شود، مقاومت بدن قورباغه تقریباً چند اهم می‌باشد؟



۱) ۱/۳
۲) ۲/۵
۳) ۳/۷
۴) ۴

پاسخنامه تشریحی آزمون فصل دوم

۱ـ گزینه «۳» با توجه به برقراری پل وتسون، جریان منبع جریان وارد خازن نمی‌شود. بنابراین فـرم معادلـه‌ی ولتـاژ خـازن بـه صـورت $v_C(t) = v_C(\circ)e^{-\frac{t}{RC}}$ می‌باشد. پس کافی است مقاومت معادله‌ی دیده شده از دو سر خازن را به‌دست آوریم:

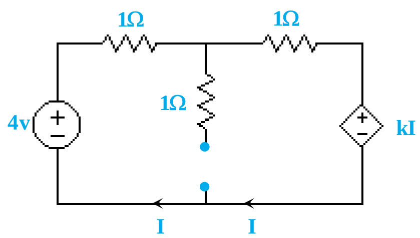


$$\Rightarrow R_{eq} = (۱\circ+۱\circ)\,||\,(۱\circ+۱\circ) = ۱\circ\Omega \;\Rightarrow\; v_C(t) = v_C(\circ)e^{-\frac{t}{۳\circ}}$$

حال زمانی را که ولتاژ خازن به نصف مقدار اولیه‌ی خود می‌رسد، بدست می‌آوریم.

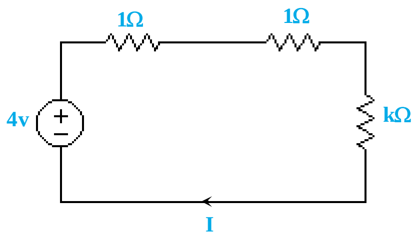
$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{۳\circ}} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{Ln} \frac{t}{۳\circ} = Ln۲ \Rightarrow t = ۳\circ Ln۲ \sec$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه در زمان بی‌نهایت خازن مدار باز می‌شود، آسان‌تر است که مدار را در زمان بی‌نهایت تحلیل کنیم.



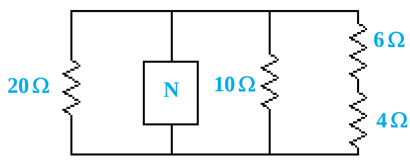
$$\Rightarrow \underset{\text{معادل منبع ولتاژ}}{R} = \frac{kI}{I} = k\,\Omega$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow I = \frac{۴}{۲+k} = ۱ \quad \Rightarrow k = ۲$$

۳ـ گزینه «۴» در صورتی که شبکه‌ی N مقاومتی باشد، ثابت زمانی‌های مدار همان ثابت زمانی‌های ورودی می‌باشد. از طرفـی بـزرگ‌تـرین ثابـت زمـانی منابع ۶ ثانیه می‌باشد و همچنین می‌دانیم زمان میرایی کامل ۵ برابر بزرگ‌ترین ثابت زمانی است. پس اگر شبکه مقاومتی باشد، حداکثر در ۳۰ ثانیه تمـام ولتاژها و جریان‌ها صفر می‌شوند. پس گزینه‌ی ۱ می‌تواند صحیح باشد.



حال اگر شبکه‌ی N یک سلف یا یک خازن باشد، برای به‌دست آوردن ثابت زمانی کافی است مقاومت معادل دیده شده از دو سر شبکه را به‌دست آوریم. با حذف تمامی منابع داریم:

$$\Rightarrow R_{eq} = ۲\circ\,||\,۱\circ\,||\,(۶+۴) = ۴\Omega$$

با توجه به اینکه زمان میرایی ۳۰ ثانیه است، باید ماکزیمم ثابت زمانی ۶ ثانیه باشد.

اگر شبکه‌ی N سلف باشد، آنگاه داریم:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{۴} = ۶ \Rightarrow L = ۲۴H$$

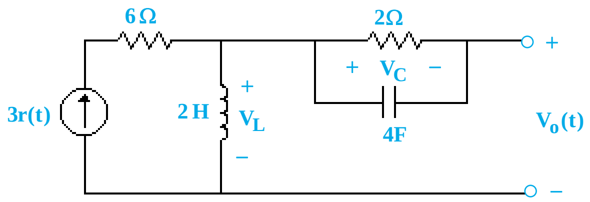
اگر شبکه‌ی N خازن باشد، آنگاه داریم:

$$\tau = RC = ۴C = ۶ \Rightarrow C = \frac{۳}{۲}F$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ هم علاوه بر گزینه‌ی ۱ می‌تواند صحیح باشد.

۴ـ گزینه «۱» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مدار از دو قسمت مرتبه‌ی اول جداگانه تشکیل شده است.

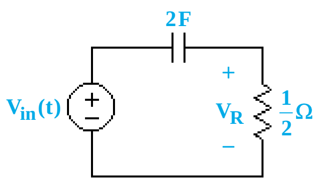
با توجه به پاسخ مدار مرتبه‌ی اول داریم:



$$\begin{cases} v_C(t)=v_C(\infty)+(v_C(۰)-v_C(\infty))e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow v_C(t)=۴e^{-\frac{t}{۸}} \\ v_C(\infty)=۰ \end{cases}$$

$$v_L=L\frac{di_L}{dt}=۲\times\frac{d}{dt}(۳t)=۶ \Rightarrow v_o(t)=v_L(t)-v_C(t)=۶-۴e^{-\frac{t}{۸}}\,v$$

۵ـ گزینه «۲» ابتدا پاسخ مدار را به ازای ورودی $u(t)$ به‌دست می‌آوریم $(v_C(۰)=۰)$:



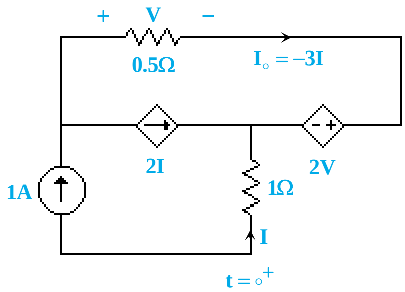
$$\Rightarrow \begin{cases} v_R(t)=v_R(\infty)+(V_R(۰^+)-v_R(\infty))\,e^{-\frac{t}{RC}} \\ v_R(۰^+)=v_{in}(۰^+)=۱ \\ v_R(\infty)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_R(t)=e^{-t}$$

حال پاسخ مدار را به ازای ورودی $u(t-۱)$ به‌دست می‌آوریم: $V_R(t)=e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

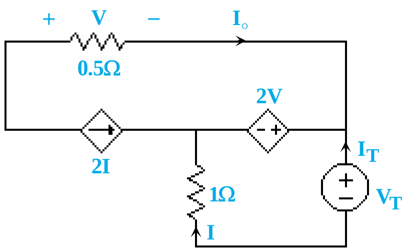
بنابراین پاسخ مدار به ازای ورودی $V_{in}(t)=u(t)-u(t-۱)$ به صورت مقابل است: $v_R(t)=e^{-t}-e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

۶ـ گزینه «۳» با محاسبه $I_\circ(۰^+)$ و ثابت زمانی مدار می‌توانیم تست را به جواب برسانیم. ابتدا مطابق با شکل زیر $I_\circ(۰^+)$ را محاسبه می‌کنیم:



$$I=-۱A$$
$$I_\circ=-۳\times I=۳A$$

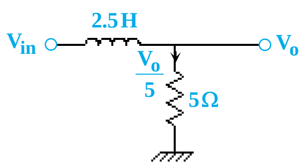
حال با استفاده از مدار روبرو، مقاومت دیده شده از دو سر سلف را محاسبه می‌کنیم:



$$I_T=-I$$
$$V=۰/۵\times(-۲I)=-I$$
$$V_T=۲V-I=-۳I=۳I_T$$
$$\Rightarrow R_T=۳\Omega$$
$$\Rightarrow \tau=\frac{L}{R}=\frac{۲}{۳}sec$$

با چک کردن مقادیر $I_\circ(۰)=۳$ و $\tau=\frac{۲}{۳}$ در گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی (۳) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۷ـ گزینه «۴» با اعمال KVL در حلقه‌ی موجود، داریم:



$$KVL: -V_{in}+۲/۵\frac{d}{dt}(\frac{V_o}{۵})+V_o=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dV_o}{dt}+۲V_o=۲V_{in}$$

از روی شکل ورودی، معادله‌ی آن به‌دست می‌آید: $V_{in}=۱۰\sin ۲t \qquad ۰\le t\le\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{dV_o}{dt}+۲V_o=۲۰\sin ۲t$

$\Rightarrow V_{oh}=ke^{-۲t} \rightarrow$ جواب قسمت همگن

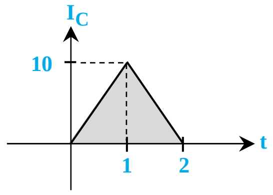
برای به‌دست آوردن جواب خصوصی فرض می‌کنیم $V_{op}=A\sin ۲t+B\cos ۲t$ باشد، بنابراین:

$$۲A\cos ۲t-۲B\sin ۲t+۲A\sin ۲t+۲B\cos ۲t=۲۰\sin ۲t \Rightarrow \begin{cases} A-B=۱۰ \\ A+B=۰ \end{cases} \Rightarrow A=۵, B=-۵ \Rightarrow V_\circ=۵\sin ۲t-۵\cos ۲t+ke^{-۲t}$$

از آنجا که در لحظه‌ی صفر $(t=۰)$ سلف مدار باز است، در نتیجه ولتاژ خروجی برابر صفر می‌باشد.

$$V_\circ(۰)=۰\rightarrow k=۵ \Rightarrow V_o(t)=۵\sin ۲t-۵\cos ۲t+۵e^{-۲t} \Rightarrow V_o(\frac{\pi}{۲})=۵+۵e^{-\pi}=۵/۲۱V$$

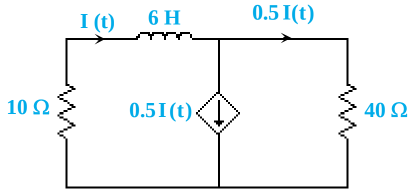
۸ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه انرژی ذخیره شده در خازن برابر $E = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C}$ می‌باشد، کافی است بار ذخیره شده در آن را به‌دست بیاوریم. برای بار ذخیره شده داریم:



$$i_C = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int i_C\, dt$$

$$\Rightarrow Q = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰ = ۱۰ \Rightarrow E = \frac{۱}{۲} \times \frac{(۱۰)^۲}{۲۰۰ \times ۱۰^{-۶}} = ۲۵۰\ kj$$

۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $I_L(t) = I(t)$ بنابراین $I(0^+) = ۲$ می‌باشد، در نتیجه گزینه‌ی ۱ و ۴ نادرست می‌باشد. حال برای رسیدن به پاسخ صحیح کافی است ثابت زمانی مدار را به‌دست آوریم:



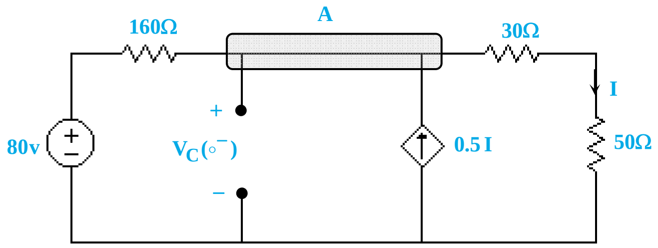
$$\tau^{-۱} = \frac{R_{eq}}{L}$$

$$R_{\text{معادل منبع جریان وابسته}} = \frac{۴۰ \times ۰/۵\, I(t)}{۰/۵\, I(t)} = ۴۰\,\Omega \Rightarrow R_{eq} = ۴۰ \,\|\, ۴۰ + ۱۰ = ۳۰\,\Omega$$

$$\Rightarrow \tau^{-۱} = \frac{۳۰}{۶} = ۵ \Rightarrow I(t) = ۲e^{-۵t} A$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا شرط اولیه‌ی خازن را با تحلیل مدار در زمان‌های منفی به‌دست می‌آوریم. سپس $I(0^+)$ را محاسبه نموده و با توجه به صفر بودن I در بی‌نهایت به دلیل عدم وجود منبع مستقل در زمان مثبت و محاسبه‌ی ثابت زمانی، معادله‌ی $I(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$t < ۰:$

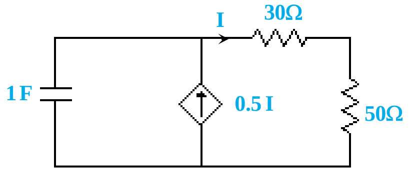


$$KCL(A): \frac{V_C(۰^-) - ۸۰}{۱۶۰} - ۰/۵I + I = ۰ \quad (۱)$$

$$I = \frac{V_C(۰^-)}{۸۰} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_C(۰^-) = ۴۰\,V$$

$t > ۰:$



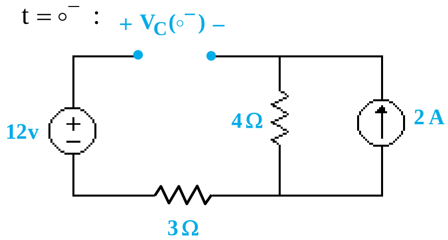
$$\Rightarrow I(۰^+) = \frac{V_C(۰^+)}{۳۰ + ۵۰} = ۰/۵A$$

$$R_{\text{منبع جریان وابسته}} = \frac{۸۰\,I}{-۰/۵\,I} = -۱۶۰ \rightarrow R_{eq} = (\text{از دید خازن}) : (-۱۶۰) \,\|\, ۸۰ = ۱۶۰\,\Omega$$

$$\Rightarrow I(t) = ۰/۵e^{-\frac{t}{۱۶۰}} A$$

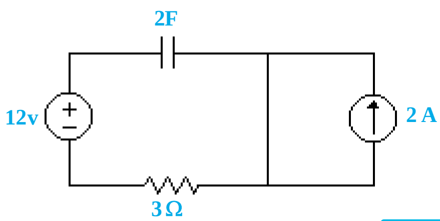
۱۱ـ گزینه «۱» ابتدا با تحلیل مدار در زمان‌های منفی، ولتاژ خازن را در زمان ۰^- به‌دست می‌آوریم (در این زمان خازن به حالت دائمی رسیده و مدار باز است):

$t = ۰^- :$



$$\Rightarrow V_C(۰^-) = V_C(۰^+) = ۱۲ - ۲ \times ۴ = ۴\,v$$

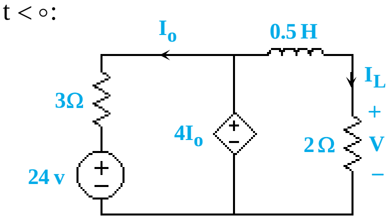
برای زمان‌های مثبت داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} R_{eq}(\text{از دید خازن}) = ۳\,\Omega \\ \tau = RC = ۶\sec^{-۱} \\ V_C(\infty) = ۱۲v \end{cases} \Rightarrow V_C(t) = ۱۲ + (۴ - ۱۲)\,e^{-\frac{t}{۶}} V = ۱۲ - ۸e^{-\frac{t}{۶}} V$$

۱۲ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را برای زمان‌های منفی تحلیل می‌کنیم و شرایط اولیه مدار را به دست می‌آوریم:

$t<۰$:



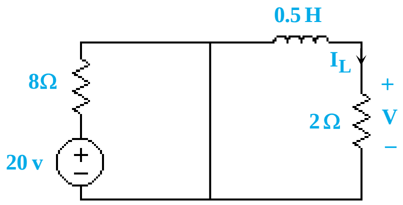
در لحظه‌ی $t=۰^-$ سلف به حالت دائمی رسیده و اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین:

$$I_o=\frac{۴I_o-۲۴}{۳} \Rightarrow I_o=۲۴ \Rightarrow I_L(۰^-)=\frac{۴I_o}{۲}=۴۸\,A$$

$$V(۰^+)=۲\,i_L(۰^+)=۹۶\,v$$

حال برای زمان‌های مثبت، با تغییر جای کلید، $I_o=۰$ شده و منبع ولتاژ وابسته اتصال کوتاه خواهد شد. پس:

$t>۰$:



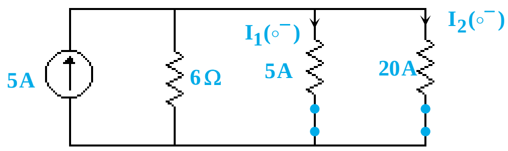
$$V(\infty)=۰\,v$$

$$R_{eq}(\text{از دید سلف})=۲\Omega \Rightarrow \tau^{-۱}=\frac{R}{L}=۴$$

$$V(t)=V(\infty)+(V(۰)-V(\infty))e^{-\frac{R}{L}t}=۹۶e^{-۴t}\,v$$

۱۳ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را با تحلیل مدار در زمان‌های منفی به‌دست می‌آوریم:

$t=۰^-$:

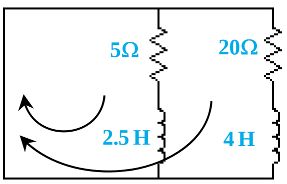


$$I_۲(۰^-)=\frac{۵||۶}{۵||۶+۲۰}\times ۵=۰/۶\,A$$

$$I_۱(۰^-)=\frac{۲۰\times ۰/۶}{۵}=۲/۴\,A$$

برای زمان‌های مثبت داریم:

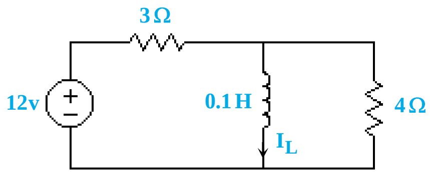
$\begin{cases} \text{به دلیل عدم وجود منبع مستقل در زمان مثبت } I_۲(\infty)=۰\ ,\ ۲۰\Omega: \text{مقاومت معادل از دید سلف ۴ هانری} \\ \text{به دلیل عدم وجود منبع مستقل در زمان مثبت } I_۱(\infty)=۰\ ,\ ۵\Omega: \text{مقاومت معادل از دید سلف ۲/۵ هانری} \end{cases}$



$$\begin{cases} I_۲(t)=I_۲(\infty)+(I_۲(۰)-I_۲(\infty))e^{-\frac{R_{eq_۲}t}{L_۲}}=۰/۶\,e^{-۵t}A \\ I_۱(t)=I_۱(\infty)+(I_۱(۰)-I_۱(\infty))e^{-\frac{R_{eq_۱}t}{L_۱}}=۲/۴\,e^{-۲t}A \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را برای زمان‌های منفی تحلیل می‌کنیم:

$t<۰$:



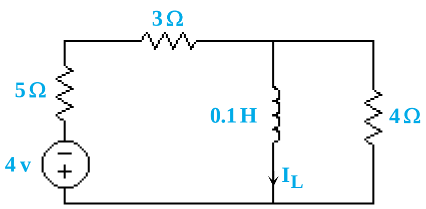
در لحظه‌ی $t=۰^-$ سلف به حالت دائمی خود رسیده و اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین:

$$I_L(۰^-)=\frac{۱۲}{۳}=۴A \quad \Rightarrow \quad I_L(۰^-)=I_L(۰^+)=۴A$$

حال با توجه به مدار در زمان‌های مثبت و فرم پاسخ مدار مرتبه‌ی اول معادله‌ی زمانی I_o را محاسبه می‌کنیم:

$$I_o(t)=I_o(\infty)+(I_o(۰^+)-I_o(\infty))e^{\frac{-R}{L}t}$$

در زمان بی‌نهایت سلف به حالت دائمی رسیده و اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین:

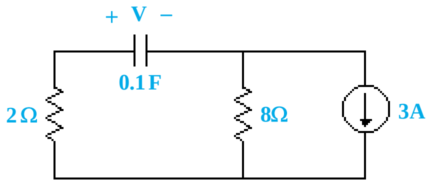


$$I_o(\infty)=\frac{-۴}{۵+۳}=-\frac{۱}{۲}A$$

$$R_{eq}(\text{از دید سلف با بی‌اثر کردن منبع ولتاژ})=(۵+۳)||۴=\frac{۸}{۳}\Omega \Rightarrow I_o(t)=-\frac{۱}{۲}+(۴-(-\frac{۱}{۲}))e^{-\frac{۸۰}{۳}t}$$

$$I_o(t)=-۰/۵+۴/۵\,e^{-\frac{۸۰}{۳}t}A$$

۱۵ـ گزینه «۲» با توجه به عدم وجود از منابع در زمان‌های منفی، پس شرط اولیه‌ی خازن برابر صفر می‌باشد. حال برای زمان‌های $0<t<1$ مدار به شکل زیر می‌باشد.

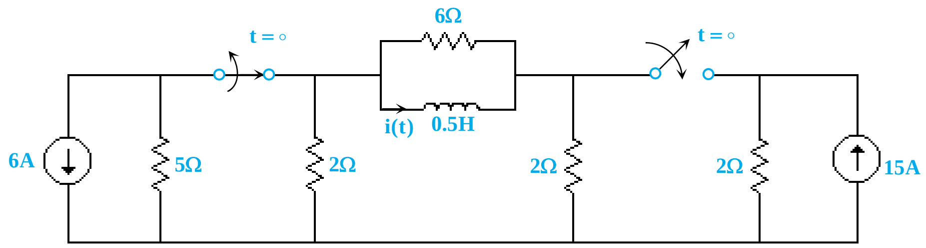


در زمان بی‌نهایت خازن مدار باز می‌شود، بنابراین:

$V_C(\infty)=3\times 8=24V$, R_{eq} (از دید خازن) $=2+8=10\Omega$

$$\Rightarrow V_C(t)=V(t)=V_C(\infty)+(V_C(0)-V_C(\infty))e^{-\frac{t}{RC}}=24(1-e^{-t})\ \text{و}\ (0<t<1)$$

۱۶ـ گزینه «۳» داریم:



$$i(t)=k_1+k_2e^{-\frac{t}{\tau}}$$

در $t=0^-$ داریم:

$$i(0^-)=\frac{-6\times(\frac{1}{2})}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-2.5A$$

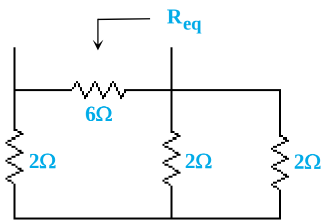
در $t=0^+$ داریم:

$$i(0^+)=i(0^-)=-2.5A=k_1+k_2$$

در $t=\infty$ داریم:

$$i(\infty)=\frac{-15\times(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-5A=k_1 \quad \Rightarrow k_2=2.5A$$

حال ثابت زمانی را به‌دست می‌آوریم:



$$R_{eq}=6\|(2+2\|2)=2\Omega$$

$$\Rightarrow \tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{4}\Rightarrow i(t)=-5+2.5e^{-4t}$$

۱۷ـ گزینه «۱» انرژی ذخیره شده در سلف از روی $P(t)$ به‌دست می‌آید. برای این منظور بایستی $V(t)$ را محاسبه کنیم:

$$V(t)=L\frac{di}{dt}=10^{-2}(5e^{-t}-5te^{-t})=5\times10^{-2}e^{-t}(1-t)$$

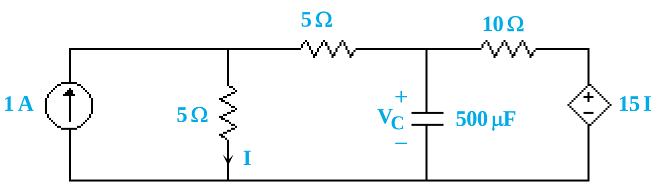
$$P(t)=V(t).I(t)=5\times10^{-2}e^{-t}(1-t)(5te^{-t})=0.25(t-t^2)e^{-2t}$$

زمانی توان جذبی سلف حداکثر می‌شود که $P(t)$ بیشینه شود. لذا:

$$\frac{dP(t)}{dt}=0\Rightarrow\frac{dP(t)}{dt}=0.25(1-2t)e^{-2t}-0.5(t-t^2)e^{-2t}=0.25e^{-2t}(1-4t+2t^2)$$

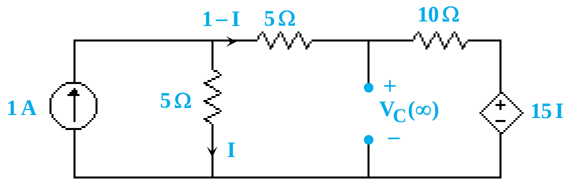
اگر معادله‌ی $2t^2-4t+1=0$ را حل کنیم، در زمان $t_1\simeq 0.3s$ و $t_2=1.7s$ به‌دست می‌آید که t_1 در گزینه‌هاست.

۱۸ـ گزینه «۱» با توجه به بسته بودن کلید در زمان‌های منفی، تمامی جریان منبع جریان وارد کلید می‌شود. بنابراین ولتاژ اولیه‌ی خازن برابر صفر می‌باشد. حال مدار را برای زمان‌های $t>0$ تحلیل می‌کنیم:



با توجه به فرم پاسخ مدار مرتبه‌ی اول، برای نوشتن معادله‌ی زمانی ولتاژ خازن علاوه بر مقدار اولیه ولتاژ به مقدار نهایی ولتاژ و ثابت زمانی نیاز داریم.

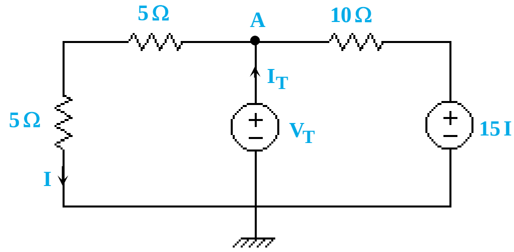
از طرفی در زمان بی‌نهایت خازن مدار باز می‌شود. بنابراین داریم:



$$KVL: -5I+15(1-I)+15I=0 \quad \Rightarrow I=3A$$

$$\Rightarrow V_C(\infty)=15I+10\times(1-I)=45-20=25\ v$$

برای به‌دست آوردن مقاومت دیده شده از دو سر خازن، منبع تستی به جای آن قرار می‌دهیم:



$$KVL(A): \frac{V_T}{10} - I_T + \frac{V_T - 15I}{10} = 0 \qquad (1)$$

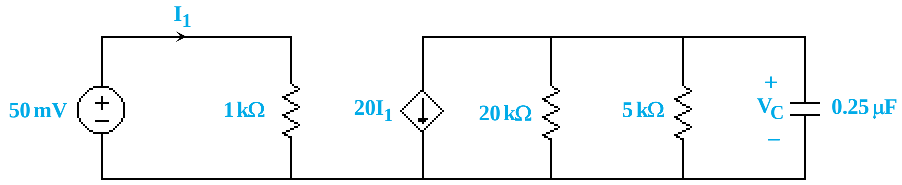
از طرفی داریم: $I = \frac{V_T}{10}$، پس:

$$\xrightarrow{(1)} \frac{V_T}{10} - I_T + \frac{V_T - 1/5V_T}{10} = 0 \Rightarrow V_T = 20 I_T \Rightarrow R_{th} = 20\Omega$$

$$\Rightarrow \tau = RC = 500\times 10^{-6}\times 20 = 0/01\ Sec \qquad \Rightarrow \quad V_C(t) = 25(1-e^{-100t})V$$

۱۹ـ گزینه «۴» با توجه به عدم وجود منبع مستقل در زمان‌های منفی، ولتاژ اولیه‌ی خازن برابر صفر می‌باشد ($V_C(0)=0$). برای $t>0$ داریم:

$$I_1 = \frac{50\ mv}{1\ k\Omega} = 50\mu A$$



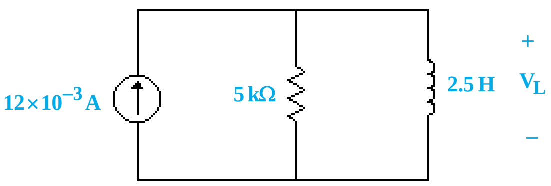
از طرفی در زمان بی‌نهایت خازن به حالت دائمی رسیده و مدار باز می‌شود، بنابراین ولتاژ آن در بی‌نهایت به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$v_C(\infty) = -20I_1 \times \underbrace{(20\,\|\,5)}_{4}\times 10^3 = -4v$$

حال برای به‌دست آورن ثابت زمانی، مقدار R را به‌دست می‌آوریم. برای این کار منبع ولتاژ را خنثی می‌کنیم که در نتیجه آن منبع جریان وابسته نیز حذف می‌شود.

$$\begin{cases} R_{eq}(\text{از دید خازن}) = 20\,\|\,5 = 4\ k\Omega \\ \tau = RC = 4\times 10^3 \times 0/25\times 10^{-6} = 10^{-3} \end{cases} \Rightarrow v_C(t) = -4(1-e^{-1000t})v$$

۲۰ـ گزینه «۴» برای بازه‌ی زمانی $0 < t < 200\mu s$ مدار به صورت روبه‌رو است:

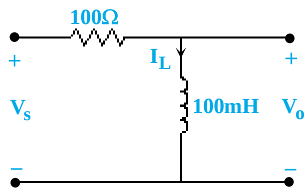


در لحظه‌ی $t=0^-$ به دلیل عدم وجود منبع مستقل جریان اولیه‌ی سلف برابر صفر می‌باشد. بنابراین در لحظه‌ی $t=0^+$ مدار باز است، در نتیجه ولتاژ سلف در لحظه‌ی $t=0^+$ به صورت روبه‌رو است: $v_L(0^+) = 12\times 10^{-3}\times 5\times 10^3 = 60v$

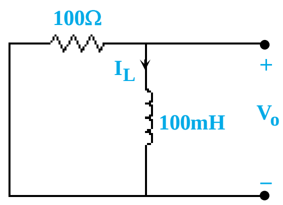
در بی‌نهایت سلف به حالت دائمی خود رسیده و اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین ولتاژ دو سرش در بی‌نهایت برابر صفر می‌باشد.

$$V_L(t) = V_L(\infty) + (V_L(0^+) - V_L(\infty))\,e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow V_L(t) = 60e^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow[L=2/5]{R=5\times 10^3} V_L(t) = 60\,e^{-2000t}\,V$$

۲۱ـ گزینه «۳» در زمان‌های منفی مقدار ورودی V_s صفر بوده است، لذا $I_L(0^-) = I_L(0^+) = 0$. از طرفی مشاهده می‌شود که ثابت زمانی مدار $\tau = \frac{L}{R} = 1ms$ است، یعنی پالس ورودی تا حدود لحظه‌ی $5ms$ به حالت پایدار می‌رسد. لذا در لحظه‌ی $20ms$ می‌توانیم به آسانی فرض کنیم که سلف اتصال کوتاه بوده و جریان $I_L(20^-) = 0/1$ آمپر از آن عبور می‌کند. حال در لحظ $20^+\ ms$ منبع صفر می‌شود (اتصال کوتاه). لذا شکل زیر را خواهیم داشت:



$$I_L(20^+\ ms) = 0/1A \Rightarrow V_o(20^+\ ms) = -RI = -100\times 0/1 = -10\,V$$



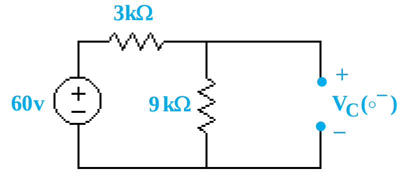
از طرفی به دلیل فقدان منبع، I_L و V_o در بی‌نهایت صفر خواهند بود.

$$V_o(t) = V(\infty) + [V(20\,ms) - V(\infty)]e^{-\frac{t-20\times 10^{-3}}{\tau}} \qquad t > 20\,ms$$

$$= 0 + [-10-0]e^{-10^3(t-20\times 10^{-3})} = -10\,e^{-1000t+20}V$$

۲۲ـ گزینه «۲» ابتدا ولتاژ اولیه‌ی خازن را با تحلیل مدار در زمان‌های منفی به‌دست می‌آوریم:

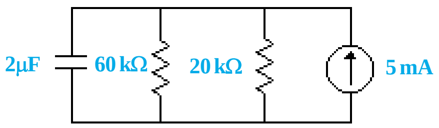
$t=۰^-$:



$$v_C(۰^+)=v_C(۰^-)=\frac{۹}{۹+۳}\times(-۶۰)=-۴۵\ \text{v}$$

برای زمان‌های مثبت داریم:

با توجه به اینکه خازن در بی‌نهایت به حالت دائمی رسیده و مدار باز می‌شود، ولتاژ آن را در بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم:

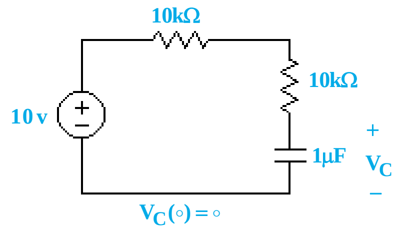


$$\begin{cases} v_C(\infty)=۵\times۱۰^{-۳}\times(۲۰\,||\,۶۰)\times۱۰^{۳}=۷۵\ \text{v} \\ R_{eq}(\text{از دید خازن})=۲۰\,||\,۶۰=۱۵\ \text{k}\Omega \quad\Rightarrow\quad v_C(t)=۷۵-۱۲۰\,e^{-۱۰۰t}\ \text{v} \\ \tau=RC=۱۵\times۱۰^{۳}\times\frac{۲}{۳}\times۱۰^{-۶}=۱۰^{-۲} \end{cases}$$

۲۳ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را برای بازه‌ی زمانی $۰<t<۱۳/۸\ \text{ms}$ تحلیل می‌کنیم تا با به‌دست آوردن ولتاژ خازن در $t=۱۳/۸^-\text{ms}$ و شرط پیوستگی ولتاژ آن، جریان عبوری از خازن را در لحظه‌ی $t=۱۳/۸^+\text{ms}$ به‌دست آوریم:

$۰<t<۱۳/۸\ \text{ms}$:

با توجه به اینکه خازن در بی‌نهایت مدار باز می‌شود، داریم:



$$v_C(\infty)=۱۰\ \text{v}$$

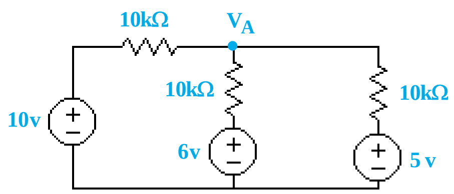
$$R_{eq}(\text{از دید خازن})=۱۰+۱۰=۲۰\ \text{k}\Omega$$

$$\tau=RC=۲۰\times۱۰^{۳}\times۱۰^{-۶}=۰/۰۲\ \text{sec}$$

$$\Rightarrow\ v_C(t)=۱۰(۱-e^{-۵۰t})\xrightarrow{t=۱۳/۸\ \text{ms}} v_C(۱۳/۸\,\text{ms})=۱۰(۱-e^{-۰/۶۹})=۵\ \text{v}$$

$$\Rightarrow v_C(۱۳/۸^+)=v_C(۱۳/۸^-)=۵\ \text{v}$$

برای زمان $t=۱۳/۸^+\text{ms}$ داریم:

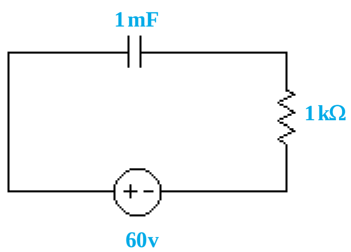


$$\frac{v_A-۱۰}{۱۰}+\frac{v_A-۶}{۱۰}+\frac{v_A-۵}{۱۰}=۰$$

$$\Rightarrow ۳v_A=۲۱\ \Rightarrow\ v_A=۷\ \text{v}$$

$$\Rightarrow\quad I_C(۱۳/۸^+)=\frac{۷-۵}{۱۰\times۱۰^{۳}}=۰/۲\ \text{mA}$$

۲۴ـ گزینه «۱» با توجه به در مدار نبودن منبع ولتاژ در زمان منفی، ولتاژ اولیه‌ی خازن برابر صفر می‌باشد و همچنین با توجه به مدار باز شدن خازن در بی‌نهایت ولتاژ دو سرش برابر ۶۰ ولت می‌شود. ثابت زمانی مدار نیز ۱ می‌باشد، پس:



$$V_C(t)=۶۰+(۰-۶۰)e^{-t}=۶۰(۱-e^{-t})$$

$$\xrightarrow{I_C=C\frac{dv_C}{dt}} i_C(t)=i_R(t)=۱۰^{-۳}\times۶۰e^{-t}=۰/۰۶\,e^{-t}$$

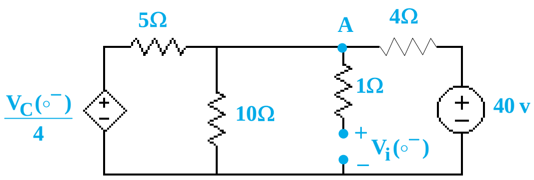
$$V_R(t)=۱۰^{۳}\,i_R(t)=۶۰\,e^{-t}$$

حال برای به‌دست آوردن زمان خواسته شده، ولتاژ خازن را ۳ برابر ولتاژ و مقاومت قرار می‌دهیم:

$$۳\times۶۰e^{-t}=۶۰-۶۰e^{-t}\ \Rightarrow\ e^{-t}=\frac{۱}{۴}\ \rightarrow\ t=\text{Ln}\,۴\ \text{sec}$$

۲۵ـ گزینه «۱» برای به‌دست آوردن ولتاژ اولیه‌ی صفر مدار را برای زمان‌های منفی تحلیل می‌کنیم. در لحظه‌ی $t=۰^-$ خازن مدار باز می‌شود، بنابراین داریم:

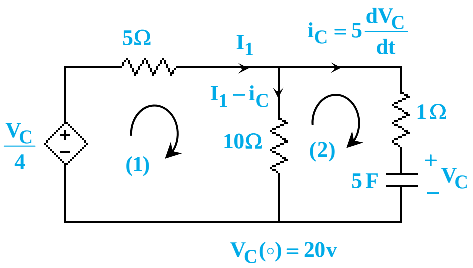
$t=۰^-$:



$$\text{KCL (A)}:\ \frac{V_C(۰^-)-۴۰}{۴}+\frac{V_C(۰^-)}{۱۰}+\frac{V_C(۰^-)-\frac{V_C(۰^-)}{۴}}{۵}=۰$$

$$\Rightarrow V_C(۰^-)=۲۰\ \text{v}$$

حال برای زمان‌های $t>۰$ داریم:



$$\text{KVL (۱)}:\ \frac{-V_C}{۴}+۵I_۱+۱۰(I_۱-۵\frac{dV_C}{dt})=۰$$

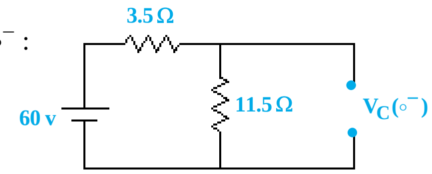
$$\Rightarrow\ ۱۵I_۱=۵۰\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{۴}\quad (۱)$$

$$\text{KVL (۲)}:\ ۵\frac{dV_C}{dt}+V_C-۱۰(I_۱-۵\frac{dV_C}{dt})=۰\Rightarrow ۱۰I_۱=۵۵\frac{dv_C}{dt}+V_C\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}\frac{dV_C}{dt}+\frac{۱}{۲۶}V_C=۰\\ V_C(۰)=۲۰\,v\\ V_C(\infty)=۰\,v\end{cases}\to V_C(t)=۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$$

۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به وضعیت a کلید ولتاژ اولیه‌ی خازن را به‌دست می‌آوریم:

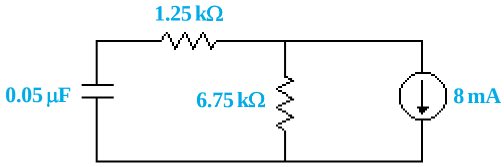
$t=۰^-$:



$$V_C(۰^-)=\frac{۱۱/۵}{۱۱/۵+۳/۵}\times۶۰=۴۶\ v$$

برای وضعیت b کلید داریم:

در بی‌نهایت خازن مدار باز می‌شود، بنابراین:

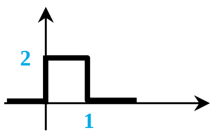


$$V_C(\infty)=-۸\times۱۰^{-۳}\times۶/۷۵\times۱۰^{۳}=-۵۴\ V$$

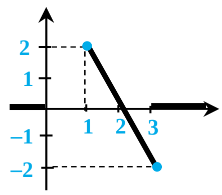
$$V_C(t)=-۵۴+(۴۶-(-۵۴))\,e^{-\frac{t}{\tau}}=-۵۴+۱۰۰\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_C(t)=۰\ \to\ t=-\tau\ln\frac{۵۴}{۱۰۰}=-\tau\ln ۰/۵۴\,\text{sec}$$

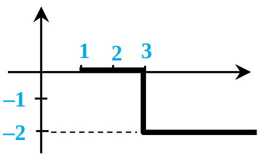
۲۷ـ گزینه «۴» شکل داده شده از مجموع شکل‌های زیر تشکیل شده است:



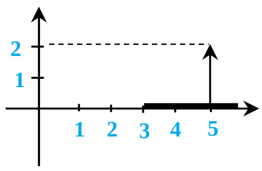
$\Rightarrow ۲u(t)-۲u(t-۱)$



$\Rightarrow -۲r(t-۱)+۲u(t-۱)+۲r(t-۳)+۲u(t-۳)$



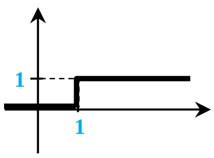
$\Rightarrow -۲u(t-۳)$



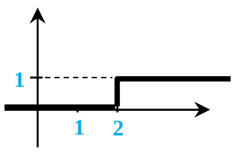
$\Rightarrow ۲\delta(t-۵)$

$$f(t)=f_۱+f_۲+f_۳+f_۴=۲u(t)-۲r(t-۱)+۲r(t-۳)+۲\delta(t-۵)$$

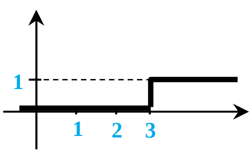
۲۸ـ گزینه «۴» شکل داده شده از مجموع شکل‌های زیر تشکیل شده است:



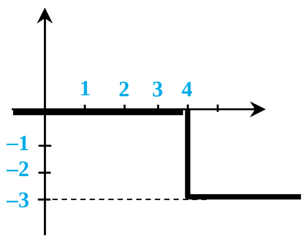
$f_۱=u(t-۱)$



$f_۲=u(t-۲)$



$f_۳=u(t-۳)$

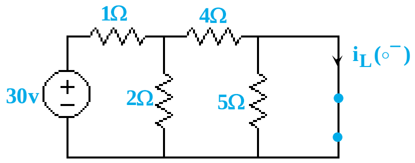


$f_۴=-۳u(t-۴)$

$$f(t)=f_۱+f_۲+f_۳+f_۴=u(t-۱)+u(t-۲)+u(t-۳)-۳u(t-۴)$$

۲۹ـ گزینه «۴» ابتدا جریان اولیه‌ی سلف را محاسبه می‌کنیم:

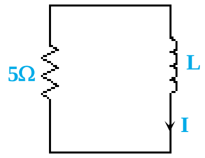
$t=0^-:$



$$i_L(0^-)=\frac{2}{2+4}\times\frac{30}{1+(2\|4)}=\frac{30}{7}\ \mathrm{A}$$

برای زمان‌های $t>0$ داریم:

$t>0:$



$$i_L(\infty)=0 \quad\Rightarrow\quad i_L(t)=i_L(0^+)e^{-\frac{R}{L}t}$$

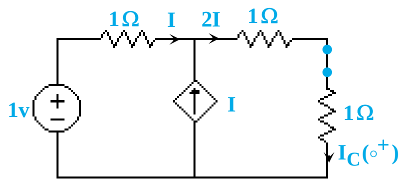
$$\Rightarrow i_L(t)=\frac{30}{7}e^{-\frac{5}{L}t}\xrightarrow{i_L(0.1)=1.14}1.14=4.28\,e^{-\frac{0.5}{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{0.5}{L}=\mathrm{Ln}\frac{4.28}{1.14}\Rightarrow L=\frac{0.5}{\mathrm{Ln}\,3.75}=\frac{-0.5}{\mathrm{Ln}\,0.26}\mathrm{H}$$

۳۰ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را برای زمان‌های منفی تحلیل می‌کنیم. از آنجایی که هیچ منبعی قبل از $t=0$ مقدار نداشته است، لذا: $V_C(0^-)=0$

حال برای $t=0^+$ داریم:

$t=0^+:$



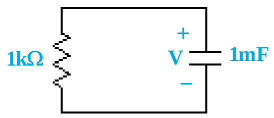
$$\mathrm{KVL}(\text{حلقه‌ی بیرونی}):-1+I+2I\times(1+1)=0$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{5}\rightarrow\quad I_C(0^+)=\frac{2}{5}=0.4\,\mathrm{A}$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح می‌باشد.

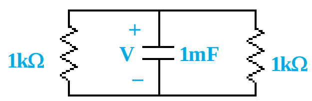
۳۱ـ گزینه «۳» در زمان‌های منفی مدار به حالت پایدار رسیده است. لذا $V_o(0^-)=V_o(0^+)=30\times\frac{1}{5}=6\mathrm{v}$. حال در زمان $t=0$ کلید اول باز می‌شود.

معادله‌ی $V_o(t)$ به صورت زیر می‌شود:



$$V(t)=V(\infty)+(V(0)-V(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=0+(6-0)e^{-t}=6e^{-t}\xrightarrow{t=1}V(1)=6e^{-1}\mathrm{v}$$

حال بعد از وصل کلید دوم در زمان $t=1\mathrm{s}$، خواهیم داشت:

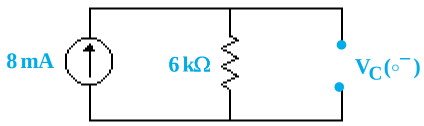


$$V(t)=V(\infty)+(V(1)-V(\infty))e^{-\frac{t-1}{\tau}}$$
$$=0+(6e^{-1}-0)e^{-\frac{t-1}{0.5}}=6e^{-t}e^{-2(t-1)}\xrightarrow{t=2\mathrm{s}}V(2)=6e^{-3}$$

مقدار جریان برابر است با:

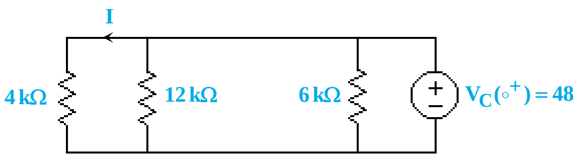
$$I=\frac{V}{R}=\frac{6e^{-3}}{1\mathrm{k}}\simeq 300\mu\mathrm{A}$$

۳۲ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه خازن در لحظه‌ی $t=0^-$ مدار باز می‌شود، بنابراین:



$$v_C(0^-)=v_C(0^+)=48\ \mathrm{v}$$

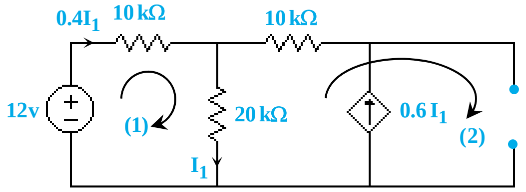
برای $t=0^+$ داریم:



$$\Rightarrow\ I(0^+)=\frac{48}{4\times10^3}=12\,\mathrm{mA}$$

با توجه به عدم وجود منبع مستقل برای زمان $t>0$، بنابراین $I(\infty)=0$ می‌باشد.

$$R_{eq}(\text{از دید خازن})=4\|12\|6=2\ \mathrm{k\Omega}\ \Rightarrow\ \tau=RC=10^{-2}\sec\Rightarrow\ I(t)=I(\infty)+(I(0^+)-I(\infty))e^{-\frac{t}{RC}}\ \Rightarrow\ I(t)=12e^{-100t}\mathrm{mA}$$



۳۳ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه خازن در لحظه‌ی ۰^- مدار باز می‌شود، داریم:

$$V_C(۰^-)=V_C(۰^+)=V_C(۰)$$

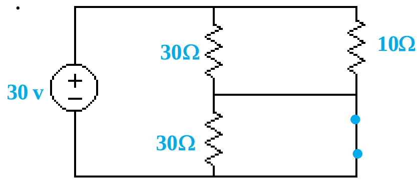
با اعمال KVL در حلقه‌ی (۱) مقدار $I_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{KVL (۱)}: \ -۱۲+۴\times۱۰^۳ I_۱+۲۰\times۱۰^۳ I_۱=۰ \Rightarrow ۲۴\times۱۰^۳ I_۱=۱۲ \Rightarrow I_۱=۰/۵\ \text{mA}$$

حال با اعمال KVL در حلقه‌ی (۲) مقدار $V_C(۰)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{KVL (۲)}: -۲۰\times۱۰^۳ I_۱-۶\times۱۰^۳ I_۱+V_C(۰)=۰ \Rightarrow V_C(۰)=۲۶\times۱۰^۳\times۰/۵\times۱۰^{-۳}=۱۳\text{v}$$

$t=۰^-$:

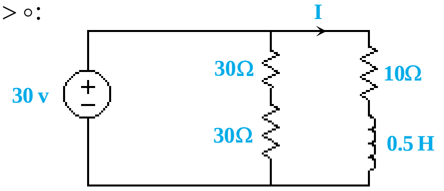


۳۴ـ گزینه «۲» ابتدا در شرایطی که کلید بسته است، جریان اولیه‌ی سلف را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow I_L(۰^-)=\frac{۳۰}{۳۰\,||\,۱۰}=۴\text{A}$$

حال برای زمان‌های $t>۰$ داریم:

$t>۰$:

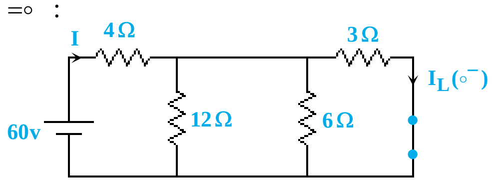


$$I(\infty)=\frac{۳۰}{۱۰}=۳\text{A}$$

دقت شود منبع ولتاژ در این حالت اتصال کوتاه شده است. $\rightarrow$ $R_{eq}(\text{از دید خازن})=۱۰\Omega$

$$I(t)=I(\infty)+(I(۰)-I(\infty))e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t)=۳+e^{-۲۰t} \xrightarrow{t=۰/۰۵s} I(۰/۰۵)=۳/۶۹\text{A}$$

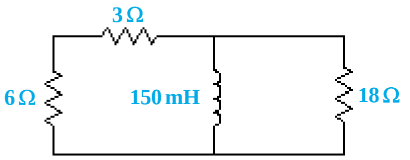
$t=۰^-$:



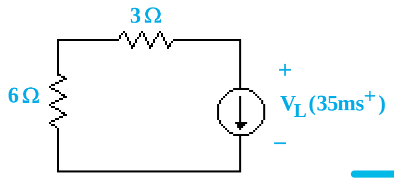
۳۵ـ گزینه «۱» ابتدا جریان اولیه‌ی سلف را در زمان $t=۰^-$ به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{۶۰}{۴+۱۲\,||\,۶\,||\,۳}=۱۰/۵ \Rightarrow I_L(۰^-)=\frac{۱۲\,||\,۶}{۱۲\,||\,۶+۳}\times۱۰/۵=۶\text{A}$$

حال برای $۰<t<۳۵\ \text{ms}$ داریم:



$$\begin{cases} i_L(\infty)=۰ \\ R_{eq}(\text{از دید خازن})=۹\,||\,۱۸=۶\Omega \rightarrow i_L(t)=۶e^{-۴۰t} \quad \rightarrow i_L(۳۵\,\text{ms})\simeq۱/۴۸\text{A} \\ \tau=\frac{L}{R}=۰/۰۲۵\text{S} \end{cases}$$

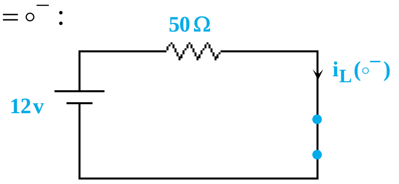


برای زمان $t=۳۵^+\ \text{ms}$ داریم:

$$\Rightarrow v_L(۳۵\,\text{ms}^+)=-۱/۴۸\times۹\simeq-۱۳/۳\text{v}$$

۳۶ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه در زمان‌های منفی کلید بسته بوده و در سلف به حالت دائمی خود رسیده است (اتصال کوتاه)، از قورباغه جریانی عبور نمی‌کند.

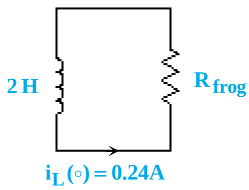
$t=۰^-$:



$$i_L(۰^-)=\frac{۱۲}{۵۰}=۰/۲۴\text{A}$$

حال بعد از باز شدن کلید مدار به صورت مقابل خواهد بود:

$t>۰$:



$$\xrightarrow{i_L(\infty)=۰} i_L(t)=i_L(۰)e^{-\frac{R}{L}t}=۰/۲۴e^{-\frac{R}{۲}t}\text{A}$$

از طرفی داریم:

$$i_L(t=۵s)=۱۰\times۱۰^{-۳}\text{A} \quad \Rightarrow ۰/۲۴\times e^{-\frac{R_{frog}}{۲}\times۵}=۰/۰۱ \Rightarrow \frac{R_{frog}}{۲}\times۵=\text{Ln}\frac{۰/۲۴}{۰/۰۱} \Rightarrow R_{frog}\simeq۱/۳\Omega$$

فصل سوم

«مدارهای مرتبه دوم»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: پاسخ ضربه یک مدار RLC سری با فرض $C = ۲۴mF$ مفروض است. به ازای کدام مقدار L، حداکثر مقدار معادله پوش پاسخ ضربه برابر با ۶/۲۵ است؟ $(T_d = \frac{\pi}{۲})$

۱) ۱/۳H		۲) ۲/۳H		۳) ۰/۶۶H		۴) ۱/۶۶H

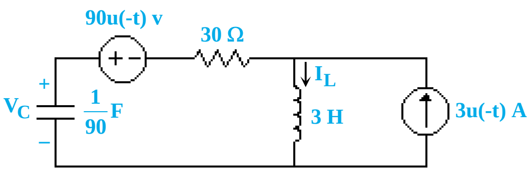
☑ **پاسخ :** گزینه «۴» مقدار حداکثر معادله پوش پاسخ ضربه مدار RLC سری به صورت زیر است:

$$f(t) = \frac{\omega_\circ^۲}{\omega_d} e^{-\alpha t} \Rightarrow f_{max} = \frac{\omega_\circ^۲}{\omega_d} = ۶/۲۵$$

$$\omega_d = \frac{۲\pi}{T_d} = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴\left(\frac{rad}{sec}\right) \Rightarrow \frac{\omega_\circ^۲}{۴} = ۶/۲۵ \Rightarrow \omega_\circ^۲ = ۲۵ \Rightarrow \omega_\circ = ۵\frac{rad}{sec}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{LC}} = ۵ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{L \times ۲۴ \times ۱۰^{-۳}}} = ۵ \Rightarrow L = ۱/۶۶\ H$$

مثال۲: در مدار زیر معادله $I_L(t)$ برای تمام زمان‌ها کدام است؟



۱) $[e^{-۵t}[۳\cos\sqrt{۵}t + ۳\sqrt{۵}\sin\sqrt{۵}t]]u(t)$

۲) $۳u(-t) + [e^{-۳t}[۳\cos\sqrt{۵}t - ۳\sqrt{۵}\sin\sqrt{۵}t]]u(t)$

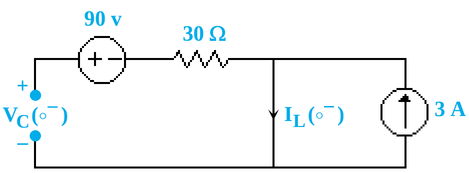
۳) $۳u(-t) + [e^{-۵t}[۳\cos\sqrt{۵}t + ۳\sqrt{۵}\sin\sqrt{۵}t]]u(t)$

۴) $[e^{-۳t}[۳\cos\sqrt{۵}t + ۳\sqrt{۵}\sin\sqrt{۵}t]]u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** با توجه به اینکه معادله $I_L(t)$ برای همه زمان‌ها خواسته شده است، مطابق با نکته گفته شده در قبل، ابتدا مقدار $I_L(t)$ را در $t = ۰^-$ محاسبه می‌کنیم و پس از تحلیل مدار و محاسبه معادله $I_L(t)$ در $t > ۰$ آن را در فرمول زیر قرار می‌دهیم.

[معادله $I(t)$ در $t > ۰$ $I_L(t) = I_L(۰^-)u(-t) + u(t)$]

$t = ۰^-$:



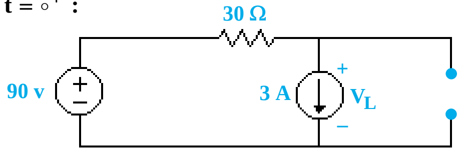
حال برای بدست آورن معادله $I_L(t)$، ابتدا مدار را در $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم.

$$I_L(۰^-) = ۳A = I_L(۰^+)$$

$$V_C(۰^-) = V_C(۰^+) = ۹۰v$$

برای بدست آوردن $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$، مدار در $t = ۰^+$ ترسیم و تحلیل می‌شود. با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

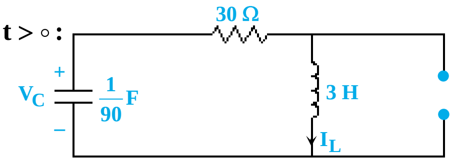
$t = ۰^+$:



$$V_L(۰^+) = ۹۰ - ۳ \times ۳۰ = ۰v \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt} = \frac{V_L(۰^+)}{L} = \frac{۰}{L} = ۰\frac{v}{sec}$$

در $t > ۰$، مدار به صورت RLC سری خواهد بود. حال داریم:

$t > ۰$:



$$\alpha = \frac{R}{۲L} = \frac{۳۰}{۲\times۳} = ۵ \quad و \quad \omega_\circ^۲ = \frac{۱}{LC} = \frac{۱}{۳\times\frac{۱}{۹۰}} = ۳۰ \Rightarrow \omega_\circ = \sqrt{۳۰}$$

با توجه به اینکه $\alpha < \omega_0$ است، مدار در حالت زیر میرا می‌باشد.

$$S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \Rightarrow S^2+10S+30=0 \Rightarrow \begin{cases} S_1=-5+j\sqrt{5} \\ S_2=-5-j\sqrt{5} \\ \omega_d=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow I_L(t)=e^{-5t}[A\cos\sqrt{5}t+B\sin\sqrt{5}t]$$

حال با چک کردن شرایط اولیه برای $I_L(t)$ داریم:

$$I_L(0^+)=3=e^0[A\cos 0+B\sin 0] \Rightarrow A=3$$

با مشتق‌گیری از فرم جواب داریم:

$$\text{(I)}\quad \frac{dI_L(t)}{dt}=-5e^{-5t}[A\cos\sqrt{5}t+B\sin\sqrt{5}t]+e^{-5t}[-A\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t+\sqrt{5}B\cos\sqrt{5}t]$$

$$\text{(II)}\quad \frac{dI_L(0^+)}{dt}=0=-5[A+0]+[-A\sqrt{5}\times 0+B\sqrt{5}] \Rightarrow -5\times 3+B\sqrt{5}=0 \Rightarrow B=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow I_L(t)=[3\cos\sqrt{5}t+3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t]e^{-5t}$$

در صورتی که بخواهیم معادله $I_L(t)$ برای همه زمان‌ها صادق باشد، داریم:

$$I_L(t)=I_L(0^-)u(-t)+[[3\cos\sqrt{5}t+3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t]e^{-5t}]u(t) \Rightarrow \mathbf{I_L(t)=3u(-t)+[e^{-5t}[3\cos\sqrt{5}t+3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t]]u(t)}$$

روش دوم: با توجه به مقدار بدست آمده برای $I_L(0^-)$، قسمت اول معادله جواب باید شامل $3u(-t)$ باشد، لذا گزینه‌های (۱) و (۴) غلط هستند.

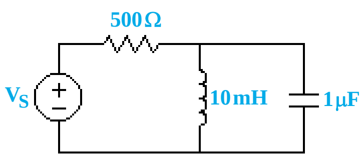
در ادامه با بررسی گزینه‌های (۳) و (۲) در $t=0^+$ و مقایسه آن با $I_L(0^+)=3\,A$، دیده می‌شود که هر دو گزینه در $I_L(0^+)=3A$ صادق هستند، لذا مقدار $\frac{dI_L(0^+)}{dt}$ را در گزینه‌های (۲) و (۳) چک می‌کنیم. حال اگر از معادله مربوط به گزینه (۲) در $t>0$ مشتق بگیریم، داریم:

$$X(t)=e^{-3t}[3\cos\sqrt{5}\,t-3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}\,t] \Rightarrow \frac{dX(t)}{dt}=-3e^{-3t}[3\cos\sqrt{5}\,t-3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}\,t]+e^{-3t}[-3\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t-3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\cos\sqrt{5}\,t]$$

$$\frac{dX(0^+)}{dt}=-3\times[3-0]+1\times[-3\times 5]\neq 0$$

با توجه به اینکه $\frac{dX(0^+)}{dt}$ در حل سؤال مقدار صفر دارد، اگر $\frac{dX(0^+)}{dt}$ را در گزینه (۳) محاسبه کنید، خواهید دید که مقدار آن مساوی صفر خواهد بود.

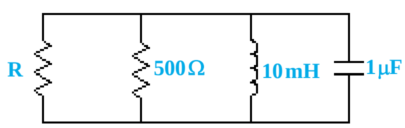
مثال ۳: **در مدار شکل زیر برای این که مدار در حالت «میرایی بحرانی» کار کند، باید با سلف یک مقاومت چند اهمی موازی کنیم؟**



۱) $\frac{1000}{9}$ ۲) $\frac{750}{9}$

۳) $\frac{250}{9}$ ۴) $\frac{500}{9}$

پاسخ: گزینه «۴» برای کارکرد مدار در حالت میرایی بحرانی، باید $\alpha=\omega_0$ باشد. برای محاسبه α و ω_0، منبع V_S را اتصال کوتاه می‌کنیم و موازی با مقاومت 500Ω، یک مقاومت به نام R نیز قرار می‌دهیم.

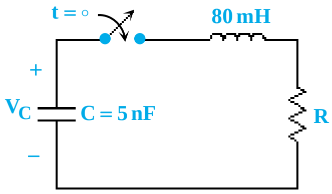


$$\alpha=\frac{1}{2R_{eq}C} \quad , \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha=\omega_0 \Rightarrow \frac{1}{2R_{eq}\times 1\times 10^{-6}}=\frac{1}{\sqrt{1\times 10^{-6}\times 10\times 10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2R_{eq}\times 10^{-6}}=\frac{1}{10^{-4}} \Rightarrow R_{eq}=50\Omega \Rightarrow R\|500\Omega=50\Omega \Rightarrow \frac{R\times 500}{R+500}=50 \Rightarrow \mathbf{R=\frac{500}{9}\Omega}$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر مقاومت R برای رسیدن به پاسخ میرایی بحرانی تنظیم شده است. اندازه R چند کیلو اهم است؟



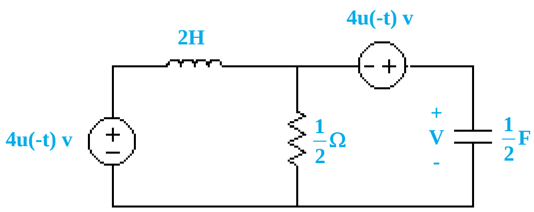
۱) ۱۶
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در حالت میرای بحرانی باید $\alpha = \omega_\circ$ باشد. حال داریم:

$$\alpha = \omega_\circ \xrightarrow{\text{سری RLC}} \frac{R}{۲L} = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{R}{۲\times۸۰\times۱۰^{-۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۵\times۱۰^{-۹}\times۸۰\times۱۰^{-۳}}} \Rightarrow \frac{R}{۱۶\times۱۰^{-۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۴\times۱۰^{-۱۰}}}$$

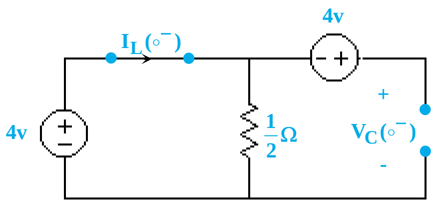
$$\Rightarrow R = \frac{۱۶\times۱۰^{-۲}}{۲\times۱۰^{-۵}} = ۸\times۱۰^{۳} = ۸k\Omega$$

مثال ۵: در مدار زیر مقدار $\frac{dV(t)}{dt}$ در زمان $t = ۰^+$ برحسب ولت بر ثانیه کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۸
۳) −۱۶
۴) −۸

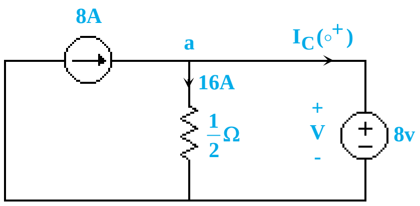
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت منابع ولتاژ در مدار وجود دارند و برابر با ۴ ولت هستند. حال سلف را با اتصال کوتاه و خازن را با مدار باز مدل می‌کنیم.



$$V_C(۰^-) = ۴ + ۴ = ۸v$$

$$I_L(۰^-) = \frac{۴}{۰/۵} = ۸A$$

برای ادامه حل، مدار را در $t = ۰^+$ تحلیل می‌کنیم. با گذاشتن مدار معادل‌های سلف و خازن در $t = ۰^+$ داریم:



$$I_C(۰^+) = -۱۶ + ۸ = -۸A$$

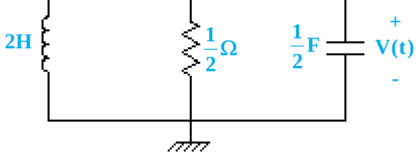
$$\frac{dV_C(۰^+)}{dt} = \frac{۱}{C}\times I_C(۰^+) = \frac{-۸}{\frac{۱}{۲}} = -۱۶\left(\frac{v}{sec}\right) \Rightarrow \frac{dV(۰^+)}{dt} = -۱۶\left(\frac{v}{sec}\right)$$

مثال ۶: در مدار مثال قبل معادله $V(t)$ کدام است؟

۱) $۴(e^{-۱/۲t} + e^{-۰/۸t})$
۲) $۲(e^{-۳/۷۳t} + e^{-۰/۲۶t})$
۳) $۸(e^{-۱/۲t} + e^{-۰/۸t})$
۴) $۴(e^{-۳/۷۳t} + e^{-۰/۲۶t})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: با توجه به اطلاعات بدست آمده در مثال قبل، مدار را در $t > ۰$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان منابع ولتاژ در مدار صفر بوده و مدار فقط با شرایط اولیه تحلیل می‌شود. با توجه به معادله دیفرانسیل مربوط به مدار RLC موازی داریم:



$$\frac{d^{۲}V_C(t)}{dt^{۲}} + ۲\alpha\frac{dV_C(t)}{dt} + \omega_\circ^{۲}V_C(t) = ۰$$

$$۲\alpha=\frac{۱}{RC}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۴\;,\;\;\omega_۰^۲=\frac{۱}{LC}=\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۲}}=۱\;\Rightarrow\;S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲=۰$$

$$\Rightarrow\;S^۲+۴S+۱=۰\;\Rightarrow\;\begin{cases}S_۱=-۳/۷۳\\S_۲=-۰/۲۶\end{cases}\;\Rightarrow\;\text{(حالت فوق میرا)}$$

با توجه به فرکانس‌های طبیعی بدست آمده، معادله $V_C(t)$ به صورت مقابل است: $V_C(t)=Ae^{-۳/۷۳t}+Be^{-۰/۲۶t}$

برای بدست آوردن ضرایب B و A از شرایط اولیه استفاده می‌شود.

$$V_C(t)=V(t)\;\Rightarrow\;V_C(۰^+)=V(۰^+)=۸v\;\Rightarrow\;V_C(۰^+)=۸=Ae^۰+Be^۰=A+B\;\Rightarrow\;A+B=۸\qquad(۱)$$

حال با مشتق‌گیری از معادله $V(t)$، $\frac{dV(۰^+)}{dt}$ را بدست آورده و آن را برابر مقدار محاسبه شده در مثال قبل قرار می‌دهیم.

$$\frac{dV(t)}{dt}=-۳/۷۳Ae^{-۳/۷۳t}+(-۰/۲۶B)e^{-۰/۲۶t}$$

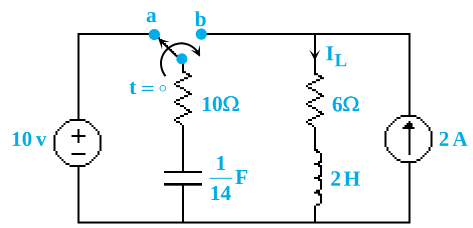
$$\frac{dV(۰^+)}{dt}=-۳/۷۳A+(-۰/۲۶B)=-۱۶(\frac{A}{sec})\;\Rightarrow\;-۳/۷۳A-۰/۲۶B=-۱۶\qquad(۲)$$

با حل دستگاه تشکیل شده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}A+B=۸\\-۳/۷۳A-۰/۲۶B=-۱۶\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}A=۴\\B=۴\end{cases}\Rightarrow\;V_C(t)=V(t)=۴e^{-۳/۷۳t}+۴e^{-۰/۲۶t}=\mathbf{۴(e^{-۳/۷۳t}+e^{-۰/۲۶t})}$$

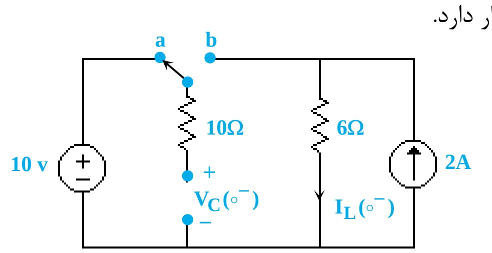
روش دوم: با چک کردن مقدار $V_C(۰^+)=۸v$ در گزینه‌ها، دیده می‌شود که فقط گزینه‌های (۱) و (۴) می‌تواند جواب باشد. با توجه به اینکه مقدار $\frac{dV_C(۰^+)}{dt}=-۱۶(\frac{v}{sec})$ است، از گزینه‌های (۱) و (۴) مشتق گرفته و مقدار آنها را در $t=۰^+$ با $\frac{dV_C(۰^+)}{dt}=-۱۶(\frac{v}{sec})$ مقایسه می‌کنیم و در این حالت فقط گزینه (۴) صحیح است. با دانستن ریشه‌های معادله‌ی مشخصه هم می‌شد گزینه‌ی (۴) را انتخاب کرد.

مثال ۷: **در مدار زیر مقدار $\frac{dI_L(t)}{dt}$ با تغییر وضعیت کلید از a به b در $t=۰^+$ برحسب آمپر بر ثانیه کدام است؟**



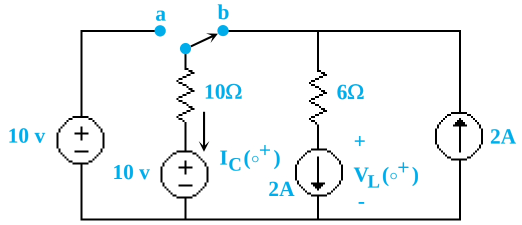
۱) ۱-
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۲-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید در وضعیت a قرار دارد.



$$V_C(۰^-)=۱۰v$$
$$I_L(۰^-)=۲A$$

در ادامه حل، مدار را در $t=۰^+$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید در وضعیت b قرار دارد.



$$V_C(۰^+)=V_C(۰^-)=۱۰v$$
$$I_L(۰^+)=I_L(۰^-)=۲A$$
$$I_C(۰^+)=۲-۲=۰A$$

برای بدست آوردن $V_L(۰^+)$ در حلقه وسطی مدار KVL زده می‌شود.

$$-۱۰-۱۰\times I_C(۰^+)+۶\times I_L(۰^+)+V_L(۰^+)=۰ \Rightarrow -۱۰-۱۰\times ۰+۶\times ۲+V_L(۰^+)=۰ \Rightarrow V_L(۰^+)=-۲V$$

$$\Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=\frac{V_L(۰^+)}{L}=\frac{-۲}{۲}=-۱(\frac{A}{sec})$$

مثال ۸: در مدار مثال قبل معادله جریان $I_L(t)$ کدام است؟

۱) $۲+۱/۶e^{-t}+۱/۶e^{-۷t}$

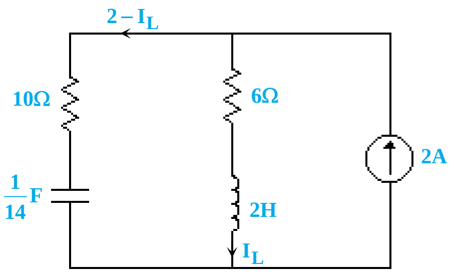
۲) $۲-\frac{۱}{۶}e^{-t}+\frac{۱}{۶}e^{-۷t}$

۳) $۲+\frac{۱}{۷}e^{-t}-\frac{۱}{۷}e^{-۳t}$

۴) $۲+۱/۶e^{-t}+۱/۶e^{-۳t}$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: ابتدا مدار را در $t>۰$ ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:



$$۶I_L+۲\frac{dI_L}{dt}-\frac{۱}{\frac{۱}{۱۴}}\int_{۰^-}^{t}(۲-I_L)dt-V_C(۰^-)-۱۰(۲-I_L)=۰$$

با مشتق‌گیری از معادله بالا داریم:

$$۶\frac{dI_L}{dt}+۲\frac{d^۲I_L}{dt^۲}-۱۴(۲-I_L)+۱۰\frac{dI_L}{dt}=۰ \Rightarrow ۲\frac{d^۲I_L}{dt^۲}+۱۶\frac{dI_L}{dt}+۱۴I_L=۲۸$$

$$\Rightarrow \frac{d^۲I_L}{dt^۲}+۸\frac{dI_L}{dt}+۷I_L=۱۴$$

با توجه به معادله دیفرانسیل بدست آمده، داریم: $S^۲+۸S+۷=۰ \Rightarrow \begin{cases}S_۱=-۱\\ S_۲=-۷\end{cases} \Rightarrow$ (حالت فوق میرا)

معادله دیفرانسیل بدست آمده دارای یک جواب اختصاصی و یک جواب عمومی می‌باشد. دقت شود با توجه به اینکه ورودی یک عدد ثابت است، پاسخ اختصاصی نیز از جنس ورودی در نظر گرفته شده است. $I_L(t)_h=Ae^{-t}+Be^{-۷t}\ ,\ I_L(t)_p=k$

برای بدست آوردن پاسخ اختصاصی، عدد k را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم: $\frac{d^۲k}{dt^۲}+۸\frac{dk}{dt}+۷k=۱۴ \Rightarrow ۰+۰+۷k=۱۴ \Rightarrow k=۲$

لذا پاسخ کامل $I_L(t)$ بصورت روبرو است: $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}=-۱(\frac{A}{sec})$ و $I_L(۰^+)=۲A$ و $I_L(t)=۲+Ae^{-t}+Be^{-۷t}$

با استفاده از شرایط اولیه که در مثال قبل بدست آمد، ضرایب B و A را بدست می‌آوریم.

$$I_L(۰^+)=A+B+۲=۲ \Rightarrow A+B=۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{dI_L(t)}{dt}=-Ae^{-t}-۷Be^{-۷t} \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=-A-۷B=-۱ \qquad (۲)$$

با حل دستگاه تشکیل شده از معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}A+B=۰\\ -A-۷B=-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\frac{۱}{۶}\\ B=\frac{۱}{۶}\end{cases} \Rightarrow I_L(t)=۲-\frac{۱}{۶}e^{-t}+\frac{۱}{۶}e^{-۷t}$$

روش دوم: با توجه به اینکه مقدار $I_L(۰^+)=۲A$ است، مقدار $I_L(۰^+)$ را در گزینه‌ها چک می‌کنیم. دیده می‌شود که فقط گزینه‌های (۲) و (۳) می‌تواند جواب باشد. حال با توجه به اینکه مقدار $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ برابر ۱− آمپر بر ثانیه است، مقدار عبارت مذکور را در مشتق گزینه‌های (۲) و (۳) چک می‌کنیم. حال داریم:

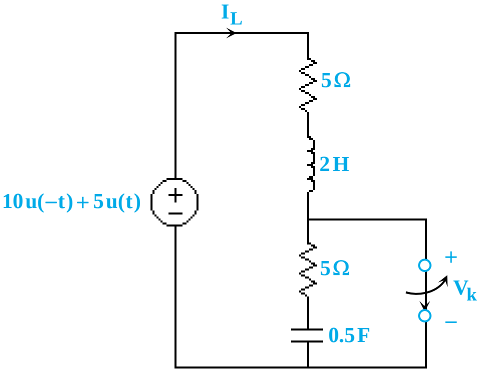
$$\text{گزینه (۳)} \Rightarrow \frac{dI_L(t)}{dt}=-\frac{۱}{۷}e^{-t}+\frac{۳}{۷}e^{-۳t} \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=-\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۷}=\frac{۲}{۷}(\frac{A}{sec})\neq -۱(\frac{A}{sec})$$

با توجه به اینکه مقدار محاسبه شده برای $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ در گزینه (۳) با مقدار محاسبه شده در سؤال متفاوت است، این گزینه صحیح نمی‌باشد. در ادامه گزینه (۲) را چک می‌کنیم.

$$\text{گزینه (۲)} \Rightarrow \frac{dI_L(t)}{dt}=\frac{۱}{۶}e^{-t}-\frac{۷}{۶}e^{-۷t} \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=\frac{۱}{۶}-\frac{۷}{۶}=-۱(\frac{A}{sec})$$

با توجه به اینکه مقدار $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ در گزینه (۲) صادق است، این گزینه پاسخ سؤال است.

مثال ۹: در مدار مرتبه دوم زیر مقدار $\frac{dV_k(\circ^+)}{dt}$ بر حسب $\frac{V}{sec}$ مطابق با کدام گزینه است؟ (کلید در $t=\circ$ باز می‌شود)



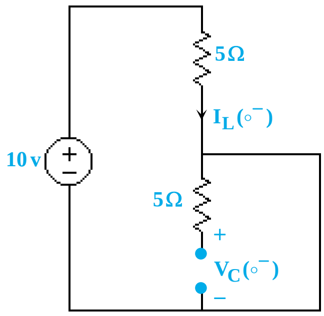
۱) ۷/۵

۲) −۷/۵

۳) ۳۳/۵

۴) −۳۳/۵

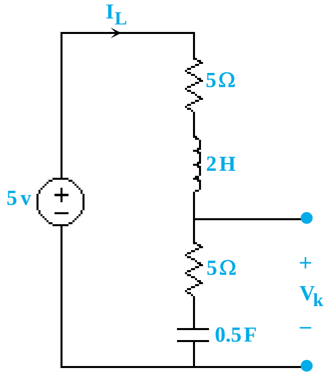
پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مدار را در $t=\circ^-$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت منبع ولتاژ برابر با ۱۰ ولت است.



$$I_L(\circ^-)=\frac{۱۰}{۵}=۲A$$

$$V_C(\circ^-)=\circ$$

حال مدار را در $t>\circ$ ترسیم می‌کنیم. در این حالت منبع ولتاژ برابر با ۵ ولت است. با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



$$۵=۵I_L+۲\frac{dI_L}{dt}+۵I_L+V_C$$

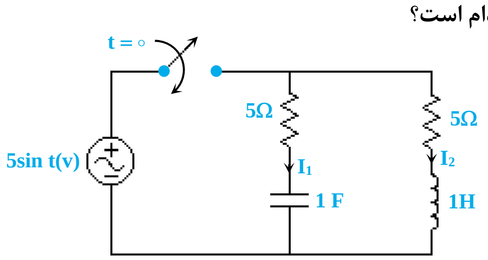
$$۵=۵I_L(\circ^+)+۲\frac{dI_L(\circ^+)}{dt}+۵I_L(\circ^+)+V_C(\circ^+)$$

$$\Rightarrow\ ۵=۵\times۲+۲\frac{dI_L(\circ^+)}{dt}+۵\times۲+\circ\ \Rightarrow\ \frac{dI_L(\circ^+)}{dt}=-\frac{۱۵}{۲}$$

$$V_k=۵I_L+\frac{۱}{C}\int I_L dt+V_C(\circ^+)\Rightarrow\frac{dV_k}{dt}=۵\frac{dI_L}{dt}+\frac{I_L}{C}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dV_k(\circ^+)}{dt}=۵\frac{dI_L(\circ^+)}{dt}+\frac{I_L(\circ^+)}{\circ/۵}=۵\times-\frac{۱۵}{۲}+\frac{۲}{\circ/۵}=-۳۳/۵\frac{v}{sec}$$

مثال ۱۰: در مدار زیر با کلیدزنی در $t=\circ$ مقدار $\frac{dI_۱(\circ^+)}{dt}+\frac{dI_۲(\circ^+)}{dt}$ برحسب آمپر بر ثانیه کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به باز بودن کلید در $t=\circ^-$، شرایط اولیه در مدار برابر صفر است. $(I_L(\circ^-)=\circ$ و $V_C(\circ^-)=\circ)$ حال با نوشتن KVL

در حلقه شامل منبع ولتاژ و مقاومت و خازن داریم:

$$۵I_۱+\frac{۱}{۱}\int I_۱dt=۵\sin t$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه بالا، داریم:

$$۵\frac{dI_۱}{dt}+I_۱=۵\cos t\ \Rightarrow\ \frac{۵dI_۱(\circ^+)}{dt}+I_۱(\circ^+)=۵\cos\circ$$

با توجه به صفر بودن منبع ولتاژ در $t=\circ^+$ و صفر بودن شرایط اولیه، لذا $I_۲(\circ^+)=I_۱(\circ^+)=\circ$ خواهد بود. حال داریم:

$$۵\frac{dI_۱(۰^+)}{dt}+۰=۵ \Rightarrow \frac{dI_۱(۰^+)}{dt}=۱(\frac{A}{sec})$$

در ادامه حل، یک KVL در حلقه شامل منبع ولتاژ و مقاومت و سلف زده می‌شود. لذا داریم:

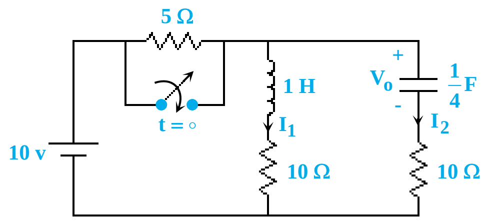
$$۵I_۲+۱\frac{dI_۲}{dt}=۵\sin t \Rightarrow ۵I_۲(۰^+)+\frac{dI_۲(۰^+)}{dt}=۵\sin ۰ \Rightarrow \frac{dI_۲(۰^+)}{dt}=۰ \Rightarrow \frac{dI_۲(۰^+)}{dt}+\frac{dI_۱(۰^+)}{dt}=۱(\frac{A}{sec})$$

توضیح: $I_۲(۰^+)=I_۲(۰^-)=۰$

اما برای $I_۱(۰^+)$:

$$V_S(t)=۵I_۱(t)+V_C(t) \xrightarrow{t=۰^+} \underbrace{\cancel{V_S(۰^+)}}_{۰}=۵I_۱(۰^+)+\underbrace{\cancel{V_C(۰^+)}}_{۰} \Rightarrow I_۱(۰^+)=۰$$

مثال ۱۱: در مدار زیر عبارت $\frac{d^۲I_۱(۰^+)}{dt^۲}+\frac{d^۲I_۲(۰^+)}{dt^۲}$ بر حسب $\frac{A^۲}{sec^۲}$ کدام است؟



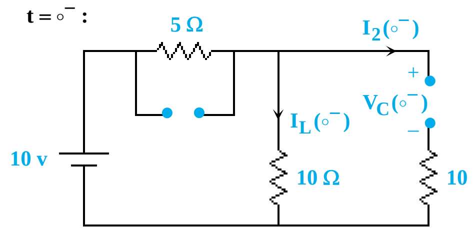
۱) $-۳۶/۲۸$

۲) $-۲۸/۲۸$

۳) $-۳۰/۲۸$

۴) $-۳۳/۲۸$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. بنابراین خازن را با مدار باز و سلف را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم.



$$I_L(۰^-)=I_L(۰^+)=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}A=I_۱(۰^+)$$

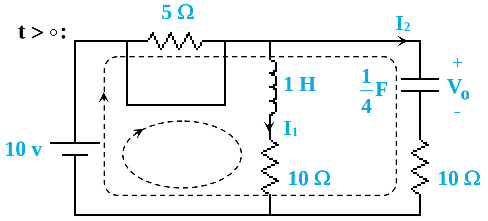
$$V_C(۰^-)=V_C(۰^+)=\frac{۱۰\times۱۰}{۱۰+۵}=\frac{۲۰}{۳}v=V_o(۰^+)$$

در ادامه حل، مدار در $t>۰$ تحلیل می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$۱۰I_۱+\frac{dI_۱}{dt}=۱۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه بزرگ داریم:

$$V_o+۱۰I_۲=۱۰ \qquad (۲)$$



با جایگذاری زمان $t=۰$ در معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$(۲) \Rightarrow V_o(۰^+)+۱۰I_۲(۰^+)=۱۰ \Rightarrow \frac{۲۰}{۳}+۱۰I_۲(۰^+)=۱۰ \Rightarrow I_۲(۰^+)=\frac{۱}{۳}A$$

$$(۱) \Rightarrow ۱۰I_۱(۰^+)+\frac{dI_۱}{dt}(۰^+)=۱۰ \Rightarrow \frac{dI_۱(۰^+)}{dt}=۱۰-۱۰\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۳}(\frac{A}{sec})$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۲) داریم:

$$\frac{dV_o}{dt}+۱۰\frac{dI_۲}{dt}=۰ \quad (۳) \qquad , \qquad \frac{dV_o}{dt}=\frac{dV_C}{dt}=\frac{I_C}{C}=\frac{I_۲}{C}=۴I_۲ \quad (۴)$$

$$(۳),(۴) \Rightarrow ۱۰\frac{dI_۲}{dt}+۴I_۲=۰ \quad (۵) \Rightarrow ۱۰\frac{dI_۲(۰^+)}{dt}+۴I_۲(۰^+)=۰ \Rightarrow \frac{۱۰dI_۲(۰^+)}{dt}+۴\times\frac{۱}{۳}=۰ \Rightarrow \frac{dI_۲(۰^+)}{dt}=-\frac{۴}{۳۰}(\frac{A}{sec})$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۵) داریم:

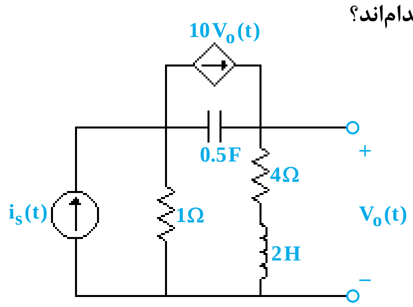
$$۱۰\frac{d^۲I_۲}{dt^۲}+۴\frac{dI_۲}{dt}=۰ \Rightarrow ۱۰\frac{d^۲I_۲(۰^+)}{dt^۲}+۴\frac{dI_۲(۰^+)}{dt}=۰ \Rightarrow ۱۰\frac{d^۲I_۲(۰^+)}{dt^۲}+۴\times(-\frac{۴}{۳۰})=۰ \Rightarrow \frac{d^۲I_۲(۰^+)}{dt^۲}=\frac{۱۶}{۳۰۰}(\frac{A^۲}{sec^۲})$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱) و گذاشتن عدد صفر به جای t داریم:

$$۱۰\frac{dI_۱(۰^+)}{dt}+\frac{d^۲I_۱(۰^+)}{dt^۲}=۰ \Rightarrow ۱۰\times\frac{۱۰}{۳}+\frac{d^۲I_۱(۰^+)}{dt^۲}=۰ \Rightarrow \frac{d^۲I_۱(۰^+)}{dt^۲}=-\frac{۱۰۰}{۳}(\frac{A^۲}{sec^۲})$$

$$\Rightarrow \frac{d^۲I_۱(۰^+)}{dt^۲}+\frac{d^۲I_۲(۰^+)}{dt^۲}=-\frac{۱۰۰}{۳}+\frac{۱۶}{۳۰۰}=-۳۳/۲۸(\frac{A^۲}{sec^۲})$$

مثال ۱۲: در مدار شکل زیر مقادیر $\frac{dV_o}{dt}(\circ^+)$ و $\frac{d^۲V_o}{dt^۲}(\circ^+)$ برای ورودی پله به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟



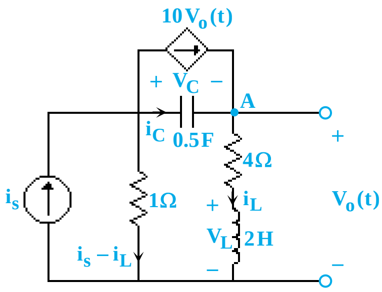
۱) $-\frac{۳۹}{۲}$ و ۱۰

۲) $\frac{۳۹}{۲}$ و $۳۹۰-\frac{۳۹}{۴}$

۳) $-\frac{۳۹}{۲}$ و $۳۹۰-\frac{۳۹}{۴}$

۴) $-\frac{۳۹}{۲}$ و -۱۰

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$KVL: V_C + V_o - ۱\times(i_S - i_L) = \circ \Rightarrow V_o = i_S - V_C - i_L \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$V_o = ۴i_L + ۲\dot{i}_L \xrightarrow{(۱)} ۴i_L + ۲\dot{i}_L = i_S - V_C - i_L \Rightarrow \dot{i}_L = -\frac{V_C}{۲} - \frac{۵}{۲}i_L + \frac{i_S}{۲} \qquad (۲)$$

$$KCL(A): ۱\circ V_o + i_C = i_L \xrightarrow{(۱)} ۱\circ i_S - ۱\circ V_C - ۱\circ i_L + \circ/۵\dot{V}_C = i_L$$

$$\Rightarrow \dot{V}_C = ۲\circ V_C + ۲۲i_L - ۲\circ i_S \quad (۳)$$

با توجه به اینکه $V_C(\circ) = i_L(\circ) = \circ$، می‌توان نوشت:

$$(۲),(۳) \Rightarrow \begin{cases} \dot{i}_L(\circ^+) = \frac{۱}{۲}i_S(\circ^+) = \frac{۱}{۲}\frac{A}{sec} \\ \dot{V}_C(\circ^+) = -۲\circ i_S(\circ^+) = -۲\circ\frac{V}{sec} \end{cases}$$

از طرفی با مشتق‌گیری از روابط (۲) و (۳) داریم:

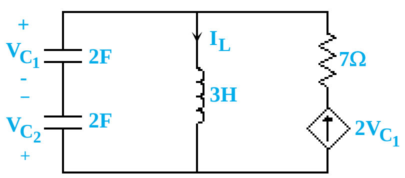
$$\begin{cases} \ddot{i}_L = -\frac{\dot{V}_C}{۲} - \frac{۵}{۲}\dot{i}_L + \frac{\dot{i}_S}{۲} \\ \ddot{V}_C = ۲\circ\dot{V}_C + ۲۲\dot{i}_L - ۲\circ\dot{i}_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{i}_L(\circ^+) = -\frac{۱}{۲}\times(-۲\circ) - \frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\times\circ = ۹ - \frac{۱}{۴} \\ \ddot{V}_C(\circ^+) = ۲\circ\times(-۲\circ) + ۲۲\times\frac{۱}{۲} - ۲\circ\times\circ = -۳۸۹ \end{cases}$$

حال از رابطه (۱) داریم:

$$\dot{V}_o(\circ^+) = \dot{i}_S(\circ^+) - \dot{V}_C(\circ^+) - \dot{i}_L(\circ^+) = \circ + ۲\circ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳۹}{۲}\frac{V}{sec}$$

$$\ddot{V}_o(\circ^+) = \ddot{i}_S(\circ^+) - \ddot{V}_C(\circ^+) - \ddot{i}_L(\circ^+) = \circ + ۳۸۹ - ۹ + \frac{۱}{۴} = ۳۹\circ - \frac{۳۹}{۴}\left(\frac{V}{sec}\right)^۲$$

مثال ۱۳: در مدار زیر شرایط اولیه شامل $I_L(\circ^-)$، $V_{C_۲}(\circ^-)$ و $V_{C_۱}(\circ^-)$ کدام باشد تا هیچ متغیر شبکه تحریک نشود؟



۱) $۲v$ ، $-۲v$ ، $۴A$

۲) $۱v$ ، $-۱v$ ، $۲A$

۳) $۱v$ ، $۱v$ ، $-۲A$

۴) $۲v$ ، $۲v$ ، $۴A$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه یک متغیر شبکه تحریک نشود، لازم است که مشتق اول متغیر مذکور صفر باشد. لذا باید داشته باشیم:

$$\frac{dV_{C_۱}(t)}{dt} = \frac{dV_{C_۲}(t)}{dt} = \frac{dI_L(t)}{dt} = \circ$$

حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار، داریم:

$$L\frac{dI_L}{dt} = V_{C_۱} - V_{C_۲} \quad , \quad \frac{dI_L}{dt} = \circ \Rightarrow V_{C_۱} - V_{C_۲} = \circ \Rightarrow V_{C_۱} = V_{C_۲} \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره بالای مدار، داریم:

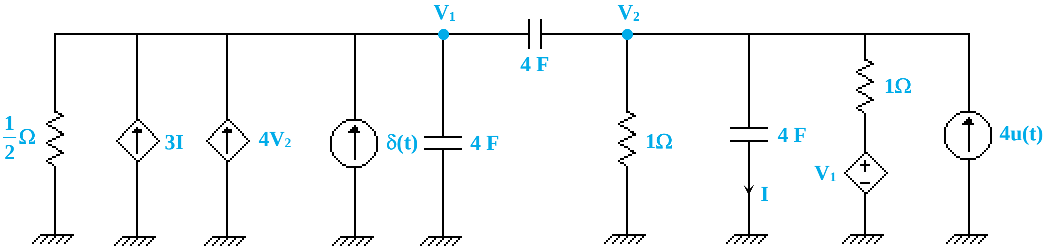
$$۲\frac{dV_{C_۱}}{dt} + I_L = ۲V_{C_۱} \quad , \quad \frac{dV_{C_۱}}{dt} = \circ \Rightarrow I_L = ۲V_{C_۱} \Rightarrow I_L(t) = ۲V_{C_۱}(t) \qquad (۲)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۱) و (۲) در $t = \circ^-$ داریم:

$$V_{C_۱}(\circ^-) = V_{C_۲}(\circ^-) = \frac{۱}{۲}I_L(\circ^-)$$

شرایط اولیه موجود در گزینه‌ها باید در روابط بالا صادق باشد. با چک کردن گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۱۴: در مدار زیر مقدار $V_۲(t)$ کدام است؟



۱) $۲-e^{-۲t}-۴e^{-t}u(t)$

۲) جوابی برای $V_۲$ وجود ندارد.

۳) $۲\delta(t)-۴e^{-۲t}u(t)$

۴) بینهایت جواب وجود دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این مثال، ابتدا در گره‌های مدار KCL می‌زنیم. حال داریم:

$$\begin{cases} ۴\dfrac{dV_۱}{dt}+\dfrac{V_۱}{۰/۵}+۴\dfrac{d(V_۱-V_۲)}{dt}=\delta(t)+۴V_۲+۳I \\ ۴\dfrac{dV_۲}{dt}+\dfrac{V_۲}{۱}+\dfrac{V_۲-V_۱}{۱}+۴\dfrac{d(V_۲-V_۱)}{dt}=۴u(t) \end{cases}$$

حال با ساده‌سازی روابط بالا و جایگذاری رابطه $D=\dfrac{d}{dt}$ و $I=۴\dfrac{dV_۲}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases} V_۱(۴D+۲+۴D)+V_۲(-۴D-۴-۱۲D)=\delta(t) \\ V_۱(-۱-۴D)+V_۲(۴D+۱+۱+۴D)=۴u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱(۸D+۲)+V_۲(-۱۶D-۴)=\delta(t) \\ V_۱(-۱-۴D)+V_۲(۸D+۲)=۴u(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۸D+۲ & -۱۶D-۴ \\ -۱-۴D & ۸D+۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta(t) \\ ۴u(t) \end{bmatrix}$$

با دقت در دترمینان ماتریس بدست آمده، داریم:

$$\det\begin{bmatrix} ۸D+۲ & -۱۶D-۴ \\ -۱-۴D & ۸D+۲ \end{bmatrix}=۰$$

با توجه به صفر شدن دترمینان ماتریس فوق، معادلات بالا جواب ندارد. دقت کنید که در این‌جا شرایط لازم برای این که مدار فوق دارای بی‌شمار جواب باشد، با توجه به تساوی ماتریسی بدست آمده، برقرار نیست؛ برای اثبات این مدعا کافی است به جای یکی از ستون‌های ماتریسی ضرایب، بردار منابع یعنی $\begin{bmatrix} \delta(t) \\ ۴u(t) \end{bmatrix}$ را قرار داده و دوباره دترمینان را محاسبه کنیم:

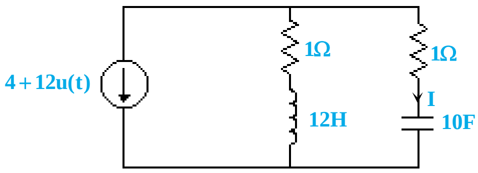
$$\begin{vmatrix} ۸D+۲ & \delta(t) \\ -۱-۴D & ۴u(t) \end{vmatrix}=۳۲Du(t)+۸u(t)+\delta(t)+۴D\delta(t)=۸u(t)+۳۳\delta(t)+۴D\delta(t)\neq ۰$$

(دقت کنید که $\delta(t)=Du(t)$.)

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل سوم

۱ـ در مدار زیر مقدار $\frac{dI(۰^+)}{dt}$ برحسب آمپر بر ثانیه کدام است؟



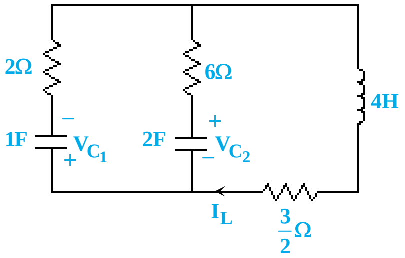
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲ـ در مدار زیر اگر $I_L(۰^-)=۲A$ و $V_{C_۱}(۰^-)=۳v$ و $V_{C_۲}(۰^-)=۱v$ باشد، مقدار $\frac{dI_L}{dt}(۰^+)$ برحسب آمپر بر ثانیه کدام است؟



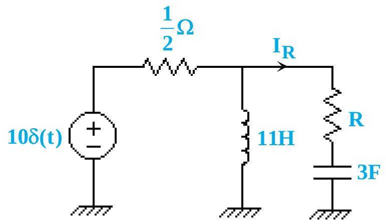
۱) ۱۵-

۲) ۱۵

۳) ۲

۴) ۲-

۳ـ در مدار زیر مقدار R برحسب اهم کدام باشد تا جریان گذرنده از R به صورت $۶\delta(t)$ باشد؟



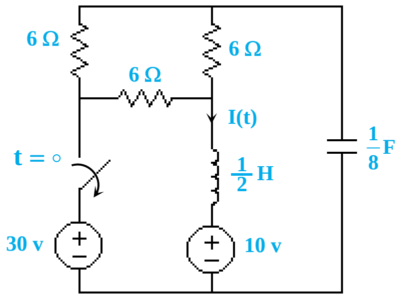
۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۶}{۷}$

۳) $\frac{۷}{۶}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

۴ـ در مدار مقابل معادله زمانی $I(t)$ برای $t>۰$ برحسب آمپر کدام است؟



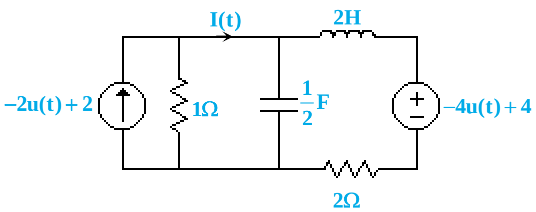
۱) $(۳-۱۰t)e^{-۴t}$

۲) $(۲-۲۰t)e^{-۴t}$

۳) $(۵-۴۰t)e^{-۴t}$

۴) $(۱۰-۵t)e^{-۴t}$

۵ـ در مدار زیر معادله جریان $I(t)$ برای کل زمان‌ها کدام است؟



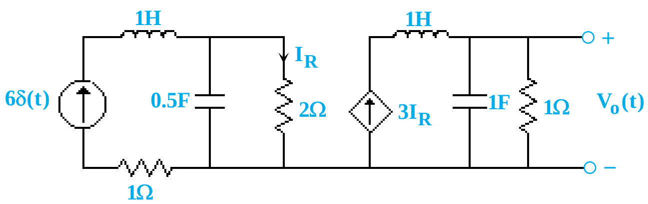
۱) $\frac{۲}{۳}u(t)-\frac{۲}{۳}-e^{-۱/۵t}[\frac{۸}{۳}\cos(۰/۸۶t)]u(t)$

۲) $-۲u(t)$

۳) $۲-۲u(t)-e^{-۱/۵t}[\frac{۸}{۳}\cos(۰/۸۶t)]u(t)$

۴) ۲

۶ـ پاسخ ضربه‌ی مدار زیر کدام است؟



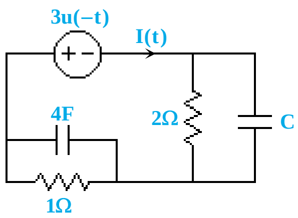
۱) $te^{-t}u(t)$

۲) $۹te^{-t}u(t)$

۳) $۱۸te^{-t}u(t)$

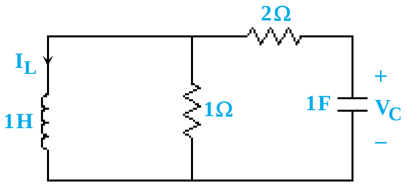
۴) $-۹te^{-t}u(t)$

۷ـ به ازای کدام مقدار C برحسب فاراد، معادله‌ی جریان $I(t)$ به صورت $4\delta(t)$ است؟



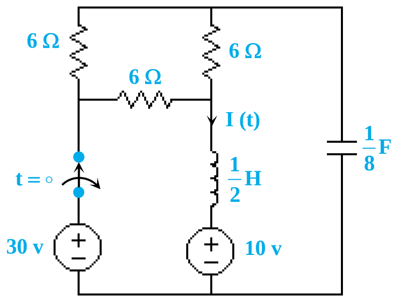
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۲

۸ـ در مدار زیر مقدار $\frac{dV_C(0^+)}{dt}$ برحسب ولت بر ثانیه کدام گزینه است؟ $(V_C(0^-) = I_L(0^-) = -1)$



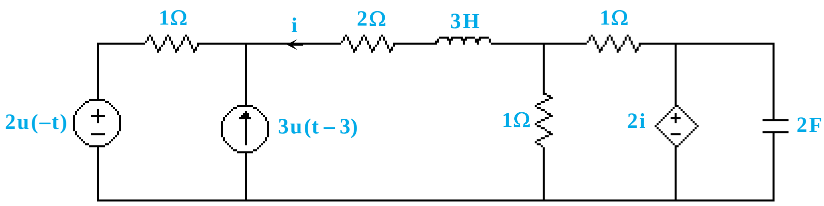
۱) ۱
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۱-

۹ـ در مدار مقابل معادله‌ی زمانی $I(t)$ به صورت کدام حالت خواهد بود؟



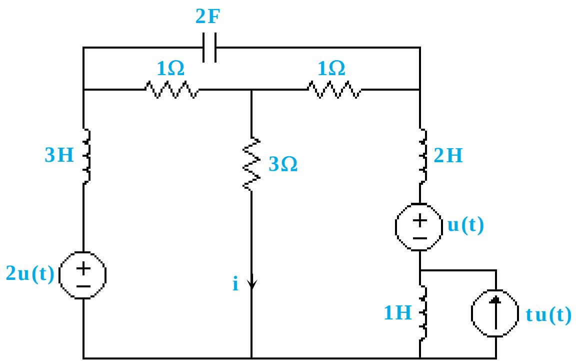
۱) حالت فوق میرا
۲) حالت زیر میرا
۳) حالت میرایی بحرانی
۴) حالت بی‌اتلاف

۱۰ـ در مدار شکل زیر، مقدار انرژی ذخیره شده در سلف پس از رسیدن مدار به حالت دائمی، چند ژول است؟



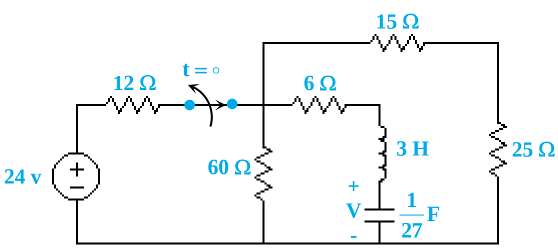
۱) ۱/۰۸
۲) ۲/۱۶
۳) ۰/۵۴
۴) ۱/۶۲

۱۱ـ در مدار مقابل، ثابت زمانی مربوط به جریان i کدام است؟



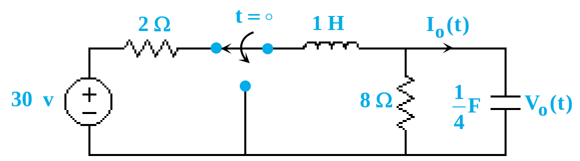
۱) $\frac{۳}{۷}$s
۲) $\frac{۷}{۳}$s
۳) $\frac{۳}{۴}$s
۴) $\frac{۴}{۳}$s

۱۲ـ در مدار زیر معادله $V(t)$ در زمان $t > 0$ کدام است؟



۱) $18e^{-t} - 2e^{-9t}$
۲) $12e^{-t} + 10e^{-9t}$
۳) $10e^{-9t} - 10e^{-t}$
۴) $17e^{-t} + 11e^{-9t}$

۱۳ـ در مدار زیر معادله $V_0(t)$ برای زمان‌های $t > 0$ کدام است؟



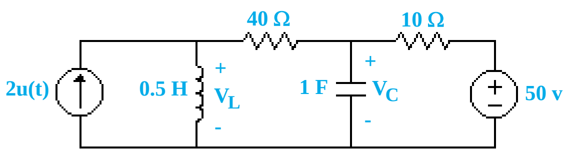
۱) $e^{-4t}[11\cos 1/9t + 10\sin 1/9t]$

۲) $e^{-t}[9\cos 1/9t - 2\sin 1/9t]$

۳) $e^{-4t}[16\cos(1/9t) - 3\sin(1/9t)]$

۴) $e^{-\frac{t}{4}}[24\cos 1/98t + 3\sin 1/9t]$

۱۴ـ در مدار زیر مقادیر $V_L(0^+)$ و $V_C(0^+)$ برحسب ولت کدام است؟



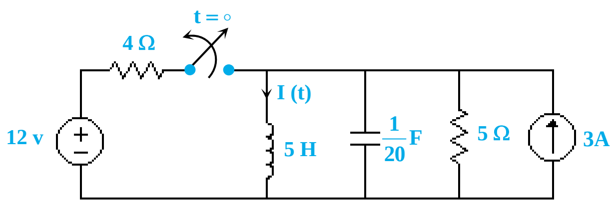
۱) ۸۰ و ۴۰

۲) ۲۰ و ۱۰

۳) ۹۰ و ۳۰

۴) ۵۰ و ۴۰

۱۵ـ معادله $I(t)$ در زمان‌های $t > 0$ کدام است؟



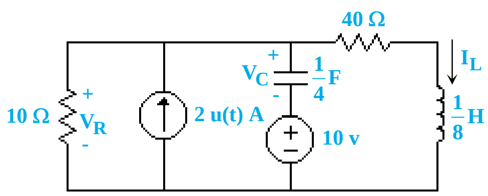
۱) $2 + (3 + 3t)e^{-2t}$

۲) $3 + (3 + 6t)e^{-2t}$

۳) $2 + (3 + 6t)e^{-t}$

۴) $1 + (3 + t)e^{-t}$

۱۶ـ در مدار شکل زیر مقدار $V_C(0^+) + V_R(0^+)$ برحسب ولت کدام است؟



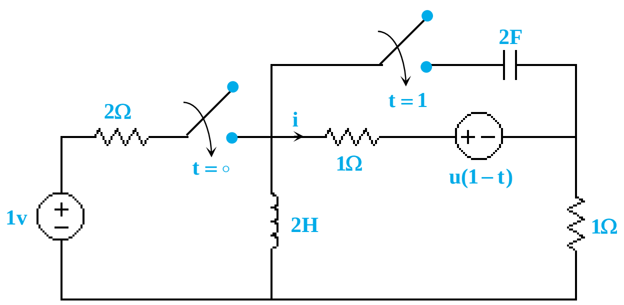
۱) ۲۰

۲) صفر

۳) −۱۰

۴) ۵۰

۱۷ـ مقدار $i_1'(0^+)$ و $i'(\infty)$ به ترتیب چند آمپر بر ثانیه است؟



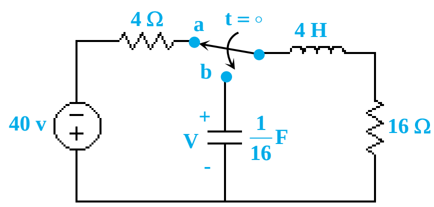
۱) ۰ و $-\frac{1}{8}$

۲) $\frac{1}{8}$ و ۰

۳) $-\frac{1}{8}$ و ۰

۴) ۰ و $\frac{1}{8}$

۱۸ـ در لحظات $t < 0$ کلید مدار شکل زیر در حالت a بوده و در لحظه $t = 0$ کلید را در حالت b قرار می‌دهیم. معادله‌ی زمانی $V(t)$ در زمان‌های مثبت کدام است؟



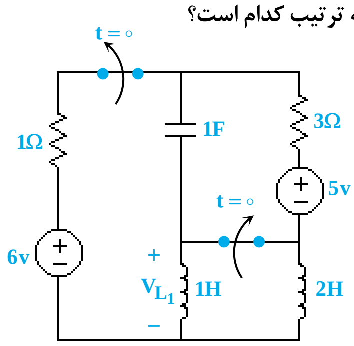
۱) $32e^{-2t}$

۲) $32te^{-2t}$

۳) te^{-2t}

۴) $40te^{-2t}$

۱۹ـ مدار زیر در $t<۰$ مدت زیادی کار کرده است. کلیدها در $t=۰$ باز می‌شوند. مقدار $V'_{L_1}(۰^+)$ و $V_{L_1}(\infty)$ به ترتیب کدام است؟



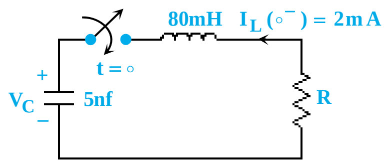
۱) $-\frac{۱}{۴}$ و ۰

۲) $\frac{۱}{۴}$ و ۰

۳) ۰ و $-\frac{۱}{۴}$

۴) ۰ و $\frac{۱}{۴}$

۲۰ـ اگر پاسخ مدار شکل زیر در حالت میرای بحرانی بوده و ولتاژ اولیه‌ی خازن صفر و جریان اولیه‌ی القاگر برابر $۲mA$ باشد، معادله‌ی ولتـاژ دو سـر خازن کدام است؟



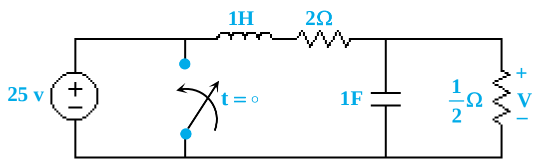
۱) $۴۰۰۰۰۰te^{-۵۰۰۰۰t}$

۲) $۴۰۰۰۰te^{-۵۰۰۰t}$

۳) $۴۰۰۰۰۰te^{-۵۰۰۰t}$

۴) $۴۰۰۰۰۰e^{-۵۰۰۰۰t}$

۲۱ـ در مدار شکل زیر معادله‌ی $V(t)$ برای $t>۰$ کدام است؟



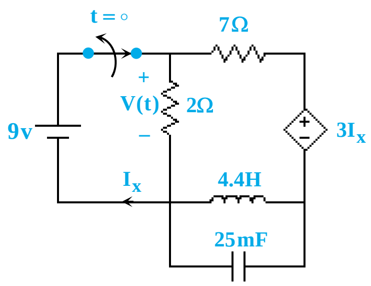
۱) $-۱۵e^{-۲t}-۱۰e^{-t}$

۲) $e^{-۲t}(۱۰\cos ۲t-۵\sin t)$

۳) $e^{-۲t}(-۵\cos t+۱۰\sin ۲t)$

۴) $e^{-۲t}(۵\cos t+۱۰\sin t)$

۲۲ـ در مدار زیر معادله $V(t)$ در $t>۰$ کدام است؟



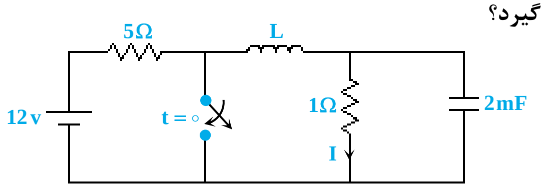
۱) $۱/۹۶e^{-۱/۵t}\sin(۳t)$

۲) $۱/۹۶e^{-۲/۲۲t}\sin(۲/۰۴t)$

۳) $۲/۴e^{-۲/۲۲t}\sin(۲/۰۴t)$

۴) $۲/۴e^{-۱/۵t}\sin(۳t)$

۲۳ـ در مدار زیر مقدار L برحسب میلی‌هانری کدام باشد تا مدار در حالت بحرانی قرار گیرد؟



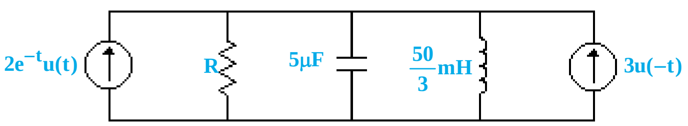
۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۸

۲۴ـ در مدار تست قبل، در چه زمانی برحسب میلی ثانیه مقدار $I(t)$ به ۲۰% مقدار اولیه خود می‌رسد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲۵ـ در مدار زیر کدام گزینه، مقدار R را برحسب اهم، برای حالت فوق میرا نمایش نمی‌دهد؟



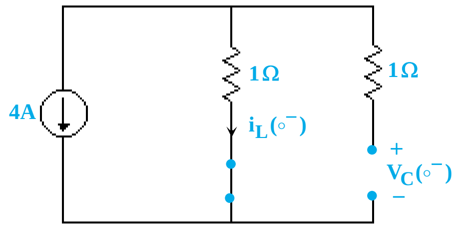
۱) ۳۰ ۲) ۱۰

۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخنامه تشریحی آزمون فصل سوم

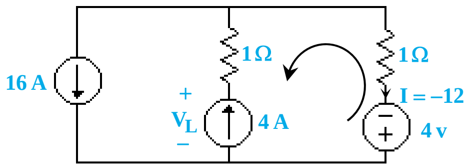
۱ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه‌ی سلف و خازن را به‌دست می‌آوریم:

$t = ۰^- :$



$$\Rightarrow \begin{cases} i_L(۰^-) = -۴A \\ V_C(۰^-) = -۴v \end{cases}$$

برای زمان $t = ۰^+$ داریم:



با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت راست داریم:

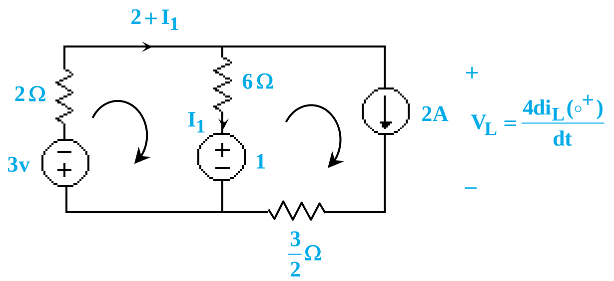
$$KVL: -۱\times۴ + v_L(۰^+) + ۴ + ۱۲ = ۰ \Rightarrow V_L(۰^+) = -۱۲$$

$$\xrightarrow{v_L = K\frac{di_L}{dt}} v_L(۰^+) = ۱۲\frac{d}{dt}(-۱۶ - I) = -۱۲\frac{d}{dt}I(۰^+) = -۱۲ \rightarrow \frac{dI(۰^+)}{dt} = ۱\frac{A}{sec}$$

۲ـ گزینه «۴» با تحلیل مدار برای زمان $t = ۰^+$ داریم (ولتاژ خازن و جریان سلف در $t = ۰$ پیوسته هستند):

$t = ۰^+ :$

با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت چپ ولتاژ دو سر سلف را در لحظه‌ی $t = ۰^+$ به‌دست می‌آوریم:

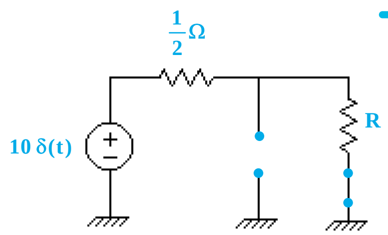


$$KVL: +۳ + ۲\times(۲ + I_۱) + ۶I_۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow I_۱ = -۱A$$

$$KVL\ \ (\text{سمت راست}): -۱ - ۶I_۱ + V_L(۰^+) + ۲\times\frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow V_L(۰^+) = -۸v \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt} = \frac{-۸}{۴} = -۲\frac{A}{sec}$$

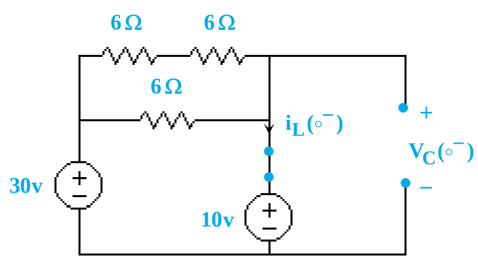
۳ـ گزینه «۳» برای تحلیل مدار به ازای ورودی $\delta(t)$، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز در نظر گرفته می‌شود. بنابراین جریان مقاومت R برابر است با:



$$\rightarrow I_R(t) = \frac{۱۰\delta(t)}{\frac{۱}{۲} + R} = ۶\delta(t) \rightarrow R = \frac{۱۰}{۶} - \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۶}\Omega$$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مقدار جریان در لحظه‌ی صفر برای گزینه‌ها متفاوت می‌باشد، پس فقط کافی است جریان اولیه‌ی سلف را به‌دست آوریم.

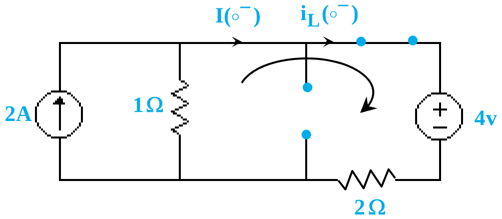
در لحظه‌ی $t = ۰^-$ سلف و خازن به حالت دائمی رسیده‌اند. بنابراین خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود.



$t = ۰^- :$

$$i_L(۰^-) = \frac{۳۰ - ۱۰}{۶\,||\,(۶+۶)} = ۵A \rightarrow$$ بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۵ـ گزینه «۱» **روش تشریحی:** ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را به‌دست می‌آوریم:

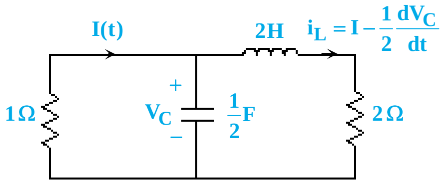


$t=\circ^-$:

$KVL:(i_L(\circ^-)-۲)\times ۱+۴+۲\times i_L(\circ^-)=\circ$

$i_L(\circ^-)=\frac{-۲}{۳}A \rightarrow V_C(\circ^-)=\frac{۸}{۳}v$

برای زمان‌های مثبت داریم:



KVL (حلقه‌ی چپ) : $V_C=-I \qquad (۱)$

KVL (حلقه‌ی راست) : $V_C=\frac{۲d}{dt}(I-\frac{۱}{۲}\frac{dV_C}{dt})+۲\times(I-\frac{۱}{۲}\frac{dV_C}{dt}) \qquad (۲)$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{d^۲V_C}{dt}+۳\frac{dV_C}{dt}+۳V_C=\circ$$

برای حل این معادله باید $V_C(\circ^+)$ و $\frac{dV_C(\circ^+)}{dt}$ را محاسبه کنیم:

$V_C(\circ^+)=V_C(\circ^-)=\frac{۸}{۳}v$

$$i_C(\circ^+)=I(\circ^+)-i_L(\circ^+)=-V_C(\circ^+)-i_L(\circ^+)=\frac{-۸}{۳}+\frac{۲}{۳}=-۲A\Rightarrow\frac{dV_c(\circ^+)}{dt}=۲\times(-۲)=-۴$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\frac{d^۲V_C}{dt^۲}+۳\frac{dV_C}{dt}+۳V_C=\circ\\ V_C(\circ^+)=\frac{۸}{۳}\\ \frac{dV_C(\circ^+)}{dt}=-۴\end{cases}\xrightarrow{I=-V_C}\begin{cases}\frac{d^۲I}{dt^۲}+۳\frac{dI}{dt}+۳I=\circ\\ I(\circ^+)=\frac{-۸}{۳}\\ \frac{dI(\circ^+)}{dt}=۴\end{cases}$$

$$I(t)=e^{-۱/۵t}(C_۱\cos\circ/۸۶t+C_۲\sin\circ/۸۶t) \qquad (t>\circ)$$

از طرفی با توجه به اینکه $I(\circ^-)=i_L(\circ^-)=-\frac{۲}{۳}$ بوده و با مقدار $I(\circ^+)$ برابر نیست، برای صادق بودن معادله‌ی $I(t)$ برای کل زمان‌ها $I(t)$ به صورت زیر می‌شود:

$$I(t)=e^{-۱/۵t}\times(C_۱\cos\circ/۸۶t+C_۲\sin\circ/۸۶t)u(t)+C_۳-C_۳u(t)$$

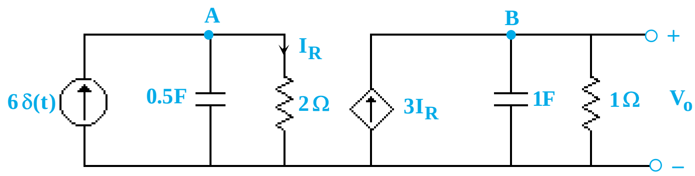
$I(\circ^-)=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow C_۳=-\frac{۲}{۳} \qquad I(\circ^+)=\frac{-۸}{۳}\Rightarrow C_۱=\frac{-۸}{۳} \qquad \frac{dI(\circ^+)}{dt}=۴\rightarrow C_۲=\circ$

بنابراین داریم:

$$I(t)=\frac{۲}{۳}u(t)-\frac{۲}{۳}-e^{-۱/۵t}[\frac{۸}{۳}\cos(\circ/۸۶t)]u(t)$$

روش تستی: با بررسی شرط $I(\circ^+)=\frac{-۸}{۳}$ یا $I(\circ^-)=-\frac{۲}{۳}$ به راحتی می‌توان به گزینه‌ی (۱) رسید.

۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه هر المان سری با منبع جریان بی‌اثر است، مدار به صورت زیر در می‌آید:



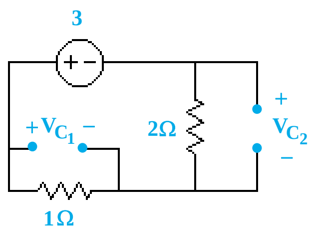
مدار سمت چپ : $V_C=۲I_R \Rightarrow KCL(A):I_R+\frac{۱}{۲}\frac{d}{dt}(۲I_R)=۶\delta(t)\Rightarrow\frac{d}{dt}I_R+I_R=۶\delta(t) \quad (۱) \quad , \quad I_R(\circ^-)=\circ$

$(۱)\xrightarrow{\int_{\circ^-}^{\circ^+}} I_R(\circ^+)=۶ \rightarrow$ با حذف δ معادله را با شرط اولیه‌ی جدید محاسبه می‌کنیم $\Rightarrow I_R(t)=۶e^{-t}$

مدار سمت راست : $V_C=V_o \Rightarrow KCL(B):V_o+\frac{dV_o}{dt}=۳I_R \Rightarrow \begin{cases}\frac{dV_o}{dt}+V_o=۱۸e^{-t}\\ V_o(\circ)=\circ\end{cases}\Rightarrow V_o(t)=۱۸te^{-t}u(t)$

۷ـ گزینه «۴» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را با تحلیل مدار در زمان‌های منفی محاسبه می‌کنیم:

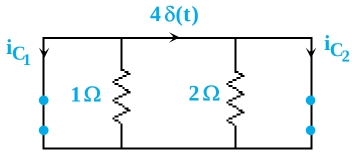
$t = ۰^- :$



$$V_{C_۱}(۰^-) = \frac{۱}{۱+۲}\times ۳ = ۱v$$

$$V_{C_۲}(۰^-) = \frac{۲}{۱+۲}\times(-۳) = -۲v$$

در زمان‌های مثبت از آنجا که جریان $I(t)$ به‌صورت تابع ضربه داده شده است، بنابراین خازن‌ها را اتصال کوتاه کرده و بـرای محاسـبه‌ی ولتـاژ خـازن‌هـا در لحظه‌ی $t=۰^+$ جریان عبوری از آن‌ها را برحسب تابع ضربه به‌دست می‌آوریم:



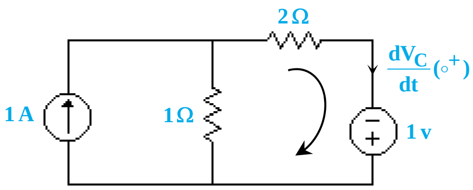
$$i_{C_۱} = -۴\delta(t) \rightarrow V_{C_۱}(۰^+) = ۱ + \frac{۱}{۴}\int_{۰^-}^{۰^+} -۴\delta(t)dt = ۰$$

$$i_{C_۲} = ۴\delta(t) \rightarrow V_{C_۲}(۰^+) = -۲ + \frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+} ۴\delta(t)dt = \frac{۴}{C} - ۲$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ در زمان‌های مثبت با هم موازی هستند. بنابراین در لحظه‌ی $t=۰^+$ ولتاژشان باید یکسان باشد:

$$V_{C_۱}(۰^+) = V_{C_۲}(۰^+) = \frac{۴}{C} - ۲ = ۰ \Rightarrow C = ۲F$$

۸ـ گزینه «۲» برای زمان $t=۰^+$ داریم:

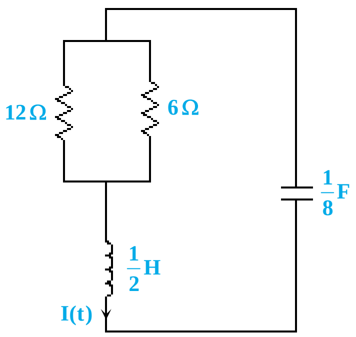


$$KVL: ۱\times\left(-۱+\frac{dV_C(۰^+)}{dt}\right) + \frac{۲dV_C(۰^+)}{dt} - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳dV_C(۰^+)}{dt} = ۲ \rightarrow \frac{dV_C(۰^+)}{dt} = \frac{۲}{۳}$$

۹ـ گزینه «۳» بدون در نظر گرفتن اثر منابع و شرایط اولیه معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به $I(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$t > ۰$

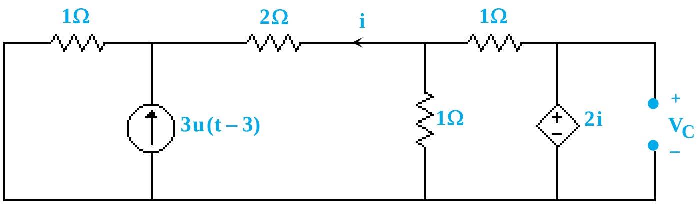


$$KVL: \frac{۶\times۱۲}{۶+۱۲}I + \frac{۱}{۲}\frac{dI}{dt} + ۸\int_۰^t Idt = ۰ \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{۴dI}{dt} + \frac{۱}{۲}\frac{d^۲I}{dt^۲} + ۸I = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{d^۲I}{dt^۲} + \frac{۸dI}{dt} + ۱۶I = ۰$$

معادله‌ی مشخصه: $s^۲ + ۸s + ۱۶ = ۰ \rightarrow (s+۴)^۲ = ۰ \rightarrow$ معادله‌ی زمانی $I(t)$ به حالت میرایی بحرانی می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که طراح سؤال، مقدار انرژی ذخیره شده در سلف را در حالت پایدار می‌خواهد، باید مدار را در حالت پایدار رسم کنیم: یعنی $t \rightarrow \infty$:



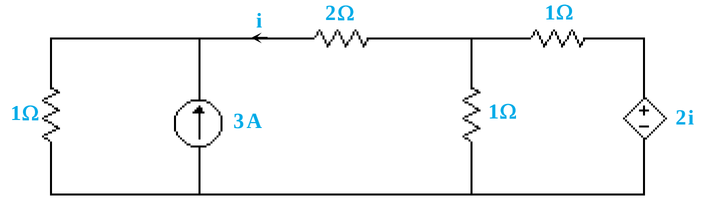
دقت کنید که در حالت دائمی، با توجه به این‌که تمامی منابع DC هستند، سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می‌شود و داریم:

$$V_S = ۲u(-t) \qquad t\rightarrow\infty \Rightarrow V_S = ۰$$

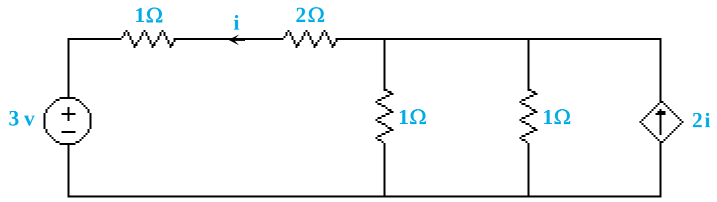
و

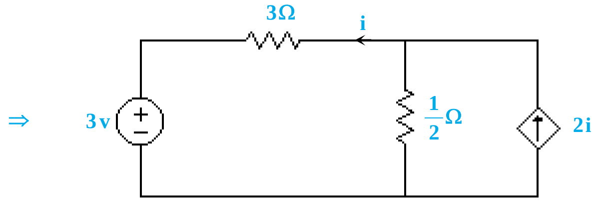
$$I_S = ۳u(t-۳) \qquad t\rightarrow\infty \Rightarrow I_S = ۳$$

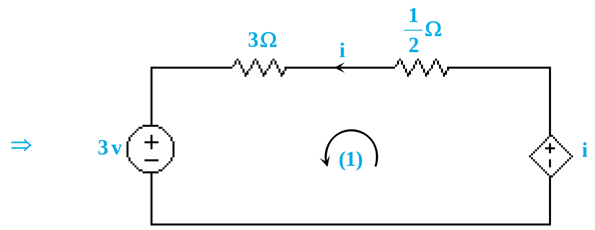
حال به دنبال پیدا کردن مقدار جریان سلف یعنی i خواهیم بود.



با استفاده از تونن نورتن داریم:





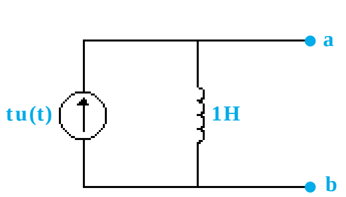


حال در حلقه ۱، KVL می‌زنیم:

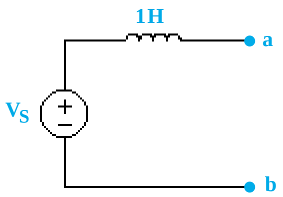
$$KVL_{۱}: ۳+۳i+\frac{۱}{۲}\times i=i \Rightarrow i=-\frac{۶}{۵}A$$

$$\text{انرژی سلف} = E_{\text{سلف}} = \frac{۱}{۲}\times ۳\times i^{۲} = \frac{۱}{۲}\times ۳\times (-\frac{۶}{۵})^{۲} \Rightarrow E_{\text{سلف}} = \frac{۵۴}{۲۵} = \frac{۲۱۶}{۱۰۰} = ۲/۱۶ \text{ ژول}$$

۱۱ـ گزینه «۱» با نگاه اول، تقارن نسبی در مدار دیده می‌شود. ابتدا به دنبال تبدیل منبع جریان موازی با سلف ۱ هانری به منبع ولتاژ سری با همان سلف هستیم.

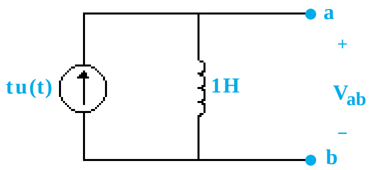


مدار



مدار (ب)

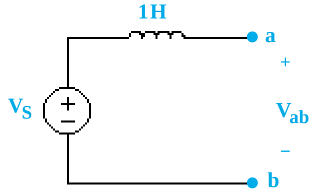
برای اینکه هر دو مدار الف و ب هم‌ارز باشند، باید ولتاژ دو سر a و b در هر دو یکسان باشد.

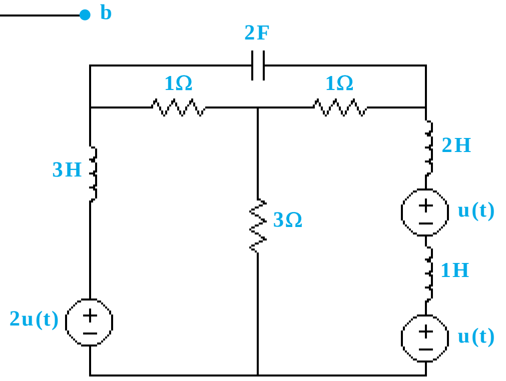


$$V_{ab}=۱\times\frac{d(tu(t))}{dt} \Rightarrow V_{ab}=u(t)+t\delta(t) \xrightarrow[\text{تابع دیرکله}]{\text{خاصیت غربال}} V_{ab}=u(t)+۰ \Rightarrow V_{ab}=u(t)$$

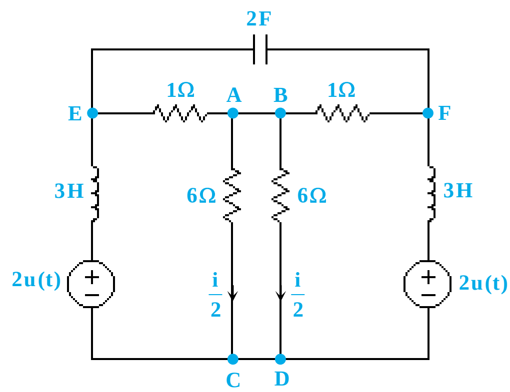
$$V_{ab}=V_S$$

پس باید $V_S = u(t)$ باشد تا دو مدار الف و ب هم‌ارز باشند. پس مدار به صورت زیر درخواهد آمد:

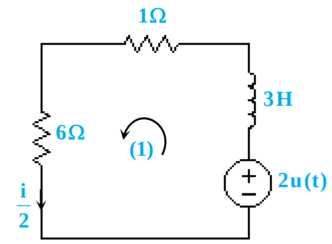




⇒



دقت کنید برای اینکه مدار متقارن باشد، مقاومت ۳Ω را به‌صورت ۲ مقاومت ۶Ω قرار دادیم که از هر کدام $\frac{i}{۲}$ می‌گذرد که در مجموع همان جریان i از مقاومت ۳Ω خواهد گذشت. با توجه به تقارن شکل، جریان شاخه‌های AB، CD و EF صفر می‌باشد. بنابراین مدار روبه‌رو را خواهیم داشت:

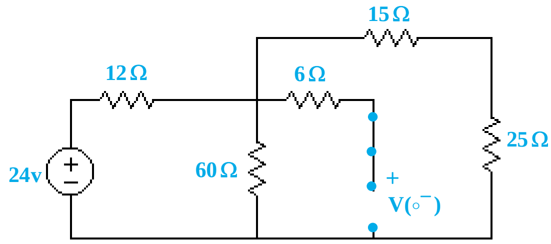


$$KVL_۱ : ۷\times\frac{i}{۲}+۳\frac{i'}{۲}=۲u(t) \Rightarrow i=ke^{-\frac{۷}{۳}t}+\frac{۴}{۷}$$

بنابراین ثابت زمانی مربوط به جریان i، $\frac{۳}{۷}$ ثانیه است.

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها مشاهده می‌شود که با به‌دست آوردن V(۰) به‌راحتی می‌توان به گزینه‌ی مطلوب دست یافت.

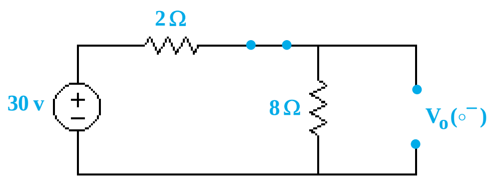
$t=۰^- :$



$$V_C(۰^-)=\frac{۶۰||(۱۵+۲۵)}{۱۲+۶۰||(۱۵+۲۵)}\times۲۴ \Rightarrow V_C(۰^-)=\frac{۲۴}{۲۴+۱۲}\times۲۴=۱۶v \rightarrow$$ گزینه‌ی (۱) صحیح است

۱۳ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها مشاهده می‌شود که با به‌دست آوردن $V_o(۰)$ به‌راحتی می‌توان به گزینه‌ی مطلوب دست یافت.

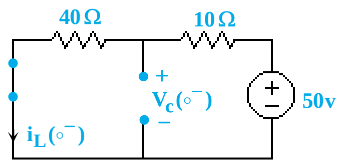
$t=۰^- :$



$$V_o(۰^-)=\frac{۸}{۸+۲}\times۳۰=۲۴v \rightarrow$$ گزینه‌ی (۴) صحیح است

۱۴ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را با تحلیل مدار در لحظه‌ی $t=۰^-$ به‌دست می‌آوریم:

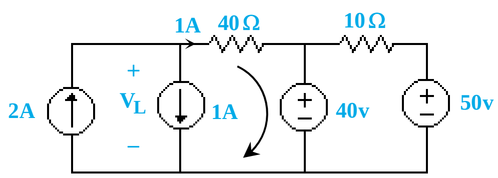
$t=۰^- :$



$$\Rightarrow V_C(۰^-)=\frac{۴۰}{۴۰+۱۰}\times۵۰=۴۰v$$

$$i_L(۰^-)=\frac{V_C(۰^-)}{۴۰}=۱A$$

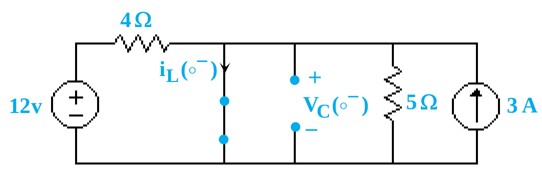
در لحظه‌ی $t=۰^+$ داریم:



$$\Rightarrow V_L(۰^+)=۴۰\times۱+۱۰=۸۰v$$

۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را به‌دست می‌آوریم:

$t=۰^- :$

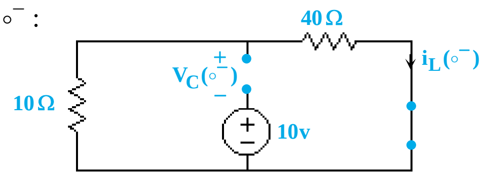


$$\Rightarrow V_C(۰^-)=۰$$

$$I(۰^-)=i_L(۰^-)=۳+\frac{۱۲}{۴}=۶A \rightarrow$$ گزینه (۲) صحیح است.

۱۶ـ گزینه «۳» در لحظه‌ی $t=۰^-$ داریم:

$t=۰^-:$

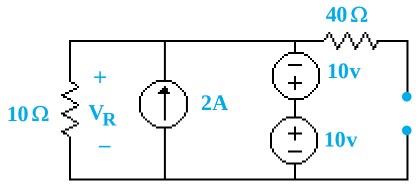


$i_L(۰^-)=۰$

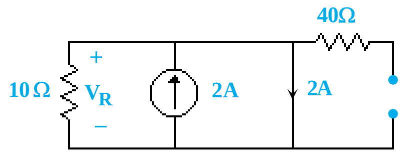
$V_C(۰^-)=-۱۰\,v$

همچنین برای $t=۰^+$ داریم:

$t=۰^+:$



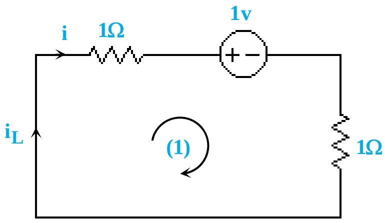
$\Rightarrow$



$\Rightarrow V_R(۰^+)=۰$

$\Rightarrow V_C(۰^+)+V_R(۰^+)=-۱۰\,v$

۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را برای $t<۰^-$ که به حالت دائمی خود رسیده است، تحلیل می‌کنیم. در این حالت، هر دو کلید باز هستند و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است.

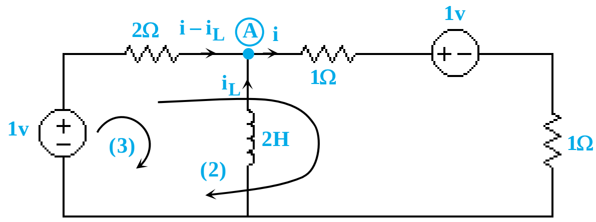


$KVL_۱: i+۱+i=۰ \;\Rightarrow i=-\frac{۱}{۲}A$

$\Rightarrow i(۰^-)=-\frac{۱}{۲}A \;\Rightarrow i_L(۰^-)=-\frac{۱}{۲}A$

مدار برای $۰<t<۱$:

بنابراین در $t=۰$ نه تابع ضربه داریم و نه کاتست سلفی. بنابراین مقدار جریان سلف در هر دو زمان $t=۰^-$ و $t=۰^+$ مقداری یکسان دارد.



$\Rightarrow i_L(۰^+)=i_L(۰^-)=-\frac{۱}{۲}A$

با نوشتن رابطه KCL برای گره A، جریان مقاومت ۲Ω برابر $i-i_L$ در جهت نشان داده شده، خواهد شد.

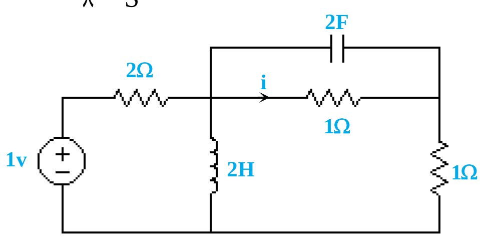
$KVL_۲: ۱=۲\times(i-i_L)+i+۱+i \;\Rightarrow ۴i=۲i_L \;\Rightarrow i=\frac{i_L}{۲} \;\Rightarrow i(۰^+)=\frac{i_L(۰^+)}{۲}=-\frac{۱}{۴} \;\Rightarrow i(۰^+)=-\frac{۱}{۴}A$

$KVL_۳: ۱=۲\times(i-i_L)-۲i'_L \;\Rightarrow ۲i-۲i'_L-۲i_L=۱ \quad (۱) \quad$ و $\quad i=\frac{i_L}{۲} \;\Rightarrow i_L=۲i \quad (۲)$

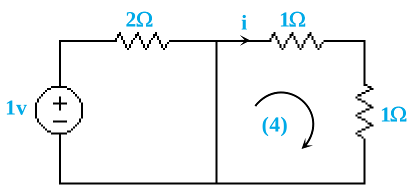
$(۱),(۲)\rightarrow ۲i-۲\times۲i'-۲\times۲i=۱ \;\Rightarrow -۴i'-۲i=۱ \;\Rightarrow -۴\times i'(۰^+)-۲\times i(۰^+)=۱$

$\Rightarrow -۴\times i'(۰^+)-۲\times(-\frac{۱}{۴})=۱ \;\Rightarrow i'(۰^+)=-\frac{۱}{۸}\;\frac{A}{S}$

مدار در $t>۱$:



در $t=\infty$، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود و داریم:



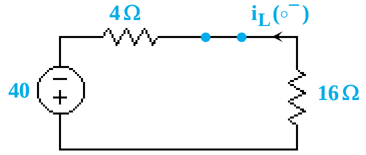
$KVL_۴: i+i=۰ \;\Rightarrow ۲i=۰$

$\Rightarrow ۲i'=۰ \;\Rightarrow i'(\infty)=۰A$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

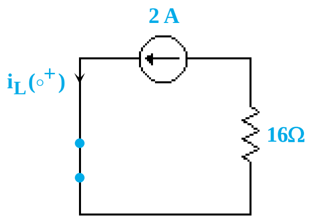
۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را در حالتی که کلید در وضعیت a قرار دارد، به‌دست می‌آوریم:

$t=۰^-:$



$$i_L(۰^-)=\frac{۴۰}{۴+۱۶}=۲A$$

$$V_C(۰^-)=۰$$

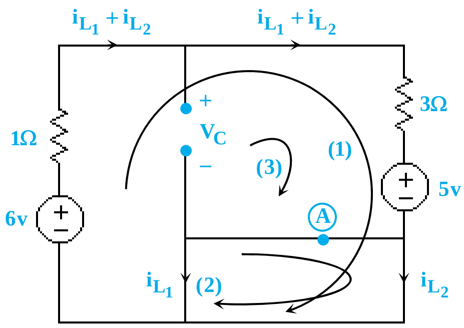


در لحظه‌ی $t=۰^+$ داریم:

$$i_c(۰^+)=\frac{۱}{۱۶}\frac{dv_c(۰^+)}{dt}=i_L(۰^-)=۲\Rightarrow\frac{dv_c(۰^+)}{dt}=۳۲$$

با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که گزینه‌ی (۲) پاسخ صحیح می‌باشد.

۱۹ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را برای $t=۰^-$ که به حالت دائمی رسیده است تحلیل می‌کنیم. در این زمان، خازن مدار باز و سلف‌ها اتصال کوتاه هستند. با در نظر گرفتن رابطه KCL برای گره A، جریان مقاومت ۳Ω در جهت مشخص شده بر روی شکل برابر $i_{L_۱}+i_{L_۲}$ می‌گردد. با توجه به این‌که خازن مدار باز می‌باشد، جریان مقاومت ۱Ω نیز برابر $i_{L_۱}+i_{L_۲}$ خواهد شد.



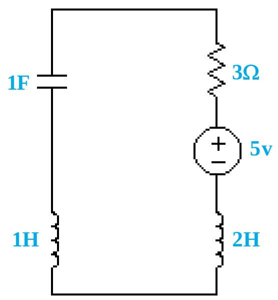
$$KVL_۱:۶=۱\times[i_{L_۱}+i_{L_۲}]+۳\times[i_{L_۱}+i_{L_۲}]+۵\ \Rightarrow i_{L_۱}+i_{L_۲}=\frac{۱}{۴}\qquad(۱)$$

$$KVL_۲:V_{L_۱}=V_{L_۲}\ \Rightarrow i'_{L_۱}=۲i'_{L_۲}\ \Rightarrow i_{L_۱}=۲i_{L_۲}\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\begin{cases}i_{L_۱}=\frac{۱}{۶}\\ i_{L_۲}=\frac{۱}{۱۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i_{L_۱}(۰^-)=\frac{۱}{۶}A\\ i_{L_۲}(۰^-)=\frac{۱}{۱۲}A\end{cases}$$

$$KVL_۳:V_C=۳\times[i_{L_۱}+i_{L_۲}]+۵=\frac{۳}{۴}+۵=\frac{۲۳}{۴}\ \Rightarrow V_C(۰^-)=\frac{۲۳}{۴}v$$

مدار برای $t>۰$:



در $t=۰$، تابع ضربه و همچنین حلقه خازنی نداریم، بنابراین ولتاژ خازن در $t=۰^+$ همان مقدار مشابه در $t=۰^-$ را دارد.

$$V_C(۰^+)=V_C(۰^-)=\frac{۲۳}{۴}v$$

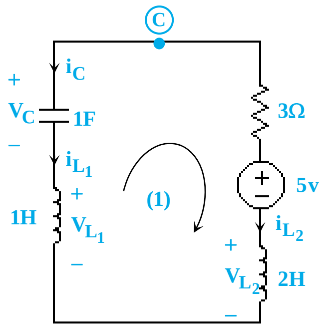
در $t=۰$، کاتست سلفی داریم، بنابراین جریان سلف‌ها تغییر خواهد کرد.

$$i_{L_۱}(۰^+)=\frac{L_۱i_{L_۱}(۰^-)-L_۲i_{L_۲}(۰^-)}{L_۱+L_۲}=-i_{L_۲}(۰^+)$$

$$i_{L_۱}(۰^+)=\frac{۱\times\frac{۱}{۶}-۲\times\frac{۱}{۱۲}}{۱+۲}=۰=-i_{L_۲}(۰^+)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}i_{L_۱}(۰^+)=۰A\\ i_{L_۲}(۰^+)=۰A\end{cases}$$

مدار برای $t>۰$:



$$KVL_۱:V_C+V_{L_۱}+۳i_{L_۱}=۵+V_{L_۲}$$

$$\Rightarrow V_C+i'_{L_۱}+۳i_{L_۱}=۵+۲i'_{L_۲}\qquad(۳)$$

$$KCL_C:i_{L_۱}+i_{L_۲}=۰\ \Rightarrow i_{L_۲}=-i_{L_۱}\qquad(۴)$$

$$(۳),(۴)\rightarrow V_C+۳i'_{L_۱}+۳i_{L_۱}=۵\quad \text{(۵) رابطه}\ \Rightarrow V_C(۰^+)+۳i'_{L_۱}(۰^+)+۳i_{L_۱}(۰^+)=۵$$

$$\Rightarrow\frac{۲۳}{۴}+۳i'_{L_۱}(۰^+)+۳\times۰=۵\ \Rightarrow i'_{L_۱}(۰^+)=-\frac{۱}{۴}$$

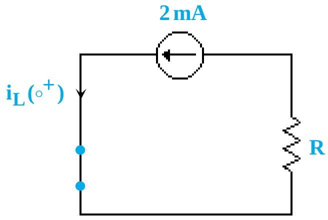
مشتق گرفتن از رابطه (۵) : $V'_C+۳i''_{L_۱}+۳i'_{L_۱}=۰$ $\qquad$ $i_C=$ جریان خازن $=V'_C=i_{L_۱}$

$$\Rightarrow i_{L_۱}+۳i''_{L_۱}+۳i'_{L_۱}=۰\ \Rightarrow i_{L_۱}(۰^+)+۳i''_{L_۱}(۰^+)+۳i'_{L_۱}(۰^+)=۰\ \Rightarrow ۰+۳i''_{L_۱}(۰^+)+۳\times(-\frac{۱}{۴})=۰\ \Rightarrow i''_{L_۱}(۰^+)=\frac{۱}{۴}$$

$$V_{L_1}=i'_{L_1}\ \Rightarrow V'_{L_1}=i''_{L_1}\ \Rightarrow V'_{L_1}(0^+)=i''_{L_1}(0^+)=+\frac{1}{4}\ \Rightarrow \boxed{V'_{L_1}(0^+)=+\frac{1}{4}\ \frac{V}{S}}$$

برای پیدا کردن $V_{L_1}(\infty)$ مدار را در حالت دائمی در نظر می‌گیریم. در این حالت خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است. بنابراین خازن مدار باز و سلف‌ها اتصال کوتاه هستند. بنابراین: $\boxed{V_{L_1}(\infty)=0}$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه در لحظه‌ی $t=0$ ولتاژ خازن صفر می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی (۴) نادرست است. از طرفی در لحظه‌ی $t=0^+$ داریم:

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{2\times10^{-3}}{C}=\frac{2\times10^{-3}}{5\times10^{-9}}=4\times10^{5}$$

برای زمان‌های مثبت مدار به صورت RLC سری می‌باشد. بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل ولتاژ خازن به صورت زیر می‌باشد:

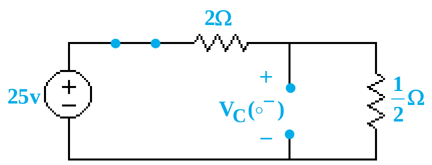
$$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{R}{8\times10^{-2}}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{5\times10^{-9}\times8\times10^{-2}}=0$$

معادله‌ی مشخصه میرای بحرانی: $(s+\alpha)^2=s^2+2\alpha s+\alpha^2=s^2+\frac{R}{8\times10^{-2}}s+25\times10^{8}\ \Rightarrow\ \alpha=50000$

$$V_C(t)=e^{-50000t}(C_1+C_2t)\ \xrightarrow[\frac{dV_C(0^+)}{dt}=4\times10^5]{V_C(0^+)=0}\ C_1=0, C_2=4\times10^{5}\ \Rightarrow\ V_C(t)=400000te^{-50000t}v$$

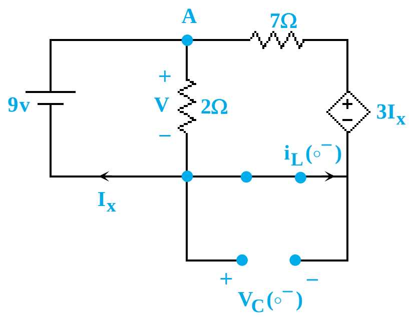
۲۱ـ گزینه «۴» برای حل این سؤال کافی است $V(0^+)$ را به‌دست آوریم: $V(0^+)=V_C(0^+)=V_C(0^-)$

در لحظه‌ی $t=0^-$ داریم:



$$V_C(0^-)=\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}\times25=5v\ \Rightarrow V(0^+)=5v\ \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۴) صحیح می‌باشد.

۲۲ـ گزینه «۲» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را در زمان $t=0^-$ به دست می‌آوریم: $(V_C(0^-)=0)$



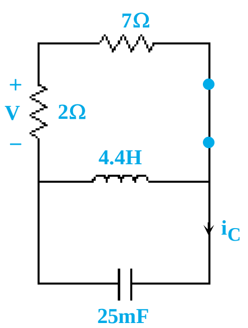
$$KCL(A): -I_x+\frac{V}{2}+\frac{V-3I_x}{7}=0$$

$$\xrightarrow{V=9} -I_x+\frac{9}{2}+\frac{9-3I_x}{7}=0$$

$$\Rightarrow I_x=\frac{81}{20}A$$

$$\Rightarrow i_L(0^-)=\frac{9}{2}-\frac{81}{20}=\frac{9}{20}A$$

حال بعد از باز کردن کلید خواهیم داشت $(I_x=0)$:



$$\xrightarrow{\text{RLC موازی}} s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0\Rightarrow s^2+\frac{1}{9\times25\times10^{-3}}s+\frac{1}{4.4\times25\times10^{-3}}=0\ \Rightarrow s^2+4.44s+9.09=0$$

$$V(t)=e^{-2.22t}[C_1\cos(2.04t)+C_2\sin(2.04t)]$$

$$\xrightarrow{\text{می‌دانیم}} V=\frac{2}{2+7}V_C\quad(1)\quad \xrightarrow{V_C(0^+)=0}\ V(0^+)=0$$

از طرفی داریم:

$$C\frac{dV_C(0^+)}{dt}=i_C(0^+)=i_L(0^+)=\frac{9}{20}\Rightarrow\frac{dV_C(0^+)}{dt}=18\Rightarrow\frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{2}{9}\frac{dV_C(0^+)}{dt}=4\Rightarrow C_2=1.96$$

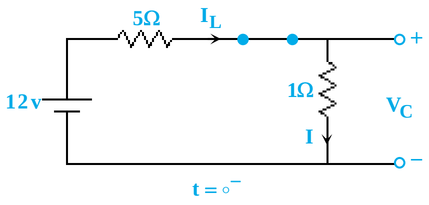
۲۳ـ گزینه «۴» بعد از بسته شدن کلید، مدار به صورت RLC موازی درمی‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0 \Rightarrow \frac{d^2I}{dt^2}+500\frac{dI}{dt}+\frac{500}{L}I=0$$

در صورتی‌که مدار در حالت بحرانی قرار داشته باشد، داریم:

$$\alpha=\omega_0 \Rightarrow \frac{500}{2}=\sqrt{\frac{500}{L}} \Rightarrow L=8mH$$

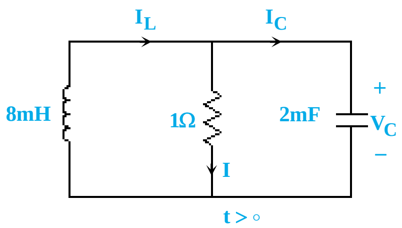
۲۴ـ گزینه «۲» برای حل این تست باید معادله دقیق $I(t)$ را به دست آوریم. بدین منظور ابتدا با تحلیل مدار در $t=0^-$، شرایط اولیه مدار را محاسبه می‌کنیم:



$$I_L(0^-)=\frac{12}{6}=2A$$

$$V_C(0^-)=1\times 2=2v$$

حال با توجه به معادله مشخصه مدار که به صورت زیر می‌باشد، فرم کلی رابطه $I(t)$ را در نظر می‌گیریم:



$$S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}=0 \Rightarrow (S+250)^2=0$$

$$I(t)=ae^{-250t}+bte^{-250t}$$

$$I(t=0^+)=\frac{V_C(0^+)}{1}=\frac{V_C(0^-)}{1}=2A \Rightarrow a=2$$

$$\dot{I}(t=0^+)=\frac{\dot{V}_C(0^+)}{1}=\frac{I_C(0^+)}{2\times10^{-3}}=\frac{I_L(0^+)-I(0^+)}{2\times10^{-3}}=\frac{2-2}{2\times10^{-3}}=0$$

$$\Rightarrow -2\times250+b=0 \Rightarrow b=500 \Rightarrow I(t)=2e^{-250t}(1+250t)$$

اکنون کافی است با تست گزینه‌ها پاسخ صحیح را پیدا کنیم:

$$t=12ms \Rightarrow I(t=12ms)=2e^{-250\times12\times10^{-3}}\times(1+250\times12\times10^{-3})=2e^{-3}\times(1+3)\cong 0/4=0/2I(0^+)$$

بنابراین گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۲۵ـ گزینه «۱» معادله‌ی مشخصه مدار RLC موازی به صورت مقابل می‌باشد:

$$s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0 \Rightarrow s^2+\frac{10^6}{5R}s+12\times10^6=0$$

برای کارکرد در حالت فوق میرا Δ باید بزرگ‌تر از صفر باشد. بنابراین:

$$\left(\frac{10^6}{5R}\right)^2-4\times12\times10^6>0 \rightarrow R<28/86\Omega$$

فصل چهارم

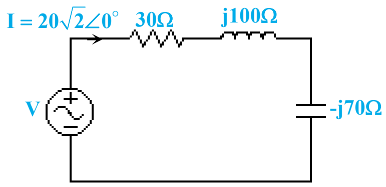
«تحلیل حالت دائمی سینوسی»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال ۱: در یک مدار RLC سری، $R = ۳۰\Omega$، $X_L = ۱۰۰\Omega$ و $X_C = ۷۰\Omega$ می‌باشد. این مدار توسط جریانی به معادله $I(t) = ۲۰\sqrt{۲}\cos(\omega t)$ تغذیه می‌شود. معادله ولتاژ تغذیه کدام است؟

۱) $V(t) = ۱۲۰۰\sqrt{۲}\sin(\omega t - \frac{\pi}{۴})$
۲) $V(t) = ۱۲۰۰\cos(\omega t + \frac{\pi}{۴})$
۳) $V(t) = ۱۲۰۰\sin(\omega t - \frac{\pi}{۴})$
۴) $V(t) = ۱۲۰۰\sqrt{۲}\cos(\omega t + \frac{\pi}{۴})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا امپدانس مدار را حساب می‌کنیم؛ با ضرب آن در جریان I، ولتاژ مدار تعیین می‌شود:

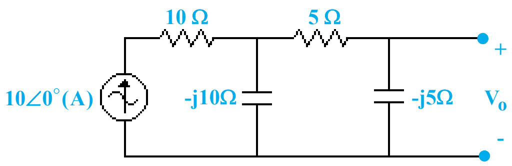


$$Z = ۳۰ + j۱۰۰ - j۷۰ = ۳۰ + j۳۰ = ۳۰\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ\ \Omega$$

$$V = Z.I = (۳۰\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ) \times (۲۰\sqrt{۲}\angle ۰^\circ) = (۶۰۰ \times ۲)\angle ۴۵^\circ = ۱۲۰۰\angle ۴۵^\circ\ (v)$$

$$\Rightarrow \quad V(t) = ۱۲۰۰\cos(\omega t + \frac{\pi}{۴})$$

مثال ۲: ولتاژ خروجی مدار مقابل چند ولت است؟



۱) $j۲ + ۶$
۲) $-j۲ + ۶$
۳) $-j۳۰ - ۱۰$
۴) $۱۰ - j۳۰$

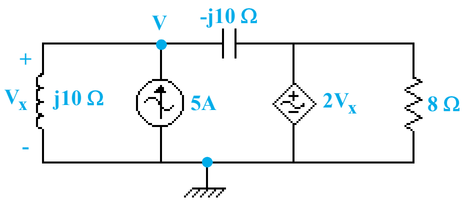
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر برای دو امپدانس موازی $-j۱۰\Omega$ و $(۵ - j۵)\Omega$، **قانون تقسیم جریان** را بنویسیم، جریان خازن ۵ اهمی از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$I = \frac{-j۱۰}{(۵ - j۱۵)} \times (۱۰\angle ۰^\circ) = \frac{-j۱۰۰}{۵ - j۱۵} = \frac{-j۲۰}{۱ - j۳} = \frac{-j۲۰(۱ + j۳)}{(۱ - j۳)(۱ + j۳)} = \frac{-j۲۰ + ۶۰}{۱ - j^۲ ۹} = \frac{۶۰ - j۲۰}{۱۰} = (۶ - j۲)A$$

حالا به راحتی با ضرب این جریان در امپدانس خازن ۵ اهمی، ولتاژ V_o حساب می‌شود:

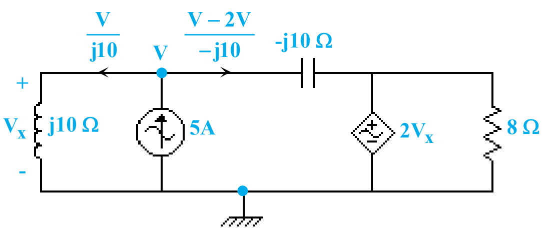
$$V_o = (۶ - j۲)(-j۵) = (-j۳۰ - ۱۰)\,v$$

مثال ۳: در مدار شکل زیر مقدار V چند ولت است؟



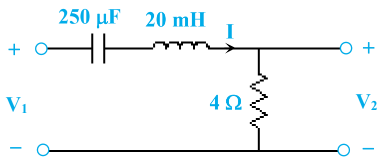
۱) ۲۵-
۲) -۵۰
۳) $j۵۰$
۴) $j۲۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه $V = V_x$ است، جریان سلف با جهت نشان داده شده برابر $\frac{V}{j۱۰}$ و همچنین جریان خازن با توجه به اینکه ولتاژ دو سرش بر حسب V معلوم است، برابر $\frac{V}{j۱۰} = \frac{V - ۲V}{-j۱۰}$ در جهت نشان داده شده در شکل است. حالا با نوشتن KCL در گره بالایی با ولتاژ V داریم:



$$\frac{V}{j۱۰} + \frac{V}{j۱۰} = ۵ \Rightarrow ۲(\frac{V}{j۱۰}) = ۵ \Rightarrow V = j۲۵\,v$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر، تابع تغییرات ولتاژ خروجی برابر $V_۲ = ۴۰\cos(۴۰۰t)$ می‌باشد. تابع تغییرات ولتاژ $V_۱$ در حالت ماندگار تقریباً کدام است؟ $(\sin ۲۷^\circ = \cos ۶۳^\circ \cong ۰/۴۵)$



۱) $۴۵\cos(۴۰۰t - ۶۳^\circ)$

۲) $۴۵\cos(۴۰۰t + ۲۷^\circ)$

۳) $۴۵\cos(۴۰۰t + ۶۳^\circ)$

۴) $۴۵\cos(۴۰۰t - ۲۷^\circ)$

پاسخ: گزینه «۴» برای بدست آوردن ولتاژ ورودی در مدار باید امپدانس معادل از دید منبع ورودی بدست آید و سپس امپدانس محاسبه شده در جریان مدار ضرب شود. لازم به ذکر است جریان مدار از تقسیم ولتاژ $V_۲$ بر مقاومت ۴Ω محاسبه می‌شود.

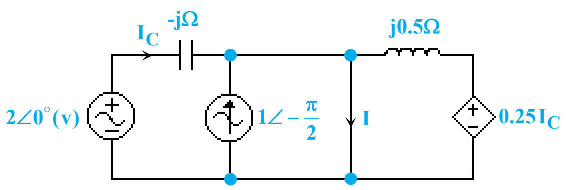
$$V_۲ = ۴۰\cos ۴۰۰t \;\Rightarrow\; I = \frac{V_۲}{R} = \frac{۴۰\angle ۰^\circ}{۴} = ۱۰\angle ۰^\circ\,(A)$$

$$Z_C = -jX_C = -j\times\frac{۱}{C\omega} = -j\frac{۱}{۲۵۰\times ۱۰^{-۶}\times ۴۰۰} = -j۱۰\Omega$$

$$Z_L = jX_L = j(L\omega) = j\times ۲۰\times ۱۰^{-۳}\times ۴۰۰ = j۸\Omega \;\Rightarrow\; Z = R + Z_C + Z_L = ۴ - j۱۰ + j۸ = ۴ - j۲ = ۴/۵(\frac{۸}{۹} - j\frac{۴}{۹}) \simeq ۴/۵\angle -۲۷^\circ$$

$$\Rightarrow\; V_۱ = Z.I = (۴/۵\angle -۲۷^\circ)\times(۱۰\angle ۰) = ۴۵\angle -۲۷^\circ = \mathbf{۴۵\cos(۴۰۰t - ۲۷^\circ)}$$

مثال ۵: در شکل مقابل، مقدار جریان I برحسب آمپر، کدام است؟



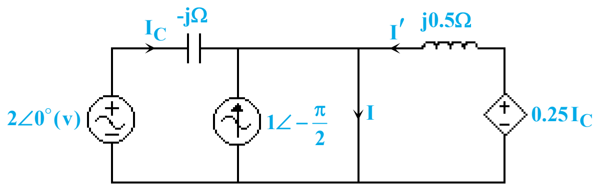
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\angle\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\angle\frac{۳\pi}{۴}$

۳) $\sqrt{۲}\angle\frac{۳\pi}{۴}$

۴) $\sqrt{۲}\angle\frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» به علت اتصال کوتاه بودن گره بالای مدار با گره پایین مدار، ولتاژ گره بالای مدار را صفر فرض می‌کنیم. حال با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:

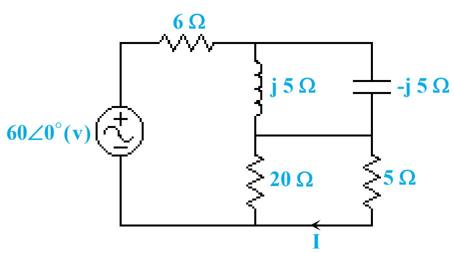


$$I = I_C + ۱\angle -۹۰^\circ + \frac{۰/۲۵I_C}{j۰/۵} \quad \text{و} \quad I' = \frac{۰/۲۵I_C}{j۰/۵}$$

از طرفی می‌دانیم $I_C = \frac{۲\angle ۰^\circ}{-j} = \frac{۲\angle ۰^\circ}{۱\angle -۹۰^\circ} = ۲\angle ۹۰^\circ$؛ لذا خواهیم داشت:

$$I = ۲\angle ۹۰^\circ + ۱\angle -۹۰^\circ + \frac{۰/۲۵\times ۲\angle ۹۰^\circ}{۰/۵\angle ۹۰^\circ} = j۲ - j + ۱ = ۱ + j = \sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ A$$

مثال ۶: جریان I در مدار شکل مقابل چند آمپر است؟



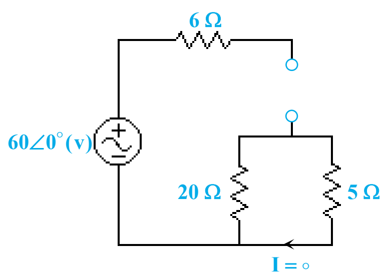
۱) ۴

۲) ۸

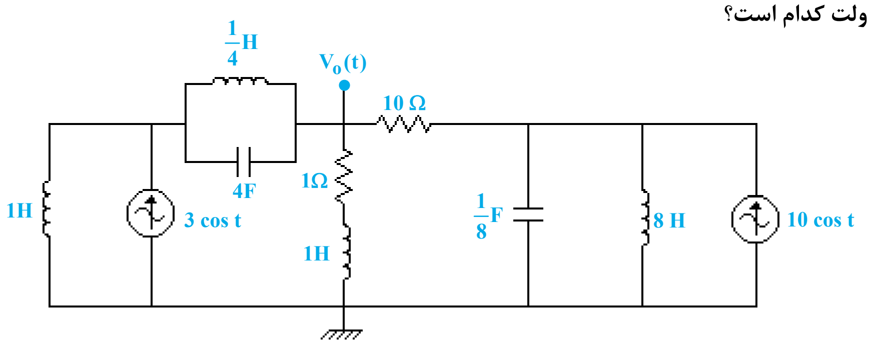
۳) ۱

۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» به دلیل اینکه اندازه امپدانس‌های خازن و سلف موازی با هم برابر است، سلف و خازن موازی در این حالت از مدار باز می‌شوند و هیچ جریانی به شاخه‌های پایین نمی‌رسد و جریان I صفر خواهد بود.



مثال ۷: در مدار زیر مقدار ولتاژ خروجی برحسب ولت کدام است؟



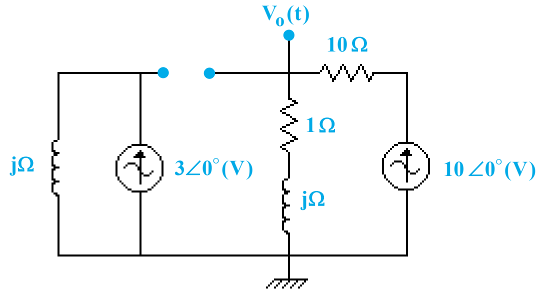
۱) $۳+j۳$

۲) $۱+j$

۳) $۵+j۵$

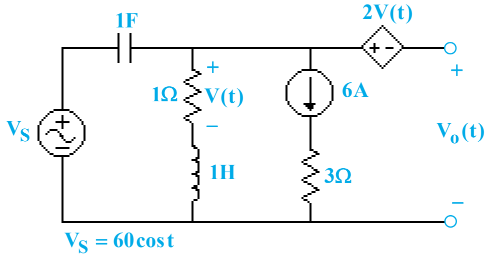
۴) $۱۰+j۱۰$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به $\omega=\frac{۱rad}{sec}$، LC موازی در سمت راست و سمت چپ مدار با مدار باز مدل شده و مدار به صورت روبرو ساده می‌شود. حال داریم:



$$V_o=۱۰\angle۰\times(۱+j)\quad\Rightarrow\quad V_o=(۱۰+j۱۰)\,v$$

مثال ۸: در مدار زیر معادله V_o در حالت ماندگار کدام گزینه است؟



۱) $۶۰\sqrt{۲}\cos(t+۴۵^\circ)$

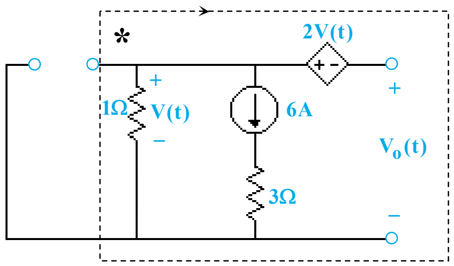
۲) $۶+۶۰\sqrt{۲}\cos(t+۴۵^\circ)$

۳) $۶-۶۰\sqrt{۲}\cos(t-۴۵^\circ)$

۴) $-۶۰\sqrt{۲}\cos(t-۴۵^\circ)$

پاسخ: گزینه «۳» برای بدست آوردن $V_o(t)$ از قانون جمع آثار استفاده می‌کنیم.

ابتدا منبع جریان ۶A را که یک منبع جریان DC است، در مدار در نظر گرفته و منبع ولتاژ V_S را غیر فعال (اتصال کوتاه) می‌کنیم. با توجه به DC بودن منبع جریان، خازن با مدار باز و سلف با اتصال کوتاه مدل می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

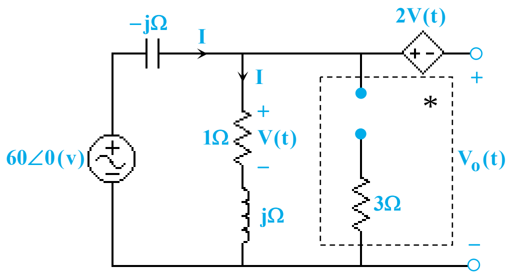


$$V(t)=-۶\times۱\Omega=-۶v$$

$$V_o(t)=-۲V(t)+V(t)=-V(t)=-(-۶)=۶v$$

حال اثر منبع ولتاژ V_S را در نظر گرفته و منبع جریان DC را مدار باز می‌کنیم.

با توجه به عبور جریان صفر از منبع وابسته، با اعمال KVL در حلقه سمت چپ، جریان I محاسبه می‌شود.



$$I=\frac{۶۰\angle۰}{-j+۱+j}=۶۰A\quad,\quad V=I\times۱=۶۰v$$

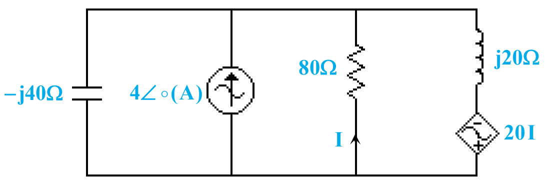
$$\Rightarrow\quad V_o=-۲V+V+jI=-V+jI\quad\Rightarrow\quad V_o=-۶۰+j۶۰=-(۶۰-j۶۰)\,v$$

$$\Rightarrow\quad V_o=-(۶۰\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ)\quad\Rightarrow\quad V_o(t)=-۶۰\sqrt{۲}\cos(t-۴۵^\circ)$$

حال نتایج حاصل شده از قانون جمع آثار برای V_o را با هم جمع می‌کنیم.

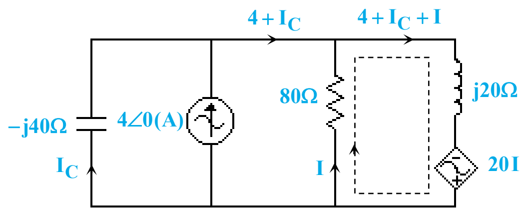
$$\mathbf{V_o(t)=۶-۶۰\sqrt{۲}\cos(t-۴۵^\circ)}$$

مثال۹: **در مدار شکل مقابل جریان I چند آمپر است؟**



۱) ۴۱/۱
۲) ۲
۳) ۲/۸۲
۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» در صورتی که جریان خازن I_C نامیده شود، با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:



$$80I = -j40 I_C \quad \Rightarrow \quad I_C = j2I$$

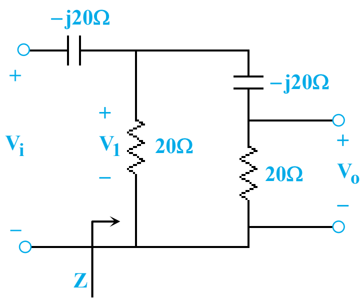
با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده داریم:

$$80I + j20(I + 4 + j2I) - 20I = 0 \quad \Rightarrow \quad 80I + j20I + j80 - 40I - 20I = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20I + j20I = -j80 \quad \Rightarrow \quad (1+j)I = -j4$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-j4}{1+j} = \frac{4\angle -90^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} \quad \Rightarrow \quad |I| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(A) \simeq \mathbf{2/82A}$$

مثال۱۰: **در مدار شکل مقابل فازور $\frac{V_o}{V_i}$ کدام است؟**



۱) $1\angle -90^\circ$
۲) $\frac{1}{3}\angle -90^\circ$
۳) $1\angle 90^\circ$
۴) $\frac{1}{3}\angle 90^\circ$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا امپدانس Z را محاسبه می‌کنیم.

$$Z = 20 \| (20 - j20) = \frac{20(20 - j20)}{20 + 20 - j20} = \frac{20 - j20}{2 - j} = \frac{(20 - j20)(2 + j)}{5} = \frac{40 + 20 - j(40 - 20)}{5} = 12 - j4\Omega$$

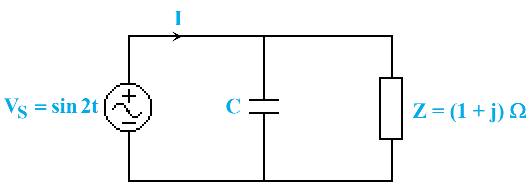
با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_1 = \frac{Z}{Z - j20} \times V_i = \frac{12 - j4}{12 - j4 - j20} \times V_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45^\circ \times V_i$$

V_o از تقسیم ولتاژ V_1 بین مقاومت و خازن سمت راست بدست می‌آید:

$$V_o = \frac{20}{20 - j20} \times V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ \times V_1 = V_i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ \times \frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45^\circ\right] = \frac{1}{3}\angle 90^\circ\, V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{3}\angle 90^\circ$$

مثال۱۱: **در مدار شکل زیر مقدار ظرفیت خازن برحسب فاراد برای اینکه جریان I با ولتاژ منبع هم‌فاز باشد، کدام است؟**



۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
۳) ۴
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» چون خازن و امپدانس Z با یکدیگر موازی هستند، لذا به جای محاسبه امپدانس کل مدار، بهتر است ادمیتانس کل مدار را محاسبه کنیم:

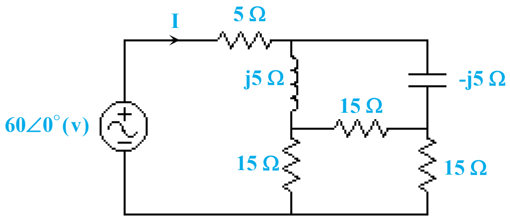
$$Z = 1 + j \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{2} = (0/5 - j0/5)\Omega$$

$$Y_{eq} = Y_C + Y = j\omega C + 0/5 - j0/5 = j \times 2 \times C + 0/5 - j0/5 = 0/5 + j(2C - 0/5)$$

توجه شود برای آنکه ولتاژ و جریان مداری هم‌فاز باشند، باید قسمت موهومی در روابط امپدانس (و یا ادمیتانس) آن مدار وجود نداشته باشد:

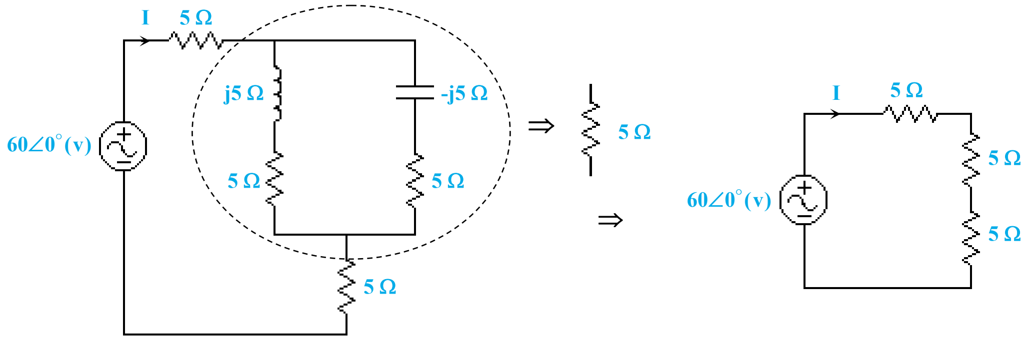
$$2C - 0/5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = \frac{0/5}{2} = \frac{1}{4}F}$$

مثال ۱۲: در مدار شکل مقابل جریان I چند آمپر است؟



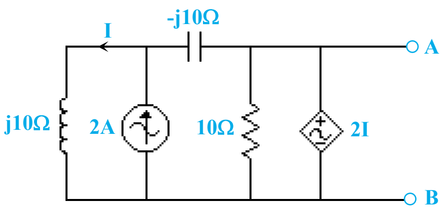
۱) ۱۰
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۳» با تبدیل مثلث به ستاره برای مقاومت‌های ۱۵ اهمی و با توجه به جدول ساده‌سازی مدارها داریم:



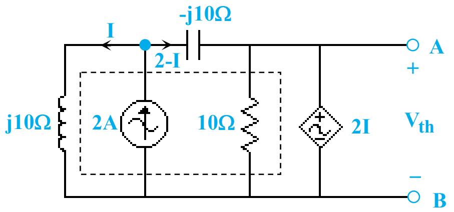
$$\Rightarrow I = \frac{۶۰\angle ۰^\circ}{۱۵} = ۴\angle ۰^\circ \ (A)$$

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر ولتاژ معادل تونن از دو پایانه B و A چند ولت است؟



۱) $j۲۰$
۲) $j۱۰$
۳) ۲۰
۴) $۱۰+j۱۰$

پاسخ: گزینه «۱» ولتاژ مدار باز یا همان ولتاژ تونن برابر $V_{th} = ۲I$ می‌باشد، پس کافیست مقدار I را با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده تعیین کنیم:

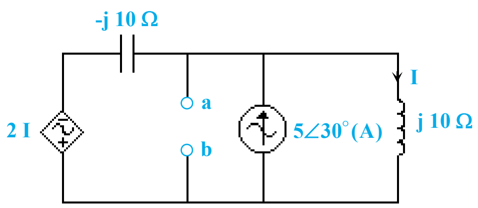


$$(۲-I)(-j۱۰) + ۲I - (j۱۰ \times I) = ۰$$

$$\Rightarrow \ -j۲۰ + j۱۰I + ۲I - j۱۰I = ۰ \ \Rightarrow \ ۲I = j۲۰ \ \Rightarrow \ I = j۱۰ (A)$$

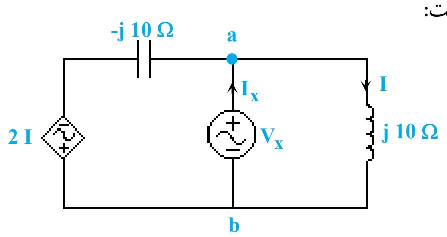
لذا ولتاژ تونن برابر $V_{th} = ۲I = ۲\times j۱۰ = j۲۰ (v)$ می‌باشد.

مثال ۱۴: در مدار شکل مقابل امپدانس معادل تونن از دو پایانه b و a بر حسب اهم کدام است؟



۱) ۵۰
۲) $\dfrac{j۱۰}{۲-j۰/۲}$
۳) $j۵۰$
۴) $\dfrac{j۱۰}{۲-j۲}$

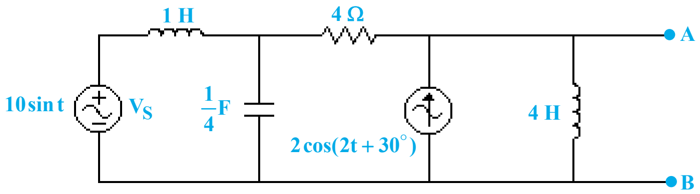
پاسخ: گزینه «۱» چون امپدانس معادل تونن خواسته شده، لذا باید منابع مستقل مدار را حذف کنیم. با باز کردن منبع جریان از مدار و وصل یک منبع ولتاژ V_x به دو سر a و b، مدار شکل زیر را داریم. حال با نوشتن KCL در نقطه a خواهیم داشت:



$$I_x = I + \frac{V_x + ۲I}{-j۱۰} = \frac{V_x}{j۱۰} + \frac{V_x + ۲(\frac{V_x}{j۱۰})}{-j۱۰} = V_x\left(\frac{۱}{j۱۰} + \frac{۱+\frac{۲}{j۱۰}}{-j۱۰}\right) = V_x\left(-j۰/۱ + j۰/۱ + \frac{۲}{۱۰۰}\right)$$

$$I_x = V_x\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right) \ \Rightarrow \ \frac{V_x}{I_x} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰\Omega$$

مثال۱۵: در مدار زیر معادله ولتاژ تونن از پایه‌های B و A در حالت ماندگار کدام است؟ $(\cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0/6)$



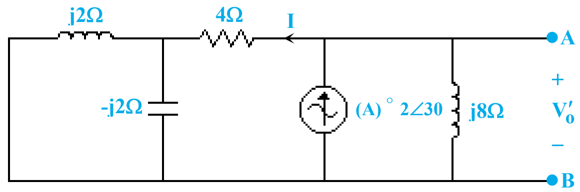
۱) $16\cos(2t+120^\circ)+8\sin(t+37^\circ)$

۲) $-16\sin(2t)+8\sin(t+37^\circ)$

۳) $16\cos(2t+120^\circ)+8\sin(t-53^\circ)$

۴) $-16\sin(2t)+8\sin(t-53^\circ)$

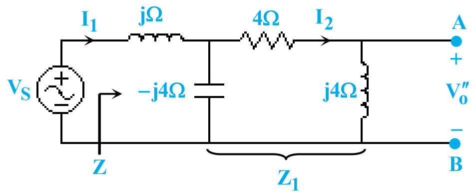
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این تست از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا اثر منبع جریان را در حالت اتصال کوتاه بودن منبع ولتاژ بررسی می‌کنیم.



با توجه به وجود یک LC موازی با مقادیر مساوی X_C و X_L در سمت چپ مدار، مقدار جریان I برابر صفر است. (زیرا اتصال موازی سلف و خازن با راکتانس برابر مدار باز می‌شود) بنابراین تمام جریان $2\angle 30^\circ$ از سلف ۴ هانری عبور خواهد کرد.

$$\Rightarrow \quad V'_0 = 2\angle 30^\circ \times 8\angle 90^\circ = 16\angle 120^\circ \Rightarrow V'_0(t) = 16\cos(2t+120^\circ)$$

حال اثر منبع ولتاژ را در حالت مدار باز بودن منبع جریان بررسی می‌کنیم: $(V_S = 10)$



طبق روابطی که قبل از این دیدیم، مقدار امپدانس Z_1 برابر $4-4j$ می‌باشد. پس داریم:

$$Z = j + z_1 = (4-3j)\Omega$$

حال می‌توان نوشت:

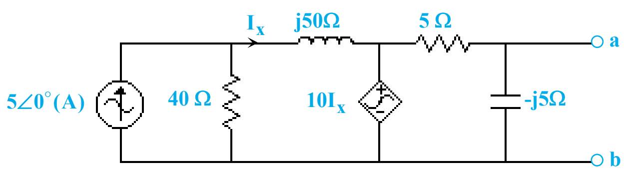
$$I_1 = \frac{V_S}{4-3j} = \frac{(4+3j)}{25}V_S \quad \text{و} \quad I_2 = I_1 \times \frac{-j4}{-j4+4+j4} = -jI_1 = \frac{3-4j}{25}V_S$$

$$V''_0 = j4 \times I_2 = j4 \times \frac{3-4j}{25} \times 10 = 8\left(\frac{4}{5}+j\frac{3}{5}\right) \Rightarrow V''_0(t) = 8\sin(t+37^\circ)$$

حال با جمع اثرات بدست آمده توسط منابع مدار داریم:

$$V_0(t) = 16\cos(2t+120^\circ) + 8\sin(t+37^\circ)$$

مثال۱۶: جریان نورتن مدار مقابل از دید دو نقطه a و b چند آمپر است؟



۱) $4-j4$

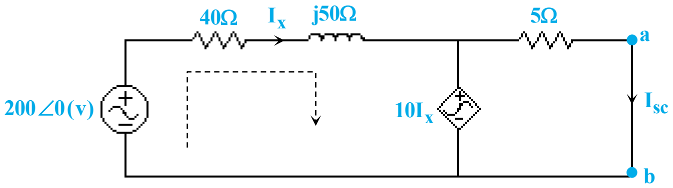
۲) $j4-4$

۳) $j2-2$

۴) $2-j2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه جریان نورتن، دو نقطه a و b را اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری را محاسبه می‌کنیم. با اتصال کوتاه شدن a و b، خازن $-j5\Omega$ از مدار حذف می‌شود. همچنین برای ساده‌تر شدن حل تست در سمت چپ نیز تبدیل منابع انجام می‌شود.

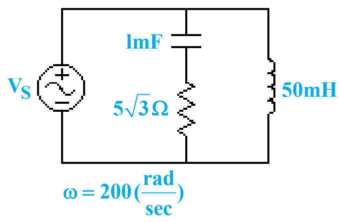
حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:



$$-200 + (40+j50)\times I_x + 10I_x = 0 \Rightarrow \quad I_x = \frac{200}{50+j50} = (2-j2)A$$

$$I_{sc} = \frac{10I_x}{5} = 2I_x = 2\times(2-j2) = (4-j4)A$$

مثال ۱۷: ضریب توان شکل مقابل کدام است؟



۱) ۰/۸۶
۲) ۰/۶
۳) ۰/۸
۴) ۰/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا امپدانس‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم:

$$Z_L = jL\omega = j(50\times10^{-3}\times200) = j10(\Omega) \quad \text{و} \quad Z_C = -j(\frac{1}{\omega C}) = -j(\frac{1}{200\times1\times10^{-3}}) = -j5\Omega$$

با توجه به مدار، خازن و مقاومت با هم سری و حاصل آنها با سلف موازی است؛ لذا داریم:

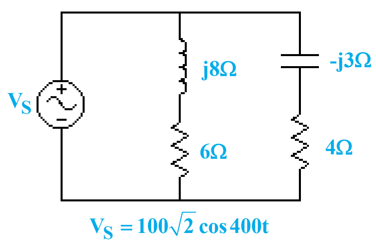
$$Z = (5\sqrt3 - j5)\,||\,j10 = \frac{(5\sqrt3-j5)j10}{5\sqrt3-j5+j10} = \frac{5(\sqrt3-j)j10}{5\sqrt3+j5} = \frac{(\sqrt3-j)j10}{\sqrt3+j} = \frac{(\sqrt3-j)(\sqrt3-j)j10}{(\sqrt3-j)(\sqrt3+j)}$$

$$= \frac{[3-1-j2\sqrt3]j10}{3-j^2} = \frac{2(1-j\sqrt3)j10}{4} = (\underbrace{5\sqrt3}_{a} + j\underbrace{5}_{b})\Omega$$

پس ضریب توان مدار برابر است با:

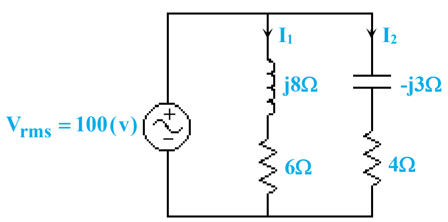
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{5\sqrt3}{\sqrt{(5\sqrt3)^2+5^2}} = \frac{5\sqrt3}{10} = \frac{\sqrt3}{2} = 0.86$$

مثال ۱۸: توان مصرفی مدار شکل مقابل چند وات است؟



۱) ۱۰۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۱۶۰۰
۴) ۲۲۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه توان مصرفی مدنظر است، فقط توان مقاومت‌ها محاسبه می‌شود و سلف و خازن توانی مصرف نمی‌کنند. لذا باید اندازه جریان‌های مؤثر دو مقاومت ۶ و ۴ اهمی تعیین شود تا بتوانیم توان مصرفی مدار را بدست آوریم. دقت شود ولتاژ دو سر هر دو شاخه مدار برابر $100\angle0^\circ$ است، لذا جریان‌های هر دو شاخه به راحتی تعیین می‌گردد:



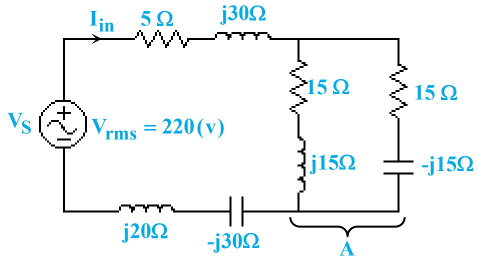
$$|I_1| = \frac{|100\angle0|}{|6+j8|} = \frac{100}{\sqrt{36+64}} = 10\,A$$

$$|I_2| = \frac{|100\angle0^\circ|}{|4-j3|} = \frac{100}{\sqrt{16+9}} = 20\,A$$

لذا داریم:

$$P = P_{4\Omega} + P_{6\Omega} = 4\times(20)^2 + 6\times(10)^2 = 1600+600 = \mathbf{2200\,w}$$

مثال ۱۹: در مدار مقابل توان مختلط منبع برحسب ولت آمپر کدام است؟



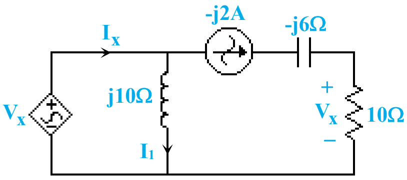
۱) $1150\angle45^\circ$
۲) $1210\sqrt2\angle45^\circ$
۳) $1150\angle-45^\circ$
۴) $1210\sqrt2\angle-45^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن توان مختلط منبع باید ابتدا جریان مدار محاسبه شود.

$$Z_A = (15+15j)\,||\,(15-15j) = \overbrace{15\Omega}^{\text{طبق جدول مربوط به امپدانس‌های معادل}} \Rightarrow I_{in} = \frac{220}{5+j30+15-j30+j20} = \frac{220\angle0}{20+j20} = \frac{220\angle0}{20\sqrt2\angle+45^\circ} = \frac{11}{\sqrt2}\angle-45^\circ\ A\ (rms)$$

$$\Rightarrow I_{in} = 5.5\sqrt2\angle-45^\circ \quad , \quad S_{\text{منبع}} = V_S.I_{in}^* = 220\angle0\times5.5\sqrt2\angle+45^\circ \Rightarrow S_{\text{منبع}} = 1210\sqrt2\angle+45^\circ\ VA$$

مثال۲۰: در مدار شکل مقابل اندازه توان منبع وابسته چند ولت آمپر است؟ (منبع جریان بر حسب مقدار مؤثر داده شده است.)



۱) ۵۶/۶
۲) ۴۰
۳) ۲۰
۴) ۲۸/۲

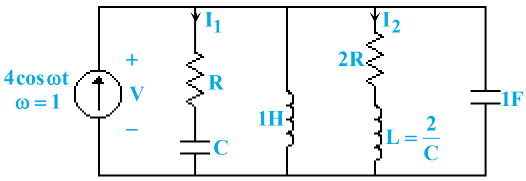
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با دقت در شکل مدار، ملاحظه می‌گردد که $\frac{V_x}{۱۰}=-j۲$ و یا $V_x=-j۲۰(v)$ می‌باشد. از طرفی جریان سلف برابر است با:

$$I_۱=\frac{V_x}{j۱۰}=\frac{-j۲۰}{j۱۰}=-۲A$$

حال جریان منبع ولتاژ وابسته برابر با مجموع دو جریان $-j۲$ و -۲ خواهد بود.

$$I_x=-۲-j۲ \Rightarrow |I_x|=۲/۸۳A \quad , \quad V_x=-j۲۰v \Rightarrow |V_x|=۲۰v \Rightarrow |S_x|=|V_x|.|I_x|=۲۰\times ۲/۸۳\simeq \mathbf{۵۶/۶VA}$$

مثال۲۱: در مدار زیر چه کسری از توان متوسط منبع به مقاومت R اهمی می‌رسد و مجموع جریان‌های $i_۱(t)+i_۲(t)$ چقدر می‌باشد؟



۱) $۴\cos t\ ,\ \frac{۱}{۳}$
۲) $۴\cos t\ ,\ \frac{۲}{۳}$
۳) $۲\cos t\ ,\ \frac{۱}{۳}$
۴) $۲\cos t\ ,\ \frac{۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه $\omega=۱$ می‌باشد، سلف ۱H و خازن ۱F تشکیل مدار باز می‌دهند؛ بنابراین جریان از آن‌ها عبور نمی‌کند و داریم $i_۱+i_۲=۴\cos t$. با توجه به اینکه دو قسمت باقی مانده با هم موازی هستند، می‌توان جریان $I_۱$ و $I_۲$ را محاسبه کرد:

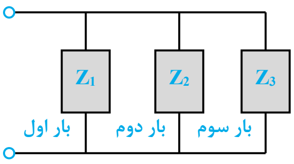
$$\left.\begin{array}{l} I_۱=\dfrac{V}{R+\dfrac{۱}{jC}} \\ I_۲=\dfrac{V}{۲R+jL}=\dfrac{V}{۲R+\dfrac{j۲}{C}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|I_۱|}{|I_۲|}=۲$$

توان متوسط کل برابر است با مجموع توان‌های مصرف شده در مقاومت‌های R و ۲R، و داریم:

$$P_R=\frac{۱}{۲}(R)|I_۱|^۲ \quad , \quad P_{۲R}=\frac{۱}{۲}(۲R)|I_۲|^۲$$

$$\Rightarrow \frac{P_R}{P_{tot}}=\frac{\frac{۱}{۲}R|I_۱|^۲}{\frac{۱}{۲}R|I_۱|^۲+\frac{۱}{۲}(۲R)|I_۲|^۲}=\frac{|I_۱|^۲}{|I_۱|^۲+۲|I_۲|^۲}=\frac{۴|I_۲|^۲}{۴|I_۲|^۲+۲|I_۲|^۲}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۲۲: در مدار زیر $\cos\theta$ برای مجموعه بارها کدام است؟



بار اول $\begin{cases} P_۱=۸kw \\ Q_۱=۲۵k\ var \end{cases}$ پس‌فاز

بار دوم $\begin{cases} P_۲=۶kw \\ \cos\theta_۲=۰/۶ \end{cases}$ پیش‌فاز

بار سوم $\begin{cases} P_۳=۱۲kw \\ \cos\theta_۳=۰/۸ \end{cases}$ پس‌فاز

۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۷
۴) ۰/۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن $\cos\theta$ طبق نکته گفته شده باید P_T، Q_T و S_T را محاسبه کرد:

$$P_۱=۸kW, Q_۱=۲۵kVAR \Rightarrow S_۱=۸+j۲۵kVA$$

$$P_۲=۶kW\ ,\ \cos\theta_۲=\frac{P_۲}{|S_۲|}=\frac{۶}{|S_۲|}=۰/۶ \Rightarrow |S_۲|=۱۰kVA$$

$$\xrightarrow{\text{بار پیش‌فاز}} Q_۲=-\sqrt{|S_۲|^۲-P_۲^۲}=-\sqrt{۱۰۰-۳۶}=-۸kVAR \Rightarrow S_۲=۶-j۸kVA$$

$$P_۳=۱۲kW\ ,\ \cos\theta_۳=\frac{P_۳}{|S_۳|}=\frac{۱۲}{|S_۳|}=۰/۸ \Rightarrow |S_۳|=۱۵kVA$$

$$\xrightarrow{\text{بار پس فاز}} Q_۳ = \sqrt{|S_۳|^۲ - P_۳^۲} = \sqrt{۲۲۵ - ۱۴۴} = ۹\,\text{kVAR} \Rightarrow S_۳ = ۱۲ + j۹\,\text{kVA}$$

$$P_T = P_۱ + P_۲ + P_۳ = ۸ + ۶ + ۱۲ = ۲۶\,\text{kW} \quad , \quad S_T = S_۱ + S_۲ + S_۳ = ۲۶ + j۲۶\,\text{kVA}$$

$$\cos\theta = \frac{P_T}{|S_T|} = \frac{۲۶}{۲۶\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$$

مثال ۲۳: در یک مقاومت، معادله جریان عبوری به صورت زیر است. توان مصرفی توسط مقاومت کدام است؟

$$\mathbf{I(t) = ۱۰ + ۶\sin ۲t + ۸\cos(۳t + \theta) \quad , \quad R = ۱۰\Omega}$$

۱) $۱/۵\,\text{kW}$ ۲) $۱/۲۵\,\text{kW}$ ۳) $۲\,\text{kW}$ ۴) $۱/۶\,\text{kW}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مقدار مؤثر سیگنال جریان را محاسبه می‌کنیم و سپس برای محاسبه توان از آن استفاده می‌کنیم.

$$I(\text{rms}) = \sqrt{۱۰^۲ + (\frac{۶}{\sqrt{۲}})^۲ + (\frac{۸}{\sqrt{۲}})^۲} = \sqrt{۱۵۰}\,\text{A} \Rightarrow P_R = [I(\text{rms})]^۲ \times R = ۱۵۰ \times ۱۰ = ۱/۵\,\text{kW}$$

مثال ۲۴: دو سر یک مقاومت $(R = ۱/۵\Omega)$، ولتاژی به معادله $V(t)$ موجود می‌باشد. توان مصرفی مقاومت مذکور کدام است؟

$$\mathbf{(V(t) = ۲\cos ۲t - \cos(۲t + ۶۰^\circ))}$$

۱) $۱\,\text{w}$ ۲) $۲/۵\,\text{w}$ ۳) $۱/۵\,\text{w}$ ۴) $۳\,\text{w}$

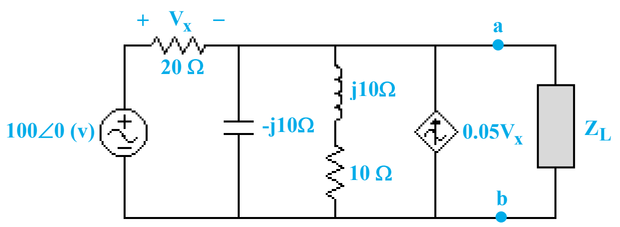
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به دلیل اینکه دو موج کسینوسی دارای فرکانس $۲(\frac{\text{rad}}{\text{sec}})$ داریم، لذا باید ابتدا آنها را ترکیب کنیم؛ بدین منظور از فازورها استفاده می‌کنیم:

$$V(t) = ۲\cos ۲t - \cos(۲t + ۶۰^\circ) \Rightarrow V = ۲\angle ۰^\circ - ۱\angle ۶۰^\circ \Rightarrow V = ۲ - (\cos ۶۰^\circ + j\sin ۶۰^\circ) = ۲ - ۰/۵ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}j$$

$$V = ۱/۵ - j\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱/۵^۲ + (-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}\angle\theta = \sqrt{۳}\angle\theta \Rightarrow V(t) = \sqrt{۳}\cos(۲t + \theta)$$

$$V_{rms} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\text{v} \Rightarrow P_R = \frac{(V_{rms})^۲}{R} = \frac{۱/۵}{۱/۵} = ۱\text{w}$$

مثال ۲۵: در مدار زیر Z_L برحسب اهم کدام باشد تا توان حداکثر به آن منتقل شود؟



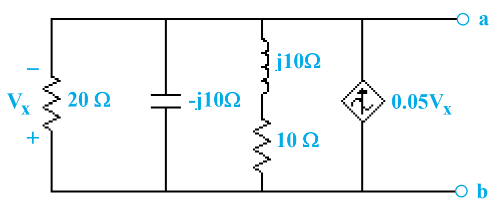
۱) $۲ - j۶$

۲) $۶ - j۲$

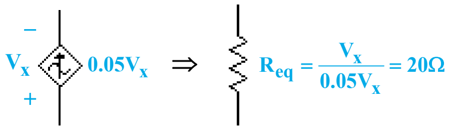
۳) $۶ + j۲$

۴) $۲ + j۶$

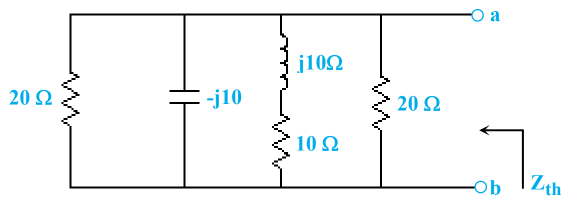
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن امپدانس تونن، منابع ولتاژ مستقل را غیرفعال و منابع جریان مستقل را در صورت وجود به صورت مدار باز مدل می‌کنیم.



با توجه به این که ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته $۰/۰۵V_x$، برابر V_x است، مـی‌تـوان مقاومت معادل آن را بدست آورد.



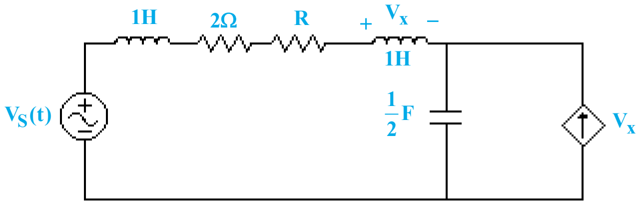
با جایگذاری مقاومت فوق داریم:



$$Z_{th} = ۲۰ \,||\, ۲۰ \,||\, (-j۱۰) \,||\, (j۱۰ + ۱۰) = (۶ - j۲)\Omega$$

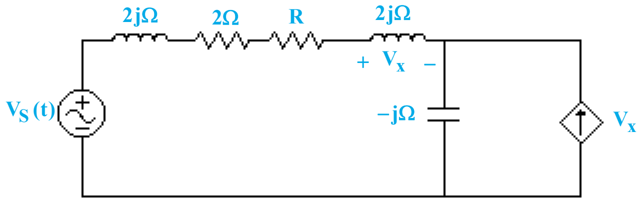
$$\Rightarrow \mathbf{Z_L = Z_{th}^* = (۶ + j۲)\Omega}$$

مثال ۲۶: وقتی در وضعیت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = 2(\frac{Rad}{sec})$، بیشترین توان متوسط مقاومت R برابر ۲۰w باشد، مجموع توان‌های متوسط منبع ولتاژ و منبع جریان چند وات است؟

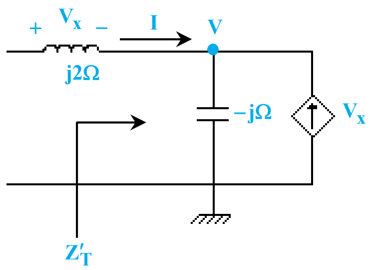


۱) ۲۸
۲) −۲۸
۳) ۴۲
۴) −۴۲

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار را با توجه به $\omega = 2\frac{Rad}{sec}$ به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



حال امپدانس معادل تونن را از دو سر R پیدا می‌کنیم:



برای بدست آوردن Z'_T داریم:

$$Z'_T = \frac{V}{I}\ ,\ I = \frac{V_x}{2j} \Rightarrow V_x = 2jI$$

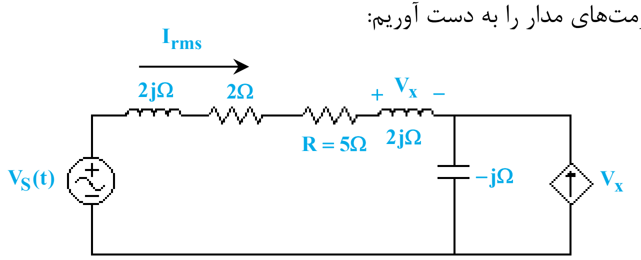
در گره سمت راست مدار KCL می‌نویسیم:

$$-I + \frac{V}{-j} - V_x = 0 \Rightarrow -I + \frac{V}{-j} - 2jI = 0 \Rightarrow V = -j(1+2j)I \Rightarrow V = (2-j)I \Rightarrow Z'_T = 2-j \Rightarrow Z_T = 2+4j+Z'_T = 2+4j+2-j = 4+3j$$

برای آن که ماکزیمم توان به R برسد باید:

$$R = |Z_T| = \sqrt{4^2+3^2} = 5\Omega$$

حال کافیست مجموع توان‌های مصرفی مقاومت‌های مدار را به دست آوریم:

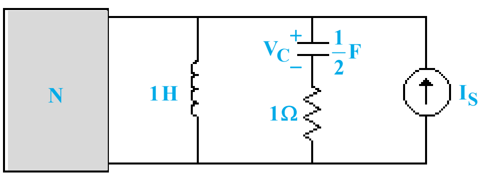


$$R \times I_{rms}^2 = 20w \Rightarrow 5 \times I_{rms}^2 = 20 \Rightarrow I_{rms}^2 = 4A$$

مجموع توان‌های مصرفی مقاومت‌های مدار $= (R+2) \times I_{rms}^2 = 7 \times 4 = 28\,w$

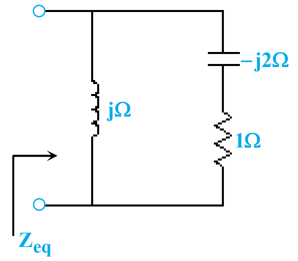
و چون مجموع توان‌های منابع تولید کننده توان، قرینه مجموع توان‌های مصرف شده است، پس مجموع توان‌های منبع ولتاژ و منبع جریان برابر $-28\,w$ است.

مثال ۲۷: در مدار شکل زیر N یک مدار LTI و فاقد منابع مستقل است. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس $\omega = 1(\frac{rad}{sec})$، توان N ماکزیمم می‌شود. اگر مدار در $t=0$ بدون شرایط اولیه و $I_S = 3\delta(t)$ باشد، $V_C(0^+)$ برابر کدام گزینه است؟



۱) −۶v
۲) ۶v
۳) −۲v
۴) ۲v

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر در $\omega = 1\frac{rad}{sec}$ توان شبکه N حداکثر شود، باید Z_n برابر Z_{eq}^* در مدار سمت راست باشد. حال مقدار Z_{eq} مدار سمت راست را محاسبه می‌کنیم.

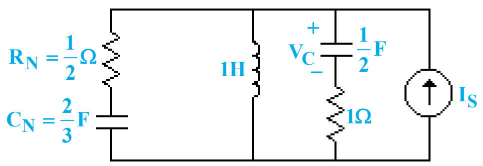


$$Z_{eq} = j \,||\, (1 - j2) \Rightarrow Z_{eq} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j)\Omega$$

$$\Rightarrow Z_n = Z_{eq}^* = (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j)\Omega$$

با توجه به امپدانس Z_n، شبکه N، یک مدار RC سری است که مقادیر R_N و C_N در آن به صورت زیر است:

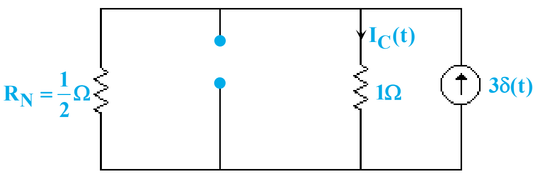
$$R_N = \frac{1}{2}\Omega \quad , \quad X_{C_N} = \frac{3}{2}\Omega \Rightarrow \frac{1}{C_N\omega} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{C_N} = \frac{3}{2} \Rightarrow C_N = \frac{2}{3}F$$



حال با جایگذاری شبکه N، مدار به صورت روبرو خواهد شد. برای محاسبه مقدار $V_C(0^+)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. در این حالت با توجه به اعمال ضربه، سلفها را مدار باز و خـازن‌هـا را اتصال کوتاه می‌کنیم.

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} I_C(t)dt$$

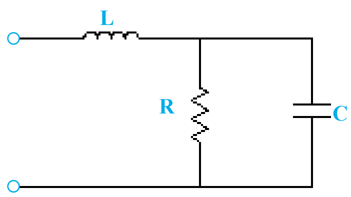
با نوشتن قانون تقسیم جریان داریم:



$$I_C(t) = 3\delta(t) \times \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \delta(t) \quad , \quad V_C(0^-) = 0$$

$$\Rightarrow V_C(0^+) = 0 + \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \Rightarrow \mathbf{V_C(0^+) = 2v}$$

مثال ۲۸: فرکانس زاویه‌ای تشدید مدار شکل زیر کدام است؟



۱) $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$
۲) $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC - (RC)^2}}$
۳) $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
۴) $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن فرکانس رزونانس، امپدانس مدار را محاسبه کرده و قسمت موهومی آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$Z = j\omega L + (R \,||\, \frac{1}{j\omega C}) = j\omega L + \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2R^2C^2} = \frac{R}{1 + \omega^2R^2C^2} + j(\omega L - \frac{\omega R^2C}{1 + \omega^2R^2C^2})$$

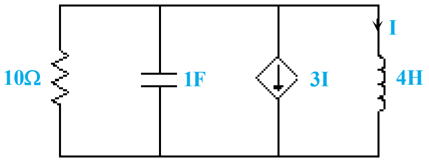
بخش موهومی امپدانس را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\omega_r L - \frac{\omega_r R^2C}{1 + \omega_r^2R^2C^2} = 0 \Rightarrow \omega_r(L - \frac{R^2C}{1 + \omega_r^2R^2C^2}) = 0$$

$\omega_r = 0$ یک جواب معادله می‌باشد.

$$L + \omega_r^2R^2C^2L = R^2C \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{R^2C - L}{R^2C^2L} \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}}$$

مثال ۲۹: فرکانس تشدید مدار زیر کدام است؟

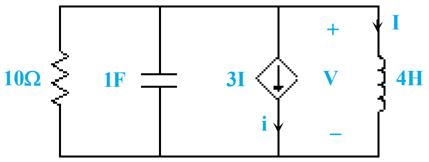


۱) $1\frac{rad}{sec}$ ۲) $2\frac{rad}{sec}$

۳) $3\frac{rad}{sec}$ ۴) $4\frac{rad}{sec}$

پاسخ: گزینه «۱» این مدار یک مدار RLC سری یا موازی نیست اما می‌توان آن را به شکل یک مدار RLC موازی درآورد.

ولتاژ دو سر منبع جریان برابر است با:

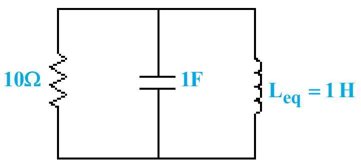


$$V = 4\frac{dI}{dt}$$

و جریان آن برابر است با $i = 3I$. پس می‌توان نوشت:

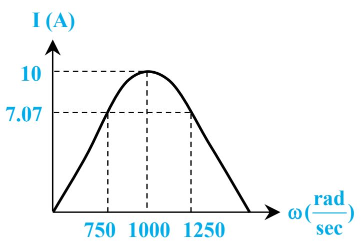
$$V = 4\frac{dI}{dt} = \frac{4}{3}\frac{di}{dt}$$

یعنی منبع جریان مانند یک سلف با اندوکتانس $\frac{4}{3}$ هانری رفتار می‌کند. پس داریم:



$$L_{eq} = \frac{4\times\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}} = 1H\ ,\ C = 1F \Rightarrow \omega_r = \omega_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1\frac{rad}{sec}$$

مثال ۳۰: منحنی تغییرات جریان یک مدار RLC سری مطابق شکل داده شده می‌باشد. اگر $C = 4L$ باشد، مقاومت اهمی مدار چند اهم است؟



۱) $0/75$

۲) ۱

۳) $0/5$

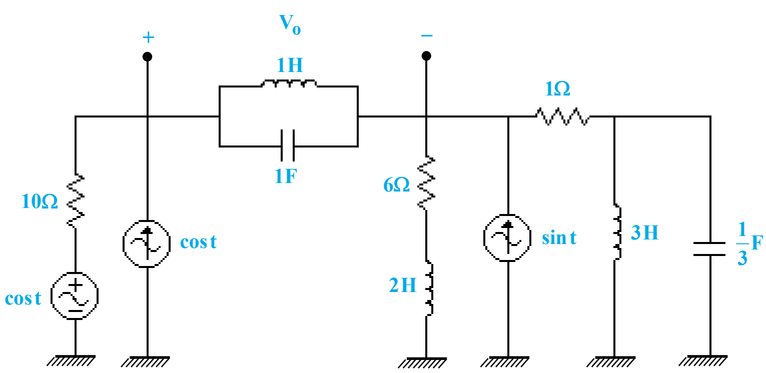
۴) $0/25$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مقدار L را محاسبه و با استفاده از فرمول پهنای باند، مقدار R را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} LC\omega^2 = 1 \\ C = 4L \end{cases} \Rightarrow L\times 4L\times 1000^2 = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{2000} \Rightarrow L = 0/5\,mH$$

$$BW = 1250 - 750 = 500\left(\frac{rad}{s}\right) \Rightarrow 500 = \frac{R}{L} = \frac{R}{0/5\times 10^{-3}} \Rightarrow \mathbf{R = 0/25\Omega}$$

مثال ۳۱: در مدار زیر مقدار V_o مطابق با کدام گزینه است؟



۱) $2+6j$

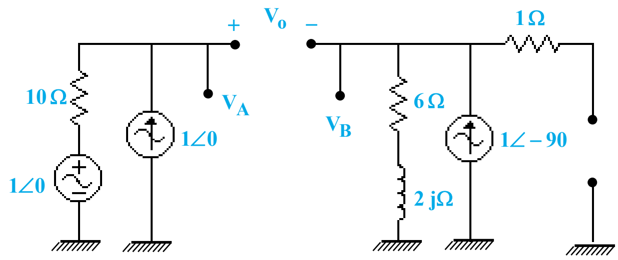
۲) $2-6j$

۳) $9-6j$

۴) $9+6j$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه همه منابع مدار هم‌فرکانس هستند، می‌توانیم مدار را با $\omega = 1\frac{rad}{sec}$ به صورت فازوری ترسیم کنیم.

دقت کنید در این حالت با توجه به برابری $\omega = ۱$ با فرکانس رزونانس LCهای موازی در بالا و سمت راست مدار، آنها را به صورت مدار باز فرض می‌کنیم.



$$V_A = (۱\angle ۰)\times ۱۰ + ۱\angle ۰ = ۱۱\angle ۰$$

$$V_B = ۱\angle -۹۰ \times [۶+۲j] = (-j)(۶+۲j) = ۲-۶j$$

$$V_o = V_A - V_B = ۱۱\angle ۰ - [۲-۶j] = ۱۱-۲+۶j \Rightarrow V_o = ۹+۶j$$

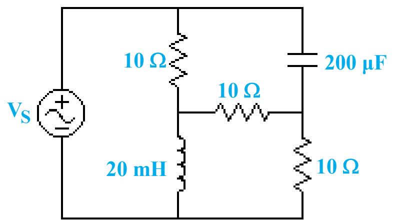
مثال ۳۲: در مدار زیر با افزایش فرکانس منبع به صورت دو برابر، مقدار امپدانس معادل مدار زیر به چه صورت تغییر می‌کند؟

۱) دو برابر می‌شود.

۲) $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

۳) تغییری ندارد.

۴) ۲/۲ برابر می‌شود.



پاسخ: گزینه «۳» برای پاسخ به این مثال باید به این نکته توجه کرد که مطابق با مطلب گفته شده در نکته قبل، اگر $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_۲ = R_۱$ باشد، مقدار امپدانس برابر $R_۱ = ۱۰\Omega$ بوده و مستقل از فرکانس است.

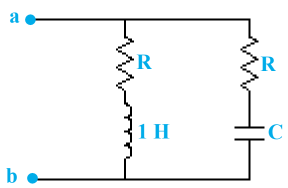
مثال ۳۳: در مدار روبرو R و C کدام باشند تا در همه فرکانس‌ها امپدانس و ادمیتانس مدار برابر شوند؟

۱) $R = ۱\Omega , C = ۱F$

۲) $R = ۲\Omega , C = \frac{۱}{۲}F$

۳) $R = ۲\Omega , C = ۲F$

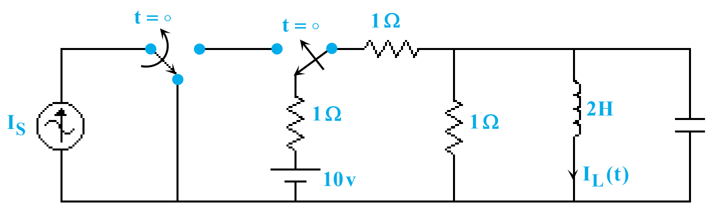
۴) $R = \frac{۱}{۲}\Omega , C = ۲F$



پاسخ: گزینه «۱» در صورت برقراری شرط $\sqrt{\frac{L}{C}} = ۱ = R$، ادمیتانس و امپدانس مدار برابر می‌شود زیرا کل مدار معادل $R = ۱\Omega$ خواهد بود. لذا داریم:

$$۱ = \sqrt{\frac{۱}{C}} \Rightarrow \mathbf{C = ۱F}$$

مثال ۳۴: در مدار زیر پاسخ کامل $I_L(t)$ تقریباً کدام است؟ ($I_s(t) = ۴\cos\frac{t}{۴}$)



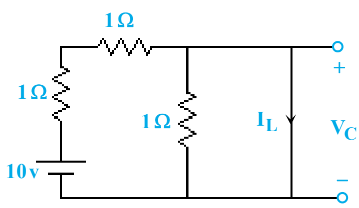
۱) $e^{-۰/۵t}[۱/۵۶\cos ۰/۵t + ۰/۵۶\sin ۰/۵t] + ۴\cos(۰/۲۵t - ۳۰^\circ)$

۲) $e^{-۰/۵t}[۳\cos ۰/۵t + ۰/۵۶\sin ۰/۵t] + ۴\cos(۰/۲۵t - ۶۰^\circ)$

۳) $e^{-۰/۵t}[۱/۵۶\cos ۰/۵t + ۱/۲۶\sin ۰/۵t] + ۴\cos(۰/۲۵t - ۳۰^\circ)$

۴) $e^{-۰/۵t}[۳\cos ۰/۵t + ۱/۲۶\sin ۰/۵t] + ۴\cos(۰/۲۵t - ۶۰^\circ)$

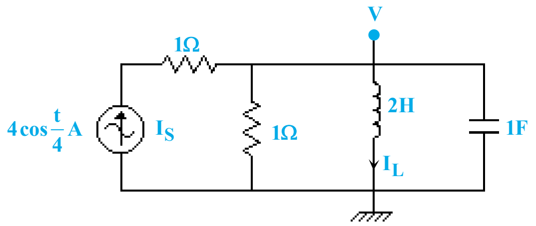
پاسخ: گزینه «۱» با تحلیل مدار در $t = ۰^-$ دیده می‌شود که ولتاژ اولیه خازن برابر صفر و جریان اولیه سلف برابر ۵ آمپر است:



$$I_L(۰^\pm) = ۵A$$

$$V_C(۰^\pm) = ۰$$

حال مدار را بعد از کلیدزنی تحلیل می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V}{۱}+I_L+۱\times\frac{dV}{dt}=I_S \quad , \quad V=۲\frac{dI_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^۲I_L}{dt^۲}+\frac{dI_L}{dt}+\frac{I_L}{۲}=\frac{I_S}{۲}$$

برای حل معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه را بدست می‌آوریم:

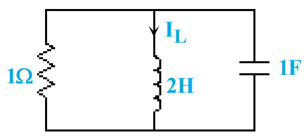
$$\omega_\circ=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{rad}{sec}\right) \quad , \quad \alpha=\frac{۱}{۲RC}=\frac{۱}{۲\times۱\times۱}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad \omega_d=\sqrt{\omega_\circ^۲-\alpha^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

$$S^۲+۲\alpha S+\omega_\circ^۲=۰ \Rightarrow S^۲+S+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱=-۰/۵+j۰/۵ \\ S_۲=-۰/۵-j۰/۵ \end{cases}$$

بنابراین پاسخ عمومی به شکل مقابل است:

$$I_L(t)=e^{-\alpha t}[A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t] \Rightarrow I_L(t)=e^{-۰/۵t}[A\cos۰/۵t+B\sin۰/۵t]$$

روش دوم برای محاسبه پاسخ عمومی: پاسخ عمومی ناشی از شرایط اولیه است؛ لذا طبق جمع آثار منبع را صفر می‌کنیم و تنها فرم پاسخ عمومی را بدست می‌آوریم.



$$\text{موازی RLC} \Rightarrow S^۲+\frac{۱}{RC}S+\frac{۱}{LC}=۰ \Rightarrow S^۲+S+\frac{۱}{۲}=۰$$

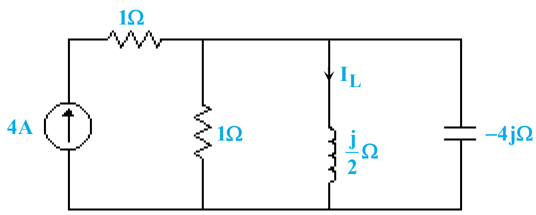
$$\Rightarrow I_L(t)=e^{-۰/۵t}[A\cos۰/۵t+B\sin۰/۵t]$$

در ادامه به محاسبه پاسخ اختصاصی معادله دیفرانسیل با استفاده از فازور می‌پردازیم:

$$I_L[(j\omega)^۲+(j\omega)+\frac{۱}{۲}]=\frac{I_S}{۲} \quad , \quad \omega=\frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow I_L[(\frac{j}{۴})^۲+\frac{j}{۴}+\frac{۱}{۲}]=۲\angle۰$$

$$\Rightarrow I_L[-\frac{۱}{۱۶}+\frac{j}{۴}+\frac{۱}{۲}]=۲ \Rightarrow I_L=\frac{۳۲}{۷+j۴}=\frac{۳۲(۷-j۴)}{۶۵}\cong۴(۰/۸۶-j۰/۵)=۴\angle-۳۰^\circ \Rightarrow I_L(t)=۴\cos(۰/۲۵t-۳۰^\circ)$$

روش دوم برای محاسبه پاسخ خصوصی: حل مدار در حالت دائمی سینوسی



$$\Rightarrow I_L=\frac{۱\|-۴j}{(۱\|-۴j)+\frac{j}{۲}}\times۴=\frac{\frac{-۴j}{۱-۴j}}{\frac{-۴j}{۱-۴j}+\frac{j}{۲}}\times۴\cong۴(۰/۸۶-j۰/۵)=۴\angle-۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow I_L(t)=۴\cos(۰/۲۵t-۳۰^\circ) \quad : \text{پاسخ خصوصی}$$

حال با جمع پاسخ خصوصی و پاسخ عمومی، پاسخ حالت کامل به صورت زیر است:

$$I_L(t)=e^{-۰/۵t}[A\cos۰/۵t+B\sin۰/۵t]+۴\cos(۰/۲۵t-۳۰^\circ)$$

برای محاسبه ضرایب A و B از شرایط اولیه مدار استفاده می‌کنیم. با قرار دادن مقدار $I_L(۰^+)=۵A$ در معادله $I_L(t)$ داریم:

$$۵=e^\circ[A\cos۰+B\sin۰]+۴\cos(۰-۳۰^\circ) \Rightarrow ۵=A+۳/۴۴ \Rightarrow A=۱/۵۶$$

برای محاسبه ضریب B باید مقدار $\frac{dI_L(۰^+)}{dt}$ محاسبه شود:

$$V_C(۰^+)=V_L(۰^+)=۲\frac{dI_L(۰^+)}{dt}=۰ \Rightarrow \frac{dI_L(۰^+)}{dt}=۰$$

با مشتق‌گیری از معادله $I_L(t)$ داریم:

$$\frac{dI_L(t)}{dt}=-۰/۵e^{-۰/۵t}[A\cos۰/۵t+B\sin۰/۵t]+e^{-۰/۵t}[-۰/۵A\sin۰/۵t+۰/۵B\cos۰/۵t]-۴\times۰/۲۵\sin(۰/۲۵t-۳۰^\circ)$$

$$\Rightarrow\frac{dI_L(۰^+)}{dt}=-۰/۵e^\circ[A\cos۰+B\sin۰]+e^\circ[-۰/۵A\sin۰+۰/۵B\cos۰]-۴\times۰/۲۵\sin(۰-۳۰^\circ)=-۰/۵A+۰/۵B+۰/۵=۰/۵B-۰/۲۸$$

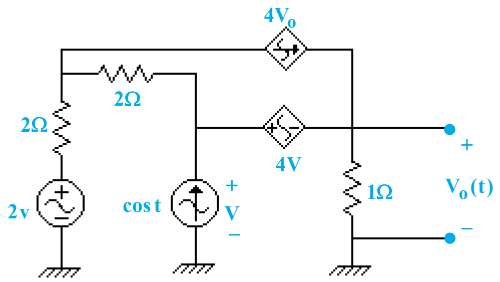
$$\frac{dI_L(۰^+)}{dt}=۰ \Rightarrow B=۰/۵۶$$

حال با جایگذاری ضرایب A و B پاسخ کامل مدار به صورت زیر خواهد بود:

$$I_L(t)=e^{-۰/۵t}[۱/۵۶\cos۰/۵t+۰/۵۶\sin۰/۵t]+۴\cos(۰/۲۵t-۳۰^\circ)$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ در مدار زیر معادله ولتاژ $V_o(t)$ برحسب ولت کدام است؟



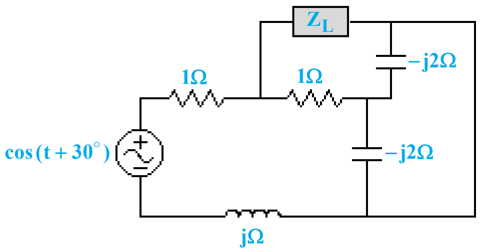
۱) $\frac{۱۲}{۱۳}\cos t+\frac{۶}{۱۳}$

۲) $\frac{۶}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۲}{۱۳}\cos t$

۴) $-\frac{۱۲}{۱۳}\cos t+(-\frac{۶}{۱۳})$

۲ـ در مدار زیر مقدار Z_L برحسب اهم کدام باشد تا توان مصرفی آن حداکثر شود؟



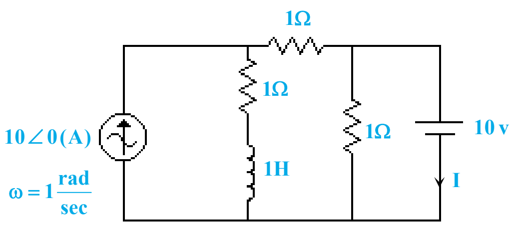
۱) ۱

۲) $(۱-j)$

۳) $(۱+j)$

۴) ۱-

۳ـ در مدار زیر مقدار جریان I برحسب آمپر کدام است؟



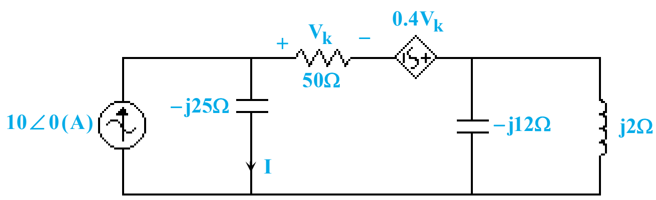
۱) $-۱۵+۶/۳۲\cos(t+۱۸/۴^\circ)$

۲) $۵+۶/۳۲\cos(t+۲۳^\circ)$

۳) $-۵+۶/۳۲\cos(t+۱۸/۴^\circ)$

۴) $-۵+۶/۳۲\cos(t+۲۳^\circ)$

۴ـ در مدار زیر جریان I برحسب آمپر کدام است؟



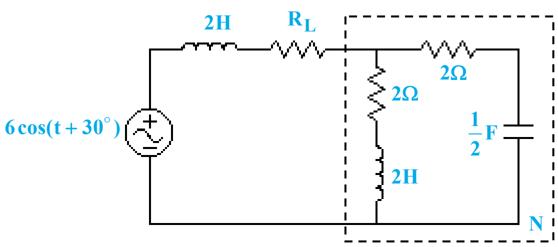
۱) $۶+j۳$

۲) $-۶+j۳$

۳) $۶+j۵/۳۲$

۴) $-۶+j۵/۳۲$

۵ـ در مدار زیر مقدار R_L برحسب اهم چقدر باشد تا حداکثر توان را جذب نماید؟



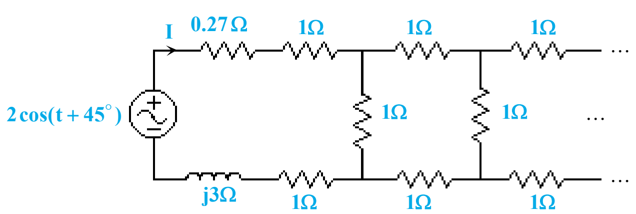
۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۲}$

۶ـ در مدار زیر مقدار جریان I برحسب آمپر کدام است؟



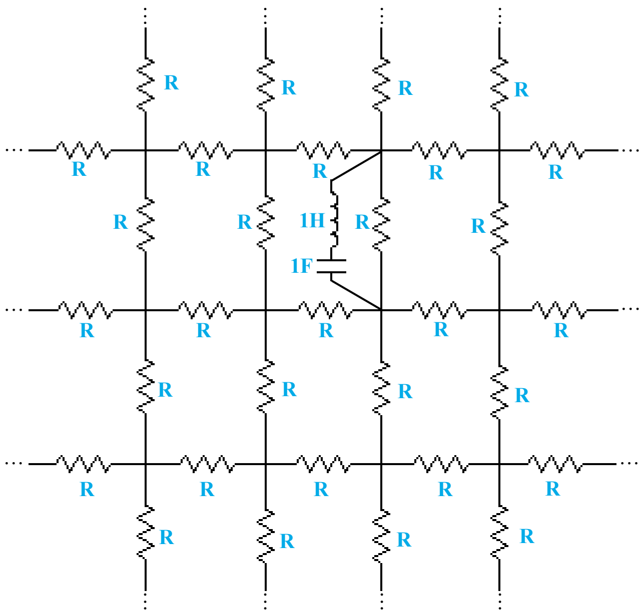
۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

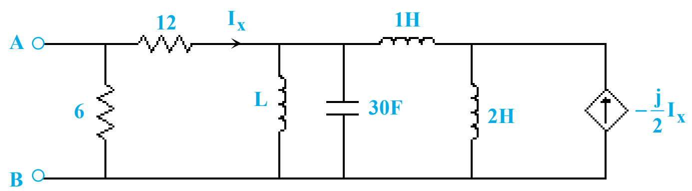
۴) $\sqrt{۲}$

۷ـ در مدار زیر مقدار ضریب کیفیت کدام است؟ $(R=1\Omega)$



۱) ۰/۶۵
۲) ۱/۳
۳) ۲
۴) ۴

۸ـ مقدار L برحسب میلی هانری کدام باشد تا با وصل منبع $k\cos t$ به دو سر A و B، ضریب توان مدار یک شود؟

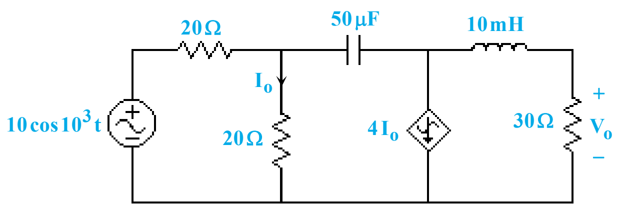


۱) ۳۳/۳
۲) ۲۶/۸
۳) ۲۴/۳
۴) ۲۲/۷

۹ـ در صورتی که جریان $I=6\sqrt{2}\sin t+10\sqrt{2}\cos 2t$ از یک مقاومت 10Ω عبور کند، توان مصرفی آن برحسب کیلووات کدام است؟

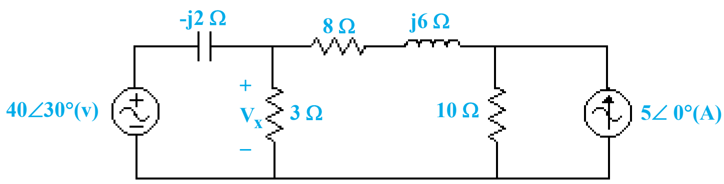
۱) ۱/۴۲ ۲) ۱/۳۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۱/۳۲

۱۰ـ اندازه V_o در مدار زیر برحسب ولت کدام است؟



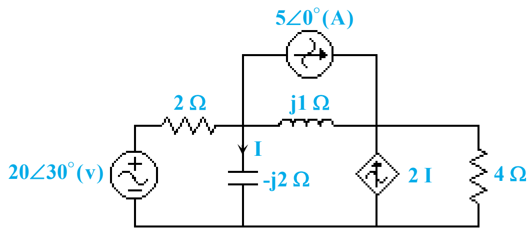
۱) ۲/۹
۲) ۶/۱۵
۳) ۷/۹
۴) ۸/۱۲

۱۱ـ مقدار V_x در مدار زیر برحسب ولت کدام است؟



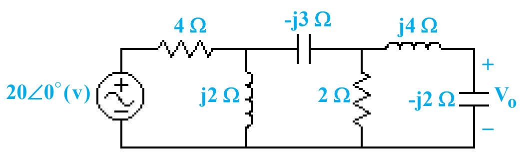
۱) $21\angle 30°$
۲) $31/2\angle 53°$
۳) $29/3\angle 63°$
۴) $31\angle 30°$

۱۲ـ مقدار اندازه‌ی جریان I در مدار زیر چند آمپر است؟



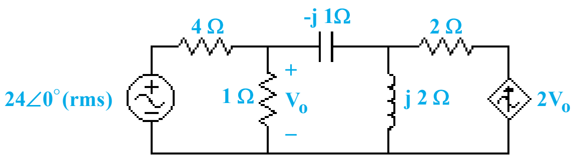
۱) ۷/۹
۲) ۸/۳
۳) ۶/۵
۴) ۱۱/۴

۱۳ـ مقدار V_o در مدار زیر برحسب ولت کدام است؟



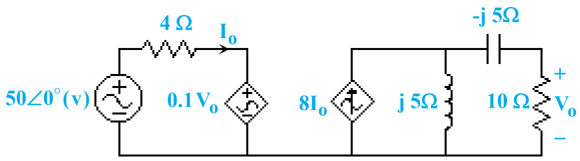
۱) $2-j3/1$
۲) $3/15+j4/1$
۳) $2/1-j2/9$
۴) $3/53-j5/88$

۱۴ـ توان مختلط منبع ولتاژ برحسب ولت آمپر کدام است؟



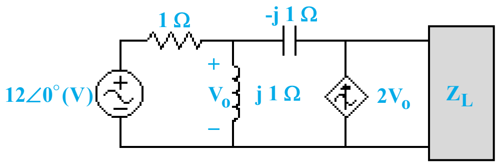
۱) ۱۵۵/۶+ j۴/۲
۲) ۱۳۲+ j۱/۲۰
۳) ۹۰/۱+ j۳۱
۴) ۲۰۶/۲− j۱۱

۱۵ـ ولتاژ مؤثر مقاومت $10\,\Omega$ برحسب ولت کدام است؟



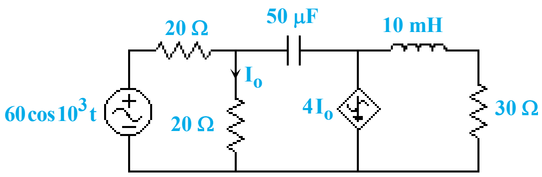
۱) ۲۲۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲۵۰
۴) ۱۱۰

۱۶ـ مقدار Z_L در حالت حداکثر توان برحسب اهم کدام است؟



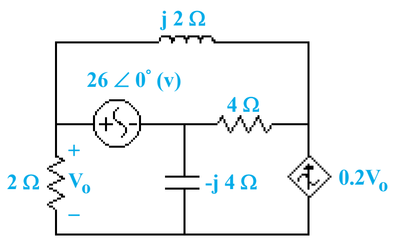
۱) $0/5\angle -45^\circ$
۲) $0/5\sqrt{2}\angle 45^\circ$
۳) $0/5\angle 45^\circ$
۴) $0/5\sqrt{2}\angle -45^\circ$

۱۷ـ توان مصرفی مقاومت ۳۰ اهمی در مدار شکل زیر تقریباً چند وات است؟



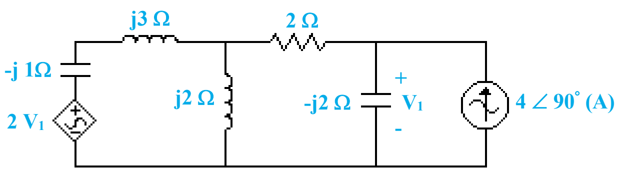
۱) ۳/۱۵
۲) ۶/۱۵
۳) ۱۲/۳
۴) ۲۳

۱۸ـ اندازه‌ی V_0 در مدار شکل زیر چند ولت است؟



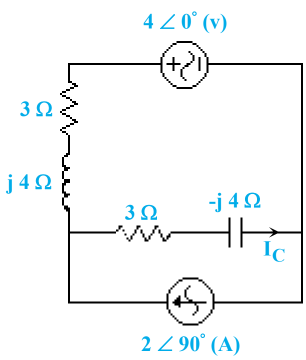
۱) ۱۶/۶۴
۲) ۱۶۶/۴
۳) ۱۱
۴) ۷۲

۱۹ـ در مدار شکل زیر ولتاژ V_1 برحسب ولت کدام است؟



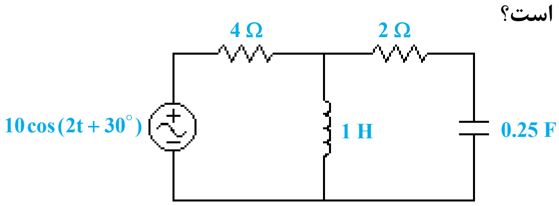
۱) $4\angle 0^\circ$
۲) $4\angle 90^\circ$
۳) $8\angle 90^\circ$
۴) $8\angle 0^\circ$

۲۰ـ فازور جریان خازن در مدار شکل زیر برحسب آمپر کدام است؟



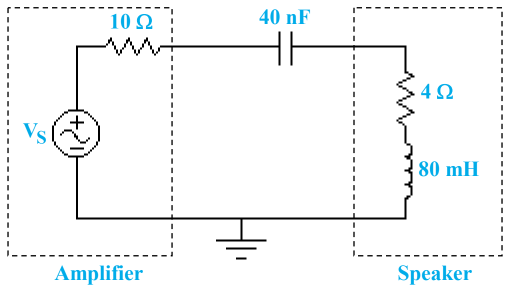
۱) $1/2\angle 123/7^\circ$
۲) $1/2\angle -123/7^\circ$
۳) $1/4\angle 123/7^\circ$
۴) $1/7\angle -123/7^\circ$

۲۱ـ در مدار شکل زیر مجموع توان متوسط جذب شده توسط تمام عناصر چند وات است؟



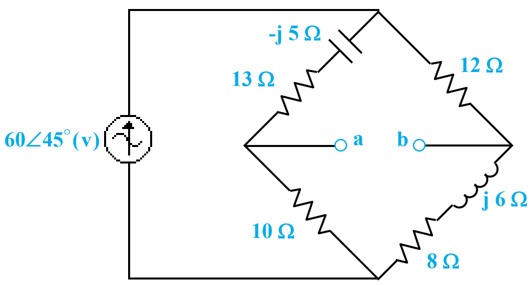
۱) ۷/۵
۲) ۵
۳) ۱۵
۴) ۱۰

۲۲ـ در مدار شکل زیر در چه فرکانسی برحسب (Hz)، بلندگو ماکزیمم توان را جذب خواهد کرد؟



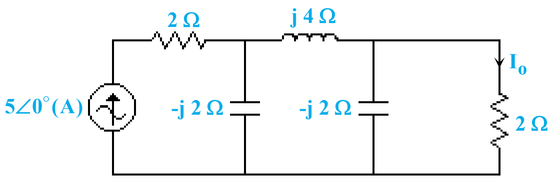
۱) ۲۷۱۱
۲) ۲۸۱۴
۳) ۲۷۱/۱
۴) ۲۸۱/۴

۲۳ـ دامنه جریان نورتن در ترمینال‌های a و b برحسب آمپر کدام است؟



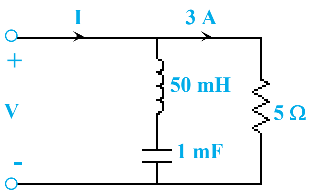
۱) ۳۲/۹
۲) ۲۲
۳) ۵
۴) ۳۸/۳۴

۲۴ـ در مدار شکل زیر مقدار جریان I_o برحسب آمپر کدام است؟



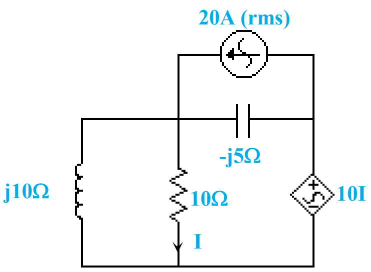
۱) ۵-
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۱۰−

۲۵ـ در مدار شکل مقابل اندازه‌ی جریان I چند آمپر است؟ $(\omega = 100(\frac{rad}{sec}))$



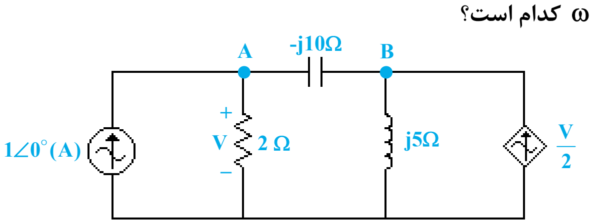
۱) ۶
۲) صفر
۳) $3\sqrt{2}$
۴) ۳

۲۶ـ در شکل مقابل توان مصرفی مقاومت چند کیلووات است؟



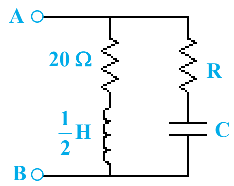
۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۲۷ـ در مدار الکتریکی شکل مقابل، اندازه‌ی تابع زمانی V_B برای $\omega = 400(\frac{rad}{sec})$ کدام است؟



۱) $10\sqrt{2}$
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) $5\sqrt{2}$

۲۸ـ در مدار شکل مقابل R و C کدام باشد تا امپدانس دیده شده از سرهای A و B مستقل از فرکانس باشد؟



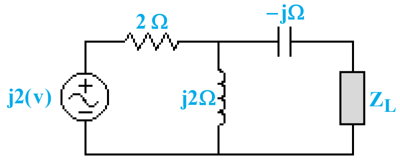
۱) $R = ۲\Omega \quad , \quad C = \frac{۱}{۸۰}F$

۲) $R = ۲\Omega \quad , \quad C = \frac{۱}{۸۰۰}F$

۳) $R = ۲۰\Omega \quad , \quad C = \frac{۱}{۸۰}F$

۴) $R = ۲۰\Omega \quad , \quad C = \frac{۱}{۸۰۰}F$

۲۹ـ در مدار شکل زیر، ماکزیمم توان منبع به مقاومت Z_L می‌رسد، مقدار این توان چند وات است؟



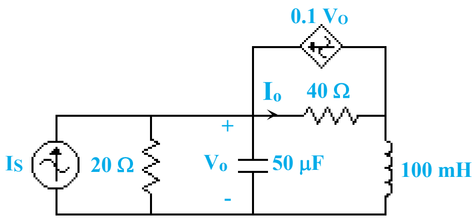
۱) ۰/۷۵

۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۱۲۵

۴) ۰/۵

۳۰ـ در مدار زیر مقدار I_o برحسب آمپر کدام است؟ $I_S = ۶\cos(۲۰۰t)$



۱) $۷/۲\angle -۶۷^\circ$

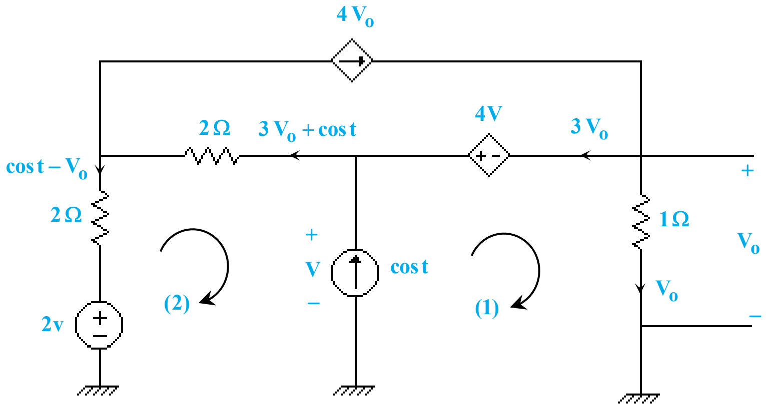
۲) $۶/۲\angle -۷۶^\circ$

۳) $۷/۹\angle ۳۳^\circ$

۴) $۹/۷\angle -۳۳^\circ$

پاسخنامه تشریحی آزمون فصل چهارم

۱ـ گزینه «۴» با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص شده داریم:

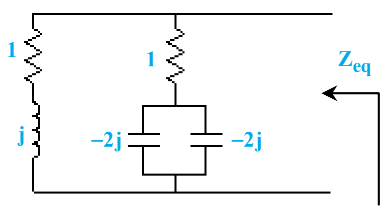


$$KVL\ (۱): -V+۴V+V_o=۰ \;\Rightarrow\; ۳V+V_o=۰ \qquad (۱)$$

$$KVL\ (۲): -۲+۲\times(V_o-\cos t)-۲\times(۳V_o+\cos t)+V=۰ \;\Rightarrow\; -۲-۴V_o-۴\cos t+V=۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۳}{۳}V_o=-۲-۴\cos t \;\Rightarrow\; V_o=\frac{-۱۲}{۱۳}\cos t-\frac{۶}{۱۳}$$

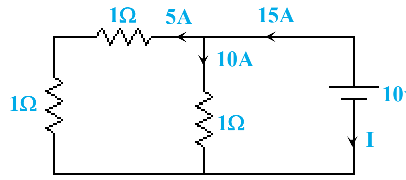
۲ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال کافی است امپدانس معادل دیده شده از دو سر Z_L را به‌دست آوریم. برای این‌کار منابع را بی‌اثر می‌کنیم.



$$Z_{eq}=(۱-\frac{۲j}{۲})\,||\,(۱+j)=۱\Omega \;\Rightarrow\; Z_L=Z_{eq}^*=۱\Omega$$

۳ـ گزینه «۱» با توجه به وجود دو منبع با فرکانس متفاوت، از قضیه‌ی جمع آثار استفاده می‌کنیم.

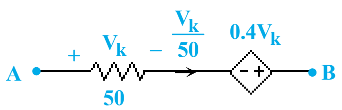
منبع DC: در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین داریم:



$$\Rightarrow\; I=-۱۵A$$

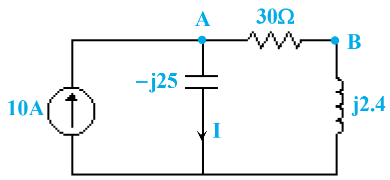
بنابراین مشاهده می‌شود تنها گزینه‌ی ۱ دارای مقدار DC مورد نظر می‌باشد. بنابراین نیاز به محاسبه‌ی مؤلفه‌ی AC جریان I نمی‌باشد.

۴ـ گزینه «۳» ابتدا معادل منبع وابسته را از روی جریان مقاومت ۵۰Ω به‌دست می‌آوریم:



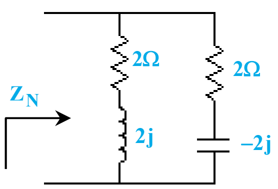
$$\Rightarrow\; R_{\text{منبع}}=-\frac{۰/۴V_k}{\frac{V_k}{۵۰}}=-۲۰\Omega \;\Rightarrow\; R_{AB}=۵۰-۲۰=۳۰\Omega$$

حال با رسم ساده‌ی مدار و استفاده از تقسیم جریان، مقدار I را به‌دست می‌آوریم:



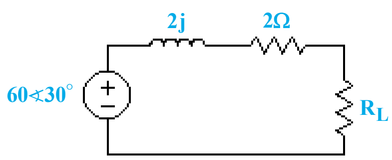
$$\Rightarrow\; I=\frac{۳۰+j۲/۴}{۳۰+j(۲/۴-۲۵)}\times ۱۰\simeq ۶+j۵/۳۲A$$

۵ـ گزینه «۲» ابتدا امپدانس معادل دیده شده از دو سر شبکه را محاسبه می‌کنیم:



$$Z_N=(۲+۲j)\,||\,(۲-۲j)=۲\Omega$$

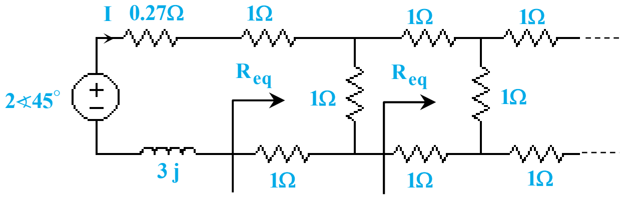
حال داریم:



بنابراین برای جذب حداکثر توان توسط R_L باید مقدارش با اندازه‌ی امپدانس دیده شده از دو سرش برابر باشد. یعنی:

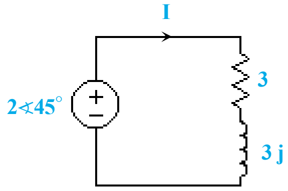
$$R_L=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۲}\Omega$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به شکل زیر ابتدا مقاومت معادل مشخص شده را محاسبه می‌کنیم:



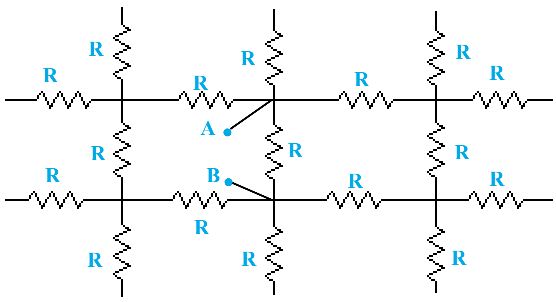
$$\Rightarrow\ R_{eq}=۲+۱\,||\,R_{eq}=۲+\frac{R_{eq}}{۱+R_{eq}}\ \Rightarrow\ R_{eq}^{۲}-۲R_{eq}-۲=۰\ \Rightarrow\ R_{eq}=۲/۷۳\Omega$$

بنابراین مدار به صورت زیر درخواهد آمد:



$$\Rightarrow\ I=\frac{۲\angle ۴۵^\circ}{۳+۳j}=\frac{۲\angle ۴۵^\circ}{۳\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}A$$

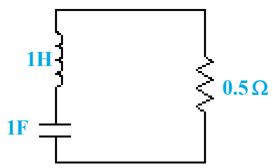
۷ـ گزینه «۳» ابتدا باید مدار معادل مقاومتی دیده شده از ۲ سر شاخه‌ی سلف و خازن را به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا جریان ۱A را به نقطه‌ی A تزریق کرده و بار دیگر جریان ۱A را از نقطه‌ی B می‌کشیم. اختلاف ولتاژ حاصله در کوتاه‌ترین مسیر را در هر حالت حساب می‌کنیم:



اگر جریان ۱A را به A تزریق کنیم، به دلیل متقارن بودن مدار، جریان ۰/۲۵ A به صورت متقارن بین ۴ شاخه‌ی متصل به A پخش می‌شود. لذا: $V_{AB_۱}=RI=۰/۲۵R$. از طرفی، برای نقطه B نیز محاسبات مشابهی خواهیم داشت، لذا: $V_{AB_۲}=۰/۲۵R$.

$$V_{AB_{\text{کل}}}=V_{AB_۱}+V_{AB_۲}=۰/۵R\xrightarrow{R=۱\Omega}V_{AB_{\text{کل}}}=۰/۵V\ \Rightarrow\ R_T=۰/۵\Omega$$

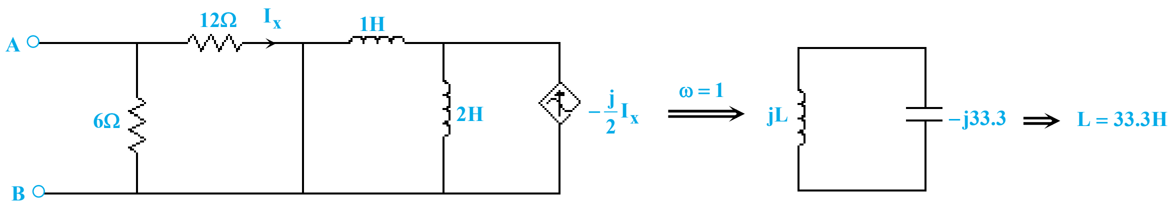
حال با داشتن مقاومت دیده شده از دو سر خازن و سلف و با استفاده از روابط مدار RLC سری خواهیم داشت:



$$\Rightarrow\ s^{۲}+\frac{R}{L}s+\frac{۱}{LC}=۰\ \Rightarrow\ s^{۲}+۰/۵s+۱=۰\ \Rightarrow\ \omega_۰=۱,\ ۲\alpha=۰/۵$$

$$\Rightarrow\ Q=\frac{\omega_۰}{۲\alpha}=\frac{۱}{۰/۵}=۲$$

۸ـ گزینه «۱» با توجه به مدار مشاهده می‌شود که اگر خازن ۳۰mF و سلف L با هم رزونانس کنند (این ۲ شاخه اتصال کوتاه شوند)، در این صورت مدار دیده شده از ۲ سر A و B به سمت راست آن ربطی نداشته و مقاومتی کامل خواهد بود:

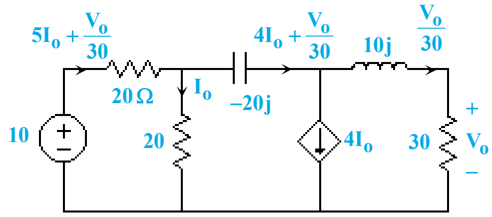


با این کار مدار معادل دیده شده از B و A برابر $۱۲\,||\,۶=۴\Omega$ خواهد بود که مقاومتی است (ضریب توان ۱).

۹ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی توان مصرفی مقاومت کافی است جریان مؤثر آن را محاسبه کنیم:

$$I_{rms}=\sqrt{۶^{۲}+۱۰^{۲}}\ A\ \Rightarrow\ P=RI_{rms}^{۲}=۱۰\times(۶^{۲}+۱۰^{۲})=۱۳۶۰w=۱/۳۶kw$$

۱۰ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



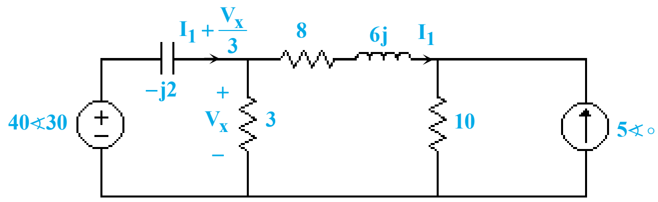
$$(\text{حلقه‌ی بیرونی})\,KVL:-۱۰+۲۰\times(۵I_o+\frac{V_o}{۳۰})-۲۰j(۴I_o+\frac{V_o}{۳۰})+(۳۰+۱۰j)\frac{V_o}{۳۰}=۰ \Rightarrow (\frac{۵}{۳}-\frac{j}{۳})V_o+(۱۰۰-۸۰j)I_o=۱۰ \quad (۱)$$

$$KVL\,(\text{حلقه‌ی سمت چپ}):-۱۰+۲۰\times(۵I_o+\frac{V_o}{۳۰})+۲۰I_o=۰ \Rightarrow ۱۲۰I_o+\frac{۲}{۳}V_o=۱۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (\frac{۵}{۳}-\frac{j}{۳})V_o+(۱۰۰-۸۰j)\frac{(۱۰-\frac{۲}{۳}V_o)}{۱۲۰}=۱۰$$

$$V_o=\frac{۱/۶۶+۶/۶۶j}{۱/۱۱+۰/۱۱j} \Rightarrow |V_o|=۶/۱۵v$$

۱۱ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در حلقه‌های سمت چپ و میانی داریم:

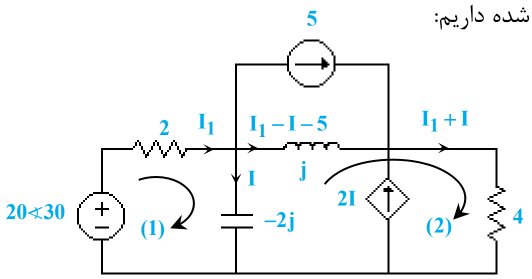


$$KVL\,(\text{حلقه‌ی چپ}):-۴۰\measuredangle۳۰-۲j(I_۱+\frac{V_x}{۳})+V_x=۰ \Rightarrow (۱-\frac{۲}{۳}j)V_x-۲jI_۱=۴۰\measuredangle۳۰ \quad (۱)$$

$$KVL\,(\text{حلقه‌ی میانی}):-V_x+(۸+۶j)I_۱+۱۰\times(I_۱+۵)=۰ \Rightarrow V_x=(۱۸+۶j)I_۱+۵۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_x=(۱۸+۶j)\frac{((۱-\frac{۲}{۳}j)V_n-۴۰\measuredangle۳۰)}{۲j}+۵۰ \Rightarrow V_n=\frac{-۲۳۳/۹+۲۵۱/۷j}{۴+۱۱j}=۲۹/۳\measuredangle۶۳^\circ v$$

۱۲ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص شده داریم:

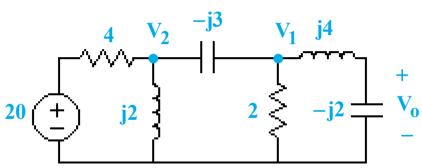


$$KVL\,(۱):-۲۰\measuredangle۳۰+۲I_۱-۲jI=۰ \Rightarrow I_۱=jI+۱۰\measuredangle۳۰ \quad (۱)$$

$$KVL\,(۲):j۲I+j\times(I_۱-I-۵)+۴\times(I+I_۱)=۰ \Rightarrow (۴+j)I+(۴+j)I_۱=j۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (۴+j)I+(۴+j)(jI+۱۰\measuredangle۳۰)=۵j \Rightarrow I=\frac{-۲۹/۶-j۳۳/۶}{۳+j۵} \Rightarrow |I|=۶/۵A$$

۱۳ـ گزینه «۴» با توجه به مدار داریم:



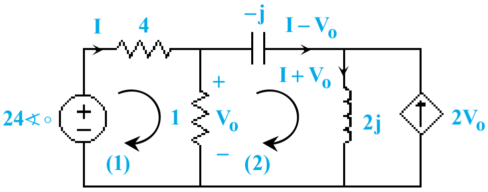
$$V_o=\frac{-j۲}{j۴-j۲}V_۱ \Rightarrow V_۱=-V_o$$

$$V_۱=\frac{۲\,||\,(j۴-j۲)}{۲\,||\,(j۴-j۲)-j۳}V_۲ \Rightarrow V_۱=\frac{۱+j}{۱-۲j}V_۲ \xrightarrow{V_۱=-V_o} V_۲=(۰/۵+۱/۵j)V_o \quad (۱)$$

$$V_۲=\frac{(۱-j۲)\,||\,j۲}{(۱-j۲)\,||\,j۲+۴}۲۰ \Rightarrow V_۲=۱۰/۵۹+j۲/۳۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_o=۳/۵۳-j۵/۸۸v$$

۱۴ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌ی توان مختلط منبع ولتاژ کافی است جریان ورودی را به‌دست آوریم:



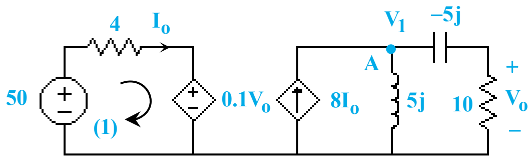
$$KVL(۱): -۲۴+۴I+V_o=۰ \Rightarrow V_o=۲۴-۴I \quad (۱)$$

$$KVL(۲): -V_o-j(I-V_o)+۲j(I+V_o)=۰ \Rightarrow V_o(۱-۳j)=jI \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (۲۴-۴I)(۱-j۳)=jI \Rightarrow I=\frac{۲۴\times(۱-j۳)}{۴-j۱۱}=۶/۴۸-۰/۱۷۵j$$

$$S_{\text{منبع}}=VI^*=۲۴\times(۶/۴۸+۰/۱۷۵j)=۱۵۵/۶+j۴/۲VA$$

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به مدار داریم:



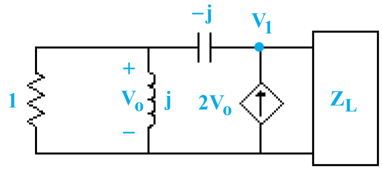
$$KVL(۱): -۵۰+۴I_o+۰/۱V_o=۰ \Rightarrow I_o=\frac{۵۰-۰/۱V_o}{۴} \Rightarrow ۴I_o=۵۰-۰/۱V_o \quad (۱)$$

از طرفی، با تقسیم جریان در سمت راست مدار داریم:

$$\frac{V_o}{۱۰}=۸I_o\times\frac{۵j}{۵j-۵j+۱۰}=۴jI_o \Rightarrow ۴I_o=-۰/۱jV_o \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۰/۱V_o-۰/۱jV_o=۵۰ \Rightarrow V_o-jV_o=۵۰۰ \Rightarrow |V_o|=\frac{۵۰۰}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۵۰۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow V_{o\,\text{مؤثر}}=\frac{|V_o|}{\sqrt{۲}}=۲۵۰v$$

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا منبع جریان مستقل را بی‌اثر کرده و با استفاده از تقسیم ولتاژ، ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته را به‌دست می‌آوریم:



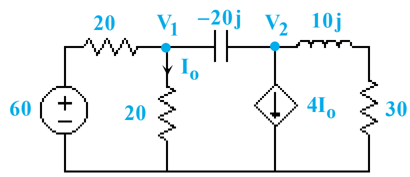
$$V_o=\frac{۱\|j}{۱\|j-j}\times V_۱ \Rightarrow V_۱=-jV_o$$

$$Z_{\text{معادل منبع وابسته}}=\frac{-jV_o}{-۲V_o}=\frac{j}{۲}$$

طبق قضیه‌ی انتقال توان ماکزیمم، وقتی که Z_L برابر مزدوج امپدانس دیده شده از دو سرش باشد، بیشترین توان به آن منتقل می‌شود. پس:

$$Z_L=Z_{eq}^*=[(۰/۵j)\|(-j+۱\|j)]^*=[۰/۵+۰/۵j]^*=(۰/۵\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ)^*=۰/۵\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ\,\Omega$$

۱۷ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



$$V_۱=۲۰I_o$$

با اعمال KCL در گره‌های ۱ و ۲ داریم:

$$KCL(۱): \frac{۲۰I_o-۶۰}{۲۰}+I_o+\frac{۲۰I_o-V_۲}{-۲۰j}=۰ \Rightarrow ۲۰I_o-۶۰+۲۰I_o+۲۰jI_o-jV_۲=۰ \Rightarrow (۴۰+۲۰j)I_o-jV_۲=۶۰ \quad (۱)$$

$$KCL(۲): ۴I_o+\frac{V_۲}{۳۰+۱۰j}+\frac{V_۲-۲۰I_o}{-۲۰j}=۰ \Rightarrow ۴۰۰۰I_o+V_۲(۳۰-۱۰j)+۵۰j(V_۲-۲۰I_o)=۰$$

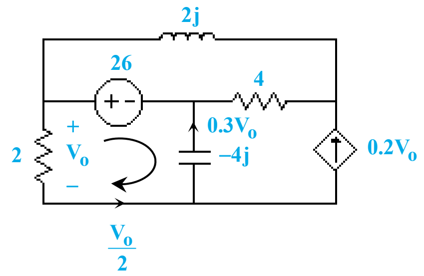
$$\Rightarrow I_o(۴۰۰۰-۱۰۰۰j)+V_۲(۳۰+۴۰j)=۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{(۴۰۰۰-۱۰۰۰j)(۶۰+jV_۲)}{۴۰+۲۰j}+V_۲(۳۰+۴۰j)=۰$$

$$\Rightarrow V_۲(۳۰+۴۰j)(۴۰+۲۰j)+V_۲(۱۰۰۰+۴۰۰۰j)=-۶۰\times(۴۰۰۰-۱۰۰۰j) \Rightarrow V_۲=۰/۸۹۱+۳۸/۹۱j$$

$$|I_{۳۰\Omega}|=\frac{|۰/۸۹۱+۳۸/۹۱j|}{|۳۰+۱۰j|}=۱/۲۳A \Rightarrow P_{۳۰\Omega}=\frac{۱}{۲}RI^۲=\frac{۱}{۲}\times۳۰\times(۱/۲۳)^۲\simeq۲۳w$$

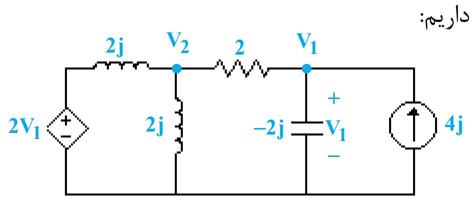
۱۸ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه مشخص شده از مدار داریم:



$$KVL: -V_o + ۲۶ + ۴j \times ۰/۳V_o = ۰$$

$$V_o = \frac{۲۶}{۱-۱/۲j} \Rightarrow |V_o| = ۱۶/۶۴\,V$$

۱۹ـ گزینه «۴» با اعمال KCL در گره‌های ۱ و ۲ داریم:

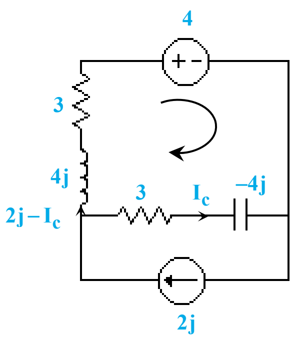


$$KCL\,(۱): \frac{V_۱ - V_۲}{۲} + \frac{V_۱}{-۲j} - ۴j = ۰ \Rightarrow V_۱(۱+j) - V_۲ = ۸j \qquad (۱)$$

$$KCL\,(۲): \frac{V_۲ - ۲V_۱}{۲j} + \frac{V_۲}{۲j} + \frac{V_۲ - V_۱}{۲} = ۰ \Rightarrow V_۱(-۲-j) + V_۲(۲+j) = ۰ \Rightarrow V_۱ = V_۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_۱(۱+j) - V_۱ = ۸j \Rightarrow jV_۱ = ۸j \Rightarrow V_۱ = ۸v$$

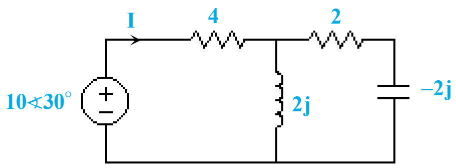
۲۰ـ گزینه «۱» پس از مشخص کردن جریان شاخه‌های مدار با اعمال KVL در حلقه‌های بالایی، جریان خازن را محاسبه می‌کنیم:



$$KVL: (۳+۴j)(۲j - I_c) + ۴ - (۳-۴j)I_c = ۰$$

$$\Rightarrow I_c = \frac{-۴+۶j}{۶} = ۱/۲\measuredangle ۱۲۳/۷^\circ A$$

۲۱ـ گزینه «۱» مجموع توان متوسط جذب شده توسط تمام عناصر برابر توان متوسط تولیدی منبع می‌باشد. بنابراین با به‌دست آوردن جریان تولیدی منبع، توان تولیدی را به‌دست می‌آوریم:



$$I = \frac{۱۰\measuredangle ۳۰}{۴+۲j\,||\,(۲-۲j)} = \frac{۱۰\measuredangle ۳۰}{۶+۲j} = ۱/۵۵ + ۰/۳۱۷jA$$

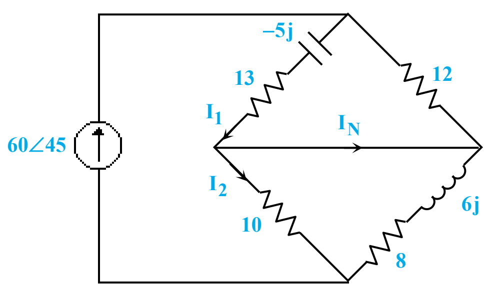
$$S = \frac{۱}{۲}VI^* = \frac{۱}{۲} \times ۱۰\measuredangle ۳۰ \times (۱/۵۵ - ۰/۳۱۷j) = ۷/۵ + ۲/۵jVA$$

$$P = ۷/۵\,w$$

۲۲ـ گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود زمانی توان جذب شده توسط بلندگو ماکزیمم می‌شود که اندازه‌ی جریان عبوری از آن ماکزیمم شود. از طرفی زمانی ماکزیمم جریان از بلندگو عبور می‌کند که امپدانس سلف و خازن با یکدیگر خنثی شود. بنابراین داریم:

$$\frac{-j}{۴۰\times۱۰^{-۹}\,\omega} + ۸۰\times۱۰^{-۳}\,\omega j = ۰ \Rightarrow ۸۰\times۴۰\times۱۰^{-۱۲}\,\omega^۲ = ۱ \Rightarrow \omega = ۱۷۶۷۷/۶\,\frac{rad}{s} \Rightarrow f = \frac{\omega}{۲\pi} = ۲۸۱۳/۵ \simeq ۲۸۱۴Hz$$

۲۳ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی جریان نورتن عبوری از سرهای a و b این دو سر را اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را محاسبه می‌کنیم:

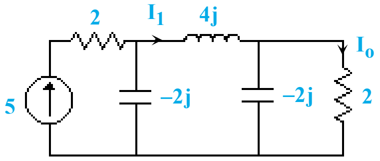


$$I_۱ = \frac{۱۲}{۲۵-۵j} \times ۶۰\measuredangle ۴۵^\circ = ۲۸/۲۴\measuredangle ۵۶/۳^\circ$$

$$I_۲ = \frac{۸+۶j}{۱۸+۶j} \times ۶۰\measuredangle ۴۵^\circ = ۳۱/۶۲\measuredangle ۶۳/۴^\circ$$

$$\Rightarrow I_N = I_۲ - I_۱ \simeq ۵/۰۲\measuredangle ۱۰۸^\circ A$$

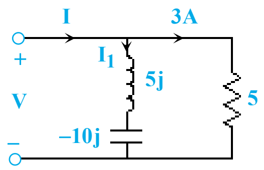
۲۴ـ گزینه «۱» با استفاده از قاعده‌ی تقسیم جریان مرحله به مرحله به جریان I_o می‌رسیم:



$$I_1 = \frac{-2j}{(2 \| (-2j)) + 4j - 2j} \times 5 = -5 - 5jA$$

$$I_o = \frac{-2j}{2-2j} \times (-5-5j) = -5A$$

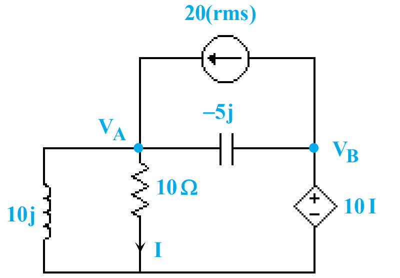
۲۵ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از جریان ۳A ولتاژ V را به‌دست می‌آوریم و سپس با محاسبه‌ی I_1 جریان I را محاسبه می‌کنیم:



$$V = 5 \times 3 = 15V \Rightarrow I_1 = \frac{15}{-5j} = 3jA$$

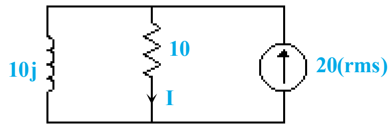
$$I = 3 + 3j \Rightarrow |I| = 3\sqrt{2}A$$

۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به مدار داریم:



$$V_A = V_B = 10I$$

بنابراین جریانی از خازن عبور نخواهد کرد. در نتیجه منبع جریان ۲۰ آمپری سری با منبع ولتاژ وابسته می‌شود که باعث بی‌اثر شدن منبع ولتاژ وابسته می‌شود. بنابراین:

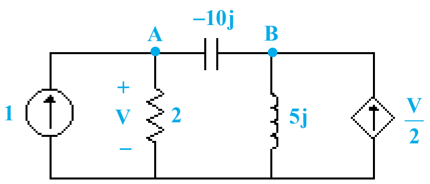


$$I = \frac{10j}{10+10j} \times 20 = 10 + 10jA$$

$$I_{rms} = 10\sqrt{2}A$$

$$P_R = RI_{rms}^2 = 10 \times (10\sqrt{2})^2 = 2000w = 2kw$$

۲۷ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره‌های A و B داریم:

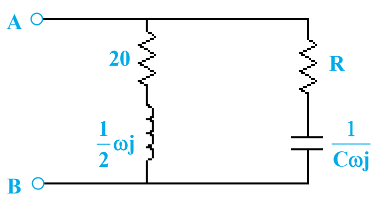


$$KCLA: \frac{V}{2} + \frac{V - V_B}{-10j} = 1 \Rightarrow V(5+j) - V_B j = 10 \quad (1)$$

$$KCLB: \frac{-V}{2} + \frac{V_B}{5j} + \frac{V_B - V}{-10j} = 0 \Rightarrow -jV_B - (5+j)V = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} -jV_B - jV_B = 10 \Rightarrow V_B = 5jv$$

۲۸ـ گزینه «۴» مدار را به حالت دائمی سینوسی برده و امپدانس معادل دیده شده از دو سر A و B را به‌دست می‌آوریم. برای این‌که این امپدانس مستقل از فرکانس شود، مقدار این امپدانس را برابر عدد حقیقی a فرض می‌کنیم.

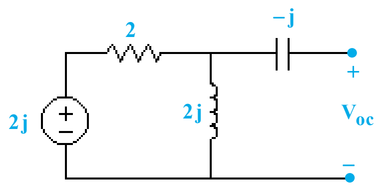


$$\Rightarrow Z_{eq} = (20 + \frac{1}{2}\omega j) \| (R - \frac{j}{C\omega}) \Rightarrow Z_{eq} = \frac{20R + \frac{1}{2C} + j(\frac{R\omega}{2} - \frac{20}{C\omega})}{20 + R + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{C\omega})}$$

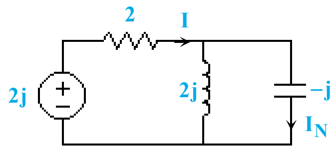
$$\Rightarrow Z_{eq} = \frac{20R + \frac{1}{2C} + j(R\frac{\omega}{2} - \frac{20}{C\omega})}{20 + R + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{C\omega})} = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2R + \frac{1}{2C} = a(20+R) \\ (R.\frac{\omega}{2} - \frac{20}{C\omega}) = a(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{C\omega}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20\Omega \\ R = 20\Omega \\ C = \frac{1}{800}F \end{cases}$$

۲۹ــ گزینه «۲» ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر Z_L را محاسبه می‌کنیم:



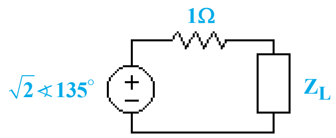
$$V_{oc} = V_{th} = \frac{۲j}{۲+۲j} \times ۲j = -۱ + jv$$



$$I = \frac{۲j}{۲+۲j \| (-j)} = -۰/۵ + ۰/۵jA \Rightarrow I_N = \frac{j۲}{j۲-j} I = ۲I = -۱ + jA$$

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = ۱\Omega$$

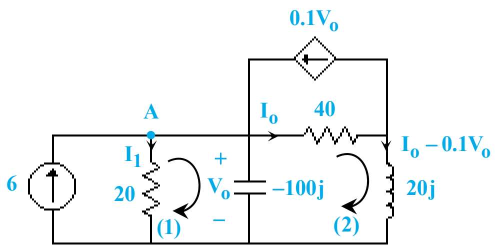
بنابراین داریم:



برای انتقال توان ماکزیمم داریم:

$$Z_L = Z_{th} = ۱\Omega \Rightarrow P_{L\max} = \frac{۱}{۸} \frac{|V_{th}|^۲}{Re[Z_{th}]} = ۰/۲۵w$$

۳۰ــ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم. سپس با مشخص کردن جریان شاخه‌ها و اعمال KVL در حلقه‌های مورد نظر جریان I_o را محاسبه می‌کنیم:



KCL در A:
$$I_۱ = ۶ + V_o(۰/۱ - ۰/۰۱j) - I_o$$

$$KVL(۱): ۲۰I_۱ = V_o \Rightarrow ۱۲۰ + V_o(۲ - ۰/۲j) - ۲۰I_o = V_o \quad (۱)$$

$$KVL(۲): -V_o + ۴۰I_o + ۲۰j(I_o - ۰/۱V_o) = ۰ \Rightarrow ۲۰I_o(۲+j) = V_o(۱+۲j) \quad (۲)$$

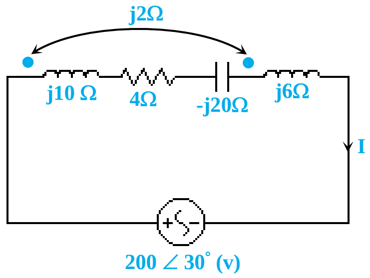
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۲۰ + \frac{۲۰I_o(۲+j)}{۱+۲j}(۱ - ۰/۲j) - ۲۰I_o = ۰ \Rightarrow I_o(۰/۳۲ + ۰/۷۶j) = ۶ \Rightarrow I_o = ۷/۲\angle -۶۷^\circ A$$

فصل پنجم

«القاکنایی متقابل»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: اندازه جریانی که از مدار شکل مقابل عبور می‌کند، چند آمپر است؟



۱) $50\sqrt{2}$

۲) 50

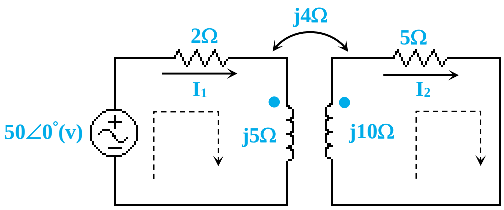
۳) $10\sqrt{10}$

۴) $10\sqrt{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه مقدار جریان مدار ابتدا لازم است که با در نظر گرفتن القای متقابل سلف‌ها، امپدانس مدار حساب شود. سپس مقدار جریان محاسبه می‌شود.

$$Z = j10+4-j20+j6+2\times j2 = 4\Omega \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{Z}|} = \frac{200}{4} = 50\,\mathbf{A}$$

مثال ۲: در شکل مقابل جریان I_1 کدام است؟



۱) $\frac{250+j500}{-24+j45}$

۲) $\frac{500+j250}{-24+j45}$

۳) $\frac{250+j500}{-45+j24}$

۴) $\frac{500+j250}{-45+j24}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه جریان I_1 به نقطه وارد می‌شود و جریان I_2 از نقطه خارج می‌شود، لذا القای متقابل بین دو سیم‌پیچ منفی خواهد شد. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

$$2I_1 + j5I_1 - j4I_2 = 50\angle 0^\circ \quad \Rightarrow \quad (2+j5)I_1 - j4I_2 = 50\angle 0^\circ$$

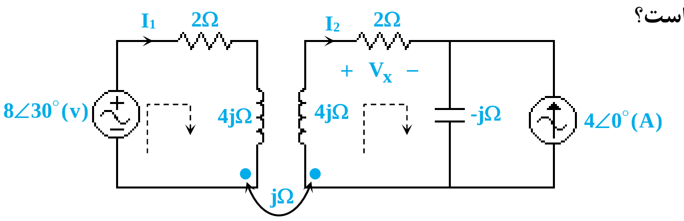
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$5I_2 + j10I_2 - j4I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -j4I_1 + (5+j10)I_2 = 0$$

با حل دستگاه حاصل از معادلات بالا با روش کرامر داریم:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -j4 \\ 0 & 5+j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j5 & -j4 \\ -j4 & 5+j10 \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{250+j500}}{\mathbf{-24+j45}}$$

مثال ۳: در مدار زیر مقدار اندازه ولتاژ V_x به صورت تقریبی چند ولت است؟



۱) $1/6$

۲) 2

۳) $3/2$

۴) 4

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه V_x، باید جریان I_2 را محاسبه کنیم. جریان I_1 از نقطه خارج و جریان I_2 به نقطه وارد می‌شود؛ لذا القای متقابل منفی خواهد بود. حال با نوشتن KVL در دو حلقه مدار داریم:

KVL (حلقه سمت چپ) : $2I_1 + j4I_1 - jI_2 = 8\angle 30^\circ$

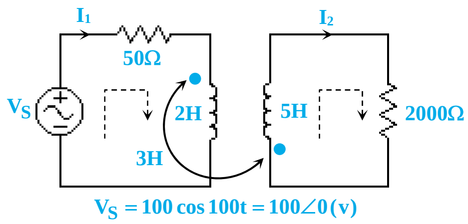
KVL (حلقه سمت راست) : $2I_2 + (-j)(I_2+4) + j4I_2 - jI_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1(2+j4) - jI_2 = 8\angle 30^\circ \\ I_1(-j) + I_2(2-j+j4) = j4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1(2+j4) - jI_2 \simeq 7+j4 \\ I_1(-j) + I_2(2+j3) = j4 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & 7+j4 \\ -j & j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -j \\ -j & 2+j3 \end{vmatrix}} = \frac{-20+j15}{-7+j14} \Rightarrow |I_2| = \frac{25}{7\sqrt{5}} \simeq 1/6A \Rightarrow |V_x| = 2|I_x| = 3/2v$$

مثال ۴: برای مدار شکل زیر ماتریس ضرایب $I_۱$ و $I_۲$ در معادلات KVL کدام است؟



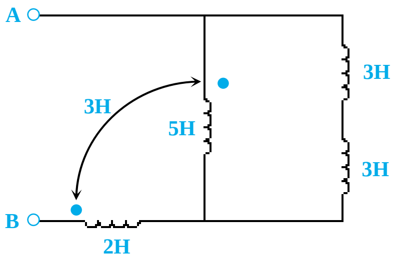
۱) $\begin{bmatrix} ۲۰+j۶ & j۶ \\ j۶ & ۱+j۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱+j۴ & -j۳ \\ -j۳ & ۲۰+j۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱+j۴ & j۳ \\ j۳ & ۲۰+j۵ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱+j۴ & j۶ \\ j۳ & ۲۰+j۵ \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۴» برای بدست آوردن ماتریس امپدانس لازم است که در حلقه‌های مدار KVL زده شده و روابط به صورت ماتریسی نوشته شود. جریان $I_۱$ به نقطه وارد شده و جریان $I_۲$ نیز به نقطه وارد می‌شود؛ لذا القای متقابل مثبت است. حال با نوشتن KVL در حلقه‌های سمت چپ و راست داریم:

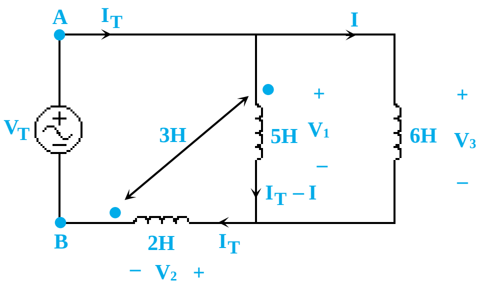
$$\begin{cases} ۱۰۰\angle ۰^\circ = ۵۰ I_۱ + (j۲\times ۱۰۰) I_۱ + (j۳ \times ۱۰۰) I_۲ \\ (j۵\times ۱۰۰) I_۲ + (j۳\times ۱۰۰) I_۱ + ۲۰۰۰ I_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱+j۴) I_۱ + j۶ I_۲ = ۲ \\ j۳ I_۱ + (۲۰+۵j) I_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+j۴ & j۶ \\ j۳ & ۲۰+j۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۵: در مدار زیر مقدار L_{eq} ، از دید پایانه‌های B و A بر حسب هانری تقریباً کدام است؟



۱) ۰/۶
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۳

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه L_{eq} از دیدگاه B و A، لازم است که به مدار V_T اعمال شده و جریان I_T اندازه‌گیری شود. لازم به ذکر است که امپدانس دیده شده در یک ω فرضی بدست می‌آید و با تقسیم امپدانس مذکور بر ω، مقدار L_{eq} محاسبه می‌شود. با توجه به القای متقابل سلفها داریم:



$$\begin{cases} V_۱ = ۵\omega j\,(I_T - I) - ۳\omega j\, I_T \\ V_۲ = ۲\omega j\, I_T - ۳\omega j (I_T - I) \\ V_۳ = ۶\omega j\, I \end{cases}$$

حال معادلات KVL را در دو حلقه مدار می‌نویسیم.

$$\begin{cases} KVL \;\; (\text{حلقه سمت چپ}): \;\; V_T = V_۱ + V_۲ \\ KVL \;\; (\text{حلقه سمت راست}): \;\; -V_۱ + V_۳ = ۰ \end{cases}$$

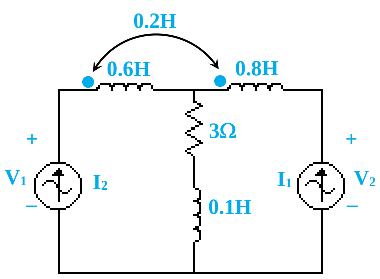
با جایگذاری $V_۱$ و $V_۲$ و $V_۳$ در معادلات زیر داریم:

$$\begin{cases} V_T = ۵\omega j (I_T - I) - ۳\omega j I_T + ۲\omega j I_T - ۳\omega j (I_T - I) \\ -[۵\omega j (I_T - I) - ۳\omega j I_T] + ۶\omega j I = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_T (j\omega) + I(-۲j\omega) = V_T \\ I_T(-۲j\omega) + I(۱۱j\omega) = ۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا داریم:

$$I_T = \frac{۱}{۰/۶ j\omega} . V_T \Rightarrow X_{L_{eq}} = \frac{V_T}{I_T} = ۰/۶ j\omega \Rightarrow \mathbf{L_{eq}} = \frac{\mathbf{X_{eq}}}{\mathbf{j\omega}} = \mathbf{۰/۶H}$$

مثال ۶: در مدار زیر نسبت $|\frac{V_۱}{V_۲}|$ تقریباً کدام است؟ $(I_۱ = ۱/۲\cos ۱۰ t(A) \;,\; I_۲ = ۲\cos ۱۰ t(A))$



۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۶}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینه «۳» با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_۲ = ۰/۸ \frac{dI_۱}{dt} - ۰/۲ \frac{dI_۲}{dt} + ۳(I_۱ + I_۲) + ۰/۱ \frac{d(I_۱ + I_۲)}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad V_2 = 0/8\frac{d(1/2\cos 10t)}{dt} - 0/2\frac{d(2\cos 10t)}{dt} + 3(1/2\cos 10t + 2\cos 10t) + 0/1\frac{d[(1/2\cos 10t)+(2\cos 10t)]}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad V_2 = 9/6\cos 10t - 8/8\sin 10t \;\Rightarrow\; |V_2| = \sqrt{9/6^2 + 8/8^2} = \sqrt{169/6} \simeq 13v$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

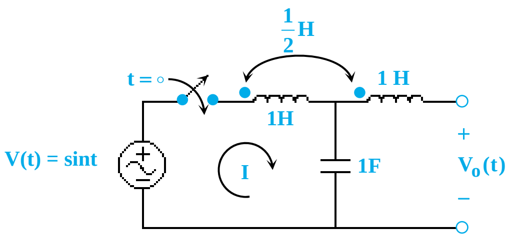
$$V_1 = 0/6\frac{dI_2}{dt} - 0/2\frac{dI_1}{dt} + 3(I_1+I_2) + 0/1\frac{d(I_1+I_2)}{dt}$$

$$V_1 = 0/6\frac{d(2\cos 10t)}{dt} - 0/2\frac{d(1/2\cos 10t)}{dt} + 3(1/2\cos 10t + 2\cos 10t) + 0/1\frac{d}{dt}(1/2\cos 10t + 2\cos 10t)$$

$$V_1 = 9/6\cos 10t - 12/8\sin 10t \Rightarrow |V_1| = \sqrt{9/6^2 + 12/8^2} = \sqrt{256} = 16v \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{V_1}{V_2}\right| = \frac{16}{13}$$

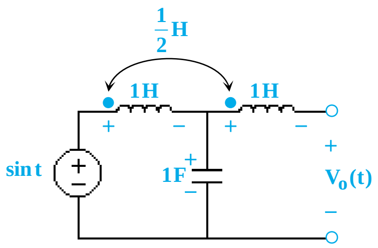
بدیهی است که این تست را با استفاده از روش فازوری نیز می‌توان حل نمود.

مثال ۷: در مدار زیر مقادیر $V_o(0^+)$ و $\frac{dV_o(0^+)}{dt}$ کدام است؟



۱) $0v$ و $-\frac{1}{2}\frac{v}{sec}$
۲) $0v$ و $\frac{1}{2}\frac{v}{sec}$
۳) $1v$ و $2\frac{v}{sec}$
۴) $1v$ و $-2\frac{v}{sec}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دقت شود که با توجه به این که جریان I به سر نقطه‌دار سلف سمت چپ وارد می‌شود، ولتاژ $+\frac{1}{2}\frac{dI}{dt}$ را دو سر سلف سمت راست طوری القا می‌کند که سر مثبت این ولتاژ در سمت سر نقطه‌دار سلف باشد. مطابق شکل زیر با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار و با توجه به صفر بودن جریان حلقه سمت راست، داریم: (با فرض $V_C(0^-) = 0$)



$$\frac{1}{1}\int_0^t I dt - 0/5\frac{dI}{dt} = V_o(t) \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

$$1\frac{dI}{dt} + \frac{1}{1}\int_0^t I dt = V(t) = \sin t \qquad (2)$$

در صورتی که رابطه (۲) در $t = 0^+$ نوشته شود، داریم:

$$\frac{dI}{dt}(0^+) + \int_0^{0^+} I dt = 0$$

باید دقت شود که انتگرال در بازه‌ی به طول ناچیز (صفر) از تابع محدود صفر می‌شود. لذا داریم:

$$\frac{dI}{dt}(0^+) = 0$$

حال رابطه (۱) را در $t = 0^+$ می‌نویسیم:

$$\int_0^{0^+} I dt - 0/5\frac{dI}{dt}(0^+) = V_o(t = 0^+) \;\Rightarrow\; V_o(t = 0^+) = 0v$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱) و (۲) و قرار دادن زمان $t = 0^+$ در آنها داریم:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + I = \cos t \quad,\quad I - 0/5\frac{dI^2}{dt^2} = \frac{dV_o}{dt}$$

$$\Rightarrow\; \frac{d^2I}{dt^2}(0^+) + I(0^+) = 1\;,\; I(0^\pm) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2I}{dt^2}(0^+) = 1(\frac{A^2}{sec^2}) \;\Rightarrow\; I(0^+) - 0/5\frac{d^2I}{dt^2}(0^+) = \frac{dV_o(0^+)}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dV_o(0^+)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{v}{sec}$$

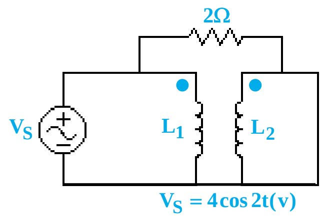
مثال ۸: در مدار مثال قبل، توان متوسط منبع ولتاژ ورودی بر حسب وات کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۲/۷۵
۳) ۵۸
۴) ۵/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن توان متوسط منبع ولتاژ، از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$P = Re(S) = Re(V_S I_{in}^*) \Rightarrow P = Re(100\times\frac{100 + j1050}{1802}) \simeq \frac{10^4}{1800} \simeq 5/5w$$

مثال۹: در مدار زیر ماتریس ضرایب القاء به صورت $L=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$ برحسب هانری می‌باشد. در این حالت اندازه توان مختلط تحویلی توسط منبع ولتاژ مدار چند ولت آمپر است؟



۱) ۴

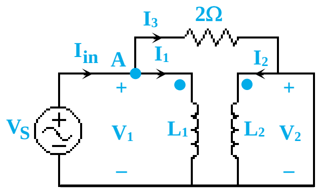
۲) ۵

۳) ۷/۵

۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن توان مختلط ابتدا باید جریان منبع ولتاژ محاسبه شود.

طبق نکته گفته شده در قبل داریم:



$$j\omega.\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}$$

با جایگذاری $V_۱=۴\angle ۰\ ,\ V_۲=۰$ و $\omega=۲$ در معادلات بالا داریم:

$$j۲.\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} j۴I_۱-j۲I_۲=۴ \\ -j۲I_۱+j۳I_۲=۰ \end{cases} \Rightarrow I_۱=-j۱/۵\ (A)$$

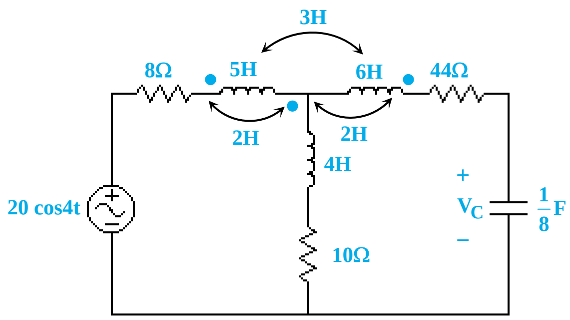
حال با نوشتن KCL در گره A، مقدار I_{in} را محاسبه می‌کنیم:

$$I_{in}=I_۱+I_۲=-j۱/۵+\frac{V_S}{۲}=-j۱/۵+۲(A)\Rightarrow I_{in}=-j۱/۵+۲(A)$$

در ادامه داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}V_SI_{in}^*=\frac{۱}{۲}\times۴\times(۲+j۱/۵)=۴+j۳(V.A)\Rightarrow|S|=۵(V.A)$$

مثال۱۰: در مدار زیر اندازه V_C بر حسب ولت کدام است؟



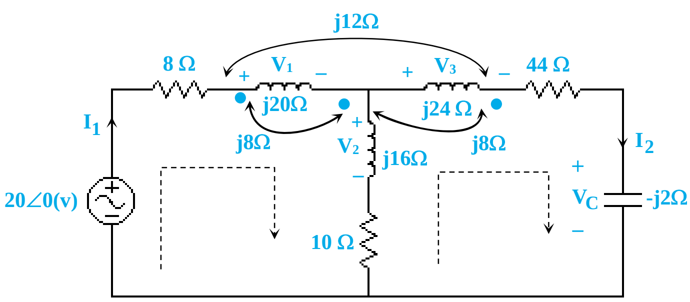
۱) ۰/۳۱

۲) ۰/۶۲

۳) ۰/۷۵

۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه «۲» با ترسیم مدار در حالت دائمی سینوسی داریم:



$$\omega=۴\frac{rad}{sec}$$

$$Z_C=\frac{۱}{jC\omega}=\frac{۱}{j\times\frac{۱}{۸}\times۴}=-j۲\Omega$$

ولتاژ سلف‌های $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ شامل دو قسمت است و این دو قسمت، یکی مربوط به خود سلف و دیگری مربوط به القای متقابل بقیه سلف‌ها می‌باشد.

حال داریم:

$$V_۱=j۲۰I_۱+j۸(I_۱-I_۲)-j۱۲I_۲=j۲۸I_۱-j۲۰I_۲\quad,\quad V_۲=j۱۶(I_۱-I_۲)+j۸I_۱-j۸I_۲=j۲۴I_۱-j۲۴I_۲$$

$$V_۳=j۲۴I_۲-j۱۲I_۱-j۸(I_۱-I_۲)=-j۲۰I_۱+j۳۲I_۲$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$۸I_۱+V_۱+V_۲+۱۰(I_۱-I_۲)=۲۰\angle۰$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_۳+۴۴I_۲-j۲I_۲+۱۰(I_۲-I_۱)-V_۲=۰$$

با جایگذاری V_1 و V_2 و V_3 در روابط KVL داریم:

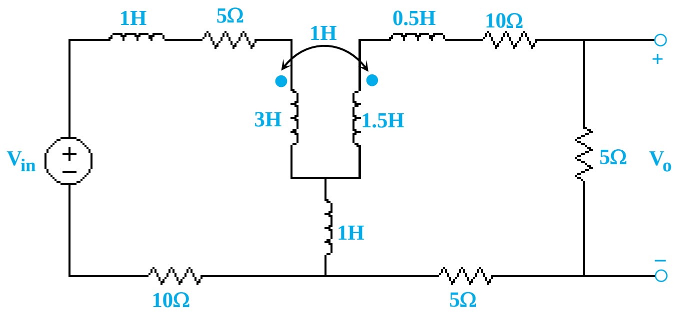
$$\begin{cases}(18+j52)I_1-(10+j44)I_2=20\angle 0\\ -(10+j44)I_1+(54+j54)I_2=0\end{cases}$$

با حل دستگاه با روش کرامر داریم:

$$\Rightarrow I_2=\frac{\begin{vmatrix}18+j52 & 20\\ -(10+j44) & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}18+j52 & -(10+j44)\\ -(10+j44) & 54+j54\end{vmatrix}}=\frac{200+j880}{j2900}(A)\Rightarrow |I_2|\approx\frac{900}{2900}\approx 0/31\,(A)$$

$$\Rightarrow\ |V_C|=2\times|I_2|=0/62\,v$$

مثال ۱۱: در مدار زیر کدام گزینه معادله دیفرانسیل مربوط به پاسخ خروجی را بیان می‌کند؟ $(V_{in}=30\,u(t))$



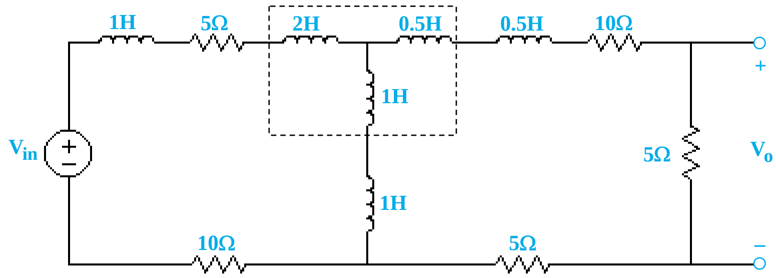
۱) $11\frac{d^2V_o}{dt^2}+145\frac{dV_o}{dt}+300V_o=60$

۲) $11\frac{d^2V_o}{dt^2}+145\frac{dV_o}{dt}+60V_o=-60$

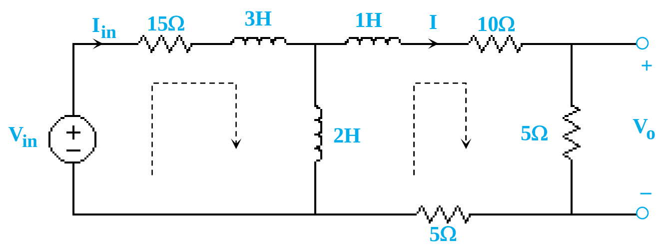
۳) $\frac{11}{5}\frac{d^2V_o}{dt^2}+\frac{145}{5}\frac{dV_o}{dt}+60V_o=60$

۴) $\frac{11}{5}\frac{d^2V_o}{dt^2}+\frac{145}{5}\frac{dV_o}{dt}+300V_o=-60$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با جایگذاری مدار معادل T به جای دو سلف ۳H و ۱/۵H و القای متقابل آن‌ها داریم:



با معادل‌گذاری سلف‌های سری داریم:



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

$$V_{in}=15I_{in}+3\frac{dI_{in}}{dt}+2\frac{d(I_{in}-I)}{dt}\ \Rightarrow\ 5\frac{dI_{in}}{dt}-2\frac{dI}{dt}+15I_{in}=V_{in}\quad(1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$\frac{dI}{dt}+10I+5I+5I+2\frac{d(I-I_{in})}{dt}=0\ \Rightarrow\ 3\frac{dI}{dt}-2\frac{dI_{in}}{dt}+20I=0\qquad(2)$$

با نوشتن معادلات (۱) و (۲) در یک دستگاه داریم:

$$\begin{cases}5\frac{dI_{in}}{dt}+15I_{in}-2\frac{dI}{dt}=V_{in}\\ -2\frac{dI_{in}}{dt}+3\frac{dI}{dt}+20I=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5\frac{d}{dt}+15)I_{in}-2\frac{dI}{dt}=V_{in}\\ -2\frac{dI_{in}}{dt}+(20+3\frac{d}{dt})I=0\end{cases}$$

با نوشتن معادلات بالا به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix}15+5\frac{d}{dt} & -2\frac{d}{dt}\\ -2\frac{d}{dt} & 20+3\frac{d}{dt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{in}\\ I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{in}\\ 0\end{bmatrix}$$

حال جریان I از روش کرامر محاسبه می‌شود:

$$I=\frac{\begin{vmatrix}۱۵+۵\frac{d}{dt} & V_{in}\\ -۲\frac{d}{dt} & ۰\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱۵+۵\frac{d}{dt} & -۲\frac{d}{dt}\\ -۲\frac{d}{dt} & ۲۰+۳\frac{d}{dt}\end{vmatrix}}=\frac{۲\frac{dV_{in}}{dt}}{۱۱\frac{d^۲}{dt^۲}+۱۴۵\frac{d}{dt}+۳۰۰}\Rightarrow I\times\left[۱۱\frac{d^۲}{dt^۲}+۱۴۵\frac{d}{dt}+۳۰۰\right]=۲\frac{dV_{in}}{dt}\Rightarrow ۱۱\frac{d^۲I}{dt^۲}+۱۴۵\frac{dI}{dt}+۳۰۰I=۲\frac{dV_{in}}{dt}$$

با جایگذاری V_{in} در معادله بالا داریم:

$$۱۱\frac{d^۲I}{dt^۲}+۱۴۵\frac{dI}{dt}+۳۰۰I=۲\times۳۰$$

با توجه به رابطه $I=\frac{V_o}{۵}$ و جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$۱۱\frac{d^۲(\frac{V_o}{۵})}{dt^۲}+۱۴۵\frac{d(\frac{V_o}{۵})}{dt}+۳۰۰\times\frac{V_o}{۵}=۶۰\Rightarrow \mathbf{\frac{۱۱}{۵}\frac{d^۲V_o}{dt^۲}+\frac{۱۴۵}{۵}\frac{dV_o}{dt}+۶۰V_o=۶۰}$$

مثال ۱۲: در مدار مثال قبل پاسخ حالت گذرا برای ولتاژ V_o کدام است؟

۱) $(A+Bt)\,e^{-۱۰/۶t}$
۲) $(A+Bt)\,e^{-۲/۵۷t}$
۳) $Ae^{-۲/۵۷t}+Be^{-۱۰/۶t}$
۴) $Ae^{-۱۰/۶t}+Be^{-۳/۵۷t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به معادله دیفرانسیل بدست آمده برای V_o داریم:

$$\frac{۱۱}{۵}\frac{d^۲V_o}{dt^۲}+\frac{۱۴۵}{۵}\frac{dV_o}{dt}+۶۰V_o=۶۰\Rightarrow\frac{۱۱}{۵}S^۲+\frac{۱۴۵}{۵}S+۶۰=۰\Rightarrow\begin{cases}S_۱=-۲/۵۷\\ S_۲=-۱۰/۶\end{cases}$$

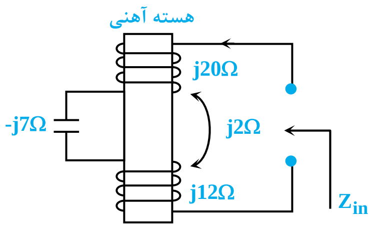
با توجه به فرکانس‌های طبیعی بدست آمده داریم:

$$V_o(t)=Ae^{-۲/۵۷t}+Be^{-۱۰/۶t}$$

لازم به ذکر است که در حالت پایدار مدار، سلف‌ها اتصال کوتاه بوده و جریان I و V_o صفر خواهند شد؛ بنابراین پاسخ حالت گذرا به صورت زیر خواهد بود:

پاسخ حالت گذرا $=\mathbf{Ae^{-۲/۵۷t}+Be^{-۱۰/۶t}}$

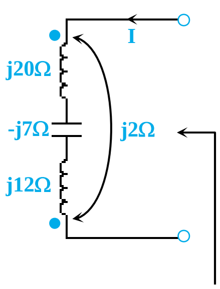
مثال ۱۳: امپدانس ورودی شکل داده شده بر حسب اهم کدام است؟



۱) j۲۹
۲) j۲۷
۳) j۲۳
۴) j۲۱

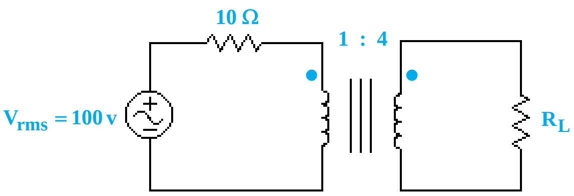
☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

ابتدا باید مدار معادل نقطه‌دار شکل را رسم کنیم. برای این منظور چهار انگشت دست راست را در جهت جریان روی هسته آهنی قرار می‌دهیم. جهت انگشت شست، همان جایی است که باید نقطه را قرار دهیم.



$$Z=jX_{L_۱}+jX_{L_۲}-۲jX_M-jX_C=j۲۰+j۱۲-۲(j۲)-j۷=\ \mathbf{j۲۱Ω}$$

مثال ۱۴: در مدار شکل زیر ماکزیمم توان متوسطی که می‌توان به مقاومت R_L تحویل داد، چند وات است؟

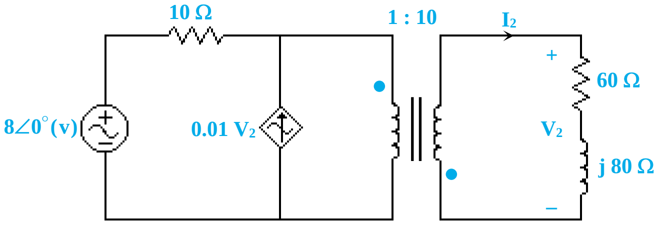


۱) ۵۰۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۰۰۰
۴) ۲۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه توان حداکثر، لازم است که مقادیر V_{th} و R_{th} محاسبه شود. لذا ابتدا با توجه به جدول بالا، مقدار V_{th} با نسبت انتقال $(\frac{۴}{۱})$ محاسبه شده و سپس R_{th} با نسبت انتقال $(\frac{۴}{۱})^۲$ محاسبه می‌شود.

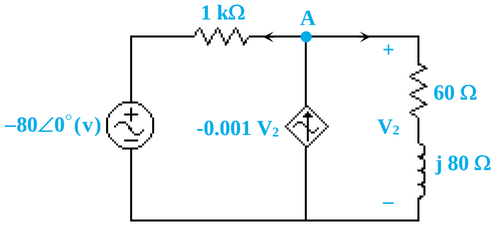
$$\left.\begin{array}{l} V_{th}=۱۰۰\times\frac{۴}{۱}=۴۰۰\,v \\ R_L=R_{th}=۱۰\times(\frac{۴}{۱})^۲=۱۶۰\,\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow P_{max}=\frac{V_{th}^۲}{۴R_L}=\frac{(۴۰۰)^۲}{۴\times۱۶۰} \Rightarrow \mathbf{P_{max}=۲۵۰\,w}$$

مثال ۱۵: در مدار شکل زیر فازور ولتاژ $V_۲$ بر حسب ولت برابر کدام گزینه است؟



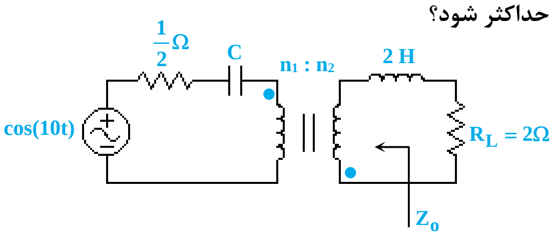
۱) $۵\angle۶۰^\circ$
۲) $۵\sqrt{۲}\angle۶۰$
۳) $۵\angle-۱۳۵^\circ$
۴) $۵\sqrt{۲}\angle-۱۳۵^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدار اولیه را به ثانویه منتقل می‌کنیم. در این انتقال، تمامی جریان‌ها ۰/۱ برابر، تمام امپدانس‌ها ۱۰۰ برابر و تمام ولتاژها ۱۰ برابر می‌شوند. همچنین علامت منفی ولتاژها و جریان‌ها با توجه به نقطه‌گذاری ترانسفورماتور لحاظ شده است. اگر KCL را در گره A بنویسیم، داریم:



$$\frac{V_۲+۸۰\angle۰^\circ}{۱۰۰۰}+۰/۰۰۱V_۲+\frac{V_۲}{۶۰+j۸۰}=۰ \Rightarrow \mathbf{V_۲=۵\sqrt{۲}\angle-۱۳۵^\circ}$$

مثال ۱۶: در مدار زیر نسبت $\frac{n_۱}{n_۲}$ و C کدام یک از موارد زیر باشد تا توان مقاومت R_L حداکثر شود؟



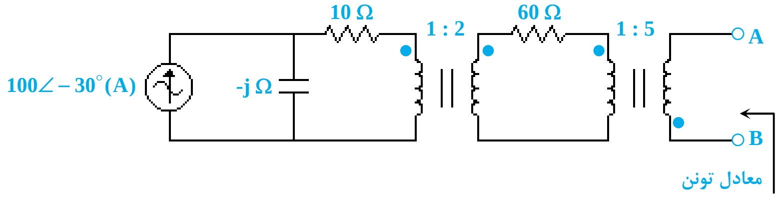
۱) $C=۰/۰۲F\ ,\ \frac{n_۱}{n_۲}=\frac{۱}{۲}$
۲) $C=۰/۰۱F\ ,\ \frac{n_۱}{n_۲}=\frac{۱}{۲}$
۳) $C=۰/۰۱F\ ,\ \frac{n_۱}{n_۲}=۲$
۴) $C=۰/۰۲F\ ,\ \frac{n_۱}{n_۲}=۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای جذب توان حداکثر، باید امپدانس دیده شده از ثانویه به سمت اولیه ترانس، برابر مزدوج امپدانس موجود در ثانویه شود.

$$Z_o=(\frac{n_۲}{n_۱})^۲.\left[\frac{۱}{۲}+\frac{-j}{۱۰C}\right]=(۲+۲۰j)^*=۲-۲۰j \Rightarrow (\frac{n_۲}{n_۱})^۲.\frac{۱}{۲}=۲$$

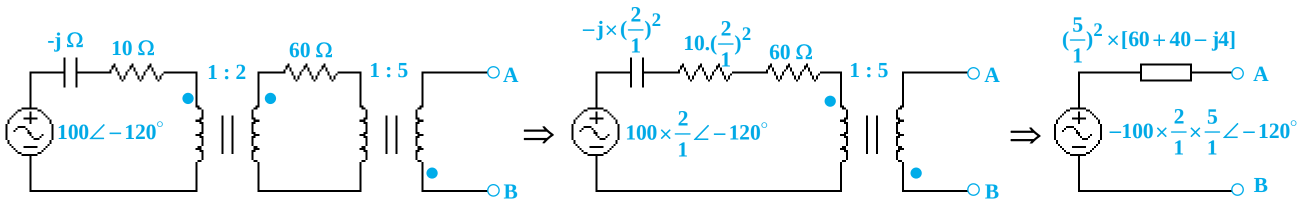
$$\Rightarrow \frac{n_۱}{n_۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (\frac{n_۲}{n_۱})^۲\times\frac{۱}{۱۰C}=۲۰ \Rightarrow \mathbf{C=۰/۰۲F}$$

مثال ۱۷: مدار معادل تونن دیده شده از دیدگاه B و A کدام است؟



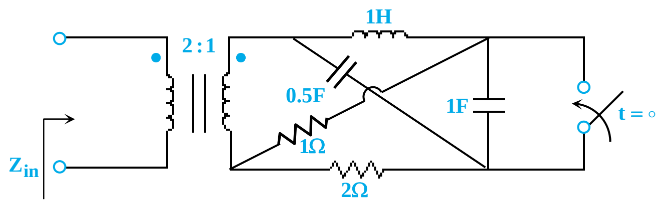
۱) $V_{th}=۱۰۰۰\angle-۶۰^\circ\,(v)\ ,\ Z_{th}=(۲۵۰۰+j۱۰۰)\Omega$
۲) $V_{th}=۱۰۰۰\angle-۳۰^\circ\,(v)\ ,\ Z_{th}=(۲۵۰+j۱۰۰)\Omega$
۳) $V_{th}=۱۰۰۰\angle۶۰^\circ\,(v)\ ,\ Z_{th}=(۲۵۰۰-j۱۰۰)\Omega$
۴) $V_{th}=۱۰۰۰\angle۳۰^\circ\,(v)\ ,\ Z_{th}=(۲۵۰-j۱۰۰)\Omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با تبدیل منابع در سمت چپ مدار و انتقال المان‌های موجود به ثانویه ترانس سمت چپ داریم:



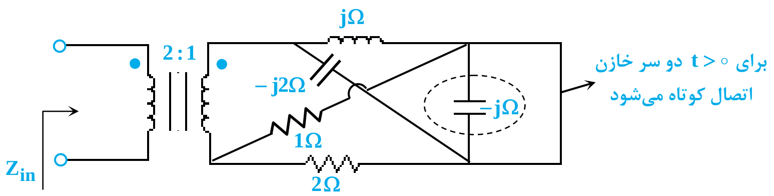
$$V_{th} = -۱۰۰۰\angle -۱۲۰^\circ = ۱۰۰۰\angle ۶۰^\circ \,(v) \quad , \quad Z_{th} = (۲۵۰۰ - j۱۰۰)\Omega$$

مثال ۱۸: امپدانس ورودی مدار شکل زیر در فرکانس $\omega = ۱$، چند اهم است؟ (به ازای $t > ۰$)

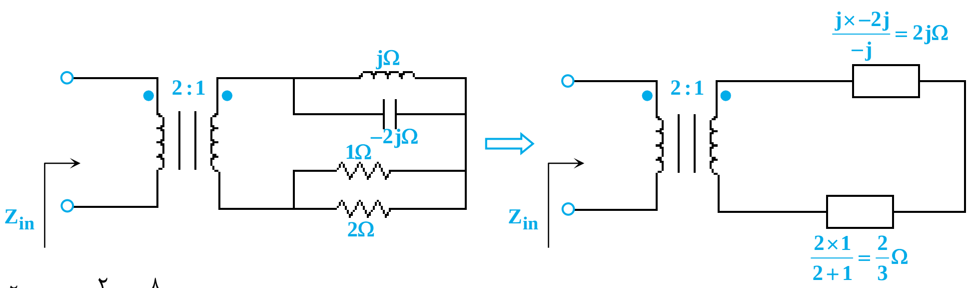


۱) $\frac{۸}{۳}+۸j$
۲) $\frac{۸}{۳}-۸j$
۳) $\frac{۴}{۳}+۴j$
۴) $\frac{۸}{۳}-۴j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این‌که $\omega = ۱$ می‌باشد، مدار در حالت دائمی سینوسی به شکل زیر است:

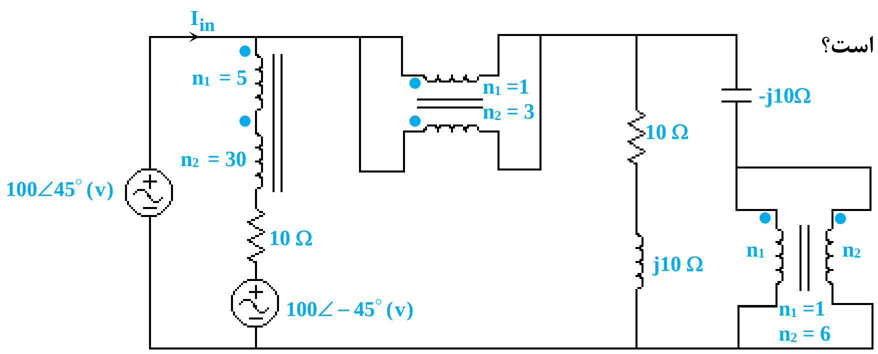


حال با ساده‌سازی مدار داریم:



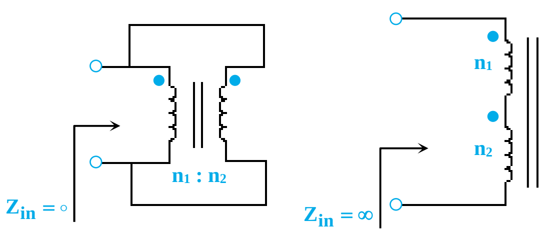
$$\Rightarrow Z_{in} = (\frac{۲}{۱})^۲ \times (۲j + \frac{۲}{۳}) = \frac{۸}{۳} + ۸j\Omega$$

مثال ۱۹: در مدار زیر مقدار جریان ورودی مدار کدام است؟

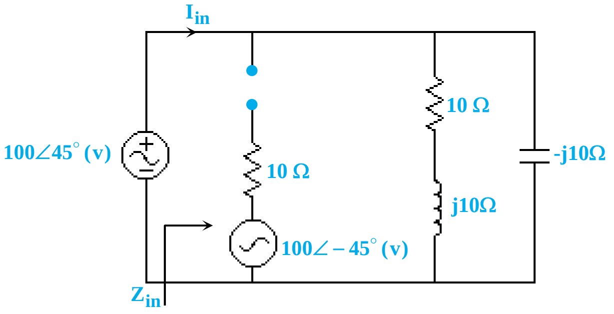


۱) $\sqrt{۲}\,A$
۲) $j\sqrt{۲}\,A$
۳) $۵\sqrt{۲}\,A$
۴) $j۵\sqrt{۲}\,A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به نکته زیر که در جداول قبل هم ذکر شده بود، داریم:



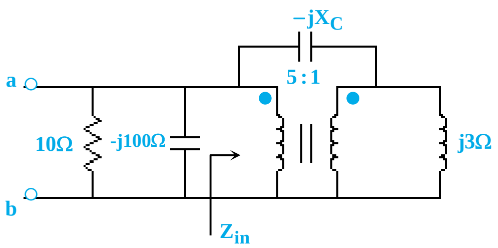
با جایگذاری معادل‌های ذکر شده در مدار داریم:



$$Z_{in} = (۱۰+j۱۰)\,||\,(-j۱۰) = (۱۰-j۱۰)\,\Omega$$

$$I_{in} = \frac{۱۰۰\angle ۴۵^\circ}{۱۰-j۱۰} = \frac{۱۰۰\angle ۴۵^\circ}{۱۰\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ} = ۵\sqrt{۲}\angle ۹۰^\circ = j۵\sqrt{۲}\ A$$

مثال ۲۰: در صورتی که مدار زیر در حالت تشدید باشد، مقدار X_C بر حسب اهم کدام است؟



۱) ۱۹۲

۲) ۱/۹۲

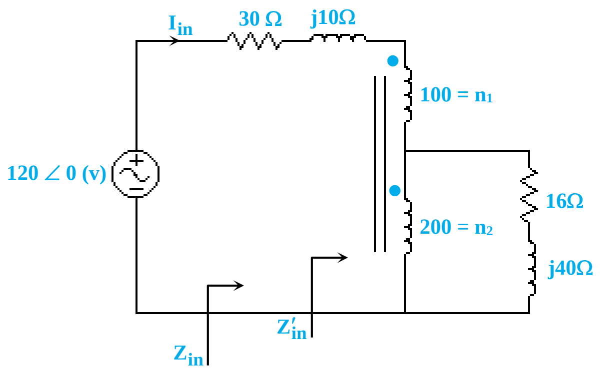
۳) ۴۶۸

۴) ۴/۶۸

پاسخ: گزینه «۱» مقدار Z_{in} باید برابر $j۱۰۰$ شود تا مدار در حالت رزونانس باشد؛ لذا داریم:

$$Z_{in} = \frac{۱}{\frac{n^۲}{j۳} + \frac{(n-۱)^۲}{-jX_C}}\ ,\ n = \frac{۱}{۵}\ ,\ Z_{in} = j۱۰۰ \Rightarrow j۱۰۰ = \frac{۱}{\frac{(\frac{۱}{۵})^۲}{j۳} + \frac{(\frac{۱}{۵}-۱)^۲}{-jX_C}} \Rightarrow j۱۰۰[\frac{۱}{j۷۵} - \frac{۱۶}{۲۵.jX_C}] = ۱ \Rightarrow X_C = ۱۹۲\Omega$$

مثال ۲۱: در مدار زیر مقدار تقریبی I_{in} بر حسب آمپر کدام است؟



۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

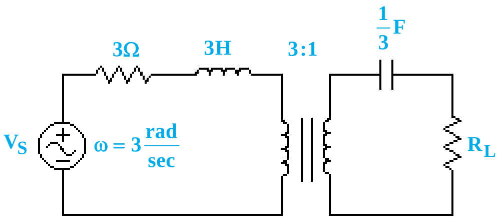
پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از قانون انعکاس امپدانس، امپدانس‌های ثانویه به اولیه انتقال داده می‌شود.

$$Z'_{in} = (\frac{n_۱+n_۲}{n_۲})^۲(۱۶+j۴۰) = (\frac{۳۰۰}{۲۰۰})^۲\cdot(۱۶+j۴۰) = (۳۶+j۹۰)\,\Omega$$

$$Z_{in} = ۳۰+j۱۰+Z'_{in} = (۶۶+j۱۰۰)\,\Omega \Rightarrow I_{in} = \frac{۱۲۰\angle ۰}{۶۶+j۱۰۰} \Rightarrow |I_{in}| = \frac{۱۲۰}{|۶۶+j۱۰۰|} \simeq ۱A$$

آزمون فصل پنجم

۱ـ در مدار شکل زیر مقدار R_L برحسب اهم کدام باشد تا توان جذبی آن حداکثر شود؟



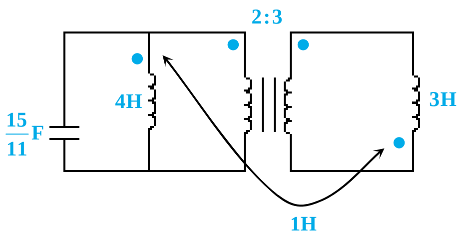
۱) $\frac{۱}{۲}\Omega$

۲) $۱/۵\Omega$

۳) ۲Ω

۴) $\frac{۱}{۳}\Omega$

۲ـ در مدار زیر فرکانس زاویه‌ای رزونانس مدار برحسب رادیان بر ثانیه کدام است؟



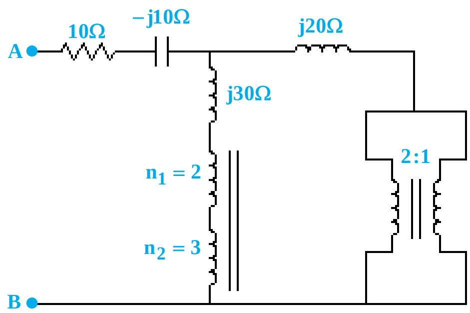
۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۳

۳ـ در مدار زیر مقدار ضریب توان مدار کدام است؟



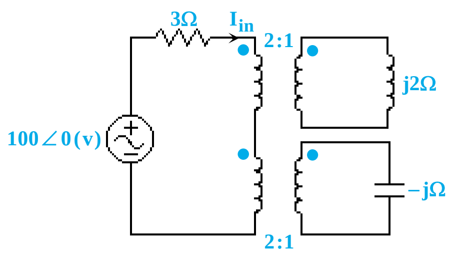
۱) ۰/۶

۲) ۰/۸۶

۳) ۰/۷۰۷

۴) ۰/۹۵

۴ـ در مدار زیر مقدار I_{in} برحسب آمپر کدام است؟



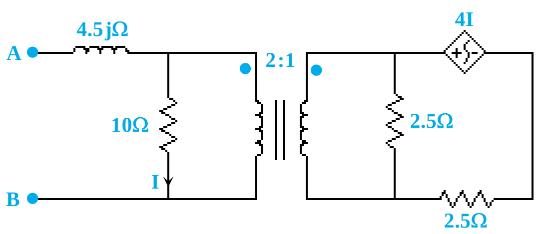
۱) ۱۶

۲) ۱۲j

۳) ۱۶−۱۲j

۴) ۱۲−۱۶j

۵ـ در مدار زیر مقدار ضریب توان مدار کدام است؟



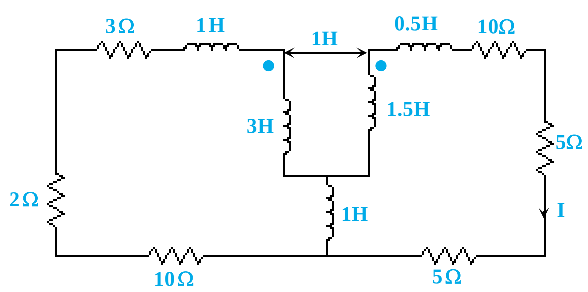
۱) ۰/۲۲

۲) ۰/۳۶

۳) ۰/۸۶

۴) ۰/۷۰۷

۶ـ در مدار زیر معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به I کدام است؟



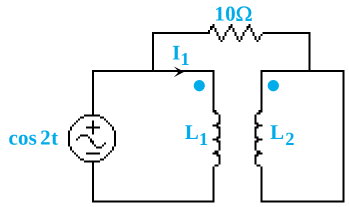
۱) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+۱۴\frac{dI}{dt}+۳۰I=۰$

۲) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+۱۵۰\frac{dI}{dt}+۳۰I=۰$

۳) $\frac{۱۰d^۲I}{dt^۲}+۶\frac{dI}{dt}+۳۰I=۰$

۴) $\frac{۱۱d^۲I}{dt^۲}+۱۴۵\frac{dI}{dt}+۳۰۰I=۰$

۷ـ در مدار زیر جریان I_1 برحسب آمپر کدام گزینه است؟



$$L = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

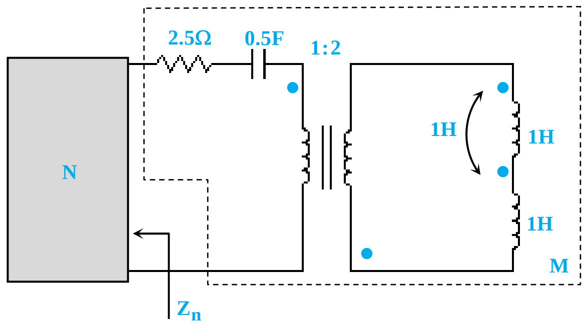
۱) −j۰/۲۱

۲) −j۰/۳

۳) j۰/۳

۴) j۰/۲۱

۸ـ در مدار زیر Z_n برحسب اهم کدام باشد تا توان شبکه N حداکثر شود؟ (ω = ۱)



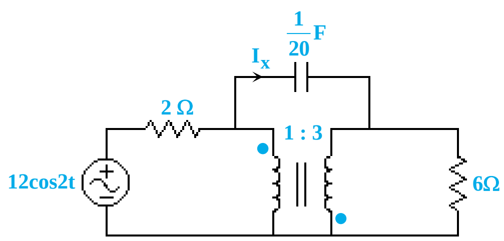
۱) ۲/۵ − j۲

۲) ۱/۵ − j

۳) ۲/۵ + j

۴) ۱/۵ + j۲

۹ـ در مدار زیر معادله I_x کدام گزینه است؟



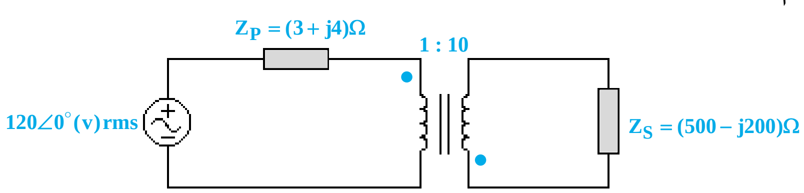
۱) ۰/۹۳ cos (۲t + ۵۱/۳°)

۲) ۰/۸۳ cos (۲t + ۳۱/۱°)

۳) ۰/۵۲ cos (۲t + ۱۰/۱°)

۴) ۰/۸۷ cos (۲t + ۲۱/۲°)

۱۰ـ در مدار زیر مقدار توان متوسط Z_S برحسب وات کدام است؟



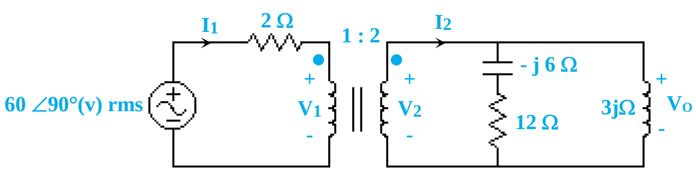
۱) ۹۶۰

۲) ۱۲۱۰

۳) ۱۱۲۲

۴) ۱۰۵۹

۱۱ـ در مدار زیر مقدار V_o برحسب ولت کدام است؟



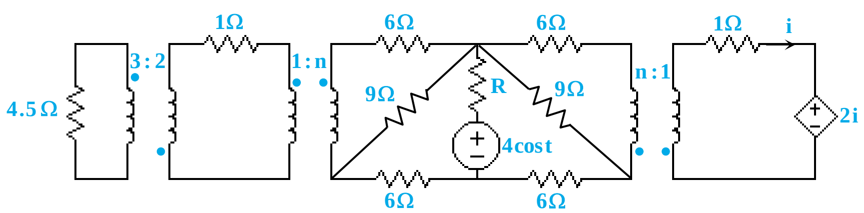
۱) ۶۳/۱۴

۲) ۱۲/۱۵

۳) ۴۲/۱۲

۴) ۳۸/۱۰

۱۲ـ در مدار شکل زیر که دارای ترانس‌های ایده‌آل است، اگر R = ۶Ω باشد، حداکثر توان در آن مصرف می‌شود. در این شرایط مقدار n چقدر است؟



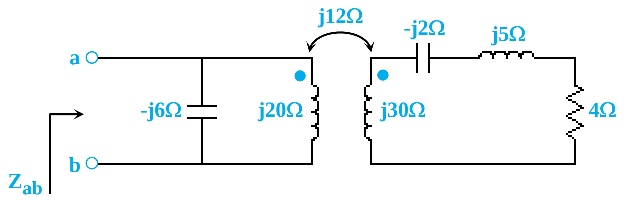
۱) ۲

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۴

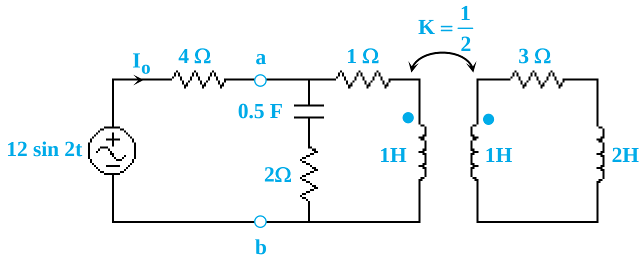
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳ــ در مدار زیر مقدار Z_{ab} چند اهم است؟



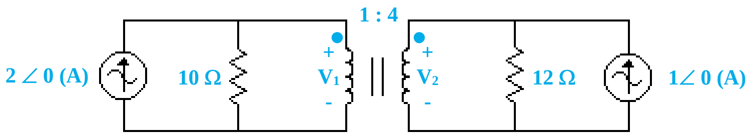
۱) ۰/۲ − j۹/۷
۲) ۰/۳ − j۵/۲
۳) ۰/۱ − j۳/۱
۴) ۰/۷ − j۲/۱

۱۴ــ در مدار زیر اندازه‌ی I_o بر حسب آمپر کدام است؟



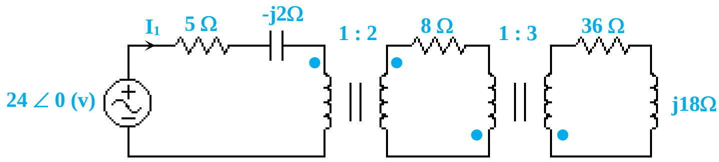
۱) ۱/۲
۲) ۲/۲
۳) ۳/۲
۴) ۴/۲

۱۵ــ مقدار ولتاژ $V_۲$ در مدار زیر برحسب ولت کدام است؟



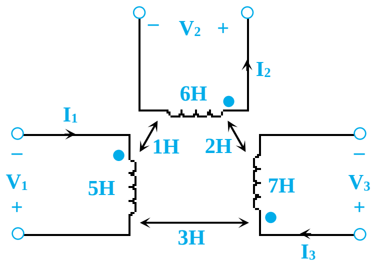
۱) ۱/۶
۲) ۱۵/۲
۳) ۵/۷
۴) ۱۶/۷

۱۶ــ در مدار زیر مقدار اندازه‌ی جریان $I_۱$ بر حسب آمپر کدام است؟



۱) ۲/۹۵
۲) ۳/۴۱
۳) ۵/۱۱
۴) ۸/۱۱

۱۷ــ در مدار شکل زیر معادله $V_۲$ کدام است؟



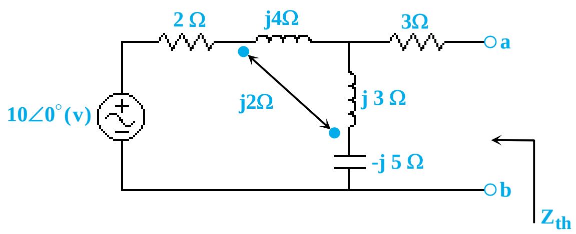
۱) $V_۲ = ۷\frac{dI_۳}{dt} - \frac{۳dI_۱}{dt} + \frac{۲dI_۲}{dt}$

۲) $V_۲ = ۷\frac{dI_۳}{dt} + \frac{۳dI_۱}{dt} - \frac{۲dI_۲}{dt}$

۳) $V_۲ = -۷\frac{dI_۳}{dt} + \frac{۳dI_۱}{dt} - \frac{۲dI_۲}{dt}$

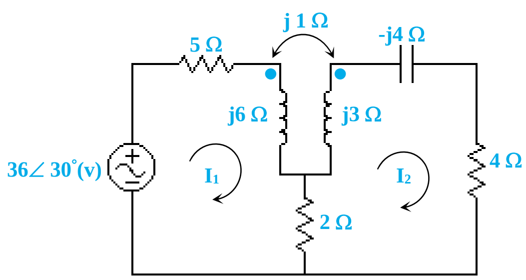
۴) $V_۲ = ۷\frac{dI_۳}{dt} - \frac{۳dI_۱}{dt} - \frac{۲dI_۲}{dt}$

۱۸ــ برای مدار شکل زیر Z_{th} برحسب اهم کدام است؟



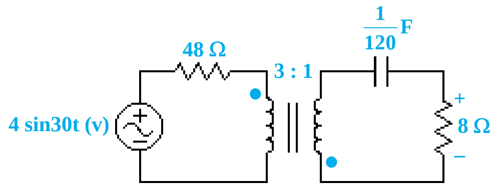
۱) ۲ + j۷
۲) ۳/۵ + j۲
۳) ۲ + j۳/۵
۴) ۷ + j۲

۱۹ــ در مدار شکل زیر چند وات توان توسط مقاومت ۴ اهمی جذب می‌شود؟



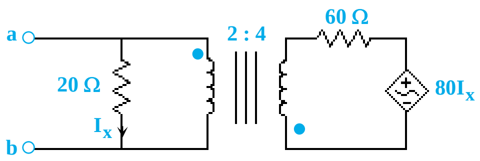
۱) ۱/۷
۲) ۳/۶۷
۳) ۴/۵
۴) ۶

۲۰ـ توان متوسط جذب شده توسط مقاومت ۸ اهمی تقریباً چند میلی‌وات است؟



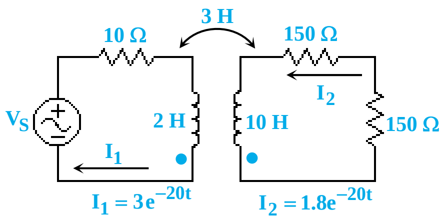
۱) ۳۶/۷
۲) ۳/۶۷
۳) ۳۰/۷
۴) ۰/۳۶۷

۲۱ـ مدار معادل تونن از دید دو نقطه‌ی a و b کدام است؟



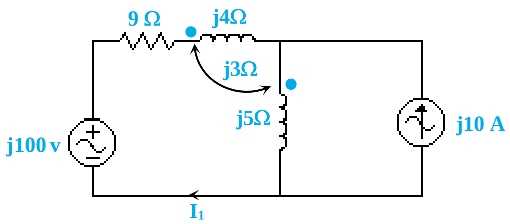
۱) $V_{th}=\frac{۱}{۴}v$, $R_{th}=\frac{۱}{۴}\Omega$
۲) $V_{th}=۴v$, $R_{th}=۴\Omega$
۳) $V_{th}=۰$, $R_{th}=\frac{۱}{۴}\Omega$
۴) $V_{th}=۰$, $R_{th}=۴\Omega$

۲۲ـ در شکل مقابل معادله‌ی ولتاژ دو سر سلف ۱۰ هانری کدام است؟



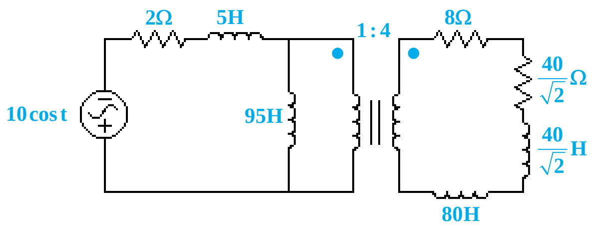
۱) $-۵۴۰e^{-۲۰t}$
۲) $-۳۶e^{-۲۰t}$
۳) $-۱۸۰e^{-۲۰t}$
۴) $-۹۰e^{-۲۰t}$

۲۳ـ در مدار داده شده اندازه‌ی جریان I_1 چند آمپر است؟



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۲/۵
۴) ۷/۳

۲۴ـ در مدار زیر فرکانس تشدید مدار بر حسب هرتز کدام است؟

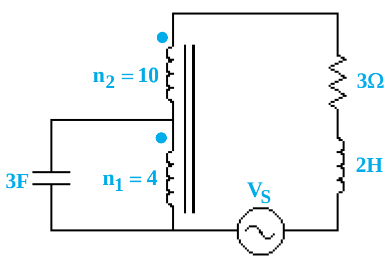


۱) فرکانس تشدید ندارد.
۲) ۱۰
۳) ۳۰
۴) ۲۰

۲۵ـ در مدار تست قبل نسبت توان راکتیو به توان اکتیو به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

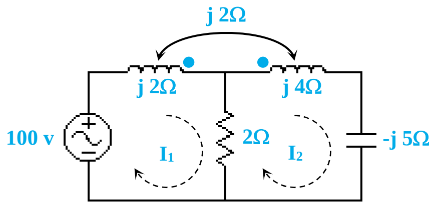
۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۶ـ فرکانس رزونانس مدار زیر بر حسب هرتز کدام است؟



۱) ۰/۳۳
۲) ۰/۱۱
۳) ۰/۲۲
۴) ۰/۴۴

۲۷ـ دستگاه تعیین جریان‌های مدار شکل زیر کدام است؟



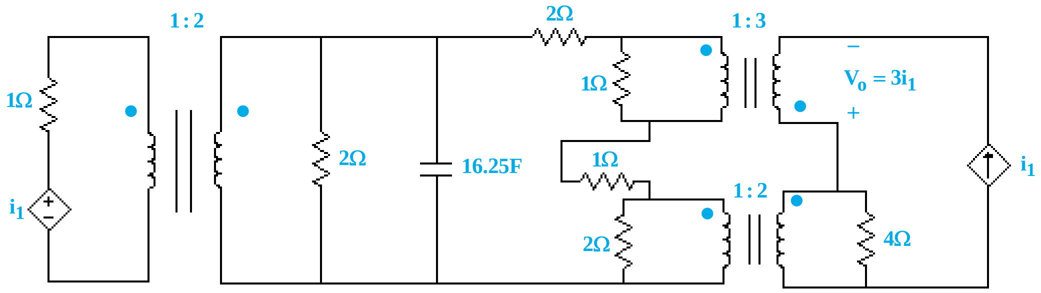
۱) $\begin{bmatrix} j2+2 & -j2+2 \\ -j2+2 & 2-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} j2+2 & j2-2 \\ j2-2 & 2-j9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} j2+2 & -j2-2 \\ -j2-2 & 2-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} j2+2 & j2+2 \\ j2+2 & 2-j9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۲۸ـ ثابت زمانی مدار زیر چند ثانیه است؟



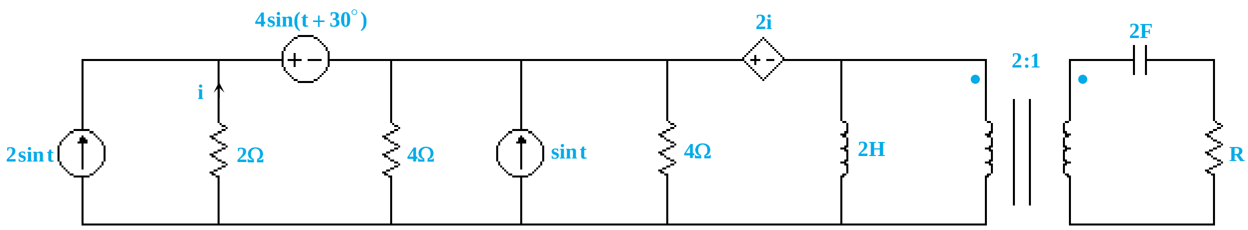
۱) $\frac{1}{17}$

۲) ۳۴

۳) ۱۷

۴) $\frac{1}{34}$

۲۹ـ مقدار R برای اینکه حداکثر توان مصرفی را داشته باشد، کدام است؟



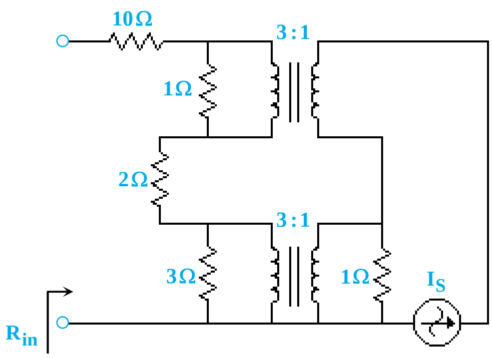
۱) $\sqrt{2}\,\Omega$

۲) $\sqrt{\frac{2}{2}}\,\Omega$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}\,\Omega$

۴) $2\sqrt{2}\,\Omega$

۳۰ـ در مدار زیر امپدانس ورودی بر حسب اهم کدام گزینه است؟



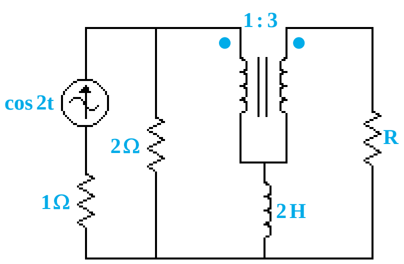
۱) ۱۰/۲۵

۲) ۱۵/۲۵

۳) ۱۲/۲۵

۴) ۲۰/۲۵

۳۱ـ در مدار زیر مقدار R بر حسب اهم کدام باشد تا توان R حداکثر شود؟



۱) ۱۲

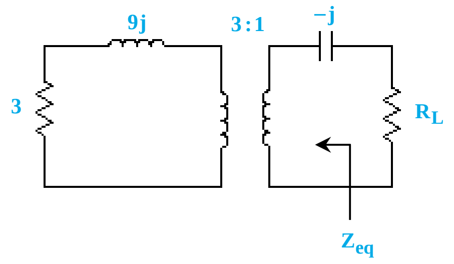
۲) ۲۴

۳) ۳۰

۴) ۱۶

پاسخنامه تشریحی آزمون فصل پنجم

۱ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی دائمی سینوسی می‌بریم. سپس با به دست آوردن امپدانس تونن دیده شده از دو سر مقاومت R_L، مقدار آن را برای جذب توان ماکزیمم به دست می‌آوریم:

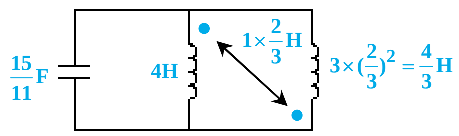


$$\Rightarrow \quad Z_{eq} = -j + (۳+۹j)\times(\frac{۱}{۳})^{۲} = \frac{۱}{۳}$$

برای جذب توان ماکزیمم:

$$R_L = |Z_{eq}| = \frac{۱}{۳}\Omega$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا المان سمت ثانویه ترانس را به اولیه انتقال می‌دهیم:



اندوکتانس معادل دو سلف موازی با تزویج متقابل که دارای سر نقطه‌دار یکسان نیستند، به صورت روبه‌رو می‌باشد:

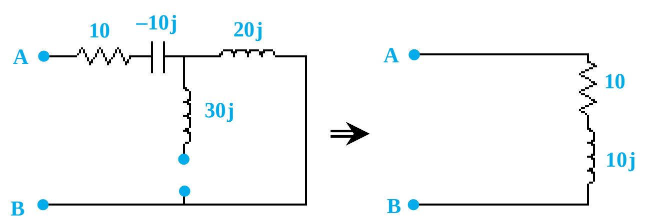
$$L_{eq} = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{L_۱ + L_۲ + ۲M}$$

$$L_{eq} = \frac{۴\times\frac{۴}{۳} - (\frac{۲}{۳})^۲}{۴ + \frac{۴}{۳} + \frac{۴}{۳}} = \frac{۱۱}{۱۵}H$$

بنابراین داریم:

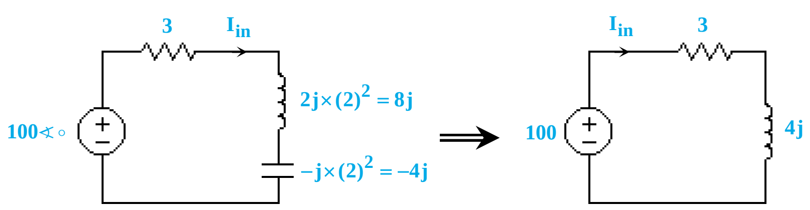
$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = ۱\frac{rad}{sec}$$

۳ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را ساده می‌کنیم:



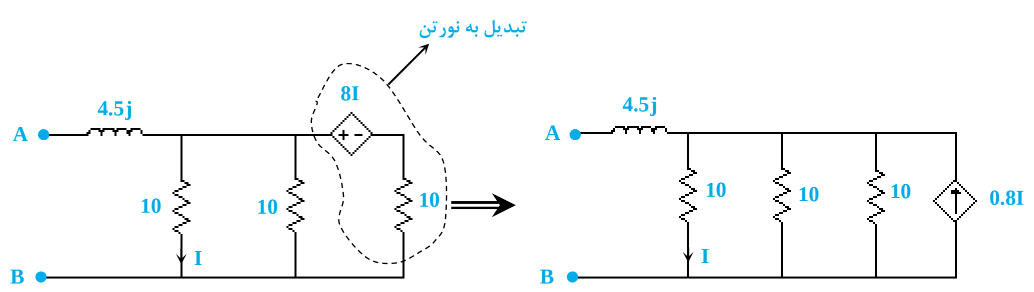
$$\Rightarrow \quad PF = \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^۲ + (L\omega)^۲}} = \frac{۱۰}{۱۰\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \Rightarrow \quad PF = ۰/۷۰۷$$

۴ـ گزینه «۴» ابتدا امپدانس‌های موجود در ثانویه‌ی دو ترانس را به سمت اولیه انتقال می‌دهیم:



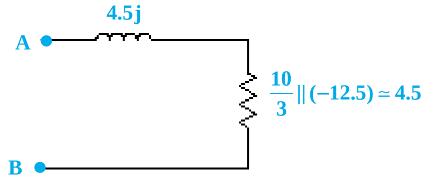
$$\Rightarrow \quad I_{in} = \frac{۱۰۰}{۳+۴j} = ۱۲ - ۱۶jA$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا تمام المان‌ها را به سمت اولیه‌ی ترانس انتقال می‌دهیم:



حال مقاومت معادل منبع جریان وابسته را به دست می‌آوریم:

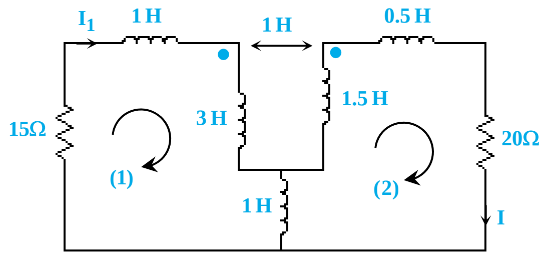
$$R_{\text{منبع وابسته}}=\frac{۱۰I}{-۰/۸I}=-۱۲/۵\Omega$$



بنابراین داریم:

$$\Rightarrow\ PF=\frac{R}{\sqrt{R^۲+(L\omega)^۲}}=\frac{۴/۵}{۴/۵\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۷۰۷$$

۶ــ گزینه «۴» با اعمال KVL در دو حلقه‌ی مدار داریم:



$$KVL\,(۱): ۱۵I_۱+\frac{dI_۱}{dt}+\frac{۳dI_۱}{dt}-\frac{dI}{dt}+\frac{d}{dt}(I_۱-I)=۰\ \Rightarrow\ ۱۵I_۱+۵\frac{dI_۱}{dt}=\frac{۲dI}{dt}$$

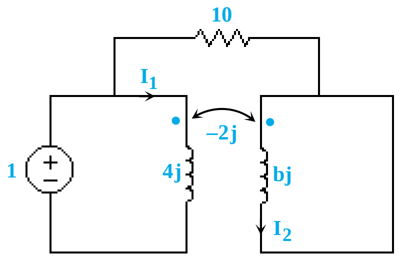
$$\Rightarrow\ I_۱=\frac{۲DI}{۵D+۱۵}\qquad(۱)$$

$$KVL\,(۲): ۰/۵\frac{dI}{dt}+۲۰I+\frac{d}{dt}(I-I_۱)+۱/۵\frac{dI}{dt}-\frac{dI_۱}{dt}=۰\ \Rightarrow\ ۲۰I+۳\frac{dI}{dt}=\frac{۲dI_۱}{dt}\ \Rightarrow\ (۲۰+۳D)I=۲DI_۱\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\ I=\frac{۲D}{۲۰+۳D}\times\frac{۲DI}{۵D+۱۵}$$

$$(۱۵D^۲+۱۴۵D+۳۰۰)I=۴D^۲I\ \Rightarrow\ ۱۱\frac{d^۲I}{dt^۲}+۱۴۵\frac{dI}{dt}+۳۰۰I=۰$$

۷ــ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم (شکل روبه‌رو). با دقت در حلقه‌ی سمت راست مشاهده می‌شود که هیچ جریانی از مقاومت ۱۰ اهمی عبور نمی‌کند. پس در حلقه‌ی سمت چپ جریان $I_۱$ از منبع نیز عبور می‌کند:

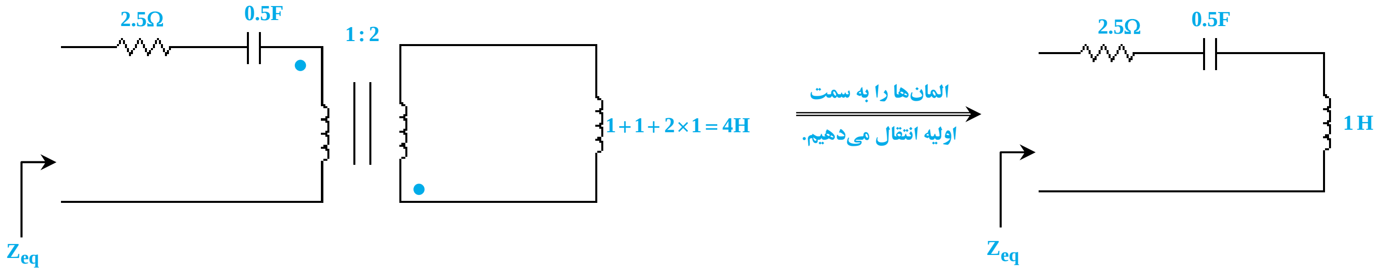


KVL در (حلقه‌ی چپ): $-۱+۴jI_۱-۲jI_۲=۰\qquad(۱)$

KVL در (حلقه‌ی راست): $۶jI_۲-۲jI_۱=۰\qquad(۲)$

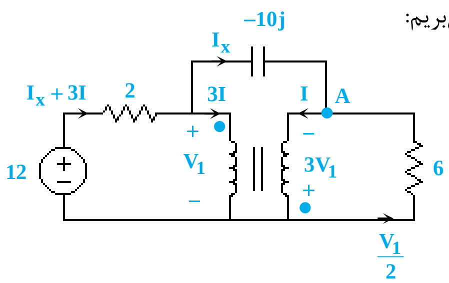
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}-۱+۴jI_۱-۲j(\frac{I_۱}{۳})=۰\ \Rightarrow\ \frac{۱۰}{۳}jI_۱=۱\ \Rightarrow\ I_۱=-۰/۳jA$$

۸ــ گزینه «۳» برای حداکثر شدن توان جذب شده توسط شبکه‌ی N، Z_N باید برابر مزدوج امپدانس دیده شده از دو سرش باشد. بنابراین:



$$Z_{eq}=۲/۵-\frac{۲}{\omega}j+\omega j\ \xrightarrow{\omega=۱}\ Z_{eq}=۲/۵-j\Omega\ \Rightarrow\ Z_N=Z_{eq}^*=۲/۵+j\Omega$$

۹ــ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



با اعمال KCL در گره A و همچنین اعمال KVL در حلقه‌ی ورودی و حلقه‌ی بیرونی داریم:

$$KCL(A): I_x+\frac{V_۱}{۲}=I\qquad(۱)$$

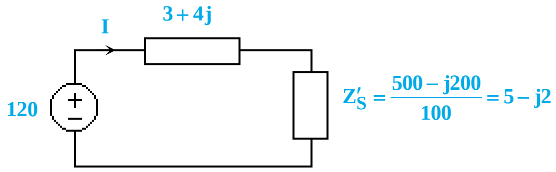
$$\text{KVL (حلقه‌ی ورودی)}: V_1 = 12 - 2\times(I_x + 3I) \Rightarrow 2I_x + 6I + V_1 = 12 \qquad (2)$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی بیرونی)}: -12 + 2\times(I_x + 3I) - 10\,jI_x - 3V_1 = 0 \Rightarrow I_x(2 - 10\,j) + 6I - 3V_1 = 12 \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} I = 1/5 \\ V_1 = 3 - 2I_x \end{cases} \Rightarrow I_x(2 - 10\,j) + 9 - 9 + 6I_x = 12$$

$$I_x = \frac{12}{8 - 10\,j} \Rightarrow I_x = 0/93\measuredangle 51/3^\circ A \Rightarrow I_x(t) = 0/93\cos(2t + 51/3^\circ)A$$

۱۰ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه محاسبه‌ی توان در دو سمت ترانس با هم یکسان است، بنابراین Z_S را به سمت اولیه انتقال می‌دهیم:



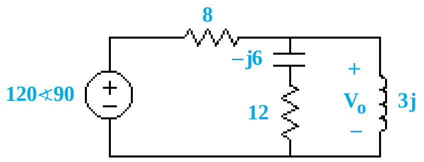
$$I_{rms} = \frac{120}{8 + 2j} \Rightarrow |I_{rms}| = 14/55A$$

از طرفی می‌دانیم توان متوسط Z_S همان توان تلف شده توسط مقاومت می‌باشد، بنابراین داریم:

$$P_{avg} = R'_S I_{rms}^2 = 5\times(14/55)^2 \simeq 1059w$$

۱۱ـ گزینه «۳» ابتدا المان‌های موجود در سمت اولیه‌ی ترانسفورمر را به سمت ثانویه انتقال می‌دهیم،

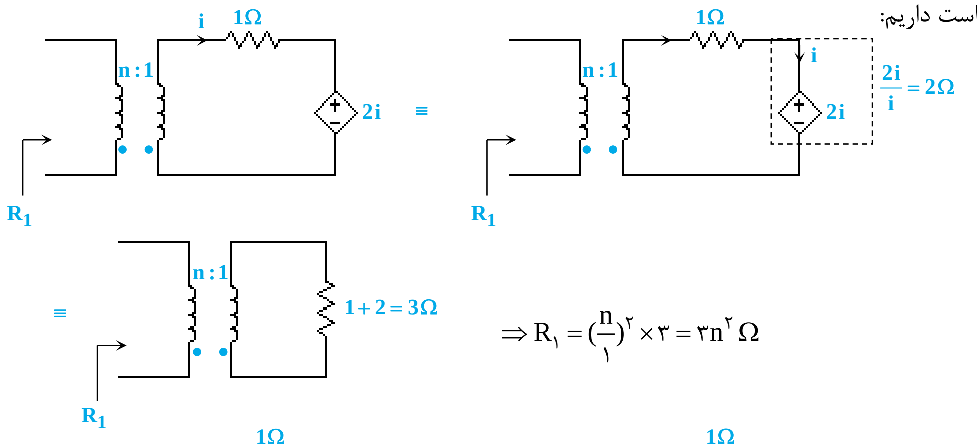
حال با اعمال تقسیم ولتاژ، مقدار مؤثر V_o را محاسبه می‌کنیم:



$$V_o = \frac{3j \,||\, (12 - 6j)}{3j \,||\, (12 - 6j) + 8}\times 120\measuredangle 90 \Rightarrow |V_o(rms)| = 42/12v$$

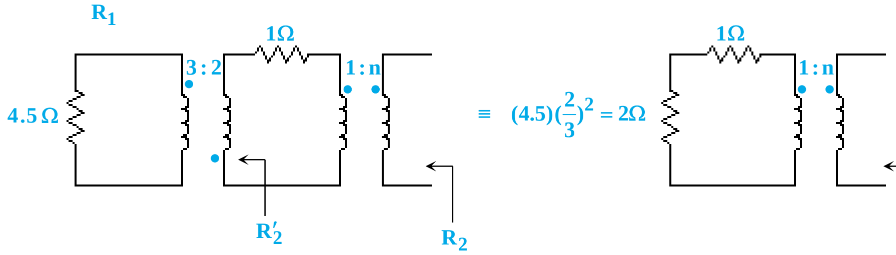
۱۲ـ گزینه «۱» در این گونه سؤالات که حداکثر توان در یک مقاومت مصرف می‌شود، باید مقاومت دیده شده از دو سر آن مقاومت را با مقدار آن مقاومت، مساوی قرار داد. بنابراین باید مقاومت دیده شده از دو سر $R = 6\Omega$ را به دست آورد و برابر با 6Ω قرار داد.

همان‌طور که مشخص است، مدار در سمت چپ و راست نیاز به ساده‌سازی دارد و برای این مهم باید امپدانس‌های طرفین ترانس‌ها را به یک سمت آورد و ترانس‌ها را حذف کرد. برای ترانس سمت راست داریم:



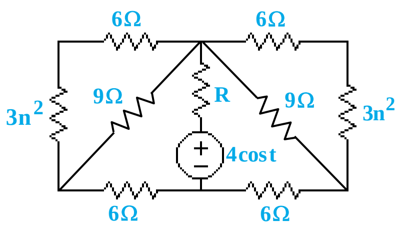
$$\Rightarrow R_1 = \left(\frac{n}{1}\right)^2 \times 3 = 3n^2\,\Omega$$

حال برای ترانس‌های سمت چپ داریم:

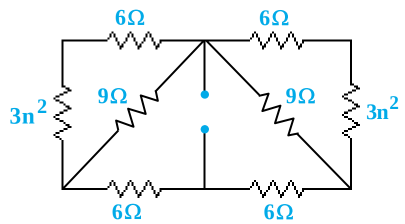


$$R_2 = (2 + 1)\left(\frac{n}{1}\right)^2 = 3n^2\,\Omega$$

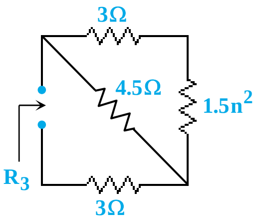
حال مدار را که کمی ساده‌تر شده است، رسم می‌کنیم:



می‌بینیم که مدار فوق دارای تقارن است، پس به هدفمان که پیدا کردن مقاومت از دو سر R است، ادامه می‌دهیم. منبع ولتاژ مستقل را اتصال کوتاه می‌کنیم. داریم:



مدار را از وسط تا می‌زنیم و داریم:



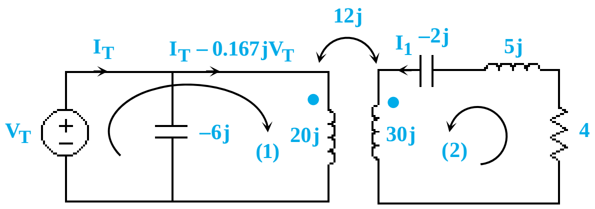
$$R_۳ = ((۳+۱/۵n^۲)\,||\,۴/۵)+۳$$

برای اینکه توان مصرفی در R حداکثر شود، باید مقدار $R_۳ = R = ۶\Omega$ باشد، پس داریم:

$$((۳+۱/۵n^۲)\,||\,۴/۵)+۳=۶ \Rightarrow (۳+۱/۵n^۲)\,||\,۴/۵=۳$$

$$\frac{۱}{۳+۱/۵n^۲}+\frac{۱}{۴/۵}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳+۱/۵n^۲=۹ \Rightarrow ۱/۵n^۲=۶ \Rightarrow n^۲=۴ \Rightarrow \boxed{n=۲}$$

۱۳ـ گزینه «۱» با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T مقدار Z_{ab} را محاسبه می‌کنیم:



با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

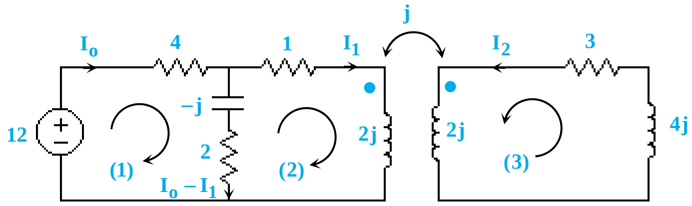
$$KVL(۱): -V_T+۲۰j(I_T-۰/۱۶۷jV_T)+۱۲jI_۱=۰ \quad \Rightarrow \quad ۲/۳۴V_T+۲۰jI_T+۱۲jI_۱=۰ \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): (۴+۳j)I_۱+۳۰jI_۱+۱۲j(I_T-۰/۱۶۷jV_T)=۰ \quad \Rightarrow \quad (۴+۳۳j)I_۱=۱۲j(۰/۱۶۷V_T-I_T)$$

$$\Rightarrow \quad I_۱=(۰/۳۶+۰/۰۴j)(۰/۱۶۷jV_T-I_T) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \; ۲/۳۴V_T+۲۰jI_T+۱۲j(۰/۳۶+۰/۰۴j)(۰/۱۶۷jV_T-I_T)=۰ \quad \Rightarrow \quad V_T=\frac{-۰/۴۸-۱۵/۶۸j}{۱/۶۲-۰/۰۸j}I_T \quad \Rightarrow \quad Z_{ab}\simeq ۰/۲-۹/۷j\Omega$$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



حال با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص شده مقدار جریان I_o را محاسبه می‌کنیم:

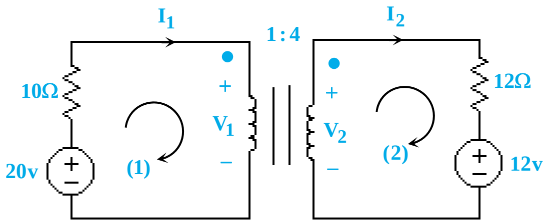
$$KVL(۱): -۱۲+۴I_o+(۲-j)(I_o-I_۱)=۰ \quad \Rightarrow \quad (۶-j)I_o-(۲-j)I_۱=۱۲ \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): (۲-j)(I_۱-I_o)+(۱+۲j)I_۱+jI_۲=۰ \quad \Rightarrow \quad (۳+j)I_۱-(۲-j)I_o+jI_۲=۰ \qquad (۲)$$

$$KVL(۳): (۳+۶j)I_۲+jI_۱=۰ \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۳)} \; I_۱=(۰/۵۲-۰/۴۷j)I_o \quad \xrightarrow{(۱)} \; I_o=۲/۱۹۴-۰/۱۸۶j \quad \Rightarrow \quad |I_o|=۲/۲A$$

۱۵ـ گزینه «۴» ابتدا با تبدیل نورتن به تونن، مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



با توجه به نسبت تبدیل ترانس داریم:

$$\begin{cases} I_۱=۴I_۲ \\ V_۲=۴V_۱ \end{cases}$$

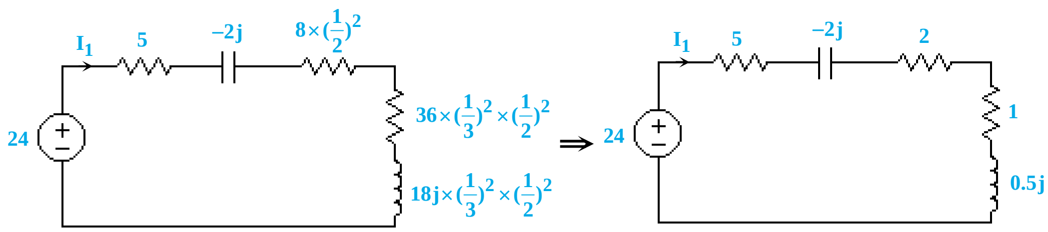
حال با اعمال KVL داریم:

$$KVL(۱): -۲۰+۱۰I_۱+V_۱=۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۰I_۱+V_۱=۲۰$$

$$\text{KVL}(٢): -V_٢ + ١٢I_٢ + ١٢ = ٠ \quad \Rightarrow \quad V_٢ - ١٢I_٢ = ١٢$$

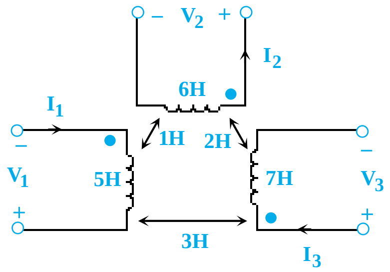
$$\Rightarrow \begin{cases} ٤٠I_٢ + \dfrac{V_٢}{٤} = ٢٠ \\ -١٢I_٢ + V_٢ = ١٢ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_٢ = ١٦/٧v$$

۱۶ـ گزینه «۱» ابتدا تمام امپدانس‌ها را به یک سمت ترانسفورمر انتقال می‌دهیم.



$$\Rightarrow \quad I_١ = \frac{٢٤}{٨ - ١/٥j} \quad \Rightarrow \quad |I_١| = ٢/٩٥A$$

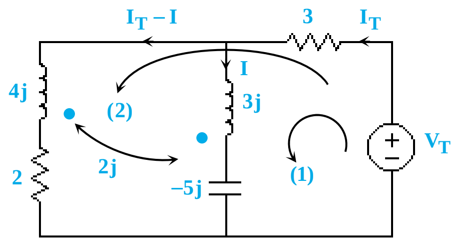
۱۷ـ گزینه «۲» با اعمال KVL در حلقه‌ی متناظر با $V_٣$ داریم:



$$V_٣ = ٧\frac{dI_٣}{dt} + ٣\frac{dI_١}{dt} - ٢\frac{dI_٢}{dt}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی Z_{th} ابتدا منبع ولتاژ را بی‌اثر کرده و سپس با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T در دو سر a و b، امپدانس تونن Z_{th} را به دست می‌آوریم:

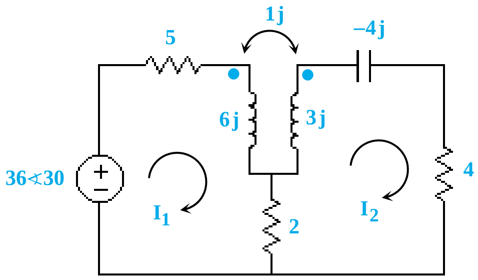


$$\text{KVL}(١): -V_T + ٣I_T + ٣jI + ٢j(I_T - I) - ٥jI = ٠ \quad \Rightarrow \quad -V_T + (٣+٢j)I_T - ٤jI = ٠ \qquad (١)$$

$$\text{KVL}(٢): -V_T + ٣I_T + ٤j(I_T - I) + ٢jI + ٢(I_T - I) = ٠ \quad \Rightarrow \quad -V_T + (٥+٤j)I_T - (٢+٢j)I = ٠ \qquad (٢)$$

$$\xrightarrow{(١),(٢)} \quad -V_T + (٥+٤j)I_T - (٢+٢j)\left(\frac{-V_T + (٣+٢j)I_T}{٤j}\right) = ٠ \quad \Rightarrow \quad V_T = \left(\frac{٢/٥ + ٤/٥j}{٠/٥ + ٠/٥j}\right)I_T = (٧+٢j)I_T \quad \Rightarrow \quad Z_{th} = ٧ + ٢j\Omega$$

۱۹ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در حلقه‌های مدار، جریان عبوری از مقاومت ۴ اهمی را به دست آورده و در نتیجه توان مصرفی آن را محاسبه می‌کنیم:

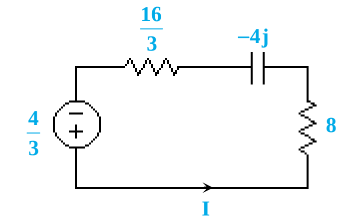


$$\text{KVL}(١): -٣٦\angle ٣٠ + ٥I_١ + ٦jI_١ - jI_٢ + ٢(I_١ - I_٢) = ٠ \quad \Rightarrow \quad (٧+٦j)I_١ - (٢+j)I_٢ = ٣٦\angle ٣٠ \qquad (١)$$

$$\text{KVL}(٢): (٤-٤j)I_٢ + ٢(I_٢ - I_١) + ٣jI_٢ - jI_١ = ٠ \quad \Rightarrow \quad (٦-j)I_٢ - (٢+j)I_١ = ٠ \qquad (٢)$$

$$\xrightarrow{(١),(٢)} \quad \frac{(٧+٦j)(٦-j)}{٢+j}I_٢ - (٢+j)I_٢ = ٣٦\angle ٣٠ \quad \Rightarrow \quad |I_٢| = ١/٥A \quad \Rightarrow \quad P_{٤\Omega} = \frac{١}{٢}RI^٢ = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ١/٥^٢ = ٤/٥w$$

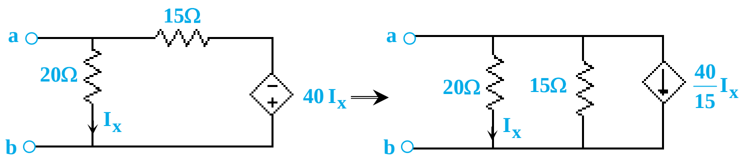
۲۰ـ گزینه «۱» ابتدا المان‌های سمت چپ ترانسفورمر را به سمت راست انتقال داده و سپس مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:



$$I=\frac{\frac{۴}{۳}}{۸+\frac{۱۶}{۳}-۴j}=۰/۰۹۶\measuredangle ۱۶/۷^{\circ}\ A$$

$$P_{۸\Omega}=\frac{۱}{۲}\times ۸\times(۰/۰۹۶)^{۲}=۰/۰۳۶۷w=۳۶/۷mw$$

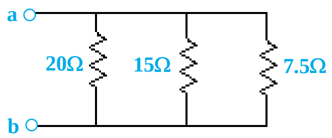
۲۱ـ گزینه «۴» ابتدا تمامی عناصر مدار را به سمت اولیه‌ی ترانسفورمر انتقال می‌دهیم:



حال مقاومت معادل منبع جریان وابسته را به دست می‌آوریم:

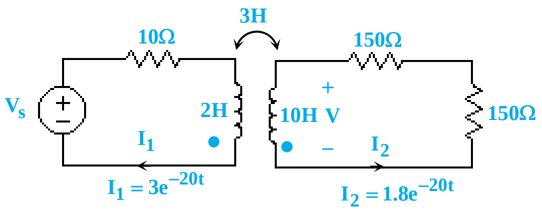
$$R_{\text{منبع جریان}}=\frac{۲۰I_x}{\frac{۴۰}{۱۵}I_x}=۷/۵\Omega$$

بنابراین داریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}V_{th}=۰\\ R_{th}=۲۰\,||\,۱۵\,||\,۷/۵=۴\Omega\end{cases}$$

۲۲ـ گزینه «۱» با توجه به مشخص بودن جریان $I_۲$، با نوشتن KVL در حلقه‌ی سمت راست، به راحتی می‌توان ولتاژ دو سر سلف ۱۰ هانری را تعیین نمود:

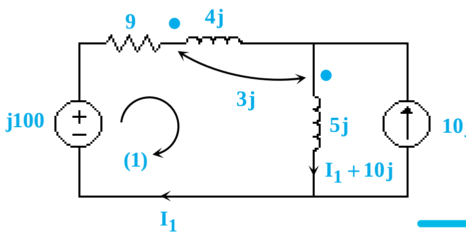


$$V=-(۱۵۰+۱۵۰)I_۲=-۵۴۰e^{-۲۰t}v$$

البته از طریق معادلات دیفرانسیلی ولتاژ سلف هم می‌توانستیم به این مقدار دست یابیم. یعنی:

$$V=۱۰\frac{dI_۲}{dt}+۳\frac{dI_۱}{dt}\ \Rightarrow\ V=-۳۶۰e^{-۲۰t}-۱۸۰e^{-۲۰t}=-۵۴۰e^{-۲۰t}v$$

۲۳ـ گزینه «۴» با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت راست داریم:

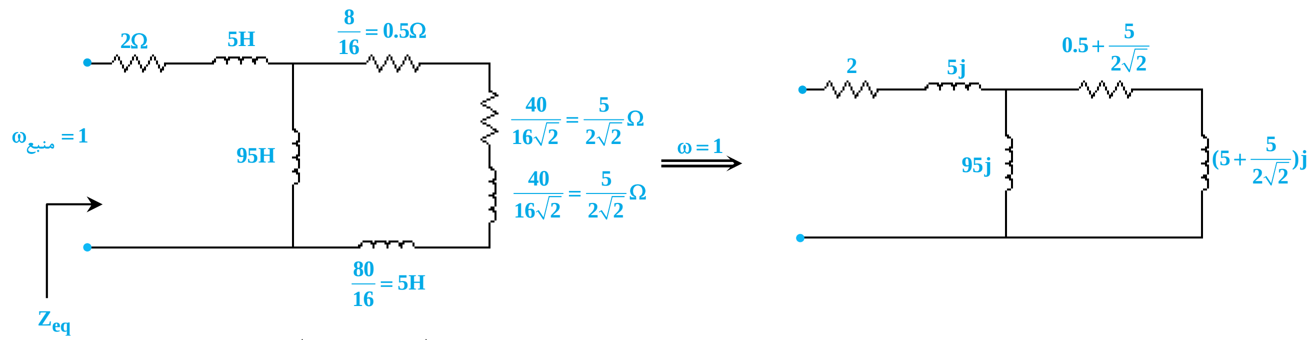


$$KVL\,(۱):-۱۰۰j+۹I_۱+۴jI_۱+۳j(I_۱+۱۰j)+۵j(I_۱+۱۰j)+۳jI_۱=۰$$

$$\Rightarrow\ I_۱(۹+۱۵j)=۸۰+۱۰۰j\ \Rightarrow\ |I_۱|=۷/۳A$$

۲۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه مدار تنها از المان‌های R و L تشکیل شده است و خبری از وجود خازن نیست، پس مدار فرکانس تشدیدی ندارد.

۲۵ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن نسبت توان راکتیو به توان اکتیو مصرف‌شده‌ی مدار، کافی است امپدانس دیده شده از دو سر منبع را به‌دست آورده و نسبت X به R آن را حساب کنیم. برای این کار ابتدا همه‌ی المان‌های سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

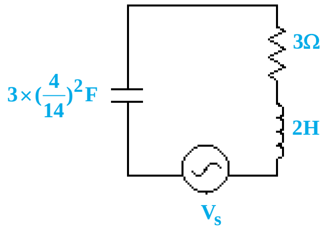


$$Z_{eq}=۲+۵j+(۹۵j)\,||\,[۰/۵+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}+j(۵+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})]=۳/۹۸+۱۱/۳۶j$$

پس داریم:

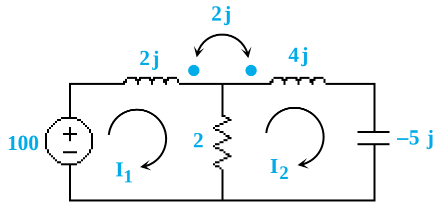
$$\frac{Q_{\text{مصرفی}}}{P_{\text{مصرفی}}}=\frac{X}{R}=\frac{۱۱/۳۶}{۳/۹۸}=۲/۸۵\simeq ۳$$

۲۶ـ گزینه «۳» ابتدا همه‌ی المان‌های مدار را به یک سمت اتوترانسفورمر انتقال می‌دهیم: $(a=\frac{n_۱}{n+n_۲}=\frac{۴}{۱۴})$



$$\Rightarrow\ f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\times\frac{۲}{۷}\sqrt{۶}}=۰/۲۲\text{Hz}$$

۲۷ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:

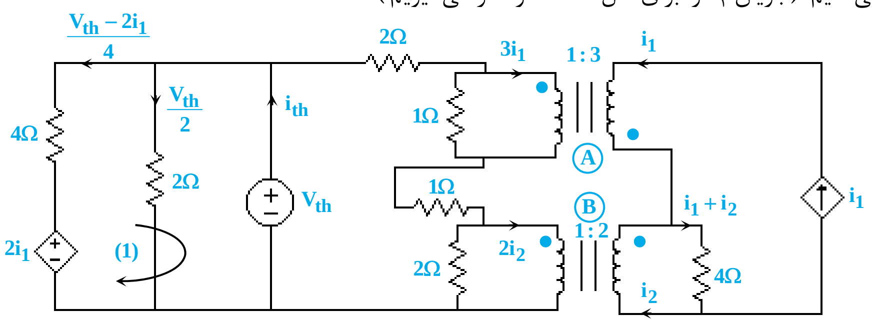


$$KVL(۱):-۱۰۰+۲jI_۱-۲jI_۲+۲(I_۱-I_۲)=۰\ \Rightarrow\ I_۱(۲+۲j)-(۲-۲j)I_۲=۱۰۰\qquad(۱)$$

$$KVL(۲):۲(I_۲-I_۱)+۴jI_۲-۲jI_۱-۵jI_۲=۰\ \Rightarrow\ -(۲+۲j)I_۱+(۲-j)I_۲=۰\qquad(۲)$$

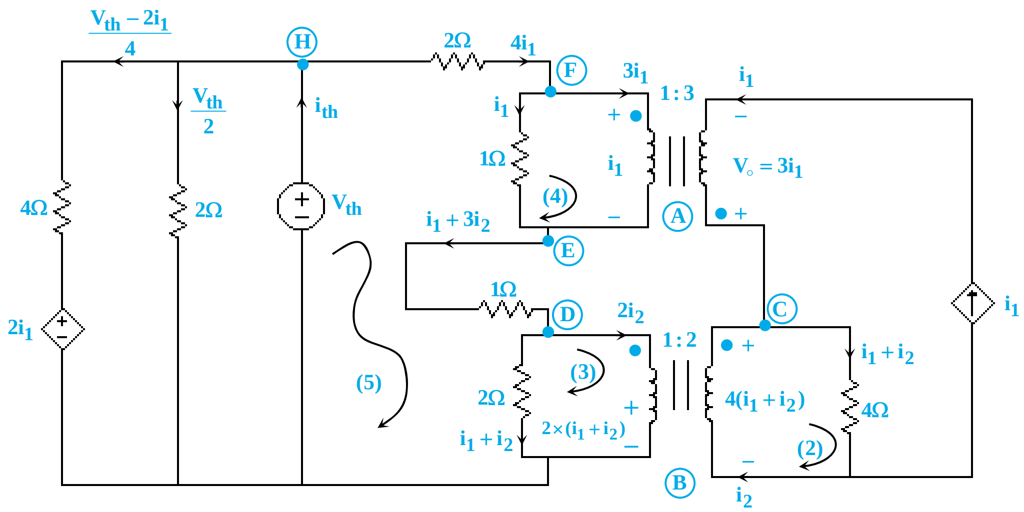
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{bmatrix}۲+۲j & -۲-۲j\\ -۲-۲j & ۲-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_۱\\ I_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰۰\\ ۰\end{bmatrix}$$

۲۸ـ گزینه «۳» به‌منظور پیدا کردن ثابت زمانی مدار، مقاومت دیده‌شده از دو سر خازن را پیدا می‌کنیم. ابتدا المان‌های ترانس سمت چپ مدار را از طرف اولیه به‌طرف ثانویه منتقل می‌کنیم. (جریان $i_۲$ را برای حل مسأله در نظر می‌گیریم.)



با توجه به موازی بودن منبع ولتاژ V_{th} با مقاومت ۲Ω، مقدار جریان آن در جهت نشان داده شده برابر $\frac{V_{th}}{۲}$ می‌گردد. هم‌چنین با در نظر گرفتن رابطه KVL برای حلقه ۱، جریان مقاومت ۴Ω همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، برابر $\frac{V_{th}-۲i_۱}{۴}$ خواهد شد.

با در نظر گرفتن روابط آمپردور برای ترانس‌های A و B، جریان‌های سمت چپ هر ترانس مطابق شکل به ترتیب برابر $۳i_۱$ و $۲i_۲$ می‌شوند.



با در نظر گرفتن رابطه KCL برای گره C، جریان مقاومت ۴Ω برابر $i_۱+i_۲$ شده و در نتیجه با نوشتن رابطه KVL در حلقه ۲، ولتاژ سمت راست ترانس B برابر $۴\times(i_۱+i_۲)$ و بنابراین ولتاژ سمت چپ ترانس B با توجه به نسبت تعداد دورها در این ترانس، برابر $۲\times(i_۱+i_۲)$ می‌گردد.

حال با درنظر گرفتن رابطه KVL در حلقه ۳، جریان مقاومت ۲Ω داخل این حلقه برابر $i_۱+i_۲$ می‌شود.

با نوشتن رابطه KCL در گره D، جریان مقاومت ۱Ω متصل به این گره، برابر $i_۱+۳i_۲$ خواهد شد.

با توجه به این‌که ولتاژ سمت راست ترانس A برابر $V_۰=۳i_۱$ است، ولتاژ سمت چپ این ترانس هم با توجه به سرهای نقطه‌دار و نسبت تعداد دورها برابر $i_۱$ با پلاریته مشخص‌شده بر روی شکل می‌باشد.

با درنظر گرفتن رابطه KVL برای حلقه ۴، جریان مقاومت 1Ω داخل این حلقه برابر i_1 در جهت نشان داده شده می‌باشد.
با درنظر گرفتن رابطه KCL برای گره F، جریان مقاومت 2Ω متصل به این گره، در جهت نشان داده شده بر روی شکل برابر $4i_1$ می‌گردد.
حال کافی است که رابطه KCL را برای گره‌های E و H و رابطه KVL را برای حلقه ۵ بنویسیم.

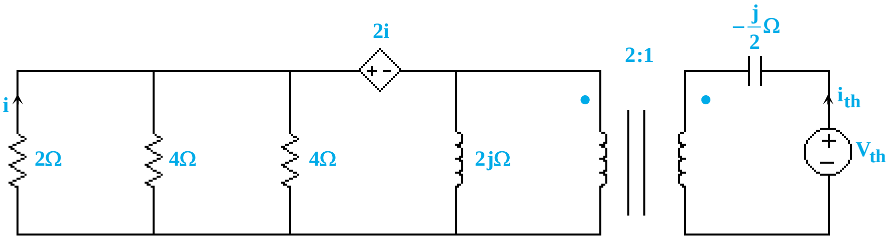
$$\begin{cases} KCL_E: i_1 + 3i_1 = i_1 + 3i_2 \\ KCL_H: i_{th} = \dfrac{V_{th}}{2} + \dfrac{V_{th} - 2i_1}{4} + 4i_1 \\ KVL_5: V_{th} = 2\times 4i_1 + i_1 + 1\times[i_1 + 3i_2] + 2\times[i_1 + i_2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 & (1) \\ i_{th} = \dfrac{3}{4}V_{th} + \dfrac{7}{2}i_1 & (2) \\ V_{th} = 12i_1 + 5i_2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1),(3) \rightarrow V_{th} = 17i_1 \quad (4) \\ (2),(4) \rightarrow i_{th} = \dfrac{3}{4}V_{th} + \dfrac{7}{2}\times[\dfrac{V_{th}}{17}] \end{cases}$$

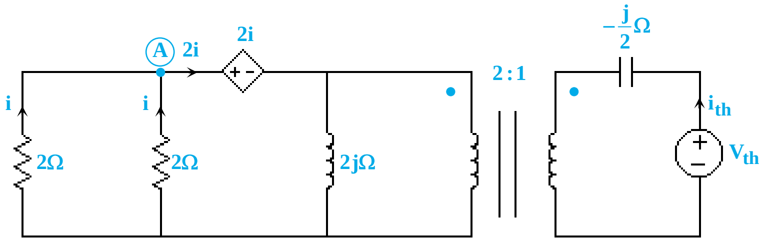
$$\Rightarrow i_{th} = [\frac{3}{4} + \frac{7}{34}]V_{th} \Rightarrow i_{th} = \frac{65}{68}V_{th} \Rightarrow V_{th} = \frac{68}{65}i_{th} \Rightarrow R_{th} = \frac{68}{65}\Omega$$

$$\tau = R_{th}\times C = \frac{68}{65}\times 16.25 = \frac{68}{65}\times\frac{65}{4} = 17 \Rightarrow \tau = 17\ \text{ثانیه}$$

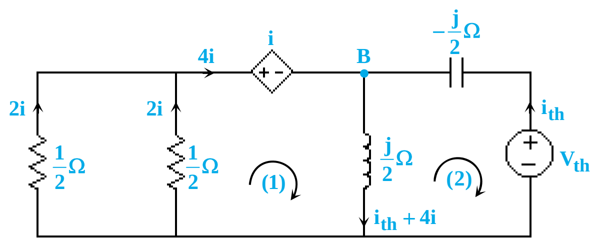
۲۹ـ گزینه «۳» برای اینکه توان مصرفی مقاومت R حداکثر مقدار خود را داشته باشد، باید مقدار آن برابر اندازه امپدانس دیده شده از دو سر خود باشد. پس به دنبال امپدانس دیده شده از دو سر مقاومت R هستیم. برای این منظور، مدار را به حالت دائمی برده و منابع مستقل را خاموش می‌کنیم.



سمت چپ مدار را ساده می‌کنیم.



با توجه به موازی بودن مقاومت‌های ۲ اهمی با یکدیگر، جریان هر دو در جهت نشان داده شده برابر i می‌گردد.
با نوشتن KCL در گره A، جریان منبع ولتاژ وابسته $2i$، در جهت مشخص شده در شکل برابر $2i$ می‌شود.
برای راحتی حل مسأله تمامی المان‌ها را به سمت راست ترانس منتقل می‌کنیم.



با نوشتن KCL در گره B، جریان المان $\frac{j}{2}\Omega$ در جهت مشخص شده برابر $i_{th}+4i$ می‌شود. حال کافی است که رابطه KVL را برای حلقه‌های ۱ و ۲ بنویسیم:

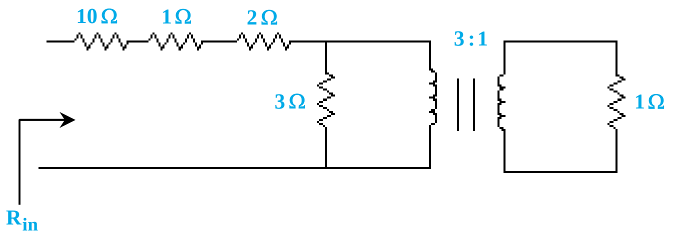
$$\begin{cases} KVL_1: \dfrac{1}{2}\times 2i + i + \dfrac{j}{2}\times[4i + i_{th}] = 0 \\ KVL_2: V_{th} = \dfrac{-j}{2}i_{th} + \dfrac{j}{2}\times[4i + i_{th}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = \dfrac{-i_{th}}{4-4j} \\ V_{th} = 2ji \end{cases} \Rightarrow V_{th} = 2j\times\frac{-1}{4-4j}i_{th} = \frac{-2j}{4-4j}i_{th} \Rightarrow V_{th} = \frac{-2j}{4}\times\frac{1}{1-j}i_{th} = \frac{-j}{2}\times\frac{1+j}{2}i_{th} = \frac{1-j}{4}i_{th}$$

$$\Rightarrow V_{th} = (\frac{1-j}{4})\times i_{th} \Rightarrow Z_{th} = \frac{1-j}{4}\Omega$$

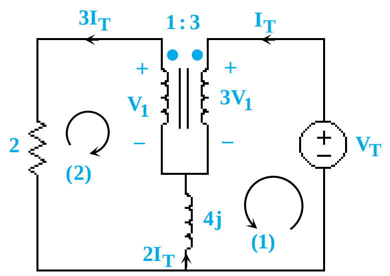
$$R = |Z_{th}| = \left|\frac{1-j}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{4}\Omega$$

۳۰ـ گزینه «۲» برای به‌دست‌آوردن امپدانس ورودی مدار، کافی است منبع جریان I_S را بی‌اثر کنیم. در نتیجه ترانسفورمر سری شده با آن مدار باز شـده و از مدار حذف می‌شود. بنابراین داریم:

$$R_{in} = ۱۰ + ۱ + ۲ + ۳ \,||\, (۱ \times ۳^۲) = ۱۵/۲۵\Omega$$



۳۱ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی R متناظر با حداکثر شدن توان مقاومت R کافی است مقاومت معادل تونن دیده شده از سرش را به دست آوریم. بـرای ایـن‌کـار منبـع جریـان مستقل را بی‌اثر کرده و با اعمال KVL در دو حلقه‌ی سمت چپ و راست مدار، امپدانس تونن دیده شده را محاسبه می‌کنیم:



$$KVL\,(۱): V_T = ۳V_۱ - ۸jI_T \qquad (۱)$$

$$KVL\,(۲): -۶I_T + V_۱ - ۸jI_T = ۰ \;\Rightarrow\; V_۱ = (۶ + ۸j)I_T \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \; V_T = (۱۸ + ۲۴j - ۸j)I_T = (۱۸ + ۱۶j)I_T$$

بنابراین برای جذب توان حداکثر توسط مقاومت R داریم:

$$R = |Z_{th}| = \sqrt{۱۸^۲ + ۱۶^۲} \simeq ۲۴\Omega$$