سؤالات آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ اگر $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5x-3}{x-2}-ax-b\right)=0$ باشد، b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$، کدام است؟

۱) $\frac{25}{48}$ ۲) $\frac{23}{48}$ ۳) $\frac{13}{24}$ ۴) $\frac{11}{24}$

۳ـ مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه قائم ایجاد شود، وقتی حجم این استوانه بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) e ۴) e^2

۵ـ حاصل $\int_4^9\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $Ln4$ ۴) $Ln5$

۶ـ طول قوس منحنی بسته $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۷ـ حاصل $\int_a^b f(a+b-x)dx-\int_a^b f(x)dx$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $a+b$ ۳) $b-a$ ۴) $f(a+b)$

۸ـ سطح محدود به منحنی $y=\sin x$ و محور xها در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ را حول خط $y=1$ دوران می‌دهیم، حجم حاصل کدام است؟

۱) $\pi(2+\frac{\pi}{2})$ ۲) $\pi(2+\pi)$ ۳) $\frac{3}{2}\pi^2$ ۴) $\frac{3}{2}\pi$

۹ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&3\end{bmatrix}$ باشد، درایه واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1}، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰ـ حاصل $Arctg\sqrt{2x-y}+Arcsin(2x-y+1)$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۱ـ صفحه قائم بر منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^2+t-2\\y=2t^2-5t+3\end{cases}$ در نقطه $(4,1)$ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳/۲ ۲) ۴/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۶

۱۲ـ از رابطه $Ln\sqrt{x^2+y^2}-Arctg\frac{y}{x}=Ln2-\frac{\pi}{3}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(1,\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) $-2-\sqrt{3}$ ۴) $-2+\sqrt{3}$

۱۳ـ صفحه مماس بر رویه $z = 2x^2 - y^2 + 2xy$ در نقطه $(1,2,3)$ محور zها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 5

۱۴ـ دیفرانسیل کامل تابع دومتغیری $z = x^2 e^{3y-2x}$ در نقطه $(3,2)$ به ازای $dx = 0/03$ و $dy = 0/02$ کدام است؟

۱) $0/18$ ۲) $0/16$ ۳) $0/14$ ۴) $0/12$

۱۵ـ در تابع دومتغیری $u = (1 - 2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}}$، حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}$، کدام است؟

۱) $(x-y)u^3$ ۲) $(x+y)u^3$ ۳) xyu^3 ۴) y^2u^3

سؤالات آزمون مجموعه مدیریت

توجه: برای رشته مدیریت مجموعاً ۸ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات ۱، ۲، ۵، ۹، ۱۴ و ۱۵ مشترک با رشته حسابداری به علاوه‌ی دو سؤال زیر را شامل می‌شود.

۱۶ـ مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $y = \frac{8}{x^2+4}$ و $x^2 = 4y$، کدام است؟

۱) $\pi - \frac{2}{3}$ ۲) $\pi - \frac{4}{3}$ ۳) $2\pi - \frac{2}{3}$ ۴) $2\pi - \frac{4}{3}$

۱۷ـ سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ داده شده است. فصل مشترک‌های دوبه‌دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی ۲) عمود ۳) منطبق ۴) متقاطع

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ گزینه «۴» طبق صورت سؤال حاصل یک حد برابر صفر شده است. باید مقدار b را معلوم کنیم؛ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲x^۲+۵x^۲-۳+(x-۲)(-ax-b)}{x-۲}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲x^۲+۵x-۳+ax^۲-bx+۲ax+۲b}{x-۲}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(۲-a)x^۲+(۵-b+۲a)x+۲b-۳}{x-۲}\right)$$

حالا خوب دقت کنید؛ حاصل این حد را طراح برابر با صفر در نظر گرفته است. اگر قرار باشد ضریب $x^۲$ و x برابر با صفر نباشند، حاصل این حد هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. (چون $x\to\infty$) پس این دو ضریب باید برابر با صفر شوند:

$$\begin{cases}۲-a=۰\\ ۵-b+۲a=۰\end{cases}\Rightarrow a=۲\ \Rightarrow ۵-b+۲\times۲=۰\ \Rightarrow b=۹$$

۲ـ گزینه «۱» سری از نوع تلسکوپی می‌باشد که البته اختلاف اندیس‌ها بیشتر از ۱ واحد است. واضح است ابتدا باید کسر را تفکیک کنیم:

$$\frac{۱}{n(n+۴)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+۴}\Rightarrow ۱=A(n+۴)+Bn\Rightarrow ۱=(A+B)n+۴A$$

چون سمت چپ فقط عدد داریم، پس ضریب n در سمت راست باید صفر شود، یعنی $A+B=۰$ و در نتیجه $A=-B$. از طرفی ۴A باید برابر با یک شود، پس $۴A=۱$ و یا $A=\frac{۱}{۴}$ پس $B=-\frac{۱}{۴}$، بنابراین سری به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۴)}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\frac{۱}{۴}}{n}+\frac{-\frac{۱}{۴}}{n+۴}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۴}\right)$$

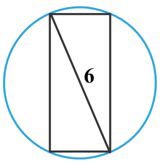
قبل از ادامه‌ی حل به یادآوری زیر توجه کنید:

> **یادآوری:** در سری‌های تلسکوپی اگر اختلاف اندیس‌های مجموع داخل سیگما، از یک واحد بیشتر باشد، باید به جای جمله اول به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات اول را با هم جمع کنیم و به جای جمله آخر به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات آخر را با هم جمع کنیم، به عنوان مثال داریم:
>
> $$\sum_{k=۱}^{n}(f_k-f_{k+۳})=(\underbrace{f_۱+f_۲+f_۳}_{\text{مجموع سه جمله اول}})-(\underbrace{f_{n+۱}+f_{n+۲}+f_{n+۳}}_{\text{مجموع سه جمله آخر}})$$
>
> در این مثال اختلاف اندیس‌ها برابر ۳ است.
>
> و در حالت خاص اگر حد بالای سیگما ∞ باشد، آن‌گاه چون جملات آخر در ∞ تقریباً با هم برابر هستند، می‌توانیم عدد اختلاف اندیس‌ها را در جمله آخر ضرب کنیم و آن را به‌صورت زیر بنویسیم، به مثال مقابل توجه کنید:
>
> $$\sum_{k=۱}^{\infty}(f_k-f_{k+۲})=(\underbrace{f_۱+f_۲}_{\text{مجموع دو جمله اول}})-\underbrace{۲\times(\lim_{k\to+\infty}f_{k+۲})}_{\text{مجموع دو جمله آخر}}$$
>
> در این مثال، اختلاف اندیس‌ها برابر با ۲ است.

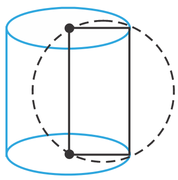
با توجه با توضیحات فوق داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۴)}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۴}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-۴\times\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۴}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱۲+۶+۴+۳}{۱۲}\right)=\frac{۲۵}{۴۸}$$

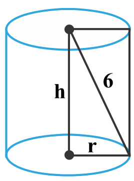
۳ـ گزینه «۲» در شکل (۱) با توجه به صورت سؤال مستطیلی، را محاط در دایره‌ای به شعاع $r=۶$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله برای آن که استوانه قائم ایجاد شود باید مستطیل را حول یکی از طول اضلاع خود دوران دهیم لذا شکل شماره (۲) پدید می‌آید.



(1)


(2)

برای راحتی حل مسئله استوانه پدید آمده را به تنهایی به صورت شکل (۳) در نظر می‌گیریم. دقت کنید عدد ۶ همان قطر دایره شکل (۱) است که در صورت سؤال داده شده است. h ارتفاع استوانه می‌باشد که همان طول مستطیل و r عرض مستطیل است. طراح ارتفاع (h) با شرط این که حجم استوانه ماکزیمم باشد را از ما خواسته است.



(3)

می‌دانیم حجم استوانه برابر $V=\pi r^۲h$ می‌باشد، در حل این‌گونه سؤالات باید حجم را برحسب یک متغیر بنویسیم؛ چون h مورد سؤال است باید r را برحسب h بنویسیم. اما رابطه بین h و r چیست؟ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه پدید آمده در شکل (۳) رابطه فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}r^۲+h^۲=۳۶\Rightarrow r^۲=۳۶-h^۲\\ V=\pi r^۲h\Rightarrow V=\pi(۳۶-h^۲)h=۳۶\pi h-\pi h^۳\end{cases}$$

برای محاسبه ماکزیمم حجم از تابع $V=۳۶\pi h-\pi h^۳$ برحسب h مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$V'=۳۶\pi-۳\pi h^۲\xrightarrow{V'=۰}۳۶\pi-۳\pi h^۲=۰\Rightarrow ۳۶\pi=۳\pi h^۲\Rightarrow h^۲=۱۲\Rightarrow h=\sqrt{۱۲}\Rightarrow h=۲\sqrt{۳}$$

۴ـ گزینه «۱» وقتی به جای x ها عدد $\frac{\pi}{4}$ را قرار دهیم به حالت ابهام 1^{∞} می‌رسیم. $(tg\frac{\pi}{2}\Rightarrow\infty\ ,\ tg\frac{\pi}{4}=1)\Rightarrow 1^{\infty}$

بنابراین از فرمول مقابل باید استفاده کنیم. $\lim\limits_{x\to\alpha}u^{v}=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(u-1)v}$

در این سؤال $u=tgx$ و $v=tg2x$ پس داریم: $\text{حاصل حد}=e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})}(tgx-1)tg2x}$

اگر حد بالای توان e را L بنامیم، با یک حد روبه‌رو هستیم که حالت ابهام $0\times\infty$ را دارد. برای حل لازم است آن را به $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل کنیم.

اگر به جای tg2x بنویسیم $\frac{1}{cotg2x}$ داریم:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\frac{tgx-1}{cotg2x})\xrightarrow{\text{هوپیتال}}L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+tg^{2}x}{-2(1+cotg^{2}2x)}=\frac{1+tg^{2}\frac{\pi}{4}}{-2(1+\cot g)^{2}\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{-2}=-1$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر با e^{-1} یا $\frac{1}{e}$ است.

۵ـ گزینه «۳» با توجه به وجود رادیکال زیر انتگرال از تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ کمک می‌گیریم:

$$\sqrt{x}=u\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du\xrightarrow{\sqrt{x}=u}\Rightarrow\frac{1}{2u}dx=du\Rightarrow dx=(2u)du$$

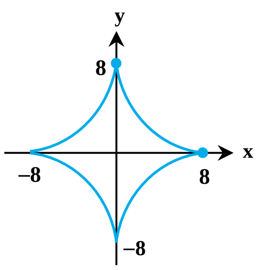
از طرفی به ازای $x=2$ آنگاه $u=\sqrt{4}=2$ و به ازای $x=9$ آنگاه $u=\sqrt{9}=3$، پس انتگرال برحسب متغیر جدید u به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_{2}^{3}\frac{2udu}{u^{2}-u}=2\int_{2}^{3}\frac{udu}{u(u-1)}=2\int_{2}^{3}\frac{du}{u-1}=2\big[Ln|u-1|\big]_{2}^{3}=2(Ln|3-1|-Ln|2-1|)=2(Ln2-0)=2Ln2=Ln4$$

۶ـ گزینه «۴» در معادله‌ی $\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{y^{2}}=4$ جایگزینی $-x$ به جای x، همچنین جایگزینی $-y$ به جای y، معادله را تغییر نمی‌دهد.

به عبارتی در این رابطه داریم: $f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)$

بنابراین این منحنی نسبت به محورهای مختصات تقارن دارد، در نتیجه می‌توانیم طول قوس این منحنی را در ربع اول به‌دست آورده و حاصل را ۴ برابر کنیم. محل برخورد این نمودار با محورهای مختصات در ربع اول در $x=8$ و $y=8$ است. برای محاسبه‌ی اِلمان طول قوس، ابتدا y' را با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی محاسبه می‌کنیم:



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4\Rightarrow y'=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow 1+y'^{2}=1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}=(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}})^{2}$$

در نتیجه داریم:

$$dL=\sqrt{1+y'^{2}}dx=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=2x^{-\frac{1}{3}}dx$$

با انتگرال‌گیری در بازه‌ی $0\le x\le 8$ و چهار برابر کردنِ جواب، به طول قوسِ منحنی می‌رسیم:

$$L=4\times\int_{0}^{8}\sqrt{1+y'^{2}}dx=4\int_{0}^{8}2x^{-\frac{1}{3}}dx=4[\frac{3}{2}2x^{\frac{2}{3}}]_{0}^{8}=6\times 8=48$$

۷ـ گزینه «۱» طبق نکته گفته شده در کتاب همواره $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx$، بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر با صفر می‌شود. اگر نکته را به یاد نداشته باشیم، به این شکل انتگرال مقابل را در نظر می‌گیریم: $I_{1}=\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx$

با فرض $a+b-x=u$ آنگاه $-dx=du$ از طرفی برای حدود برحسب متغیری خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=a\Rightarrow a+b-a=u\Rightarrow u=b\\ x=b\Rightarrow a+b-b=u\Rightarrow u=a\end{cases}\Rightarrow I_{1}=\int_{b}^{a}f(u)(-du)=-\int_{b}^{a}f(u)du$$

می‌دانیم اگر حدود بالا و پایین عوض شود، باید انتگرال در یک صفر ضرب شود، پس $I_{1}=\int_{a}^{b}f(u)du$ که این انتگرال مساوی $\int_{b}^{a}f(x)dx$ است. فقط شکل ظاهری متغیرهای زیر انتگرال فرق می‌کند.

۸ـ گزینه «۳» حجم حاصل از دوران ناحیه بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و خط $y=k$ حول خط $y=k$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V=\pi\int_a^b |f(x)-k|^2dx \Rightarrow V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)^2dx$$

پس داریم:

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+1-2\sin x)dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 2x}{2}+1-2\sin x)dx=\pi(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x)+x+2\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi((\frac{\pi}{4}-\underbrace{\frac{1}{4}(\sin\pi)}_{0}+\frac{\pi}{2}+\underbrace{2\cos\frac{\pi}{2}}_{0})-(-\frac{\pi}{4}-0-\frac{\pi}{2}+\underbrace{2\cos(-\frac{\pi}{2})}_{0}))=\pi(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\pi(\pi+\frac{\pi}{2})=\pi(\frac{3\pi}{2})=\frac{3}{2}\pi^2$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه انتگرال از رابطه $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده کرده‌ایم.

۹ـ گزینه «۲» ابتدا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$|A|=1(3\times5-1\times6)-2(3\times4-2\times6)+3(1\times4-2\times5)=9-18=-9$$

درایه a_{12} در A^{-1} سؤال شده است. پس داریم:

$$\text{همسازه سطر دوم و ستون اول}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}=-1(2\times3-3\times1)=-3$$

بنابراین داریم:

$$\text{درایه سطر اول و ستون دوم}=-\frac{3}{-9}=\frac{1}{3}$$

۱۰ـ گزینه «۲» سؤال ساده‌ای است! به ازای هر x و y دلخواه باید تساوی برقرار باشد. فرض می‌کنیم $x=y=0$ آنگاه داریم:

$$\text{حاصل عبارت}=\text{Arctg}(0)+\text{Arcsin}(2\times0-0+1)=0+\text{Arcsin}1=\frac{\pi}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۴» باید در صورت سؤال گفته می‌شد خط قائم بر منحنی. با توجه به اینکه خط قائم از نقطه $(4,1)$ می‌گذرد، ابتدا باید در روابط داده شده به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، تا از روی آن بتوانیم t را بیابیم.

$$4=t^2+t-2 \Rightarrow t^2+t=6 \Rightarrow t=2$$

به ازای $t=2$ مقدار y نیز برابر ۱ می‌باشد، پس $t=2$ قابل قبول است. حال باید شیب را با استفاده از مشتق توابع پارامتری به دست آوریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-5}{2t+1}\xrightarrow{t=2}\frac{8-5}{5}=\frac{3}{5}$$

پس شیب قائم برابر $-\frac{5}{3}$ می‌باشد. اکنون معادله خط موردنظر را می‌نویسیم:

$$y-1=-\frac{5}{3}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}+1\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{23}{3}$$

بر روی محور x ها باید $y=0$ باشد، پس داریم:

$$0=-\frac{5}{3}x+\frac{23}{3}\Rightarrow\frac{5}{3}x=\frac{23}{3}\Rightarrow x=\frac{23}{5}=4/6$$

۱۲ـ گزینه «۳» می‌توان از مشتق ضمنی کمک گرفت. توجه کنید که:

$$\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق تابع نسبت به} y}=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(1,\sqrt{3})=-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2\times1}{1^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{-\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\times\sqrt{3}}{1^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\frac{1}{1}}{1+(\sqrt{3})^2}}=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}}=-\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=-\frac{3+1+2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=-2-\sqrt{3}$$

۱۳ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن معادله صفحه مماس بر رویه باید ابتدا بردار گرادیان رویه را به دست آوریم، پس داریم:

$$f: 2x^2 - y^2 + 2xy - z = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla f} = (4x+2y, -2y+2x, -1) \xrightarrow{(1,2,3)} (4+4, -4+2, -1) = (8, -2, -1)$$

معادله صفحه مماس در نقطه (x_0, y_0, z_0) برابر است با:

$$f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$$

$$8(x-1) - 2(y-2) - 1\times(z-3) = 0$$

$$8x - 8 - 2y + 4 - z + 3 = 0 \Rightarrow 8x - 2y - z = 1$$

اگر این صفحه مماس محور zها را قطع کند در آن نقطه $x = y = 0$ می‌باشند، پس داریم:

$$0 - 0 - z = 1 \Rightarrow z = -1$$

پس این صفحه مماس محور zها را با ارتفاع ۱− قطع می‌کند.

توجه مهم: البته سؤال ایراد داشته است چون نقطه‌ی (۱,۲,۳) روی رویه قرار ندارد و این اشکال علمی دارد. اما حل فوق با نادیده گرفتن این اشکال ارائه شده است. لازم به ذکر است سازمان سنجش این سؤال را در کلید نهایی و تصحیح کارنامه‌ها حذف کرد که احتمالاً به این دلیل بوده است.

۱۴ـ گزینه «۱» دیفرانسیل شامل تابع z به صورت زیر است:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{3y-2x} - 2e^{3y-2x}.x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(3,2) = 6e^{-6} - 2\times 9e^{6-2} = -12$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3e^{3y-2x})(x^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(3,2) = 3e^{6-6}.3^2 = 27$$

باتوجه به این‌که $dx = \frac{3}{100}$ و $dy = \frac{2}{100}$ داریم:

$$dz = -12\times\frac{3}{100} + 27\times\frac{2}{100} = \frac{-36+54}{100} = \frac{18}{100} = 0/18$$

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(-2y)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(-2x+2y)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(-2xy)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(+2xy-2y^2)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-1}{1}(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}[-2xy+2xy-2y^2] = -\frac{1}{2}(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y^2) = [(1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}]^3(y)^2 = y^2u^3$$

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا باید محل تلاقی دو منحنی را حساب کنیم:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = \dfrac{8}{x^2+4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 = 32 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

با فرض $x^2 = A$ داریم:

$$A^2 + 4A - 32 = 0 \Rightarrow (A+8)(A-4) = 0 \Rightarrow A = -8 \text{ و } A = 4$$

چون $x^2 = -8$ نمی‌تواند باشد، پس $x^2 = 4$ و بنابراین $x = \pm 2$ خواهد بود. لذا داریم:

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

با استفاده از زوج بودن تابع زیر انتگرال، بازه را از صفر تا ۲ می‌نویسیم و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

$$S = 2\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = 16\int_0^2\frac{dx}{x^2+4} - \frac{2}{4}\int_0^2 x^2dx = 16\times\frac{1}{2}[\text{Arctg}\frac{x}{2}]_0^2 - \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]_0^2 = 8\text{Arctg}(1) - \frac{1}{2}(\frac{8}{3}) = 8(\frac{\pi}{4}) - \frac{4}{3} = 2\pi - \frac{4}{3}$$

۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از معادله ماتریسی داده شده، معادله‌ی سه صفحه را به دست می‌آوریم.

$$(1): x - 2y + 3z = 4 \quad , \quad (2): 2x + 3y - z = 1 \quad , \quad (3): 4x - y + 5z = 9$$

از معادله‌ی (۲)، z را به دست می‌آوریم و آن را در معادله‌های (۱) و (۳) قرار می‌دهیم تا فصل مشترک دوبه‌دوی صفحات را بیابیم.

$$z = 2x + 3y - 1 \xrightarrow{\text{در } (1)} x - 2y + 3(2x+3y-1) = 4 \Rightarrow x - 2y + 6x + 9y - 3 = 4 \Rightarrow 7x + 7y = 7 \Rightarrow x + y = 1$$

اکنون z را در معادله (۳) نیز قرار می‌دهیم.

$$4x - y + 5(2x+3y-1) = 9 \Rightarrow 4x - y + 10x + 15y - 5 = 9 \Rightarrow 14x + 14y = 14 \Rightarrow x + y = 1$$

با توجه به اینکه معادله فصل مشترک دو صفحه به صورت $x + y = 1$ می‌باشد، پس دو فصل مشترک برهم منطبق هستند.

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ فقط با جایگشت، با حروف کلمه اقتصاد بدون توجه به معنا، چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۲۰

۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{(۱+۳+\cdots+(۲n-۱))^{\frac{۳}{۲}}}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳ـ حاصل عبارت $z=\dfrac{i^{۸۰}-i+۱}{i^۴+i}$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}i$ ۲) $\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}i$ ۳) $-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}i$ ۴) $-\frac{۳}{۲}+\frac{i}{۲}$

۴ـ حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(tgx)^{\cos x}$ کدام است؟

۱) $e^۱$ ۲) ۰ ۳) e ۴) ۱

۵ـ نقطه $M(۲,۳)$ مختصات نقطه مینیمم تابع $y=\dfrac{ax^۳+b}{x^۲}$ است. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۶ـ اگر $f(x)=\dfrac{۱-e^{-x}}{۱+e^{-x}}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})$، کدام است؟

۱) $-Ln۳$ ۲) $-Ln۲$ ۳) $Ln۳$ ۴) $Ln۲$

۷ـ یکی از نقاط بحرانی تابع $\begin{cases} y=t^۲+۲t \\ x=t^۲-۲t \end{cases}$، کدام است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(۳,-۱)$ ۳) $(-۱,۴)$ ۴) $(-۲,۰)$

۸ـ در تابع f با ضابطه $f(x)=Ln(۲^x+۱)$، دامنه و بازه پیوستگی آن کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ و $(-\infty,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}$ و $(-\infty,۰)$ ۳) $\mathbb{R}^-$ و $(-\infty,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}^+$ و $(۰,-\infty)$

۹ـ اگر $f(۱)=۱۰$ و به ازای هر $۱\le x\le ۴$ داشته باشیم $f'(x)\ge ۲$، کمترین مقدار ممکن برای $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۰ـ چهار جمله اول بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$، کدام است؟

۱) $۱+\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۸}x^۴+\frac{۵}{۱۶}x^۶+\cdots$

۲) $۱-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۸}x^۴+\frac{۵}{۱۶}x^۶+\cdots$

۳) $۱+\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۳}{۸}x^۴-\frac{۵}{۱۶}x^۶+\cdots$

۴) $۱+\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۸}x^۴-\frac{۵}{۱۶}x^۶+\cdots$

۱۱ـ اگر $f(x)=\int_{۰}^{x}(۱-t^۲)e^{t^۲}dt$، در کدام بازه تابع f صعودی است؟

۱) $(۲,\infty)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,\infty)$ ۴) $(-۲,۲)$

۱۲ـ حاصل انتگرال $\int_{-۲}^{۱}x[x]|x|dx$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳ـ اگر x مقدار کالا و y قیمت آن باشد، تابع هزینه کل تولید بنگاهی $TC=۲x^۲+۳x+۸$ است و تابع تقاضا $y=-x+۱۷$ است، به‌ازای کدام مقدار تولید، سود بنگاه ۷ واحد پول می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴ــ ماتریس $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$ مفروض است. اگر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه ۴۵ باشد، m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۵ــ مرتبه (Rank) ماتریس زیر، کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۶ــ حد تابع زیر، کدام است؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\mathrm{Ln}(x^2+y^2)$$

۱) $-\infty$ ۲) ∞ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۷ــ برد تابع $f(x,y)=\sqrt{\frac{2x^2-3y^2}{2x^2+3y^2}}$، کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[1,\infty)$ ۳) $\mathbb{R}^-$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۱۸ــ اگر f تابع مشتق‌پذیر و $z=\frac{-y}{x}+f(y^2-x^2)$، آنگاه حاصل عبارت $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $y=2$ و $x=1$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹ــ اگر $u=x^2+y^2$، $v=x^2-y^2$ باشد، مقدار $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ (ژاکوبین) در نقطه $(1,1)$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) -8

۲۰ــ وضعیت تابع $z=2x^2y+xy^2$ در نقطه $(0,1)$، از نظر تحدب چگونه است؟

۱) محدب ۲) مقعر ۳) اکیداً محدب ۴) اکیداً مقعر

۲۱ــ طول و عرض نقطه بحرانی تابع مقید $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x-y=3 \end{cases}$، کدام است؟

۱) $(\frac{5}{2},\frac{-1}{2})$ ۲) $(\frac{3}{2},\frac{-3}{2})$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(2,1)$

۲۲ــ تابع مطلوبیت مصرف‌کننده‌ای $u=q_1q_2$، بودجه تخصیصی ۲۰۰، قیمت کالای اول $p_1=5$ و قیمت کالای دوم $p_2=10$ است. اگر بودجه تخصیصی یک واحد تغییر کند، مطلوبیت چه مقدار تغییر می‌نماید؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲ ۴) ۱/۸

۲۳ــ جواب معادله دیفرانسیل $xy'-y=x^2$ با شرایط اولیه $y(1)=2$، کدام است؟

۱) $y=x^2+x$ ۲) $y=x^2-x$ ۳) $y=x^2+x+1$ ۴) $y=x^2-x+1$

۲۴ــ سطح محصور بین منحنی $y=\frac{1}{x^2+x+1}$ و محور x ها در تمامی ربع اول، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi}{4\sqrt{3}}$

۲۵ــ به ازای کدام مقدار a، مجانب‌های تابع $y=x+1+\sqrt{ax^2+1}$ برهم عمودند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ گزینه «۳» توجه داشته باشید که در حروف کلمه داده شده، «الف» دو بار تکرار شده است. پس برای حل کامل این سؤال، باید آن را به چند دسته تقسیم کنیم:

۱ـ هیچ حرف تکراری وجود نداشته باشد: در این حالت از ۵ حرف سازنده کلمه اقتصاد، باید ۴ حرف غیرتکراری انتخاب کنیم، سپس تعداد حالت‌های این انتخاب را در تعداد جایگشت‌های آن ضرب کنیم:

$$\binom{۵}{۴}\times ۴! = ۱۲۰$$

۲) حرف «الف» یک بار تکرار شده باشد: در این حالت برای دو حرف باقی‌مانده نیز ۴ انتخاب خواهیم داشت. جایگشت‌های این چهار حرف را در نظر می‌گیریم، با این نکته که نصف جایگشت‌ها به خاطر تکرار یک حرف، تکراری است پس باید حاصل را بر دو تقسیم کنیم. پس داریم:

$$\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۲}\times\frac{۴!}{۲} = ۱\times ۶\times ۱۲ = ۷۲$$

پس در مجموع خواهیم داشت:

$$۱۲۰+۷۲=۱۹۲$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا توجه داشته باشید که در مخرج مجموع اعداد فرد از ۱ تا $۲n-۱$ را داریم که همواره برابر $n^۲$ است. پس با جایگذاری این عبارت داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{(۱+۳+\cdots+(۲n-۱))^{\frac{۳}{۲}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{(n^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^۳}{۳}}{n^۳}=\frac{۱}{۳}$$

توجه داشته باشید که در صورت کسر از هم‌ارزی $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲ \underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^۳}{۳}$ استفاده کرده‌ایم.

۳ـ گزینه «۲» به راحتی با جایگذاری $i^۲=-۱$ داریم:

$$z=\frac{i^{۸۰}-i+۱}{i^۴+i}=\frac{(i^۲)^{۴۰}-i+۱}{(i^۲)^۲+i}=\frac{۲-i}{۱+i}\times\frac{۱-i}{۱-i}=\frac{۲-۱-۳i}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}i$$

۴ـ گزینه «۴» حد داده شده به فرم $\infty^۰$ مبهم است. در نتیجه داریم:

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\Rightarrow \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\cos x\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x)}{\frac{۱}{\cos x}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\frac{۱+\operatorname{tg}^۲x}{\operatorname{tg}x}}{\frac{\sin x}{\cos^۲x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{(۱+\operatorname{tg}^۲x)\cos^۲x}{\sin x\times\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\frac{۱}{\cos^۲x}\times\cos^۲x}{\frac{\sin^۲x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos x}{\sin^۲x}=۰\Rightarrow A=e^۰=۱$$

۵ـ گزینه «۴» با محاسبه نقاط بحرانی تابع (ابتدا می‌توانیم تابع کسری داده شده را ساده کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم.) مختصات نقطه‌ی داده شده را در خود تابع قرار می‌دهیم و داریم:

$$y=ax+\frac{b}{x^۲}$$

$$۳=۲a+\frac{b}{۴}\quad(۱)$$

$$y'=a-\frac{۲b}{x^۳}=۰\Rightarrow x^۳=\frac{۲b}{a}\Rightarrow ۲^۳=۸=\frac{۲b}{a}\Rightarrow b=۴a\quad(۲)$$

$$(۲),(۱)\Rightarrow ۳=۲a+a=۳a\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۴\Rightarrow a+b=۵$$

۶ـ گزینه «۳» با روش محاسبه‌ی مستقیم معکوس تابع داریم:

$$f^{-1}(\frac{1}{2})=x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow 1+e^{-x}=2-2e^{-x} \Rightarrow 3e^{-x}=1 \Rightarrow e^{x}=3 \Rightarrow x=\mathrm{Ln}3$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به روش محاسبه نقاط بحرانی از روی مشتق تابع داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2t-2} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \\ t\to 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\to\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow A(3,-1) \\ t\to 1 \Rightarrow B(-1,3) \end{cases}$$

۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه دامنه داریم:

$$2^x+1>0 \xrightarrow{\forall x\in\mathbb{R}\,;\,2^x>0} 2^x+1>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

از طرفی تابع $\mathrm{Ln}u$ برای هر $u>0$ پیوسته است، پس چون $2^x+1>0$ این تابع همواره در دامنه خود پیوسته است.

۹ـ گزینه «۳» با استفاده از قضیه مقدار میانگین در بازه $(1,4)$ خواهیم داشت:

$$\exists c\in(1,4): f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\geq 2 \Rightarrow \frac{f(4)-10}{3}\geq 2 \Rightarrow f(4)\geq 6+10 \Rightarrow f(4)\geq 16$$

۱۰ـ گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی برنولی داریم:

$$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-x^2)^3+\cdots=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots$$

۱۱ـ گزینه «۲» باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن مشتق تابع نامنفی باشد. در این صورت داریم:

$$f(x)=\int_0^x(1-t^2)e^{t^2}dt$$

$$f'(x)=(1-x^2)e^{x^2}>0 \xrightarrow{e^{x^2}>0} 1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$$

۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به حضور قدرمطلق و جزء صحیح، انتگرال را به بازه‌های کوچک‌تر می‌شکنیم:

$$I=\int_{-2}^{1}x[x]|x|dx=\int_{-2}^{-1}x(-2)(-x)dx+\int_{-1}^{0}x(-1)(-x)dx+\int_{0}^{1}x(0)(x)dx=\int_{-2}^{-1}2x^2dx+\int_{-1}^{0}x^2dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{2}{3}x^3\Big)_{-2}^{-1}+\frac{1}{3}x^3\Big)_{-1}^{0}=\frac{2}{3}(-1+8)+\frac{1}{3}(0+1)=5$$

۱۳ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه سود داریم:

$$\pi=TR-TC=QP-TC=x(-x+17)-(2x^2+3x+8)=-3x^2+14x-8=7$$

$$\Rightarrow 3x^2-14x+15=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-45}}{3}=\frac{7\pm 2}{3} \to \begin{cases} x=3 \quad \checkmark \\ x=\frac{5}{3} \quad \times\ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه «۲» کافی است به خاطر داشته باشید که حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس، برابر با دترمینان آن است. پس داریم:

$$|A|=1\times(1-0)-2(2-0)+3(2m-0)=45 \Rightarrow 1-4+6m=45 \Rightarrow 6m=48 \Rightarrow m=8$$

۱۵ــ گزینه «۴» باید حداکثر تعداد سطرها و ستون‌های مستقل ماتریس را به دست آوریم. با بررسی سطرهای ماتریس واضح است که سطر سوم دو برابر سطر اول و سطر چهارم قرینه‌ی سطر اول است. پس مرتبه حداکثر ۲ خواهد بود. از طرفی واضح است که سطر دوم و اول از هم مستقل هستند (زیرا هیچیک مضربی از دیگری نیست) پس مرتبه‌ی ماتریس دقیقاً ۲ است.

۱۶ــ گزینه «۳» با تبدیل حد داده شده به مختصات قطبی به راحتی داریم:

$$L=\lim_{r\to 0^+} r^2 \operatorname{Ln} r^2=\lim_{r\to 0^+} 2r^2 \operatorname{Ln} r=0$$

توجه کنید در تساوی آخر از این نکته‌ی مهم استفاده کردیم که همواره با شرط $\alpha,\beta>0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}(\log_b x)^{\beta}=0$$

۱۷ــ گزینه «۱» با توجه به این‌که $2x^2$ و $3y^2$ عباراتی همواره مثبت می‌باشند همواره $2x^2+3y^2\ge 2x^2-3y^2$ می‌باشد، پس با تقسیم دو طرف نامساوی بر $2x^2+3y^2$ داریم:

$$0\le \frac{2x^2-3y^2}{2x^2+3y^2}\le 1 \Rightarrow R_f=[0,1]$$

۱۸ــ گزینه «۳»

روش اول: با محاسبه مستقیم مشتق جزئی داریم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{y}{x^2}-2xf'(y^2-x^2)\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{-1}{x}+2yf'(y^2-x^2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2}{x^2}-1=\frac{4}{1}-1=3$$

روش دوم: با فرض $f(y^2-x^2)=y^2-x^2$ داریم:

$$z=\frac{-y}{x}+y^2-x^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{y}{x^2}-2x\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{-1}{x}+2y\end{aligned}\quad\Rightarrow y\left(\frac{y}{x^2}-2x\right)+x\left(\frac{-1}{x}+2y\right)=\frac{y^2}{x^2}-2\cancel{xy}-1+2\cancel{xy}=\frac{y^2}{x^2}-1\xrightarrow[x=1]{y=2}4-1=3$$

۱۹ــ گزینه «۴» با کمک دترمینان ژاکوبین داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{vmatrix}\xrightarrow{(1,1)}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4-4=-8$$

۲۰ــ «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» باید وضعیت معین مثبت یا معین منفی بودن ماتریس هسین تابع را بررسی کنیم. در این صورت داریم:

$$H=\begin{bmatrix}z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{bmatrix}$$

$$z_x=4xy+y^2\Rightarrow z_{xx}=4y\quad ;\quad z_{xy}=4x+2y=z_{yx}$$

$$z_y=2x^2+2xy\Rightarrow z_{yy}=2x$$

$$\Rightarrow H=\begin{bmatrix}4y & 4x+2y\\ 4x+2y & 2x\end{bmatrix}\xrightarrow{(0,1)}H=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{cases}H_1=4>0\\ H_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0\end{cases}$$

پس ماتریس هسین نامعین است و این یعنی نقطه مذکور زینی است.

۲۱ــ گزینه «۲» در واقع باید نقطه بحرانی تابع دو متغیره $f(x,y)=x^2+y^2$ را با شرط $x-y=3$ به دست آوریم. برای این کار با یک جایگذاری ساده داریم:

$$f(x)=x^2+(x-3)^2\Rightarrow f'(x)=2x+2(x-3)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

۲۲ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که $p_1 = ۵$ و $p_۲ = ۱۰$ می‌باشد، خط بودجه به صورت $۵q_1 + ۱۰q_۲ = ۲۰۰$ است، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$U = q_1 q_۲ \qquad V = ۵q_1 + ۱۰q_۲ - ۲۰۰ = ۰$$

$$\frac{U_{q_1}}{V_{q_1}} = \frac{U_{q_۲}}{V_{q_۲}} \Rightarrow \frac{q_۲}{۵} = \frac{q_1}{۱۰} \Rightarrow q_1 = ۲q_۲$$

اکنون با جایگذاری این رابطه در معادله خط بودجه داریم:

$$۵q_1 + ۱۰q_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow ۵(۲q_۲) + ۱۰q_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow ۱۰q_۲ + ۱۰q_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow ۲۰q_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow q_۲ = ۱۰ \Rightarrow q_1 = ۲(۱۰) = ۲۰$$

پس مقدار مطلوبیت برابر است با: $U = q_1 q_۲ = ۲۰(۱۰) = ۲۰۰$

حالا اگر بودجه به اندازه ۱ واحد اضافه شود، داریم:

$$۵q_1 + ۱۰q_۲ = ۲۰۱ \xrightarrow{q_1 = ۲q_۲} ۱۰q_۲ + ۱۰q_۲ = ۲۰۱ \Rightarrow ۲۰q_۲ = ۲۰۱ \Rightarrow q_۲ = ۱۰/۰۵ \Rightarrow q_1 = ۲۰/۱$$

پس مطلوبیت در این حالت برابر است با: $U = (۲۰/۱)(۱۰/۰۵) = ۲۰۲/۰۰۵$

پس مطلوبیت حدود ۲ واحد تغییر می‌کند.

۲۳ـ گزینه «۱»

روش اول: با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی تفکیک‌ناپذیر (جدانشدنی) داریم:

$$xy' - y = x^۲ \xrightarrow{\div x} y' - \frac{۱}{x}y = x$$

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\right)$$

$$y = e^{-\int -\frac{۱}{x}dx}\left(\int x e^{\int -\frac{۱}{x}dx}dx + c\right)$$

$$y = e^{\int \frac{۱}{x}dx}\left(\int x e^{-\int \frac{۱}{x}dx}dx + c\right)$$

$$y = e^{Lnx}\left(\int x e^{-Lnx}dx + c\right)$$

$$y = x\left(\int x\left(\frac{۱}{x}\right)dx + c\right) = x(x + c) = x^۲ + cx$$

با توجه به شرط $y(۱) = ۲$ داریم: $۲ = (۱)^۲ + c(۱) \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow y = x^۲ + x$

روش دوم: با بازنویسی معادله به صورت مقابل داریم: $xy' - y = x^۲ \Rightarrow \frac{xy' - y}{x^۲} = ۱ \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = ۱ \Rightarrow \frac{y}{x} = x + c \Rightarrow y = x^۲ + cx$

$$y(۱) = ۲ \Rightarrow ۲ = ۱ + c \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow y = x^۲ + x$$

۲۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه همواره $y > ۰$ پس حد انتگرال مساحت از $x = ۰$ تا بی‌نهایت خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$S = \int_۰^{\infty} \frac{dx}{x^۲ + x + ۱} = \int_۰^{\infty} \frac{dx}{(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} tg^{-۱}\left(\frac{x + \frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right)\Big|_۰^{\infty} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

۲۵ـ گزینه «۲» توجه داشته باشید تابع داده شده فاقد مجانب قائم است. حالا وضعیت مجانب‌های مایل آن را بررسی می‌کنیم:

$$y = x + ۱ + \sqrt{ax^۲ + ۱} \sim x + ۱ + \sqrt{a}|x| \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \simeq (۱ + \sqrt{a})x + ۱ \\ x \to -\infty \Rightarrow y \simeq (۱ - \sqrt{a})x + ۱ \end{cases}$$

$$m_1 m_۲ = -۱ \Rightarrow (۱ + \sqrt{a})(۱ - \sqrt{a}) = -۱ \Rightarrow ۱ - a = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

سؤالات آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

توجه: برای رشته مدیریت مجموعاً ۸ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات ۱، ۳، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ مشترک با رشته حسابداری می‌باشد.

۱ـ یک شرکت خدماتی تصمیم دارد مبلغی پول را بین ۱۰ کارگر خود به‌صورت تسهیلات تقسیم کند. مدیر شرکت اختیار دارد به هر تعداد از کارگران که صلاح بداند این تسهیلات را واگذار نماید، به‌طوری که مبلغ تسهیلات بین افراد انتخاب شده به‌صورت مساوی تقسیم شود. او به چند حالت می‌تواند به حداقل ۲ و حداکثر ۵ کارگر تسهیلات اعطا نماید؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۲۷ ۳) ۵۷۲ ۴) ۶۲۷

۲ـ فرض کنید $f(xf(x)) = ۳f(x)$ و $f(۱) = ۲$، مقدار $f(۱۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳ـ اگر $f(x) = \begin{vmatrix} x & x^۲ & x^۳ \\ ۱ & ۲x & ۳x^۲ \\ ۰ & ۲ & ۶x \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۴ـ m در کدام بازهٔ زیر باشد تا تابع $f(x) = |۲x+۴| + mx$ اکیداً یکنوا باشد؟

۱) $(-\infty, -۲)$ ۲) $(-۲, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۲)$ ۴) $(-۲, ۲)$

۵ـ تابع نمایی $f(x) = (\frac{۲-۳k}{۴+k})^x$ را در نظر بگیرید. محدودهٔ تغییرات k کدام باشد تا f همواره نزولی باشد؟

۱) $(-۴, -\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۲}{۳})$ ۳) $(-۴, -\frac{۲}{۳})$ ۴) $(-\infty, -۴) \cup (-\frac{۱}{۲}, \infty)$

۶ـ فرض کنید دنبالهٔ $\{|a_n|\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا باشد، کدام دنباله لزوماً همگرا نیست؟

۱) $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ ۲) $\{a_n^۲\}_{n=۱}^{\infty}$ ۳) $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ ۴) $\{\sqrt[۳]{|a_n|}\}_{n=۱}^{\infty}$

۷ـ مقدار حد تابع $\frac{\sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} + ۳\sqrt[۳]{x-۳}}{\sqrt[۳]{x+۱} + \sqrt[۳]{x-۱}}$ در $x = +\infty$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $+\infty$

۸ـ به ازای کدام مقدار a، تابع زیر یک تابع همواره پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x^۲]-۹}{[x]^۲ - [x^۲]} & ; \quad x < ۳ \\ x[-x] + ax & ; \quad x \geq ۳ \end{cases}$$

۱) ۴ ۲) $\frac{۳۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴۹}{۱۲}$ ۴) به ازای هیچ مقدار a

۹ـ ضریب $x^۴$ در بسط مکلورن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۱-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۸۰}{۸۱}$ ۴) $-\frac{۸۰}{۸۱}$

۱۰ـ حاصل انتگرال $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ کدام است؟

۱) $Ln(e^{۲x}+۱) - x + c$ ۲) $Ln(e^{۲x}+۱) - x + c$ ۳) $Ln(e^{-۲x}-۱) + x + c$ ۴) $Ln(e^{۲x}+۱) + x + c$

۱۱ـ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی‌های $y = x^۳$ و $y = x^۲$ در بازهٔ $[۰, ۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲ـ فرض کنید دستگاه‌های معادلات خطی زیر جواب یکسان داشته باشند. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\begin{cases} ax+۲y+z=-۷ \\ ۳x-y+۲z=-۱ \\ ۵x+y-z=۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x+y-۵z=۹ \\ bx+۳z=۲۱ \\ y-۲z=۴ \end{cases}$$

۱) ۹　　۲) ۱۰　　۳) ۱۴　　۴) ۲۱

۱۳ـ فرض کنید D مجموعهٔ جواب دستگاه نامعادلات زیر باشد. در این‌صورت ماکزیمم تابع $f(x,y)=۳x+۵y$ روی مجموعهٔ D کدام است؟

$$\begin{cases} x\ge y \\ x+y\le ۲ \\ x+۳y\ge -۶ \end{cases}$$

۱) -۲
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۱۲

۱۴ـ اگر بردار ناصفر $\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$ موجود باشد به قسمی که $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$، λ در کدام معادلهٔ زیر صدق می‌کند؟

۱) $\lambda^۲-۱۰\lambda+۲۴=۰$　　۲) $\lambda^۲-۵\lambda+۱=۰$　　۳) $\lambda^۲-۱۰\lambda+۲۶=۰$　　۴) $\lambda^۲-۵\lambda-۱=۰$

۱۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=(b_{ij})$ معکوس ماتریس A باشد، مقدار $b_{۲۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) -۴　　۳) $-\frac{۱}{۴}$　　۴) صفر

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ـ گزینه «۴» چون از ۱۰ کارگر حداقل ۲ و حداکثر ۵ کارگر را می‌خواهیم انتخاب کنیم، باید حالت‌های ترکیب انتخاب ۲ تا ۵ از ۱۰ کارگر را بنویسیم:

$$\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰\times ۹}{۲}+\frac{۱۰!}{۳!۷!}+\frac{۱۰!}{۴!۶!}+\frac{۱۰!}{۵!۵!}$$

$$=۴۵+\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۳\times ۲\times ۷!}+\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴\times ۳\times ۲}+\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۵\times ۴\times ۳\times ۲}=۴۵+۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۶۲۷$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به این که مقدار $f(۱)=۲$ را داریم، پس ابتدا به جای x باید مقدار $x=۱$ را قرار دهیم.

$$x=۱\Rightarrow f(۱\times \overbrace{f(۱)}^{۲})=۳\overbrace{f(۱)}^{۲}\Rightarrow f(۲)=۶$$

اکنون چون $f(۱۲)$ را می‌خواهیم، باید $x=۲$ را قرار دهیم تا به $f(۱۲)$ برسیم:

$$x=۲\Rightarrow f(۲\underbrace{f(۲)}_{۶})=۳f(۲)$$

$$f(۱۲)=۳(۶)=۱۸$$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا باید حاصل دترمینان را بر حسب متغیر x به دست آوریم و سپس از آن برحسب x مشتق بگیریم.

$$f(x)=x(۱۲x^{۲}-۶x^{۲})-x^{۲}(۶x)+x^{۳}(۲-۰)=۶x^{۳}-۶x^{۳}+۲x^{۳}=۲x^{۳}$$

$$f'(x)=۶x^{۲}\xrightarrow{x=۲}۶(۲)^{۲}=۲۴$$

۴ـ گزینه «۱» ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=-۲$ است، لذا داریم:

$$x<-۲\rightarrow f(x)=-(۲x+۴)+mx=x(m-۲)-۴$$

$$x\geq -۲\rightarrow f(x)=۲x+۴+mx=x(m+۲)+۴$$

برای یکنوا بودن باید شیب هر دو خط به‌دست آمده هر دو منفی یا هر دو مثبت باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}m-۲<۰\rightarrow m<۲\\ m+۲<۰\rightarrow m<-۲\end{cases}\xrightarrow{\cap}m<-۲=(-\infty,-۲)$$

توجه داشته باشید که شیب خط‌های به دست آمده با مشتق‌گیری نیز همان ضرایب x یعنی $m-۲$ و $m+۲$ می‌باشد.

۵ـ گزینه «۲» در تابع نمایی به فرم $y=a^{x}$ اگر $۰<a<۱$ باشد، تابع نزولی و اگر $a>۱$ باشد، تابع صعودی است.

پس در این مثال باید $۰<\frac{۲-۳k}{۴+k}<۱$ باشد تا f همواره نزولی باشد.

$$\frac{۲-۳k}{۴+k}<۱\Rightarrow \frac{۲-۳k}{۴+k}-۱<۰\Rightarrow \frac{۲-۳k-۴-k}{۴+k}<۰$$

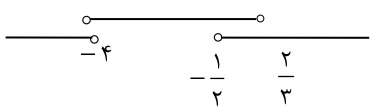
برای تعیین علامت یک تابع کسری فقط کافی است ریشه‌های صورت و مخرج کسر را به دست آوریم و علامت عبارت داده شده را به ازای قبل و بعد از ریشه‌های ساده تعیین کنیم، با عبور از هر ریشه ساده علامت عبارت تغییر می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{-۴k-۲}{۴+k}<۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} k & & -۴ & & -\frac{۱}{۲} & \\ \hline p<۰ & - & | & + & \phi & - \end{array}$$

$$k<-۴ \quad \text{یا} \quad k>-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲-۳k}{۴+k}>۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} k & & -۴ & & \frac{۲}{۳} & \\ \hline p>۰ & - & | & + & \phi & - \end{array}$$

$$-۴<k<\frac{۲}{۳}$$

اشتراک جواب‌ها $\Rightarrow$  $\Rightarrow k\in(-\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳})$

۶ـ گزینه «۱» به عنوان مثال دنبالهٔ $a_n = |(-1)^n \frac{n}{n+1}|$ همگرا به عدد ۱ است، ولی دنباله $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ واگرا می‌باشد، چون حاصل حد آن ±۱ است.

$$\text{اگر } n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{n}{n+1} = 1 \quad , \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{-n}{n+1} = -1$$

۷ـ گزینه «۳» در صورت کسر، حالت مبهم $\infty - \infty$ را داریم، پس باید ابتدا آن قسمت را با ضرب و تقسیم عبارت در مزدوج آن رفع ابهام کنیم.

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{2\sqrt[3]{x}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \lim \frac{2}{\infty} = 0$$

پس داریم:

$$\text{حاصل حد} = 0 + \frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» باید $f(3) = f(3^-) = f(3^+)$ باشد، پس داریم: (نقطهٔ مرزی یعنی $x = 3$ باید بررسی شود.)

$$\begin{cases} f(3) = 3[-3] + 3a = -9 + 3a \\ f(3^+) = 3[-(3^+)] + 3a = 3(-4) + 3a = -12 + 3a \end{cases}$$

پس باید:

$$-9 + \cancel{3a} = -12 + \cancel{3a} \Rightarrow -9 = -12$$

که این غیرممکن است، پس به a ربطی ندارد و به ازای هیچ مقدار a تابع در $x = 3$ پیوسته نمی‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی برنولی داریم:

$$(1+u)^h = 1 + hu + \frac{h(h-1)}{2!}u^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

چون در اینجا ضریب x^4 را از ما می‌خواهد، پس فقط جمله‌ای که x^4 تولید می‌کند را می‌یابیم.

$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!}x^4 = \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{4\times3\times2}x^4 = \frac{-2\times5\times8}{3^4\times4\times3\times2}x^4 = \frac{-10}{243}x^4$$

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که مشتق عامل مخرج یعنی $e^x + e^{-x}$ دقیقاً در صورت کسر قرار دارد، پس داریم:

$$e^x + e^{-x} = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} (e^x - e^{-x})\,dx = du$$

و حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln} u \Rightarrow \operatorname{Ln}(e^x + e^{-x}) + c = \operatorname{Ln}(e^x + \frac{1}{e^x}) + c = \operatorname{Ln}(\frac{e^{2x}+1}{e^x}) + c = \operatorname{Ln}(e^{2x}+1) - \operatorname{Ln} e^x + c = \operatorname{Ln}(e^{2x}+1) - x + c$$

۱۱ـ گزینه «۴» مساحت بین دو تابع برابر است با:

$$S = \left|\int_a^b (y_2 - y_1)\,dx\right|$$

ابتدا باید محل تلاقی دو تابع را به‌دست آوریم (با مساوی قرار دادن دو تابع):

$$x^3 = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \left|\int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - x^2)\,dx\right| = \left|(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})_0^1\right| + \left|(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right| + \left|(4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3})\right| = \left|\frac{-1}{12}\right| + \left|\frac{4}{3} - (\frac{-1}{12})\right| = \frac{1}{12} + \left|\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

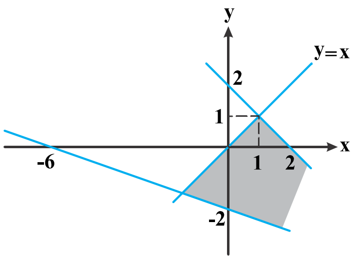
۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مجموعه جواب دو دستگاه یکسان است، می‌توانیم از هر ۳ معادله دلخواه از بین ۶ معادله (به شرطی کـه وابسـتگی خطـی نداشته باشند)، پاسخ دستگاه را محاسبه کنیم. از این رو داریم:

$$\begin{cases} ۳x-y+۲z=-۱ \\ ۵x+y-z=۸ \\ y-۲z=۴ \end{cases} \xrightarrow{y=۲z+۴} \begin{cases} ۳x-۲z-۴+۲z=-۱ \\ ۵x+۲z+۴-z=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-۱+۴}{۳}=۱ \\ ۵+z=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-۱ \\ y=۲ \end{cases}$$

حالا با توجه به دو معادله دارای ضرایب a و b خواهیم داشت:

$$ax+۲y+z=-۷ \Rightarrow a+۴-۱=a+۳=-۷ \Rightarrow a=-۱۰$$
$$bx+۳z=۲۱ \Rightarrow b-۳=۲۱ \Rightarrow b=۲۴$$
$$a+b=-۱۰+۲۴=۱۴$$

۱۳ـ گزینه «۳» این سؤال مربوط به درس تحقیق در عملیات می‌باشد که متأسفانه طراح محترم به دلیل وجود قید در صورت سؤال به اشتباه، آن را به جای سؤال‌های اکسترمم نسبی توابع مقید در نظر گرفته است. با توجه به اینکه تابع داده شده خطی است و ناحیه D از تقاطع خطوط راست به وجود آمده است، در این صورت نقاط اکسترمم تابع در گوشه‌های ناحیه (یعنی محل برخورد خطوط ناحیه) اتفاق می‌افتد. باید ناحیه‌های مشخص‌شده توسط نامعادله‌های داده‌شده را مشخص کنیم و ماکزیمم مقدار تابع را در نقاط برخورد خطها بیابیم.



$$f_{(max)} \xrightarrow{x=y=۱} ۳(۱)+۵(۱)=۸$$

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به این که بردار ستونی $v=\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix}$ در رابطهٔ $Av=\lambda v$ صدق می‌کند و λ مقادیر ویژه ماتریس می‌باشد، مقدارهای ویژه ماتریس از معادلهٔ مشخصهٔ $|A-\lambda I|=۰$ به‌دست می‌آیند.

$$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۵-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow (۵-\lambda)(۵-\lambda)-۱=۰ \Rightarrow ۲۵+\lambda^۲-۱۰\lambda-۱=۰ \Rightarrow \lambda^۲-۱۰\lambda+۲۴=۰$$

۱۵ـ گزینه «۳» درایه واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس معکوس A را می‌خواهیم.

$$a_{ij}^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times \Delta_{ji}$$

دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

$$|A|=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$$

$$\Delta_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-۱\times(۴-۰)=-۴$$

$$a_{۲۱}^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\Delta_{۱۲}=\frac{۱}{۱۶}\times(-۴)=-\frac{۱}{۴}$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ـ اگر $x+iy=\frac{1-2e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+2e^{\frac{\pi}{2}i}}$، آنگاه مقادیر x و y کدام‌اند؟

۱) $x=-\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}$
۲) $x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{3}{5}$
۳) $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$
۴) $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}$

۲ـ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+x-1}{x^3-9x}}$، کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{R}-\{0\}$
۳) $\{-3,0,3\}$
۴) $\mathbb{R}-\{-3,0,3\}$

۳ـ دامنهٔ تابع $y=\operatorname{Ln}\frac{1+x}{1-2x}+\cos^{-1}(x-1)$، کدام است؟

۱) $[0,2)$
۲) $[0,\frac{1}{2})$
۳) $(-1,1)$
۴) $(-1,2)$

۴ـ حد تابع $\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$، هنگامی‌که x به عدد یک نزدیک می‌شود،کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{\frac{2}{x}}$، کدام است؟

۱) $e^{\frac{8}{3}}$
۲) $e^{\frac{3}{8}}$
۳) ۱
۴) ۰

۶ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\dots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) ۰
۴) ∞

۷ـ وضعیت تابع $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]-\left[-\frac{x}{2}\right]$ در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) پیوسته نیست.
۲) پیوستگی راست دارد.
۳) پیوستگی چپ دارد.
۴) پیوسته است.

۸ـ اگر $f(x)=x+e^x$ باشد، حاصل عبارت $(f^{-1})'(1)$، کدام است؟

۱) ۰
۲) -1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۹ـ مشتق مرتبهٔ nام تابع $y=x\operatorname{Ln}(x+1)$ به ازای $x=0$، کدام است؟

۱) $(-1)^n n!$
۲) $(-1)^{n-1}n(n-1)!$
۳) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
۴) $(-1)^n n(n-2)!$

۱۰ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع استوانهٔ $x^2+2y^2=3$ و صفحهٔ $x+y+z=1$ در نقطهٔ $(1,-1,1)$، کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$
۲) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$
۳) $\frac{x-1}{-3}=y+1=\frac{z-1}{2}$
۴) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$

۱۱ـ تابع تقاضای تولیدکننده‌ای $y=80-2x$ و هزینه متغیر بنگاه پنجاه درصد درآمد کل است. اگر هزینهٔ ثابت ۳۰۰ واحد پول باشد، ماکزیمم سود بنگاه کدام است؟

۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۱۲ـ هرگاه $\begin{cases}x=t^2-2t\\y=t^2\end{cases}$، آنگاه مشتق y نسبت به x، کدام است؟

۱) $\frac{y-x-2}{y-x}$
۲) $\frac{y}{x-1}$
۳) $\frac{y-x}{y-x-2}$
۴) $\frac{x}{y-1}$

۱۳ـ مقدار تقریبی $\sqrt{(۱/۹)^۳-۲(۲/۰۵)}$ با استفاده از تقریب مرتبهٔ اول (تقریب خطی)، کدام است؟

۱) $\frac{۶۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۶۸}{۴۰}$ ۳) $\frac{۶۷}{۴۰}$ ۴) $\frac{۶۶}{۴۰}$

۱۴ـ هرگاه $f(x,y)=xy$، در این صورت حاصل $\frac{\partial f}{\partial t}$ در امتداد مسیر $x=\cos t$ و $y=\sin t$، کدام است؟

۱) $\cos ۲t$ ۲) $\cos t$ ۳) $\sin ۲t$ ۴) $\sin t$

۱۵ـ کدام مورد برای $f(x,y)=xy$ در نقطهٔ $(۰,۰)$ درست است؟

۱) مینیمم نسبی ۲) نقطهٔ زینی ۳) ماکزیمم نسبی ۴) هیچ‌کدام

۱۶ـ در مسئلهٔ بهینه‌سازی تابع $z=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ با شرط $x+y=۲$، وضعیت تابع z در نقطهٔ $(۱,۱,۲)$، کدام است؟

۱) بحرانی ۲) زینی ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

۱۷ـ فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ به‌طوری‌که $x=u^۲+v^۲$ و $y=uv$، حاصل $\frac{\partial u}{\partial y}$ به ازای $(u,v)=(-۲,۱)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۸ـ در معادلهٔ دیفرانسیل $y'=y^۲+xy^۲$ با شرط اولیه $y(۰)=-۱$، مجانب تابع $y(x)$ هنگامی که x به $+\infty$ می‌گراید، کدام است؟

۱) $y=۰$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=-۲$ ۴) $y=۱$

۱۹ـ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y'-۳y=e^{۲x}$ با شرط اولیهٔ $y(۰)=۰$، کدام است؟

۱) $y=e^{x}(e^{۲x}-۱)$ ۲) $y=e^{x}(e^{۲x}+۱)$ ۳) $y=e^{۲x}(e^{x}-۱)$ ۴) $y=e^{۲x}(e^{x}+۱)$

۲۰ـ اگر فرض کنیم سود به‌طور پیوسته به سرمایه‌ای اضافه و سرمایهٔ کل پس از گذشت ۱۰ سال دو برابر شود، نرخ سود کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}\text{Ln}۲$ ۲) $\frac{۱}{۵}\text{Ln}۲$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}\text{Ln}۵$ ۴) $\frac{۱}{۵}\text{Ln}۵$

۲۱ـ فرض کنید $f(x)=\int\frac{\sqrt{x+۴}}{x}dx$ و $f(-۴)=۰$. مقدار $f(۵)$، کدام است؟

۱) $\text{Ln}۵$ ۲) $۲-\text{Ln}۳$ ۳) $۳-\text{Ln}۲$ ۴) $۶-۲\text{Ln}۵$

۲۲ـ در کدام بازه، تقعر منحنی $f(x)=\int_۰^x\frac{t^۲}{t^۲+t+۲}dt$ به سمت پایین است؟

۱) $(۰,۴)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(-۴,۰)$ ۴) $(-۲,۰)$

۲۳ـ حاصل $\int_۰^۱\int_۰^۱|x-y|dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۴ـ بردارهای $\vec{v}_۱=(-۱,۲,-۳)$، $\vec{v}_۲=(-۲,۰,-۴)$ و $\vec{v}_۳=(۰,۰,-۱)$ مفروض‌اند. اگر $A=\begin{pmatrix}\vec{v}_۱\\ \vec{v}_۲\\ \vec{v}_۳\end{pmatrix}$ یک ماتریس ۳×۳ باشد، کدام عبارت زیر برای سه بردار موردنظر و دترمینان ماتریس A، درست است؟

۱) وابسته خطی هستند و $|A|\neq۰$ ۲) وابسته خطی هستند و $|A|=۰$
۳) مستقل خطی هستند و $|A|=۰$ ۴) مستقل خطی هستند و $|A|\neq۰$

۲۵ـ فرض کنید $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ مقادیر ویژه (ریشه‌های معادلهٔ مشخصه) مثبت ماتریس $\begin{bmatrix}۴&۱\\۰&m\end{bmatrix}$ با شرط $\lambda_۱^۲\lambda_۲+\lambda_۱\lambda_۲^۲=۲۰$ باشند. کسینوس زاویهٔ بین بردارهای ویژه (مشخصه) متناظر، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ـ گزینه «۱» با توجه به این که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌باشد، پس داریم:

$$e^{i\frac{\pi}{۲}}=\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}=۰+i=i$$

پس با جایگذاری i در رابطه‌ی داده شده داریم:

$$x+iy=\frac{۱-۲i}{۱+۲i}\times\frac{۱-۲i}{۱-۲i}=\frac{(۱-۲i)^۲}{۱-۴i^۲}=\frac{۱+۴i^۲-۴i}{۱-۴(-۱)}\Rightarrow x+iy=\frac{۱+۴(-۱)-۴i}{۵}=\frac{-۳-۴i}{۵}=-\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۵}i$$

پس $x=-\frac{۳}{۵}$ و $y=-\frac{۴}{۵}$ می‌باشند.

۲ـ گزینه «۴» فقط کافی است ریشه‌های مخرج کسر را از $\mathbb{R}$ کم کنیم.

$$x^۳-۹x=۰\Rightarrow x(x^۲-۹)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm۳$$

پس دامنه‌ی تابع برابر $R-\{-۳,۰,۳\}$ می‌باشد.

۳ـ گزینه «۲» اولاً باید جلوی Ln بزرگتر از صفر باشد. برای تعیین علامت یک عبارت کسری باید ریشه‌های ساده صورت و مخرج کسر را بیابیم و مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت جلوی Ln بزرگ‌تر از صفر می‌باشد را قبول کنیم.

$$\frac{۱+x}{۱-۲x}>۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{c|cccc} x & & -۱ & & \frac{۱}{۲} \\ \hline P>۰ & - & \circ & \underbrace{\quad+\quad}_{\substack{\text{ق ق}\\ -۱<x<\frac{۱}{۲}}} & | & - \end{array}$$

از طرفی باید جلوی $\cos^{-۱}$ در بازه $[-۱,۱]$ باشد، یعنی داریم:

$$-۱\le x-۱\le۱\Rightarrow۰\le x\le۲$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $[۰,\frac{۱}{۲})$ می‌باشد که همان دامنه‌ی تابع می‌باشد.

۴ـ گزینه «۲» حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است که با هوپیتال آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۱-\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۵ـ گزینه «۳» گزینه صحیح، گزینه (۳) می‌باشد که متأسفانه سنجش گزینه (۱) را به اشتباه به عنوان گزینه صحیح انتخاب کرده است. حالت مبهم $(\infty)^۰$ می‌باشد که برای رفع ابهام از این حالت باید از حد داده شده Ln بگیریم.

$$y=(۱+\frac{۴}{۳}x)^{\frac{۲}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\text{Ln}y=\lim_{x\to\infty}\frac{۲}{x}\text{Ln}(۱+\frac{۴}{۳}x)=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\infty}\text{Ln}y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲\times\frac{\frac{۴}{۳}}{۱+\frac{۴}{۳}x}}{۱}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{۸}{۳}}{۱+\frac{۴}{۳}x}\right)=۰$$

$$\text{Ln}y=۰\Rightarrow y=e^۰=۱$$

۶ـ گزینه «۱» با استفاده از فرمول حد مجموع انتگرال معین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

پس در مخرج کسرها ابتدا باید از n^2 فاکتور بگیریم:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\cdots+\frac{1}{n^2(1+1)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+1}\right)$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\text{Arctan}\, x\Big|_0^1=\text{Arctan}(1)-\text{Arctan}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

۷ـ گزینه «۱» باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در $x=2$ به‌دست آوریم.

$$f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]-\left[-\frac{2}{2}\right]=1-(-1)=2$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\left[\frac{2^+}{2}\right]-\left[-\frac{2^+}{2}\right]=[1^+]-[-(1^+)]=1-(-2)=3 \quad ، \quad \lim_{x\to2^-} f(x)=\left[\frac{2^-}{2}\right]-\left[-\frac{(2)^-}{2}\right]=[1^-]-[-(1^-)]=0-(-1)=1$$

چون هیچ کدام از حدهای چپ و راست با مقدار تابع برابر نیستند، پس تابع هیچ نوع پیوستگی در $x=2$ ندارد.

۸ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1})'_{(b)}=\frac{1}{f'(a)}$$

که در این رابطه $b=f(a)$ می‌باشد.

با توجه به این‌که طول تابع معکوس برابر ۱ می‌باشد، عرض تابع اصلی را برابر ۱ قرار می‌دهیم و داریم: $1=x+e^x \Rightarrow x=0$

پس داریم: $f'(x)=1+e^x \xrightarrow{x=0} 1+e^0=1+1=2$

در مرحله آخر، مشتق تابع معکوس برابر است با: $(f^{-1})'_{(1)}=\frac{1}{f'_{(0)}}=\frac{1}{2}$

۹ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: باید ۲ یا ۳ مرتبه از تابع داده شده مشتق بگیریم و سپس به جای x مقدار صفر را قرار دهیم و سپس از روی گزینه‌ها به گزینه‌ی صحیح برسیم.

$$y^{(1)}=1\times \text{Ln}(x+1)+\frac{1}{x+1}(x)=\text{Ln}(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y^{(3)}=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\xrightarrow{x=0}-1-2=-3$$

فقط در گزینه (۴) به ازای $n=3$ به مقدار -3 می‌رسیم.

$$\text{گزینه (4)}\Rightarrow(-1)^3\,3(3-2)!=-3$$

روش دوم: با توجه به مشتق دوم به دست آمده باید چند مرتبه دیگر از تابع مشتق دوم بگیریم تا بتوانیم مشتق مرتبه‌ی nام را از روی آن بیابیم.

$$y=(x+1)^{-1}+(x+1)^{-2}\Rightarrow y^{(1)}=-(x+1)^{-2}-2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(2)}=2(x+1)^{-3}+6(x+1)^{-4}\Rightarrow y^{(3)}=-6(x+1)^{-4}-24(x+1)^{-5}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}+(-1)^n(n+1)!(x+1)^{-(n+2)}$$

می‌بینیم که در مشتق مرتبه دوم قسمت اول ضریب ۲ و قسمت دوم ضریب ۶ دارند و در مشتق مرتبه سوم قسمت اول ضریب ۶ و قسمت دوم ضریب ۲۴ دارند و این یعنی در مشتق مرتبه nاُم قسمت اول ضریب $n!$ و قسمت دوم ضریب $(n+1)!$ دارد.

$$x=0 \Rightarrow y^{(n)}=(-1)^n n!+(-1)^n (n+1)!$$

مشتق $(n-2)$اُم y'' همان مشتق nاُم تابع y می‌باشد. پس داریم:

$$y^{(n)}=(-1)^n((n-2)!+(n-1)!)=(-1)^n((n-2)!+(n-1)(n-2)!)=(-1)^n n(n-2)!$$

۱۰ـ گزینه «۱» باید ابتدا بردارهای گرادیان دو رویه را به‌دست آوریم و آنها را درهم ضرب خارجی کنیم تا بردار هادی خط مماس به‌دست بیاید و از روی آن بتوانیم معادله‌ی خط مماس را بنویسیم.

$$f: x^2+2y^2-3=0 \to \vec{\nabla}f:(2x,4y,0) \xrightarrow{(1,-1,1)} (2,-4,0)$$

$$g: x+y+z-1=0 \to \vec{\nabla}g:(1,1,1)$$

$$\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(-4-0)-\vec{j}(2-0)+\vec{k}(2+4)=-4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$$

پس معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{6} \xrightarrow{\times(-2)} \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$$

۱۱ـ گزینه «۳» درآمد برابر است با:

$R(x)=$ معادله تقاضا $\times$ تعداد کالا

$$R(x)=x(80-2x)=80x-2x^2$$

از طرفی هزینه کل برابر است با:

$$C(x)=a+bx$$

که a هزینه ثابت و bx هزینه متغیر است، پس داریم:

$$C(x)=\frac{1}{2}(80x-2x^2)+300=40x-x^2+300$$

پس سود برابر است با:

هزینه − درآمد = سود

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$P(x)=80x-2x^2-(40x-x^2+300)=-x^2+40x-300$$

$P'(x)=0 \Rightarrow -2x+40=0 \Rightarrow x=20 \Rightarrow$ ماکزیمم سود $=-400+800-300=100$

۱۲ـ گزینه «۳» با استفاده از مشتق توابع پارامتری داریم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2t-2}$$

چون گزینه‌ها برحسب x و y می‌باشند، باید به رابطه‌ی به‌دست آمده برسیم.

$$\begin{cases}y-x=t^2-(t^2-2t)=2t\\ y-x-2=2t-2\end{cases} \Rightarrow \frac{y-x}{y-x-2}=\frac{2t}{2t-2}$$

۱۳ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مقدار تقریبی توابع دو متغیره داریم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ \Delta x = -\frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ \Delta y = \frac{5}{100} \end{cases}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^3-2y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2y}} \xrightarrow{(2,2)} \frac{12}{4}=3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{2\sqrt{x^3-2y}} \xrightarrow{(2,2)} \frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$f(2,2)=\sqrt{(2)^3-2(2)}=\sqrt{8-4}=2$$

$$\text{مقدار تقریبی تابع} \simeq 2+3(-\frac{1}{10})-\frac{1}{2}(\frac{5}{100}) \simeq 2-\frac{3}{10}-\frac{5}{200}=\frac{400-60-5}{200}=\frac{335}{200}=\frac{67}{40}$$

۱۴ـ گزینه «۱» چون مشتق تابع f نسبت به متغیر t را می‌خواهیم بیابیم و f وابسته به دو متغیر x و y می‌باشد، باید از مشتق زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial t})+(\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial t})=(y\times(-\sin t))+(x\times\cos t)=(\sin t)(-\sin t)+(\cos t\times\cos t)=-\sin^2 t+\cos^2 t=\cos 2t$$

توجه داشته باشید که $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ می‌باشد.

۱۵ـ گزینه «۲» باید از تابع f نسبت به x و y جداگانه مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \quad \text{نقطه‌ی بحرانی}$$

اکنون باید مقدار $\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ را بیابیم.

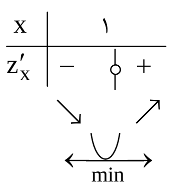
$$\begin{cases} f_{xx}=0 \\ f_{xy}=1 \\ f_{yy}=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0-(1)^2=-1<0 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی، نقطه زینی است.}$$

۱۶ـ گزینه «۴» با استفاده از شرط داده شده تابع z را یک متغیره برحسب x می‌کنیم و از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$x+y=2 \Rightarrow y=2-x$$

$$z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}=\frac{(2-x)+x}{x(2-x)}=\frac{2}{2x-x^2} \Rightarrow z'_x=\frac{0-(2-2x)\times 2}{(2x-x^2)^2}=0 \Rightarrow 2-2x=0 \Rightarrow x=1$$

با استفاده از تعیین علامت مشتق نوع نقطه‌ی اکسترمم را به‌دست می‌آوریم.



با توجه به این که در سمت چپ $x=1$ تابع نزولی و در سمت راست آن تابع صعودی است پس $x=1$ نقطه مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که u و v برحسب متغیرهای x و y می‌باشند و خود u و v نیز متغیرهای توابع f و g می‌باشند، داریم:

$$\begin{cases} f: u^2+v^2-x=0 \\ g: uv-y=0 \end{cases}$$

با استفاده از مشتق جزئی توابع چند متغیره داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2v\\ -1 & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & 2v\\ v & u\end{vmatrix}}\xrightarrow{(-2,1)}-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

۱۸ـ گزینه «۱» گزینه (۱)، گزینه‌ی صحیح می‌باشد که سنجش به اشتباه گزینه (۳) را به عنوان گزینه صحیح انتخاب کرده است. به جای y' قرار می‌دهیم $\frac{dy}{dx}$ و سپس معادله را برحسب x و y مرتب می‌کنیم تا بتوانیم از آن برحسب x و y جداگانه انتگرال بگیریم و به تابع $y(x)$ برسیم.

$$\frac{dy}{dx}=y^2(1+x)\ \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=(1+x)dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y^{-2}dy=\int(1+x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1}=x+\frac{x^2}{2}+c\ \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+\frac{x^2}{2}+c \xrightarrow{y(0)=-1} \frac{-1}{-1}=0+\frac{0}{2}+c \Rightarrow c=1$$

پس داریم:

$$-\frac{1}{y}=x+\frac{x^2}{2}+1\ \Rightarrow -\frac{1}{y}=\frac{2x+x^2+2}{2}\ \Rightarrow y=\frac{-2}{x^2+2x+2}\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y=\frac{\text{عدد}}{+\infty}=0\ \Rightarrow y=0$$

۱۹ـ گزینه «۳» در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم $y'+yf(x)=q(x)$ همواره جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y=e^{-\int f(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int f(x)\,dx}dx+c\right)$$

پس داریم:

$$y=e^{-\int(-3)\,dx}\left(\int e^{2x}\times e^{\int(-3)dx}dx+c\right)$$

$$y=e^{3x}\left(\int(e^{2x}\times e^{-3x})\,dx+c\right)=e^{3x}\left(\int e^{-x}dx+c\right)$$

$$y=e^{3x}(-e^{-x}+c) \xrightarrow{y(0)=0} 0=e^{0}(-e^{0}+c)\ \Rightarrow c=1$$

پس داریم:

$$y=e^{3x}(-e^{-x}+1)=e^{3x}-e^{2x}=e^{2x}(e^{x}-1)$$

۲۰ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی $A_t=A_0e^{kt}$ (k ثابت رشد می‌باشد) داریم:

$$2A_0=A_0e^{10k}\ \Rightarrow 2=e^{10k} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Ln2=10kLne\ \Rightarrow Ln2=10k\ \Rightarrow k=\frac{1}{10}Ln2$$

۲۱ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $u=\sqrt{x+۴}$ داریم:

$$u^۲ = x+۴ \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} ۲udu = dx \ , \ x = u^۲-۴$$

$$f(u)=\int \frac{u}{u^۲-۴}\times ۲udu = ۲\int\frac{u^۲}{u^۲-۴}du = ۲\int(۱+\frac{۴}{u^۲-۴})\,du$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\int\frac{du}{u^۲-a^۲}=\frac{۱}{۲a}Ln|\frac{u-a}{u+a}|$ داریم:

$$=۲(u+۴(\frac{۱}{۴})(Ln|\frac{u-۲}{u+۲}|)) = ۲u+۲Ln|\frac{u-۲}{u+۲}|+c$$

$$x=-۴ \Rightarrow u=\sqrt{-۴+۴}=۰ \Rightarrow ۰=۰+۲Ln۱+c \Rightarrow c=۰$$

$$x=۵ \Rightarrow u=\sqrt{۵+۴}=۳ \Rightarrow ۶+۲Ln\frac{۱}{۵}=۶-۲Ln۵$$

۲۲ـ گزینه «۳» باید $f''(x)<۰$ باشد، با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$f'(x)=\frac{x^۲}{x^۲+x+۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲x(x^۲+x+۲)-(۲x+۱)x^۲}{(x^۲+x+۲)^۲}<۰$$

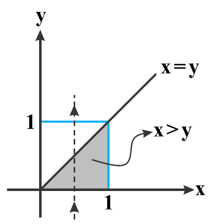
$$\xrightarrow{\text{باید}} ۲x^۳+۲x^۲+۴x-۲x^۳-x^۲<۰ \Rightarrow x^۲+۴x<۰$$

$$\Rightarrow x(x+۴)<۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=-۴\end{cases} \Rightarrow$$

x		-۴		۰	
$P<۰$	+		−		+

قق : $-۴<x<۰$

۲۳ـ گزینه «۲» حاصل انتگرال زیر خط $x=y$ را به‌دست می‌آوریم و با توجه به متقارن بودن ناحیه انتگرال‌گیری، حاصل را دو برابر می‌کنیم.



$$\text{حاصل}=۲\times\int_۰^۱\int_۰^x(x-y)dydx=۲(\int(xy-\frac{y^۲}{۲})\Big|_۰^x dx)$$

$$=۲\int_۰^۱(x^۲-\frac{x^۲}{۲})\,dx=۲\times(\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۳}{۶})\Big|_۰^۱=۲(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶})=۲(\frac{۲-۱}{۶})=۲\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۲۴ـ گزینه «۴» اگر دترمینان مربوط به سه بردار مساوی صفر باشد، در این صورت می‌گوییم سه بردار وابسته خطی هستند، در غیر این صورت مستقل خطی هستند. پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۳\\ -۲ & ۰ & -۴\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۱\times(۰-۰)-۲(۲-۰)-۳(۰-۰)=-۴$$

چون $|A|=-۴\neq ۰$ پس سه بردار مستقل خطی هستند.

۲۵ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی $|A-\lambda I|=0$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس را به‌دست می‌آوریم.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\lambda & 1\\ 0 & m-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow (4-\lambda)(m-\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=m\end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر λ در رابطه‌ی داده شده مقدار m را می‌یابیم و داریم:

$$(4)^2 m+4m^2=20 \Rightarrow 4m^2+16m-20=0 \Rightarrow m^2+4m-5=0$$

$$(m+5)(m-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}m=-5 & (\text{غ ق ق})\\ m=1 & \xrightarrow{\lambda>0} \lambda_2=1\end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه $Av=\lambda v$ مقادیر v_1 و v_2 را می‌یابیم.

$$\lambda=4 \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \Rightarrow 4v_1+v_2=4v_1 \Rightarrow v_2=0$$

پس $v_2=0$ و v_1 دلخواه می‌باشد؛ بنابراین در نظر می‌گیریم: $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\text{اگر } \lambda=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \Rightarrow 4v_1+v_2=v_1 \Rightarrow v_2=-3v_1$$

پس در نظر می‌گیریم: $\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$

کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $(1,-3)$ و $(1,0)$ برابر است با:

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0}\times\sqrt{1+9}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

سؤالات آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

توجه: برای رشته مدیریت مجموعاً ۸ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ مشترک با رشته حسابداری می‌باشد.

۱ـ جواب نامعادله‌ی $x < \frac{۴x-۳}{x} < x+۲$ با بیشترین طول بازه کدام است؟

۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۴) $(۱,۳)$

۲ـ اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$، آنگاه مقدار تابع $f((f(x)-۱)^۳)$، کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{x}-۱$ ۲) x ۳) $\sqrt[۳]{x}+۱$ ۴) $\sqrt[۳]{x}$

۳ـ اگر $\cos^۴ x-\sin^۴ x=۰/۶$ باشد، حاصل $\cos^۶ x-\sin^۶ x$، کدام است؟

۱) ۰/۵۲ ۲) ۰/۳۱۲ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۵۰۴

۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-}(\frac{x^۲-|x-۱|-۱}{|x-۱|})$، کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲-

۵ـ فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x^۳-۸)(x^۲+ax+b)}{(x^۲-۴)^۲}=۶$ باشد. مقدار $b+a$، کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۸ ۳) ۱۰- ۴) ۱۰

۶ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲^۲}\cdots\cos\frac{x}{۲^n}$، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱-\cos x}{x}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) حد وجود ندارد.

۷ـ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x[\frac{۱}{x}]+a & x\geq ۱ \\ \frac{x^۲-[x^۲]+b}{x-۱} & x<۱ \end{cases}$، پیوسته باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) چنین a و b وجود ندارد.

۸ـ تابع $f(x)=Ln(۱+۳^x)$ مفروض است. تعداد مجانب‌های $f'(x)$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۹ـ تابع $f(x)=[x^۲]\cos x$ مفروض است، مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

۱۰ـ مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{vmatrix} ۲ & e^x & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ x^۳ & ۱ & x \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{e}-۱$ ۲) $۱-\frac{۱}{e}$ ۳) $\frac{-۱}{e}-۱$ ۴) وجود ندارد.

۱۱ـ شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن برابر $\frac{۲y}{۱-۲x}$ است. اگر $f(۰)=۱$ باشد، آنگاه $f(\frac{۱}{۲})$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۲-

۱۲ـ مقدار $\int_۳^۸\frac{\sqrt{x+۱}}{x}dx$، کدام است؟

۱) $۲+Ln\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲+Ln\frac{۳}{۴}$ ۳) $۲+Ln\frac{۳}{۲}$ ۴) $۲+Ln\frac{۴}{۳}$

۱۳ـ کدام انتگرال واگرا است؟

۱) $\int_۱^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^۳}}$ ۲) $\int_۱^\infty\frac{۲^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ۳) $\int_۱^\infty\frac{dx}{x+\sin^۲ x}$ ۴) $\int_۱^\infty(۱-\cos\frac{۲}{x})dx$

۱۴ـ مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=|x|$ بر بازه $[-۱, ۱]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵ـ اگر $F(x)=\int_۰^{x^۲+۲x}\frac{\cos t}{\sqrt{۱+e^t}}dt$، آن‌گاه $F'(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

۱ـ گزینه «۴» باید دو نامعادله زیر را حل کنیم و سپس اشتراک جواب‌ها را بیابیم:

$$\frac{۴x-۳}{x}<x+۲ \Rightarrow \frac{۴x-۳}{x}-x-۲<۰ \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{۴x-۳-x^۲-۲x}{x}<۰ \Rightarrow \frac{-x^۲+۲x-۳}{x}<۰$$

برای تشکیل جدول باید ریشه‌های صورت کسر را بیابیم: $\Rightarrow -x^۲+۲x-۳=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۴-۴(۳)=۴-۱۲=-۸<۰$

چون صورت ریشه ندارد، علامت چند جمله‌ای همواره موافق علامت a (ضریب $x^۲$) است. در تشکیل جدول عبارت را p می‌نامیم: $p=\frac{-x^۲+۲x-۳}{x}$

و به صورت مقابل علامت p تعیین می‌شود.

x		۰	
$-x^۲+۲x-۳$	$-$		$-$
x	$-$		$+$
$p<۰$	$+$		$-$

$\wedge$
(قق) (تعریف نشده)

$\overset{\text{قق}}{\Rightarrow}\ x>۰$

$$\frac{۴x-۳}{x}>x \Rightarrow \frac{۴x-۳}{x}-x>۰ \Rightarrow \frac{۴x-۳-x^۲}{x}>۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۴x+۳}{x}<۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰$$

$\Rightarrow x=۱\ ,\ x=۳\ ,\ x=۰$ ریشه مخرج

x		۰		۱		۳	
$x^۲-۴x+۳$	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
x	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$p<۰$	$-$		$+$		$-$		$+$
	(قق)				(قق)		

$\overset{\text{قق}}{\Rightarrow}\ x<۰$ یا $۱<x<۳$

اشتراک دو مجموعه جواب $x>۰$ و $x<۰$ یا $۱<x<۳$ برابر است با:

$$\begin{cases} x>۰ \\ x<۰ \\ ۱<x<۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۱<x<۳ \Rightarrow x\in(۱,۳)$$

۲ـ گزینه «۳» فقط کافی است $f(x)$ را در عبارت خواسته شده جایگذاری کنیم: $f((\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^۳)=f(\sqrt[۳]{x})^۳=f(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا رابطه داده شده را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم و سپس از تساوی $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\cos^۴ x-\sin^۴ x=۰/۶ \Rightarrow (\cos^۲ x-\sin^۲ x)\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \cos ۲x=\frac{۶}{۱۰}$$

اکنون از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم تا بتوانیم به $\cos^۶ x-\sin^۶ x$ برسیم:

$$(\cos^۲ x-\sin^۲ x)^۳=\cos^۶ x-\sin^۶ x-۳\cos^۴ x\sin^۲ x+۳\cos^۲ x\sin^۴ x$$

$$(\frac{۶}{۱۰})^۳=\cos^۶ x-\sin^۶ x-۳\cos^۲ x\sin^۲ x\,\underbrace{(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}_{\frac{۶}{۱۰}}$$

با توجه به اینکه $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ می‌باشد، حاصل $\sin^۲ x\cos^۲ x$ را به دست می‌آوریم:

$$(\sin x\cos x)^۲=(\frac{\sin ۲x}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۴}(۱-\cos^۲ ۲x)=\frac{۱}{۴}(۱-(\frac{۶}{۱۰})^۲)=\frac{۱}{۴}(\frac{۶۴}{۱۰۰})$$

پس در آخر داریم: $\cos^۶ x-\sin^۶ x=(\frac{۶}{۱۰})^۳+۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۶۴}{۱۰۰})(\frac{۶}{۱۰})=\frac{۲۱۶}{۱۰۰۰}+\frac{۲۸۸}{۱۰۰۰}=\frac{۵۰۴}{۱۰۰۰}$

۴ـ گزینه «۱» ابتدا به ازای (۱^-) علامت داخل قدرمطلق را تعیین می‌کنیم و قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+(x-۱)-۱}{-(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+x-۲}{-x+۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x+۱}{-۱}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا کسر داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+ax+b)}{(x-2)^2(x+2)^2}=6 \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)(x^2+ax+b)}{(x-2)(x+2)^2}=6$$

چون به‌ازای $x\to 2$ مخرج کسر صفر می‌شود و حاصل حد عدد شده است، پس باید به ازای $x\to 2$ صورت کسر هم صفر شود و سپس با استفاده از هوپیتال از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رفع ابهام کنیم.

$$x^2+ax+b\xrightarrow{x=2}4+2a+b=0\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 2}\frac{(2x+2)(x^2+ax+b)+(2x+a)(x^2+2x+4)}{1\times(x+2)^2+2(x+2)(x-2)}=6$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{6\overbrace{(4+2a+b)}^{0}+(4+a)\overbrace{(4+4+4)}^{12}}{(2+2)^2}=6\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4\Rightarrow 4+2(4)+b=0\Rightarrow b=-12\Rightarrow a+b=-8$$

۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ می‌باشد، حد داده شده را در $\sin\frac{x}{2^n}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\overbrace{\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}})}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

اگر در صورت کسر به همین شکل ادامه دهیم، به اندازه n تا $\frac{1}{2}$ ایجاد می‌شود و در نهایت به $\sin x$ می‌رسیم و داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sin x)(\frac{1}{2})^n}{\sin\frac{x}{2^n}}\ \underset{\sin u\sim u}{\overset{\text{هم ارزی}}{=}}\ \frac{\sin x(\frac{1}{2})^n}{\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x(\frac{1}{2})^n}{x(\frac{1}{2})^n}=\frac{\sin x}{x}$$

۷ـ گزینه «۲» برای پیوسته بودن تابع در $x=1$ باید $f(1^+)=f(1^-)=f(1)$ باشد، حال داریم:

$$f(1^+)=1\times[\frac{1}{1^+}]+a=[1^-]+a=0+a=a\quad,\quad f(1^-)=\frac{x^2-[(1^-)^2]+b}{x-1}=\frac{x^2-[1^-]+b}{x-1}=\frac{x^2-0+b}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+b}{x-1}\Rightarrow 1+b=0\to b=-1\quad,\quad\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

پس برای پیوسته بودن باید $a=2$ باشد در نتیجه $a+b=1$ است.

۸ـ گزینه «۴» باید مشتق تابع را به دست آوریم و سپس مجانب‌های آن را بیابیم.

$$f'(x)=\frac{3^x\,Ln3}{1+3^x}$$

با توجه به اینکه 3^x همواره مثبت می‌باشد، پس مخرج ریشه ندارد و تابع فاقد مجانب قائم است. اکنون باید حد تابع مشتق را در $\pm\infty$ بیابیم.

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\frac{3^x\,Ln3}{3^x}=Ln3\Rightarrow y=Ln3\ \text{ مجانب افقی}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\frac{3^{-\infty}Ln3}{1+3^{-\infty}}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow y=0\ \text{ مجانب افقی}$$

پس مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ دارای دو مجانب افقی است.

۹ـ گزینه «۲» ابتدا باید به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ حاصل جزء صحیح را بیابیم:

$$f(x)=[(\frac{\pi}{2})^2]\cos x=[2^+]\cos x=2\cos x\qquad f'(x)=-2\sin x\to f'(\frac{\pi}{2})=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$$

۱۰ـ گزینه «۲» باید مشتق دترمینان ماتریس را مساوی صفر قرار دهیم، پس ابتدا دترمینان ماتریس را به دست می‌آوریم و سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=2(0-0)-e^x(-x-0)-1\times(-1-0)$$

$$f(x)=xe^x+1\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=0\Rightarrow e^x(1+x)=0\xrightarrow{e^x\neq 0}1+x=0\Rightarrow x=-1$$

پس $f(-1)$ برابر مقدار مینیمم تابع می‌باشد.

$$f(-1)=(-1)e^{-1}+1=-\frac{1}{e}+1=1-\frac{1}{e}$$

۱۱ـ گزینه «۱» باید به جای y' قرار دهیم $\frac{dy}{dx}$ و سپس عبارت را مرتب کنیم و از دو طرف تساوی انتگرال بگیریم:

$$y'=\frac{2y}{1-2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y}{1-2x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2dx}{1-2x}$$

$$\mathrm{Ln}y=-\mathrm{Ln}(1-2x)+c \xrightarrow{f(0)=1} \mathrm{Ln}1=-\mathrm{Ln}(1)+C \Rightarrow C=0$$

پس داریم:

$$\mathrm{Ln}y=-\mathrm{Ln}(1-2x) \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}(1-2x)^{-1} \Rightarrow y=(1-2x)^{-1} \Rightarrow y=\frac{1}{1-2x} \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} f(\frac{1}{3})=\frac{1}{1-2(\frac{1}{3})}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

۱۲ـ گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $u=\sqrt{x+1}$ داریم:

$$u^2=x+1 \Rightarrow 2udu=dx\ ,\ x=u^2-1$$

حالا باید حدود انتگرال را برحسب u بنویسیم:

$$x=3 \rightarrow u=2 \quad ، \quad x=8 \rightarrow u=3$$

$$\int\frac{u}{u^2-1}(2udu)=2\int\frac{u^2}{u^2-1}du \Rightarrow I=2\int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}du$$

کسر را تفکیک می‌کنیم و داریم:

$$2\int(1+\frac{1}{u^2-1})du=2\int du+\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du=2u+(\mathrm{Ln}(u-1)-\mathrm{Ln}(u+1)) \Rightarrow I=(2u+\mathrm{Ln}(\frac{u-1}{u+1}))_2^3$$

$$=6+\mathrm{Ln}\frac{2}{4}-4-\mathrm{Ln}\frac{1}{3}=2+(\mathrm{Ln}\frac{2}{4}-\mathrm{Ln}\frac{1}{3})=2+\mathrm{Ln}(\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{3}})=2+\mathrm{Ln}(\frac{3}{2})$$

۱۳ـ گزینه «۳» بررسی گزینه (۳):

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x+\sin^2x} \underset{\sim}{x\to\infty} \int_1^\infty\frac{dx}{x}$$

طبق نکته $\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$ که برای $p>1$ همگرا و $p\le1$ واگراست چون در اینجا $p=1$ می‌باشد، این انتگرال واگراست.

بررسی گزینه (۱):

$$\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \underset{\sim}{x\to\infty} \int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$p=\frac{3}{2}>1$ طبق نکته فوق انتگرال همگراست.

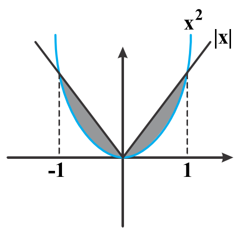
بررسی گزینه (۲): چون در صورت کسر جلوی انتگرال به ازای $x\to+\infty$ عامل $2^{-\infty}$ داریم و رشد مخرج صفر می‌شود پس این انتگرال هم همگراست.

بررسی گزینه (۴): با استفاده از هم ارزی $\underset{u\to0}{1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}}$ داریم:

$$\int_1^\infty\frac{(\frac{2}{x})^2}{2}dx=\int_1^\infty\frac{4}{2x^2}dx$$

چون $p=2>1$ می‌باشد، طبق نکته این انتگرال هم همگراست.

۱۴ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه دو تابع همدیگر را در سه نقطه $-1,1,0$ قطع می‌کنند و با توجه بـه متقـارن بـودن ناحیه انتگرال‌گیری فقط کافی است، حاصل انتگرال در ناحیه اول را دو برابر کنیم.



$$S=2\left|\int_0^1(x^2-x)dx\right|=2\left|(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})_0^1\right|=2\left|(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\right|=2\left|(\frac{2-3}{6})\right|=2\left|-(\frac{1}{6})\right|=2(\frac{1}{6})=\frac{1}{3}$$

۱۵ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$F'(x)=(2x+2)\frac{\cos(x^2+2x)}{\sqrt{1+e^{(x^2+2x)}}} \xrightarrow{x=0} F'(0)=2\frac{\cos(0)}{\sqrt{1+e^0}}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

۱ـ درباره دستگاه نامعادلات $\begin{cases} y > ۳x+۲ \\ x+۲y < -۸ \end{cases}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x < -\frac{۱۲}{۷}$ ۲) $x > -\frac{۱۲}{۷}$ ۳) $y < -\frac{۱۲}{۷}$ ۴) $y > -\frac{۱۲}{۷}$

۲ـ تعداد جواب‌های نامعادله $۳-|x| \le x^{۲}+۱ \le ۴+x$، در مجموعه اعداد صحیح، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۳

۳ـ اگر دترمینان ماتریس زیر برابر ۴۳ باشد، آنگاه x کدام است؟

$$\begin{vmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۶ & -x & ۱ \\ -۱ & ۳ & x+۳ \end{vmatrix}$$

۱) صفر یا ۲ ۲) ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ یا صفر ۴) ۵ یا ۴

۴ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & c & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ a & ۰ & b \end{bmatrix}$، اگر $AA^{T}=I$، مقدار $a^{۲}+c^{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵ـ با ارقام ۱ و ۲ اعداد ۱۲ رقمی می‌سازیم به طوری که عدد ساخته شده از هر دو طرف یکسان خوانده شود. تعداد اعداد ساخته شده که بر ۶ بخش‌پذیر باشند، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۶ـ اگر $z_{۱}, z_{۲}, z_{۳}, z_{۴}$ و $z_{۵}$ جواب‌های معادله $۳z^{۵}+z^{۴}-z+۷=۰$ باشند، آنگاه $\sum_{n=۱}^{۵} \mathrm{Im}(z_n)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۷ـ دامنه تابع $y = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{۲۵-۱۶x^{۲}}}{۳x}\right)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}|\{۰\}$ ۲) $\left[-\frac{۵}{۴},\frac{۵}{۴}\right]\setminus\{۰\}$ ۳) $\left[-\frac{۵}{۴},-۱\right]\cup\left[۱,\frac{۵}{۴}\right]$ ۴) $(-\infty,-\frac{۵}{۴})\cup(\frac{۵}{۴},\infty)$

۸ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{n+۴}+\frac{۱}{n+۶}+\cdots+\frac{۱}{n+۲n}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\mathrm{Ln}۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۳$ ۳) $۲\mathrm{Ln}۳$ ۴) $۳\mathrm{Ln}۳$

۹ـ اگر n یک عدد طبیعی دلخواه باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x\to۰} x^{n}\left(\left[\frac{۱}{x}\right]\left[\frac{۱}{۲x}\right]\ldots\left[\frac{۱}{nx}\right]\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n!}$ ۲) $\frac{۱}{n}$ ۳) ۰ ۴) موجود نیست.

۱۰ـ تعداد مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۴-x^{۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱ـ اگر به ازای هر $x\in(-\infty,-۱)$ ، $f(۲x+x^{۲})=۳x^{۲}$ آنگاه $f'(۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲ـ در تابع پارامتری $\begin{cases} x=t^{۲}-۱ \\ y=t^{۲}+t \end{cases}$ حاصل $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ به ازای $t=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳ـ خط مماس بر منحنی $y=x^3+3x^2-x+a$ در نقطه عطف آن از مبدأ مختصات عبور می‌کند، مقدار تابع در $x=0$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۱۴ـ ضریب x^{21} در بسط مکلورن تابع $f(x)=\frac{5+x}{2-x-x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2^{23}+1}{2^{22}}$ ۲) $\frac{2^{23}-1}{2^{22}}$ ۳) $\frac{2^{22}-1}{2^{21}}$ ۴) $\frac{2^{22}+1}{2^{21}}$

۱۵ـ مشتق تابع $f(x)=\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ کدام است؟

۱) $f'(x)=\frac{\sin x-\sin\frac{x}{2}}{x}$ ۲) $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ۳) $f'(x)=\frac{\cos x}{x}$ ۴) $f'(x)=\frac{\sin x}{x}$

۱۶ـ مقدار $\int_0^1\frac{4t+4}{e^{2t}}dt$، کدام است؟

۱) $\frac{3e^2+5}{e^2}$ ۲) $\frac{5e^2+3}{e^2}$ ۳) $\frac{5e^2-3}{e^2}$ ۴) $\frac{3e^2-5}{e^2}$

۱۷ـ تابع $f(x)=\frac{(x^2+4)(x+2)}{(x^2-1)^2}$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم. مقدار A_2 کدام است؟

$$f(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}$$

۱) 2 ۲) -1 ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۱۸ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos^2 x+1}dx$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\mathrm{Ln}2$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\mathrm{arc\,tg}2$

۱۹ـ مجموع جواب‌های معادله $\log_4^x+2\log_x^4-3=0$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲۰ـ حاصل $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)$ به ازای تابع $f(x,y)=\sin xy+\frac{ye^{y^2}}{\sqrt{y^2+1}}$، کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۲۱ـ فرض کنید تابع حقیقی مقدار f مشتق مرتبه دوم پیوسته داشته باشد. اگر $z=xy+f(x^2+y)$ آنگاه حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$، کدام است؟

۱) 1 ۲) x ۳) $-x$ ۴) -1

۲۲ـ مقدار اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+2y^2+2xy$ با شرط $x+y=4$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۸- ۴) ۱۶-

۲۳ـ حاصل $\iint_D xydA$ که در آن D ناحیه محدود به خطوط $x=y$ ، $x=1$ و محور x ها می‌باشد، کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۴ـ حاصل $I=\iint_D e^{y^3}dA$ که در آن D ناحیه محدود به منحنی $y=\sqrt{x}$، خط $y=1$ و محور y ها می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{e+1}{3}$ ۲) $\frac{e-1}{3}$ ۳) $\frac{2e-1}{3}$ ۴) $\frac{2e+1}{3}$

۲۵ـ اگر $f(x)$ جواب خصوصی معادله $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ باشد، آنگاه $f(2)$ کدام است؟

۱) $5e^4$ ۲) $6e^4$ ۳) $3e^2$ ۴) $6e^2$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

۱ـ گزینه «۱» باید ابتدا دو نامعادله داده شده را هم‌جهت کنیم و سپس با هم جمع کنیم.

$$y > 3x+2 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{\text{طرفین را در عدد } -2 \text{ ضرب می‌کنیم}} -2y < -6x-4 \Rightarrow 6x-2y < -4$$

$$\begin{cases} 6x-2y<-4 \\ x+2y<-8 \end{cases} \xrightarrow{+} 7x < -12 \Rightarrow x < -\frac{12}{7}$$

۲ـ گزینه «۴» برای حل این نامعادله باید قدرمطلق را حذف کنیم؛ برای این‌کار از تعریف قدرمطلق کمک می‌گیریم. در حالت اول فرض می‌کنیم $x \geq 0$ و به نامعادله (۱) $3-x \leq x^2+1 \leq 4+x$ می‌رسیم. برای حل نامعادله (۱) با فرض $x \geq 0$ باید مجموعه جواب نامعادلات $x^2+1 \leq 4+x$ و $3-x \leq x^2+1$ را مشخص کنیم. اشتراک مجموعه جواب‌های این دو نامعادله مجموعه جواب نامعادله (۱) می‌شود.

در گام دوم با فرض $x<0$ به نامعادله (۲) $3+x \leq x^2+1 \leq 4+x$ می‌رسیم. برای حل نامعادله (۲) با فرض $x<0$ باید مجموعه جواب نامعادلات $x^2+1 \leq 4+x$ و $3+x \leq x^2+1$ را حساب کنیم. اشتراک مجموعه جواب این دو نامعادله مجموعه جواب نامعادله (۲) می‌شود. در پایان برای رسیدن به مجموعه جواب‌های نهایی باید اجتماع مجموعه جواب نامعادله‌های ۱ و ۲ را حساب کنیم.

$$\begin{cases} x^2+1 \leq 4+x \Rightarrow x^2-x-3 \leq 0 \xrightarrow{\Delta=13} \\ x^2+1 \geq 3-x \Rightarrow x^2+x-2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) \geq 0 \end{cases}$$

x		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	
$P \leq 0$	+	0	-	0	+

x		-2		1	
$P \geq 0$	+	0	-	0	+

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} 1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \simeq \frac{1+3/6}{2} \simeq 2/3$$

مقادیر صحیح ۱ و ۲ قابل قبول هستند.

$$\text{اگر } x<0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1 \leq 4+x \\ x^2+1 \geq 3+x \Rightarrow x^2-x-2 \geq 0 \rightarrow \end{cases}$$

x		-1		2	
$P \geq 0$	+		-		+

$$\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq -1 \Rightarrow -1/3 \leq x \leq -1 \Rightarrow x=-1 \quad \text{قابل قبول}$$

پس این نامعادله دارای ۳ جواب صحیح می‌باشد.

۳ـ گزینه «۲» فقط کافی است دترمینان ماتریس را مساوی ۴۳ قرار دهیم و مقدار x را بیابیم:

$$|A|=43 \Rightarrow \underbrace{-2(-x^2-3x-3)}_{\text{سطر اول و ستون اول}} - \underbrace{((6x+18)+1)}_{\text{سطر اول و ستون دوم}} + \underbrace{3(18-x)}_{\text{سطر اول و ستون سوم}} = 43$$

$$2x^2+6x+6-6x-19+54-3x=43 \Rightarrow 2x^2-3x-2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-2)=9+16=25$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1=2 \ , \ x_2=-\frac{1}{2}$$

۴ـ گزینه «۳» باید حاصل‌ضرب ماتریس A در ترانهاده آن یعنی A^T را مساوی ماتریس واحد I قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & c & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & a \\ c & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c^2+1 & c & \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{b}{2} \\ c & 1 & 0 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{b}{2} & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به تساوی دو ماتریس نتیجه می‌گیریم:

$$c=0$$

$$a^2+b^2=1 \ , \ \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{b}{2}=0 \xrightarrow{\times 2} a\sqrt{3}+b=0 \Rightarrow b=-a\sqrt{3} \xrightarrow[\text{مساویش را قرار می‌دهیم}]{\text{به جای b در تساوی } a^2+b^2=1}$$

$$a^2+(-a\sqrt{3})^2=1 \Rightarrow a^2+3a^2=1 \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a^2+c^2=\frac{1}{4}$$

۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم اعدادی بر ۶ بخش‌پذیر هستند که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشند. ابتدا ۱۲ جایگاه در نظر می‌گیریم. برای اینکه عدد موردنظر بر ۶ بخش‌پذیر باشد و از دو طرف نیز یکسان خوانده شود، به اجبار باید جایگاه اول و آخر را با عدد ۲ پر کنیم.

$$\underline{2}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ |\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{2}$$

اکنون کافی است اعداد ۱ و ۲ را در پنج جایگاه در یک سمت خط قرمز بچینیم، به‌گونه‌ای که عدد در یک طرف خط قرمز بر ۳ بخش‌پذیر باشد و دقیقاً همین چیدمان را در سمت دیگر خط قرمز انجام می‌دهیم.

می‌توانیم کلیه جایگاه‌ها را با عدد ۲ پر کنیم، که این کار به یک طریق انجام‌پذیر است. تنها ترکیب ممکن دیگر برای این ۵ جایگاه، دو تا عدد ۲ و سه تا عدد ۱ است تا جمع آنها همراه با عدد ۲ که از قبل داشتیم بر ۳ بخش‌پذیر باشد و چیدمان آن‌ها به $\frac{5!}{2!3!}=10$ طریق امکان دارد و در کل $(1+10)$ عدد با شرایط خواسته شده می‌توان ساخت.

۶ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه چندجمله‌ای داده شده از درجه فرد می‌باشد، پس این معادله حداقل یک ریشه را دارد، همچنین با توجه به اینکه هرچند جمله‌ای درجه n، دقیقاً n ریشه دارد، پس این معادله دارای ۵ ریشه است. (که این ریشه‌ها حقیقی و مختلط می‌توانند باشند.) با توجه به اینکه ضرایب چندجمله‌ای حقیقی هستند، این معادله هر ریشه مختلطی داشته باشد، مزدوج آن هم‌ریشه معادله می‌باشد. پس این معادله دارای یک ریشه حقیقی و ۴ ریشه مختلط که مزدوج یکدیگر می‌باشند است و مجموع قسمت‌های موهومی هر ۵ ریشه برابر صفر می‌باشد.

۷ـ گزینه «۳» **روش اول:** با توجه به زوج بودن فرجه رادیکال را زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$25-16x^2\ge 0 \Rightarrow 16x^2\le 25 \Rightarrow x^2\le\frac{25}{16} \Rightarrow -\frac{5}{4}\le x\le\frac{5}{4}$$

از طرفی باید $-1\le\frac{\sqrt{25-16x^2}}{3x}\le 1$ باشد، یعنی داریم:

$$\left|\frac{\sqrt{25-16x^2}}{3x}\right|\le 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{25-16x^2}}{3|x|}\le 1 \xrightarrow[x>0]{\times 3|x|} \sqrt{25-16x^2}\le 3|x| \Rightarrow 25-16x^2\le 9x^2 \Rightarrow x^2\ge 1 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \text{یا} \\ x\le -1\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها داریم:
$$x\in[-\frac{5}{4},-1]\cup[1,\frac{5}{4}]$$

روش دوم: با توجه به گزینه‌ها دامنه تابع را به دست می‌آوریم به ازای $x=2$ زیر رادیکال برابر $\sqrt{25-64}$ می‌شود و این غیرقابل قبول است پس گزینه‌هایی که شامل عدد ۲ می‌باشند حذف می‌شوند، یعنی گزینه‌های (۱) و (۴).

به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ عبارت جلوی Arcsin برابر $\frac{\sqrt{21}}{1/5}\simeq\frac{\sqrt{25-4}}{3(\frac{1}{2})}$ می‌شود. که این مقدار بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد و قابل قبول نمی‌باشد، بنابراین گزینه (۲) هم که شامل عدد $\frac{1}{2}$ می‌باشد، حذف می‌شود.

۸ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه $\lim\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))=\int_0^1 f(x)\,dx$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{4}{n})}+\cdots\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n}}+\cdots\right)=\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx\xrightarrow[2dx=du]{1+2x=u}\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}u=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+2x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}3)$$

۹ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $[u]\underset{u\to\infty}{\sim}u$ می‌باشد، وقتی $x\to 0$، آنگاه $\frac{1}{x}\to\infty$ می‌توانیم از همه جزء صحیح‌ها صرف‌نظر کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to 0}x^n(\frac{1}{x}\times\frac{1}{2x}\times\ldots\times\frac{1}{nx})=\lim_{x\to 0}x^n(\frac{1}{n!x^n})=\frac{1}{n!}$$

۱۰ـ گزینه «۲» باید ریشه‌های مخرج را ابتدا به‌دست آوریم، چون فرجه رادیکال‌ها زوج است. بنابراین این ریشه‌ها زیر رادیکال‌ها را نباید منفی کنند.

$$4-x^2=0\to x^2=4\to x=\pm 2\ (\text{غ‌ق‌ق})$$
$$1-x^2=0\to x^2=1\to x=\pm 1\ (\text{ق‌ق})$$

پس این تابع فقط ۲ مجانب قائم دارد.

۱۱ـ گزینه «۴» ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$(2+2x)f'(2x+x^2)=6x \qquad (1)$$

چون $f'(0)$ را می‌خواهیم به دست آوریم، پس باید $2x+x^2=0$ باشد و داریم:

$$x(2+x)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-2\xrightarrow{x\in(-\infty,-1)}(\text{ق‌ق})\end{cases} \qquad (2)$$

پس داریم:

$$(2+2(-2))f'(0)=6(-2) \Rightarrow -2f'(0)=-12 \Rightarrow f'(0)=6$$

۱۲ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از مشتق توابع پارامتری $\frac{dy}{dx}$ را بیابیم و سپس دوباره از آن مشتق بگیریم تا به $\frac{d^2y}{dx^2}$ برسیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+1}{2t}\Rightarrow\frac{d\left(\frac{2t+1}{2t}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{2t+1}{2t}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-2}{4t^2}}{2t}=\frac{-2}{8t^3}\xrightarrow{t=1}\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

۱۳ـ گزینه «۳» طول نقطه عطف مشتق دوم تابع را صفر می‌کند پس برای پیدا کردن طول نقطه عطف کافی است، معادله $y''=0$ را حل کنیم:

$$y'=3x^2+6x-1\Rightarrow y''=6x+6=0\Rightarrow x=-1$$

اکنون عرض نقطه عطف را می‌یابیم و سپس معادله خط گذرنده از منحنی در نقطه عطف را با شیب $y'(-1)=-4$ می‌نویسیم:

$$f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+1+a=-1+3+1+a=a+3$$

معادله خط گذرنده از نقطه عطف به مختصات $(-1\,,\,a+3)$ برابر است با:

$$y-a-3=-4(x+1)\xrightarrow{\text{مبدأ}\,(0,0)}0-a-3=-4\Rightarrow a=1$$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا باید کسر داده شده را تجزیه و تفکیک کنیم و سپس از بسط مک‌لورن استفاده کنیم:

$$f(x)=\frac{x+5}{-(x-1)(x+2)}=\frac{-x-5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\begin{cases}A+B=-1\\2A-B=-5\end{cases}\Rightarrow 3A=-6\Rightarrow A=-2\,,\;B=1$$

پس داریم:

$$f(x)=\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}+\frac{2}{1-x}$$

با توجه به رابطه $\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1}{1-x}$ داریم:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^k+2\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{2^{k+1}}+2x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)x^k\;\text{باید}\xrightarrow{k=21}2-\frac{1}{2^{22}}=\frac{2^{23}-1}{2^{22}}$$

۱۵ـ گزینه «۱» با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$f'(x)=1\times\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sin x-\sin\frac{x}{2}}{x}$$

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا تابع زیر انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و سپس با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء جدولی داریم:

$$\int(4t+4)e^{-2t}dt$$

$\oplus$ $4t+4$	e^{-2t}
$\ominus$ 4	$-\frac{1}{2}e^{-2t}$
0	$\frac{1}{4}e^{-2t}$

$$\Rightarrow \text{حاصل}=\left((4t+4)\left(\frac{-e^{-2t}}{2}\right)-e^{-2t}\right)\Big|_0^1$$

$$=(-4e^{-2}-e^{-2})-(-2e^{0}-e^{0})=-5e^{-2}-(-3)=3-\frac{5}{e^2}=\frac{3e^2-5}{e^2}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

$$\frac{(x^2+4)(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}$$

چون مقدار A_2 را می‌خواهیم بیابیم، باید دو طرف تساوی را در مخرج A_2 یعنی $(x-1)^2$ ضرب کنیم و سپس به جای x مقدار $x=1$ را قرار دهیم.

$$\frac{(x^2+4)(x+2)}{(x+1)^2}=0+\frac{A_2(x-1)^2}{(x-1)^2}+0+0\Rightarrow\xrightarrow{x=1}\frac{(1+4)(1+2)}{(1+1)^2}=A_2\Rightarrow A_2=\frac{15}{4}$$

۱۸ـ گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $1+\cos^2x=u$ داریم:

$$(-2\cos x\sin x)\,dx=du\Rightarrow-\sin 2x\,dx=du$$

$$-\int\frac{du}{u}=-\mathrm{Ln}\,u=-(\mathrm{Ln}(1+\cos^2x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(\mathrm{Ln}(1)-\mathrm{Ln}(1+1))=-(0-\mathrm{Ln}2)=\mathrm{Ln}2$$

توجه داشته باشید که $\sin 2x=2\sin x\cos x$ می‌باشد.

۱۹ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ می‌باشد، داریم:

$$\log_۴^x + ۲(\frac{۱}{\log_۴^x}) - ۳ = ۰ \xrightarrow{\log_۴^x = t} t + \frac{۲}{t} - ۳ = ۰ \xrightarrow{\times t} t^۲ - ۳t + ۲ = ۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \to \log_۴^x = ۱ \Rightarrow x = ۴ \\ t = ۲ \to \log_۴^x = ۲ \Rightarrow x = ۱۶ \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر ۲۰ می‌باشد.

۲۰ـ گزینه «۳» ابتدا $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به‌دست می‌آوریم تا قسمت دوم که فاقد x می‌باشد مشتق آن صفر شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + ۰ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \xrightarrow{(۰,۱)} \cos(۰) - ۰ = ۱$$

۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial z}{\partial y}$ را می‌یابیم و سپس از روی آن $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$ را به دست می‌آوریم و در رابطه خواسته شده قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + f'(x^۲ + y) \Rightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = ۱ + ۲xf''(x^۲ + y), \ \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = f''(x^۲ + y)$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $۱ + ۲xf''(x^۲ + y) - ۲xf''(x^۲ + y) = ۱$

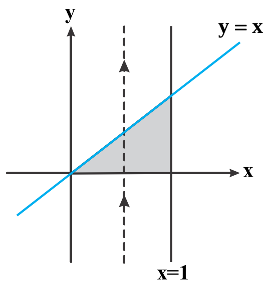
۲۲ـ گزینه «۱» با استفاده از روش به‌دست آوردن اکسترمم توابع مقیّد و با استفاده از قید $x + y = ۴$ داریم:

$$\frac{۲x + ۲y}{۱} = \frac{۴y + ۲x}{۱} \Rightarrow ۲y = ۴y \Rightarrow y = ۰ \xrightarrow{x+y=۴} x = ۴$$

پس مقدار اکسترمم تابع به ازای نقطه (۴,۰) به‌دست می‌آید: $f(۴,۰) = (۴)^۲ + ۰ + ۰ = ۱۶$

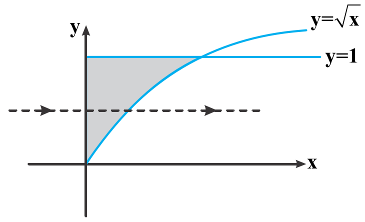
۲۳ـ گزینه «۴» ابتدا باید ناحیه انتگرال‌گیری را مشخص کنیم.

خط فرضی را موازی محور y ها رسم می‌کنیم تا ورود و خروج آن به ناحیه D مشخص شود.



$$I = \int_۰^۱ \int_۰^x xy\,dy\,dx = \int_۰^۱ x(\frac{y^۲}{۲})_۰^x dx = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ x^۳ dx = \frac{۱}{۲}(\frac{x^۴}{۴})_۰^۱ = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۸}$$

۲۴ـ گزینه «۲» ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنیم و با توجه به اینکه انتگرال داده شده نسبت به y قابل حل نمی‌باشد، باید ابتدا المان داخلی را dx قرار دهیم و داریم:



$$I = \int_۰^۱ \int_۰^{y^۲} e^{y^۳} dx\,dy = \int_۰^۱ e^{y^۳}(x)_۰^{y^۲} dy = \int_۰^۱ y^۲ e^{y^۳} dy \xrightarrow[۳y^۲dy = du]{y^۳ = u} \frac{۱}{۳}\int e^u du$$

$$= \frac{۱}{۳}e^u = \frac{۱}{۳}(e^{y^۳})_۰^۱ = \frac{۱}{۳}(e - ۱) = \frac{e - ۱}{۳}$$

۲۵ـ گزینه «۱» ابتدا پاسخ همگن را به دست می‌آوریم: $D^۲ - ۴D + ۴ = ۰ \Rightarrow (D - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow D = ۲$ ریشه مضاعف $\Rightarrow y_h = c_۱e^{۲x} + c_۲xe^{۲x}$

با توجه به پاسخ همگن، پاسخ خصوصی به فرم $y_p = Ax^۲e^{۲x}$ خواهد بود. y_p را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y_p'' - ۴y_p' + ۴y_p = ۳e^{۲x} \Rightarrow (۲Ae^{۲x} + ۸Axe^{۲x} + ۴Ax^۲e^{۲x}) - ۴(۲Axe^{۲x} + ۲Ax^۲e^{۲x}) + ۴Ax^۲e^{۲x} = ۳e^{۲x}$$

$$\Rightarrow ۲Ae^{۲x} = ۳e^{۲x} \Rightarrow A = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = y_h + y_p = c_۱e^{۲x} + c_۲xe^{۲x} + \frac{۳}{۲}x^۲e^{۲x}$$

اکنون شرایط اولیه را جایگذاری می‌کنیم:

$$y(۰) = ۱ \Rightarrow c_۱ = ۱$$
$$y'(۰) = ۱ \Rightarrow ۲c_۱ + c_۲ = ۱ \Rightarrow c_۲ = -۱$$
$$\Rightarrow y = e^{۲x} - xe^{۲x} + \frac{۳}{۲}x^۲e^{۲x} \Rightarrow y(۲) = e^۴ - ۲e^۴ + ۶e^۴ = ۵e^۴$$

سؤالات آزمون مجموعه مدیریت ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & \beta\\ 0 & 4 & \alpha & 5\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقادیری از α و β، دستگاه $AX=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix}$ جواب منحصر به‌فرد دارد؟

۱) به ازای α و $\beta \neq 0$　　۲) به ازای هر مقدار α و $\beta \in \mathbb{R}$

۳) به ازای $\alpha \neq 0$ و هر مقدار $\beta \in \mathbb{R}$　　۴) بستگی به مقادیر a_1، a_2، a_3 و a_4 دارد.

۲ـ حد دنباله $\{\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$　　۲) π　　۳) ∞　　۴) حد موجود نیست.

۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-}([x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]+\cdots+[x^{20}])$، کدام است؟

۱) -10　　۲) صفر　　۳) 10　　۴) 20

۴ـ فرض کنید $(1,-1)$ مختصات نقطه عطف تابع $y=ax^3+bx^2+2$ باشد، در کدام نقطه، تابع f ماکزیمم نسبی است؟

۱) $(-2,0)$　　۲) $(0,-2)$　　۳) $(0,2)$　　۴) $(2,0)$

۵ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{4}$ و منحنی $g(x)=\frac{8}{x^2+4}$، کدام است؟

۱) $\pi-\frac{2}{3}$　　۲) $\pi+\frac{2}{3}$　　۳) $2\pi-\frac{4}{3}$　　۴) $2\pi+\frac{4}{3}$

۶ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{x}\,dx$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) 1　　۴) 2

۷ـ برد تابع $y=\operatorname{Ln}\sqrt{\frac{x^4}{x^4+1}}$، کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$　　۲) $(-\infty,0)$　　۳) $(0,\infty)$　　۴) $(-\infty,+\infty)$

۸ـ اگر $f(\frac{1}{x})=2^x$ باشد، معادله خط مجانب مایل تابع $h(x)=\frac{x}{f(x)}$، کدام است؟

۱) $y=x+\operatorname{Ln}2$　　۲) $y=-x+\operatorname{Ln}2$　　۳) $y=-x-\operatorname{Ln}2$　　۴) $y=x-\operatorname{Ln}2$

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که یک دستگاه معادلات خطی در صورتی جواب منحصر به فرد دارد که ماتریس ضرایب معکوس‌پذیر باشد (دترمینان آن صفر نباشد)، کافی است دترمینان ماتریس A را بررسی کنیم؛ از طرفی با توجه به این‌که این ماتریس بالامثلثی است، دترمینان آن برابر حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی خواهد بود که فارغ از مقادیر α و β مساوی -84 است. پس این دستگاه همواره جواب منحصر به فرد خواهد داشت.

۲ـ گزینه «۱» با توجه به هم‌ارزی $\sin u \overset{u\to 0}{\sim} u$ به راحتی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}\times\frac{\pi}{n}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2}{2n^2}=\frac{\pi}{2}$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا چند جمله اول عبارت درون پرانتز را به ازای $x\to 0^-$ بررسی می‌کنیم. با فرض اینکه $x=-\varepsilon$ باشد که $\varepsilon\to 0$، $\varepsilon>0$ است، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^-}\lfloor x\rfloor=\lim_{\varepsilon\to 0}\lfloor -\varepsilon\rfloor=\lfloor -0^+\rfloor=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\lfloor x^2\rfloor=\lim_{\varepsilon\to 0}\lfloor (-\varepsilon)^2\rfloor=\lfloor 0^+\rfloor=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\lfloor x^3\rfloor=\lim_{\varepsilon\to 0}\lfloor (-\varepsilon)^3\rfloor=\lfloor -0^+\rfloor=-1$$

با توجه به روند اخیر می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor x^{2n}\rfloor=\lfloor 0^+\rfloor=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor x^{2n+1}\rfloor=\lfloor 0^-\rfloor=-1$ و با توجه به اینکه حد داده شده از حاصل ۱۰ عبارت با توان زوج x و ۱۰ عبارت با توان فرد x تشکیل شده است، پس داریم: $L=10(0)+10(-1)=-10$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه نقطه مورد نظر نقطه عطف یک تابع چندجمله‌ای است، علاوه بر این‌که در معادله تابع صدق می‌کند، مشتق دوم در این نقطه حتماً صفر خواهد بود. یعنی داریم:

$$y = ax^3 + bx^2 + 2 \xrightarrow{(-1,1)} 1 = -a + b + 2 \Rightarrow a - b = 1 \quad (1)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow y'' = 6ax + 2b \xrightarrow{(-1,1)} 0 = -6 + 2b \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(1)} a = 4$$

پس تابع به صورت $y = 4x^3 + 3x^2 + 2$ است و برای پیدا کردن نقاط اکسترمم داریم:

$$y' = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -\frac{1}{2}$$

نیازی به بررسی نوع نقاط اکسترمم نیست، زیرا در بین این ۲ نقطه فقط $x = 0$ در گزینه‌ها وجود دارد که به ازای آن $y = 2$ است.

۵ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط برخورد ۲ تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow (x^2)^2 + 4x^2 - 32 = 0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+8) = 0 \Rightarrow x = -2, 2$$

حالا کافی است قدرمطلق حاصل انتگرال $\int_{-2}^{2}[f(x) - g(x)]dx$ را محاسبه کنیم:

$$I = \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{8}{x^2+4}\right)dx = 2\int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{8}{x^2+4}\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{12} - \frac{8}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)_0^2 = 2\left(\frac{8}{12} - 4\tan^{-1}1\right) = 2\left(\frac{2}{3} - 4\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3} - 2\pi \Rightarrow S = 2\pi - \frac{4}{3}$$

۶ـ گزینه «۴» برای حل این انتگرال ابتدا از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ کمک می‌گیریم:

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(2tdt) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$$

انتگرال به‌دست آمده را با جدول جزء به جزء حل می‌کنیم:

$+\ t$	$\sin t$
$-\ 1$	$-\cos t$
0	$-\sin t$

$$I = 2\left(-t\cos t + \sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2[(0+1) - (0+0)] = 2$$

۷ـ گزینه «۲» به راحتی با روش مستقیم محاسبه برد خواهیم داشت:

$$y = Ln\sqrt{\frac{x^4}{x^4+1}} = \frac{1}{2}Ln\frac{x^4}{x^4+1} \xrightarrow{x\in\mathbb{R}} e^{2y} = \frac{x^4}{x^4+1} \Rightarrow e^{2y}x^4 + e^{2y} = x^4 \Rightarrow x^4(1-e^{2y}) = e^{2y} \Rightarrow x^4 = \frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} \geq 0$$

$$\xrightarrow{e^{2y}>0} 1 - e^{2y} > 0 \Rightarrow e^{2y} < 1 \Rightarrow 2y < Ln1 \Rightarrow y < 0$$

۸ـ گزینه «۴» ابتدا معادله تابع $f(x)$ را با تغییر متغیر $\frac{1}{x} = t$ در تابع داده شده محاسبه کرده و سپس تابع $h(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^x \xrightarrow{\frac{1}{x}=t \Rightarrow x=\frac{1}{t}} f(t) = 2^{\frac{1}{t}} \Rightarrow f(x) = 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow h(x) = \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}}}$$

حالا با فرض اینکه $y = ax + b$ خط مجانب مایل این تابع باشد، خواهیم داشت:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2^0} = 1 \quad , \quad b = \lim_{x\to\infty}[h(x) - ax] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}} - x\right] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} - 1\right]$$

حد به دست آمده به فرم $0 \times \infty$ مبهم است. برای رفع ابهام از این حد به صورت مقابل عمل می‌کنیم: $2^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln 2}$; $e^u \overset{u\to 0}{\sim} 1 + u$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}\right) \sim \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1 - (1 + \frac{1}{x}Ln2)}{2^{\frac{1}{x}}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-Ln2}{2^{\frac{1}{x}}} = -Ln2 \Rightarrow y = x - Ln2$$

سؤالات آزمون مجموعه حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ در یک تصاعد هندسی، مجموع شش جمله اول $\frac{16}{125}$ برابر مجموع سه جمله اول آن است. قدر نسبت این تصاعد، چند است؟

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲ـ هرگاه $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشد، بردار عمود بر بردارهای $(2\vec{a} + \vec{b})$ و $(\vec{a} - 2\vec{b})$، کدام است؟

۱) $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ۲) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ۴) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$

۳ـ برد تابع $f(x) = \sqrt{\frac{4}{3} - \mathrm{Ln}\sqrt[3]{x^2} + e}$، کدام است؟

۱) $[0, 1]$ ۲) $\left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ ۳) $\left[0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ ۴) $[0, 2]$

۴ـ مقدار دترمینان ماتریس $\begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{36} & \mathrm{tg}\frac{\pi}{36} & -\cos\frac{\pi}{36} \\ \cos\frac{\pi}{36} & 1 & \sin\frac{\pi}{36} \\ \cos\frac{\pi}{36} & 1 & \mathrm{tg}\frac{\pi}{36} \end{vmatrix}$، کدام است؟

۱) $\sin\frac{\pi}{12} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{36}\sin\frac{\pi}{36}$ ۲) $\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{36}\sin\frac{\pi}{18}$ ۳) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{36}\cos\frac{\pi}{18}$ ۴) صفر

۵ـ حد دنباله $\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$، کدام است؟

۱) -3 ۲) $-2/29$ ۳) $2/99$ ۴) 3

۷ـ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} [-x] & 0 < x \leq 2 \\ -x & -2 < x \leq 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$ ، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸ـ در خصوص نقاط بحرانی تابع دو متغیره $z = x^3 - y^3 - 3x^2 - 9x + 3y$، کدام مورد درست است؟

۱) دارای یک نقطه زینی، یک ماکزیمم و یک مینیمم است.
۲) دارای دو نقطه زینی، یک ماکزیمم و یک مینیمم است.
۳) دارای یک نقطه زینی، دو ماکزیمم و یک مینیمم است.
۴) دارای یک نقطه زینی، یک ماکزیمم و دو مینیمم است.

۹ـ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$، مقدار $f'(1)$ موجود است. مقادیر a و b کدام‌اند؟

۱) $b = -1$, $a = 4$ ۲) $b = -2$, $a = 4$ ۳) $b = -2$, $a = -4$ ۴) $b = -1$, $a = -4$

۱۰ـ در شرایط انحصاری مقدار فروش و قیمت متناظر آن به‌وسیله توابع تقاضای $y = 14 - x - \frac{x^2}{3}$ و هزینه نهایی $Mc = 4 + x$ به گونه‌ای تعیین می‌گردد که سود حداکثر شود. در این شرایط، مازاد مصرف‌کننده کدام است؟

۱) $\frac{34}{9}$ ۲) $\frac{34}{3}$ ۳) $\frac{64}{3}$ ۴) $\frac{226}{9}$

۱۱ـ فرض کنید تابع هزینه به‌صورت $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax$ باشد. اگر تابع متوسط هزینه دارای مینیمم ۲۴ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۲ـ افزایش سود سالانه یک شرکت ۱۷ درصد است. اگر سود فعلی شرکت ده میلیون ریال باشد، این شرکت برای به‌دست آوردن سود ۲۵ میلیون ریال، چند سال زمان لازم دارد؟

۱) $\frac{\mathrm{Ln}1/17}{\mathrm{Ln}2/5}$ ۲) $\frac{\mathrm{Ln}2/5}{1/17\mathrm{Ln}0/83}$ ۳) $\frac{\mathrm{Ln}25}{\mathrm{Ln}10}$ ۴) $\frac{\mathrm{Ln}2/5}{\mathrm{Ln}1/17}$

۱۳ـ مقدار $\int x^3 Ln2x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}x^4 Ln2x+\frac{1}{16}x^4+c$
۲) $\frac{1}{4}x^4 Ln2x-\frac{1}{16}x^4+c$
۳) $\frac{1}{16}x^4 Ln2x-\frac{1}{4}x^4+c$
۴) $\frac{1}{16}x^4 Ln2x+\frac{1}{4}x^4+c$

۱۴ـ مساحت محصور بین نمودار $f(x)=(x-1)(x+3)$ و محورهای مختصات در ربع چهارم، برابر کدام مورد است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{13}{3}$

۱۵ـ حاصل عبارت مختلط $(\frac{\sqrt{2}}{-1+i\sqrt{3}})^{12}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{128}(1+\sqrt{3}i)$
۲) $\frac{-1}{128}(1+\sqrt{3}\ i)$
۳) $\frac{-1}{64}(1+\sqrt{3}\ i)$
۴) $\frac{1}{64}(1+\sqrt{3}\ i)$

پاسخنامه آزمون مجموعه حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» سؤال غلط تایپی دارد. با توجه به رابطه مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow \frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\frac{16}{125}\Rightarrow q^3=-\frac{109}{125}$$

حالا به این مشکل برمی‌خوریم که مخرج این کسر دارای ریشه سوم ۵ است، ولی صورت این کسر ریشه صحیح ندارد. پس هیچ‌یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. ولی با کمی مهندسی معکوس به نظر می‌رسد طراح محترم عدد $\frac{61}{125}$ در صورت سؤال بوده است که در این صورت $q^3=-\frac{64}{125}$ و $q=-\frac{4}{5}$ خواهد بود و گزینه (۲) صحیح است (سازمان سنجش نیز این گزینه را صحیح اعلام کرده است!).

۲ـ گزینه «۱» ابتدا بردارهای مورد اشاره را تشکیل می‌دهیم:

$$2\vec{a}+\vec{b}=(-6+1,4+1,-4-1)=(-5,5,-5)$$
$$\vec{a}-2\vec{b}=(-3-2,2-2,-2+2)=(-5,0,0)$$

می‌دانیم برداری که بر دو بردار عمود باشد همان ضرب خارجی دو بردار است، پس داریم:

$$\vec{n}=(-5,5,-5)\times(-5,0,0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&5&-5\\-5&0&0\end{vmatrix}=(0,25,25)\,||\,(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه برد این تابع کافی است آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x)=y=\sqrt{\frac{4}{3}-Ln\sqrt[3]{x^2+e}}\xrightarrow{y\geq 0}y^2=\frac{4}{3}-Ln(x^2+e)^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}Ln(x^2+e)\Rightarrow Ln(x^2+e)=4-3y^2\Rightarrow x^2+e=e^{4-3y^2}$$

$$x^2=e^{4-3y^2}-e\geq 0\Rightarrow e^{4-3y^2}\geq e\Rightarrow 4-3y^2\geq 1\Rightarrow y^2\leq 1\xrightarrow{y\geq 0}0\leq y\leq 1$$

۴ـ گزینه «۴» به راحتی با بسط دترمینان ماتریس نسبت به سطر اول داریم:

$$\begin{vmatrix}\sin\frac{\pi}{36}&\tan\frac{\pi}{36}&-\cos\frac{\pi}{36}\\\cos\frac{\pi}{36}&1&\sin\frac{\pi}{36}\\\cos\frac{\pi}{36}&1&\tan\frac{\pi}{36}\end{vmatrix}=\sin\frac{\pi}{36}(\tan\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36})-\tan\frac{\pi}{36}(\cos\frac{\pi}{36}\times\tan\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36}\times\cos\frac{\pi}{36})-\cos\frac{\pi}{36}(\cos\frac{\pi}{36}-\cos\frac{\pi}{36})$$

$$=\sin\frac{\pi}{36}(\tan\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36})-\frac{\sin\frac{\pi}{36}}{\cos\frac{\pi}{36}}\times\cos\frac{\pi}{36}(\tan\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36})=0$$

۵ـ گزینه «۳» برای محاسبه این حد از قضیه ساندویچ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\quad ; \quad 1\le k\le n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\xrightarrow{\approx}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}<L<\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\Rightarrow 1<L<1\Rightarrow L=1$$

۶ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» سؤال غلط تایپی دارد. با توجه به وجود قدرمطلق حد چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-|x-1|}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)-(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)-1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1-|x-1|}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1+(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)+(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)+1}{-1}=-3$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید حد چپ و راست با هم مساوی نیستند و تابع در این نقطه حد ندارد، اما به نظر می‌رسد نظر طراح محترم فقط حد چپ تابع در این نقطه است که در این صورت گزینه (۱) صحیح است (سازمان سنجش نیز گزینه (۱) را صحیح اعلام کرده است!).

۷ـ گزینه «۳» با توجه به وجود ۳ نقطه انفصال بین ضابطه‌ها، وضعیت پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=0=f(-2)\ ;\ \lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}-x=2$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}-x=0=f(0)\ ;\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\lfloor -x\rfloor=\lfloor -0^+\rfloor=-1$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\lfloor -x\rfloor=\lfloor -2^-\rfloor=-2=f(2)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید در هر ۳ نقطه تابع ناپیوسته است.

از طرفی باید نقاط ناپیوستگی هریک از ضابطه‌ها را در بازه تعریف آن‌ها به دست آوریم. می‌دانیم تابع $\lfloor u\rfloor$ در نقاطی که u مقدار صحیح (غیر از ریشه‌های مرتبه زوج تابع u) اختیار می‌کند ناپیوسته است. در بازه $(0,2]$ به جز دو نقطه ۰ و ۲ که قبلاً بررسی کردیم، $x=1$ نیز نقطه ناپیوستگی $\lfloor -x\rfloor$ است. تابع $-x$ در همه‌جای درون بازه‌ی تعریف پیوسته است. پس در کل تابع ۴ نقطه ناپیوستگی دارد.

۸ـ گزینه «۲» ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} z_x=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)=0\ \Rightarrow x=-1,3\\ z_y=-3y^2+3=-3(y^2-1)=-3(y-1)(y+1)=0\ \Rightarrow y=-1,1\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}A(-1,-1)\\B(-1,1)\\C(3,-1)\\D(3,1)\end{array}\right.$$

حالا با کمک مبین دلتا خواهیم داشت:

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2$$

$$\left.\begin{array}{l}z_{xx}=6x-6\\ z_{yy}=-6y\\ z_{xy}=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\Delta_A=(-6-6)(+6)-0=-72\\ \Delta_B=(-6-6)(-6)-0=72\ ;\ z_{xx}=-12\\ \Delta_C=(18-6)(+6)-0=72\ ;\ z_{xx}=12\\ \Delta_D=(18-6)(-6)-0=-72\end{array}\right.$$

پس تابع دو نقطه زینی، یک نقطه مینیمم و یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه مشتق تابع در نقطه $x=1$ موجود است، پس باید در این نقطه پیوسته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x & x\ge1\\ ax+b & x<1\end{cases}\ ,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)\ ,1+1=1+1=a+b\ \Rightarrow a+b=2$$

از طرفی در این نقطه مشتق چپ و راست موجود و با هم برابر هستند:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1\ ; & x\ge1\\ a\ ; & x<1\end{cases}$$

$$f'(1^+)=f'(1^-)\ \Rightarrow 3+1=a\Rightarrow a=4\xrightarrow{a+b=2}b=-2$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا تابع سود را می‌نویسیم.

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

با توجه به اینکه تابع درآمد $(R(x))$ حاصل‌ضرب تابع قیمت تقاضا در تعداد کالا است، داریم:

$$R(x)=xy=x(14-x-\frac{x^2}{3})=14x-x^2-\frac{x^3}{3}$$

حالا برای اینکه تابع سود طبق گفته سؤال حداکثر شود، از آن مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم. توجه داشته باشید که مشتق تابع هزینه همان تابع هزینه نهایی خواهد بود و داریم:

$$P'(x)=R'(x)-\underbrace{C'(x)}_{Mc}=14-2x-x^2-(4+x)=10-3x-x^2=(5+x)(2-x)=0\xrightarrow{x>0}x_e=2\Rightarrow y_e=\frac{32}{3}$$

با توجه به مقادیر نقطه تعادل و رابطه مازاد مصرف‌کننده خواهیم داشت:

$$CS=\int_0^{x_e}(y-y_e)\,dx=\int_0^2(14-x-\frac{x^2}{3}-\frac{32}{3})\,dx=(\frac{10}{3}x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9})_0^2=\frac{20}{3}-\frac{4}{2}-\frac{8}{9}=\frac{34}{9}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه تابع متوسط هزینه (که با متوسط تابع هزینه تفاوت دارد) خواهیم داشت:

$$AC=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-4x^2+ax}{x}=x^2-4x+a\rightarrow\frac{dAC}{dx}=2x-4=0\Rightarrow x=2\rightarrow AC=2^2-4(2)+a=24\Rightarrow a=28$$

۱۲ـ گزینه «۴» به راحتی با کمک رابطه سود تصاعدی داریم:

$$p_n=(1+r)^n p_0\Rightarrow 25=(1+0/17)^n 10\Rightarrow 1/17^n=\frac{25}{10}=2/5\xrightarrow{Ln}Ln1/17^n=Ln2/5\Rightarrow nLn1/17=Ln2/5\Rightarrow n=\frac{Ln2/5}{Ln1/17}$$

۱۳ـ گزینه «۲» برای حل این انتگرال از روش جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

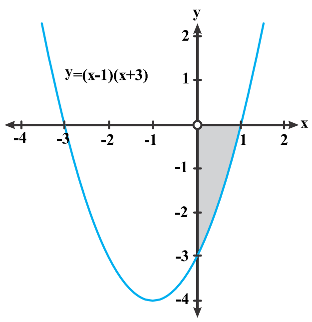
$$I=\int x^3 Ln2x\,dx$$

$$u=Ln2x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}\quad,\quad x^3dx=dv\Rightarrow\frac{x^4}{4}=v$$

$$I=\frac{x^4}{4}Ln2x-\int\frac{x^4}{4}\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}x^4Ln2x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4Ln2x-\frac{1}{16}x^4+c$$

۱۴ـ گزینه «۳»

با توجه به شکل تابع واضح است که باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:



$$S=\int_0^1[0-(x-1)(x+3)]dx=-\int_0^1(x^2+2x-3)\,dx$$

$$=-(\frac{x^3}{3}+x^2-3x)_0^1=-(\frac{1}{3}+1-3)=\frac{5}{3}$$

۱۵ـ «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» جواب صحیح وجود ندارد. کافی است عدد مختلط در مخرج را به فرم قطبی بنویسیم. در این صورت داریم:

$$-1+i\sqrt{3}=\sqrt{1+3}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{-1+i\sqrt{3}})^{12}=(\frac{\sqrt{2}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}})^{12}=(\frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}})^{12}=\frac{1}{2^6}e^{-i8\pi}=\frac{1}{64}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید جواب صحیح در بین گزینه‌ها وجود ندارد، اما سازمان سنجش گزینه (۲) را صحیح اعلام کرده است!

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ فرض کنید $z = 5 + i\sqrt{11}$. مقدار $\left|\dfrac{z+2}{z-2}\right|$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$
۲) $\sqrt{3}-1$
۳) $\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{3}$

۲ـ دامنهٔ تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln(x^2-4)}{\sqrt[3]{|x|-3}}$، کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$
۲) $(3,+\infty)$
۳) $(2,3)\cup(3,+\infty)$
۴) $[2,3)\cup(3,+\infty)$

۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}$
۲) $\dfrac{1}{2}$
۳) $\dfrac{2}{3}$
۴) ۱

۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x + 2x)^{\frac{1}{x}}$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) e
۴) e^2

۵ـ فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و $g(x) = \sin x + \cos x\,;\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. اگر $f(g(x)) = \sqrt{1+x}$، آنگاه $f'(1)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
۲) $\dfrac{1}{2}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

۶ـ ضریب x^2 در بسط مک‌لورن تابع $\sqrt[3]{1+x}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{9}$
۲) $\dfrac{1}{9}$
۳) $-\dfrac{1}{9}$
۴) $-\dfrac{2}{9}$

۷ـ اگر $x^3 + y^3 = xy + 1$ و در همسایگی $(1,1)$، y تابعی از x باشد، مقدار $y''(1)$، کدام است؟

۱) -7
۲) −۳/۵
۳) -1
۴) ۳/۵

۸ـ تعداد نقاطی که تابع $f(x) = (x^2-1)(x^4-1)(x^8-1)$ در آن اکسترمم نسبی باشد، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۹ـ رویهٔ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ در کدام نقطه، مینیمم نسبی است؟

۱) $(0,0)$
۲) $(1,1)$
۳) $(1,0)$
۴) $(-1,1)$

۱۰ـ فرض کنید $f(x,y,z) = x\cos(y) - y\sin(z) + ze^{xy}$، مقدار $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1,0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(1,1,0) + \sin(1)$ کدام است؟

۱) -1
۲) ۱
۳) $e-1$
۴) $e+1$

۱۱ـ فرض کنید $G(x) = \int_0^x xe^{-t^2}dt$، مقدار $G'(1) - G(1)$، کدام است؟

۱) صفر
۲) $\dfrac{1}{2e}$
۳) $\dfrac{1}{e}$
۴) $\dfrac{e}{2}$

۱۲ـ مقدار $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x - 1}\,dx$، کدام است؟

۱) $2+\dfrac{\pi}{2}$
۲) $1+\dfrac{\pi}{4}$
۳) $2-\dfrac{\pi}{2}$
۴) $1-\dfrac{\pi}{4}$

۱۳ـ فرض کنید $I = \int_0^1 \dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$، کدام مورد، درست است؟

۱) $I < \dfrac{1}{2}$
۲) $\dfrac{1}{2} < I < 1$
۳) $I = 1$
۴) $I > 1$

۱۴ـ تابع هزینهٔ نهایی یک واحد تولیدی به‌صورت $f(x) = (x-1)(x+2)$ است. اگر هزینه کل در سال اول برابر ۱۰ هزار واحد پول باشد، هزینهٔ کل تولید در سال دوم، تقریباً چند هزار واحد پول است؟

۱) ۴
۲) ۱۱/۸۳
۳) ۱۳/۸۳
۴) ۴۰

۱۵ـ مساحت ناحیهٔ محدود به سهمی $y^2 = 2x - 2$ و خط $y = x - 5$، کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۷
۳) ۱۸
۴) ۸

۱۶ـ اگر $A \neq 0$ یک ماتریس $n\times n$ باشد، کدام مورد نادرست است؟ (A' ترانهادهٔ ماتریس A است.)

۱) $A+A'$ متقارن است.　۲) $A'A$ متقارن است.　۳) AA' متقارن است.　۴) $A-A'$ متقارن است.

۱۷ـ دترمینان ماتریس $\begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 4 & 3 & x \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ صفر است. بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که x می‌تواند از عناصر آن انتخاب شود، کدام است؟

۱) $\{0\}$　۲) $\{0,7\}$　۳) $\{0,-1\}$　۴) $\{0,-1,7\}$

۱۸ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقدار α دستگاه $AX=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$ به ازای هر $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$، جواب منحصربه‌فرد دارد؟

۱) $\alpha \neq 0$　۲) به ازای هر مقدار α

۳) بستگی به مقدار β دارد.　۴) بستگی به مقادیر a_1,a_2,a_3,a_4 دارد.

۱۹ـ فرض کنید $\vec{V}_1=(-1,4,5)$، $\vec{V}_2=(2,1,3)$، $\vec{V}_3=(1,-1,1)$ و $\alpha\vec{V}_1+\beta\vec{V}_2+\gamma\vec{V}_3=(1,1,1)$. مقدار γ، کدام است؟

۱) $\frac{14}{15}$　۲) $\frac{11}{15}$　۳) $-\frac{7}{15}$　۴) $-\frac{11}{15}$

۲۰ـ حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ دو برابر حاصل‌جمع مقادیر ویژهٔ آن است. مقدار a، کدام است؟

۱) -9　۲) $-\frac{1}{9}$　۳) $\frac{1}{9}$　۴) 9

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

۱ـ گزینه «۴» به راحتی با تشکیل عبارت کسری و محاسبه اندازه عدد مختلط حاصل داریم:

$$\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = \left|\frac{7+i\sqrt{11}}{3+i\sqrt{11}}\right| = \frac{\sqrt{49+11}}{\sqrt{9+11}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{20}} = \sqrt{3}$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به قواعد مربوط به دامنه انواع مختلف توابع، در تابع اصلی داده شده داریم:

$$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \qquad (1)$$

$$x^2-4>0 \Rightarrow x^2>4 \overset{(1)}{\Rightarrow} x>2 \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{|x|-3} \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} x \neq 3 \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow D_f = (2,3)\cup(3,+\infty)$$

۳ـ گزینه «۱» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. در نتیجه به راحتی با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{2x-2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{4+5}}}{4-2} = \frac{1}{3}$$

۴ـ گزینه «۴» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه به راحتی با استفاده از هم‌ارزی $u^v \underset{v\to\infty}{\overset{u\to 1}{\sim}} e^{v(u-1)}$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x+2x)^{\frac{1}{x}} \sim \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}(\cos x+2x-1)} \sim \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}(1-\frac{1}{2}x^2+2x-1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2}x+2} = e^2$$

۵ـ گزینه «۲» **روش اول:** ابتدا از تابع ترکیبی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(g(x)) = \sqrt{1+x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} g'(x)f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

حالا قرار می‌دهیم $g(x)=1$ و معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$g(x)=\sin x+\cos x = 1 \xrightarrow{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} x=0$$

$$g'(0)f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2g'(0)}$$

$$g'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow g'(0)=1 \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

روش دوم: ابتدا از تابع ترکیبی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(g(x))=\sqrt{1+x}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}g'(x)f'(g(x))=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

حالا قرار می‌دهیم $g(x)=1$ و معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$g(x)=\sin x+\cos x=1\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{=1}+2\sin x\cos x=1\Rightarrow 2\sin x\cos x=\sin 2x=0\xrightarrow{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}x=0$$

حالا با جایگذاری در مشتق تابع ترکیبی داریم:

$$g'(0)f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2g'(0)}$$

$$g'(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow g'(0)=1\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

۶ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه بسط مک‌لورن یا همان هم‌ارزی برنولی تابع داده شده داریم:

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}\overset{x}{\sim}1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\frac{x^2}{2}+\cdots=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\cdots$$

۷ـ گزینه «۱» با استفاده از مشتق ضمنی از دو طرف رابطه داده شده داریم:

$$x^3+y^3=xy+1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}}3x^2+3y^2y'=y+xy'\xrightarrow{(x,y)=(1,1)}3+3y'=1+y'\Rightarrow y'=-1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}}6x+6y(y')^2+3y^2y''=y'+y'+xy''\xrightarrow{(x,y,y')=(1,1,-1)}6+6+3y''=-2+y''\Rightarrow y''=-7$$

۸ـ گزینه «۲» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم.

روش اول: در اولین گام تابع را ساده می‌کنیم برای این کار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=(x^2-1)(x^4-1)(x^8-1)=(x-1)(x+1)(x^2-1)(x^2+1)(x^4-1)(x^4+1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=(x-1)^3(x+1)^3(x^2+1)(x^4+1)$$

برای حل سؤال از قضایایی باید کمک بگیریم:

۱ـ در هر چندجمله‌ای بین هر دو ریشه متوالی تابع دقیقاً یک اکسترمم نسبی وجود دارد. پس تا اینجا وجود یک اکسترمم نسبی برای این تابع قطعی است یعنی بین $x=1$ و $x=-1$ که ریشه‌های تابع هستند یک اکسترمم نسبی داریم.

۲ـ اگر معادله یک تابع دارای حاصل‌ضرب $(x-a)^{2n}$ و $n\in\mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه $x=a$ طول نقطه اکسترمم است ولی اگر تابع دارای حاصل‌ضرب $(x-a)^{2n+1}$ باشد، آن‌گاه $x=a$ طول نقطه عطف است. اما امکان دارد بعضی از داوطلبان این قضایا را حضورذهن نداشته باشند به همین دلیل توضیحات مفصلی در قسمت ذیل ارائه شده است که چرا $x=\pm1$ نقطه اکسترمم نسبی تابع نیست. برای این کار باید ابتدا از تابع مشتق بگیریم:

$$f(x)=(x^2-1)(x^4-1)(x^8-1)\to f'(x)=2x(x^4-1)(x^8-1)+4x^3(x^2-1)(x^8-1)+8x^7(x^4-1)(x^2-1)$$

بعد از مشتق‌گیری باید بررسی کنیم که علامت $f'(x)$ در $x=1$ دارای چه وضعیتی است، برای این کار باید مشخص کنیم که علامت $f'(x)$ به ازای $x=1^+$ و $x=1^-$ به چه صورتی می‌باشد. با توجه به توضیحات داده شده در ابتدا به سراغ $x=1^+$ می‌رویم، در این حالت بهتر است فرض کنیم $1^+=1/1$، واضح است مقدارهای $(1/1^4-1)$، $(1/1^2-1)$ و $(1/1^8-1)$ همواره بزرگ‌تر از صفر است چون جمع سه مقدار بزرگ‌تر از صفر همواره بزرگ‌تر از صفر است، پس نتیجه می‌گیریم مقدار $f'(1/1)$ همواره بزرگ‌تر از صفر است. با فرض $1/1=1^+$ که درنظر گرفتیم نتیجه می‌گیریم $f'(1^+)>0$. در حالت بعدی فرض کنیم $0/99=1^-$، با یک محاسبه ساده مشخص می‌شود که مقدارهای $((0/99)^2-1)$، $((0/99)^4-1)$ و $((0/99)^8-1)$ منفی هستند و فقط مقدارهای $2(0/99)$، $4(0/99)^3$ و $8(0/99)^7$ تماماً بزرگ‌تر از صفر می‌باشند، از طرفی ضرب دو مقدار منفی در یک مقدار مثبت همواره مقداری بزرگ‌تر از صفر است، پس مقدار $f'(0/99)$ همواره بزرگ‌تر از صفر می‌باشد، چون فرض کردیم $0/99=1^-$ نتیجه می‌گیریم $f'(1^-)>0$ چون $f'(1^+)>0$ و $f'(1^-)>0$ پس در همسایگی $x=1$ تغییر علامت نداریم، در نتیجه نمودار تابع $f(x)$ در $x=1$ دارای اکسترمم نمی‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌کنیم که نمودار تابع $f(x)$ در $x=-1$ دارای اکسترمم نیست.

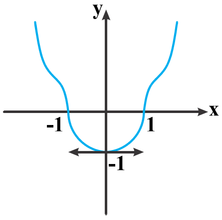
همان‌طورکه از قضیه (۱) نتیجه گرفتیم تابع در بازه $[-1,1]$ یک اکسترمم نسبی دارد. همان‌طور که در ضابطه مشتق تابع می‌بینیم $x=0$ ریشه مشتق است و این نقطه اکسترمم نسبی می‌باشد. برای بررسی بیشتر به شکل زیر عمل می‌کنیم:

برای این‌کار فرض می‌کنیم $x = 0^+ = 0/1$ و نتیجه می‌گیریم به‌ازای $x = 0/1$ مقادیر (x^2-1)، (x^4-1) و (x^8-1) همگی منفی هستند ولی یک جمله‌ای‌های $2x$، $4x^3$ و $8x^7$ تماماً مثبت می‌شوند. با توجه به این‌که ضرب دو مقدار منفی در یک مقدار مثبت همواره مثبت می‌شود، پس مجموع سه‌جمله‌ای‌های ایجاد شده در $f'(x)$ همواره مثبت خواهد بود. به عبارت دیگر $f'(0^+) > 0$ حال فرض می‌کنیم $x = 0^- = -0/01$ و مثل توضیحات بالا عمل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم $f'(0^-) < 0$. به توجه به تغییرات علامت در همسایگی $x = 0$ نتیجه می‌گیریم $x = 0$ یک اکسترمم نسبی برای نمودار تابع $f(x)$ می‌باشد.

روش دوم: در روش اول از دو قضیه استفاده شده است؛ چون این امکان وجود دارد که داوطلبان نسبت به این قضایا حضور ذهن نداشته باشند، روش دومی ارائه شده است. البته در این روش داوطلب باید در رسم نمودارهای چندجمله‌ای تسلط کافی داشته باشد. به ضابطه $f(x)$ توجه کنید:

$$f(x) = (x-1)^3(x+1)^3(x^2+1)(x^4+1)$$

تابع $f(x)$ دارای دو ریشه ساده ۱ و ۱− می‌باشد و نمودار آن به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار تابع فقط در یک نقطه خط مماس بر منحنی افقی می‌باشد و در اینجا مشتق صفر است و نقطه اکسترمم نسبی تابع می‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0) \\ B(1,1) \end{cases}$$

حالا برای تشخیص نقطه اکسترمم کافی است مبین دلتا را در این نقاط بررسی کنیم. مبین دلتا در نقاط اکسترمم مثبت خواهد بود:

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = 6y \\ f_{xy} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36xy - 9 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_A = -9 < 0 \\ \Delta_B = 27 > 0 \end{cases}$$

۱۰ـ گزینه «۳» با توجه به قواعد مشتق جزئی داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + zye^{xy}) = -\sin y + ze^{xy} + xyze^{xy} \xrightarrow{(1,1,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(-x\sin y - \sin z + zxe^{xy}) = -\cos z + xe^{xy} \xrightarrow{(1,1,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -1 + e$$

$$\Rightarrow \sin 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,0) = e - 1$$

۱۱ـ گزینه «۳» برای محاسبه $G'(1)$ از قاعده تعمیم یافته مشتق‌گیری از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$G'(x) = xe^{-t^2} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(xe^{-t^2})\,dt = xe^{-x^2} + \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

حالا با جایگذاری در رابطه فوق و تابع اولیه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} G'(1) = e^{-1} + \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \\ G(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow G'(1) - G(1) = e^{-1}$$

۱۲ـ گزینه «۳» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $e^x - 1 = t^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

$$e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x dx = 2t\,dt \Rightarrow dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^1 t\frac{2t\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{(1+t^2-1)\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - \tan^{-1} t)\Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۴» به راحتی با توجه به بازه انتگرال‌ها داریم:

$$0 \le x \le 1 \to 0 \le x^4 < x^2 \Rightarrow 1 \le x^4 + 1 < x^2 + 1 \Rightarrow 1 < \frac{x^2+1}{x^4+1} \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \int_0^1 1\,dx < \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \Rightarrow 1 < \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

۱۴ـ گزینه «۲» با توجه به هزینه کل انتگرال تابع هزینه نهایی (Mc) است، داریم:

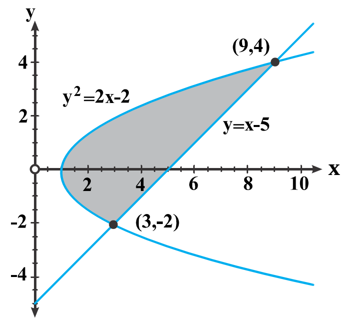
$$F(x)=\int(x-۱)(x+۲)dx=\int(x^۲+x-۲)\,dx=\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۲}{۲}-۲x+C$$

$$F(۱)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-۲+C=۱۰\Rightarrow C=۱۲-\frac{۵}{۶}$$

$$F(۲)=\frac{۸}{۳}+\frac{۴}{۲}-۴+۱۲-\frac{۵}{۶}=۱۰+\frac{۱۶-۵}{۶}=۱۰+\frac{۱۱}{۶}=۱۰+۱/۸۳=۱۱/۸۳$$

۱۵ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط تقاطع دو تابع را به‌دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم:

$$y^۲=۲x-۲\xrightarrow{x=y+۵}y^۲=۲y+۱۰-۲=۲y+۸\Rightarrow y^۲-۲y-۸=(y-۴)(y+۲)=۰\Rightarrow y=-۲,۴$$



با توجه به این‌که ناحیه انتگرال‌گیری در راستای محور xها منظم است، مساحت این ناحیه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S=\int_a^b(x_۲-x_۱)\,dy=\int_{-۲}^{۴}(y+۵-\frac{y^۲+۲}{۲})\,dy=\int_{-۲}^{۴}(-\frac{y^۲}{۲}+y+۴)\,dy$$

$$=(-\frac{y^۳}{۶}+\frac{y^۲}{۲}+۴y)_{-۲}^{۴}=(-\frac{۶۴}{۶}+\frac{۱۶}{۲}+۱۶)-(-\frac{-۸}{۶}+\frac{۴}{۲}-۸)=-\frac{۷۲}{۶}+۲۴+۶=-۱۲+۳۰=۱۸$$

۱۶ـ گزینه «۴» هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$$
$$(A'A)'=A'(A')'=A'A$$
$$(AA')'=(A')'A'=AA'$$
$$(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A-A')$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود گزینه (۴) نادرست است.

۱۷ـ گزینه «۳» دترمینان ماتریس را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & x & ۰\\ ۴ & ۳ & x\\ -۳ & -۲ & ۱\end{vmatrix}=x(۳+۲x)-x(۴+۳x)=-x^۲-x=۰\Rightarrow -x(x+۱)=۰\Rightarrow x=۰,-۱$$

۱۸ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که یک دستگاه معادلات خطی در صورتی جواب منحصربه‌فرد دارد که ماتریس ضرایب معکوس‌پذیر باشد (دترمینان آن صفر نباشد)، کافیست دترمینان ماتریس A را بررسی کنیم؛ از طرفی با توجه به این‌که این ماتریس پایین‌مثلثی است، دترمینان آن برابر حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی خواهد بود که برابر ۱۲α است. پس درصورتی‌که $\alpha\neq ۰$ این دستگاه همواره جواب منحصربه‌فرد خواهد داشت.

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به صورت ماتریسی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱\\ ۴ & ۱ & -۱\\ ۵ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

حالا با استفاده از روش کرامر داریم:

$$\gamma=\frac{\Delta\gamma}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۱\\ ۴ & ۱ & ۱\\ ۵ & ۳ & ۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۱\\ ۴ & ۱ & -۱\\ ۵ & ۳ & ۱\end{vmatrix}}=\frac{-۱(۱-۳)-۲(۴-۵)+۱(۱۲-۵)}{-۱(۱+۳)-۲(۴+۵)+۱(۱۲-۵)}=\frac{۱۱}{-۱۵}$$

۲۰ـ گزینه «۳» حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر دترمینان آن ماتریس بوده و حاصل‌جمع آن‌ها نیز برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی است، پس با فرض اینکه $\lambda_۳,\lambda_۲,\lambda_۱$ مقادیر ویژه ماتریس A باشد، داریم:

$$\lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & a & ۳\\ ۴ & ۳ & ۰\end{vmatrix}=۲(۰-۹)-۱(۰-۱۲)+۴(۳-۴a)=۶-۱۶a$$

$$\lambda_۱+\lambda_۲+\lambda_۳=۲+a\Rightarrow ۶-۱۶a=۲(۲+a)=۴+۲a\Rightarrow ۱۸a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۹}$$