مدرسان شریف

فصل اول

«یادآوری مفاهیم پایه»

با توجه به اهمیت مطالب پایه در ریاضیات و لزوم یادگیری کامل این مطالب، ابتدا به طور کامل به بیان مفاهیم اولیه و پایه ریاضیات می‌پردازیم تا بتوانیم در ادامه از این مطالب بهتر استفاده کنیم و کاربرد این مطالب را ببینیم.

توان

❖ **تعریف:** a به توان n را به شکل a^n نمایش می‌دهند، یعنی عدد a، n بار در خودش ضرب می‌شود. برای مثال $۲^۳$ یعنی عدد ۲ را ۳ بار در خودش ضرب کنیم $(۸ = ۲\times۲\times۲)$. اگر a، b، m و n اعدادی حقیقی باشند، آنگاه روابط زیر را داریم: $(a,b \neq ۰)$

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$ ۳) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $(a^m)^n = a^{mn}$ ۵) $a^n = \frac{۱}{a^{-n}}$ ۶) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته۱: هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد: $a^۱ = a$

نکته۲: هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، برابر یک می‌شود: $a^۰ = ۱$

مثال۱: مقدار x در تساوی $(۸۱)^{۲x+۴} = (۲۷)^{x-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲۲}{۵}$ ۴) $\frac{-۲۲}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل معادلاتی که مجهول آن‌ها در توان یک عدد قرار دارد باید ابتدا پایه‌های جملات دو طرف تساوی را یکی کنیم؛ سپس توان‌های دو طرف تساوی را مساوی همدیگر قرار دهیم و با عملیات جبری مقدار مجهول را حساب کنیم. برای این که پایه‌های دو طرف تساوی را یکسان کنیم ابتدا دو عدد ۸۱ و ۲۷ را به پایه‌ی ۳ می‌نویسیم و سپس با استفاده از قانون $(x^m)^n = x^{mn}$ دو طرف تساوی را به توان می‌رسانیم. $(۳^۴)^{۲x+۴} = (۳^۳)^{x-۲}$

$۳^{۸x+۱۶} = ۳^{۳x-۶}$

اکنون با توجه به این که پایه‌ها هر دو مساوی هستند، باید توان‌های دو طرف را مساوی یکدیگر قرار دهیم و داریم:

$$۸x+۱۶ = ۳x-۶ \Rightarrow ۸x-۳x = -۶-۱۶ \Rightarrow ۵x = -۲۲ \Rightarrow x = \frac{-۲۲}{۵}$$

مثال۲: ساده شدهٔ عبارت $(۰/۷۵)^۵(۳۲)^۳ \times (۱۲^{-۲})$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) ۱۸   ۲) ۲۷   ۳) ۳۶   ۴) ۵۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این گونه مسائل تا جایی که امکان دارد پایه‌ها را به حاصل‌ضرب عامل اول تجزیه می‌کنیم یعنی کاری کنیم پایه اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ باشد دقت کنید برای راحتی کار ۰/۷۵ را به صورت کسری می‌نویسیم و صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم.

$$A = ۰/۷۵^۵ \times ۳۲^۳ \times ۱۲^{-۲} = (\frac{۷۵}{۱۰۰})^۵ \times (۲^۵)^۳ \times \frac{۱}{(۴\times۳)^۲} = (\frac{۳}{۲^۲})^۵ \times ۲^{۱۵} \times \frac{۱}{۲^۴\times۳^۲} = \frac{۳^۵\times۲^{۱۵}}{۲^{۱۰}} \times \frac{۱}{۲^۴\times۳^۲} = ۳^۳\times۲^۱ = ۵۴$$

مثال ۳: اگر $\frac{3b+7}{7+2b}=\frac{3a+10}{10+2a}$ باشد عدد $\frac{b}{a}$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) $0/4$ ۲) $0/7$ ۳) $0/6$ ۴) $0/5$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}(3a+10)(7+2b)=(3b+7)(10+2a)$$

$$21a+6ab+70+20b=30b+6ab+70+14a\Rightarrow 20b-30b=14a-21a\Rightarrow -10b=-7a\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{7}{10}=0/7$$

مثال ۴: مقدار x در تساوی $(\frac{1}{8})^{5x}=16\times(\frac{1}{64})^{-x+1}$ برابر است با:

۱) $-\frac{2}{21}$ ۲) $\frac{2}{21}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $-\frac{1}{7}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا همه اعداد داده شده را به پایه‌ی ۲ می‌نویسیم و با استفاده از قانون $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ و همچنین استفاده از قانون $(x^m)^n=x^{mn}$ داریم:

$$(\frac{1}{2^3})^{5x}=(2^4)\times(\frac{1}{2^6})^{-x+1}\Rightarrow(2^{-3})^{5x}=(2^4)\times(2^{-6})^{-x+1}\Rightarrow 2^{-15x}=2^4\times2^{6x-6}\Rightarrow 2^{-15x}=2^{6x-2}$$

اکنون چون پایه‌ها مساوی هستند، باید توان‌ها را مساوی هم قرار دهیم و داریم:

$$-15x=6x-2\Rightarrow 6x+15x=2\Rightarrow 21x=2\Rightarrow x=\frac{2}{21}$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a)=g(a)$ را وقتی اتحاد می‌گوییم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد، برای مثال تساوی $(a-1)^2=a^2-2a+1$ اتحاد می‌باشد؛ زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2-1=3$ اتحاد نیست؛ زیرا فقط به ازای $a=\pm2$ برقرار می‌باشد، اتحادهایی که کاربرد مهمی در حل مسائل دیگر ریاضی دارند را نیز در زیر بیان می‌کنیم:

۱) $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$

۲) $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3b^2a\pm b^3$

۳) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (اتحاد مزدوج)

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۶) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

۷) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ — اتحادهای چاق و لاغر

۸) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$ — اتحادهای چاق و لاغر

۹) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۰) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

مثال ۵: حاصل عبارت $A=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ کدام است؟

۱) x^6+1 ۲) x^6-1 ۳) x^6+x ۴) x^6-x

پاسخ: گزینه «۲» دو تا اتحاد چاق و لاغر داریم که با مرتب کردن عامل‌های داده شده به صورت زیر به دست می‌آیند و داریم:

$$A=\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=\underbrace{(x^3-1)(x^3+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}\rightarrow A=x^6-1$$

$$A=\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}=\underbrace{(x^3-1)(x^3+1)}\longrightarrow A=x^6-1$$

مثال ۶: اگر $a+b=20$ باشد و $a^2-b^2=80$، آنگاه مقدار b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ داریم:

$$\begin{cases}(a-b)(a+b)=80\\ a+b=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=4\\ a+b=20\end{cases}\Rightarrow a=12,b=8$$

مثال۷: اگر $x-\frac{1}{x}=-1$ باشد، آنگاه حاصل $A=x^3-\frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 2 ۳) 4 ۴) -2

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ داریم:

$$A=x^3-\frac{1}{x^3}=\underbrace{(x-\frac{1}{x})^3}_{-1}+3(x)(\frac{1}{x})\underbrace{(x-\frac{1}{x})}_{-1}=(-1)^3+3\times1\times(-1)=-4$$

مثال۸: تفاضل دوعدد ۹ و حاصل ضرب آن دو ۱۸- بوده؛ «مربع مجموع آن‌ها» چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴» «مربع مجموع» دو عدد x و y یعنی $(x+y)^2$، ابتدا با استفاده از اتحادها داریم:

$$\begin{cases}x-y=9\\xy=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=9^2-2\times18=45\\(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=45+2xy=45-2\times18=9\end{cases}$$

توجه: اگر مجموع مربعات خواسته می‌شد باید x^2+y^2 را محاسبه می‌کردیم که در این حالت گزینه (۱) صحیح می‌شد.

تجزیه عبارت‌های جبری

تجزیه عبارت‌های جبری یعنی باید عبارت‌ها را تا جایی که امکان دارد به ضرب عامل‌ها تبدیل کرد.

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارت‌های جبری، به دست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) اشاره کرد.

مثال۹: عبارات زیر را تجزیه کنید:

۱) $x^3-27=(x-3)(x^2+9+3x)$

۲) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۳) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

۴) $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

مثال۱۰: عبارت $\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}$ با کدام عبارت زیر هم ارز است؟

۱) y^3 ۲) y^3+1 ۳) $1-y+y^3$ ۴) y^3-y^4

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:** با استفاده از تجزیه در صورت کسر داریم:

$$\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}=\frac{1-y+y^3(1-y)}{1-y}=\frac{(1-y)(1+y^3)}{1-y}=1+y^3$$

روش دوم: روش مقدارگذاری: اگر y را صفر در نظر بگیریم $(y=0)$ آنگاه حاصل کسر یک می‌شود. در این مرحله در گزینه‌ها به جای y صفر را قرار می‌دهیم. گزینه‌هایی که مقدارشان یک نمی‌شود نادرست هستند، در نتیجه گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست می‌باشند. دقت کنید $y=1$ ریشه مخرج کسر است، پس نمی‌توان به جای y، عدد یک را قرار داد خوب اشکالی ندارد پس به جای آن (-1) را قرار می‌دهیم و حاصل کسر صفر می‌شود. بین گزینه‌های ۲ و ۳ گزینه ۲ مقدارش به ازای $y=-1$ برابر صفر می‌شود در نتیجه گزینه ۲ درست است.

تذکر: در روش مقدارگذاری توصیه می‌شود با عدد صفر شروع کنیم بعد از آن اعداد مانند (۱) و (-1) را در نظر بگیریم.

رادیکال‌ها

❖ **تعریف:** عبارت $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام عدد a می‌گویند و n را که عددی طبیعی و بزرگ‌تر یا مساوی ۲ می‌باشد، فرجه رادیکال می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد: اگر a عددی حقیقی و نامنفی باشد، اعداد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه‌های دوم عدد a می‌گوییم. به طور مثال ریشه‌های دوم عدد ۷، دو عدد $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ می‌باشند.

قوانین رادیکال‌ها

۱) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۲) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\quad(a>0)$

۳) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}}=\sqrt[mnk]{a}$

۵) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$

۶) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad b\neq0$

۷) $\sqrt[mn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^k}$

نکته۳: اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی‌دار باشد.

نکته۴: اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد.

مثال: ۱) $\sqrt{۳۶}=\sqrt{۶^۲}=۶$ ۲) $\sqrt[۳]{-۲۷}=\sqrt[۳]{(-۳)^۳}=-۳$ ۳) $\sqrt{-۱۶}\neq -۴$

مثال۱۱: اگر $a=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ باشد، آنگاه $a^۲+a\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار a را از بردن ۲ به داخل رادیکال و ضرب کردن فرجه رادیکال‌ها در هم به دست می‌آوریم.

$$a=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}==\sqrt[۳]{\sqrt{۲^۲\times ۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۸}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{توان زیر رادیکال و فرجه را با هم ساده کردیم}}a^۲+a\sqrt{۲}=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})=۲+۲=۴$$

قدرمطلق: در این قسمت فقط به تعریف قدرمطلق اکتفا می‌کنیم و در ادامه به صورت کامل این مبحث توضیح داده می‌شود.

➢ **توجه:** عبارت $\sqrt[۲n]{x^{۲n}}$ یعنی عدد x به توان یک عدد زوج که در زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد با توجه به این‌که x مثبت یا منفی باشد، می تواند برابر دو مقدار نوشته شود. یعنی داریم: $\sqrt[۲n]{x^{۲n}}=|x|=\begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ مثبت باشد} \\ -x & \text{اگر } x \text{ منفی باشد} \end{cases}$ مثلاً $\sqrt[۲]{(-۳)^۲}$ برابر ۳- نیست چون فرجه رادیکال زوج و ۳- عددی منفی است، پس باید بعد از بیرون آمدن از زیر رادیکال، آن را در یک منفی ضرب کنیم یعنی داریم: $\sqrt[۲]{(-۳)^۲}=-(-۳)=۳$

مثال۱۲: حاصل عبارت $\sqrt[۳]{(-x)^۳}+\sqrt{x^۲}+\sqrt{(-۲)^۲}$ وقتی که $x>۰$ است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲x+۲$ ۳) -۲ ۴) $-۲x-۲$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که $x>۰$ است، پس $\sqrt{x^۲}=x$ می‌باشد و داریم: $\sqrt[۳]{(-x)^۳}+\sqrt{x^۲}+\sqrt{(-۲)^۲}=-x+x+۲=-x+x+۲=۲$

مثال۱۳: حاصل $\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right|+\left|\sqrt{۲}-۱\right|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $۱-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}+۱$ ۴) $۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-۱$

پاسخ: گزینه «۱» $\sqrt{۲}<\sqrt{۳}$ در نتیجه $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}>۰$ دقت کنید داخل قدرمطلق مقداری مثبت شده است، پس قدرمطلق را برمی‌داریم و عبارت داخل قدرمطلق را بدون تغییر می‌نویسیم؛ دقت کنید $\sqrt{۲}>۱$ پس $۱-\sqrt{۲}<۰$ چون عبارت داخل قدرمطلق مقداری کوچک‌تر از صفر است، عبارت داخل قدرمطلق را در منهای یک ضرب می‌کنیم و قدرمطلق را حذف می‌کنیم.

$$A=\underbrace{\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right|}_{\text{بزرگ‌تر از صفر}}+\underbrace{\left|۱-\sqrt{۲}\right|}_{\text{کوچک‌تر از صفر}}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۳}-۱$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

برای جمع یا تفریق دو رادیکال باید فرجه‌های رادیکال‌ها با همدیگر برابر باشند در ضمن جملات زیر رادیکال‌ها هم باید یکی باشند، به عنوان مثال $۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$ ولی $۳\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۲}$ قابل جمع کردن نیستند، چون فرجه‌ها یکی نیستند.

مثال۱۴: ساده شده عبارت $A=۲\sqrt{۲۰}-\sqrt{۴۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}$ چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا اعداد زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم و با توجه به فرجه رادیکال آن‌ها را از رادیکال بیرون می‌آوریم.

$$A=۲\sqrt{۲۰}-\sqrt{۴۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}=۲\sqrt{۲^۲\times ۵}-\sqrt{۳^۲\times ۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۵\times ۲^۴}=۲\times ۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}+\frac{۱}{۲}\times ۲^۲\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}=۳\sqrt{۵}$$

مثال۱۵: حاصل $A=\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt[۴]{۶۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۱-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}-۱$ ۴) -۱

پاسخ: گزینه «۴» چون $\sqrt{۲}-۱$، عددی منفی است، پس وقتی می‌خواهیم آن را از رادیکال با فرجه زوج بیرون بیاوریم باید آن را در یک منفی ضرب کنیم.

$$A=|۱-\sqrt{۲}|+۲(\frac{۱}{\sqrt{۲}})-\sqrt[۴]{۲^۶}\ \Rightarrow\ A=-(۱-\sqrt{۲})+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-\sqrt[۲]{۲^۳}$$

$$A=-۱+\sqrt{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-۲\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ A=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}=\frac{-\sqrt{۲}+۲-۲}{\sqrt{۲}}=-۱$$

مثال۱۶: حاصل عبارت $A=۲\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt{۱۲}-\sqrt[۳]{۱۲۸}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** ابتدا اعداد زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم و با توجه به فرجه رادیکال‌ها که ۲ و ۳ می‌باشد، اعداد را از رادیکال بیرون می‌آوریم.

$$A=۲\sqrt[۳]{۲۷\times۲}+\sqrt{۳\times۴}-\sqrt[۳]{۴^۳\times۲}=۲\sqrt[۳]{۳^۳\times۲}+\sqrt{۳\times۲^۲}-\sqrt[۳]{(۲^۲)^۳\times۲}=۲\times۳\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}-۴\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}$$
$$=۶\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}-۴\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

دو رادیکال را زمانی می‌توان درهم ضرب یا بر هم تقسیم کرد که فرجه رادیکال‌ها با همدیگر برابر باشند، دقت کنید در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها نیازی نیست که جملات زیر رادیکال‌ها با هم برابر باشند.

مثال۱۷: حاصل عبارت $A=\dfrac{\sqrt[۳]{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt[۶]{ab}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۶]{ab^۲}$　　۲) $\sqrt[۶]{ab}$　　۳) $\sqrt[۶]{a^۲b}$　　۴) $\sqrt[۳]{ab}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توجه شود در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه‌ها با هم برابر نبودند، لذا کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها که بین ۳ و ۲ عدد ۶ می‌باشد را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم، یعنی به جای $\sqrt[۳]{a}$ می‌توانیم $\sqrt[۶]{a^۲}$ بنویسیم؛ چون با ساده کردن فرجه و توان a بر ۲ دوباره به $\sqrt[۳]{a}$ می‌رسیم.

$$A=\frac{\sqrt[۶]{a^۲}\times\sqrt[۶]{b^۳}}{\sqrt[۶]{ab}}=\frac{\sqrt[۶]{a^۲b^۳}}{\sqrt[۶]{ab}}=\sqrt[۶]{\frac{a^۲b^۳}{ab}}=\sqrt[۶]{ab^۲}$$

مثال۱۸: حاصل عبارت $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}$ کدام است؟ $(x>۰)$

۱) ۱　　۲) $\sqrt[۶]{x}$　　۳) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$　　۴) $\sqrt[۶]{x^۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این‌گونه مسائل باید عبارت‌های پشت رادیکال را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها در هم به یک رادیکال برسیم:

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[۶]{x}}{\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲\times x}}}=\frac{\sqrt[۶]{x}}{\sqrt[۶]{x^۳}}=\sqrt[۶]{\frac{x}{x^۳}}=\sqrt[۶]{\frac{۱}{x^۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{x^۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$$

مثال۱۹: حاصل عبارت $(\sqrt[۵]{۷+\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۵]{۷-\sqrt{۱۷}})$ را حساب کنید.

☑ **پاسخ:** چون فرجه‌ها مشترک است، زیر رادیکال را در هم ضرب می‌کنیم و برای این کار از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$\sqrt[۵]{\underbrace{(۷-\sqrt{۱۷})(۷+\sqrt{۷۱})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}=\sqrt[۵]{۷^۲-(\sqrt{۱۷})^۲}=\sqrt[۵]{۴۹-۱۷}=\sqrt[۵]{۳۲}=\sqrt[۵]{۲^۵}=۲$$

مثال۲۰: حاصل عبارت $A=\dfrac{۱+t+t^۲+\cdots+t^۸}{۱+t^۳+t^۶}$ به ازای $t=\dfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) ۲/۵　　۲) ۱　　۳) ۱/۵　　۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از اتحاد روبه‌رو استفاده می‌کنیم.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})$$
$$t^۹-۱=(t-۱)(t^۸+t^۷+t^۶+\cdots+t+۱)\qquad(۲)$$

با توجه به تساوی (۲) صورت و مخرج کسر را در $t-۱$ ضرب می‌کنیم.

$$A=\frac{(t-۱)(۱+t+t^۲+\cdots+t^۸)}{(t-۱)(۱+t^۳+t^۶)}=\frac{t^۹-۱}{(t-۱)(t^۶+t^۳+۱)}=\frac{(t^۳)^۳-۱^۳}{(t-۱)(t^۶+t^۳+۱)}=\frac{(t^۳-۱)(t^۶+t^۳+۱)}{(t-۱)(t^۶+t^۳+۱)}=\frac{t^۳-۱}{t-۱}$$
$$=\frac{\overbrace{(t-۱)(t^۲+t+۱)}^{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}{t-۱}=t^۲+t+۱$$

مقدار تساوی روبه‌رو را به ازای $t=\dfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ حساب می‌کنیم.

$$t^۲+t+۱=(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^۲+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}+۱=\frac{۵-۲\sqrt{۵}+۱}{۴}+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}+۱=\frac{۵-۲\sqrt{۵}+۱+۲\sqrt{۵}-۲+۴}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

گویا کردن مخرج کسرها

منظور از گویا کردن، **حذف رادیکال از مخرج کسر** می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد.
در ادامه حالت‌های گوناگون مخرج کسر توضیح داده می‌شود.

نکته۵: گویا کردن کسرهایی که مخرج آنها به شکل $\sqrt[m]{a^n}$ هستند: برای گویا کردن این کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب کنیم.

مثال۲۱: کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳\sqrt{۳}}}$ را گویا کنید.

☑ **پاسخ:** مخرج کسر شامل دو رادیکال است، بنابراین در اولین گام باید کاری کنیم که مخرج کسر فقط شامل یک رادیکال باشد.

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{\sqrt{۳^۲\times ۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۸]{۳^۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۸]{۳^۳}}\times\frac{\sqrt[۸]{۳^{۸-۳}}}{\sqrt[۸]{۳^{۸-۳}}}=\frac{\sqrt[۸]{۳^۵}}{\sqrt[۸]{۳^۸}}=\frac{\sqrt[۸]{۳^۵}}{۳}$$

نکته۶: گویا کردن کسرهایی که مخرج آنها به صورت $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ یا $m\sqrt{a}\pm n\sqrt{b}$ هستند: برای گویا کردن این نوع کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم.

$$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}\xleftrightarrow{\text{مزدوج}}m\sqrt{a}-n\sqrt{b}\qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}\xleftrightarrow{\text{مزدوج}}\sqrt{a}-\sqrt{b}\qquad m\sqrt{a}+\sqrt{b}\xleftrightarrow{\text{مزدوج}}m\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

مثال۲۲: اگر $x=۱-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $(x+x^{-1})^{\frac{۱}{۳}}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که x^{-1} برابر $\frac{۱}{x}$ می‌باشد، داریم:

$$x=۱-\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=-۱-\sqrt{۲}\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۱-\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}\Rightarrow(x+\frac{۱}{x})^{\frac{۱}{۳}}=(-۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۳}}=(-۲^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=-۲^{\frac{۱}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

مثال۲۳: ساده شده کسر $\frac{۱}{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳})}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}+\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})\underbrace{(\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳})(\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}=\frac{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵^۲}-\sqrt[۴]{۳^۲})}$$

$$=\frac{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}{\underbrace{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}=\frac{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}{(\sqrt{۵})^۲-(\sqrt{۳})^۲}=\frac{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}{۵-۳}=\frac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳})$$

نکته۷: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}$ باشد، برای گویا کردن این نوع کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^۲}$ ضرب کنیم. در مخرج کسر به عبارت گویای $x-y$ می‌رسیم.

مثال۲۴: ساده شده کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}$ ۲) $۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}$ ۴) $۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۹}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نکته قبل در این کسر $y=۳$ و $x=۴$ پس برای گویا کردن کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{۴^۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۳^۲}$ ضرب کنیم.

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴^۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}}{(\sqrt[۳]{۴^۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹})}=\frac{\sqrt[۳]{۴^۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}}{۴-۳}=\sqrt[۳]{(۲^۲)^۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}=۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۹}$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ باشد برای گویا کردن این نوع کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ ضرب کنیم، در مخرج کسر به عبارت گویای $x+y$ برسیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}\underbrace{+\sqrt[3]{y}}_{}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\underbrace{-}_{\text{این دو علامت همیشه قرینه‌اند}}\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ باشد برای گویا کردن این نوع کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ ضرب کنیم و در مخرج کسر به عبارت گویای $x-y$ می‌رسیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\underbrace{+\sqrt[3]{xy}+}_{\text{این دو علامت قرینه‌اند}}\sqrt[3]{y^2}}\times\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ باشد برای گویا کردن این نوع کسرها کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ ضرب کنیم تا در مخرج کسر به عبارت گویای $x+y$ می‌رسیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}\times\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{x+y}$$

مثال۲۵: حاصل $\sqrt[3]{0/5}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+1\right)$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته بالا و تساوی روبه‌رو نتیجه می‌گیریم $y=1$ و $x=2$ $\quad \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\times1}+\sqrt[3]{1}$

در نتیجه برای گویا کردن مخرج کسر با توجه به تذکر کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}$ که همان $\sqrt[3]{2}-1$ می‌باشد، ضرب کنیم.

$$\sqrt[3]{0/5}\left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)}+1\right)=\sqrt[3]{0/5}\left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}+1\right)=\sqrt[3]{0/5}(\sqrt[3]{2}-1+1)=\sqrt[3]{0/5}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{0/5\times2}=\sqrt[3]{1}=1$$

به دست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو یا چند عبارت (عدد)

برای به دست آوردن (ب.م.م) دو عبارت (عدد) پس از تجزیه دو عبارت (عدد) به حاصل‌ضرب عوامل، حاصل‌ضرب عوامل اول مشترک با کوچکترین توان را به عنوان (ب.م.م) و حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را به عنوان (ک.م.م) تعیین می‌کنیم.

مثال۲۶: (ب.م. م) و (ک.م.م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید:

پاسخ: برای به دست آوردن (ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد باید ابتدا این دو عدد را با تقسیم به اعداد اول، تجزیه کنیم و داریم:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2\\ 12 & 2\\ 6 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}\Rightarrow 24=2^3\times3 \quad,\quad \begin{array}{r|l} 54 & 2\\ 27 & 3\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}\Rightarrow 54=2\times3^3$$

پس داریم:

$$\text{ب.م.م}=3\times2=6$$

$$\text{ک.م.م}=3^3\times2^3=27\times8=216$$

توضیح بیشتر: باید ابتدا ۲۴ را بر کوچک‌ترین عدد اول که ۲۴ بر آن قابل قسمت است تقسیم کنیم (عدد ۲). دوباره برای ۱۲ هم همین کار را می‌کنیم تا به عدد ۳ می‌رسیم، برای ۳ هم همین کار را می‌کنیم تا به عدد یک برسیم. همین کار را برای ۵۴ هم انجام می‌دهیم.

مثال۲۷: (ک.م.م) دو عبارت $A=(x^3-1)$, $B=(x-1)^2(x+1)^2$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$A=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\quad,\quad B=(x-1)^2(x+1)^2$$

$$\text{(ک.م.م)}=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)$$

فصل سوم

«معادلات و نامعادلات»

معادله یک مجهولی درجه اول: صورت کلی این معادله به صورت $ax+b=0$ با شرط $a\neq 0$ است که در این حالت $x=-\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

مثال ۱: معادله $۲x+۴=0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$۲x+۴=0 \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\text{مقدار معلوم را به سمت راست}} ۲x=-۴ \xrightarrow{\div ۲} x=-۲$$

مثال ۲: معادله $۳x+۶=-۲x+۴$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا مجهول‌های سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم. در این انتقال $-۲x$ به $+۲x$ تبدیل می‌شود (و عدد ۶ را به سمت راست انتقال می‌دهیم که به (۶-) تبدیل می‌شود.

$$۳x+۲x=۴-۶ \Rightarrow ۵x=-۲ \xrightarrow{\div ۵} x=-\frac{۲}{۵}$$

نکته ۱: در معادله $ax=b$ هرگاه $a=b=0$ باشد، آنگاه می‌گوییم معادله بی‌شمار جواب دارد.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A=ax+b$: هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است. مشخص است که علامت عبارت $A=ax+b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax+b=0$ موافق علامت ضریب x، a و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	∘	موافق علامت a

نکته ۲: هرگاه عبارتی به صورت حاصل‌ضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامت‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱: عبارت‌های $A=۳x+۶$ و $B=۴-۲x$ را تعیین علامت کنید.

$$۱)\ A=۳x+۶ \Rightarrow ۳x+۶=0 \Rightarrow x=-\frac{۶}{۳}=-۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
$A=۳x+۶$	$-$	∘	$+$

$$۲)\ B=۴-۲x \Rightarrow ۴-۲x=0 \Rightarrow x=\frac{۴}{۲}=۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$B=۴-۲x$	$+$	∘	$-$

مثال ۲: عبارت $A=\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۱)^۲(x+۴)}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ: در سطر اول ابتدا $-\infty$ را می‌نویسیم سپس هر یک از پرانتزها را جداگانه مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های به دست آمده را بعد از $(-\infty)$ به ترتیب از کوچک به بزرگ می‌نویسیم، یعنی ابتدا ۴- سپس ۱، بعد ۲ و در آخر ۳ را می‌نویسیم.

x	$-\infty$	-۴		۱		۲		۳	
$x+۴$	$-$	∘	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-۱)^۲$	$+$		$+$	∘	$+$		$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$		$-$	∘	$+$		$+$
$x-۳$	$-$		$-$		$-$		$-$	∘	$+$
A	$-$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$+$	∘	$-$	∘	$+$

چون $x=-۴$ ریشه معادله $x+۴=۰$ است، پس در سطر $x+۴$ موقعی که به $x=-۴$ می‌رسیم صفر قرار می‌دهیم و چون ضریب x بزرگ‌تر از صفر است در سمت چپ $x=-۴$ مخالف علامت ضریب x یعنی منفی قرار می‌دهیم و در سمت راست موافق علامت ضریب x یعنی مثبت قرار می‌دهیم و برای $x=۲$ و $x=۳$ نیز به همین ترتیب تعیین علامت می‌کنیم. دقت کنید حاصل عبارت $(x-۱)^۲$ به ازای هر عدد دلخواهی که به جای x قرار بدهیم مقداری بزرگ‌تر یا مساوی صفر است به همین دلیل در سطر $(x-۱)^۲$ در سمت راست و چپ $x=۱$ علامت مثبت را قرار می‌دهیم.

لازم به توضیح است که نقاط $x=۱$ و $x=-۴$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند به عنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند و در این نقاط عبارت تعریف نشده است. نقاط $x=۲$ و $x=۳$ ریشه‌های صورت کسر هستند در نتیجه به ازای این دو مقدار حاصل کسر برابر صفر می‌شود. اکنون برای تعیین علامت عبارت A باید مرحله به مرحله عمل کنیم، یعنی:

در ستون اول (در فاصله‌ی $-\infty<x<-۴$) علامت عبارت A از ضرب علامت چهار عامل موجود در این ستون به دست می‌آید که در نهایت یک علامت منفی می‌باشد. به همین ترتیب برای ستون‌های دیگر نیز عمل می‌کنیم و A را تعیین علامت می‌کنیم.

پس در فواصل $x>۳$ یا $۱<x<۲$ یا $-۴<x<۱$ علامت عبارت A مثبت می‌شود (یعنی سطر آخر جدول) و در فواصل $x<-۴$ یا $۲<x<۳$ علامت عبارت A منفی است.

نامعادله درجه اول: نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی مقابل تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax+b>۰ \\ \text{یا} \\ ax+b\geq ۰ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax+b<۰ \\ \text{یا} \\ ax+b\leq ۰ \end{cases}$$

نکته۳: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض خواهد شد.

مثال ۳: مجموعه جواب نامعادله $-۴\leq ۵-۲x\leq ۴$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا برای آن که در نامعادله x تنها بشود، (-۵) را به هر سه قسمت نامعادله اضافه می‌کنیم.

$$-۴-۵\leq -۵+۵-۲x\leq ۴-۵ \Rightarrow -۹\leq -۲x\leq -۱$$

اکنون نامعادله را در یک منفی ضرب می‌کنیم و با توجه به نکته گفته شده باید جهت نامعادله را عوض کنیم و داریم:

$$۱\leq ۲x\leq ۹ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱}{۲}\leq x\leq \frac{۹}{۲}$$

توجه داشته باشید که در مرحله آخر، نامساوی را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم، تا حدود x به دست بیاید.

مثال ۴: مجموعه جواب‌های حقیقی نامعادله $x^۳-۳x^۲+۳x-۱>\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲$ کدام است؟

۱) $\{x\,|\,x>-۳\}$ ۲) $\{x\,|\,x<-۱\}$ ۳) $\{x\,|\,-۳<x<-۱\}$ ۴) $\{x\,|\,x<-۲\}$

پاسخ: گزینه «۴» سمت چپ نامعادله داده شده برابر $(x-۱)^۳$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$(x-۱)^۳>\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲ \Rightarrow x-۱>\frac{۳}{۲}x \Rightarrow \frac{۱}{۲}x<-۱ \Rightarrow x<-۲$$

مثال ۵: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-۱}>۲$، کدام است؟

۱) $۱<x<۲$ ۲) $۰<x<۲$ ۳) $x<۰$ یا $x>۲$ ۴) $x<۱$ یا $x>۲$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا نامعادله را مرتب می‌کنیم و سپس بعد از ساده کردن آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\frac{x}{x-۱}-۲>۰ \Rightarrow \frac{x-۲(x-۱)}{x-۱}>۰ \Rightarrow \frac{x-۲x+۲}{x-۱}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x+۲}{x-۱}>۰ \Rightarrow \begin{cases} -x+۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

x		۱		۲	
$-x+۲$	+		+	۰	−
$x-۱$	−	۰	+		+
$P=\frac{-x+۲}{x-۱}$	−	تعریف نشده	+ جواب		−

$\Rightarrow ۱<x<۲$

توجه داشته باشید که به ازای $x=۱$ مخرج کسر صفر می‌شود و کسر تعریف نشده است.

مثال ۶: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-۲}>\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$ به صورت بازه کدام است؟

۱) $(-۴,۲)\cup(۱,۲)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2}>\frac{x}{x-2}\Rightarrow\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)}-\frac{x}{x-2}>0\Rightarrow\frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)}>0\Rightarrow\frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)}>0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)}>0\xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\times(-1)}\frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)}<0\Rightarrow\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)}<0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}<0$$

دقت کنید چون $x=2$ ریشه مخرج کسر است، باید از مجموعه جواب حذف گردد.

x		-1		4	
$x+1$	$-$	○	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	○	$+$
کسر	$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب}=(-1,4)-\{2\}=(-1,2)\cup(2,4)$$

روش دوم: مقدارگذاری: به ازای $x=3$ به نامساوی درست $\frac{13}{4}>3$ می‌رسیم. گزینه‌های ۱و۴ چون شامل ۳ نیستند نادرست هستند. به ازای $x=0$ به گزینه درست $4>0$ می‌رسیم، در نتیجه گزینه (۲) که شامل صفر نیست، نادرست است.

مثال ۷: **نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+4}$ در بازه (a,b) پایین‌تر از خط به معادله $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نمودار $f(x)$ پایین خط $y=2$ قرار دارد، پس $y>f(x)$ می‌باشد یا $y-f(x)>0$ پس داریم:

$$y-f(x)>0\Rightarrow 2-\frac{3x^2-2x}{x^2+4}>0\Rightarrow\frac{2x^2+8-3x^2+2x}{x^2+4}>0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2+2x+8}{x^2+4}>0\xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\text{در}(-1)\text{ضرب}}\frac{x^2-2x-8}{x^2+4}<0\Rightarrow\frac{(x-4)(x+2)}{x^2+4}<0$$

$x=-2$ و $x=4$ ریشه‌های صورت کسر هستند با توجه به علامت نامعادله که کوچک‌تر از صفر است، این دو مقدار قابل قبول نیستند. در صورتی این دو مقدار قابل قبول بودند که از نماد $(\le)$ استفاده می‌شد.

x		-2		4	
$x+2$	$-$	○	$+$		$+$
$x+4$	$-$		$-$	○	$+$
x^2+4	$+$		$+$		$+$
کسر	$+$ غ ق ق		$-$ ق ق		$+$ غ ق ق

$$\text{مجموعه جواب}=(\underset{a}{\underset{\downarrow}{-2}},\underset{b}{\underset{\downarrow}{4}})\Rightarrow b-a=4-(-2)=6$$

مثال ۸: **مجموعه جواب نامعادله $x-1\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}$ شامل چند عدد طبیعی است؟** (آزمون استخدامی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای راحتی کار صورت و مخرج کسر را در صورت امکان ساده می‌کنیم، ولی در مجموعه جواب باید ریشه‌های معادله کسرهای داده شده در صورت مسئله را حذف کنیم.

$$x-1\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+1)(x-2)}\Rightarrow x-1\le\frac{2x+7}{x+1}-\frac{x+2}{x+1}\Rightarrow x-1\le\frac{2x+7-x-2}{x+1}$$

$$\Rightarrow x-1\le\frac{x+5}{x+1}\Rightarrow x-1-\frac{x+5}{x+1}\le0\Rightarrow\frac{x^2-1-x-5}{x+1}\le0\Rightarrow\frac{x^2-x-6}{x+1}\le0\Rightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{x+1}\le0$$

تعداد اعداد طبیعی متعلق به مجموعه جواب نامعادله خواسته شده است. چون در بازه $(-\infty,-2]$ عدد طبیعی نداریم، پس فقط بازه $(-1,3]$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دقت کنید $x=2$ ریشه مخرج کسر دوم در صورت سؤال است بنابراین غیرقابل قبول است در نتیجه جواب‌های $x=1$ و $x=3$ قابل قبولند.

x		-2		-1		3	
x^2-x-6	$+$	○	$-$		$-$	○	$+$
$x+1$	$-$		$-$	○	$+$		$+$
کسر	$-$		$+$		$-$		$+$
	قق				قق		

معادلات درجه دوم

هر معادله به صورت $ax^2+bx+c=0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta = b^2-4ac$ بیان می‌شود و سه حالت زیر را داریم:

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند (مثلاً برای معادلـه $x^2+4x+3=0$، چون $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times3=16-12=4$ و این یعنی معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد).

۲) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد (برای مثال معادله $x^2+x+2=0$، چون $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times2=-7$ منفی است، پس ریشه حقیقی ندارد).

۳) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ریشه مضاعف دارد: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ (برای مثال در معادله $x^2+4x+4=0$ چون $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times4=0$ برابر با صفر است پس معادله دو ریشه مضاعف و برابر با هم دارد).

نکات مهم مربوط به معادله درجه دوم

۱ــ اگر در معادله درجه دوم $a+b+c=0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\frac{c}{a})$ است.

۲ــ اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (۱-) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است

اگر x' و x'' دو ریشه معادله‌ی درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S=x'+x''$ و $P=x'.x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2-Sx+p=0$ بیان می‌شود.

مثال ۹: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

پاسخ: با استفاده از رابطه‌ی تشکیل معادله از روی ریشه‌ها، داریم:

$$\begin{cases} S=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+p=0 \Rightarrow x^2-2x-1=0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله: در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\text{قدرمطلق تفاضل دو ریشه} \Leftarrow A=|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad , \quad \text{حاصل‌ضرب دو ریشه} \Leftarrow p=x'.x''=\frac{c}{a} \quad , \quad \text{حاصل‌جمع دو ریشه} \Leftarrow S=x'+x''=-\frac{b}{a}$$

مثال ۱۰: در معادله $(2-a)x^2+2(1-a)x+a=0$، یکی از ریشه‌های -2 است، $-a$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۴» (-2) ریشه معادله است، بنابراین می‌توان به جای هر x ، -2 را قرار داد.

$$(2-a)(-2)^2+2(1-a)(-2)+a=0 \Rightarrow 8-4a+4a+a-4=0 \Rightarrow a=-4$$

مثال ۱۱: اگر $x=1$، یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2-3x+k=0$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

۱) $-0/4$ ۲) $-0/3$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

پاسخ: گزینه «۱» چون یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است، پس مجموع ضرایب معادله باید برابر صفر باشد، یعنی داریم: $5-3+k=0 \Rightarrow k=-2$

اکنون حاصل‌ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ برابر $\frac{-2}{5}$ می‌باشد و داریم: $x_1x_2=-\frac{2}{5} \Rightarrow 1\times x_2=-\frac{2}{5} \Rightarrow x=-\frac{2}{5}=-0/4$

مثال ۱۲: ریشه‌های معادله $-4x^2-2mx-2=0$ سینوس و کسینوس زاویه α هستند. مقدار مثبت m کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ریشه هر معادله را می‌توان به جای هر x معادله قرار داد. در ضمن از $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{b}{a}$ در حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} x=\sin\alpha \Rightarrow -۴\sin^۲\alpha-۲m\sin\alpha-۲=۰ \\ x=\cos\alpha \Rightarrow -۴\cos^۲\alpha-۲m\cos\alpha-۲=۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} -۴\sin^۲\alpha-۴\cos^۲\alpha-۲m\sin\alpha-۲m\cos\alpha-۲-۲=۰$$

$$-۴(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})-۲m(\sin\alpha+\cos\alpha)-۴=۰ \Rightarrow -۴-۲m(-\frac{b}{a})-۴=۰ \Rightarrow -۴-۲m(-\frac{-۲m}{-۴})-۴=۰$$

$$\Rightarrow -۴+m^۲-۴=۰ \Rightarrow m^۲=۸ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۸}=\pm۲\sqrt{۲} \Rightarrow m=۲\sqrt{۲}$$ قابل قبول

مثال ۱۳: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۷x+۲=۰$ باشند، حاصل $(\alpha^۲-۵\alpha+۳)(\beta^۲-۵\beta+۳)$ کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

$$x=\alpha \Rightarrow \alpha^۲-۷\alpha+۲=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۵\alpha-۲\alpha+۲=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۵\alpha=۲\alpha-۲ \qquad (۱)$$

$$x=\beta \Rightarrow \beta^۲-۷\beta+۲=۰ \Rightarrow \beta^۲-۵\beta-۲\beta+۲=۰ \Rightarrow \beta^۲-۵\beta=+۲\beta-۲ \qquad (۲)$$

$$(۱)\times(۲) \Rightarrow (۲\alpha-۲+۳)(۲\beta-۲+۳)=(۲\alpha+۱)(۲\beta+۱)=۴\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۱=۴\times\frac{c}{a}+۲(-\frac{b}{a})+۱$$

$$=۴\times\frac{۲}{۱}+۲(-\frac{-۷}{۱})+۱=۸+۱۴+۱=۲۳$$

تعیین علامت عبارت درجه دوم به فرم کلی $A=ax^۲+bx+c$: اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه:

X	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
A		موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

نکات مربوط به تعیین علامت تابع درجه دوم

تابع با ضابطه‌ی $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید، داریم:

۱ـ شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که: $a>۰\,,\,\Delta<۰$ (در واقع شرط آنکه عبارت $y=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور x ها باشد این است که $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد.)

۲ـ شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که: $a<۰\,,\,\Delta<۰$ (به عبارت دیگر شرط اینکه عبارت $y=ax^۲+bx+c$ همواره زیر محور x ها باشد این است که $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد.)

مثال ۱۴: به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع با ضابطه $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$ همواره بالای محور x هاست؟

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور x ها قرار دارد. منظور از a ضریب $x^۲$ است.

$$\begin{cases} a-۱>۰ \Rightarrow a>۱ \Rightarrow a\in(۱,+\infty) \\ \Delta<۰ \Rightarrow b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲-۴(a-۱)(a)<۰ \Rightarrow ۸-۴(a-۱)(a)<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۴a(a-۱)<-۸ \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\div(-۴)} a(a-۱)>۲ \Rightarrow a^۲-a-۲>۰ \qquad (۱)$$

برای تعیین علامت نامعادله (۱) از جدول روبه‌رو استفاده می‌کنیم و بازه $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ مجموعه جواب نامعادله (۱) می‌باشد.

a		-۱		۲	
$a^۲-a-۲$	+	۰	−	۰	+
	قابل قبول				قابل قبول

$$\left.\begin{array}{l} a\in((-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)) \\ a\in(۱,+\infty) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} a\in(۲,+\infty) \text{ یا } a>۲$$

نمودار سهمی با توجه به ریشه‌ها

سهمی محور x ها را در سمت راست محور y ها (مبدأ) قطع می‌کند. معادله دارای دو ریشه مثبت $\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^{۲} - ۴ac > ۰ \\ S = -\dfrac{b}{a} > ۰ \\ P = \dfrac{c}{a} > ۰ \end{cases}$

سهمی محور x ها را در سمت چپ محور y ها (مبدأ) قطع می‌کند. معادله دارای دو ریشه منفی $\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^{۲} - ۴ac > ۰ \\ S = -\dfrac{b}{a} < ۰ \\ P = \dfrac{c}{a} > ۰ \end{cases}$

سهمی محور x ها را در طرفین محور y ها (مبدأ) قطع می‌کند. معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامت $\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^{۲} - ۴ac > ۰ \\ P = \dfrac{c}{a} < ۰ \end{cases}$

مثال ۱۵: به ازای چه مجموعه مقادیری از a نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + (a+۳)x - ۱$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a < -۹$ ۲) $a < -۳$ ۳) $a > -۱$ ۴) $-۳ < a < ۰$

پاسخ: گزینه «۱» نمودار سهمی محور x ها را در سمت چپ مبدأ مختصات در دو نقطه قطع می‌کند. در نتیجه معادله‌ی $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد پس $\Delta > ۰$

$$\begin{cases} \Delta = b^{۲} - ۴ac = (a+۳)^{۲} - ۴(a)(-۱) > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۹ + ۶a + ۴a > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۱۰a + ۹ > ۰ \Rightarrow a > -۱ \cup a < -۹ \\ S = -\dfrac{b}{a} < ۰ \Rightarrow -\dfrac{a+۳}{a} < ۰ \Rightarrow a < -۳ \cup a > ۰ \\ P = \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{-۱}{a} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \end{cases}$$

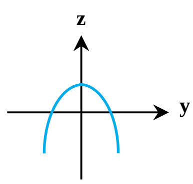
برای تعیین مجموعه مقادیر a باید اشتراک سه مجموعه جواب را حساب کنیم که برابر است با:

$$(a > -۱ \cup a < -۹) \cap (a < -۳ \cup a > ۰) \cap (a < ۰) = a < -۹ \Rightarrow a \in (-\infty, -۹)$$

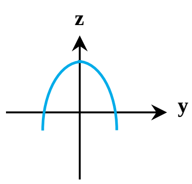
۳ـ اگر $a > ۰$ باشد، تابع دارای مینیمم است و اگر $a < ۰$ باشد، تابع دارای ماکزیمم است.

۴ـ مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\dfrac{b}{۲a}, -\dfrac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد.

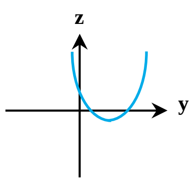
مثال ۱۶: نمودار $y = x^{۲} - ۶x + ۵$ به کدام صورت است؟



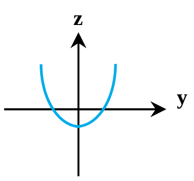
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکات گفته شده چون ضریب $x^{۲}$ مثبت است؛ لذا نمودار تابع دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) اشتباه هستند، اما برای به‌دست آوردن طول نقطه مینیمم داریم: $y = -\dfrac{b}{۲a} = \dfrac{-(-۶)}{۲ \times ۱} = \dfrac{۶}{۲} = ۳$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه (۴) برابر صفر است، نمودار گزینه (۳) مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

مثال ۱۷: در تابع $y = x^۲ - kx + ۲$، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴-   ۲) ۲   ۳) ۲-   ۴) ۴

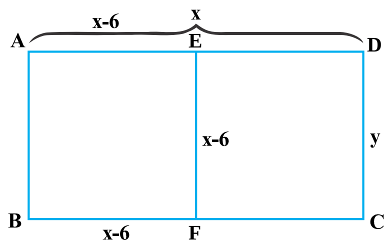
پاسخ: گزینه «۱» طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید. پس خواهیم داشت: $x = \frac{k}{۲} = -۲ \to k = -۴$

نکته ۴: خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن تابع $y = ax^۲ + bx + c$ است.

مثال ۱۸: محیط یک مستطیل ۸۰ واحد است اگر از طول آن ۶ واحد کم کنیم یک مربع حاصل می‌شود، اندازه ضلع بزرگ مستطیل کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) ۱۱   ۲) ۱۷   ۳) ۲۳   ۴) ۲۹

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا صورت سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم، در نتیجه داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) \\ \text{محیط مستطیل} = ۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲(x+y) = ۸۰ \xrightarrow{\div ۲} x + y = ۴۰$$

وقتی شکل حاصل مربع شده نتیجه می‌گیریم $AE = EF = BF = AB = x - ۶$ از طرفی ضلع مربع همان عرض مستطیل می‌باشد، پس $EF = y = x - ۶$ در این مرحله در معادله $x + y = ۴۰$ به جای y، $x - ۶$ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x + y = ۴۰ \\ y = x - ۶ \end{cases} \Rightarrow x + x - ۶ = ۴۰ \Rightarrow ۲x = ۴۶ \xrightarrow{\div ۲} x = ۲۳$$

محاسبه باقیمانده چندجمله‌ای $P(x)$ بر $mx + n$ و $ax^۲ \pm b$

برای محاسبه باقیمانده عبارت $P(x)$ بر عبارتی مانند $mx + n$ باید به جای x در ضابطه $P(x)$ ریشه معادله $mx + n = ۰$، یعنی $x = -\frac{n}{m}$ را قرار دهیم، یعنی اگر عبارت $P(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $P(a) = ۰$ می‌باشد.

برای محاسبه باقیمانده تقسیم عبارت $P(x)$ بر $ax^۲ \pm b$، به جای هر $x^۲$ در ضابطه $P(x)$، مقدار $(+\frac{b}{a})$ یا $(-\frac{b}{a})$ را قرار می‌دهیم و با انجام عملیات جبری به یک عدد ثابت یا جمله درجه اول $ax + b$ می‌رسیم که هر کدامشان باقیمانده مسئله هستند.

مثال ۱۹: باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $۸x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰x$ بر دو جمله‌ای $۲x - ۱$ کدام است؟

۱) ۳-   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید ریشه‌ی $۲x - ۱ = ۰$؛ یعنی $\frac{۱}{۲}$ را به دست آوریم. در نتیجه داریم:

$$۲x - ۱ = ۰ \to x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(\frac{۱}{۲}) = R = ۸(\frac{۱}{۲})^۳ + ۴(\frac{۱}{۲})^۲ - ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۸ \times \frac{۱}{۸} + ۴ \times \frac{۱}{۴} - ۵ = ۱ + ۱ - ۵ = -۳$$

مثال ۲۰: باقیمانده تقسیم $P(x) = x^۵ + ۳x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱$ بر دو جمله‌ای $x^۲ + ۲$ کدام است؟

۱) $-x + ۳$ ۲) $x + ۳$ ۳) $-x - ۳$ ۴) $-x - ۴$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه باقی‌مانده ابتدا $x^۲ + ۲$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم که به تساوی $x^۲ = -۲$ می‌رسیم در این مرحله در مقسوم به جای هر $x^۲$ مقدار (-۲) را قرار می‌دهیم. با انجام عملیات جبری به یک عدد ثابت یا عبارتی مانند $ax + b$ می‌رسیم که باقی‌مانده مورد نظرمان است.

$$R(x) = (x^۲)^۲ x + ۳(x^۲)x + ۲x^۲ + x + ۱ = (-۲)^۲ x + ۳(-۲)x + ۲(-۲) + x + ۱ = ۴x - ۶x - ۴ + x + ۱ = -x - ۳$$

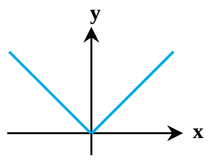
مدرسان شریف

فصل هشتم

«تابع قدرمطلق»

تابع قدرمطلق: این تابع به صورت مقابل تعریف می‌شود:
$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & ;\ x\geq ۰\\ -x & ;\ x<۰\end{cases}$$

به عبارت دیگر اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، قدرمطلق را برمی‌داریم و اگر عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، آن عبارت را در یک علامت منفی ضرب و سپس علامت قدرمطلق را برمی‌داریم، نمودار تابع $y=|x|$ به صورت مقابل می‌باشد:



خواص قدرمطلق

۱) $|x|\geq ۰$

۲) $|-x|=|x|$

۳) $|x|=a \xrightarrow{a>۰} x=\pm a$

۴) $x^۲\leq a^۲ \Rightarrow |x|\leq a \xrightarrow{a>۰} -a\leq x\leq a$

۵) $|x|\geq a \xrightarrow{a>۰} x\geq a$ یا $x\leq -a$

۶) $|x.y|=|x|.|y|$

۷) $\sqrt[۲n]{x^{۲n}}=|x|$

۸) $|x|-|y|\leq|x\pm y|\leq|x|+|y|$ (نامساوی مثلثی)

۹) $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$

۱۰) $-|x|\leq x\leq|x|$

مثال ۱: حاصل عبارت $A=(\frac{x-|x|}{۲})^۲+(\frac{x+|x|}{۲})^۲$ کدام است؟

۱) $۲x^۲$ ۲) $۴x^۲$ ۳) $x^۲$ ۴) $x|x|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:**
$$A=\frac{x^۲+|x|^۲-۲x|x|}{۴}+\frac{x^۲+|x|^۲+۲x|x|}{۴}\xrightarrow{x^۲=|x|^۲}A=\frac{x^۲+x^۲-۲x|x|+x^۲+x^۲+۲x|x|}{۴}=\frac{۴x^۲}{۴}=x^۲$$

روش دوم: برای ساده شدن محاسبه عبارت فرض می‌کنیم $x=-۱$، در این صورت داریم:
$$(\frac{x-|x|}{۲})^۲+(\frac{x+|x|}{۲})^۲=(\frac{-۱-|-۱|}{۲})^۲+(\frac{-۱+|-۱|}{۲})^۲=+۱$$

تنها گزینه (۳) به ازای $x=-۱$ برابر $+۱$ می‌شود.

نامعادلات قدرمطلقی

مثال ۲: مجموعه جواب معادله‌ی $|۳x^۲+۲x|=x|۳x+۲|$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $\{-\frac{۲}{۳}\}\cup[۰,+\infty)$ ۴) $[۲,۵]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در قدرمطلق سمت چپ ابتدا از x فاکتور می‌گیریم و داریم:
$$|x(۳x+۲)|=x|۳x+۲|\Rightarrow|x|=x$$

تساوی فوق به ازای $۰\leq x<\infty$ برقرار می‌شود و واضح است که $x=\frac{-۲}{۳}$ نیز جواب معادله است؛ چرا که در معادله داده شده صدق می‌کند.

مثال ۳: مجموعه جواب نامعادله $|2x-8|<10$ کدام است؟

۱) $x<9$ ۲) $-9<x<9$ ۳) $1<x<9$ ۴) $-1<x<9$

پاسخ: گزینه «۴» از خاصیت شماره ۴ برای حل این نامعادله استفاده می‌کنیم:

$|2x-8|<10 \Rightarrow -10<2x-8<10$ به طرفین (+) اضافه می‌کنیم. $\Rightarrow -2<2x<18 \Rightarrow -1<x<9$

مثال ۴: مجموعه جواب نامعادله $2x+|x-1|<8$ کدام است؟

۱) $x<3$ ۲) $3<x<7$ ۳) $x<1$ ۴) $1<x<3$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود قدرمطلق باید نامعادله را در دو حالت زیر حل کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow 2x+x-1<8 \Rightarrow 3x<9 \Rightarrow x<3 \Rightarrow 1\leq x<3 \quad (1)\\ 2)\ x-1<0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow 2x+1-x<8 \Rightarrow x<7 \Rightarrow x<1 \quad (2)\end{array}\right\} \xrightarrow{(2),(1)} x<3$$

مثال ۵: تمام جواب‌های نامعادله $|x-1|<|x-3|$ کدام است؟

۱) $x\leq 2$ ۲) $x>2$ ۳) $1\leq x\leq 3$ ۴) $x<2$

پاسخ: گزینه «۴» **روش اول:** برای حل این نوع معادلات کافی است نامعادله $(x-1)^2<(x-3)^2$ را حل کنیم.

$$(x-1)^2<(x-3)^2 \Rightarrow x^2-2x+1<x^2-6x+9 \Rightarrow -2x+6x<9-1 \Rightarrow 4x<8 \xrightarrow{\div 4} x<2$$

روش دوم: مقدارگذاری: به ازای $x=2$ به نامساوی نادرست $1<1$ می‌رسیم، در نتیجه $x=2$ متعلق به مجموعه جواب نمی‌باشد.

پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست هستند به ازای $x=4$ به نامساوی نادرست $3<1$ می‌رسیم، پس گزینه ۲ هم نادرست است.

مثال ۶: تعداد جواب‌های نامعادله $|x-x^2|\leq x$ در مجموعه اعداد طبیعی کدام است؟ (آزمون استخدامی)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» چون قدرمطلق از x کوچک‌تر است و با توجه به تعریف قدرمطلق که حاصل آن همواره بزرگتر و یا مساوی صفر است باید $x>0$ در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر نامعادله را به ازای xهای بزرگتر از صفر حل می‌کنیم. $|x-x^2|\leq x \Rightarrow |x^2-x|\leq x \Rightarrow -x\leq x^2-x\leq x$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x\leq x^2-x \Rightarrow x^2\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,+\infty) \\ x^2-x\leq x \Rightarrow x^2-2x\leq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0\leq x\leq 2 \Rightarrow x=1,2 \quad \text{قابل‌قبولند}$$

دامنه توابع قدرمطلقی

مثال ۷: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

پاسخ: گزینه «۴» مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و داریم: $|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \text{دامنه}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

مثال ۸: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{|x|-x^2}$ کدام فاصله است؟

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ: گزینه «۴» **روش اول:** برای حل این مثال از رابطهٔ $|x|^2=x^2$ استفاده می‌کنیم.

$$|x|-x^2\geq 0 \Rightarrow |x|-|x|^2\geq 0 \Rightarrow |x|^2-|x|\leq 0 \Rightarrow |x|(|x|-1)\leq 0 \Rightarrow |x|-1\leq 0 \Rightarrow |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

$|x|$ صفر یا بزرگ‌تر از صفر است پس برای تعیین علامت نامعادله کافی است نامعادله $|x|-1\leq 0$ را حل کنیم.

روش دوم (عددگذاری): عدد ۱ در دامنه تابع صدق می‌کند، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح نیستند. از طرفی عدد ۲ در دامنه صدق نمی‌کند، بنابراین گزینه (۱) نیز صحیح نمی‌باشد. پس تنها گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.