مدرسان شریف

فصل اول

«معرفی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل هندسی»

درسنامه (۱): مفاهیم اولیه برنامه‌ریزی خطی

در جهان رقابتی امروز، بقای یک سازمان به تصمیمات مدیرانش وابسته است. اما با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمان‌ها و شرکت‌ها امر تصمیم‌گیری و هم‌چنین تخصیص منابع موجود بین فعالیت‌های بخش‌های مختلف آن به منظور دستیابی به حداکثر کارایی، مشکل شده و نیاز به سیستماتیک نمودن تصمیمات است. یکی از دانش‌هایی که با بسیاری از مسائل محوری تصمیم‌گیری مدیران در ارتباط است، تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی) است. اگرچه این علم هنوز در زمره‌ی علم نو محسوب می‌شود ولی به خوبی توانایی خود را در حل مسائلی مثل برنامه‌ریزی تولید، تخصیص منابع، کنترل موجودی، تبلیغات و ... نشان داده است.

معرفی برنامه‌ریزی خطی

به تخصیص منابع محدود به فعالیت‌های تعریف شده جهت افزایش بازدهی و انتخاب بهترین راه حل «برنامه‌ریزی خطی» می‌گویند. در واقع وجود منابع محدود موجب محدود شدن گزینه‌های تصمیم‌گیری می‌شود و هدف از برنامه‌ریزی خطی، انتخاب بهترین گزینه از بین گزینه‌های محدود شده است. هر مدل برنامه‌ریزی خطی **دارای تعدادی محدودیت خطی تشکیل یافته از متغیرهای مستقل** است.

متغیرهای مستقل متغیرهایی هستند که مقدار آن‌ها توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند.

هم‌چنین هر مدل با بهینه کردن متغیر وابسته‌ای که به صورت خطی با متغیرهای مستقل در ارتباط است، تعریف می‌شود.

متغیرهای وابسته معمولاً در تابع هدف که اغلب بیانگر مفاهیم اقتصادی مانند سود، هزینه، درآمد، تولید، فروش، مسافت، زمان و ... است، ارائه می‌گردند.

متغیرهای مستقل در برنامه‌ریزی خطی به عنوان **متغیرهای تصمیم** شناخته می‌شوند که مقدارشان توسط تصمیم‌گیرنده بعد از حل مدل به دست می‌آید. معمولاً این متغیرها در مدل با $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به نمایش گذاشته می‌شوند.
مدل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{Max(Min)}: Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

Subject to (s.t):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0 \text{ یا } \leq 0 \text{ یا } \text{آزاد (نامقید)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادل}} \text{Max(Min)}: Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\text{s.t}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ یا } \leq 0 \text{ یا نامقید} \qquad j = 1, \dots, n$$

در مدل گفته شده، C_j و b_i و a_{ij} **مقادیر ثابتی** هستند و x_jها **متغیرهای تصمیم‌گیری (فعالیت‌ها)** نام دارند. C_jها را **ضرایب هزینه یا سودآوری** و b_iها را **اعداد سمت راست** می‌نامیم که **بیان‌کننده مقدار منابع یا امکانات موجود ما** می‌باشد. b_iها می‌توانند مواد اولیه، زمان، ظرفیت ماشین‌آلات و ... باشند.

همچنین a_{ij}ها بیانگر مقداری از منبع iام است که برای انجام یک واحد از فعالیت jام مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه شده از سه قسمت تشکیل می‌شود:

۱) **تابع هدف:** تابعی ریاضی است که **نشان‌دهنده خواسته تصمیم‌گیرنده به منظور حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینـه** است. تابع هدف برنامه‌ریزی خطی عمدتاً به یکی از دو صورت مقابل است:

$$MinZ = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad \text{یا} \quad MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

در اینجا Z **متغیر وابسته‌ای** است که به وسیله‌ی **متغیرهای مستقل x_j** تعیین می‌شـود و **هدف از مدل برنامه‌ریزی خطی به دست آوردن مقادیری از x_j هاست که مقدار Z حداکثر یا حداقل می‌شود.**

۲) **محدودیت:** محدودیت‌ها که در مدل بالا به صورت $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b_i$ می‌باشند، نشان‌دهنده کل مصرف فعالیت‌ها از منبع i ام است و آن‌ها را **محدودیت‌های کارکردی** می‌نامیم.

وجود محدودیت‌ها در مدل موجب محدود شدن مقادیر قابل انتخاب برای متغیرهای تصمیم‌گیری (x_jها) می‌شود.

۳) **وضعیت متغیرهای تصمیم:** متغیر تصمیم با توجه به مصداق تعریف شده برای آن به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

الف) متغیر تصمیم غیرمنفی ($x_j \ge 0$) ب) متغیر تصمیم غیرمثبت ($x_j \le 0$).

ج) متغیر تصمیم آزاد در علامت (نامقید: x_j): در این حالت x_j می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر را انتخاب کند.

برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی از **شکل ماتریسی متغیرها** استفاده می‌شود که برای مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &Max(Min): Z = CX \\ &\qquad AX (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b \\ &\qquad X \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد} \end{aligned}$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad , \ C = [C_1, C_2, \dots, C_n]_{1\times n} \ , \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

فرم کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)

مدل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

تابع هدف: $Max\ (Min): Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$

Subject to:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b_m \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_n \ge 0$ یا ≤ 0 یا آزاد

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &Max\,(Min): Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ &S.t. \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\le \text{ یا } = \text{ یا } \ge) b_i \qquad for \quad i = 1, \dots, m \\ &x_j \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا آزاد} \qquad for \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

در این مدل، C_j و b_i و a_{ij} **مقادیر ثابتی** هستند و **x_jها متغیرهای تصمیم‌گیری (فعالیت‌ها)** نام دارند. **C_jها را ضرایب هزینه یـا سـودآوری** و b_iها را **اعداد سمت راست** می‌نامیم. **a_{ij}ها را ضرایب تکنولوژی** می‌نامیم و اگر b_i بیانگر **منبع i ام** باشد، a_{ij} بیانگر **مقداری از منبع i ام است که برای انجام یک واحد از فعالیت j ام** مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ را تابع هدف (objective Function) مـی‌نـامیم کـه **نشان‌دهنده خواسته تصمیم‌گیرنده به منظور حـداکثر کـردن سـود یـا حـداقل کـردن هزینـه اسـت.** محـدودیت $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$ **نشان‌دهنده کل مصرف فعالیت‌ها از منبع i ام است و آنها را محدودیت‌های کارکردی می‌نامیم.**

مفروضات برنامه‌ریزی خطی

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) باید در **چهار فرض** زیر صدق نماید:

الف) فرض تناسب: این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم **مستقل از همدیگر** هستند و **آهنگ تغییر تابع هدف و محدودیت‌ها متناسب با تغییرات متغیر** است. نتایج حاصل از فرض تناسب به صورت زیر می‌باشد:

۱ـ تابع هدف و محدودیت‌ها خطی می‌باشند.
۲ـ همه متغیرها توان اول هستند.
۳ـ مقدار مشتق تابع هدف نسبت به هر یک از متغیرها همواره مقدار ثابتی بوده و برابر ضریب هزینه (C_j) آن متغیر خواهد بود.
۴ـ هر فعالیت از فعالیت‌های دیگر مستقل است؛ بدین معنا که کالاها مکمل یا جانشین یکدیگر نبوده و تغییر قیمت یک فعالیت بر فعالیت دیگر بی‌اثر است.

ب) فرض جمع‌پذیری: بدین معنی است که در تابع هدف و محدودیت‌ها رابطه ریاضی بین متغیرها به صورت **جمع جبری** بیان می‌گردد. طبق این فرض، **رابطه متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد** یعنی **رابطه‌ی حاصل‌ضربی بین متغیرها وجود ندارد.**

ج) فرض بخش‌پذیری: این فرض بیان می‌کند که **متغیرهای تصمیم فقط مقادیر پیوسته** را اختیار می‌کنند.

د) فرض معین بودن: مقادیر پارامترهای C_j ، b_i و a_{ij} **اعدادی ثابت و مشخص** می‌باشند و **نمی‌توانند** حالت‌های **احتمالی یا تصادفی** داشته باشند.

مثال۱: یکی از محدودیت‌های موجود در یک مدل به صورت $x_1^2 + x_2 + x_2x_3 = 10$ می‌باشد، کدام‌یک از مفروضات برنامه‌ریزی خطی در این محدودیت نقض شده است؟

۱) معین بودن   ۲) تناسب   ۳) جمع‌پذیری   ۴) گزینه ۲ و ۳

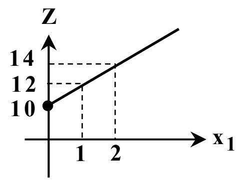
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجایی که در این محدودیت x_1^2 وجود دارد، پس میزان مصرف منبع این قید (یعنی ۱۰) متناسب با توان دوم x_1 است، مثلاً اگر $x_1 = 2$ در این صورت $x_1^2 = 4$ یعنی ۴ واحد از منبع مصرف می‌گردد. فرض تناسب ایجاب می‌کند که توان متغیرها در تمام قسمتهای مدل، ۱ باشد. همچنین به دلیل وجود x_2x_3 فرض جمع‌پذیری نقض شده است.

مثال ۲: در تابع هدف $Z = 2x_1 + 3x_2 + 10$ کدام‌یک از مفروضات برنامه‌ریزی خطی نقض شده است؟

۱) جمع‌پذیری   ۲) تناسب   ۳) بخش‌پذیری   ۴) همه فرض‌ها رعایت شده است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

x_1	۰	۱	۲
Z	۱۰	۱۲	۱۴



ملاحظه می‌شود که تغییرات Z متناسب با تغییرات x_1 نمی‌باشد.

نکته ۱: مدل برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح (I.L.P) یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که در آن **فرض بخش‌پذیری** نقض شده است، زیرا متغیرها **مجازند فقط مقادیر صحیح** را اختیار کنند.

تذکر ۱: فرض‌های تناسب و جمع‌پذیری را فرض‌های خطی می‌گوییم، یعنی اگر هر کدام نقض شوند، **مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (N.L.P)** خواهد بود.

مدل‌سازی

مهم‌ترین موضوع در برخورد با یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی، مدل‌سازی صحیح آن می‌باشد. مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی خطی شامل مراحل زیر است:

۱) تعریف متغیرهای تصمیم: متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که مقادیر آن‌ها **مجهول** است و می‌خواهیم در موردشان **تصمیم‌گیری** کنیم.

۲) تعریف تابع هدف: تابع هدف بیانگر هدفی است که مسئله دنبال می‌کند. **هدف** بیان شده مسئله می‌تواند **حداکثر کردن سود** (Max **سازی**)، **حداقل کردن هزینه‌ها** (Min **سازی**) و ... باشد.

۳) استخراج محدودیت‌ها: محدودیت‌ها برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی در حالت کلی دربرگیرنده **روابط میان «متغیرهای تصمیم»، روابط میان «متغیرهای تصمیم و منابع کم‌یاب»** و **روابط میان «متغیرهای تصمیم با هدف مسئله»** است.

یکی از معروف‌ترین مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، **مدل تولید** است.

در این قسمت به بیان یک مثال در زمینه‌ی تولید می‌پردازیم:

مثال۳: در یک کارگاه دو نوع لیوان (شربت‌خوری و تجملی) تولید می‌شود. زمان تولید هر جعبه لیوان شربت‌خوری ۴ دقیقه و هر جعبه لیوان تجملی ۳ دقیقه است. هر جعبه لیوان شربت‌خوری ۱۰ فوت مکعب و هر جعبه لیوان تجملی ۲۰ فوت مکعب فضای انبار را اشغال می‌کند. هم‌چنین می‌دانیم که لیوان شربت‌خوری بیشتر از ۹۰۰ جعبه تقاضا ندارد. اگر سود هر جعبه لیوان شربت‌خوری و هر جعبه لیوان تجملی به ترتیب ۵ و ۴/۵ واحد باشد و میزان زمان موجود برای تولید لیوان ۸۰ ساعت و کل فضای موجود در انبار ۱۵۰۰۰ فوت مکعب باشد، چه تعداد لیوان تولید شود تا تولیدکننده حداکثر سود را به دست آورد؟

☑ **پاسخ:** داده‌های مسئله در جدول زیر خلاصه می‌شود:

تولیدات	زمان تولید هر جعبه (دقیقه)	فضای لازم برای هر جعبه (فوت مکعب)	سود هر جعبه	حداکثر تقاضا
لیوان شربت‌خوری	۴	۱۰	۵	۹۰۰
لیوان تجملی	۳	۲۰	۴/۵	-
ظرفیت	۴۸۰۰	۱۵۰۰۰	-	-

گام‌های مدل کردن مسئله به صورت زیر است:

۱) تعریف متغیرهای تصمیم: در این مسئله، هدف تعیین میزان تولید از هر نوع لیوان است تا حداکثر سود حاصل شود. پس برای متغیرهای تصمیم، مقدار عددی تولید هر محصول را مدنظر قرار می‌دهیم: $x_1 =$ تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری ، $x_2 =$ تعداد جعبه لیوان تجملی

۲) تعریف تابع هدف: هدف این مسئله حداکثر کردن سود می‌باشد. در این مسئله سود کارگاه عبارت است از:

سود کل : تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری تولید شده × سود هر جعبه لیوان شربت‌خوری + تعداد جعبه لیوان تجملی تولید شده × سود هر جعبه لیوان تجملی

← سود کل = ۵ × تعداد جعبه لیوان شربت‌خوری + ۴/۵ × تعداد جعبه لیوان تجملی

در رابطه‌ی فوق از آنجایی که تعداد تولید هر نوع لیوان مشخص نیست و در واقع به دنبال تعیین میزان تولید هر کدام هستیم، متغیرهای تصمیم مسئله یعنی x_1 و x_2 را جایگزین تعداد هر جعبه تولید لیوان می‌کنیم و میزان سود کل را با Z نمایش می‌دهیم: $Z = ۵x_1 + ۴/۵x_2$

۳) تعریف محدودیت‌ها: در این مسئله سه نوع محدودیت داریم: ۱ـ زمان در دسترس برای تولید ۲ـ فضای انبار ۳ـ تقاضا

توجه کنید که کل زمان در دسترس برای تولید لیوان ۸۰ ساعت است و برای تولید هر جعبه لیوان شربت‌خوری و تجملی به ترتیب ۴ و ۳ دقیقه زمان لازم است. اگر x_1 میزان تولید تعداد جعبه‌های لیوان شربت‌خوری و x_2 میزان تولید تعداد جعبه‌های لیوان تجملی باشد، مجموع زمان تولید تعداد جعبه‌های لیوان عبارت است از:

زمان تولید تعداد جعبه‌های لیوان: $۴x_1 + ۳x_2$

اما حداکثر میزان زمان موجود ۸۰ ساعت می‌باشد. دقت کنیم که واحدهای مورد استفاده باید یکسان باشند. از آنجایی که زمان تولید هر جعبه لیوان برحسب دقیقه است، زمان موجود نیز باید به دقیقه تبدیل شود. پس: $۴x_1 + ۳x_2 \leq ۴۸۰۰$

توجه شود که در این محدودیت از علامت کوچکتر مساوی ($\leq$) برای نامعادله استفاده شده است، یعنی می‌توان از تمام زمان موجود برای تولید استفاده نکرد.

به طور مشابه، برای محدودیت مربوط به فضای انبار و تقاضا داریم:

محدودیت تقاضا: $x_1 \leq ۹۰۰$ محدودیت فضای موجود: $۱۰x_1 + ۲۰x_2 \leq ۱۵۰۰۰$

از آنجایی که مقادیر تولید لیوان نمی‌تواند منفی و غیرصحیح باشد، محدودیت‌های زیر به مدل اضافه می‌شود:

$x_1 \geq ۰ \quad , \quad x_2 \geq ۰$ $\qquad x_i :$ عدد صحیح $\quad i = ۱,۲$

به این ترتیب، مدل به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = ۵x_1 + ۴/۵x_2 \\
&\text{s.t} \\
&\quad ۴x_1 + ۳x_2 \leq ۴۸۰۰ \\
&\quad ۱۰x_1 + ۲۰x_2 \leq ۱۵۰۰۰ \\
&\quad x_1 \leq ۹۰۰ \\
&\quad x_1, x_2 \geq ۰ \\
&\quad x_i : \text{عدد صحیح} \quad i = ۱,۲
\end{aligned}
$$

نکته ۲: اگر بتوانیم مسئله‌ای را به دو صورت فرموله کنیم که هر دو مدل حاصل برنامه‌ریزی خطی و از نظر بیان مشابه باشند و مدل اول دارای ۱۰۰متغیر و ۱۰۰۰محدودیت و مدل دوم دارای ۱۰۰۰متغیر و ۱۰۰محدودیت باشد، از نظر حجم محاسبات معمولاً مدل دوم بهتر است. در حالت کلی جهت حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی هرچه مقدار محدودیت‌ها کمتر باشد، سرعت حل و یا به عبارتی حجم محاسبات کمتر خواهد بود.

مدرسان شریف

فصل سوم

«روش سیمپلکس»

درسنامه (۱): تشکیل جدول ابتدایی و به‌روز آوری سیمپلکس

روش سیمپلکس (simplex) در سال ۱۹۴۷ توسط پروفسور دانتزیک ابداع گردید. در این روش که به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متغیر ابداع شد، ابتدا **یک نقطه‌ی گوشه‌ای شدنی اولیه** برای مسأله در نظر گرفته می‌شود (**معمولاً مبدأ مختصات**) و با انجام یک سری محدود از مراحل که در هر مرحله **مقدار تابع هدف نسبت به مرحله قبل بهبود می‌یابد یا حداقل بدتر نمی‌شود، نقطه‌ی بهینه** مسأله پیدا می‌شود. لازم به ذکر است که در هر مرحله فقط یک نقطه‌ی گوشه‌ای از فضای شدنی جواب مورد توجه قرار می‌گیرد. از آن‌جایی که تعداد لبه‌های مرز جواب محدود است، لذا روش سیمپلکس با **تعداد محدودی از تکرارهای متوالی** جواب بهینه را پیدا می‌کند.

الگوریتم سیمپلکس

الگوریتم سیمپلکس معمولی برای حل مسائلی است که **محدودیت‌هایش به صورت ≤ و اعداد سمت راست آن نامنفی** باشند. برای حل یک مسأله LP به روش سیمپلکس(SP) ابتدا آن را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم، سپس گام‌های الگوریتم را به صورت زیر اجرا می‌کنیم:

گام ۱ (تشکیل اولین جدول)

فرض می‌کنیم مسأله به فرم $\begin{array}{l} \max/\min \ Cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}$ بوده و آن را به فرم استاندارد $\begin{array}{l} \max/\min \ Cx + 0S \\ Ax + Is = b \\ x,s \ge 0 \end{array}$ تبدیل می‌کنیم. حال اولین جدول سیمپلکس را تشکیل می‌دهیم.

		x_1	x_2	$\dots$	x_n	S_1	$\dots$	S_m	R.H.S	
	Z	$-C_1$	$-C_2$	$\dots$	$-C_n$	0	$\dots$	0	0	← سطر هدف
متغیرهای پایه‌ای	S_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	$\dots$	0	b_1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	← محدودیت‌ها
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	$\dots$	1	b_m	

در اولین جدول سیمپلکس متغیرهای کمکی S_1 تا S_m متغیر پایه‌ای هستند و مقادیر متغیرهای پایه‌ای هر جدول در ستون R.H.S قابل دسترس است و متغیرهای x_1 تا x_n غیر پایه‌ای هستند و همواره متغیرهای غیر پایه مقدار صفر دارند، پس اولین جدول سیمپلکس متناظر با گوشه مبدأ مختصات $O(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ می‌باشد.

گام ۲ (تست بهینگی جدول)

شرط بهینگی در مسأله Max : اگر تمام ضرایب سطر هدف نامنفی باشند جدول بهینه است.

شرط بهینگی در مسأله Min: اگر تمام ضرایب سطر هدف نامثبت باشند جدول بهینه است.

اگر یک جدول سیمپلکس بهینه باشد متوقف می‌شویم و می‌توان مختصات نقطه بهینه (x^*) و مقدار بهینه تابع هدف (z^*) را از این جدول به دست آورد، در غیر این صورت به گام ۳ می‌رویم.

گام۳ (تعیین متغیر ورودی به پایه و خروجی از پایه)

اگر یک جدول سیمپلکس بهینه نباشد یعنی، گوشه‌ای از فضای موجه که متناظر با این جدول سیمپلکس است بهینه نمی‌باشد. بنابراین با **ورود یک متغیر غیرپایه‌ای به پایه و خروج یک متغیر پایه‌ای از پایه در عدم تباهیدگی به گوشه موجه مجاور** حرکت می‌کنیم.

تعیین متغیر ورودی به پایه: در مسأله Max هر متغیر غیر پایه‌ای **که عدد سطر هدفش منفی** باشد می‌تواند وارد پایه گردد و **مقدار تابع هدف(Z) را بهبود بخشد، اما الگوریتم سیمپلکس متغیری را برای ورود به پایه انتخاب می‌کند که عدد سطر هدف آن منفی‌ترین باشد؛** البته ممکن است انتخاب متغیر دیگری برای ورود به پایه، مقدار Z را بیشتر بهبود دهد.

انتخاب متغیر ورودی در مسأله Max: منفی‌ترین عدد در سطر هدف، متغیر ورودی به پایه را نشان می‌دهد.

انتخاب متغیر ورودی در مسأله Min: مثبت‌ترین عدد در سطر هدف، متغیر ورودی به پایه را نشان می‌دهد.

پس از انتخاب متغیر ورودی به پایه، ستون این متغیر در جدول را **ستون لولا** می‌نامیم.

تعیین متغیر خروجی از پایه:

اعداد ستون سمت راست جدول (R.H.S) را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می‌کنیم و کوچکترین نسبت را می‌یابیم، متغیر پایه‌ای متناظر با این کمترین نسبت نشان دهنده متغیر خروجی از پایه است و سطر متناظر با متغیر خروجی را «**سطر لولا**» می‌نامیم و ستون متغیر ورودی به پایه را «**ستون لولا**» می‌نامیم. عنصری که در محل برخورد سطر لولا و ستون لولا واقع است را «**عنصر لولا**» می‌گوییم. به عمل یافتن کوچکترین نسبت، تست min نسبت گویند که با θ نمایش می‌دهند که اگر فرض کنیم اندیس متغیر خروجی از پایه با r نمایش داده شود و اندیس متغیر ورودی به پایه با k نمایش داده شود، θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\theta=\min\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\,|\,y_{ik}>0\}=\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}}$$

که $\bar{b}_i$، مقدار سمت راست متناظر با هر سطر در جدول می‌باشد.

مثال۱: اگر در روش سیمپلکس روی یک مسأله با تابع هدف مینیمم‌سازی، یک متغیر از پایه خارج شود و مقدار تابع هدف در جدول جدید کاهش یابد، آن متغیر در جدول جدید .... (ریاضی ـ سراسری ۹۵)

۱) اگر وارد پایه شود، جدول بعدی تباهیده خواهد بود.
۲) می‌تواند وارد پایه شود ولی مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.
۳) نمی‌تواند نامزد ورود به پایه باشد.
۴) ممکن است وارد پایه بشود یا نشود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» متغیر خارج شده از پایه در مرحله بعد، شرط ورود به پایه را ندارد.

مثال۲: برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

متغیر اساسی	شماره معادله	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	سمت راست
z	۰	۱	۳	۰	۰	۱/۵	۰/۵	۸
x_3	۱	۰	‎−۱	۰	۱	۱/۵	‎−۰/۵	۱
x_2	۲	۰	۲	۱	۰	‎−۰/۵	۰/۵	۲

این مسأله را با روش سیمپلکس حل کرده‌ایم. آخرین جدول آن مربوط (به جواب بهینه) به نرخ جدول فوق است. S_2, S_1 سطرهای (Slack vareiable) هستند. اگر x_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب شود، کدام‌یک از مطالب زیر صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) اگر x_2, x_1 سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است.
۲) اگر x_3, x_1 سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.
۳) اگر x_2, x_1 سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده بهینه است.
۴) اگر x_2, x_1 سطرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ورود x_1 به پایه متغیر اگر x_2 از پایه خارج شود، x_1 و x_3 در تکرار بعدی متغیر اساسی خواهند بود و جواب حاصل، شدنی است ولی بهینه نیست و اگر x_1 را وارد پایه و x_3 را خارج کنیم، در جدول بعدی x_1 و x_2 پایه خواهند بود و جواب حاصل نشدنی و غیربهینه است.

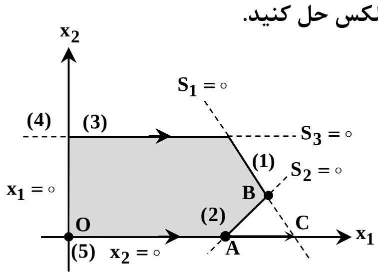
گام ۴ (به روزآوری جدول سیمپلکس)

با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ستون لولا را در محل عنصر لولا به یک ستون یکه تبدیل کرده و همزمان تغییرات را روی بقیه اجزاء جدول نیز اجرا می‌کنیم و به گام ۲ می‌رویم.

مثال۳: مسأله برنامه ریزی مقابل را به روش سیمپلکس حل کنید.

$$\text{Max} \quad Z = ۴x_۱ + x_۲$$
S.t
$(۱) \quad x_۱ + x_۲ \le ۱۰$
$(۲) \quad x_۱ - x_۲ \le ۸$
$(۳) \quad x_۲ \le ۴$
$(۴,۵) \quad x_۱, x_۲ \ge ۰$

$\xrightarrow{\text{فضای موجه}}$



پاسخ: ابتدا مسأله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$\underset{\text{S.t}}{\text{Max}} \quad Z = ۴x_۱ + x_۲$$

$$\begin{aligned} & x_۱ + x_۲ + S_۱ = ۱۰ \\ & x_۱ - x_۲ + S_۲ = ۸ \\ & x_۲ + S_۳ = ۴ \\ & x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳ \ge ۰ \end{aligned} \xrightarrow{\text{ماتریس ضرایب}} A = \begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای تشکیل اولین جدول سیمپلکس تابع هدف را به شکل $Z - ۴x_۱ - x_۲ = ۰$ می‌نویسیم.

		↓ $x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
	Z	-۴	-۱	۰	۰	۰	۰	← تابع هدف
	$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰	
←	$S_۲$	۱	-۱	۰	۱	۰	۸	← محدودیت‌ها
	$S_۳$	۰	۱	۰	۰	۱	۴	

در اولین جدول سیمپلکس متغیرهای پایه‌ای $x_B = (S_۱, S_۲, S_۳)$ و متغیرهای غیر پایه $x_N = (x_۱, x_۲)$ می‌باشند و پایه $B = [a_۳, a_۴, a_۵]$ متناظر این جدول است و این جدول جواب پایه‌ای موجه $X(x_۱ = ۰, x_۲ = ۰, S_۱ = ۱۰, S_۲ = ۸,\ S_۳ = ۴)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه شدنی $O(x_۱ = ۰, x_۲ = ۰)$ از فضای موجه است و مقدار سود نیز $Z = ۰$ می‌باشد.

این جدول بهینه نیست، زیرا در سطر هدف عدد منفی وجود دارد. متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ شرط ورود به پایه را دارند یعنی با تولید محصول ۱ یا ۲ می‌توان سود را افزایش داد.

الگوریتم سیمپلکس، متغیر $x_۱$ را جهت ورود به پایه (بالا آمدن از سطح صفر) انتخاب می‌کند. با ورود $x_۱$ به پایه مقدار آن شروع به زیاد شدن می‌کند، پس از نظر هندسی از گوشه O خارج و به سمت گوشه A حرکت می‌کنیم. اما سؤال این است که مقدار $x_۱$ چقدر زیاد شود به گونه‌ای که به گوشه شدنی مجاور، یعنی گوشه A برسیم. پاسخ این سؤال تست مینیمم نسبت را به ما می‌دهد.

$$\text{تست مینیمم نسبت}: \theta = \text{Min}\{\frac{۱۰}{۱} = ۱۰, \frac{۸}{۱} = ۸\} = ۸ \Rightarrow \ S_۲\text{متغیر خروجی}$$

بنابراین اگر متغیر $x_۱$ را به مقدار $\theta = ۸$ افزایش دهیم به گوشه شدنی مجاور یعنیA می‌رسیم. وقتی به گوشهA برسیم خواهیم داشت: $S_۲ = ۰$ یعنی $S_۲$ از پایه خارج می‌شود. دقت کنید که اگر $x_۱$ را به مقدار بیشتر از ۸ افزایش دهیم از فضای موجه خارج می‌شویم. به ویژه اگر $x_۱$ را تا مقدار ۱۰ افزایش دهیم به گوشه غیر موجه C می‌رسیم. متغیر $x_۱$ ورودی به پایه و متغیر $S_۲$ خروجی از پایه است و با این جابه‌جایی به گوشه شدنی مجاور یعنی گوشهA می‌رویم.
جدول بعدی سیمپلکس به صورت زیر است:

		$x_۱$	↓ $x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
	Z	۰	-۵	۰	۴	۰	۳۲
←	$S_۱$	۰	۲	۱	-۱	۰	۲
	$x_۱$	۱	-۱	۰	۱	۰	۸
	$S_۳$	۰	۱	۰	۰	۱	۴

در جدول بالا متغیرهای پایه‌ای $x_B = (S_۱, x_۱, S_۳)$ و متغیرهای غیرپایه‌ای $x_N = (x_۲, s_۲)$ می‌باشند و پایه $B = [a_۳, a_۱, a_۵]$ متناظر با این جدول است و این جدول جواب پایه‌ای موجه $(x_۱ = ۸, x_۲ = ۰, S_۱ = ۲, S_۲ = ۰, S_۳ = ۴)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه شدنی $A(x_۱ = ۸, x_۲ = ۰)$ از فضای موجه است یعنی، از محصول اول ۸ واحد و محصول دوم تولید نمی‌شود و میزان سود $Z = ۳۲$ است. با توجه به سطر هدف هنوز جدول بهینه نیست زیرا در سطر هدف عدد زیر $x_۲$ مقدار ۵- است، یعنی با تولید هر واحد از محصول $x_۲$ می‌توان سود را به میزان ۵ واحد افزایش داد. بنابراین متغیر $x_۲$ برای ورود به پایه انتخاب می‌شود. با ورود $x_۲$ به پایه مقدار $x_۲$ شروع به مثبت شدن می‌کند یعنی، از گوشه A خارج و به سمت گوشه B حرکت می‌کند. برای تعیین متغیر خروجی و میزان افزایش مجاز $x_۲$ تست مینیمم نسبت را انجام می‌دهیم.

$$\text{تست مینیمم نسبت}: \theta = \text{Min}\{\frac{۲}{۲} = ۱, \frac{۴}{۱} = ۴\} = ۱ \Rightarrow \ S_۱\text{متغیر خروجی}$$

بنابراین اگر $x_۲$ را از صفر به مقدار $\theta = ۱$ افزایش دهیم به گوشه شدنی مجاور یعنی، B می‌رسیم و در گوشه B داریم: $S_۱ = ۰$ و از پایه خارج می‌شود. جدول بعد به صورت مقابل است:

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۳۷
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۹
$S_۳$	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۳

از آن‌جایی که تمامی ضرایب سطر هدف مثبت هستند، پس جدول اخیر بهینه است. این جدول جواب پایه‌ای موجه $X^*(x_۱ = ۹, x_۲ = ۱, S_۱ = ۰, S_۲ = ۰, S_۳ = ۳)$ را نشان می‌دهد که متناظر با گوشه بهینه $B(x_۱ = ۹, x_۲ = ۱)$ است و مقدار بهینه تابع هدف $Z^* = ۳۷$ می‌باشد.

نکته ۱: زمان حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی در درجه اول به تعداد محدودیت‌های آن بستگی دارد و بنابراین هرچه تعداد محدودیت‌ها کمتر باشد زمان حل کمتر می‌شود.

مثال۴: جدول مقابل را برای یک مسأله ماکزیمم‌سازی در نظر بگیرید، اگر $x_۴$ وارد پایه گردد و باعث ۱۰۰ واحد افزایش در تابع هدف شود چه رابطه‌ای بین δ, α برقرار است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	RHS
$x_۱$	۱	۰	۰	-۲	۲۰
$x_۲$	۰	۱	۰	δ	۱۰
$x_۳$	۰	۰	۱	-۳	۱۲
$c_j - z_j$	۰	۰	۰	α	

۱) $\alpha = -۱۰\delta$ ۲) $\alpha = +۱۰\delta$

۳) $\alpha = \delta$ ۴) $\delta = ۱۰\alpha$

پاسخ: گزینه «۲» اگر متغیر x_j وارد پایه شود و θ مقدار حاصل از تست مینیمم نسبت باشد، مقدار تغییر تابع هدف برابر $\Delta Z = -(Z_j - C_j) \times \theta$ خواهد بود. توجه شود در سطر هدف مقادیر $C_j - Z_j$ داده شده، پس اگر $x_۴$ وارد پایه شود خواهیم داشت: $Z_۴ - C_۴ = -\alpha$ و $\theta = \frac{۱۰}{\delta}$

بنابراین می‌توان نوشت: $۱۰۰ = -(Z_۴ - C_۴) \times \theta \Rightarrow ۱۰۰ = \alpha \times \frac{۱۰}{\delta} \rightarrow \alpha = ۱۰\delta$

مثال۵: اگر در یکی از مراحل روش سیمپلکس، متغیری از پایه خارج شود، در مرحله بعد این متغیر: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حتماً وارد پایه نخواهد شد.

۲) ممکن است وارد پایه شود.

۳) حتماً وارد پایه خواهد شد.

۴) اگر جواب آن مرحله منحط (Degenerate) نباشد، حتماً وارد پایه نخواهد شد.

پاسخ: گزینه «۲» اگر x_k وارد پایه شود و x_r از پایه خارج گردد، در این صورت $Z_r - C_r$ در جدول بعدی به صورت $Z_r - C_r = -\frac{۱}{\bar{a}_{rk}}(Z_K - C_K)$ می‌باشد. با فرض Max بودن مسأله داریم: $Z_k - C_k < ۰$ (چون x_k ورودی به پایه است) و همچنین در $\bar{a}_{rk} > ۰$ زیرا عنصر لولا می‌باشد. در نتیجه $Z_r - C_r$ در مرحله بعد مثبت است و شرط ورود به پایه را ندارد. البته در حالت بهینه چندگانه اگر x_k متغیر ورودی به پایه باشد $(Z_k - C_k = ۰)$ و متغیر x_r متغیر خروجی از پایه باشد، در این صورت در مرحله بعدی مقدار $Z_r - C_r$ عبارت است از:

$Z_r - C_r = -\frac{۱}{\bar{a}_{rk}}\underbrace{(Z_k - C_k)}_{۰} = ۰$، یعنی x_r شرط ورود به پایه را داراست.

نکات الگوریتم سیمپلکس

نکته ۲: هر جدول سیمپلکس متناظر با یک جواب پایه‌ای موجه (BFS) و یا گوشه شدنی فضای موجه مسأله L.P است و اگر گوشه تباهیده باشد ممکن است بیش از یک جدول سیمپلکس متناظر با آن گوشه وجود داشته باشد.

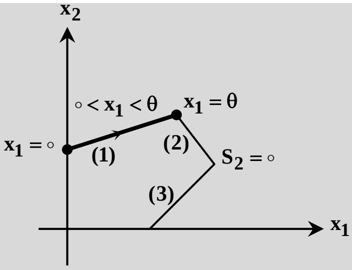
نکته ۳: انتخاب متغیر ورودی به پایه با معیار ذکر شده در الگوریتم سیمپلکس تضمین می‌کند که مقدار تابع هدف(Z) در جدول بعدی بدتر نشود.

نکته ۴: انتخاب متغیر خروجی از پایه با معیار ذکر شده (تست مینیمم نسبت) تضمین می‌کند که از ناحیه شدنی (موجه) مسأله خارج نشویم و جدول بعدی یک گوشه موجه(BFS) از فضای حل را نشان دهد و همچنین استقلال خطی بردارهای پایه در جدول بعد حفظ شود.

نکته ۵: به تعداد مؤلفه‌های مثبت ستون لولا، گوشه‌ی موجه و غیرموجه روبروی جهت حرکت وجود دارد که اولین آنها گوشه‌ی موجه است و با تعیین متغیر خروجی طبق تست مینیمم نسبت می‌توان به این گوشه‌ی موجه رسید. به تعداد مؤلفه‌های منفی ستون لولا، گوشه‌ی غیرموجه پشت جهت حرکت وجود دارد و به تعداد مؤلفه‌های صفر در ستون لولا محدودیت موازی جهت حرکت وجود دارد.

به طور مثال در اولین جدول سیمپلکس مثال ۳ در ستون لولا دو عدد مثبت وجود دارد. با توجه به شکل فضای موجه ملاحظه می‌شود که از گوشه O به دو گوشه A و C جهت روبرو برای حرکت وجود دارد و همچنین ستون لولا دارای یک مؤلفه صفر است، یعنی یک محدودیت موازی جهت حرکت وجود دارد (محدودیت ۳).

نکته ۶: اگر متغیر x_r متغیر ورودی به پایه شد، پس متغیر x_r شروع به مثبت شدن می‌کند و حداکثر مقدار افزایش x_r برابر θ یعنی، عدد حاصل از تست مینیمم نسبت (در صورت وجود) است.
اگر x_r مقداری کمتر از θ بگیرد هنوز به گوشه مجاور نرسیده‌ایم و اگر $x_r = \theta$ در این صورت به گوشه موجه مجاور می‌رسیم و اگر x_r مقداری بیشتر از θ بگیرد از فضای موجه خارج می‌شویم.



نکته ۷: مقدار متغیر ورودی به پایه در جدول بعد همان مقدار تست مینیمم نسبت (θ) می‌باشد.

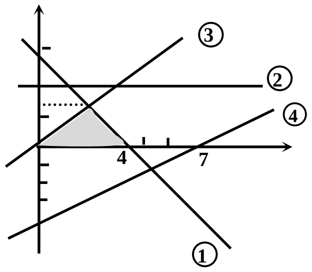
نکته ۸: **میزان تغییر** تابع هدف از یک جدول سیمپلکس به جدول بعد عبارت است از:

$$\Delta Z = -\text{(عدد زیرمتغیر ورودی در سطر هدف)} \times \text{(مقدار تست مینیمم نسبت)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_{\text{جدول بعد}} = Z_{\text{جدول}} + \Delta Z$$

مثال ۶: فرض کنید یک مسأله LP که شکل آن به صورت مقابل است، در حال حل با روش سیمپلکس است. اگر از نقطه (۴,۰) بخواهیم به تکرار بعد برویم و متغیر x_2 وارد شونده به پایه باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر جزء مقادیر حاصل از انجام تست نسبت برای تعیین متغیر خارج شونده نمی‌باشد؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۱)

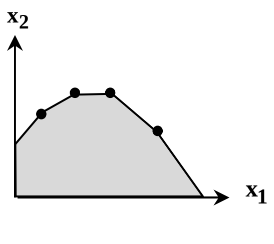


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» از فرض مسأله می‌دانیم متغیر x_2 متغیر غیرپایه‌ای وارد شونده به پایه است، یعنی باید از سطح صفر افزایش یابد. افزایش هرچه بیشتر x_2 باعث بهبود هرچه بیشتر تابع هدف می‌گردد. البته باید توجه داشت که متغیر x_2 را تا جایی می‌توانیم افزایش دهیم که حداقل یکی از متغیرهای پایه‌ای به سطح صفر کاهش پیدا کند (حداقل یک محدودیت مسدودکننده وجود داشته باشد). با توجه به شکل داده شده در این مسأله، با ورود متغیر x_2 به پایه محدودیت‌های ۲($x_2 = 3$)، محدودیت ۳($x_1 = x_2$) و بردار $x_1 = 0$، محدودیت‌های مسدودکننده هستند. اما محدودیت ۴($7x_1 - 4x_2 = -8$) محدودیت مسدودکننده نیست؛ زیرا با حرکت x_2 به سمت محدودیت ۴، مقدار x_2 به اندازه‌ی ۱ واحد (با توجه به شکل) کاهش خواهد یافت. بنابراین گزینه (۱) جواب مسأله است.

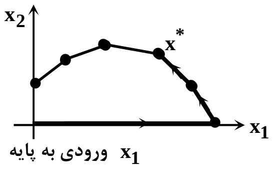
◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۷: منطقه موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف $\text{Max } z = 5x_1 + x_2$ به صورت مقابل است. تعداد جدول‌های لازم برای حل این مسأله به روش سیمپلکس چه تعداد است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)



۱) ۳
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» متغیر x_1 در اولین جدول ورودی به پایه است و مسیر حرکت سیمپلکس به سمت گوشه بهینه به صورت شکل مقابل است.
هر نقطه گوشه‌ای در مسیر متناظر با یک جدول است.



◆ ◆ ◆ ◆

نکته ۹: اگر در مرحله‌ای از روش سیمپلکس، سطر لولا یگانه نباشد، در مرحله بعد حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر می‌گردد.

نکته ۱۰: با انتخاب متغیر ورودی به پایه مقدار تابع هدف لزوماً بیشترین افزایش (در مسأله Max) را نخواهد داشت. علت آن هم این است که روش سیمپلکس برای تعیین متغیر ورودی **شیب بهبود را مبنا قرار می‌دهد نه میزان بهبود را.**

نکته ۱۱: روش سیمپلکس لزوماً مسیر کوتاهتر برای رسیدن به نقطه بهینه را طی نمی‌کند.

نکته ۱۲: در روش سیمپلکس اگر متغیری از پایه خارج شود، بلافاصله در تکرار بعد وارد پایه نخواهد شد. (چرا؟)

نکته ۱۳: تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر جدول سیمپلکس بسته به تعداد محدودیت‌هاست.

مثال۸: جدول مقابل یکی از مراحل سیمپلکس است. اگر مقدار تابع هدف جدول بعد ۲۰ باشد، مقدار α کدام است؟

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
	۰	۳	α	۵	۰	۱۲
x_2			۶			۱۲
S_2			۳			۹

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۳- ۴) ۴-

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به افزایش مقدار تابع هدف از جدول فعلی به جدول بعدی $(۲۰ \to ۱۲)$ متوجه می‌شویم که مسأله max سازی می‌باشد و شرط ورود به پایه منفی بودن سطر هدف در جدول فعلی می‌باشد. پس متغیر x_3 ورودی بـه پایـه اسـت، زیـرا x_2 و S_1 شـرط ورود بـه پایـه را ندارنـد و همچنین $\Delta Z = ۲۰ - ۱۲ = ۸$ بنابراین:

$$\Delta Z = -(\alpha)(\frac{۱۲}{۶}) \Rightarrow ۸ = -۲\alpha \Rightarrow \alpha = -۴$$

نکته۱۴: در روش سیمپلکس اولیه آزمون نسبت $\left(\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} \text{ معادل } \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}\right)$ غیرمنفی ماندن متغیرهای پایه را تضمین می‌کند.

مثال۹: جدول زیر یکی از مراحل حل یک LP مینیمم سازی است، بیشترین کاهش ممکن برای Z در جدول مرحله بعد کدام است؟

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z		۳	۲			۱-	
x_1		۶	۲			۴	۱۲
S_1		۱	۱			۱-	۴
S_2		۰	۱-			۰	۳

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» باید توجه داشت که انتخاب متغیر ورودی به پایه، طبق روش سیمپلکس (انتخاب مثبت‌ترین ضریب سطر هدف) لزوماً بیشـترین بهبـود را برای تابع هدف ایجاد نمی‌کند. پس در این مسأله باید میزان کاهش تابع هدف برای تمامی متغیرهایی که شرط ورود به پایه را دارا هستند بررسی کنیم.

اگر x_2 ورودی باشد: $\Delta Z = -(۳)(\frac{۱۲}{۶}) = -۶$ اگر x_3 ورودی باشد: $\Delta Z = -(۲)(\frac{۴}{۱}) = -۸$

پس با ورود x_3 به پایه میزان کاهش Z در مرحله بعد بیشتر است، هر چند که الگوریتم سیمپلکس متغیر x_2 را برای ورود به پایه انتخاب می‌کند.

مثال۱۰: جدول زیر یکی از مراحل حل یک مسأله Max با روش سیمپلکس است، با ورود x_4 و خروج x_5 گوشه مجاور ....

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z		۳	۳	۳		۱۶
x_1	۱	۲	۱	۰	۰	۸
x_5	۰	۳	۱-	۱	۱	۱۲

۱) ناموجه ولی بهینه است. ۲) موجه و بهینه است.

۳) موجه ولی نابهینه است. ۴) نا موجه و نابهینه است.

پاسخ: گزینه«۴» متغیر x_4 شرط ورود به پایه را ندارد، پس جدول بعدی از بهینگی خارج می‌شود. همچنین اگر x_4 وارد شود، طبـق تسـت مینـیمم نسبت، باید x_1 از پایه خارج گردد اما اگر x_5 را از پایه خارج کنیم جدول بعد یک گوشه ناموجه را نشان می‌دهد.

مثال۱۱: جدول مقابل دو تکرار متوالی از الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بیشینه‌سازی (Max) را نشان می‌دهد. مقدار a برابر است با ....

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	۱		۲-			۴
x_1	۰		۲			۶
s_1	۰		a			۸
z	۱					۸
x_1	۰					۲
x_2	۰					۲

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تکرار جدول متغیر x_2 ورودی به پایه و متغیر S_1 خروجی از پایه می‌باشد.

نسبت Min تست $= \frac{۸}{a}$ $\quad b_2 = \frac{۸}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴$

مثال۱۲: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید، حداکثر مقدار Z عبارت است از:

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\, Z = ۲x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ + ۸x_۵ + ۴x_۶ + ۵x_۷ + ۷x_۸$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ + x_۷ + x_۸ \le ۱۰۰$$

$$۵ \le x_j \le ۲۰ \qquad j = ۱ \text{ تا } ۸$$

۱) ۵۲۰　　۲) ۵۷۰

۳) ۶۴۰　　۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با تغییر متغیر $x'_j = x_j - ۵$ مسأله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\, Z = ۲x'_۱ + ۶x'_۲ + x'_۳ + ۳x'_۴ + ۸x'_۵ + ۴x'_۶ + ۵x'_۷ + ۷x'_۸ + ۱۸۰$$

$$x'_۱ + x'_۲ + x'_۳ + x'_۴ + x'_۵ + x'_۶ + x'_۷ + x'_۸ \le ۶۰$$

$$۰ \le x'_j \le ۱۵ \quad \text{for} \quad j = ۱,\dots,۸$$

به منظور ماکزیمم شدن تابع هدف، ۴ تا از متغیرهایی که ضریب تابع هدف آنها بیشتر است، یعنی: $x'_۷, x'_۲, x'_۸, x'_۵$ مقدار ۱۵ را اختیار می‌کنند و بقیه متغیرها مقدار صفر را می‌گیرند.

$$Z^* = ۶(۱۵) + ۸(۱۵) + ۵(۱۵) + ۷(۱۵) + ۱۸۰ = ۵۷۰$$

مثال۱۳: جدول زیر متناظر است با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله مینیمم‌سازی (P). s_iها متغیرهای کمکی هستند. فرض کنید در یکی از جواب‌های شدنی برای مسأله (P) داریم $s_۱ = ۱$ و $s_۳ = ۴$. مقدار $x_۱$ در این جواب شدنی برابر است با .... (ریاضی ـ سراسری ۹۵)

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	RHS
Z	۱	۰	۰	−۱	۰	۰	α
$x_۲$	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۸
$x_۱$	۰	۱	۰	۱	۰	−۱	۲
$s_۲$	۰	۰	۰	−۱	۱	۱	۶

۱) ۲　　۲) ۴

۳) ۵　　۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق سطر دوم جدول سیمپلکس داریم:

$$x_۱ + s_۱ - s_۳ = ۲ \xrightarrow{s_۱=۱,\, s_۳=۴} x_۱ = ۵$$

مثال۱۴: کدام گزینه نادرست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

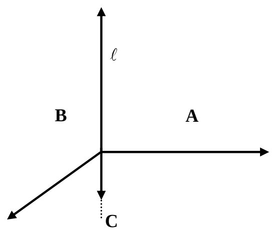
۱) اگر متغیری وارد پایه شود، در تکرار بعدی سیمپلکس ممکن است از پایه خارج شود.

۲) اگر متغیری از پایه خارج شود، در تکرار بعدی سیمپلکس نمی‌تواند وارد پایه شود.

۳) اگر در جدول بهینه، $z_j - c_j$ها برای همه متغیرهای غیرپایه‌ای منفی باشند، آنگاه جواب بهینه یکتاست.

۴) اگر مسأله‌ای جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آن‌گاه بردار گرادیان تابع هدف با بردار گرادیان یکی از محدودیت‌ها موازی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید مسأله به فرم مینیمم‌سازی است و بردار C بردار هدف است و ناحیه شدنی، ناحیه محدود شده در پایین دو صفحه A و B است. در این صورت کل خط ℓ، جواب بهینه است ولی تابع هدف با بردار گرادیان هیچ‌کدام از ابرصفحه‌ها موازی نیست.



نکته۱۵: در روش سیمپلکس، اگر سطر لولا یگانه نباشد، در مرحله بعد حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر می‌گردد.

مثال۱۵: مقدار بهینه تابع هدف در مسأله زیر عبارت است از : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\; z = ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۸x_۳ + ۶x_۴ + ۱۰x_۵$$

$$\frac{۱}{۲}x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ + ۸x_۵ \le ۳۱$$

$$۰ \le x_j \le ۱۰ \qquad j = ۱,\dots,۵$$

۱) ۱۴۳　　۲) ۱۷۶

۳) ۱۸۰　　۴) ۱۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جواب بهینه $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۱۰$ و $x_۴ = \frac{۱}{۲}$ و $x_۵ = ۰$ است و در نتیجه $z^* = ۱۴۳$.

مثال۱۶: مقدار بهینه مسئله زیر، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{aligned}\min\ & 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ st:\ & 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 2x_5 \ge 6 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 2x_5 \ge 6 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 5x_5 \ge 6 \\ & x_1, \dots, x_5 \in \{0,1\}\end{aligned}$$

۱) ۷ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به حداقل‌ساز بودن تابع هدف اولویت تخصیص متغیرهای با ضریب هدف کوچک‌تر می‌باشند.

$\min Z = 7$

محدودیت‌ها برقرار نمی‌شوند $\Leftarrow x_4 = 7$ یا $(x_2, x_5) = (1,1)$ یا $(x_4, x_2) = (1,1)$

$\min Z = 9$

محدودیت‌ها برقرار نمی‌شوند $\Leftarrow (x_3, x_5)$ یا $(x_2, x_4, x_5) = (1,1,1)$

محدودیت برقرار می‌باشند $\Leftarrow (x_4, x_3)^* = (1,1)$

پس جواب بهینه $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,1,1,0)$ می‌باشد.

مثال۱۷: مقدار بهینه تابع زیر عبارت است از: (دکتری ۹۱)

$$\begin{aligned}\mathrm{Min}\ Z = & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \mathrm{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 15 \\ & 2x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 20 \\ & x_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,2,\dots,5\end{aligned}$$

۱) ۲۰ ۲) ۱۵

۳) صفر ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون مسأله min است، پس بهتر است متغیرهایی که ضریب کمتری دارند مقدار بگیرند. با توجه به محدودیت‌های مسأله و ضرایب آنها در تابع هدف از یک روش جستجو برای حل مسأله بهره می‌گیریم:

بدیهی است مقدار حداقل تابع هدف از آنجا که ضرایب متغیرها در تابع هدف همگی مثبت هستند، برابر صفر خواهد بود، اما این جواب $(0,0,0,0,0)$ در محدودیت‌ها صدق نمی‌کند، پس رد می‌شود.

حال با دقت بیشتر به محدودیت‌ها، درمی‌یابیم که x_3 مشترک در دو محدودیت است و حداقل مقداری از آن که هر x و محدودیت را ارضا کند برابر $x_3 = 15$ است. پس جواب $(0,0,15,0,0)$ جواب موجهی با $z = 30$ است. حال باید دید جواب بهتری از آن یافت می‌شود؟

از محدودیت دوم می‌توان $x_3 = 10$ فرض کرد (جوابهای $x_4 = 20$ یا $x_5 = 10$ با توجه به ضرایب بزرگ آنها در تابع هدف کاری اشتباه است) و $x_1 = 5$ از محدودیت اول برای ارضای آن لازم می‌باشد. پس جواب $(5,0,10,0,0)$ با $z = 25$ فعلاً جواب بهتری است.

اما بدیهی است که بهتر است x_3 (چون اشتراک در دو محدودیت دارد) مقدار بگیرد، پس $x_3 = 10$ حتماً باید باشد و با توجه به محدودیت اول $x_1 = 5$ یا $x_2 = 2/5$ به دست می‌آید. پس جواب‌های $(0,2/5,10,0,0)$ و یا $(5,0,10,0,0)$ جواب‌های بهینه مسأله (بهینه چندگانه) با مقدار $z^* = 25$ خواهد بود.

درسنامه (۲): گوشه‌ها و نقاط پایه‌ای

یافتن جواب‌های پایه‌ای مجاور

نقاط رأسی مجاور

زمانی دو نقطه رأسی را مجاور می‌گوییم که هر دو روی یک یال ناحیه موجه باشند. دو نقطه رأسی مجاور فقط در یک متغیر پایه‌ای با هم تفاوت دارند. همچنین زمانی دو جواب پایه‌ای مجاورند که هر دو فقط در یک متغیر پایه‌ای تفاوت داشته باشند.

می‌دانیم که هر جدول سیمپلکس متناظر با یک جواب پایه‌ای موجه (B.F.S) از فضای حل مسأله LP است و با ورود یک متغیر غیر پایه‌ای به پایه و خروج یک متغیر پایه‌ای از پایه می‌توان به یک جواب پایه‌ای (موجه یا غیر موجه) مجاور رسید. اگر انتخاب متغیر ورودی از بین متغیرهایی باشد که شرط ورود به پایه را دارا هستند، مقدار Z در جدول بعدی بدتر نمی‌شود. همچنین اگر انتخاب متغیر خروجی طبق تست مینیمم نسبت صورت گیرد جدول بعدی یک جواب پایه‌ای موجه مجاور را نمایش می‌دهد.

مثال۱۸: جدول مقابل یکی از مراحل حل یک LP است. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) جواب اساسی متناظر با این جدول را بیابید.

ب) با ورود x_6 به پایه به چند جواب پایه‌ای موجه و غیر موجه مجاور می‌توان رسید؟

ج) با خروج x_2 از پایه به چند جواب پایه‌ای موجه و غیر موجه مجاور می‌توان رسید؟

د) جواب پایه‌ای متناظر با جدول داده شده چند جواب پایه‌ای موجه و یا غیرموجه مجاور دارد؟

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	۱							
	۰	۰	۱	۰	−۱	۱	۴	۶
	۰	۱	۰	۰	۲	۲	−۱	۴
	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۳

پاسخ: الف) با توجه به ستون‌های یکه جدول، متغیرهای پایه‌ای جدول (x_2, x_1, x_3) هستند و مقادیر آنها در ستون سمت راست جدول می‌باشد.

بنابراین: $(x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$ جواب پایه‌ای موجه (B.F.S) متناظر با این جدول است.

ب) اگر x_6 وارد پایه شود طبق تست مینیمم نسبت، اولین متغیر پایه‌ای، یعنی x_2، از پایه خارج می‌شود پس با ورود x_6 و خروج x_2 به یک جواب پایه‌ای موجه مجاور می‌رسیم. اگر x_6 وارد پایه شود و دومین متغیر پایه‌ای، یعنی x_1، را از پایه خارج کنیم چون تست مینیمم اشتباه انجام گرفته، به یک جواب پایه‌ای غیرموجه مجاور می‌رسیم. اگر x_6 وارد پایه گردد و سومین متغیر پایه‌ای، یعنی x_3، را از پایه خارج کنیم این جابه‌جایی امکان پذیر نیست و ما را به جواب پایه‌ای (موجه و یا غیر موجه) نمی‌رساند، زیرا عنصر لولا در این حالت عدد صفر است و در مرحله بعد بردارهای (a_2, a_1, a_6) تشکیل پایه نمی‌دهند.

◆ ◆ ◆ ◆

تذکر۱: اگر a_j بردار ستونی متناظر با x_j در صورت مسأله LP باشد و Y_j بردار ستونی متناظر با x_j در جدول سیمپلکس باشد $(Y_j = B^{-1}a_j)$.. a_j، **بردار ستونی متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_j را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای ستونی متناظر با متغیرهای پایه‌ای x_{B_i} نوشت که ضریب این ترکیب خطی همان Y_{ij} متناظر با x_j در جدول سیمپلکس می‌باشد.** $a_j = \sum_i y_{ij} a_{B_i}$. برای مثال در مثال ۱۸ قسمت ب داریم:

$$a_6 = 4a_2 - a_1 + 0a_3 \qquad Y_{i6} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{B_i} = [x_2, x_1, x_3]$$

یادآوری: امکان تعویض بردار a_6 با a_3 وجود ندارد چون ضریبش در ترکیب خطی صفر می‌باشد و پایه‌ی حاصل از $[a_2, a_1, a_6]$ مستقل خطی نمی‌باشد (دترمینان حاصل از این سه بردار صفر می‌باشد).

بنابراین با ورود x_6 به پایه به یک جواب پایه‌ای موجه و یک جواب پایه‌ای غیرموجه مجاور می‌رسیم.

ج) با خروج x_2 و ورود x_4 به پایه به یک جواب پایه غیرموجه مجاور می‌رسیم زیرا تست مینیمم نسبت، اشتباه انجام شده است. یعنی روی عنصر منفی تست انجام شده است. با خروج x_2 و ورود x_5 به پایه به یک جواب پایه غیرموجه مجاور می‌رسیم زیرا تست مینیمم نسبت، اشتباه انجام شده است یعنی مینیمم در نظر گرفته نشده است و در صورت ورود x_5 به پایه باید متغیر x_1 از پایه خارج شود. با خروج x_2 و ورود x_6 به پایه به یک جواب پایه‌ای موجه مجاور می‌رسیم زیرا تست مینیمم نسبت، درست انجام شده است. پس با خروج x_2 می‌توان به ۲ جواب پایه‌ای غیرموجه و یک جواب پایه‌ای موجه مجاور رسید.

د) با ورود x_4 می‌توان به ۲ جواب پایه‌ای غیرموجه و یک جواب پایه‌ای موجه مجاور رسید. با ورود x_5 می‌توان به ۲ جواب پایه‌ای غیر موجه و یک جواب پایه‌ای موجه مجاور رسید. با ورود x_6 می‌توان به یک جواب پایه‌ای غیرموجه و یک جواب پایه‌ای موجه مجاور رسید. بنابراین متناظر با جدول داده شده دارای ۸ جواب پایه‌ای مجاور است.

مثال۱۹: با توجه به جدول زیر کدام عبارت صحیح است؟

	x_B	x_N
A	(x_1, x_2, x_3)	(s_1, s_2, s_3)
B	(s_1, s_2, s_3)	(x_1, x_2, x_3)
C	(x_1, s_1, s_2)	(x_2, x_3, s_3)
D	(x_1, s_3, x_3)	(x_2, s_1, s_2)

۱) نقاط D و A مجاورند.
۲) نقاط C و A مجاورند.
۳) نقاط B و A مجاورند.
۴) نقاط D و B مجاورند.

پاسخ: گزینه «۱» نقاط A و D در یک متغیر تفاوت دارند پس می‌توانند مجاور باشند، البته در صورت عدم تباهیدگی.

نکته ۱۶: در عدم تباهیدگی هر گوشه شدنی حداکثر به تعداد متغیرهای غیرپایه (بعد فضای جواب)، گوشه شدنی مجاور دارد. (چرا؟)

نکته ۱۷: در سیستم $\begin{cases} A_{m\times n}X = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ که $R(A) = m$ **حداکثر تعداد جواب‌های پایه‌ای موجه و غیرموجه مجاور به یک جواب پایه‌ای موجه $m(n-m)$** است. (چرا؟)

مثال۲۰: فرض کنید x یک جواب غیرتبهگن (غیرتباهیده) باشد، در این صورت تعداد نقاط گوشه مجاور نقطه x برابر است با :

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $n-1$
۲) $m-1$
۳) $n-m$
۴) $n-m-2$

پاسخ: گزینه «۳» اگر m تعداد محدودیت‌ها و n تعداد متغیرهای کمکی و اصلی باشد در این صورت، n-m می‌تواند تعداد گوشه مجاور قابل قبول را نشان دهد ولی این رابطه همیشه هم برقرار نیست.

جبر روش سیمپلکس

مسأله $\underset{S.t}{\text{Min}}\ Z = Cx$, $AX = b$, $X \geq 0$ (۱) مفروض است که در آن $R(A) = m, A_{m\times n}$، با این فرض m ستون از ماتریس $A = [a_1 \cdots, a_n]_{m\times n}$ **مستقل خطی** هستند که **تشکیل یک پایه** می‌دهند. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود فرض می‌کنیم ستون‌های مستقل خطی $a_1, \ldots, a_m$ باشند که ماتریس آنها را با $B = [a_1, \ldots, a_m]_{m\times m}$ نمایش داده و آن را پایه می‌نامیم و $n-m$ ستون دیگر، یعنی: $a_{m+1}, \ldots, a_n$ را ستون‌های غیرپایه‌ای می‌نامیم و ماتریس آنها را با $N = [a_{m+1}, \ldots, a_n]_{m\times(n-m)}$ نمایش می‌دهیم. همچنین در $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$، **متغیرهای متناظر با ستون‌های پایه‌ای را متغیرهای پایه‌ای می‌نامیم** و آنها را با $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ نمایش می‌دهیم و **بقیه متغیرها را غیر پایه‌ای نامیده** و آنها را با $x_N = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{(n-m)\times 1}$ نمایش می‌دهیم، مجموعه اندیس متغیرهای غیرپایه‌ای را R می‌نامیم. همچنین ضرایب هزینه متغیرهای پایه‌ای را با $C_B = [C_1, \ldots, C_m]_{1\times m}$ و ضرایب هزینه متغیرهای غیرپایه‌ای را با $C_N = [C_{m+1}, \ldots, C_n]_{1\times(n-m)}$ نمایش می‌دهیم. اکنون دستگاه معادلات و تابع هدف مسأله (۱) را با این تجزیه‌ها بازنویسی می‌کنیم:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

$$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دستگاه معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$Ax = b \Rightarrow [B, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (2)$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - \sum_{j\in R} B^{-1}a_j x_j \Rightarrow x_B = \bar{b} - \sum_{j\in R} \bar{a}_j x_j \Rightarrow \sum_{j\in R} \bar{a}_j x_j + x_B = \bar{b} \quad (3)$$

ارتباط بین فضای شدنی مسأله اولیه و مسأله دوگان

۱) تعداد نقاط گوشه‌ای (شدنی و نشدنی) **فضای شدنی هر دو مسأله یکسان است،** به جز در حالتی که یکی از مسائل گوشه **تباهیده** دارد و بیش از یک گوشه از مسأله دیگر متناظر با گوشه بهینه تباهیده است. **۲)** هر نقطه گوشه مسأله اولیه متناظر با یک نقطه گوشه مسأله دوگان است که هر **دو نمی‌توانند در مسائل نظیرشان گوشه شدنی باشند،** مگر در حالتی که این گوشه‌ها در مسائل نظیرشان، **گوشه بهینه** باشند. **۳)** اگر x° یک گوشه در مسأله اولیه و y° گوشه متناظر آن در مسأله دوگان باشد، در این صورت مقدار تابع هدف مسأله اولیه در x° **برابر** مقدار تابع هدف مسأله دوگان در y° است و گوشه‌های x° و y° **لزوماً شدنی هم نیستند.**

نکته۸: تعداد جواب‌های پایه اعم از شدنی و نشدنی در مدل اولیه و همزاد با یکدیگر برابرند.

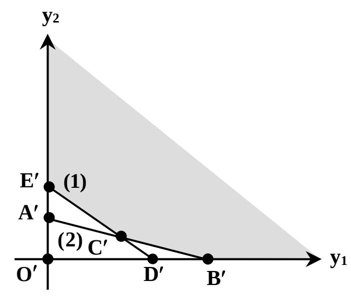
مثال۴۹: مسائل اولیه و دوگان زیر مفروضند:

$$\begin{aligned} P:\ &\underset{s.t.}{\text{Max}}\ Z = ۲x_۱ + ۳x_۲ \\ &(۱)\ x_۱ + x_۲ \le ۵ \\ &(۲)\ x_۱ + ۳x_۲ \le ۶ \\ &x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

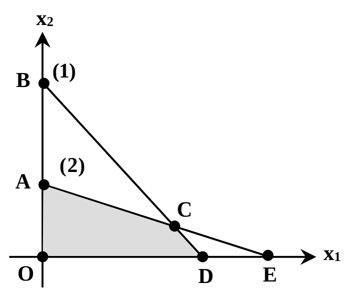
$$\begin{aligned} D:\ &\underset{s.t.}{\text{Min}}\ W = ۵y_۱ + ۶y_۲ \\ &(۱)\ y_۱ + y_۲ \ge ۲ \\ &(۲)\ y_۱ + ۳y_۲ \ge ۳ \\ &y_۱, y_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

ناحیه شدنی دو مسأله را رسم و تناظر گوشه‌ها و مقادیر تابع‌های هدف دو مسأله را در گوشه‌ها بررسی کنید.

پاسخ:



ناحیه شدنی مسأله دوگان



ناحیه شدنی مسأله اولیه

در جدول زیر هر گوشه با گوشه متناظرش در یک سطر نوشته شده و مقادیر تابع‌های هدف با هم مقایسه شده است:

مسأله D		مسأله P	
گوشه	مقدار تابع هدف	مقدار تابع هدف	گوشه
گوشه نشدنی $O'(۰,۰)$	$W=۰$	$Z=۰$	$O(۰,۰)$ گوشه شدنی
گوشه نشدنی $A'(۰,۱)$	$W=۶$	$Z=۶$	$A(۰,۲)$ گوشه شدنی
گوشه شدنی $B'(۳,۰)$	$W=۱۵$	$Z=۱۵$	$B(۰,۵)$ گوشه نشدنی
گوشه شدنی $C'(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$	$W^*=\frac{۲۱}{۲}$	$Z^*=\frac{۲۱}{۲}$	$C(\frac{۹}{۲},\frac{۱}{۲})$ گوشه شدنی
گوشه نشدنی $D'(۲,۰)$	$W=۱۰$	$Z=۱۰$	$D(۵,۰)$ گوشه شدنی
گوشه شدنی $E'(۰,۲)$	$W=۱۲$	$Z=۱۲$	$E(۶,۰)$ گوشه نشدنی

نکته ۹: در هر جدول سیمپلکس می‌توان قضیه مکمل زائد را به‌کار برد و گوشه متناظر در مسأله دوگان را به‌دست آورد.

مثال۵۰: در مورد دوگان مسئله زیر، گزینه درست کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۷)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 9 \\ & x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \,,\, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) بیکران است.
۲) مقدار بهینه متناهی دارد.
۳) دارای جواب بهینه چندگانه است.
۴) فاقد جواب شدنی است.

پاسخ: گزینه «۴» در مدل داده‌شده، چنانچه مقدار متغیر x_2 را به‌سمت بی‌نهایت میل دهیم، مقدار تابع هدف بیکران خواهد شد. بنابراین با توجه به اینکه مسئله اولیه دارای جواب بهینه‌ی نامحدود است، مسئله دوگان فاقد جواب موجه خواهد بود.

مثال۵۱: مسأله زیر را در نظر بگیرید: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\begin{aligned} & \text{Max}\, Z = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ & \text{s.t} \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

۱) دوگان مسأله جواب بهینه دارد.
۲) دوگان مسأله جواب بی‌کران دارد.
۳) جواب بهینه دوگان برابر ۴۵ است.
۴) دوگان مسأله نشدنی است.

پاسخ: گزینه «۴» ضریب متغیر x_2 در محدودیت منفی است و در تابع هدف مثبت است. بنابراین با هر مقدار افزایش x_2 محدودیت برقرار و تابع هدف نیز بهبود می‌یابد. پس جواب مسأله اولیه بی‌کران $(x \to +\infty \Rightarrow z \to +\infty)$ است. در نتیجه دوگان مسأله نشدنی است.

مثال۵۲: مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید، حداکثر مقدار z پس از حل مسأله چقدر است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری۹۱)

$$\begin{aligned} & \text{Min} \cdot z = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ & \text{s.t.} \\ & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

۱) ۰ ۲) ۹
۳) ۱۶/۰۸ ۴) مسأله نامحدود است.

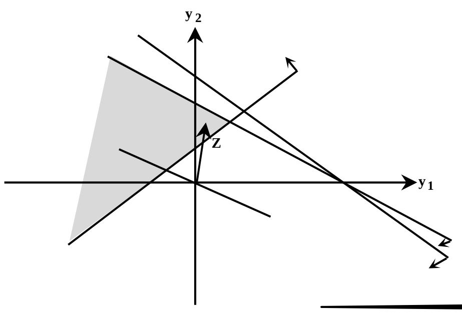
پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. مسأله‌ی دوگان را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \text{Max } 3y_1 + 10y_2 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ & 3y_1 - 4y_2 \leq -2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ & y_1 \,,\, y_2 : \text{نامقید} \end{aligned}$$

با استفاده از روش ترسیمی مشاهده می‌شود که مقدار تابع هدف به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پس مسأله‌ی اولیه نشدنی می‌باشد.
هم چنین بدون نوشتن محدودیت‌های دوگان در مسأله اولیه، اگر x_1 را از محدودیت اول به دست آوریم و در محدودیت دوم قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(3 - 3x_2 - 2x_3) - 4x_2 + 3x_3 = 10 \Rightarrow -10x_2 - x_3 = 4$$

چون $x_2 \geq 0$ و x_3 پس مسأله نشدنی است.



مثال۵۳: مقدار بهینه تابع زیر عبارت است از: (دکتری ۹۱)

$$\begin{aligned} & \text{Min}\, Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ & \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15 \\ & 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 20 \\ & x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,5 \end{aligned}$$

۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) صفر
۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۴» چون مسأله min است، پس بهتر است متغیرهایی که ضریب کمتری دارند مقدار بگیرند. با توجه به محدودیت‌های مسأله و ضرایب آنها در تابع هدف از یک روش جستجو برای حل مسأله بهره می‌گیریم. بدیهی است مقدار حداقل تابع هدف از آنجا که ضرایب متغیرها در تابع هدف همگی مثبت هستند، برابر صفر خواهد بود، اما این جواب $(0,0,0,0,0)$ در محدودیت‌ها صدق نمی‌کند پس رد می‌شود. حال با دقت بیشتر به محدودیت‌ها، در می‌یابیم

که x_3 مشترک در دو محدودیت است و حداقل مقداری از آن که هر x و محدودیت را ارضا کند برابر $x_3 = 15$ است. پس جواب $(0,0,15,0,0)$ جواب موجهی با $z = 30$ است. حال باید دید جواب بهتری از آن یافت می‌شود؟
از محدودیت دوم می‌توان $z_3 = 10$ فرض کرد (جوابهای $x_4 = 20$ یا $x_5 = 10$ باتوجه به ضرایب بزرگ آنها در تابع هدف کاری اشتباه است) و $x_1 = 5$ از محدودیت اول برای ارضای آن لازم می‌باشد. پس جواب $(5,0,10,0,0)$ با $z = 25$ فعلاً جواب بهتری است. اما بدیهی است که بهتر است x_3 (چون اشتراک در دو محدودیت دارد) مقدار بگیرد، پس $x_3 = 10$ حتماً باید باشد و با توجه به محدودیت اول $x_1 = 5$ یا $x_2 = 2/5$ به دست می‌آید. پس جواب‌های $(0,2/5,10,0,0)$ و یا $(5,0,10,0,0)$ جواب‌های بهینه مسأله (بهینه چندگانه) با مقدار $z^* = 25$ خواهند بود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵۴: فرض کنید مدل خطی زیر دارای فضای حل باشد. اگر $\frac{a_{31}}{a_{32}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}} \neq \frac{a_{11}}{a_{12}}$، آنگاه در مورد دوگان این مسأله چه قضاوتی می‌توان داشت؟ (دکتری ۹۳)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max.}Z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ &\mathrm{s.t.}\ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ &\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ &\qquad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \\ &\qquad x_1, x_2, b_1, b_2, b_3 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) دارای جواب بیکران است.
۲) الزاماً تباهیده است.
۳) جواب بهینه چندگانه دارد.
۴) ممکن است جواب نداشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ۱) مسأله اولیه موجه است بنابراین دوگان نمی‌تواند جواب بی‌کران داشته باشد. گزینه ۱ نادرست است. ۲) چون رتبه ۲ است (چرا؟) و مسأله موجه است بنابراین کل فضای شدنی مسأله اولیه یک نقطه است. بنابراین نمی‌تواند جواب بی‌کران داشته باشد بنابراین دوگان نمی‌تواند نشدنی باشد گزینه ۴ نادرست است. ۳) چون مسأله اولیه جواب تباهیده دارد (چرا؟) و همچنین جواب چندگانه ندارد بنابراین دوگان مسأله حتماً جواب چندگانه دارد.

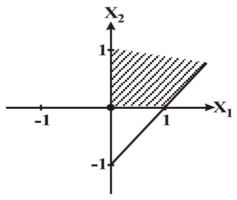
◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵۵: اگر مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی $\mathrm{Max}\{x_k : Ax \leq b\ ,\ x \geq 0\}$ که در آن x_k یکی از متغیرهای مسأله است را مسأله p_1 و مسأله برنامه‌ریزی خطی $\mathrm{Max}\{cx : Ax \leq b\ ,\ x \geq 0\}$ را مسأله‌ی p_2 بنامیم، آنگاه می‌توان گفت که اگر: .... (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۲)

۱) p_1 بی‌کران باشد آنگاه p_2 بی‌کران است.
۲) p_1 بی‌کران باشد آنگاه p_2 فاقد جواب موجه است.
۳) p_2 بی‌کران باشد آنگاه p_1 فاقد جواب موجه است.
۴) p_2 بی‌کران باشد آنگاه p_1 بیکران است.

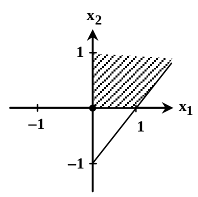
☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اینکه فضای حل هر دو مسأله P_1 و P_2 یکسان است، پس اگر یکی موجه باشد قطعاً دیگری هم موجه است. پس گزینه‌های ۲ و ۳ غلط هستند. مثال نقض برای گزینه‌ی ۱:

$$P_1 : \max_{s.t} x_2 \qquad x_1 - x_2 \leq 1 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$



جواب بهینه بی‌کران دارد.

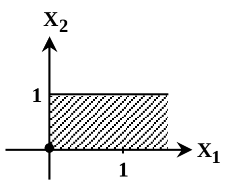
$$P_2 : \max_{s.t} -x_1 - x_2 \qquad x_1 - x_2 \leq 1 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$



جواب بهینه منحصر به فرد دارد، نقطه‌ی $(0,0)$.

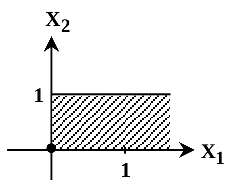
مثال نقض برای گزینه‌ی ۴:

$$P_1 = \max_{s.t} x_2 \qquad x_2 \leq 1 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$



جواب بهینه چندگانه دارد (بی‌کران نیست).

$$P_2 = \max_{s.t} x_1 + x_2 \qquad x_2 \leq 1 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$



جواب بهینه بیکران دارد.

در نتیجه هیچ‌یک از گزینه‌ها نمی‌تواند صحیح باشد.

مثال۵۶: دو مسأله برنامه‌ریزی خطی P و P' را به صورت زیر در نظر بگیرید، که در آنها A یک ماتریس $(m\times n)$، b یک بردار ستونی $(m\times 1)$، x یک بردار ستونی $(n\times 1)$ و u یک بردار سطری $(1\times m)$ است. در این صورت می‌توان گفت که اگر P' جواب موجه نداشته باشد: (دکتری ۹۳)

$$P\begin{cases}\text{Max}\, z = cx\\ Ax\le b\\ x\ge 0\end{cases}\qquad P'\begin{cases}\text{Max}\, z' = cx\\ uAx\le ub\\ x\ge 0, u\ge 0\end{cases}$$

۱) P بیکران است.
۲) P جواب موجه دارد.
۳) P یا جواب موجه ندارد یا بیکران است.
۴) P نیز جواب موجه ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» چون ناحیه شدنی مسأله اولیه P' ترکیبی از محدودیت‌های مسأله اولیه است و همچنین $u\ge 0$ و مسأله p' ناموجه است بنابراین برای مسأله اولیه حداقل یکی از محدودیت‌ها شرط موجه بودن را ندارد.

مثال۵۷: در مقایسه با روش سیمپلکس معمولی کدام گزینه در مورد روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با روش سیمپلکس تجدیدنظرشده (Revised Simplex) درست است؟

۱) محاسبه پاسخ دوگان مسأله در روش سیمپلکس تجدیدنظرشده مشکل‌تر است.
۲) جواب بهینه مسأله در تعداد کمتری از مراحل تکرار (Iterations) به دست می‌آید.
۳) برای پیدا کردن پایه شدنی اولیه، نیازی به روش‌های M بزرگ یا دو فازی ندارد.
۴) در صورت حل مسأله با روش سیمپلکس تجدیدنظرشده، احتمال خطای محاسباتی کمتری وجود دارد.

پاسخ: گزینه «۴» روش Revised Simplex به علت استفاده از حافظه کمتر و انجام تعداد عملیات محاسباتی کمتر، دارای خطای محاسباتی کمتری می‌باشد.

تفسیر اقتصادی مقادیر بهینه متغیرهای دوگان

اگر x^* جواب بهینه مسأله اولیه و y^* جواب بهینه مسأله دوگان باشد، در این صورت می‌دانیم $Z^* = Cx^* = y^*b = W^*$. بنابراین می‌توان نوشت: $Z^* = y^*b = y_1^*b_1 + y_2^*b_2 + \dots + y_m^*b_m$ که b_iها $(1\le i\le m)$ منابع محدودیت‌های ۱ تا m مسأله اولیه است. فرض کنیم موجودی منبع iام از b_i به $b_i+\Delta b_i$ تغییر نماید، در این صورت $\Delta Z^* = y_i^*\times\Delta b_i$. حال اگر فرض کنیم $\Delta b_i = 1$، در این صورت $\Delta Z^* = y_i^*$ یعنی: اگر منبع قید i ام مسأله اولیه (یعنی b_i) را یک واحد افزایش دهیم مقدار بهینه تابع هدف به اندازه y_i^* (متغیر بهینه دوگان متناظر با قید i ام) تغییر می‌کند، به همین جهت y_i^* را **قیمت سایه منابع قیدهای مسأله اولیه** می‌نامیم.

شبه قیمت (قیمت سایه): میزان تغییر مقدار بهینه تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در منبع قید i ام (b_i) که برابر است با y_i^* را شبه قیمت یا قیمت سایه می‌نامیم و می‌توان گفت:

$$\boxed{\text{قیمت سایه}: \frac{dz^*}{db_i} = y_i^*}$$

نکته ۱۰: با افزایش یک واحد در منبع قید i ام (b_i) به اندازه y_i^* سود عایدمان می‌شود، پس بهایی که برای خریداری یک واحد از منبع قید i ام می‌توانیم بپردازیم **حداکثر به اندازه y_i^*** است و **اگر بابت تهیه هر واحد از منبع قید i ام بهایی بیشتر از y_i^* بپردازیم، توجیه اقتصادی نخواهد داشت.** پس به‌طور خلاصه **حداکثر ارزش هر واحد منبع قید i ام $= y_i^*$.**

تذکر ۲: قیمت سایه‌ای را **«هزینه فرصت از دست رفته»** نیز می‌نامند زیرا می‌توان با افزودن یک واحد به منبع قید i ام به اندازه y_i^* سود به دست آورد و اگر منبع قید i ام را تغییر ندهیم، به اندازه y_i^* سود را از دست داده‌ایم.

مثال۵۸: شبه قیمت محدودیت iام در مسأله $\underset{Ax\le b, x\ge 0}{\text{Max}\, z = cx}$ عبارت است از:

۱) افزایش مقدار بهینه تابع هدف به ازای افزایش یک واحد در سمت راست محدودیت iام
۲) تغییر مقدار بهینه تابع هدف به ازای تغییر یک واحد در سمت راست محدودیت iام
۳) شیب تغییرات تابع هدف به ازای تغییرات سمت راست محدودیت iام در مقدار فعلی b_i
۴) تغییر مقدار بهینه تابع هدف به ازای افزایش یک واحد در سمت راست محدودیت iام

پاسخ: گزینه «۴» شبه قیمت محدودیت iام که همان مقدار بهینه iامین متغیر دوگان است (y_i^*)، بیانگر میزان تغییر مقدار بهینه تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در سمت راست محدودیت iام است، زیرا اگر $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ مقادیر بهینه عوض متغیرهای دوگان (قیمت‌های سایه‌ای) باشند می‌دانیم $Z^* = W^* = y^*b = y_1^*b_1 + \dots + y_m^*b_m$. حال اگر به عدد سمت راست محدودیت i ام یک واحد اضافه گردد خواهیم داشت:

$$Z_{new}^* = y_1^*b_1 + \dots + y_i^*(b_i+1) + \dots + y_m^*b_m \Rightarrow Z_{new}^* = Z_{old}^* + y_i^* \Rightarrow y_i^* = \Delta Z^*$$

نکته۱۱: شبه قیمت محدودیتی است که به حد خود رسیده است، چون محدودیت به حد خود رسیده مقدار متغیر کمکی آن صفر می‌شود $(S_i^* = 0)$ و چون $y_i^* S_i^* = 0$ پس y_i^* ممکن است صفر باشد یا نباشد.

مثال۵۹: کدام عبارت درباره شبه قیمت یک محدودیت صحیح است؟

۱) شبه قیمت محدودیت به فرم بزرگتر یا مساوی همیشه مثبت یا صفر است.

۲) شبه قیمت محدودیت به فرم کوچکتر یا مساوی همیشه مثبت یا صفر است.

۳) شبه قیمت یک محدودیت به فرم تساوی ممکن است برابر صفر باشد.

۴) شبه قیمت یک محدودیت عبارت است از مقدار تغییر تابع هدف به ازای افزایش یک واحد به سمت راست آن محدودیت.

پاسخ: گزینه «۳ و ۴» در مورد گزینه ۱ و ۲ بایستی max / min سازی بودن مسأله مشخص باشد تا بتوان نتیجه گرفت.

مثال۶۰: اگر ارزش‌های بهینه برای متغیرهای دوگان از یک مسأله بیشینه به ترتیب از چپ به راست به صورت (۹،۳،۱،۰) باشد و مجبور باشیم فقط یک واحد از یکی از چهار منبع را نسبت به قبل اضافه‌تر تهیه نماییم، مناسب‌ترین تصمیم کدام است؟

۱) تهیه از منبع یکم ۲) تهیه از منبع دوم ۳) تهیه از منبع سوم ۴) تهیه از منبع چهارم

پاسخ: گزینه «۱» $y_1^* = 9,\ y_2^* = 3,\ y_3^* = 1,\ y_4^* = 0$ قیمت‌های سایه هستند. همچنین داریم: $\Delta z = y_i^* \times \Delta b_i \xrightarrow{\Delta b_i = 1} \Delta z = y_i^*$

در بین y_i^* ها بیشترین مقدار را $y_1^* = 9$ داراست. پس با یک واحد افزایش در منبع اول، مقدار تابع هدف ۹ واحد افزایش می‌یابد.

مثال۶۱: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر و جواب نهایی آن را در نظر بگیرید. در صورتی که هزینه اضافه نمودن یک واحد به منبع محدودیت اول برابر سه واحد پولی باشد؛ صرف چنین هزینه‌ای ....

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad & Z = 4x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t}\quad & x_1 + x_2 \le 0 \\ & 2x_1 + x_2 \le 32 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	۴	۰	۸	۰	۱۶۰
x_2	۱	۱	۱	۰	۲۰
s_2	۱	۰	−۱	۱	۱۲

۱) قابل توجیه است.

۲) قابل توجیه نیست.

۳) تأثیری بر سود حاصله ندارد.

۴) بستگی به مقدار بهینه دوگان دارد.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به جدول $y_1^* = 8$ که به این مفهوم است که برای تهیه هر واحد از منبع محدودیت اول پرداخت حداکثر ۸ واحد پول مقرون به صرفه است، چون سود حاصل از اضافه شدن یک واحد به منبع محدودیت اول ۸ واحد پول است.

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_1} = y_1^* = 8 > 3$$

پس پرداخت ۳ واحد پولی برای تهیه هر واحد از منبع محدودیت اول مقرون به صرفه است.

مثال۶۲: مسئله بهینه‌سازی زیر را درنظر بگیرید، فرض کنید جواب بهینه این مسئله، ناتباهیده و مقدار بهینه برابر k است و قیمت سایه (shadow price) متناظر با محدودیت اول برابر m می‌باشد. در صورتی که عدد سمت راست محدودیت اول افزایش یابد، مقدار تابع هدف مسئله به مقدار $k(1+t)$ افزایش می‌یابد. در این صورت عدد سمت راست محدودیت اول چقدر تغییر داده شده است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{aligned} \max\ & x_0 = c^T x \\ st:\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{t}{m}$ ۲) $\frac{t \times k}{m}$ ۳) حداقل $\frac{t \times k}{m}$ ۴) حداکثر $\frac{t \times k}{m}$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از روش ماتریسی برنامه‌ریزی خطی و محدوده تغییرات منبع اول را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta Z = \Delta b_1 w_1 \Rightarrow tk = m_1 \Delta b_1 \Rightarrow \Delta b_1 = \frac{tk}{m} \quad Z_2 = (1+t)k \qquad Z_1 = k \Rightarrow \Delta Z = tk$$

مثال۶۳: کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد برنامه‌ریزی خطی درست نیست؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) اگر مسأله دارای جواب موجه باشد، فاز یک جواب موجهی پیدا خواهد کرد.

۲) شکاف دوگانگی پس از یافتن جواب‌های بهینه اولیه و ثانویه به صفر می‌رسد.

۳) اگر الگوریتم سیمپلکس به تسلسل (Cycling) دچار نشود، حتماً متوقف خواهد شد.

۴) اگر یک جواب پایه تبهگن باشد، الگوریتم سیمپلکس از یافتن جواب بهینه عاجز می‌ماند.

پاسخ: گزینه «۴» ۱ـ اگر مسأله دارای جواب موجه باشد، در انتهای فاز یک به جواب موجه می‌رسیم و مقدار بهینه هدف صفر خواهد بود. ۲ـ جواب‌های بهینه مسأله‌ی اولیه و ثانویه با یکدیگر برابرند، پس در حالت بهینه اختلاف جواب اولیه و ثانویه (شکاف دوگانگی) صفر می‌باشد. ۳- تعداد جواب‌های پایه‌ای مسائل برنامه‌ریزی خطی محدودند، بنابراین اگر حل به تسلسل دچار نشود، الگوریتم متوقف خواهد شد. بنابراین فقط گزینه ۴ غلط است.

درسنامه (۲): سیمپلکس دوگان

روش سیمپلکس دوگان

الگوریتم سیمپلکس از یک **نقطه گوشه‌ای موجه ولی غیربهینه** آغاز و در هر تکرار با **حفظ شرط موجه بودن** به سمت **گوشه بهینه** حرکت می‌کند. اما **الگوریتم سیمپلکس دوگان** از یک **نقطه گوشه‌ای غیرموجه ولی بهینه** آغاز و در هر تکرار با **حفظ شرط بهینگی** به سمت **فضای موجه** حرکت می‌کند تا به **گوشه موجه و بهینه** برسد. در هر صورت **اساس برنامه ریزی خطی یافتن گوشه موجه و بهینه است.**

نکته۱۲: روش سیمپلکس دوگان در حقیقت مسأله دوگان را مستقیماً از روی روش سیمپلکس معمولی حل می‌کند، بدون این که مسأله دوگان نوشته شود.

مثال۶۴: جدول نهایی سیمپلکس را برای یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت min در نظر بگیرید: (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

	x_0	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
x_0	-1	۰	۰	۰	۱	۳	۲	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	۴	-5	۷	۸
x_2	۰	۰	۱	۰	-2	۴	-2	-20
x_3	۰	۰	۰	۱	۱	-3	۲	۲

در صورتی که $\theta > 0$ باشد و از روش Dual – Simplex استفاده شود، مقدار تابع هدف در جدول بعدی سیمپلکس چه خواهد بود؟

۱) $x_0 = \theta - 1$ ۲) $x_0 = \frac{\theta}{2}$ ۳) $x_0 = \theta$ ۴) $x_0 = -\theta$

پاسخ: گزینه «۳» متغیر x_2 دارای ضریب سمت راست منفی و ورودی به پایه است. با توجه به تست مینیمم نسبت دوگان، متغیر S_1 ورودی به پایه است.

$x_2 < 0 \rightarrow$ متغیر ورودی به پایه x_3

نسبت Min تست: $\{\frac{-1}{-2}, \frac{-2}{-2}\} = \frac{1}{2} \rightarrow$ متغیر ورودی به پایه S_1

$$\theta = \frac{-20}{-2} = 10 \quad \Delta\bar{Z} = -(Z_{S_1} - C_{S_1}) \times \theta = -(-1) \times \theta = \theta$$

توجه: پاسخ سنجش گزینه (۴) می‌باشد که کاملاً اشتباه است. با توجه به اینکه روش سیمپلکس دوگان مورد استفاده قرار می‌گیرد، جواب بهینه مرحله بعد بهتر نخواهد شد. با توجه به اینکه مسأله Min سازی است، در مرحله بعد مقدار تابع هدف باید بزرگتر از صفر باشد. پس مطمئناً جواب سنجش $(x_0 = -\theta < 0)$ صحیح نمی‌باشد.

نکته۱۳: یک مسأله برنامه‌ریزی خطی که تابع هدف آن به شکل Max است را در صورتی می‌توان با روش سیمپلکس ثانویه یا دوگان (Dual Simplex Method) حل کرد که در جدول اولیه آن تمام ضرایب سطر صفر (مربوط به تابع هدف) غیرمنفی باشند.

۱. الگوریتم سیمپلکس دوگان

۱) یک جواب پایه‌ای برای مسأله می‌یابیم که **لزوماً شدنی نباشد** (بعضی b_i ها منفی باشند) **ولی شرط بهینگی برقرار باشد.**

۲) اگر همه اعداد سمت راست نامنفی باشند ($\bar{b}_i \geq 0$ برای هر $1 \leq i \leq m$) در این صورت به جواب بهینه رسیده‌ایم در غیر این صورت به گام ۳ می‌رویم.

۳) **انتخاب متغیر خروجی از پایه:** منفی‌ترین عدد در بین اعداد ستون سمت راست را پیدا می‌کنیم و متغیر پایه‌ای متناظر با سطر آن را جهت خروج از پایه انتخاب می‌کنیم و سطر موردنظر را سطر محوری می‌نامیم. $\bar{b}_r = \text{Min}\{\bar{b}_i < 0 | 1 \leq i \leq m\} \rightarrow$ متغیر پایه‌ای x_r خروجی است.

اگر متغیر خروجی منحصر به فرد نباشد در این صورت یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

۴) **انتخاب متغیر ورودی به پایه:** $\frac{Z_k - C_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\left\{\left|\frac{Z_j - C_j}{\bar{a}_{rj}}\right| \middle| \bar{a}_{rj} < 0\right\} \rightarrow$ متغیر غیرپایه‌ای x_k ورودی است.

البته قدر مطلق برای مسائلی که تابع هدف آن‌ها ماکزیمم‌سازی باشد، ضروری است. اگر متغیر x_r، متغیر خروجی و x_k متغیر ورودی باشد، با محورگیری در محل عنصر لولای منفی $\bar{a}_{rk}$ جدول را به روز کرده و به گام ۲ می‌رویم.

در سیمپلکس ثانویه هدف از آزمون نسبت، **حفظ شرط بهینگی** در جدول بعدی است.

نکته۱۴: اگر تمام اعداد سطر محوری نامنفی (مثبت یا صفر) باشند، در این صورت **انتخاب متغیر ورودی** امکان‌پذیر نمی‌باشد و نتیجه می‌گیریم که **مسأله اولیه نشدنی و مسأله دوگان جواب بهینه نامتناهی** دارد.

درسنامه (۲): حل مسأله حمل و نقل سیمپلکس

روشی که برای حل یک مسأله حمل و نقل ارائه می‌شود بر پایه‌ی روش سیمپلکس استوار است و مراحل کلی آن به صورت زیر است:
۱ـ یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین برای مسأله حمل و نقل ۲ـ محاسبه $\overline{C}_j = C_j - Z_j$ های مربوط به خانه‌های غیرپایه‌ای و تصمیم‌گیری جهت توقف یا ورود یک متغیر غیرپایه‌ای به پایه ۳ـ یافتن متغیر ورودی به پایه و خروجی از پایه ۴ـ یافتن جواب پایه‌ای شدنی جدید و رفتن به مرحله (۲)
اکنون در ادامه فصل به توضیح مراحل این الگوریتم می‌پردازیم:

یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین

مرحله (۱) الگوریتم بالا، یافتن یک BFS برای شروع حل مسأله است. برای **یافتن یک BFS آغازین** از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود:

الف) روش گوشه شمال غربی ب) روش حداقل سطر ج) روش حداقل ستون د) روش حداقل هزینه هـ) روش وگل و) روش راسل

تذکر۲: قبل از به‌کارگیری روش‌های فوق جهت یافتن یک BFS آغازین باید مسأله حمل و نقل را در صورت **عدم توازن، متوازن** کرد.

الف) روش گوشه شمال غربی

مراحل این روش به صورت زیر است:
۱ـ خانه‌ای که در گوشه شمال غربی جدول وجود دارد را می‌یابیم و با در نظر گرفتن مقدار عرضه سطر این خانه و مقدار تقاضای ستون آن، عدد کوچکتر را به این خانه تخصیص می‌دهیم.۲ـ مقدار تخصیص داده شده را از عرضه سطر و تقاضای ستون خانه موردنظر کم می‌کنیم و اگر عرضه یا تقاضا (یا هر دو) صفر شدند، آن سطر یا ستون (یا هر دو) را از جدول حذف می‌کنیم و به گام (۱) می‌رویم. این کار را تا پر شدن $m+n-۱$ خانه از جدول به عنوان متغیر پایه‌ای و صفر شدن تمام عرضه‌ها و تقاضاها ادامه می‌دهیم.

نکته۱۳: اگر عرضه یک سطر و تقاضای یک ستون هم‌زمان صفر شوند، در این صورت تعداد خانه‌های پر کمتر از $m+n-۱$ خواهد بود؛ یعنی یک متغیر پایه‌ای دارای مقدار صفر می‌باشد و جواب پایه‌ای تباهیده به دست آمده است.

مثال۱۱: مُدل برنامه‌ریزی حمل‌ونقل با هزینه‌ها و مقادیر عرضه و تقاضای زیر را در نظر بگیرید:
اگر در حل اولیه که با روش گوشه‌ی شمال غربی به دست آمده است، $x_{۱۳}$، اولین کاندید ورود به پایه باشد، ضریب هزینه‌ی آن یعنی (۱) چقدر باید افزایش یابد تا متغیر بعدی هم کاندید ورود به پایه شود؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۱	۲	۱	۲۰
۲	۰	۴	۵	۴۰
۳	۲	۳	۳	۳۰
تقاضا	۳۰	۲۰	۲۰	

۱) ۵ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» پایه اولیه با استفاده از روش گوشه شمال غربی:
(با توجه به برابر نبودن عرضه با تقاضا، مقصد مجازی ۴ تعریف شده است.)

	۱	۲	۳	مقصدمجازی ۴	عرضه
۱	۲۰				۲۰
۲	۱۰	۲۰	۱۰		۴۰
۳			۱۰	۲۰	۳۰
تقاضا	۳۰	۲۰	۲۰	۲۰	

$x_{۱۳}$ ورودی به پایه:

$$\begin{array}{ccc} ۲۰-\theta & \rightarrow & \theta \\ \uparrow & & \downarrow \\ ۱۰+\theta & \leftarrow & ۱۰-\theta \end{array} \xrightarrow{\text{گام دوم}}$$

	۱	۲	۳	۴
	۱۰		۱۰	
	۲۰	۲۰		
			۱۰	۲۰

متغیر $x_۴$ ورودی به پایه:

$$Z_{۱۴}-C_{۱۴} \geq ۰ \Rightarrow ۰+C_{۱۳}-۳+۰ \geq ۰ \Rightarrow C_{۱۳} \geq ۳ \Rightarrow \Delta C_{۱۳} \geq (۳-۱) \rightarrow \Delta C_{۱۳} \geq ۲$$

مثال۱۲: جدول مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید. جواب اولیه به روش گوشه شمال غربی آن عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۱۰
۲۰۰	۳۰۰	۱۶۰	۱۶۰
۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۱۵۰
۱۴۰	۲۰۰	۸۰	

۱) ۶۸۰۰۰ ۲) ۶۸۳۰۰ ۳) ۸۳۰۰۰ ۴) ۸۳۶۰۰

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۵۰ / ۱۱۰	۱۰۰	۱۰۰	~~۱۱۰~~	
۲۰۰ / ۳۰	۳۰۰ / ۱۳۰	۱۶۰	~~۱۶۰~~	~~۱۳۰~~
۱۰۰	۲۰۰ / ۷۰	۳۰۰ / ۸۰	~~۱۵۰~~	۸۰
~~۱۴۰~~	~~۲۰۰~~	~~۸۰~~	۴۲۰	
~~۳۰~~	~~۷۰~~		۴۲۰	
۰	۰			

$$Z = ۱۱۰(۵۰) + ۳۰(۲۰۰) + ۱۳۰(۳۰۰) + ۷۰(۲۰۰) + ۸۰(۳۰۰) = ۸۸۵۰۰$$

ب) روش حداقل سطر

۱ـ در سطر اول خانه‌ای که کمترین ضریب هزینه را دارد انتخاب می‌کنیم (اگر چنین خانه‌ای منحصر به فرد نباشد یکی را به دلخواه بر می‌گزینیم) و با در نظر گرفتن مقادیر عرضه و تقاضای سطر و ستون آن خانه، عدد کوچکتر را به آن خانه تخصیص می‌دهیم.۲ـ مقدارِ تخصیص داده شده را از عرضه سطر و تقاضای ستون خانه مورد نظر کم می‌کنیم و هر کدام که صفر شد، سطر یا ستون (یا هر دو) را حذف می‌کنیم.۳ـ اگر سطر اول حذف نشده باشد، دوباره خانه بعدی در سطر اول که کمترین هزینه را دارد را می‌یابیم و مطابق روش گفته شده به آن تخصیص می‌دهیم. این روند را ادامه می‌دهیم تا سطر اول حذف گردد، سپس به سراغ سطر دوم می‌رویم و إلی آخر. همانند روش گوشه شمال غربی به پر شدن $m+n-1$ خانه به عنوان پایه و صفر شدن عرضه‌ها و تقاضاها ادامه می‌دهیم.

مثال۱۳: با استفاده از روش حداقل سطر، یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله زیر بیابید:

	1	2	3	4	
1	-1	2	0	3	60
2	4	1	2	4	40
3	5	1	3	4	50
	20	30	70	30	150
					150

☑ پاسخ:

	1	2	3	4			
1	-1 / 20	2	0 / 40	3	~~60~~	~~40~~	0
2	4	1 / 30	2 / 10	4	~~40~~	~~10~~	0
3	5	1	3 / 20	4 / 30	~~50~~	~~30~~	0
	~~20~~	~~30~~	~~70~~	~~30~~			
	0	0	~~30~~	0			
			~~20~~				
			0				

تعداد خانه‌های پر برابر $m+n-1=۶$ است و جدول بالا یک جواب پایه‌ای شدنی غیرتباهیده را نشان می‌دهد.

ج) روش حداقل ستون: مانند روش حداقل سطر است ولی در مورد ستون‌ها اجرا می‌شود.

نکته۱۴: شرط لازم برای رخ دادن تبهگنی در یک مسأله حمل و نقل آن است که مجموع زیر مجموعه‌ای از مقادیر عرضه برابر مجموع زیرمجموعه‌ای از مقادیر تقاضا گردد. به عنوان مثال در مثال بعد تبهگنی رخ داده است و $s_۱ = ۵۰$, $s_۳ = ۱۱۰$, $d_۲ = ۶۰$ و $d_۳ = ۱۰۰$ و همچنین $s_۱ + s_۲ = d_۲ + d_۳$. البته ممکن است در یک مسأله حمل و نقل، شرط گفته شده صادق باشد ولی تبهگنی رخ ندهد زیرا این شرط، شرط لازم است و نه شرط کافی برای رخ دادن تبهگنی.

مثال۱۴: با استفاده از روش حداقل ستون یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل مقابل بیابید.

	1	2	3	4	
1	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	50
2	$\boxed{0}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	40
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	110
	40	60	100	50	200 \ 250

☑ **پاسخ:** با افزودن یک مبدأ مجازی مسأله را متوازن می‌کنیم.

	1	2	3	4	
1	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$	~~50~~ ~~40~~ 0
2	$\boxed{0}$ 40	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	~~40~~ 0
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{2}$ 50	~~110~~ ~~50~~ 0
4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 50	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	~~50~~ 0
	~~40~~ 0	~~60~~ ~~10~~ 0	~~100~~ ~~60~~ 0	~~50~~ 0	

تعداد خانه‌های پر ۶ تا می‌باشد که کمتر از $m+n-1=7$ می‌باشد پس جواب پایه‌ای تباهیده با یک درجه تباهیدگی داریم.

د) روش حداقل هزینه

در این روش در بین تمام خانه‌های جدول، خانه‌ای که کمترین ضریب هزینه را دارد برای تخصیص دادن انتخاب کرده و اگر چنین خانه‌ای منحصر به فرد نباشد، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. بقیه مراحل کار مانند روش‌های قبل است.

مثال۱۵: یک جواب پایه‌ای شدنی به روش حداقل هزینه برای مسأله حمل و نقل زیر بیابید.

	1	2	3	4	
1	$\boxed{-1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	50
2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
3	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	60
4	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	130
	50	110	40	100	300 \ 300

☑ **پاسخ:** یک‌بار سطر و ستون با هم حذف شدند، پس جواب پایه‌ای تباهیده با یک درجه تباهیدگی داریم. تعداد خانه‌های پر ۶تا است که کمتر از $m+n-1=7$ است.

	1	2	3	4	
1	$\boxed{-1}$ 50	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	~~50~~ 0
2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 60	~~60~~ 0
3	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	~~60~~ 0
4	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{6}$ 40	$\boxed{3}$ 40	~~130~~ ~~80~~ ~~40~~ 0
	~~50~~ 0	~~110~~ ~~50~~ 0	~~40~~ 0	~~100~~ ~~40~~ 0	

ه) روش وگل: راه‌حل این روش به صورت زیر است:

۱ـ کمترین ضریب هزینه هر سطر و ستون را از کمترین ضریب هزینه بعدی همان سطر یا ستون کم می‌کنیم و عدد حاصله را به عنوان جریمه در نظر می‌گیریم.

۲ـ از بین جریمه‌های حاصله بزرگترین جریمه را انتخاب می‌کنیم و در صورتی که بیشترین جریمه منحصر به فرد نباشد یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و سطر یا ستون مربوط به بیشترین جریمه خانه‌ای که کمترین ضریب هزینه را دارد(در صورت تعدد یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم) انتخاب کرده و به خانه موردنظر مینیمم عرضه و تقاضای سطر و ستون آن خانه را تخصیص می‌دهیم.

۳ـ مقدار تخصیص داده شده به خانه موردنظر را از عرضه و تقاضای سطر و ستون آن خانه کم کرده و هر کدام که صفر شد، سطر یا ستون (یا هر دو) را حذف می‌کنیم و به گام (۱) می‌رویم.

در روش وگل هنگامی که فقط یک سطر یا ستون باقی مانده باشد محاسبه جریمه را کنار گذاشته و از روش حداقل سطر یا حداقل ستون عمل می‌کنیم.

مثال۱۶: جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با روش تقریب vogell یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین بدست آوریم. اولین متغیری که تخصیص به آن صورت می‌گیرد (یعنی مقداردهی می‌شود) کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

	۱	۲	۳	
۱	۱	۲	۴	۸۰
۲	۱	۳	۵	۳۰
۳	۷	۵	۲	۹۰
	۱۰۰	۴۵	۵۵	

۱) x_{12} ۲) x_{11} ۳) x_{21} ۴) x_{33}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در روش تقریب Vogell، در مرحله اول، برای هر سطر و ستون جریمه‌ای در نظر می‌گیریم که برای این کار کوچک‌ترین هزینه سطر (ستون) را از کوچک‌ترین هزینه بعدی همان سطر (ستون) کم می‌کنیم. در مرحله بعد، سطر یا ستونی را که دارای بزرگترین جریمه است مشخص می‌کنیم. اگر بزرگترین جریمه یکتا نباشد، به دلخواه یکی را انتخاب می‌کنیم. در سطر یا ستون انتخاب شده، به متغیری که دارای کمترین هزینه است به اندازه $x_{ij} = \min\{s_i, d_j\}$ تخصیص می‌دهیم.

	۱	۲	۳	جریمه سطر
۱	۱	۲	۴	۱
۲	۱	۳	۵	۲
۳	۷	۵	۲	۳
جریمه ستون	۰	۱	۲	

سطر سوم دارای بزرگترین جریمه است و x_{33} دارای کمترین هزینه می‌باشد، پس اولین متغیری که تخصیص به آن صورت می‌گیرد، x_{33} یعنی گزینه ۴ است.

مثال۱۷: جدول حمل و نقل مینیمم‌سازی مقابل را در نظر بگیرید. اعداد داده شده در جدول ضرایب هزینه را نشان می‌دهند. فرض کنید $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$. برای یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین با استفاده از روش تقریب وگل (VAM)، اولین اختصاص به کدام متغیر صورت می‌گیرد؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۵)

	۱	۲	۳
۱	$-\alpha_1$	$-\alpha_1$	۰
۲	$-\alpha_2$	$-\alpha_2$	۰
۳	$-\alpha_3$	$-\alpha_3$	۰

۱) x_{13} ۲) x_{33} ۳) x_{11} یا x_{12} ۴) x_{31} یا x_{32}

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق روش وگل، کمترین ضریب هزینه هر سطر و ستون را از کمترین هزینه بعدی همان سطر یا ستون کم می‌کنیم و آن را جریمه می‌نامیم. جریمه تمامی سطرها برابر می‌باشد. جریمه ستون‌ها نیز عبارت است از:

ستون۱: $-\alpha_1 + \alpha_2$ ، ستون۲: $-\alpha_1 + \alpha_2$ ، ستون۳: 0

بیشترین جریمه مربوط به ستون ۱ و ۲ می‌باشد. پس یکی از متغیرهای x_{11} یا x_{12} (کمترین ضریب هزینه ستون‌ها) ورودی به پایه می‌باشد.

و) روش راسل: مراحل این روش به صورت زیر است:

۱ـ ابتدا بزرگ‌ترین هزینه هر سطر را به عنوان $\bar{u}_i$ مقابل سطر مربوط به آن یادداشت می‌کنیم. همین عمل را برای ستون‌ها انجام داده و آن را به عنوان $\bar{v}_j$ زیر ستون مربوطه یادداشت می‌کنیم. ۲ـ برای تمامی خانه‌های جدول مقادیر $C_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$ را محاسبه می‌کنیم و از بین آن‌ها منفی‌ترین مقدار به دست آمده را انتخاب می‌کنیم. چنانچه منحصر به فرد نباشد انتخاب اختیاری است. ۳ـ حال به خانه‌ی انتخاب شده در مرحله‌ی قبل، مینیمم عرضه و تقاضای سطر و ستون آن خانه را تخصیص می‌دهیم، پس از تخصیص، سطر یا ستون یا هر دو را در صورت اشباع شدن حذف کرده و سپس در خانه‌های باقی مانده در جدول گام‌های ۱ تا ۳ را تکرار می‌کنیم.

مثال۱۸: برای به دست آوردن جواب موجه ابتدایی جدول حمل و نقل زیر از روش راسل استفاده می‌کنیم. اولین متغیری که مقدار می‌گیرد کدام یک و به چه میزان است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

	A	B	C	عرضه
۱	۲۰	۲۵	۱۰	۴۰
۲	۱۶	۲۰	۳۰	۷۰
۳	۰	M	۰	۳۰
تقاضا	۲۰	۳۰	۹۰	۱۴۰

۱) X_{3C} به میزان ۳۰ ۲) X_{3A} به میزان ۲۰ ۳) X_{3B} به میزان ۳۰ ۴) هر دو مورد ۲ و ۳ صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در روش راسل برای یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی، بزرگترین هزینه هر سطر و ستون را می‌یابیم.

بزرگترین هزینه ستون j ام = k_j ; بزرگ‌ترین هزینه سطر i ام = L_i

سپس برای خانه (i,j) داریم: $\Delta_{ij}=c_{ij}-L_i-k_j$. اکنون منفی‌ترین Δ_{ij} را یافته و به متغیر متناظر با آن مقدار نسبت می‌دهیم. در جدول ارائه شده در متن سؤال داریم:

$L_1=25\ ,\ L_2=30\ ,\ L_3=M \quad ; \quad k_1=20\ ,\ k_2=M\ ,\ k_3=30$

$\Delta_{11}=20-25-20=-25 \quad ; \quad \Delta_{21}=16-30-20=-34 \quad ; \quad \Delta_{31}=0-M-20=-M-20$

$\Delta_{12}=25-25-M=-M \quad ; \quad \Delta_{22}=20-30-M=-M-10 \quad ; \quad \Delta_{32}=M-M-M=-M$

$\Delta_{13}=10-25-30=-45 \quad ; \quad \Delta_{23}=30-30-30=-30 \quad ; \quad \Delta_{33}=0-M-30=-M-30$

منفی‌ترین Δ_{ij} عبارت است از: $\Delta_{33}=-M-30$ پس x_{3c} مقدار ۳۰ را می‌گیرد.

◆ ◆ ◆ ◆

نمایش بردارهای غیرپایه‌ای برحسب بردارهای پایه‌ای در جدول حمل و نقل

فرض کنیم $\bar{a}_{ij}$ در جدول سیمپلکس مسأله حمل و نقل ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{ij} باشد. می‌خواهیم فرم کلی $\bar{a}_{ij}$ را بیابیم. اگر a_{ij} ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{ij} در ماتریس ضرایب تکنولوژی A باشد، در این صورت داریم: $\bar{a}_{ij}=B^{-1}a_{ij} \Rightarrow a_{ij}=B\bar{a}_{ij}$

مؤلفه‌های ستون $\bar{a}_{ij}$ را مجهولات $\bar{x}_1$ تا $\bar{x}_{m+n}$ فرض می‌کنیم، پس $a_{ij}=B\bar{a}_{ij}$ یک دستگاه معادلات است که می‌توان با **دستور کرامر** مجهولات آن را یافت:

$$\bar{x}_k=\frac{\det(B_k)}{\det(B)}$$

(B_k ماتریس حاصل از جایگزینی ستون Kام B با ستون a_{ij} است.)

پس B_k یک زیرماتریس مربعی از ماتریس A است و $\det(B_k)=0$ یا ۱ یا ۱-، همچنین می‌دانیم که $\det(B)=1$ یا ۱-، پس می‌توان گفت: $\bar{x}_k=0$ یا ۱ یا ۱-؛ یعنی تمام مؤلفه‌های ستون $\bar{a}_{ij}$ ۰، ۱یا ۱- هستند. پس از آنجا که $a_{ij}=B\bar{a}_{ij}$ است می‌توان ستون غیرپایه‌ای a_{ij} از ماتریس A را با جمع و تفریق کردن برخی از ستون‌های پایه‌ای ماتریس A به دست آورد. به جدول مقابل توجه کنید:

	1	2	3	4	
1	× a_{11}			× a_{14}	S_1
2		a_{22}		+1 × a_{24}	S_2
3		× a_{32}			S_3
4		+1 × a_{42}	× a_{43}	-1 × a_{44}	S_4
	d_1	d_2	d_3	d_4	

برخی از خانه‌هایی که با علامت × مشخص شده‌اند خانه‌های مربوط به متغیرهای پایه‌ای در یک جواب پایه شدنی می‌باشند و خانه‌های خالی مربوط به متغیرهای غیرپایه‌ای هستند. برای نمایش هر بردار غیرپایه‌ای بر حسب بردارهای پایه‌ای، برای خانه غیرپایه‌ای می‌توان حلقه‌ای تشکیل داد که این متغیر غیر پایه‌ای در یک گوشه این حلقه باشد و خانه‌های پایه‌ای در گوشه‌های دیگر این حلقه باشند. به حلقه خانه غیرپایه‌ای (۲و۲) توجه کنید. این حلقه در حقیقت نمایش ستون غیرپایه‌ای a_{22} برحسب ستون‌های پایه‌ای است: $a_{22}=a_{24}-a_{44}+a_{42}$ درستی رابطه اخیر با توجه به $a_{ij}=(0,\dots,\underbrace{1}_{\text{مکان i ام}},\dots,\underbrace{1}_{\text{مکان j ام}},\dots,0)^t$ واضح است.

نکته۱۵: ستون‌های متناظر با خانه‌هایی که با هم تشکیل حلقه می‌دهند، وابسته خطی هستند.

نکته۱۶: ثابت کردیم که همه عناصر یک ستون غیرپایه‌ای در جدول سیمپلکس مسأله حمل و نقل ۰، ۱ یا ۱- هستند پس عنصر لولا همواره ۱ است.

مثال۱۹: در جدول حمل و نقل زیر متغیرهای وابسته به کدام خانه‌های جدول می‌توانند تشکیل یک جواب پایه‌ای را دهند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۳)

X_{11}	X_{12}	X_{13}	۴
X_{21}	X_{22}	X_{23}	۵
۳	۲	۴	

۱) $X_{11},X_{13},X_{23},X_{21}$ ۲) $X_{11},X_{12},X_{22},X_{21}$

۳) $X_{12},X_{13},X_{23},X_{22}$ ۴) $X_{11},X_{12},X_{22},X_{23}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فقط در گزینه ۴ تمام متغیرهای غیرپایه‌ای می‌توانند یک حلقه با متغیرهای پایه‌ای تشکیل دهند.

×	×	
	×	×

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۰: در جدول سیمپلکس متناظر با جواب پایه‌ای $(x_{11},x_{14},x_{24},x_{32},x_{42},x_{43},x_{44})$ ارائه شده در جدول بالا ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{22} کدام است؟

۱) $\bar{a}_{22}=(0,1,0,0,0,1,0,0)^t$ ۲) $\bar{a}_{22}=(0,0,1,0,1,0,-1)^t$ ۳) $\bar{a}_{22}=(0,0,1,0,1,0,-1,0)^t$ ۴) $\bar{a}_{22}=(0,0,-1,0,1,0,-1)^t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به حلقه مربوط به متغیر غیر پایه‌ای x_{22} ملاحظه می‌شود که $a_{22}=a_{24}-a_{44}+a_{42}$ است، پس $a_{22}=0\times a_{11}+0\times a_{14}+a_{24}+0\times a_{32}+a_{42}+0\times 4_{43}-a_{44}$. نمایش ستون غیرپایه‌ای a_{22} بر حسب ستون‌های پایه‌ای است؛ یعنی ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{22} در جدول سیمپلکس عبارت است از: $\bar{a}_{22}=(0,0,1,0,1,0,-1,0)^t$. آخرین درایه (۰) در بردار $\bar{a}_{22}^t$ ضریب متغیر مصنوعی R است که در جدول سیمپلکس وجود دارد ولی در جدول حمل و نقل ذکر نمی‌شود.

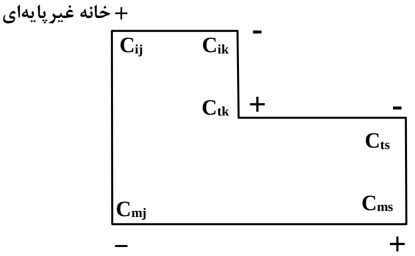
یافتن $C_{ij}-Z_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای

گام (۱) الگوریتم سیمپلکس حمل و نقل، یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین بود که روش‌های یافتن آن ذکر شد. اکنون نوبت بـه اجـرای گـام (۲) الگـوریتم می‌رسد که باید به منظور پی بردن به بهینه بودن یـا نبـودن جـواب حاصـل شـده $\overline{c}_{ij}=c_{ij}-z_{ij}$ خانـه‌هـای خـالی (غیـر پایـه‌ای) را محاسـبه کنـیم. بـرای **محاسبه $c_{ij}-z_{ij}$ خانه‌های غیرپایه‌ای** دو روش وجود دارد: **الف) روش حلقه ب) روش MODI.**

الف ـ روش حلقه (روش پله‌سنگ)

در جواب پایه‌ای پیدا شده اگر x_{ij} یک متغیر غیرپایه‌ای باشد، داریم: $c_{ij}-z_{ij}=c_{ij}-c_BB^{-1}a_{ij}$ و ثابت کردیم که عناصر $\overline{a}_{ij}$ به صورت ۰ یـا ۱ یـا ۱- هستند، پس $C_B\overline{a}_{ij}$ با جمع و تفریق کردن ضریب هزینه برخی متغیرهای پایه‌ای به دست می‌آید.

برای محاسبه $C_{ij}-Z_{ij}$ یک خانه غیرپایه‌ای به روش حلقه به صورت زیر عمل می‌کنیم:



با استفاده از خطوط عمودی و افقی برای خانه غیرپایه‌ای موردنظر حلقـه‌ای مـی‌سـازیم کـه ایـن خانـه غیرپایه‌ای در یکی از گوشه‌های آن واقع باشد و سایر گوشه‌های حلقه، خانه‌های پایـه‌ای باشـند. پـس از تشکیل حلقه، ضریب هزینه خانه غیرپایه‌ای حلقه را با علامت مثبت و به ترتیب، علامت ضـریب هزینـه سایر گوشه‌ها را به صـورت یکـی در میـان مثبـت و منفـی در نظـر مـی‌گیـریم. عـدد بـه دسـت آمـده همان $C_{ij}-Z_{ij}$ خانه غیرپایه‌ای موردنظر است. لازم است یادآوری کنیم که حلقه مربوط بـه هـر خانـه غیرپایه‌ای، منحصر به فرد می‌باشد.

$$C_{ij}-Z_{ij}=C_{ij}-C_{ik}+C_{tk}-C_{ts}+C_{ms}-C_{mj}$$

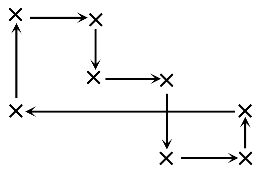
مثال۲۱: در جدول حمل و نقل زیر خانه‌های ● مربوط به متغیرهای پایه فعلی و خانه ○ مربوط به متغیر وارد شونده است. در این صورت چند درصد از خانه‌های جدول در تشکیل حلقه مربوط به متغیر ورودی استفاده نمی‌شوند؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۳)

○	●			
	●	●		
●				●
		●		●

۱) ۶۰ ۲) ۸۰
۳) ۴۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه «۱» حلقه تشکیل‌دهنده متغیر وارد شونده به پایه به صورت مقابل می‌باشد:



۸ = تعداد خانه‌های استفاده شده

۱۲ = تعداد خانه‌های استفاده نشده

$\text{درصد استفاده نشده}=\frac{12}{20}=60\%$

مثال۲۲: یک جواب شدنی برای مسأله حمل و نقل در جدول زیر نشان داده شده است. اگر x_{11} تنها متغیر ورودی به پایه باشد، گزینه درسـت را انتخاب کنید.

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	[a]	[۳] ۱۰۰	[۲] ۵۰	
۲	[۴] ۲	[b]	[۵] ۱۵۰	
تقاضا				

۱) $a>6$ و $b<1$
۲) $a<6$ و $b>1$
۳) $a<6$ و $b<1$
۴) $a>6$ و $b>1$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از روش پله سنگ داریم:

$$C_{22}-Z_{22}=b-1+7-5=b+1>0\Rightarrow b>-1 \qquad C_{11}-Z_{11}=a-7+5-4=a-6<0\Rightarrow a<6$$

فقط گزینه ۲ در بازه‌های فوق قرار دارد.

مثال۲۳: بخشی از یک جدول حمل و نقل داده شده است. این جدول به ازای $\alpha=۰$ بهینه است. به ازای چه مقادیری از α جدول بهینه باقی خواهد ماند؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۴ ۵۲	$۱۸-\alpha$	$۱۰+\alpha$
$۱۶-\alpha$ ۱۵	۲۴ ۲۲	$۱۶+۲\alpha$ ۳۰

۱) $۲\le\alpha\le۷$
۲) $\alpha\le۳$
۳) $۰\le\alpha\le۴$
۴) $۱\le\alpha\le۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای اینکه جدول بهینه باشد، باید ضرایب هزینه متغیرهای غیرپایه‌ای نامنفی باشد. با استفاده از روش پله سنگ مقادیر $C_{ij}-Z_{ij}$ را بررسی می‌کنیم.

$$C_{۱۲}-Z_{۱۲}=۱۸-\alpha-۲۴+۱۶-\alpha-۴\ge۰$$
$$۶-۲\alpha\ge۰\Rightarrow\alpha\le۳$$
$$C_{۱۳}-Z_{۱۳}=۱۰+\alpha-۱۶-۲\alpha+۱۶-\alpha-۴\ge۰$$
$$۶-۲\alpha\ge۰\Rightarrow\alpha\le۳$$

مثال۲۴: در جدول زیر یک جواب پایه یک مسأله‌ی حمل و نقل داده شده است. پس از انجام تنها یک تکرار سیمپلکس حمل و نقل هزینه‌ی جواب پایه جدید چه مقدار بهبود می‌یابد؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۲)

	D۱	D۲	D۳	D۴	
S۱	۴ ۵۰۰	۵ ۳۰۰۰	۷ ۴۰۰۰	۶ ۱۵۰۰	۹۰۰۰
S۲	۷	۱ ۱۰۰۰	۴	۳	۱۰۰۰
S۳	۲ ۵۵۰۰	۵	۳	۵	۵۵۰۰
	۶۰۰۰	۴۰۰۰	۴۰۰۰	۱۵۰۰	

۱) ۵۰۰
۲) ۱۰۰۰
۳) ۳۰۰۰
۴) ۸۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا باید متغیر واردشونده را پیدا کنیم. پس $Z_{ij}-C_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای را محاسبه می‌کنیم.

$$Z_{۲۱}-C_{۲۱}=-۷+۴-۵+۱=-۷$$
$$Z_{۲۳}-C_{۲۳}=-۴+۱-۵+۷=-۱$$
$$Z_{۲۴}-C_{۲۴}=-۳+۱-۵+۶=-۱$$
$$Z_{۳۲}-C_{۳۲}=-۵+۲-۴+۵=-۲$$
$$Z_{۳۳}-C_{۳۳}=-۳+۲-۴+۷=۲\ge۰$$
$$Z_{۳۴}-C_{۳۴}=-۵+۲-۴+۶=-۱$$

فقط متغیر $x_{۳۳}$ شرط ورود به پایه را دارد. $x_{۳۳}$ را وارد پایه می‌کنیم و متغیر خارج‌شونده را از روش پله‌سنگی پیدا می‌کنیم.

$+\theta$ ۵۰۰	۳۰۰۰	$-\theta$ ۴۰۰۰	۱۵۰۰
	۱۰۰۰		
$-\theta$ ۵۵۰۰		$+\theta$	

$$\text{Min}\{۵۵۰۰,۴۰۰۰\}=۴۰۰۰\Rightarrow\theta=۴۰۰۰$$
$$\Rightarrow\Delta Z=-(۲)(۴۰۰۰)=-۸۰۰۰$$

ب ـ روش متغیرهای دوگان (روش MODI یا روش ضرایب یا روش توزیع تعدیل‌شده)

	1	---	n	
1	C_{11}		C_{1n}	u_1
⋮				⋮
m	C_{m1}		C_{mn}	u_m
	v_1	---	v_n	

فرض کنیم u_i برای $i=۱,...,m$ متغیرهای دوگان متناظر با قیود عرضه و v_j برای $j=۱,...,n$ متغیرهای دوگان متناظر با قیود تقاضا باشند. دوگان مسأله حمل و نقل به صورت زیر می‌باشد:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\ W=\sum_{i=۱}^{m}S_iu_i+\sum_{j=۱}^{n}d_jv_j$$
$$u_i+v_j\le c_{ij}$$
u_i,v_j نامقید
$$i=۱,\dots,m$$
$$j=۱,\dots,n$$

بردار متغیرهای مسأله دوگان عبارت است از: $y=(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n)$ و می‌دانیم که متناظر با هر متغیر (مانند x_{ts}) در مسأله اولیه یک محدودیت (به صورت $u_t+v_s\le C_{ts}$) در مسأله دوگان وجود دارد.

لم ۱: فرض کنیم که یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله اولیه (مسأله حمل و نقل) به دست آورده‌ایم و متغیر x_{ts} در این جواب یک متغیر پایه‌ای است، محدودیت دوگان متناظر با متغیر پایه‌ای x_{ts} به صورت تساوی $u_t+v_s=C_{ts}$ است.

اثبات: برای متغیر پایه‌ای x_{ts} داریم:

$$C_{ts}-Z_{ts}=0\Rightarrow C_{ts}-C_BB^{-1}a_{ts}=0 \qquad (1)$$

می‌دانیم که C_BB^{-1} همان مقادیر متغیرهای مسأله دوگان است، یعنی: $y=C_BB^{-1}$.

$$C_BB^{-1}a_{ts}=ya_{ts}=(u_1,\dots,u_t,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s,\dots,v_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \to \text{مکان t ام}\\ \\ \to \text{مکان s ام}\\ \\ \\ \end{matrix}=u_t+v_s$$

با قرار دادن $C_BB^{-1}a_{ts}=u_t+v_s$ در رابطه (۱) داریم: $u_t+v_s=c_{ts}$.

با توجه به اینکه در هر جواب پایه‌ای شدنی $m+n-1$ متغیر پایه‌ای داریم، پس می‌توان $m+n-1$ معادله با $m+n$ مجهول تشکیل داد. از آنجا که یکی از محدودیت‌های مسأله حمل و نقل، زائد است پس یکی از $m+n$ مجهول دوگان نیز زائد است و می‌توان هر مقدار دلخواهی را به آن نسبت داد و بقیه $m+n-1$ متغیر را از معادلات موردنظر محاسبه کرد. به این ترتیب، به ازای جواب پایه‌ای شدنی مسأله اولیه مقادیر متغیرهای دوگان یعنی $u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n$ را می‌یابیم. اکنون برای یافتن $C_{ij}-Z_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای داریم: $C_{ij}-Z_{ij}=C_{ij}-C_BB^{-1}a_{ij}=C_{ij}-(u_i+v_j)$

پس به طور خلاصه، برای یافتن $C_{ij}-Z_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای با روش ضرایب به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا برای $m+n-1$ متغیر پایه‌ای (مثلاً x_{ts}) تعداد $m+n-1$ معادله (به صورت $u_t+v_s=c_{ts}$) تشکیل می‌دهیم که این معادلات دارای $m+n$ متغیر هستند. یکی از متغیرها را به دلخواه انتخاب کرده و مقداری دلخواه به آن می‌دهیم و سایر متغیرهای دوگان را از معادلات محاسبه می‌کنیم و به این ترتیب، همه متغیرهای دوگان یعنی $u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n$ را یافته‌ایم. اگر x_{ij} یک متغیر غیرپایه‌ای باشد، داریم: $C_{ij}-Z_{ij}=C_{ij}-(u_i+v_j)$

مثال ۲۵: یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر داده شده است:

	1	2	3	4		
1	[-1] 20	[2]	[0] 40	[3]	60	u_1
2	[4]	[1] 30	[2] 10	[4]	40	u_2
3	[5]	[1]	[3] 20	[4] 30	50	u_3
	20	30	70	30		
	v_1	v_2	v_3	v_4		

$C_{24}-Z_{24}, C_{31}-Z_{31}$ را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:** معادلات مربوط به متغیرهای پایه‌ای به صورت زیر هستند: x_{ij} متغیر پایه $\to u_i+v_j=C_{ij}$

$$\begin{matrix}x_{11}\ \text{متغیر پایه}\to u_1+v_1=-1\\ x_{13}\ \text{متغیر پایه}\to u_1+v_3=0\\ x_{22}\ \text{متغیر پایه}\to u_2+v_2=1\\ x_{23}\ \text{متغیر پایه}\to u_2+v_3=2\\ x_{33}\ \text{متغیر پایه}\to u_3+v_3=3\\ x_{34}\ \text{متغیر پایه}\to u_3+v_4=4\end{matrix}\xrightarrow{\text{با فرض } v_2=0}\begin{cases}u_1=-1\\ u_2=1\\ u_3=2\\ v_1=0\\ v_2=0\\ v_3=1\\ v_4=2\end{cases}$$

به این ترتیب داریم:

$$C_{31}-Z_{31}=C_{31}-(u_3+v_1)=5-(2+0)=3 \quad ; \quad C_{24}-Z_{24}=C_{24}-(u_2+v_4)=4-(1+2)=1$$

نکته ۱۷: در مثال قبل برای حل معادلات قرار دادیم: $v_2=0$. اگر هر کدام از متغیرهای دیگر را انتخاب کنیم و هر مقداری به آن نسبت دهیم مقادیر $C_{ij}-Z_{ij}$ تغییر نخواهند کرد.

مثال۲۶: یک جواب شدنی از یک مسأله حمل و نقل در جدول زیر نشان داده شده است. مقدار c_{23} کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

$v_1 = 6$	$v_2 = 9$	$v_3 = 4$	
6 (200)	9	13	$u_1 = 0$
11	14 (400)	c_{23} (200)	u_2
8	7	11 (500)	$u_3 = 7$

۱) ۸
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به ازای هر جواب پایه‌ای $U_i + V_j = C_{ij}$

$$U_2 + V_2 = C_{22} \Rightarrow U_2 + 9 = 14 \Rightarrow U_2 = 5 \quad ; \quad U_2 + V_3 = C_{23} \Rightarrow 5 + 4 = C_{23} \Rightarrow C_{23} = 9$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۷: متغیرهای دوگان (DUAL) مسأله T را با $W = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ نشان می‌دهیم. اگر در یک جواب بهینه مسأله T، x_{ij} مثبت باشد، در هر جواب بهینه دوگان مسأله T خواهیم داشت:

۱) $u_i + v_j > c_{ij}$　　۲) $u_i + v_j = c_{ij}$　　۳) $u_i = v_j$　　۴) $u_i > v_j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» محدودیت متناظر با متغیر x_{ij} در مسأله دوگان به صورت $u_i + v_j \le c_{ij}$ می‌باشد. در حالت بهینه $x_{ij} > 0$ است، پس در جواب بهینه دوگان محدودیت موردنظر به تساوی تبدیل می‌شود، پس $u_i + v_j = c_{ij}$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۸: مسأله T جواب بهینه دارد اگر :

۱) $m \le n$ باشد.　　۲) $m \ge n$ باشد.　　۳) $\sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j$ باشد.　　۴) $\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$ باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» محدودیت‌های $\sum x_{ij} \le a_i$ و $\sum x_{ij} = b_j$ را با هم جمع می‌کنیم تا به روابط (۱) و (۲) برسیم:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} \sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۹: مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید، اگر B یک پایه قابل قبول این مسأله باشد و برای متغیرهای پایه‌ای این جواب سیستم، روابط خطی روبرو را داشته باشیم: x_{ij} متغیر پایه ، $u_i + v_j = c_{ij}$

و $W = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, n_n)$ یک جواب قابل قبول برای مسأله دوگان شود، کدام گزینه صحیح است؟

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n$$

به ازای تمام i و j ها، $x_{ij} \ge 0$

۱) مسأله نامحدود است.

۲) دوگان مسأله نامحدود است.

۳) B پایه بهینه مسأله است.

۴) مسأله جواب بهینه دارد ولی B لزوماً پایه بهینه نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» B یک پایه قابل قبول مسأله اولیه است و می‌توان یک جواب قابل قبول پایه‌ای برای مسأله اولیه بـه دسـت آورد. بـرای متغیرهـای پایه‌ای این جواب سیستم، روابط خطی زیر را تشکیل می‌دهیم: x_{ij} متغیر پایه $\rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$

با حل این سیستم جواب $w = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ برای مسأله دوگان حاصل می‌شود که طبق صورت سوال یک جـواب قابـل قبـول بـرای دوگـان است. چون مسأله دوگان به شدنی بودن رسیده است پس مسأله اولیه در حالت بهینه قرار دارد و B پایه بهینه مسأله اولیه است.

مثال۳۰: در روش سیمپلکس حمل و نقل اگر انتخاب متغیر همزاد از بین u_iها و v_j ها و همچنین مقداری که به آن می‌دهیم تغییر کند، آنگاه:

۱) متغیر ورودی به پایه تغییر می‌کند.
۲) هیچ تأثیری در بهبود میزان تابع هدف در آن مرحله ندارد.
۳) به جواب پایه بهتری می‌رویم.
۴) به جواب پایه بدتری می‌رویم.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همواره یکی از محدودیت‌های یک مدل حمل و نقل، زائد است پس متغیرهای مسأله دوگان دارای یک درجه آزادی هستند که این متغیر آزاد می‌تواند هر کدام از متغیرها باشد و هر مقداری که به متغیر آزاد نسبت دهیم، مقادیر $C_{ij} - Z_{ij}$ تغییر نمی‌کنند.

مثال۳۱: برای به دست آوردن جواب موجه ابتدایی در مسأله حمل و نقل از روش توزیع تعدیل‌شده (MODI) استفاده شده است. مبنای این روش کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) بر مبنای مفهوم مسأله ثانویه در روش سیمپلکس بنیان نهاده شده است.
۲) براساس مفهوم هزینه فرصتی (جریمه) بنیان نهاده شده است.
۳) بر مبنای مفهوم مسأله اولیه در روش سیمپلکس بنیان نهاده شده است.
۴) الگوریتمی که مستقیماً و مستقلاً در مواقعی که مسأله بزرگ باشد اقدام به حل می‌نماید.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در روش MODI متغیرهای u_i و v_j همان متغیرهای مسأله دوگان هستند.

تعیین متغیر ورودی به پایه و خروجی از پایه

الف ـ تعیین متغیر ورودی به پایه:

پس از یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی و محاسبه $C_{ij} - Z_{ij}$ مربوط به متغیرهای غیرپایه‌ای، اگر برای تمام متغیرهای غیرپایه‌ای داشته باشیم: $C_{ij} - Z_{ij} \geq ۰$، در این صورت جواب پایه‌ای شدنی موجود جواب بهینه است. اگر برای برخی متغیرهای غیرپایه‌ای داشته باشیم: $C_{ij} - Z_{ij} < ۰$، در این صورت اگر $C_{ks} - Z_{ks} = \text{Min}\{C_{ij} - Z_{ij} < ۰\}$، متغیر غیرپایه x_{ks} وارد پایه خواهد شد.

مثال۳۲: در یک مدل حمل و نقل یک جواب اولیه به صورت زیر داده شده است:

					عرضه
	۸ / ۳۵	۶	۱۰	۹	۳۵
	۹ / ۱۰	۱۲ / ۲۰	۱۳ / ۲۰	۷	۵۰
	۱۴	۹	۱۶ / ۱۰	۵ / ۳۰	۴۰
تقاضا	۴۵	۲۰	۳۰	۳۰	۱۲۵

در این صورت در تکرار بعدی روش سیمپلکس حمل و نقل، متغیر وارد شونده کدام متغیر خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) $x_{۳۲}$
۲) $x_{۲۴}$
۳) $x_{۳۱}$
۴) $x_{۱۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» Loop های خانه‌های غیرپایه‌ای را محاسبه می‌کنیم، بیشترین مقدار $Z_{ij} - C_{ij}$ آنها، متغیر ورود به پایه می‌باشد.

$$Z_{۳۱} - C_{۳۱} = -(۱۳+۱۴)+(۱۶+۹) = -۲ \quad ; \quad Z_{۱۳} - C_{۱۳} = -(۱۰+۹)+(۸+۱۳) = ۲$$
$$Z_{۳۲} - C_{۳۲} = -(۹+۱۳)+(۱۲+۱۶) = ۶ \quad ; \quad Z_{۲۴} - C_{۲۴} = -(۷+۱۶)+(۱۳+۵) = -۵$$
$$Z_{۱۲} - C_{۱۲} = -(۶+۹)+(۱۲+۸) = ۵ \quad ; \quad Z_{۱۴} - C_{۱۴} = -(۹+۱۶+۹)+(۵+۱۳+۸) = -۸$$
$$Z_{۲۴} - C_{۲۴} = -(۷+۱۶)+(۵+۱۳) = -۵$$

ب ـ تعیین متغیر خروجی از پایه:

اگر متغیر غیرپایه x_{ks} کاندیدای ورود به پایه باشد، برای تعیین متغیر خروجی از پایه، حلقه مربوط به متغیر x_{ks} را تشکیل می‌دهیم و از بین متغیرهای پایه‌ای که در کنج‌های منفی قرار دارند، متغیری که کمترین مقدار را دارد پیدا می‌کنیم (تست مینیمم نسبت)، این متغیر کاندیدای خروج از پایه است. اگر بیش از یک متغیر کاندید خروج از پایه باشند، یکی را به دلخواه از پایه خارج می‌کنیم و جواب پایه‌ای بعدی، تباهیده خواهد بود.

مثال ۳۳: برای یک مسأله حمل و نقل جواب پایهٔ زیر در دست است. برای بهبود این جواب با روش سیمپلکس؛

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۴ / ۱۰	۳ / ۱۰	۰
۲ / ۱۰	۵	۰ / ۱۰

۱) متغیر $x_{۲۲}$ ورودی به پایه $x_{۱۲}$ خروجی از پایه تعیین می‌شود.

۲) متغیر $x_{۱۳}$ ورودی به پایه و $x_{۱۲}$ خروجی از پایه تعیین می‌شود.

۳) متغیر $x_{۱۳}$ ورودی به پایه و $x_{۱۱}$ خروجی از پایه تعیین می‌شود.

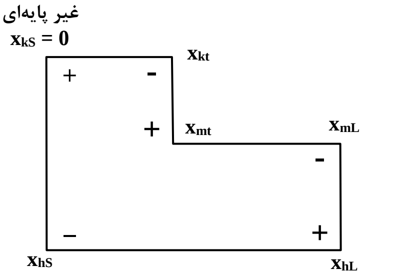
۴) متغیر $x_{۲۲}$ ورودی به پایه و $x_{۱۱}$ خروجی از پایه تعیین می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $C_{ij} - Z_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای را می‌یابیم:

$$C_{۱۳} - Z_{۱۳} = ۰ - ۴ + ۲ - ۰ = -۲ < ۰ \qquad C_{۲۲} - Z_{۲۲} = ۵ - ۲ + ۴ - ۳ = ۴ > ۰$$

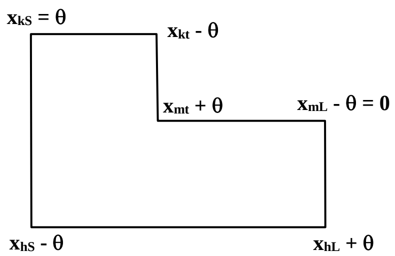
متغیر $x_{۱۳}$ وارد پایه می‌گردد و چون $Min\{x_{۱۱} = ۱۰, x_{۲۳} = ۱۰\} = ۱۰$ پس متغیر خروجی منحصر به فرد نیست لذا $x_{۱۱}$ یا $x_{۲۳}$ از پایه خارج می‌گردد و در مرحله بعد تباهیدگی رخ می‌دهد.

یافتن جواب پایه‌ای شدنی مرحله بعد



اگر متغیر x_{ks} ورودی به پایه باشد، مقدار تست مینیمم نسبت یعنی θ را در حلقه این متغیر گردش می‌دهیم. با این کار مقدار متغیر خروجی صفر خواهد شد که خانه آن را در جدول بعد خالی می‌کنیم و متغیر x_{ks} با مقدار θ وارد پایه می‌شود.

تست مینیمم نسبت: $\theta = Min\{x_{kt}, x_{mL}, x_{hs}\} = x_{mL}$



x_{ks} وارد پایه و x_{mL} از پایه خارج می‌شود و در جواب پایه‌ای بعدی داریم:

اگر با گردش مقدار θ در حلقه **بیش از یک متغیر پایه‌ای به صفر برسد،** یکی را بـه دلخـواه به عنوان متغیر خروجی در نظر می‌گیریم و خانه آن را خالی می‌کنیم و بقیه را با مقـدار صـفر به عنوان متغیر پایه‌ای در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی، جواب پایه‌ای **تباهیده** داریم.

مثال ۳۴: یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر داده شده است:

	1	2	3	4	
1	-1 / 20	2	0 / 40	3	60
2	4	1 / 30	2 / 10	4	40
3	5	1	3 / 20	4 / 30	50
	20	30	70	30	

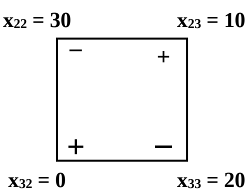
جواب بهینه مسأله بالا را بیابید.

☑ **پاسخ:** چنانچه در مثال ۲۵ ملاحظه شد مقادیر متغیرهای دوگان عبارتند از: $u_۱ = -۱, u_۲ = ۱, u_۳ = ۲$ و $v_۱ = ۰, v_۲ = ۰, v_۳ = ۱, v_۴ = ۲$. اکنون $C_{ij} - Z_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{۱۲} - Z_{۱۲} = C_{۱۲} - (u_۱ + v_۲) = ۲ - (-۱ + ۰) = ۳ \geq ۰ \qquad C_{۱۴} - Z_{۱۴} = C_{۱۴} - (u_۱ + v_۴) = ۳ - (-۱ + ۲) = ۲ \geq ۰$$

$$C_{۲۱} - Z_{۲۱} = C_{۲۱} - (u_۲ + v_۱) = ۴ - (۱ + ۰) = ۳ \geq ۰ \qquad C_{۲۴} - Z_{۲۴} = C_{۲۴} - (u_۲ + v_۴) = ۴ - (۱ + ۲) = ۱ \geq ۰$$

$$C_{۳۱} - Z_{۳۱} = C_{۳۱} - (u_۳ + v_۱) = ۵ - (۲ + ۰) = ۳ \geq ۰ \qquad C_{۳۲} - Z_{۳۲} = C_{۳۲} - (u_۳ + v_۲) = ۱ - (۲ + ۰) = -۱ < ۰$$



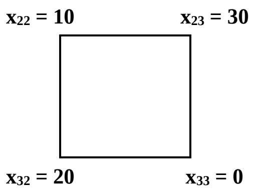
متغیر $x_{۳۲}$ جهت ورود به پایه انتخاب می‌گردد. جهت تعیین متغیر خروجی از پایه داریم:

$$\theta = Min\{x_{۲۲} = ۳۰, x_{۳۳} = ۲۰\} = ۲۰$$

پس متغیر $x_{۳۳}$ از پایه خارج می‌شود. با توجه به علامت گوشه‌ها مقدار $\theta = ۲۰$ را در حلقه گردش می‌دهیم:

جواب پایه‌ای شدنی بعدی به صورت زیر است:

	1	2	3	4		
1	[-1] 20	[2]	[0] 40	[3]	60	$u_1 = 0$
2	[4]	[1] 10	[2] 30	[4]	40	$u_2 = 2$
3	[5]	[1] 20	[3]	[4] 30	50	$u_3 = 2$
	20	30	70	30		
	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$		



بعد از یافتن مقادیر متغیرهای دوگان برای جواب پایه‌ای شدنی جدید برای خانه‌های غیرپایه‌ای $C_{ij} - Z_{ij}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{12} - Z_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) = 2 - (0 - 1) = 3 \geq 0 \qquad C_{14} - Z_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 + 2) = 1 \geq 0$$

$$C_{21} - Z_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 4 - (2 - 1) = 3 \geq 0 \qquad C_{24} - Z_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 4 - (2 + 2) = 0 \geq 0$$

$$C_{31} - Z_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 5 - (2 - 1) = 4 \geq 0 \qquad C_{33} - Z_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 3 - (2 + 0) = 1 \geq 0$$

جواب پایه‌ای شدنی اخیر بهینه است و چون $C_{24} - Z_{24} = 0$، جواب بهینه چندگانه داریم. مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از:

$$Z^* = 20(-1) + 40(0) + 10(1) + 30(2) + 20(1) + 30(4) = 190$$

مثال۳۵: در مسأله حمل و نقل زیر کدام‌یک از جواب‌های زیر بخشی از جواب بهینه مسأله است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۳)

۸۰۰	۷۲۰	۵
۷۱۰	۷۵۰	۵
۳	۴	

۱) $X_{12}^* = 4$ ۲) $X_{21}^* = 2$

۳) $X_{11}^* = 3$ ۴) $X_{22}^* = 4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از آنجایی که مقادیر عرضه بیشتر از تقاضاست یک متغیر مجازی با ضریب هزینه صفر به جدول اضافه می‌کنیم تا عرضه و تقاضا متوازن شود. یک پایه اولیه به روش وگل به صورت زیر می‌باشد:

[۸۰۰] –	[۷۲۰] ۴	[۰] ۱	۵
[۳] ۳	[۷۵۰] –	[۰] ۲	۵
۳	۴	۳	

$$C_{11} - Z_{11} = 800 - 0 + 0 - 710 = 90 > 0$$

$$C_{22} - Z_{22} = 750 - 720 - 0 + 0 = 30 > 0$$

جواب فوق بهینه می‌باشد، در نتیجه $x_{11}^* = 3$, $x_{12}^* = 4$.

مثال۳۶: جدول میانی حل مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید. با ورود متغیر غیراساسی X_{12}، میزان کل هزینه حمل و نقل چقدر خواهد شد؟

(راهنمایی: X_{12} و X_{31}، متغیر غیراساسی بوده و اعداد داخل مربع‌ها هزینه‌های حمل و نقل است.) (دکتری ۹۱)

i \ j	۱	۲	مقدار عرضه
۱	[۲۰] ۷۵	[۱۵] −۱۰	۷۵
۲	[۵] ۷۵	[۱۰] ۵۰	۱۲۵
۳	[۲۰] ۲۰	[۵] ۱۰۰	۱۰۰
مقدار تقاضا	۱۵۰	۱۵۰	۳۰۰

۱) ۲۸۷۵ ۲) ۲۳۷۵

۳) ۱۸۷۵ ۴) ۳۳۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مقدار تابع هدف فعلی مسأله را می‌یابیم:

$$z = 20(75) + 5(75) + 10(50) + 5(100) = 2875$$

از آنجا که جدول بهینه نیست (مرحله میانی) با توجه به دو متغیر غیرپایه‌ای موجود در مسأله $(X_{۳۱}, X_{۱۲})$ متوجه می‌شویم که $X_{۱۲}$ متغیر ورود به پایه خواهد بود، چرا که $z_{۱۲} - c_{۱۲} = ۱۰$ و می‌دانیم در مسأله حمل و نقل (min) مقادیر مثبت $Z_{ij} - C_{ij}$ وارد پایه می‌شوند. حال متغیر خروجی را می‌یابیم.

با استفاده از حلقه θ مربوط به متغیر $X_{۱۲}$ که در شکل رسم شده است و با انتساب θ به آن و کم و اضافه کـردن θ از سـایر متغیرهـای پایـه‌ای حلقـه مربوطه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_{۱۲} = \theta \\ x_{۱۱} = ۷۵ - \theta \\ x_{۲۱} = ۷۵ + \theta \\ x_{۲۲} = ۵۰ - \theta \end{cases}$$

با صفر کردن این متغیرها درمی‌یابیم که $x_{۲۲}$ خروجی است و $\theta = ۵۰$ می‌باشد، یعنی مقدار تست نسبت برابر ۵۰ بوده و متغیر ورودی $x_{۱۲}$ جدید برابر ۵۰ می‌شود. حال تابع هدف را دوباره می‌نویسیم و مقدار z یا مقدار تغییر که $-(Z_{ij} - C_{ij})\theta_{\text{جدید}}$ است را می‌یابیم، یعنی: $\Delta = -(۱۰ \times ۵۰) = -۵۰۰$

پس مقدار تابع هدف $۲۸۷۵ - ۵۰۰ = ۲۳۷۵$ (ضمناً جدول بعدی بهینه است.)

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۳۷: یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر داده شده است:

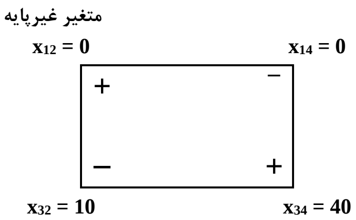
	1	2	3	4	
1	[0] 40	[1]	[4]	[2]	40
2	[3]	[1] 60	[5]	[4]	60
3	[2]	[2] 10	[3] 20	[1] 40	70
4	[5]	[4]	[3] 20	[1]	20
	40	70	40	40	190 / 190

جواب بهینه مسأله بالا را بیابید.

☑ **پاسخ:** تعداد خانه‌های پر ۶ تا است، در حالی که تعداد خانه‌های پایه‌ای در این مسأله برابر $m + n - ۱ = ۷$ است.

پس یکی از متغیرهای پایه‌ای مقدار صفر دارد که در جـدول مشـخص نشـده است لذا یک جواب پایه‌ای شدنی تباهیده داریم. برای تعیین خانـه پایـه‌ای بـا مقدار صفر، آن را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که امکـان تشـکیل حلقـه بـرای همه متغیرهای غیرپایه‌ای وجود داشته باشد و نیز خانه‌های پُر تشـکیل حلقـه ندهند. مثلاً قرار می‌دهیم: $x_{۱۴} = ۰$.

	1	2	3	4		
1	[0] (40)	[1] -2	[4] 0	[2] (0)	40	$u_1 = 0$
2	[3] 5	[1] (60)	[5] 3	[4] 4	60	$u_2 = -2$
3	[2] 3	[2] (10)	[3] (20)	[1] (40)	70	$u_3 = -1$
4	[5] 6	[4] 2	[3] (20)	[1] 0	20	$u_4 = -1$
	40	70	40	40		
	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 2$		



در جدول بالا اعدادی که دور آنها دایره کشیده است، مقادیر متغیرهای پایه‌ای هسـتند و اعـداد بـدون دایـره مقـادیر $C_{ij} - Z_{ij}$ مربـوط بـه متغیـر غیرپایـه‌ای خانـه مـوردنظر اسـت. متغیـر $x_{۱۲}$ ورودی است و متغیر $x_{۱۴}$ خروجی است و باید مقدار $\theta = ۰$ را در حلقه گردش دهیم.

در حقیقت، $x_{۱۲}$ با مقدار صفر وارد پایه می‌شود و $x_{۱۴}$ از پایه خارج می‌شود و جواب پایه‌ای شدنی بعدی به صورت مقابل است که تباهیده می‌باشد:

جواب پایه‌ای شدنی اخیر، بهینه و تباهیده می‌باشد. این مسأله جواب بهینه چندگانه دارد زیرا $C_{۴۴} - Z_{۴۴} = ۰$ می‌باشد.

	1	2	3	4		
1	0 / 40	1 / 0	4 / 2	2 / 2	40	$u_1 = 0$
2	3 / 3	1 / 60	5 / 3	4 / 4	60	$u_2 = 0$
3	2 / 1	2 / 10	3 / 20	1 / 40	70	$u_3 = 1$
4	5 / 4	4 / 2	3 / 20	1 / 0	20	$u_4 = 1$
	40	70	40	40		
	$v_1 = 0$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 0$		

مثال۳۸: در حل یک مسأله حمل و نقل در هنگام تشکیل حلقه برای تعیین متغیر خارج شونده از پایه، این حلقه از چه تعداد خانه موجود در هر سطر یا ستون جدول حمل و نقل استفاده می‌کند؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری۹۱)

۱) دو
۲) صفر یا دو
۳) تعداد خانه‌ها بستگی به تعداد منابع دارد.
۴) تعداد خانه‌ها بستگی به تعداد مقصدها دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در حل یک مسأله‌ی حمل و نقل در هنگام تشکیل حلقه برای تعیین متغیر خارج شونده از پایه، این حلقه از صفر یا دو خانه‌ی موجود در هر سطر یا ستون استفاده می‌کند.

نکته۱۸: جواب اساسی شدنی اولیه در قیود مسأله حمل و نقل صدق می‌کند، یعنی اگر $x^\circ(x^\circ_{۱۱}, x^\circ_{۱۲}, \cdots x^\circ_{mn})$ جواب اساسی شدنی اولیه باشد:

$$\sum_{j=۱}^{n} x^\circ_{ij} = s_i \;,\; i = ۱,\cdots,m. \quad ; \quad \sum_{i=۱}^{m} x^\circ_{ij} = d_j \;,\; j = ۱,\cdots,n.$$

چون x°_{ij}ها $(j = ۱,\cdots,n \;\; ; \;\; i = ۱,\cdots m)$ همگی عدد صحیح هستند پس s_iها و d_jها یعنی مقادیر عرضه و تقاضا نیز همگی عدد صحیح خواهند بود و طبق نکته ۴ جواب بهینه نیز عدد صحیح خواهد بود.

نکته۱۹: مسأله حمل و نقل با استفاده از روش سیمپلکس و با استفاده از روش دوفازی یا M بزرگ قابل حل است، اما به دلیل تباهیدگی و زیادبودن محاسبات کم‌تر استفاده می‌شود.

مثال۳۹: مسأله مقابل را در نظر بگیرید، متغیرهای دوگان مرتبط با دسته اول محدودیت‌ها را V_j و متغیرهای دوگان مرتبط با دسته دوم محدودیت‌ها را U_i می‌نامیم. چنانچه x_{ij} در جواب نهایی یک متغیر غیرپایه باشد، آنگاه متغیر دوگان کمبود مرتبط با آن I_{ij} برابر است با:

$$\textbf{Min} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

S.t.

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad \text{برای تمام } j$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \text{برای تمام } i \quad ; \quad x_{ij} \geq ۰ \quad \text{برای تمام } j, i$$

۱) $I_{ij} = c_{ij} + U_i - V_j$
۲) $I_{ij} = U_i + V_j$
۳) $I_{ij} = c_{ij} + U_i + V_j$
۴) $I_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» محدودیت مسأله دوگان متناظر با متغیر x_{ij} به صورت $u_i + v_j \leq c_{ij}$ است. اگر I_{ij} متغیر کمبود این محدودیت باشد، $u_i + v_j + I_{ij} = c_{ij}$ پس: $I_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.