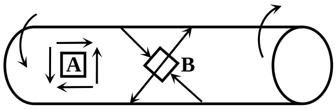
پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل دوم

پاسخنامه آزمون (۱)



۱ـ گزینه «۲» تنش در میله تحت پیچش به صورت شکل نشان داده شده می‌باشد. چون چدن ماده ترد می‌باشد لذا در برابر تنش کششی ضعیف‌تر از برش و فشار می‌باشد، در نتیجه در راستای صفحه‌ای گسیخته خواهد شد که عمود بر تنش کششی می‌باشد.

اگر المان A به اندازه 45° پاد ساعتگرد دوران کند به المان B خواهیم رسید، این المان در دو وجه تحت تنش کششی و در دو وجه دیگر تحت تنش فشاری است. سطح شکست عمود بر تنش کششی خواهد بود.

۲ـ گزینه «۱»

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{\frac{T_1L}{GJ_1}}{\frac{T_2L}{GJ_2}}=\frac{J_2}{J_1}=\frac{\frac{\pi}{32}(d^4-(\frac{d}{2})^4)}{\frac{\pi}{32}d^4}=\frac{15}{16}$$

۳ـ گزینه «۱» مواد ترد تحت تنش کششی ماکزیمم و مواد نرم تحت تنش برشی ماکزیمم گسیخته می‌شوند. از طرفی اگر میله تحت گشتاور پیچشی قرار گیرد در مقطع عمود بر محور میله، تنش برشی ماکزیمم بوده و در زاویه 45° با محور میله تنش کششی ماکزیمم است. بنابراین ماده ترد تحت پیچش در صفحه 45° و ماده نرم در زاویه 90° گسیخته می‌شود.

۴ـ گزینه «۱» در پیچش خالص تنش برشی ماکزیمم و تنش کششی ماکزیمم برابرند، از طرفی:

$$\tau=\frac{TR}{J}=\frac{TR}{\frac{\pi}{2}R^4}=\frac{2T}{\pi R^3}=\frac{2T}{\pi R^2\times R}=\frac{2T}{AR}=\frac{4T}{Ad}=\sigma_{max}$$

۵ـ گزینه «۱» حداکثر تنش برشی در سطح بیرونی محور ایجاد شده و برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{TR}{J}=\frac{2T}{\pi d^3}=\frac{2\times 62/8\times 10^3}{\pi\times 40^3}=\frac{10000}{1600}=\frac{100}{16}=6/25$$

۶ـ گزینه «۲» طبق فرض مسئله تنش برشی ماکزیمم در دو محور برابر است، بنابراین:

$$\tau_{max_2}=\tau_{max_1},\ \tau_{max}=\frac{TC}{j}\Rightarrow\frac{T\frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32}(D^4-(0/75D)^4)}=\frac{T\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32}d^4}\Rightarrow\frac{\frac{D}{2}}{D^4-(0/75)^4D^4}=\frac{\frac{d}{2}}{d^4}$$

$$\Rightarrow 1/367\ D^3=2d^3\Rightarrow d=0/881\ D\qquad (1)$$

از طرفی وزن هر میله با حجم میله متناسب بوده اما چون طول دو میله برابر است، بنابراین نسبت وزن دو میله مساوی نسبت مساحت سطح مقطع‌هایشان می‌باشد.

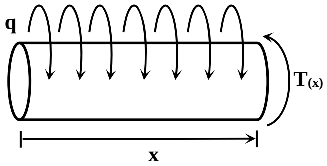
$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{A_2}{A_1}\Rightarrow\frac{W_2}{W_1}=\frac{D^2-0/75^2D^2}{d^2}\xrightarrow{(1)}\frac{0/4375D^2}{0/881^2D^2}=0/5636$$

۷ـ گزینه «۳» تنش برشی در مقطع جدار نازک برابر است با:

$$\tau=\frac{T}{2A_mt}\Rightarrow\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{A_{m_2}t_2}{A_{m_1}t_1}\qquad (1)$$

$$t_1=t\quad,\quad t_2=\frac{t}{2}\quad,\quad A_{m_1}=\pi R^2\quad,\quad A_{m_2}=4\pi R^2\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{\tau_1}{\tau_2}=2$$

۸ـ گزینه «۴» چون بار گسترده پیچشی بر کل محور وارد می‌شود، بنابراین در هر مقطع دلخواه از محور به فاصله x از انتهای محور، لنگر پیچشی داخلی تابعی از x شده و به همین دلیل برای محاسبه زاویه پیچش انتهای محور باید از انتگرال‌گیری استفاده نمود.



$$\sum M = 0 \Rightarrow T = qx$$

$$\phi = \int \frac{Tdx}{GJ} = \int_0^L \frac{qxdx}{GJ} = \frac{qL^2}{2GJ}$$

۹ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{aligned} P &= T\omega = \frac{2\pi n}{60}\times T \\ \tau &= \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \frac{\pi d^3}{16}\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \frac{2\pi n}{60}\times\frac{\pi d^3}{16}\tau \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60 P}{2n\pi^2\tau}}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60\times 31400}{2\times 300\pi^2\times 48\times 10^6}} = 0/0473\ \text{m} \simeq 48\ \text{mm}$$

۱۰ـ گزینه «۲» در حالتی که کل مقطع وارد فاز پلاستیک می‌شود گشتاور پلاستیک را می‌توان توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$T_P = \int rdF = \int r\tau_y dA = \int r\tau_y 2\pi rdr = 2\pi\tau_y \int_{37/5}^{50} r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\tau_y [r^3]_{37/5}^{50}$$

در حالت کاملاً پلاستیک، تنش در تمامی سطح مقطع یکسان و برابر τ_y می‌باشد.

$$\Rightarrow T_P = \frac{2\pi}{3}\times 150(50^3 - 37/5^3) = 22/7\times 10^6\ \text{N.mm} = 22/7\,\text{kN.m}$$

۱۱ـ گزینه «۴» طبق رابطه $\phi = \frac{TL}{GJ}$ و با توجه به اینکه برای هر دو مقطع لنگر پیچشی و طول و J و G یکسان است، زاویه پیچش زمانی که هر دو انتهای یک محور می‌چرخند با حالتی که یک انتهای محور می‌چرخد و انتهای دیگر ثابت است مساوی می‌باشد. همچنین تنش برشی ماکزیمم طبق رابطه $\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3}$ و با توجه به اینکه در هر دو محور لنگر پیچشی و قطر محورها یکی می‌باشد، با هم برابر است.

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{2\times 1/5}{30\times 10^6\times 10^{-6}} = \frac{3}{30} = 0/1\ \text{rad} = 0/1\times\frac{180}{\pi} = 6^\circ$$

احتمالاً در صورت مسئله به جای $G = 30\ \text{GPa}$ به اشتباه $30\,\text{MPa}$ نوشته شده است. در این صورت گزینه ۳ صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۲» محورهای AB و BC مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند، بنابراین زاویه پیچش مقطع مشترک آن‌ها برابر خواهد بود با:

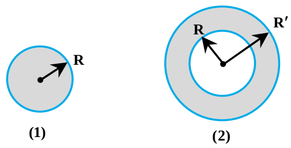
$$\phi = \frac{T}{k_{eq}} = \frac{T}{k_{AC}+k_{BC}} = \frac{T}{\frac{2GJ}{L}+\frac{GJ}{L}} = \frac{TL}{3GJ}$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$P = T\omega = T(2\pi f)$$

اگر فرکانس و گشتاور پیچشی دو برابر شود، توان چهار برابر خواهد شد.

۱۵ـ گزینه «۲» آن مقطعی که تو خالی است برای آنکه مساحتش با مقطع توپر برابر شود باید شعاع خارجی بزرگ‌تری داشته باشد، از طرفی ممان اینرسی قطبی با شعاع به توان ۴ مقطع، متناسب است، بنابراین نتیجه می‌شود که مقطع توخالی با فرض یکسان بودن مساحت، گشتاور بزرگ‌تری انتقال می‌دهد.
روش دیگر این است که فرض نماییم شعاع مقطع توپر برابر با R و شعاع داخلی مقطع توخالی نیز برابر R باشد. برای برابر شدن مساحت‌ها مقدار شعاع خارجی مقطع توخالی برابر می‌گردد با:



$$A_۱ = A_۲ \Rightarrow \pi R^۲ = \pi(R'^۲ - R^۲) \Rightarrow ۲R^۲ = R'^۲ \Rightarrow R' = \sqrt{۲}R$$

میزان انتقال گشتاور توسط هر محور، مطابق رابطه روبرو تعیین می‌شود:

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \tau\frac{J}{R}$$

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{\tau\frac{J_۲}{R_۲}}{\tau\frac{J_۱}{R_۱}} = \frac{J_۲}{J_۱} \times \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{\frac{\pi}{۲}[(\sqrt{۲}R)^۴ - R^۴]}{\frac{\pi}{۲}R^۴} \times \frac{R}{\sqrt{۲}R} = \frac{(۴-۱)}{۱} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} = ۲/۱۲$$

۱۶ـ گزینه «۱»

$$P = T\omega = ۲\pi f T \Rightarrow ۱۰۰\pi \times ۱۰^۳ = ۲\pi \times ۱۰ \times T \Rightarrow T = ۵۰۰۰\ N.m$$

۱۷ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l} \phi = ۷۲۰^\circ = ۴\pi = \frac{TL}{GJ} \\ \tau_{max} = \frac{TR}{J} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\phi} = \frac{\tau_{max}}{۴\pi} = \frac{\frac{TR}{J}}{\frac{TL}{GJ}} = \frac{RG}{L} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۴\pi RG}{L} \xrightarrow{R=C} \tau_{max} = \frac{۴\pi CG}{L}$$

۱۸ـ گزینه «۱» چون قطر خارجی هر دو محور برابر است بنابراین $d_۱ = d_۲$ و $R_۱ = R_۲$ می‌باشد.

$$\frac{\tau_{max_۱}\ \text{تو پر}}{\tau_{max_۲}\ \text{توخالی}} = \frac{\frac{TR}{J_۱}}{\frac{TR}{J_۲}} = \frac{J_۲}{J_۱} = \frac{J\ \text{توخالی}}{J\ \text{تو پر}} = \frac{\frac{\pi}{۳۲}(d^۴ - (\frac{d}{۲})^۴)}{\frac{\pi}{۳۲}d^۴} = \frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{۱} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۹ـ گزینه «۱» طبق توضیحات ارائه شده در متن درس در گوشه‌های مستطیل تنش برشی صفر و در وسط ضلع بزرگ‌تر تنش برشی ماکزیمم است.

۲۰ـ گزینه «۲» ابتدا روابط تنش برشی ماکزیمم و زاویه پیچش در محورهای مدور نوشته شده سپس مقادیر آن‌ها بر هم تقسیم می‌شود، در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{max} = \frac{TR}{J} \\ \phi = \frac{TL}{GJ} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\phi} = \frac{\frac{TR}{J}}{\frac{TL}{GJ}} = \frac{RG}{L} \Rightarrow \frac{۱۴۰MPa}{۰/۰۱rad} = \frac{R \times ۷۰۰۰۰MPa}{۲۰۰۰mm} \Rightarrow R = ۴۰۰mm \Rightarrow d = ۸۰۰mm$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» طبق فرض مسئله ممان اینرسی قطبی دو محور برابر است با:

$$\text{ممان اینرسی محور توپر} = J \quad , \quad \text{ممان اینرسی محور توخالی} = \frac{J}{۲}$$

$$\phi = \frac{TL_s}{GJ} + \frac{TL_n}{G\frac{J}{۲}} = \frac{T}{GJ}(L_s + \frac{۲}{۱}L_n) = ۳^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶۰} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۶۰} \times GJ\frac{۱}{L_s + ۲L_n}$$

۲ـ گزینه «۲» با توجه به روابط $\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{۲T}{\pi d^۳}$ و $\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{۶۴TL}{\pi Gd^۴}$ می‌توان نتیجه گرفت گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در مقطع قوطی در ضخامت نازک‌تر جداره ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = \frac{T}{۲A_m t_{min}}$$

اما مساحت داخل خطچین مرکزی برابر است با:

$$A_m = (۹۸ - ۴ - ۴)(۱۵۶ - ۳ - ۳) = ۹۰ \times ۱۵۰ = ۱۳۵۰۰ mm^۲$$

$$\tau_{max} = \frac{۱۳۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۳۵۰۰ \times ۶} = \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{۶} MPa$$

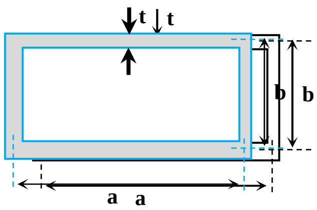
۴ـ گزینه «۲» لنگر پیچشی متمرکز معادل لنگر پیچشی گسترده، مساوی ۲۰ KN.m می‌باشد که به دلیل تقارن محور، عکس‌العملهای تکیه‌گاهی مساوی بوده و برابر نیمی از لنگر پیچشی خارجی می‌باشد، لذا عکس‌العمل تکیه‌گاهها برابر ۱۰ KN.m می‌باشد.

۵ـ گزینه «۴» در صورتی که طول دو میله AC و BC یکسان در نظر گرفته شود، می‌توان پاسخ مسئله را تعیین نمود. اقتصادی‌ترین طرح آن است که تنش ماکزیمم در دو میله یکسان باشد، در نتیجه:

$$\tau_{AC} = \tau_{BC} \Rightarrow \frac{T\frac{d_{AC}}{۲}}{J_a} = \frac{۳T\frac{d_{BC}}{۲}}{J_b} \Rightarrow \frac{d_a}{d_b} = ۳\frac{J_a}{J_b}$$

ذکر این نکته ضروری است که در سازه‌هایی که طراحی آن بهینه می‌باشد، تنش تا حد امکان در آن یکنواخت می‌باشد.

۶ـ گزینه «۲» ممان اینرسی قطبی یک مقطع جدار نازک بسته توسط رابطه زیر قابل بیان است.



$$A_m = ab$$

$$J = \frac{۴A_m^۲}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{۴(ab)^۲}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{۴a^۲b^۲t}{۲(a+b)} = \frac{۲a^۲b^۲t}{a+b}$$

۷ـ گزینه «۴» راستای تنش برشی فقط در روی دو قطر بیضی بر شعاع حامل آن نقطه عمود است و در دیگر نقاط عمود نمی‌باشد. (به توضیحات متن درس توجه شود.)

۸ـ گزینه «۲»

$$\text{مقاومت}\quad K' = \frac{T}{\tau} = \frac{J}{r} = \frac{\pi}{۲}r^۳ \Rightarrow (r \to \alpha r) \Rightarrow K'_۲ = \alpha^۳ K'_۱$$

$$\text{سختی}\quad K = \frac{T}{\phi} = \frac{GJ}{L} = \frac{G\pi r^۴}{۲L} \Rightarrow (r \to \alpha r, L \to \alpha L) \Rightarrow K_۲ = \alpha^۳ K_۱$$

۹ـ گزینه «۱» منظور از مقدار پیچش در صورت مسئله همان لنگر پیچشی می‌باشد.

$$P = T \times ۲\pi f \Rightarrow T = \frac{P}{۲\pi f} = \frac{۱۰۰\pi kw}{۲\pi \times ۱۰Hz} = ۵KN.m = ۵۰۰۰ N.m$$

۱۰ـ گزینه «۴» باید در صورت مسئله گفته می‌شد که مقطع جدار نازک است، با این فرض تنش برشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau=\frac{T}{۲At}\Rightarrow q=\tau t=\frac{T}{۲At}\times t\Rightarrow q=\frac{T}{۲A}$$

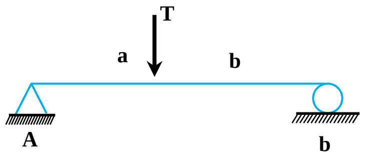
۱۱ـ گزینه «۳» ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک بسته توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$J=\frac{۴A_m^۲ t}{\oint\frac{ds}{t}}\xrightarrow{\text{چون ضخامت قوطی ثابت است t از داخل انتگرال بیرون می‌آید.}}J=\frac{۴A_m^۲ t}{\oint ds}=\frac{۴\times(a^۲)^۲ t}{\text{(محیط مقطع)}S}=\frac{۴a^۴ t}{۴a}=a^۳ t$$

۱۲ـ گزینه «۴»

روش اول: چون حاصل‌ضرب GJ در طول محور ثابت است، بنابراین می‌توان گشتاور تکیه‌گاه A را از رابطه روبرو تعیین نمود:

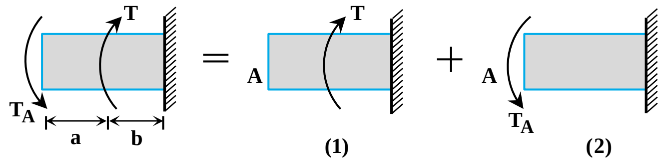
$$T_A=\frac{Tb}{L}$$



برای حل این تست می‌توان محور را با فرض GJ ثابت به یک تیر ساده تحت بارگذاری عرضی شبیه‌سازی کرد. در این حالت لنگر T تبدیل به یک بار برشی می‌شود. (مطابق شکل) در این حالت اگر حول تکیه‌گاه B گشتاورگیری شود، نیروی تکیه‌گاه A به دست آمده که همان پاسخ مسئله است.

$$\sum M_B=\circ\Rightarrow -A_y\times L+T\times b=\circ\Rightarrow A_y=T_A=\frac{Tb}{L}$$

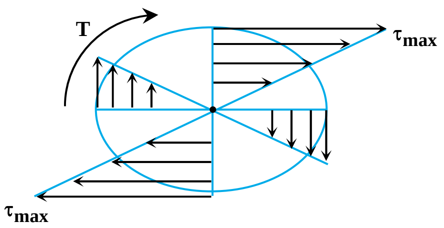
روش دوم: اساس روش حل، استفاده از اصل جمع آثار است. بدین صورت که تکیه‌گاه A را برداشته و به جای آن لنگر پیچشی T_A را قرار می‌دهیم. سپس با توجه به اصل سازگاری که زاویه‌ی پیچش A باید صفر باشد، مقدار T_A به دست می‌آید.



$$\phi_A=\phi_{(۱)}+\phi_{(۲)}=\circ$$

$$\Rightarrow\frac{Tb}{GJ}+\frac{-T_A L}{GJ}=\circ\Rightarrow T_A=\frac{Tb}{L}$$

۱۳ـ گزینه «۴» در دو سر قطر کوچک بیضی تنش برشی ماکزیمم می‌شود. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، توزیع تنش برشی نیز در روی اقطار بیضی خطی و عمود بر شعاع می‌باشد. اما در دیگر نقاط تنش برشی عمود بر شعاع نیست.



۱۴ـ گزینه «۴» دو چرخدنده، درگیر با هم مانند دو دایره مماس بر هم بوده که بر روی یکدیگر حرکت غلتشی خالص دارند. بنابراین طول کمان‌های طی شده توسط دو چرخدنده مساوی است. (به توضیحات تذکر ۳ مراجعه شود.) $r_C\phi_C=r_B\phi_B$

۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به آن‌که حداکثر تنش برشی مجاز در محور معین می‌باشد، بنابراین می‌توان حداکثر گشتاور پیچشی در محور AB را به دست آورد:

$$\tau_{max}=\tau_{all}=\frac{TR}{J_{AB}}\Rightarrow\tau_{all}=\frac{۲T_\circ}{\pi d_{AB}^۳}\Rightarrow T_\circ=\frac{\pi d_{AB}^۳}{۲}\tau_{all}\Rightarrow T_\circ=\frac{\pi\times ۱۸^۳}{۲}\times ۵۵=۵\circ ۳۸۴۵\text{N.mm}\simeq ۵\circ ۴\text{N.m}$$

اما رابطه‌ی بین لنگر پیچشی محور AB و محور CD برابر است با:

$$\frac{T_\circ}{r_B}=\frac{T_{CD}}{r_C}\Rightarrow T_{CD}=\frac{۳۶}{۲\circ}T_\circ=۱/۸T_\circ\qquad(۱)$$

اما رابطه‌ی T_{CD} با تنش برشی مجاز مساوی خواهد بود با:

$$T_{CD}=\frac{\pi d_{CD}^۳}{۲}\tau_{all}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}۱/۸T_\circ=\frac{\pi\times ۲۴^۳}{۲}\times ۵۵\Rightarrow T_\circ=۶۶۳۵\circ ۴\text{N.m}\simeq ۶۶۳\text{N.m}$$

از بین دو پاسخ به دست آمده پاسخ کوچک‌تر قابل قبول می‌باشد. گزینه (۴) قابل قبول است.

۱۶ـ گزینه «۴» زاویه‌ی پیچش مقطع A برابر مجموع زاویه پیچش محور AB و گردش چرخنده‌ی B است.

$$\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_B = \frac{T_\circ L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{r_C \phi_C}{r_B} = \frac{T_\circ L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{r_C}{r_B}\frac{T_{CD} L_{CD}}{GJ_{CD}}$$

$$\phi_A = \frac{۵۰۴ \times ۰/۸}{۸۰ \times ۱۰^{۹} \times \frac{\pi}{۳۲}(۰/۰۱۸)^{۴}} + \frac{۳۶}{۲۰} \times \frac{(۱/۸ \times ۵۰۴) \times ۰/۹}{۸۰ \times ۱۰^{۹} \times \frac{\pi}{۳۲}(۰/۰۲۴)^{۴}} \Rightarrow \phi_A \simeq ۱\text{rad}$$

۱۷ـ گزینه «۳» در صورتی که ماده از جنس نرم باشد در صفحه تنش برشی ماکزیمم گسیخته می‌شود که در بارگذاری پیچشی صفحه عمود بر محور تیر همان صفحه تنش برشی ماکزیمم است. اما مواد نرم تحت لنگر پیچشی دچار ترک‌خوردگی نمی‌شوند. در صورتی که تیر از جنس ترد باشد، ترک‌ها به صورت مورب و تحت زاویه ۴۵° می‌باشند.

۱۸ـ گزینه «۳» نسبت مقاومت پیچشی به سختی پیچشی محور طبق تعریف ارائه شده در متن درس برابر است با:

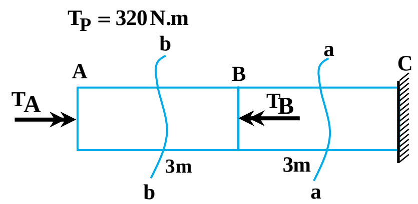
$$\frac{k'}{k} = \frac{\frac{J}{R}}{\frac{GJ}{L}} = \frac{L}{RG}$$

اگر طول محور و شعاع محور دو برابر شوند نسبت آن‌ها تغییر نخواهد کرد.

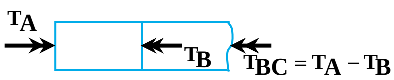
۱۹ـ گزینه «۱» گشتاور پلاستیک کامل $\frac{۴}{۳}$ برابر گشتاور آغاز تسلیم است، بنابراین داریم:

$$T_P = \frac{۴}{۳}T_y = \frac{۴}{۳} \times \frac{\pi}{۲}R^{۳}\tau_y = \frac{۴}{۳} \times \frac{۳}{۱۶} \times ۴۰^{۳} \times ۲۰۰ = ۳۲ \times ۱۰^{۵}\ \text{N.mm}$$

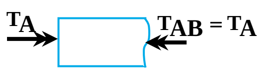
۲۰ـ گزینه «۳» دوران یا پیچش مقطع B برابر است با زاویه پیچش مقطع B نسبت به مقطع C.



طبق فرض مسئله دوران مقطع B، برابر صفر است. بنابراین:



$$\Rightarrow \varphi_B = \varphi_{B/C} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ} = \frac{(T_A - T_B)L_{BC}}{GJ} = ۰$$



$$T_{BC} = T_A - T_B = ۰ \Rightarrow T_A = T_B = ۸\pi\ \text{kN.m}$$

اکنون با روش جمع آثار می‌توان زاویه پیچش مقطع A را محاسبه نمود:

$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ} + ۰ = \frac{T_A(۳)}{GJ} = \frac{(۸\pi \times ۱۰^{۳})(۳)}{(۸ \times ۱۰^{۱۰})\pi(\frac{۶۰ \times ۱۰^{-۳}}{۳۲})^{۴}} \Rightarrow \varphi_A = ۰/۷۴۱\ \text{rad}$$

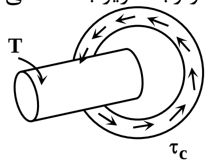
پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۴» چون میله BC صلب بوده لذا پیچش دو سر آنها یکی می‌باشد، از طرفی چون لنگرهای اعمالی بر B و C خلاف جهت یکدیگرند، لذا زاویه پیچش میله صلب BC صفر بوده، بنابراین دو سرمیله صلب دورانی نداشته و زاویه پیچش مساوی صفر می‌باشد. در نتیجه لنگرهای ایجاد شده در قسمتهای AB و BC مساوی صفر است.

۲ـ گزینه «۴» اگر تنش برشی ناشی از اصطکاک مابین میله‌های AB , CD با τ_c نشان داده شود، در نتیجه لنگر پیچشی T از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Sigma M_O = ۰ \Rightarrow F \times r_۲ = T \Rightarrow (\tau_c) A \times r_۲ = T$$

$$\Rightarrow \tau_c = \frac{T}{Ar_۲} = \frac{T}{(۲\pi r_۲ t) r_۲} = \frac{T}{۲\pi r_۲^۲ t}$$



۳ـ گزینه «۳» چون زاویه پیچش پره‌ها و مقطع جدار نازک دایره‌ای مساوی است، بنابراین می‌توان آنها را مانند فنرهای موازی در نظر گرفت. در چنین حالتی سختی معادل مساوی جمع سختی‌های پره‌ها و مقطع جدار نازک دایره‌ای است. $K_{eq} = K_۱ + K_۲$

$$J_۱ = ۲\pi R^۳ t \quad , \quad J_۲ = ۸ \times \frac{۱}{۳} at^۳ = \frac{۸}{۳} \times ۲\pi R t^۳ = \frac{۱۶\pi R t^۳}{۳}$$

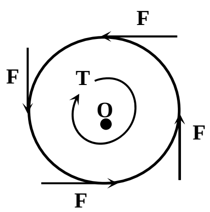
$$K_۱ = ۲\pi R^۳ t \frac{G}{L} \qquad K_۲ = \frac{۱۶\pi R t^۳}{۳} \frac{G}{L}$$

و اما زاویه پیچش برای کل مقطع برابر است.

$$\phi = \frac{T_۱}{K_۱} = \frac{T_۲}{K_۲} = \frac{T}{K_{eq}} \Rightarrow T_۱ = \frac{K_۱}{K_{eq}} T$$

$$\Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi R^۳ t \frac{G}{L} \times T}{۲\pi R^۳ t \frac{G}{L} + \frac{۱۶\pi R t^۳}{۳} \frac{G}{L}} = \frac{۱ \times T}{۱ + \frac{۸}{۳}(\frac{t}{R})^۲} = \frac{۱ \times T}{۱ + \frac{۸}{۳} \times (\frac{۱}{۱۰})^۲} \Rightarrow T_۱ = ۰/۹۷۴T \Rightarrow \frac{T_۱}{T} \times ۱۰۰ = ۹۷/۴\%$$

۴ـ گزینه «۴»



$$\Sigma M_O = ۰ \Rightarrow T - ۴FR = ۰ \Rightarrow T = ۴FR \Rightarrow T = ۴K\Delta \times R$$

ولی تغییر طول هر فنر را برحسب زاویه پیچش می‌توان به صورت روبرو نوشت: $\Delta = R\phi$، در نتیجه:

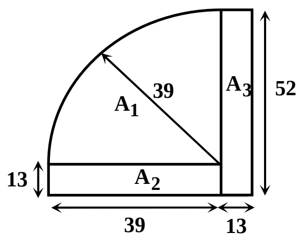
$$T = ۴KR^۲\phi \Rightarrow \phi = \frac{T}{۴KR^۲} = \frac{T}{K_\theta}$$

مخرج کسر معادل سختی پیچشی صفحه صلب می‌باشد، در نتیجه:

$$K_\theta = ۴KR^۲ \Rightarrow K_\theta = ۴ \times ۱۰ \times ۰/۱^۲ = ۰/۴\, ton.\frac{m}{rad}$$

۵ـ گزینه «۴» مقدار تنش برشی در هر نقطه متناسب با بیشترین شیب در آن نقطه می‌باشد و کمترین شیب در آن نقطه نیز جهت تنش برشی را نمایش می‌دهد.

۶ـ گزینه «۲» در ابتدا خط چین مرکزی به دقت رسم شده، سپس آن را به سه سطح $A_۱, A_۲, A_۳$ تقسیم نموده و مساحت هر یک را جداگانه محاسبه می‌کنیم.



$$\tau_a = \frac{T}{۲A_m t_a} \quad , \quad t_a = ۴mm \quad , \quad T = ۹۰ \times ۱۰^۳ \ N.mm$$

$$A_m = A_۱ + A_۲ + A_۳ \Rightarrow A_m = \frac{\pi}{۴} \times (۴۰-۱)^۲ + (۴۰-۱) \times$$

$$(۵۵-۴۰-۲) + (۵۵-۱-۲) \times (۵۵-۲-۴۰)$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{\pi}{۴} \times ۳۹^۲ + ۱۳ \times ۳۹ + ۵۲ \times ۱۳ = ۲۳۷۷/۶ \Rightarrow \tau_a = \frac{۹۰ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۴ \times ۲۳۷۷/۶} = ۴/۷۳۱ \ MPa$$

۷ـ گزینه «۳» در صورت تست به مقدار G اشاره‌ای نشده است در صورتی که محورها از جنس فولاد و مدول برشی آن‌ها برابر $G = ۱۱/۵ \times ۱۰^۶\ \text{Psi}$ در نظر گرفته شود، می‌توان مسئله را حل نمود.

چون دو نیمه کوپلینگ می‌توانند نسبت به هم دارای زاویه پیچش باشند، بنابراین رابطه سازگاری به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta\phi = \frac{۱^\circ}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳۶۰}\text{rad} \Rightarrow \phi_{C/D} = \phi_{B/A} + \frac{\pi}{۳۶۰} \Rightarrow \frac{T_D \times ۶۰}{۱۱/۵ \times ۱۰^۶ \times \frac{\pi}{۳۲} \times ۱/۵^۴} = \frac{T_A \times ۴۰}{۱۱/۵ \times ۱۰^۶ \times \frac{\pi}{۳۲} \times ۱/۲^۴} + \frac{\pi}{۳۶۰} \qquad (۱)$$

از طرفی طبق معادله تعادل می‌توان نوشت:

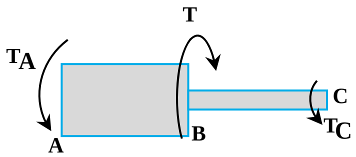
$$T_A + T_D = ۴۰۰۰\,\text{lb.in} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned}(۱)\\(۲)\end{aligned}\left\{\begin{aligned} &۱/۰۴۹۷ \times ۱۰^{-۵}\ T_D - ۱/۷۰۸۶ \times ۱۰^{-۵}\ T_A = \frac{\pi}{۳۶۰} \\ &T_A = ۴۰۰۰ - T_D \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_D = ۲۷۹۴/۱\ \text{lb.in}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_D R}{J_{CD}} = \frac{۲T_D}{\pi R^۳} = \frac{۲ \times ۲۷۹۴/۱}{\pi \times ۰/۷۵^۳} = ۴۲۱۶\ \text{Psi} \simeq ۴/۲\,\text{ksi}$$

۸ـ گزینه «۴»

روش اول: چون مقطع B فصل مشترک دو محور AB و BC است بنابراین زاویه پیچش دو محور در این مقطع مساوی است. از این نکته می‌توان برای نوشتن رابطه سازگاری استفاده نمود.



$$\text{معادله تعادل}: T_A + T_C = T \qquad (۱)$$

$$\text{رابطه سازگاری}: \phi_{B/A} = \phi_{B/C} \Rightarrow \frac{T_A a}{GJ_{AB}} = \frac{T_C b}{GJ_{BC}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} \qquad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow T_C \frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} + T_C = T \Rightarrow T_C = \frac{T}{\frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} + ۱} = \frac{Ta J_{BC}}{bJ_{AB} + aJ_{BC}} = \frac{\frac{Ta}{J_{AB}}}{\frac{a}{J_{AB}} + \frac{b}{J_{BC}}}$$

روش دوم: معادل‌سازی میله‌ها با فنر: چون زاویه پیچش دو میله در مقطع B مساوی است، بنابراین دو میله مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند، در این حالت لنگر تکیه‌گاهی C مساوی لنگر داخلی تحمل شده به وسیله محور BC است، بنابراین:

$$T_C = T_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{eq.}} \times T = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} \times T = \frac{\frac{GJ_{BC}}{b}}{\frac{GJ_{AB}}{a} + \frac{GJ_{BC}}{b}} \times T \xrightarrow[\text{صورت و مخرج ضرب در } \frac{ab}{J_{AB}J_{BC}}]{\text{پس از ساده‌سازی}} \frac{\frac{Ta}{J_{AB}}}{\frac{a}{J_{AB}} + \frac{b}{J_{BC}}}$$

۹ـ گزینه «۱» بیشترین گشتاور اعمالی بر محور توخالی باعث خواهد شد تا در شعاع داخلی محور، تنش برشی به حد تسلیم برسد. در نتیجه شعاع هسته الاستیک مساوی شعاع داخلی محور خواهد شد. در این حالت کل جداره مقطع پلاستیک شده و از شعاع داخلی به مرکز محور حالت الاستیک وجود دارد که البته در این بخش میله توخالی است.

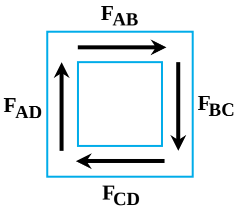
$$r_y\phi = \gamma_y L \Rightarrow \phi = \frac{۰/۰۰۲ \times ۲}{۰/۰۲} = ۰/۲\,\text{rad}$$

۱۰ـ گزینه «۳» طبق رابطه زیر گشتاور انتقالی در قطر خارجی ثابت و با ممان اینرسی قطبی نسبت مستقیم دارد، بنابراین:

$$\tau = \frac{TR}{J} \quad \Rightarrow \quad T = \tau\frac{J}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{J_۲}{J_۱} = \frac{\frac{\pi}{۳۲}(d_۲^۴ - d_۱^۴)}{\frac{\pi}{۳۲}d^۴} = \frac{۷۰^۴ - ۵۸^۴}{۷۰^۴} = ۰/۵۳ \times ۱۰۰ = ۵۳\%$$

$$\text{کاهش ظرفیت انتقال گشتاور} = ۱۰۰\ \% - ۵۳\ \% = ۴۷\ \%$$

۱۱ـ گزینه «۴» برای محاسبه سهم پیچش، کافی است نیرو در وجه‌های افقی و قائم محاسبه شود و سپس گشتاور حاصل از این نیروها به دست آیند:



$$\left.\begin{array}{l} F_{AD}=F_{CD}=\tau A=\dfrac{T}{۲A_m t_۲}\times bt_۲=\dfrac{T}{۲abt_۲}\times bt_۲=\dfrac{T}{۲} \\ F_{AB}=F_{CD}=\tau A=\dfrac{T}{۲A_m t_۱}\times at_۱=\dfrac{T}{۲abt_۱}at_۱=\dfrac{T}{۲b} \\ \text{گشتاور ناشی از نیروهای افقی}=\dfrac{T}{۲b}\times b=\dfrac{T}{۲} \quad (۱) \\ \text{گشتاور ناشی از نیروهای قائم}=\dfrac{T}{۲a}\times a=\dfrac{T}{۲} \quad (۲) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow\frac{\frac{T}{۲}}{\frac{T}{۲}}=۱$$

۱۲ـ گزینه «۱» در صورتی که a محیط مقطع و b عرض مقطع جدار نازک باز باشد، آنگاه:

$$\text{ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک باز}\ J_۱=C_۲ab^۳\ ,\ (\frac{a}{b}>۱۰)\Rightarrow C_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow J_۱=\frac{۱}{۳}(۳a)t^۳=at^۳ \quad (۱)$$

$$\text{ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک بسته}\ J_۲=\frac{۴A_m^۲}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{۴A_m^۲ t}{\oint ds}=\frac{۴(\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)^۲ t}{۳a}=\frac{۱}{۴}a^۳t \quad (۲)$$

$$\frac{(۲)}{(۱)}\Rightarrow\frac{J_۲}{J_۱}=\frac{۱}{۴}(\frac{a}{t})^۲=\frac{۱}{۴}\times۱۰۰=۲۵$$

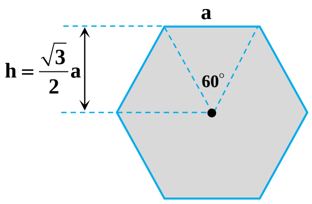
یادآوری می‌شود که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{۱}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ می‌باشد.

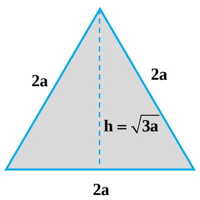
۱۳ـ گزینه «۴» مقاومت پیچشی در مقاطع جدار نازک بسته مساوی است با:

$$\tau=\frac{T}{۲A_m t}\Rightarrow \text{مقاومت پیچشی}\ K'=\frac{T}{\tau}=۲A_m t$$

$$K'_۱=K'_۲\Rightarrow ۲A_{m_۱}t_۱=۲A_{m_۲}t_۲\Rightarrow ۶(\frac{۱}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)t_۱=\frac{۱}{۲}\times۲a\times\sqrt{۳}at_۲\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲t_۱=\sqrt{۳}a^۲t_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۳}{۲}t_۱=۱/۵t_۱$$

برای محاسبه مساحت داخل شش ضلعی منتظم می‌توان آن را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم نموده، مساحت هر مثلث را محاسبه نموده آن را در ضریب ۶ ضرب کرده تا مساحت شش ضلعی به دست آید.





۱۴ـ گزینه «۱»

$$(\text{مساحت سطح مقطع لوله دایره‌ای})\ A_۱=(\text{مساحت سطح مقطع لوله مربعی})\ A_۲\Rightarrow ۲\pi rt=۴bt\Rightarrow\pi r=۲b \quad (۱)$$

از طرفی، نسبت تنش برشی در لوله دایروی به لوله مربعی برابر است با:

$$\frac{\tau_۱}{\tau_۲}=\frac{\frac{T}{۲(A_m)_۱t}}{\frac{T}{۲(A_m)_۲t}}=\frac{(A_m)_۲}{(A_m)_۱}=\frac{b^۲}{\pi r^۲}\overset{(۱)}{=\!=}\frac{(\frac{\pi r}{۲})^۲}{\pi r^۲}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۵ـ گزینه «۱»

$$(\text{محور توپر})\ \tau_{max۱}=(\text{محور توخالی})\ \tau_{max۲}\Rightarrow\frac{T\times\frac{d}{۲}}{\frac{\pi}{۳۲}d^۴}=\frac{T\times۲/۰}{\frac{\pi}{۳۲}(۴^۴-۳^۴)}\Rightarrow\frac{۱۶}{d^۳}=\frac{۳۲\times۲/۰}{۱۷۵}\Rightarrow d=۳/۵۲''$$

۱۶ـ گزینه «۳» برای مقطع جداره نازک باز، تحت پیچش داریم:

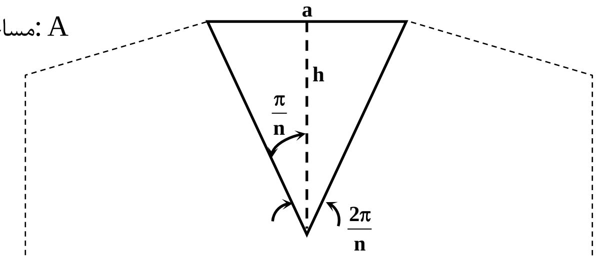
$$\tau=\frac{Tt}{J}\ ,\ \varphi=\frac{TL}{JG}$$

که در آن $J=\frac{۱}{۳}t^{۳}b$ و b، طول مقطع می‌باشد

برای مقطع n ضلعی به ضلع a: $b=na$

$$\varphi=\frac{TL}{\frac{۱}{۳}t^{۳}naG}\ \text{جداره نازک باز}\Rightarrow\varphi=\frac{۳TL}{Gt^{۳}na}$$

برای مقطع جداره نازک بسته، تحت پیچش داریم:



A: مساحت سطح محصور به منحنی بسته‌ی مقطع

$$\tau=\frac{T}{۲AT}$$

$$\varphi=\frac{TL}{JG}=\frac{TL}{۴A^{۲}G}\oint\frac{ds}{t}$$

در این تست $\varphi=\frac{TL}{۴A^{۲}G}\times\frac{na}{t}$

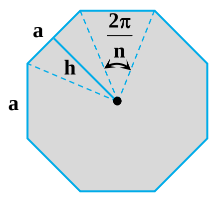
مساحت داخل خطچین مرکزی n برابر مساحت مثلث رسم شده است.

$$A=n(\frac{۱}{۲}ah)=n(\frac{۱}{۲}a\times\frac{a}{۲}Cotg\frac{\pi}{n})=\frac{na^{۲}}{۴}Cotg\frac{\pi}{n}\ \text{جدار نازک بسته}\Rightarrow\varphi=\frac{۴TL}{Gtna^{۳}Cotg^{۲}\frac{\pi}{n}}$$

$$\text{پاسخ}:\frac{\phi\ \text{باز}}{\phi\ \text{بسته}}=\frac{\frac{۳TL}{GT^{۳}na}}{\frac{۴TL}{GTna^{۳}Cotg^{۲}\frac{\pi}{n}}}=\frac{۳}{۴}(\frac{a}{t})^{۲}Cotg^{۲}\frac{\pi}{n}$$

۱۷ـ گزینه «۴»

۱۸ـ گزینه «۱» در مقاطع جدار نازک تحت پیچش، تنش برشی برابر است با:



$$\tau=\frac{T}{۲A_m t}$$

t: ضخامت مقطع

A_m: مساحت محصور شده توسط خطچین مرکزی

$$\Rightarrow A_m=n\left(\frac{۱}{۲}ah\right)=n\left(\frac{۱}{۲}a\times\frac{a}{۲}Cotg\frac{\pi}{n}\right)=\frac{na^{۲}}{۴}Cotg\frac{\pi}{n}\Rightarrow\tau=\frac{T}{۲tA_m}=\frac{T}{۲t\frac{na^{۲}}{۴}Cotg\frac{\pi}{n}}=\frac{۲Ttg\frac{\pi}{n}}{na^{۲}t}$$

۱۹ـ گزینه «۲» برای حالت تنش محوری، می‌توان با استفاده از تنش قائم مجاز، حداکثر نیروی محوری قابل تحمل به وسیله پین را به دست آورد.

$$A=\pi\frac{d^{2}}{4}\ ,\ \sigma_{max}=\frac{P}{A}\Rightarrow P=\sigma_{max}.A=(250\times10^{6})(\frac{\pi}{4}(6\times10^{-3})^{2}=7065N$$

این حداکثر باری است که پین می‌تواند تحمل کند که از بار محوری فشاری وارد بر پین بیشتر است. بنابراین پین از نظر تنش عمودی مناسب است.

برای حالت تنش برشی، می‌توان با استفاده از تنش برشی مجاز، حداکثر نیروی برشی قابل تحمل به وسیله پین را به دست آورد.

$$\tau=\frac{TR}{J}\Rightarrow T=\frac{\tau_{max}\times J}{R}\Rightarrow T_{max}=\frac{(250\times10^{6})\times(\frac{\pi(6\times10^{-3})^{4}}{32})}{(\frac{6\times10^{-3}}{2})}=10/6N.m$$

این حداکثر گشتاور پیچشی است که پین می‌تواند تحمل کند که از بار برشی وارد بر پین بیشتر است. بنابراین پین از نظر تنش برشی، مناسب است.

۲۰ـ گزینه «۲»

$$d_{out}=50mm\quad;\quad P=100kw\quad;\quad f=20Hz\quad;\quad\tau_{max}=60Mpa\quad;\quad d_{in}=?$$

داریم $P=T\omega\ ,\ \omega=2\pi f\Rightarrow\omega=2\pi\times20=40\pi\Rightarrow T=\frac{P}{\omega}\Rightarrow T=\frac{10^{5}}{40\pi}$

برای تیر با مقطع دایره تحت پیچش داریم $\tau=\frac{TP}{J}$

$$\left.\begin{array}{l}\tau=\frac{TP}{J}\\ J=\frac{\pi}{32}(d_{2}^{4}-d_{1}^{4})\end{array}\right\}\Rightarrow60\times10^{6}=\frac{\frac{10^{5}}{40\pi}\times25\times10^{-3}}{\frac{\pi}{32}((50\times10^{-3})^{4}-d_{in}^{4}}\Rightarrow d_{in}=41/2mm$$