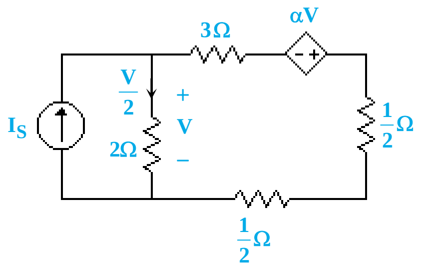
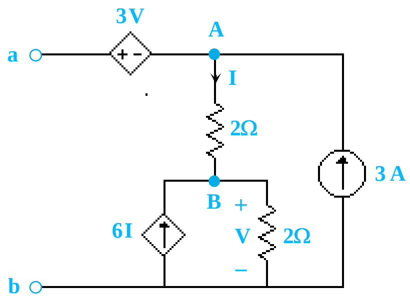
پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل اول



۱ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه می‌خواهیم مؤلفه‌ی ولتاژ ناشی از منبع جریان را به‌دست آوریم، منبع ولتاژ را بی‌اثر می‌کنیم. با این کار مقاومت ۱ اهمی نیز حذف می‌شود.

با اعمال KVL درحلقه‌ی موجود داریم:

$$KVL:-V+۴(I_S-\frac{V}{۲})-\alpha V=۰ \Rightarrow (\alpha+۳)V=۴I_S \Rightarrow V=\frac{۴}{\alpha+۳}I_S \Rightarrow \frac{۴}{\alpha+۳}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \alpha=۱۳$$



۲ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه منبع جریان ۳ آمپری با مقاومت ۲ اهمی سری شده است، با حذف این مقاومت، مدار به شکل زیر درمی‌آید. حال کافی است با اعمال KVL و KCL ولتاژ مدار باز دو سر a و b را به‌دست آوریم:

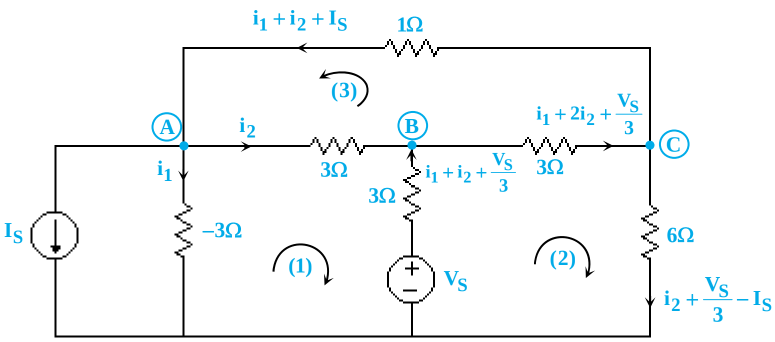
KCL در گره A: $۳+۰=I \Rightarrow I=۳A$

KCL در گره B: $I+۶I=\frac{V}{۲} \Rightarrow V=۱۴I=۴۲volt$

$$\Rightarrow V_{oc}=۳V+۲I+V=۴\times۴۲+۲\times۳=۱۷۴v$$

۳ـ گزینه «۳»

روش اول: با توجه به گزینه‌ها به دنبال پیدا کردن متغیرهای مدار خواهیم بود.



جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ را بر روی مدار انتخاب می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره A، جریان مقاومت ۱Ω در جهت نشان داده شده برابر $i_۱+i_۲+I_S$ خواهد شد.

اگر رابطه KVL را برای حلقه ۱ بنویسیم، جریان منبع ولتاژ در جهت نشان داده شده برابر $i_۱+i_۲+\frac{V_S}{۳}$ خواهد شد. با نوشتن KCL برای گره B، جریان شاخه مربوط به مقاومت ۳Ω، در جهت نشان داده شده برابر $i_۱+۲i_۲+\frac{V_S}{۳}$ می‌شود.

اگر رابطه KCL را برای گره C در نظر بگیریم، جریان مقاومت ۶Ω برابر $i_۲+\frac{V_S}{۳}-I_S$ می‌شود. حال کافی است که در حلقه‌های ۲ و ۳ رابطه KVL را بنویسیم.

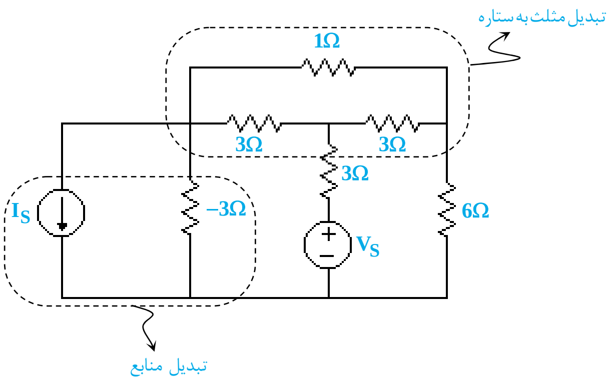
$$\begin{cases} KVL\,in(۲): V_S=۳\times[i_۱+i_۲+\frac{V_S}{۳}]+۳\times[i_۱+۲i_۲+\frac{V_S}{۳}]+۶\times[i_۲+\frac{V_S}{۳}-I_S] \\ KVL\,in(۳): ۳i_۲+۳\times[i_۱+۲i_۲+\frac{V_S}{۳}]+۱\times[i_۱+i_۲+I_S]=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲i_۱+۵i_۲=۲I_S-V_S \\ ۴i_۱+۱۰i_۲=-I_S-V_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲i_۱+۵i_۲=۲I_S-V_S & (۱) \\ ۲i_۱+۵i_۲=\frac{-I_S}{۲}-\frac{V_S}{۲} & (۲) \end{cases}$$

با توجه به اینکه در سمت چپ رابطه‌های (۱) و (۲) ، ضرایب متغیرهای مدار با هم برابرند، اگر سمت راست این دو رابطه نیز با هم برابر باشند، مدار بی‌نهایت جواب دارد و در صورتی که این دو عبارت با هم برابر نباشند، مدار جواب ندارد.

$$\begin{cases} ۲I_S-V_S=\frac{-I_S}{۲}-\frac{V_S}{۲} \Rightarrow ۲/۵I_S=۰/۵V_S \Rightarrow V_S=۵I_S \\ ۲I_S-V_S\neq\frac{-I_S}{۲}-\frac{V_S}{۲} \Rightarrow ۲/۵I_S\neq۰/۵V_S \Rightarrow V_S\neq۵I_S \end{cases}$$

$V_S=۵I_S \Rightarrow$ مدار ∞ جواب دارد. , $V_S\neq۵I_S \Rightarrow$ مدار جواب ندارد.

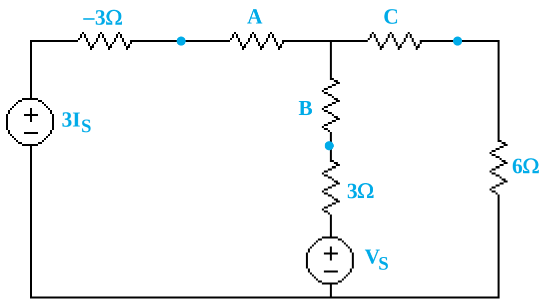
روش دوم: برای حل این مدار از تبدیل مثلث به ستاره و از روش تبدیل منابع استفاده می‌کنیم:

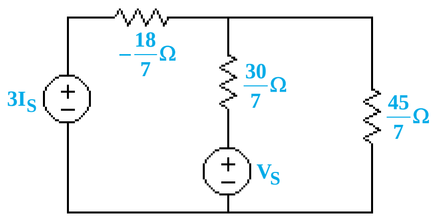


$$A=\frac{۳\times ۱}{۳+۳+۱}=\frac{۳}{۷}$$

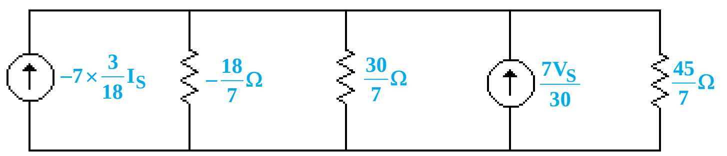
$$B=\frac{۳\times ۳}{۳+۳+۱}=\frac{۹}{۷}$$

$$C=\frac{۳\times ۱}{۳+۳+۱}=\frac{۳}{۷}$$





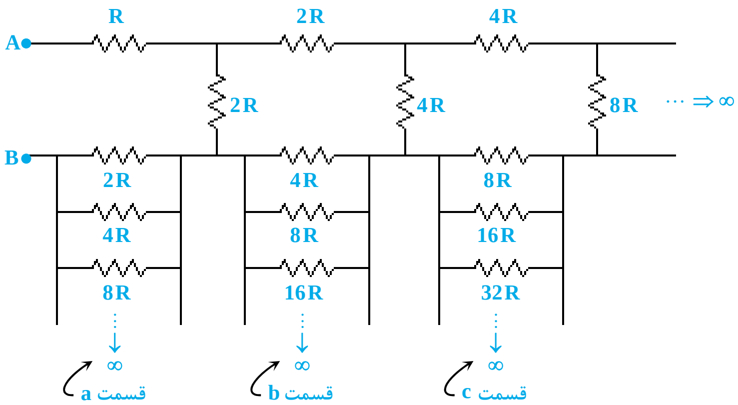
منابع ولتاژ و مقاومت‌های سری با آنها را به منابع جریان با مقاومت موازی با آنها تبدیل می‌کنیم:

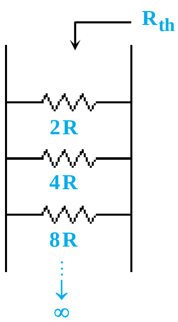


اگر $-\frac{۷\times ۳}{۱۸}I_S+\frac{۷}{۳۰}V_S=۰$ باشد، مدار ∞ جواب دارد.

$$\Rightarrow \frac{۷}{۶}I_S=\frac{۷}{۳۰}V_S \Rightarrow ۵I_S=V_S$$

۴ـ گزینه «۲» ابتدا مقاومت معادل هر یک از قسمت‌های پایینی مدار را محاسبه می‌کنیم.

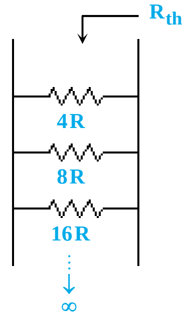




$$\frac{۱}{R_{th}}=\frac{۱}{۲R}+\frac{۱}{۴R}+\frac{۱}{۸R}+\cdots$$

تا بی‌نهایت ادامه دارد.

برای قسمت (a): $\Rightarrow \frac{۱}{R_{th}}=\frac{\frac{۱}{۲R}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{R}\Rightarrow \boxed{R_{th}=R}\Rightarrow$



برای قسمت بعدی (b) داریم:

$$\Rightarrow \frac{۱}{R_{th}}=\frac{۱}{۴R}+\frac{۱}{۸R}+\frac{۱}{۱۶R}+\cdots$$

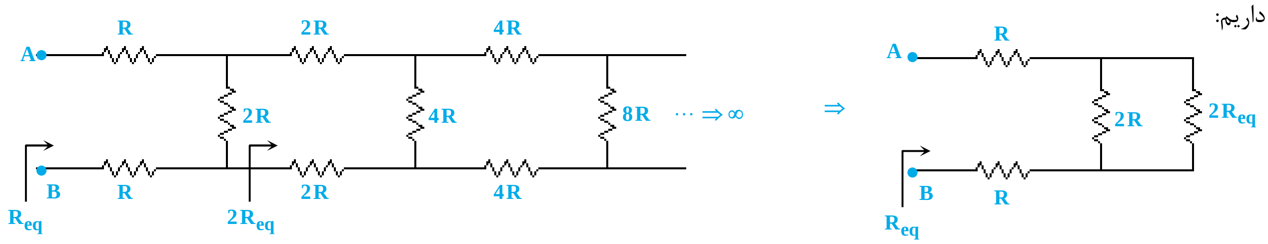
$$\Rightarrow \frac{۱}{R_{th}}=\frac{\frac{۱}{۴R}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲R}\Rightarrow \boxed{R_{th}=۲R}\Rightarrow \text{(b) برای قسمت}$$

به طور مشابه، مقاومت قسمت c، برابر ۴R می‌شود و بقیه قسمت‌های پایینی مدار هم به این شکل محاسبه می‌شوند و مقاومت معادل هر قسمت ۲ برابر مقاومت معادل قسمت قبلی می‌شود.

یادآوری:

$$\begin{cases} S=a+aq+aq^{۲}+aq^{۳}+\cdots \text{ تا } \infty \text{ ادامه دارد.} \Rightarrow S=\dfrac{a}{۱-q} \\ |q|<۱ \end{cases}$$

بنابراین داریم:

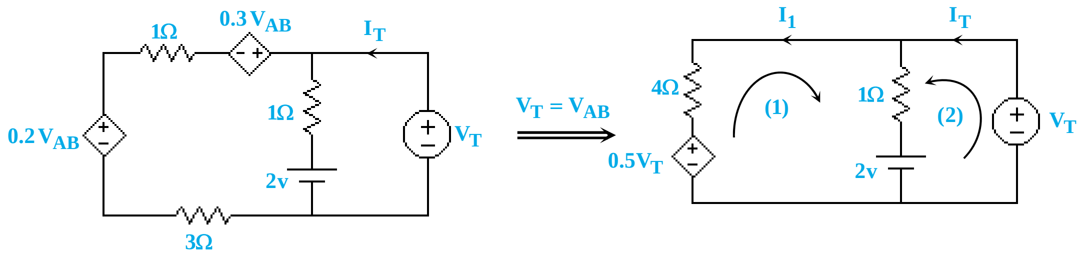


$$\Rightarrow R_{eq}=R+(۲R\,||\,۲R_{eq})+R\Rightarrow R_{eq}=۲R+\frac{۲R\times ۲R_{eq}}{۲R+۲R_{eq}}\Rightarrow R_{eq}=۲R+\frac{۲RR_{eq}}{R+R_{eq}}\Rightarrow R_{eq}^{۲}-۲RR_{eq}-۲R^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} R_{eq}=(\dfrac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})\times R>۰\Rightarrow \text{ق ق} \\ R_{eq}=(\dfrac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲})\times R<۰\Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{eq}=(\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})\times R=(\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})\times(\sqrt{۱۷}-۳)=\frac{۱۷-۹}{۲}=۴\Rightarrow R_{eq}=۴\Omega$$

۵ـ گزینه «۱» با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T، مدار معادل تونن از دو سر B و A را به‌دست می‌آوریم.



KVL در حلقهٔ (۱) :

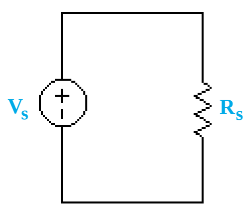
$$-V_T+۴I_۱+۰/۵V_T=۰\quad\Rightarrow\quad V_T=۸I_۱$$

KVL در حلقهٔ (۲):

$$-V_T+۱\times(I_T-I_۱)+۲=۰\quad\Rightarrow\quad V_T=I_T-I_۱+۲$$

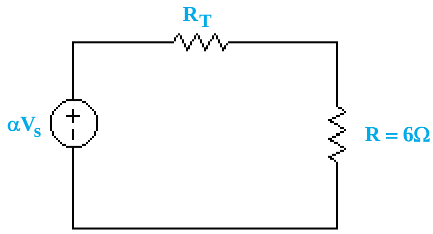
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\quad V_T=I_T-\frac{V_T}{۸}+۲\quad\Rightarrow\quad\frac{۹}{۸}V_T=I_T+۲\quad\Rightarrow\quad V_T=\frac{۸}{۹}I_T+\frac{۱۶}{۹}\quad\Rightarrow\quad R_{th}=\frac{۸}{۹}\ \text{و}\ V_{th}=\frac{۱۶}{۹}$$

۶ـ گزینه «۴» اگر از دو سر منبع ولتاژ به باقی مدار نگاه کنیم، می‌توانیم مقاومت معادل R_s را به عنوان مقاومت تونن در نظر بگیریم که توانی به اندازه مجموع توان‌های شبکه N و مقاومت ۶ اهمی روی آن مصرف می‌شود:



$$P_{V_s}=P_{R_s}=P_N+P_{۶\Omega}$$

$$P_N+P_{۶\Omega}=\frac{V_s^{۲}}{R_s}$$



مشخص است که اگر V_s، k برابر شود توان R_s، k^2 برابر می‌شود. حال اگر از دو سر مقاومت ۶ اهم به مدار نگاه کنیم، می‌توانیم مدار معادلی به شکل مقابل در نظر بگیریم:

در این مدار مقاومت R_T و ضریب α وابسته به ساختار درونی شبکه N هستند. حال می‌توان نوشت:

$$P_{6\Omega} = \frac{6(\alpha V_s)^2}{(R_T + 6)^2}$$

در اینجا نیز اگر V_s، k برابر شود، مشخصاً توان مقاومت ۶ اهمی k^2 برابر خواهد شد. بنابراین با k برابر شدن منبع V_s داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P'_N + P'_{6\Omega} = k^2(P_N + P_{6\Omega}) \\ P'_{6\Omega} + k^2 P_{6\Omega} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P'_{6\Omega}}{P'_{6\Omega} + P'_N} = \frac{P_{6\Omega}}{P_{6\Omega} + P_N}$$

و این یعنی درصد توان متوسطی که به مقاومت ۶ اهم می‌رسد، مستقل از دامنه منبع V_s است؛ این مقدار تنها به خود مقاومت ۶ اهم و ساختار شبکه N وابسته بوده و بنابراین گزینه (۴) پاسخ تست می‌باشد.

۷ـ گزینه «۱» از آنجایی که مدار مقاومتی است، لذا می‌توان گفت که مقدار V رابطه‌ی خطی با V_S و I_S دارد. لذا برای ولتاژ دو سر مقاومت R (که ناشی از منبع ولتاژ و جریان است) خواهیم داشت: $V = \alpha V_S + \beta I_S$

حال با داده‌های صورت سؤال مقادیر α و β را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} V_S = 1V \\ I_S = 2A \\ V = 110\,V \end{cases} \Rightarrow \alpha + 2\beta = 110 \qquad (1)$$

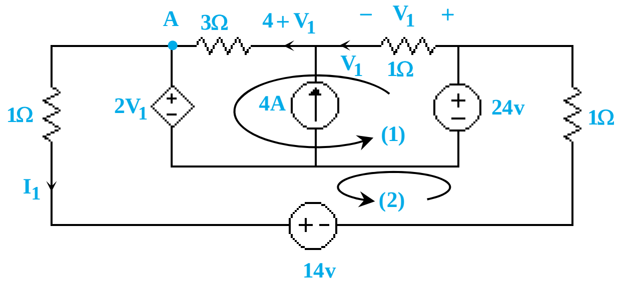
$$\begin{cases} V_S = 2V \\ I_S = 3A \\ V = 180\,V \end{cases} \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 180 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} \beta = 40 \\ \alpha = 30 \end{cases} \Rightarrow V = 30 V_S + 40 I_S$$

حال به ازای مقادیر جدید منابع خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_S = 4V \\ I_S = 6A \end{cases} \Rightarrow V = 30 \times 4 + 40 \times 6 = 360\,v$$

۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی توان مصرفی منبع وابسته کافی است جریان و ولتاژ دو سرش را به‌دست آوریم.



با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

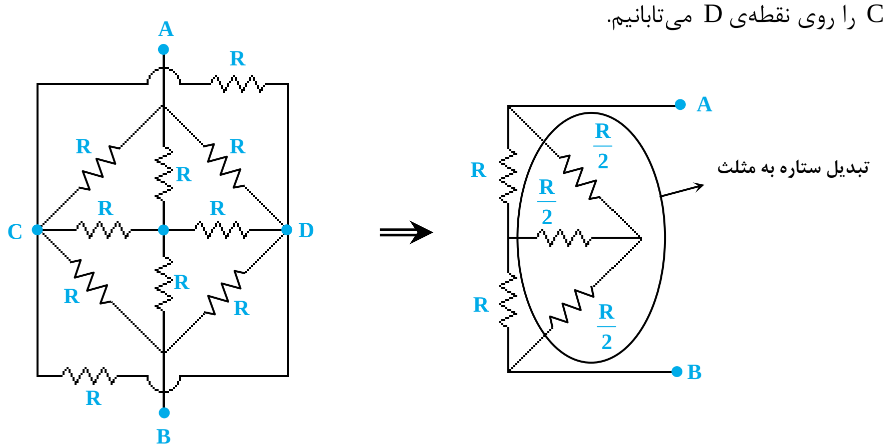
حلقه‌ی (۱): $-24 + V_1 + 3(4 + V_1) + 2V_1 = 0 \Rightarrow 6V_1 = 12 \Rightarrow V_1 = 2v$

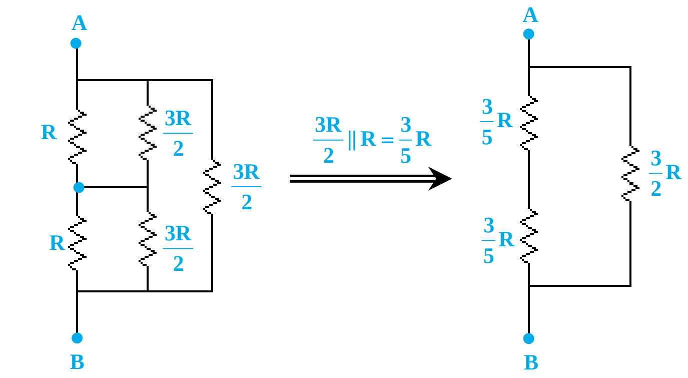
حلقه‌ی (۲): $I_1 + 24 - 2V_1 + I_1 + 14 = 0 \xrightarrow{V_1 = 2} I_1 = -17A$

با اعمال KCL در گره A مقدار جریان منبع وابسته را به‌دست می‌آوریم:

جریان منبع وابسته $I = 4 + V_1 - I_1 = 4 + 2 + 17 = 23 \Rightarrow P_{\text{منبع وابسته}} = 2V_1 \times I_{\text{منبع وابسته}} = 2 \times 2 \times 23 = 92w$

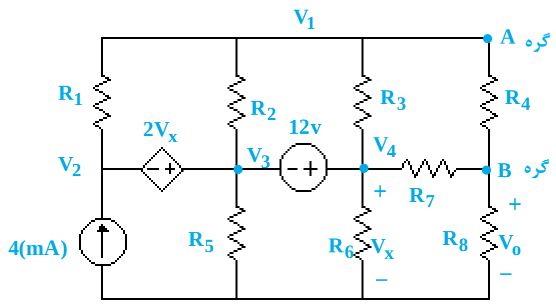
۹ـ گزینه «۲» با توجه به متقارن بودن مدار، نقطه‌ی C را روی نقطه‌ی D می‌تابانیم.





$$\Rightarrow\ R_{AB}=(\frac{۶}{۵}R)\parallel\frac{۳}{۲}R=\frac{\frac{۹}{۵}R}{\frac{۲۷}{۱۰}R}=\frac{۲}{۳}R$$

۱۰ـ گزینه «۲» شکل زیر را درنظر بگیرید. روابط گره را به‌صورت زیر می‌نویسیم:



$$\text{در گره } A \Rightarrow \frac{V_{۱}-V_{۲}}{R_{۱}}+\frac{V_{۱}-V_{۳}}{R_{۲}}+\frac{V_{۱}-V_{۴}}{R_{۳}}+\frac{V_{۱}-V_{o}}{R_{۴}}=۰$$

$$\text{در گره زمین} \Rightarrow \frac{V_{۳}}{R_{۵}}+\frac{V_{۴}}{R_{۶}}+\frac{V_{o}}{R_{۸}}=۴\times ۱۰^{-۳}$$

$$\text{در گره } B \Rightarrow \frac{V_{o}}{R_{۸}}+\frac{V_{o}-V_{۴}}{R_{۷}}+\frac{V_{o}-V_{۱}}{R_{۴}}=۰$$

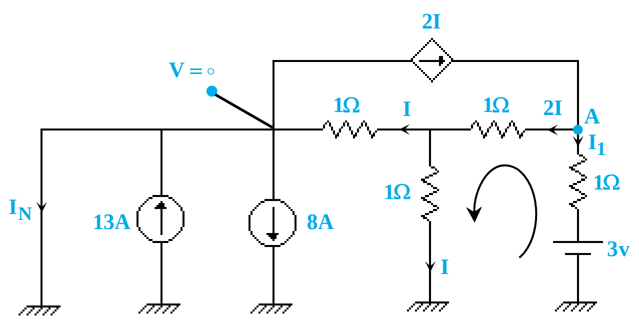
از طرفی داریم: $R_{۱}=R_{۲}=R_{۳}=R_{۴}=R_{۸}=۱k\Omega$

$R_{۵}=R_{۶}=R_{۷}=۲k\Omega$

$V_{۴}-V_{۳}=۱۲v \quad , \quad V_{۳}-V_{۲}=۲V_{x}=۲V_{۴}$

با استفاده از معادلات گره نوشته شده و جایگذاری روابط بالا در معادلات گره در نهایت به‌دست می‌آید: $V_{o}=۰/۵v$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مدار داریم:



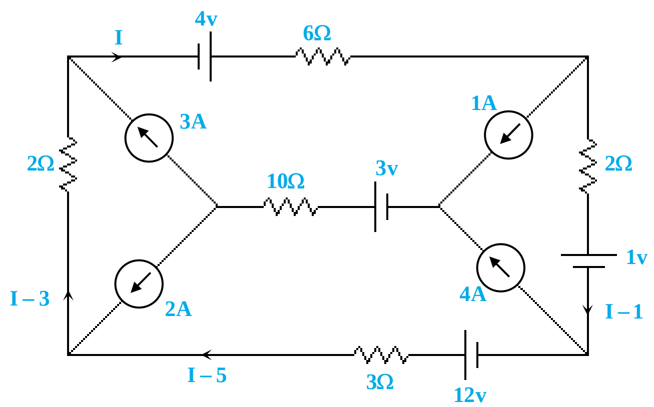
با اعمال KCL در گره A و همچنین KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

KCLA: $I_{۱}=۰$

KVL: $۳=۳I \Rightarrow I=۱A$

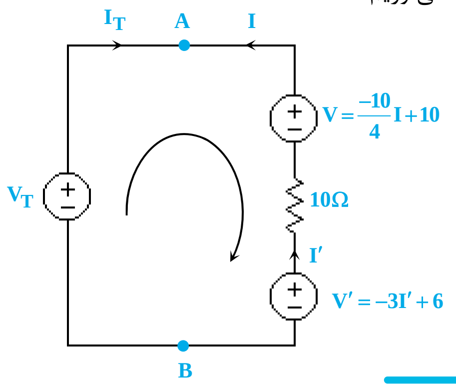
حال با اعمال KCL در گره اتصال کوتاه شده داریم: $I_{N}=۱۳-۸+I-۲I=۴A$

۱۲ـ گزینه «۴» ابتدا با توجه به شکل مدار جریان شاخه‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس با اعمال KVL در حلقه‌ی خارجی، جریان I را محاسبه می‌کنیم.



KVL: $-۴+۶I+۲(I-۱)+۱-۱۲+۳(I-۵)+۲(I-۳)=۰ \Rightarrow ۱۳I=۳۸ \Rightarrow I=۲/۹۲A$

۱۳ـ گزینه «۲» با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T به دو سر A و B، مقاومت تونن را به‌دست می‌آوریم.

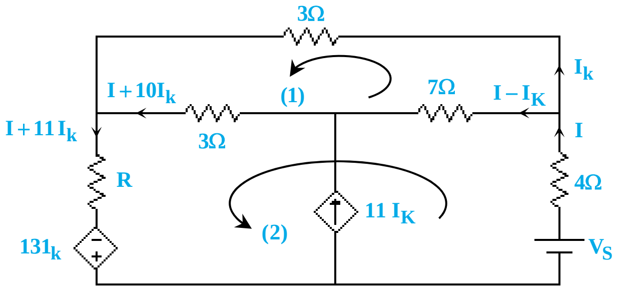


$$\Rightarrow I_T=-I=-I'$$

$$\Rightarrow -V_T+\frac{۱۰}{۴}I_T+۱۰+۱۰I_T+۳I_T+۶=۰$$

$$\Rightarrow V_T=۱۵/۵I_T+۱۶ \Rightarrow R_{th}=۱۵/۵$$

۱۴ـ گزینه «۲» با مشخص‌کردن جریان شاخه‌ها مدار به صورت زیر درمی‌آید:



با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$۳I_k-۳(I+۱۰I_k)-۷(I-I_k)=۰ \Rightarrow ۲۰I_k=-۱۰I \Rightarrow I=-۲I_k \quad (۱)$$

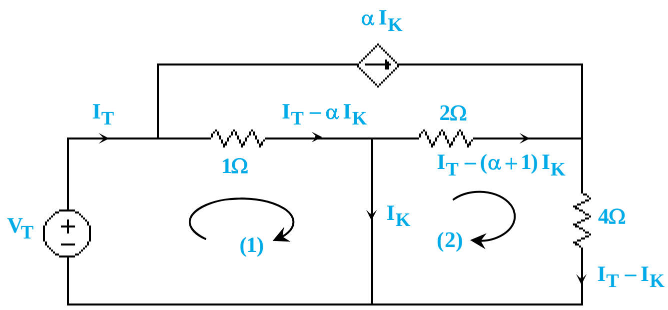
$$-V_S+۴I+۷(I-I_k)+۳(I+۱۰I_k)+R(I+۱۱I_k)-۱۳I_k=۰ \Rightarrow V_S=(۱۴+R)I+(۱۰+۱۱R)I_k \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} I=\frac{V_S}{۹-۴/۵R}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{if } I\to\infty \Rightarrow ۴/۵R-۹=۰ \Rightarrow R=\frac{۹}{۴/۵}=۲\Omega$$

۱۵ـ گزینه «۳» با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T در دو سر A و B، مقدار مقاومت تونن را محاسبه کرده و برابر ۱- قرار می‌دهیم.



KVL در حلقه‌ی (۱):

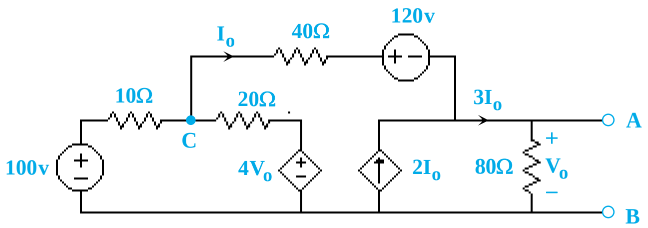
$$V_T=I_T-\alpha I_k \quad (۱)$$

KVL در حلقه‌ی (۲):

$$۲(I_T-(\alpha+۱)I_k)+۴(I_T-I_k)=۰ \Rightarrow ۳I_T=(\alpha+۳)I_k \Rightarrow I_k=\frac{۳}{\alpha+۳}I_T \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_T=I_T-\frac{۳\alpha}{\alpha+۳}I_T=\frac{۳-۲\alpha}{\alpha+۳}I_T$$

$$R_{th}=-۱\Rightarrow\frac{۳-۲\alpha}{\alpha+۳}=-۱\Rightarrow ۲\alpha-۳=\alpha+۳\Rightarrow \alpha=۶$$



۱۶ـ گزینه «۲» با مشخص‌کردن جریان شاخه‌ها و همچنین اعمال KVL و KCL ولتاژ با مدار باز دو سر A و B را به‌دست می‌آوریم.

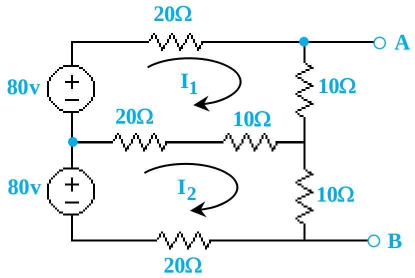
$$V_{AB}=V_{OC}=V_o=۲۴۰I_o \qquad (۱)$$

$$V_c=V_o+۱۲۰+۴۰I_o$$

در گره C داریم:

$$\frac{V_c-۱۰۰}{۱۰}+\frac{V_c-۴V_o}{۲۰}+I_o=۰ \Rightarrow ۳V_c-۲۰۰-۴V_o+۲۰I_o=۰ \Rightarrow V_o=۱۶۰+۱۴۰I_o \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_o=۱۶۰+۱۴۰\frac{V_o}{۲۴۰} \Rightarrow \frac{۱۰۰V_o}{۲۴۰}=۱۶۰ \Rightarrow V_o=V_{OC}=۳۸۴v$$



۱۷ـ گزینه «۴» با اعمال تبدیل مثلث به ستاره، مدار به شکل زیر درمی‌آید:

حال با اعمال KVL در حلقه‌های موجود، مقدار ولتاژ مدار باز از دو سر A و B را به‌دست می‌آوریم.

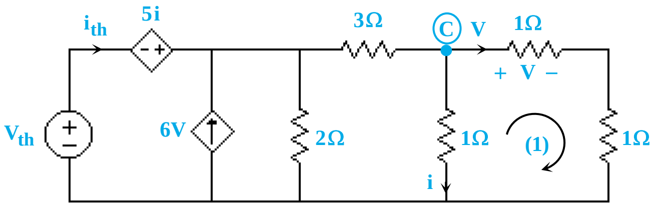
KVL در حلقه‌ی (۱): $-۸۰+۶۰I_۱-۳۰I_۲=۰ \Rightarrow ۶I_۱-۳I_۲=۸ \qquad (۱)$

KVL در حلقه‌ی (۲): $-۸۰+۶۰I_۲-۳۰I_۱=۰ \Rightarrow ۶I_۲-۳I_۱=۸ \qquad (۲)$

$$(۱)+(۲) \Rightarrow ۳(I_۱+I_۲)=۱۶ \Rightarrow I_۱+I_۲=\frac{۱۶}{۳}A$$

از طرفی داریم:

$$V_{AB}=۱۰I_۱+۱۰I_۲=۱۰(I_۱+I_۲)=\frac{۱۶۰}{۳}=۵۳/۳v$$

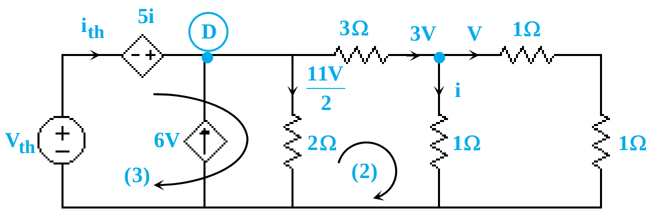


۱۸ـ گزینه «۱» برای پیدا کردن مقاومت دیده شده از دو سر A و B، منبع ولتاژ V_{th} که جریان i_{th} را به مدار تزریق می‌کند، به دو سر A و B بسته و رابطه‌ی آن دو را پیدا می‌کنیم. ضمناً منابع مستقل را خاموش می‌کنیم. بنابراین داریم:

با توجه به این‌که ولتاژ مقاومت Ω۱، V می‌باشد، بنابراین جریان آن V خواهد بود.

با نوشتن KVL در حلقه ۱ داریم:

$$KVL_۱: i=V+V \Rightarrow i=۲V \qquad (۱)$$



با نوشتن KCL در گره C، جریان مقاومت Ω۳ در جهت نشان داده شده برابر $i+V$ خواهد بود که آن هم با توجه به رابطه (۱) برابر ۳V می‌شود.

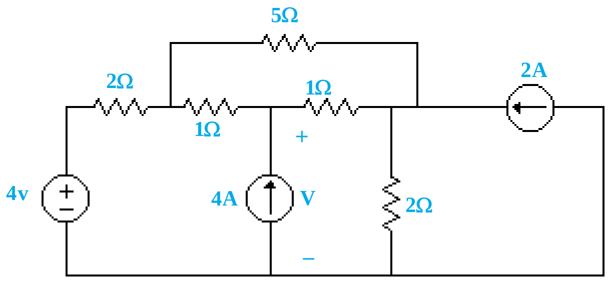
حال با درنظر گرفتن KVL در حلقه ۲، جریان مقاومت Ω۲ در جهت نشان داده شده در شکل برابر $\frac{۱۱V}{۲}$ می‌گردد.

حال کافی است که رابطه KCL را در گره D و رابطه KVL را برای حلقه ۳ بنویسیم:

$$\begin{aligned} &KCL_D: i_{th}+۶V=\frac{۱۱V}{۲}+۳V \\ &KVL_۳: V_{th}+۵i=۲\times\frac{۱۱V}{۲} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} i_{th}=\frac{۵}{۲}V \\ V_{th}=۱۱V-۵i \end{cases}$$

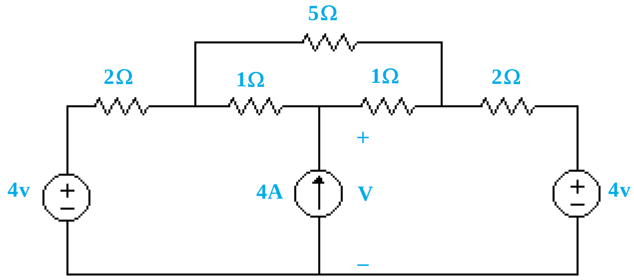
با توجه به رابطه ۱، یعنی $i=۲v$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} i_{th}=\frac{۵}{۲}V \\ V_{th}=۱۱V-۵\times۲V=V \end{cases} \Rightarrow i_{th}=\frac{۵}{۲}V_{th} \Rightarrow V_{th}=\frac{۲}{۵}i_{th} \Rightarrow \boxed{R_{th}=۰/۴Ω}$$

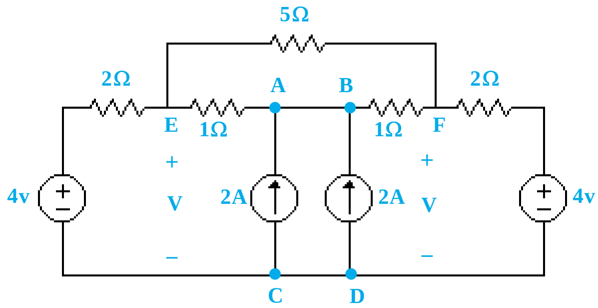


۱۹ـ گزینه «۳» با دقت در شکل، مشاهده می‌شود که تعدادی از عناصر سمت چپ منبع ولتاژ ۴v با این منبع موازی هستند و بنابراین می‌توان آن‌ها را حذف کرد. ضمناً عناصر سری با منبع جریان ۲A موجود در سمت راست مدار قابل حذف می‌باشند. بنابراین داریم:

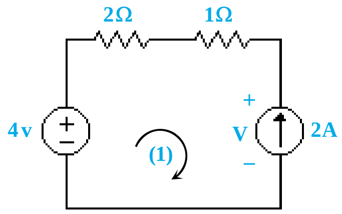
با تبدیل منبع جریان ۲A موازی با مقاومت ۲Ω، به منبع ولتاژ معادل ۴v سری با مقاومت ۲Ω، مدار زیر را خواهیم داشت:



مدار شکل بالا، متقارن است. با تبدیل منبع جریان ۴A به ۲ منبع جریان موازی ۲ آمپری خواهیم داشت:



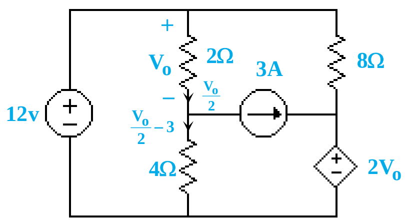
با توجه به تقارن شکل، جریان مقاومت ۵Ω و جریان شاخه AB و CD و EF صفر خواهـد شـد و بنـابراین مدار مقابل را خواهیم داشت:



با نوشتن KVL در حلقه ۱ داریم:

$$KVL_۱ : V = (۱+۲)\times ۲ + ۴ \Rightarrow \boxed{V = ۱۰v}$$

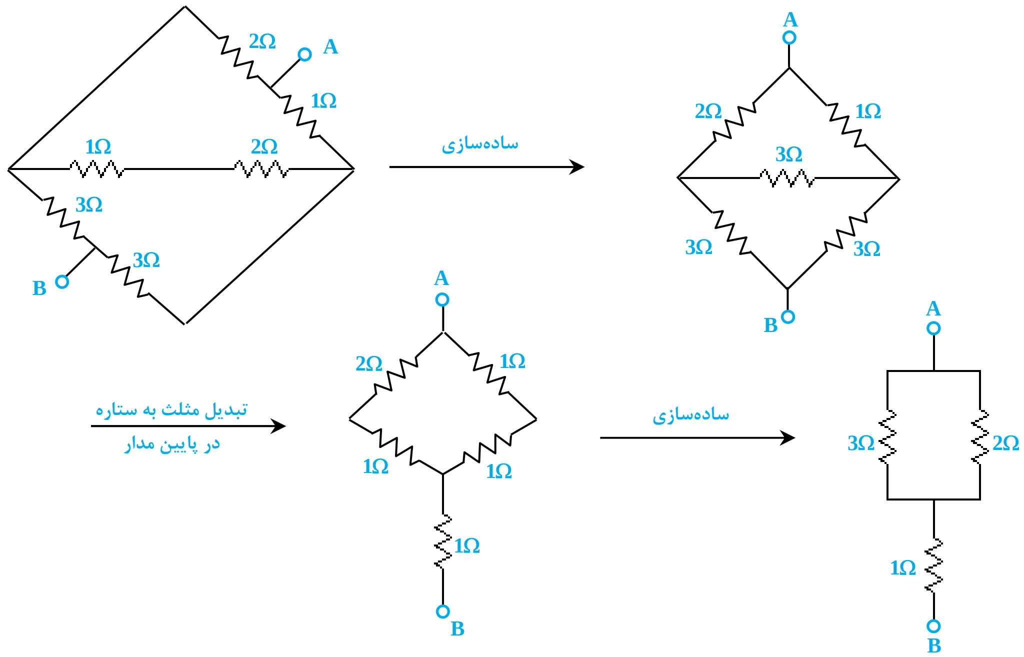
۲۰ـ گزینه «۱» ابتدا جریان شاخه‌ها را مشخص کرده و سـپس بـا اعمـال KVL در حلقه‌ی سمت چپ مدار، مقدار V_o را به‌دست می‌آوریم:



:KVL

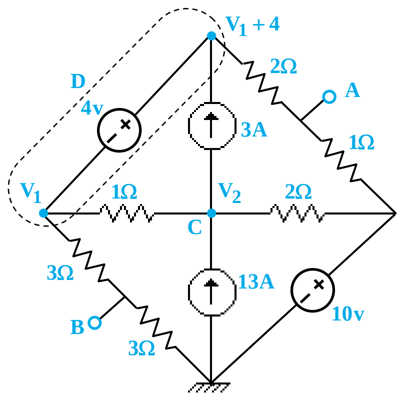
$$-۱۲ + V_o + ۴(\frac{V_\circ}{۲} - ۳) = ۰ \Rightarrow ۳V_o = ۲۴ \Rightarrow V_o = ۸v$$

۲۱ـ گزینه «۳» ابتدا با خاموش کردن منابع، مقدار R_{th} را محاسبه می‌کنیم:



$$R_{th} = ۱ + (۲ \| ۳) = ۱ + \frac{۲ \times ۳}{۲ + ۳} = ۱ + ۱/۲ = ۲/۲\Omega$$

حال مطابق شکل روبه‌رو، به محاسبه V_{th} می‌پردازیم. بدین منظور باید ولتاژ $V_۱$ را محاسبه کنیم: برای این کار در گره C و ابرگره D، روابط KCL را می‌نویسیم:



$$KCL\,C: \frac{V_۲ - V_۱}{۱} + \frac{V_۲ - ۱۰}{۲} + ۳ - ۱۳ = ۰$$

$$\Rightarrow -V_۱ + ۱/۵V_۲ = ۱۵ \quad (۱)$$

$$KCL\,D: \frac{V_۱}{۶} + \frac{V_۱ - V_۲}{۱} + \frac{V_۱ + ۴ - ۱۰}{۳} - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱/۵V_۱ - V_۲ = ۵ \Rightarrow V_۲ = ۱/۵V_۱ - ۵ \quad (۲)$$

$$(۱) و (۲) \Rightarrow -V_۱ + ۱/۵ \times (۱/۵V_۱ - ۵) = ۱۵ \Rightarrow ۱/۲۵V_۱ = ۲۲/۵ \Rightarrow V_۱ = ۱۸v$$

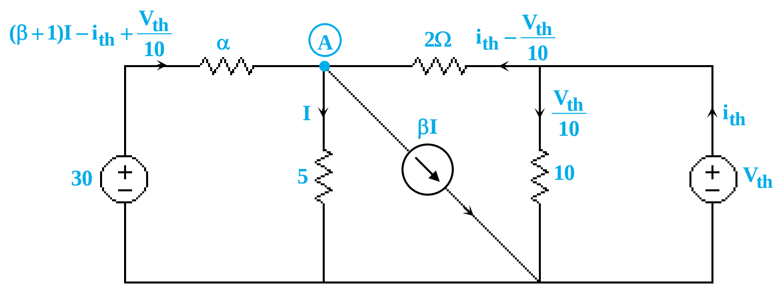
حال داریم:

$$V_B = \frac{V_۱}{۲} = ۹v$$

$$V_A = ۱۰ + \frac{V_۱ + ۴ - ۱۰}{۳} \times ۱ = ۱۰ + ۴ = ۱۴v$$

$$V_{th} = V_A - V_B = ۱۴ - ۹ = ۵v$$

۲۲ــ گزینه «۲» با توجه به خواسته مسأله، بایستی جریان نورتن را به‌دست آوریم و بررسی کنیم که در چه صورتی چنین جریانی وجود خواهد داشت. پس به دنبال مدار معادل نورتن خواهیم بود. با متصل کردن منبع ولتاژ V_{th} که جریان i_{th} را به مدار در جهت نشان داده‌شده تزریق می‌کند، مدار معادل نورتن را می‌یابیم.



جریان مقاومت ۱۰Ω (با جهت نشان داده‌شده) با توجه به موازی بودن آن با منبع V_{th}، برابر $\frac{V_{th}}{۱۰}$ خواهد بود. پس جریان مقاومت ۲Ω (در جهت نشان داده‌شده) برابر $i_{th} - \frac{V_{th}}{۱۰}$ می‌شود. با نوشتن معادله KCL در گره A، جریان مقاومت α، برابر $(\beta+۱)I - i_{th} + \frac{V_{th}}{۱۰}$ خواهد شد. تا اینجا جریان کلیه شاخه‌ها را روی مدار پیدا کردیم. پس معادلات KCL را روی مدار پیاده کردیم. حال باید معادلات KVL را در حلقه‌ها بنویسیم.

دقت کنید که KVL مربوط به حلقه مقاومت ۱۰Ω و منبع ولتاژ V_{th} را قبلاً اعمال کردیم و جریان مقاومت ۱۰Ω را برابر $\frac{V_{th}}{۱۰}$ یافتیم.

$$KVL: ۳۰ = \alpha[(\beta+۱)I - i_{th} + \frac{V_{th}}{۱۰}] + ۵I \quad (۱)$$ در حلقه شامل مقاومت α و ۵ اهم و منبع ۳۰ ولت

$$KVL: ۵I + ۲ \times [i_{th} - \frac{V_{th}}{۱۰}] = V_{th} \quad (۲)$$ در حلقه شامل مقاومت ۲،۵ و ۱۰ اهم

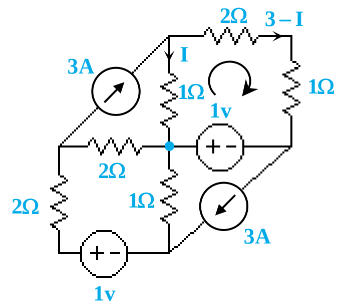
با حل معادلات (۱) و (۲) و حذف متغیر I داریم:

$$i_{th} = \frac{۶\alpha\beta + ۸/۵\alpha + ۵}{۲۵} \times \frac{۵}{۲\alpha\beta + ۷\alpha + ۱۰} V_{th} - \frac{۱۵۰}{۲\alpha\beta + ۷\alpha + ۱۰} \Rightarrow \begin{cases} R_N = \frac{(۲\alpha\beta + ۷\alpha + ۱۰)}{(۶\alpha\beta + ۸/۵\alpha + ۵)} \times ۵ \\ I_N = \frac{-۱۵۰}{۲\alpha\beta + ۷\alpha + ۱۰} \end{cases}$$

I_N باید مقدار حقیقی داشته باشد. $\Leftarrow$

$$۲\alpha\beta + ۷\alpha + ۱۰ \neq ۰ \Rightarrow \beta \neq -۳/۵ - \frac{۱۰}{۲\alpha}$$

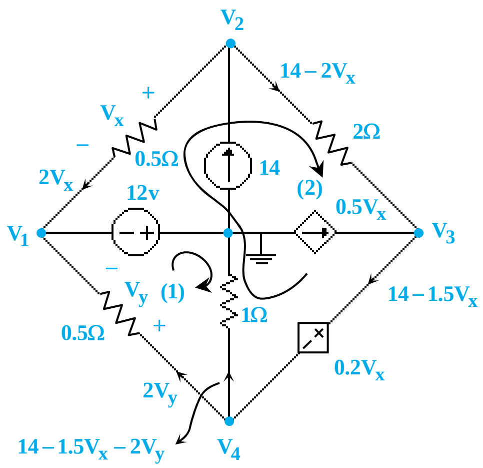
۲۳ـ گزینه «۱» ابتدا مقاومت‌های سری با منبع جریان و موازی با منبع ولتاژ را حذف می‌کنیم. سپس جریان شاخه‌ها را مشخص می‌کنیم.



حال با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده مقدار I را به‌دست می‌آوریم.

$$I+۱+۳\times(I-۳)=۰ \Rightarrow ۴I=۸ \Rightarrow I=۲A$$

۲۴ـ گزینه «۳» ابتدا جریان شاخه‌ها را مطابق شکل زیر مشخص می‌کنیم. حال با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص شده داریم:



KVL در حلقه (۱):

$$V_y-۱۲-۱۴+۱/۵V_x+۲V_y=۰ \Rightarrow ۳V_y+۱/۵V_x=۲۶ \qquad (۱)$$

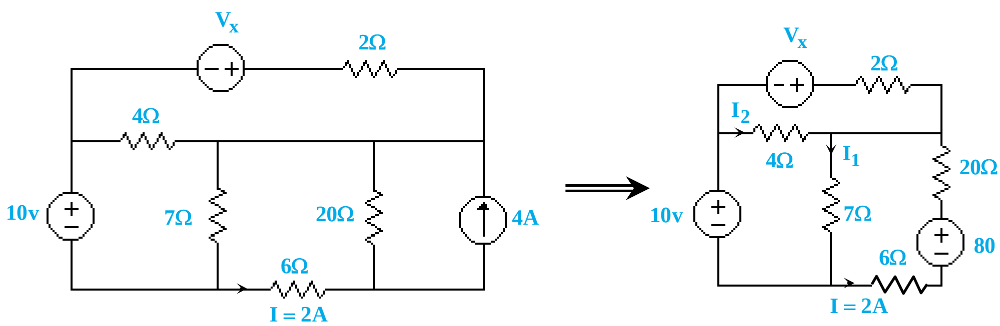
KVL در حلقه (۲):

$$-V_x+۲\times(۱۴-۲V_x)+۰/۲V_x+۱۴-۱/۵V_x-۲V_y+۱۲=۰$$

$$\Rightarrow ۶/۳V_x+۲V_y=۵۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_x=۶/۹۲v \quad و \quad V_y=۵/۲۱v \Rightarrow V_۴=۱۴-۱/۵V_x-۲V_y=-۶/۸v$$

۲۵ـ گزینه «۲» با تبدیل معادل نورتن به تونن مدار را به شکل ساده‌تر تبدیل می‌کنیم.



حال با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت راست، مقدار جریان شاخه‌ی وسط را به‌دست می‌آوریم:

KVL در (حلقه‌ی سمت راست):

$$۶\times۲-۸۰+۲۰\times۲+۷I_۱=۰ \Rightarrow I_۱=۴$$

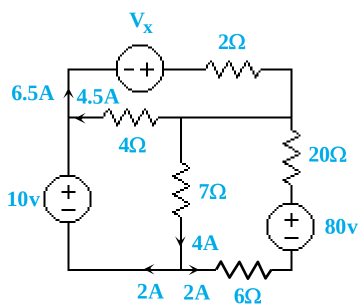
حال با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت چپ، جریان مقاومت ۴ اهمی را به‌دست می‌آوریم:

KVL در (حلقه‌ی سمت چپ):

$$-۱۰+۴I_۲+۷I_۱=۰ \xrightarrow{I_۱=۴} I_۲=-۴/۵$$

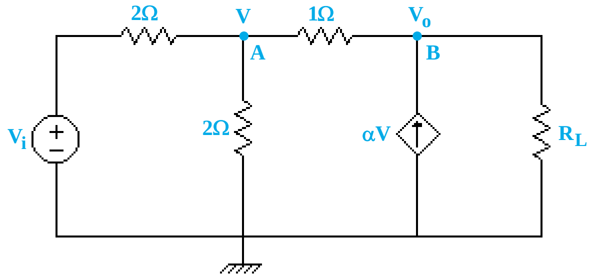
حال جریان مقاومت ۲ اهمی را با استفاده از جریان‌های به‌دست آمده در مرحله‌های قبل به‌دست می‌آوریم.

در این مرحله با اعمال KVL در حلقه‌ی بالا مقدار V_x را به‌دست می‌آوریم.



$$KVL: -V_x+۲\times۶/۵+۴\times۴/۵=۰ \Rightarrow V_x=۱۳+۱۸=۳۱ \Rightarrow V_x=۳۱v$$

۲۶ـ گزینه «۲» در گام اول سعی می‌کنیم مقدار بهره ولتاژ مدار را به صورت پارامتری برحسب α و R_L محاسبه کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$KCL\ A: \frac{V-V_i}{۲}+\frac{V}{۲}+\frac{V-V_o}{۱}=۰ \Rightarrow ۲V-\frac{V_i}{۲}-V_o=۰ \Rightarrow V=\frac{V_o}{۲}+\frac{V_i}{۴} \quad (۱)$$

$$KCL\,B: \frac{V_o-V}{۱}-\alpha V+\frac{V_o}{R_L}=۰ \Rightarrow (۱+\frac{۱}{R_L})V_o-(۱+\alpha)V=۰ \xrightarrow{(۱)} (۱+\frac{۱}{R_L})V_o-\frac{(۱+\alpha)}{۲}V_o-\frac{(۱+\alpha)}{۴}V_i=۰$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{R_L}-\frac{\alpha}{۲})V_o=\frac{۱+\alpha}{۴}V_i \Rightarrow \frac{(۱-\alpha)R_L+۲}{۲R_L}V_o=\frac{۱+\alpha}{۴}V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i}=\frac{(۱+\alpha)R_L}{۴+۲(۱-\alpha)R_L}$$

حال دقت کنید که با فرض $\alpha<۱$، بهره ولتاژ مدار با افزایش R_L افزایش پیدا می‌کند؛ لذا برای آنکه مدار به ازای $R_L>۵\Omega$ بهره‌ی بزرگتر از یک داشته باشد تا به عنوان یک تقویت‌کننده ولتاژ عمل کند، کافی است به ازای $R_L=۵\Omega$ بهره‌ی ولتاژ یک داشته باشد:

$$\frac{V_o}{V_i}(R_L=۵\Omega)=\frac{(۱+\alpha)\times ۵}{۴+۲(۱-\alpha)\times ۵}=\frac{۵+۵\alpha}{۱۴-۱۰\alpha}=۱ \Rightarrow \alpha=\frac{۳}{۵}<۱$$

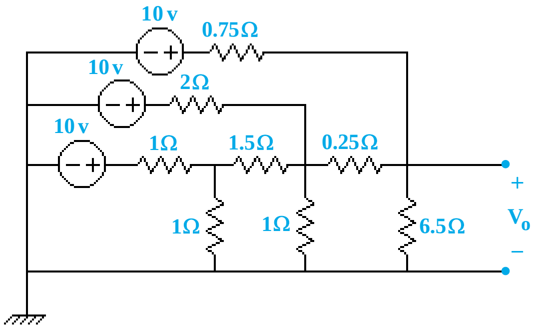
لذا بهره ولتاژ مدار به شکل مقابل است:

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{(۱+\frac{۳}{۵})R_L}{۴+۲(۱-\frac{۳}{۵})R_L}=\frac{۸R_L}{۲۰+۴R_L}$$

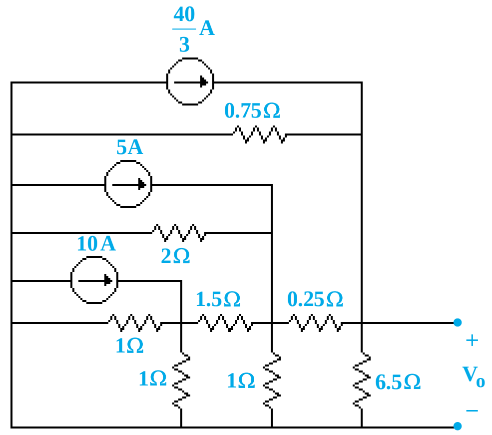
در حالت بی‌باری یا به بیان دیگر در حالت $R_L=\infty$ داریم:

$$\frac{V_o}{V_i}(R_L=\infty)=\frac{۸R_L}{۴R_L}=۲$$

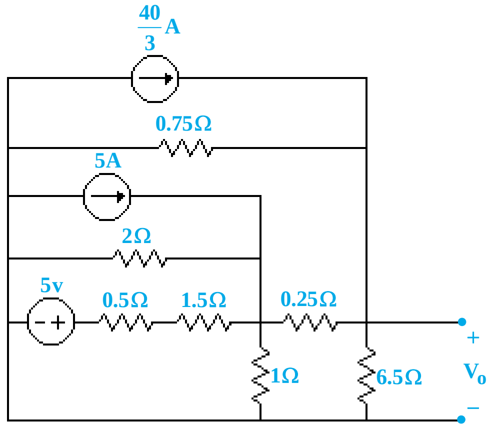
۲۷ـ گزینه «۲» در حالت کلی وقتی به این مدار نگاه می‌کنیم، یافتن V_o دشوار و زمان‌بر است، اما می‌توان مدار بالا را به صورت زیر تبدیل کرد.



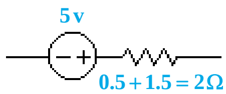
حال با استفاده از قضیه تبدیل منابع، منابع ولتاژ $۱۰\,v$ را که با مقاومت‌های ۱Ω، ۲Ω و $\frac{۱}{۴}\Omega$ سری شده‌اند، به منابع جریان موازی با این مقاومت‌ها تبدیل می‌کنیم.



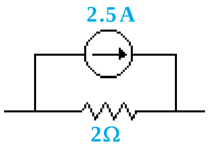
حال از پایین سمت چپ به سمت بالا حرکت کرده و مدار را ساده می‌کنیم. در پایین مدار سمت چپ ۲ مقاومت ۱Ω با هم موازی هستند؛ پس معادل آن‌ها ۰/۵Ω شده که با منبع جریان ۱۰A موازی است. حال منبع جریان ۱۰A و مقاومت ۰/۵Ω موازی با آن را به منبع ولتاژ و مقاومت ۰/۵Ω سری با آن تبدیل می‌کنیم.



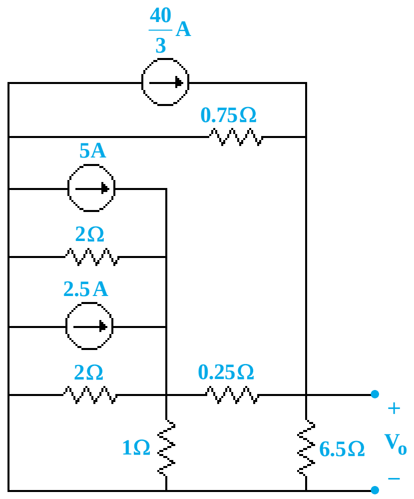
در مرحله بعد قسمت



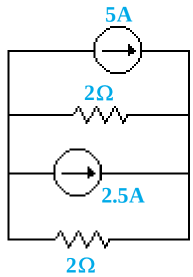
به



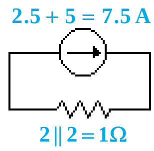
تبدیل می‌شود. پس داریم:



حال قسمت

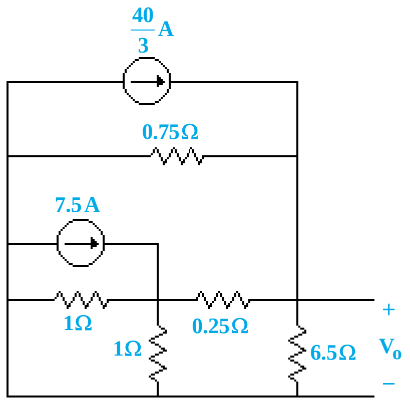


را به صورت



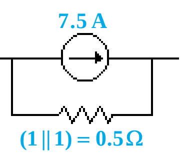
ساده می‌کنیم.

مدار ساده شده به صورت مقابل است:

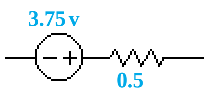


همان‌طور که مشخص است، مقاومت‌های ۱Ω با هم موازی‌اند.

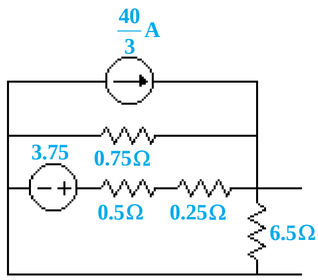
پس



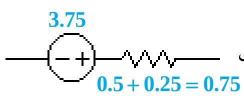
به صورت



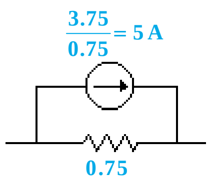
ساده می‌شود و مدار به صورت زیر درمی‌آید:



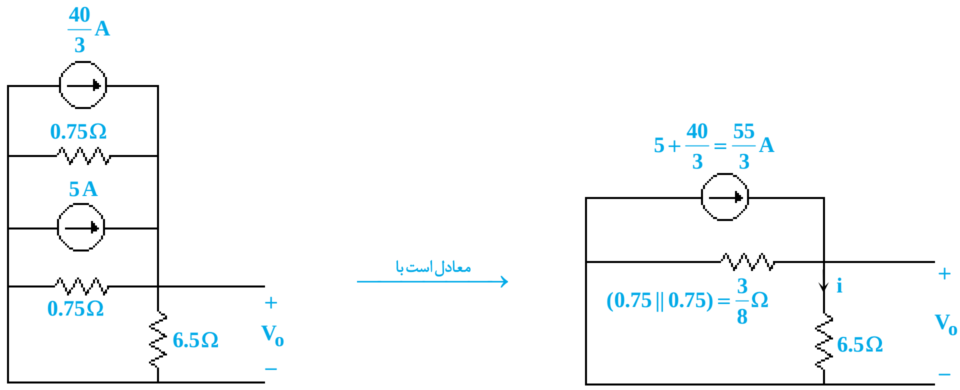
حال قسمت



به صورت



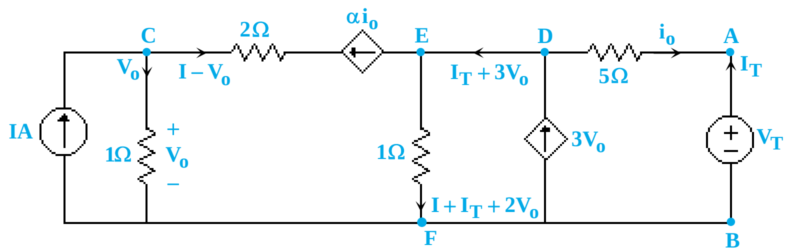
تبدیل می‌شود.



جریان عبوری از $۶/۵\Omega$ برابر است با:

$$i=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۳}{۸}+۶/۵}\times\frac{۵۵}{۳}=۱A \quad , \quad V_o=۶/۵i=۶/۵\ v$$

۲۸ـ گزینه «۲» باید مدار تونن دیده شده از دو سر A و B را به دست آوریم و مقدار (α) را چنان تعیین کنیم که مقاومت دیده شده صفر شود. از دو سر A و B منبع V_T که از آن جریان I_T خارج می‌شود را اعمال می‌کنیم.



با اعمال KCL در نقطه A داریم:

$$i_o+I_T=۰ \Rightarrow \boxed{i_o=-I_T} \qquad (۱)$$

با اعمال KCL در نقطه C داریم:

$$\boxed{-I+V_o-\alpha i_o=۰} \qquad (۲)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$V_o=I-\alpha I_T \qquad (۳)$$

با اعمال KCL در نقطه D جریان از سمت گره D به سمت گره E برابر است با: $\boxed{I_T+۳V_o}$

حال با اعمال KCL در نقطه E جریان مقاومت ۱Ω برابر است با: $\boxed{I_T+۳V_o+I-V_o=I+I_T+۲V_o}$

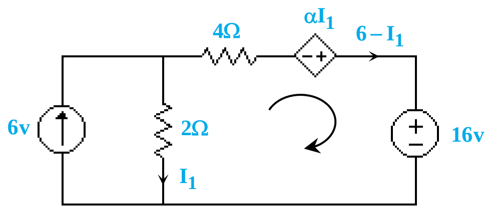
حال با اعمال KVL در حلقه ADEFB داریم: $-V_T+۵I_T+I+I_T+۲V_o=۰$

با استفاده از رابطه (۳) و جایگذاری آن در رابطه بالا داریم: $-V_T+۶I_T+I+۲I-۲\alpha I_T=۰ \Rightarrow V_T=(۶-۲\alpha)I_T+۳I$

اگر $۶-۲\alpha=۰ \Rightarrow \boxed{\alpha=۳}$ و $V_T=۳I$ می‌شود. بنابراین مدار دیده شده از ۲ سر A و B برابر با منبع ۳I ولتی می‌شود.

۲۹ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌ی توان مقاومت دو اهمی ابتدا جریان آن یعنی $I_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص‌شده، داریم:

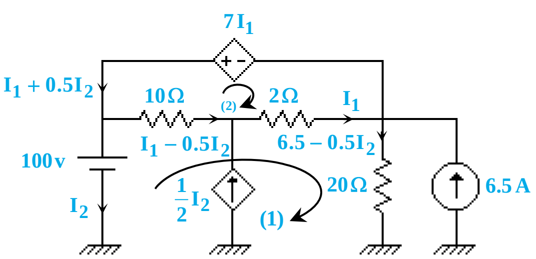


$$KVL: -۲I_۱+۴\times(۶-I_۱)-\alpha I_۱+۱۶=۰ \Rightarrow I_۱=\frac{۴۰}{\alpha+۶}$$

حال با بررسی شرط توان تلف شده در صورتی که مقاومت بیشتر از ۵۰ باشد، مقدار α را به‌دست می‌آوریم:

$$P=RI^۲=۲\times I_۱^۲=۲\times(\frac{۴۰}{\alpha+۶})^۲>۵۰ \Rightarrow \frac{۴۰}{\alpha+۶}>۵ \Rightarrow \alpha<۲ \Rightarrow \alpha=۱$$

۳۰ـ گزینه «۴» برای به‌دست آوردن توان منبع جریان ۶/۵ آمپری کافی است ولتاژ دو سرش را به‌دست آوریم.



با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$KVL\ (۱): -۱۰۰+۱۰\times(I_۱-۰/۵I_۲)+۲I_۱+۲۰\times(۶/۵-۰/۵I_۲)=۰$$

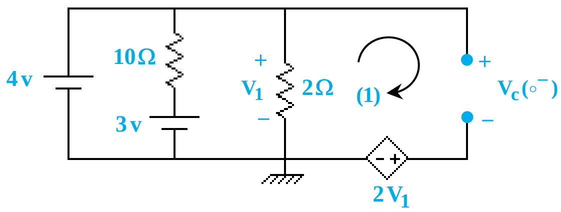
$$\Rightarrow ۱۲I_۱-۱۵I_۲=-۳۰ \qquad (۱)$$

$$KVL\ (۲): ۷I_۱-۲I_۱-۱۰\times(I_۱-۰/۵I_۲)=۰ \Rightarrow ۵I_۱=۵I_۲ \Rightarrow I_۱=I_۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} I_۱=I_۲=۱۰A \Rightarrow V_{\text{منبع جریان}}=۲۰\times(۶/۵-۰/۵I_۲)=۳۰v$$

$$\Rightarrow P_{\text{منبع جریان}}=۶/۵\times۳۰=۱۹۵w$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل دوم



۱ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را برای زمان‌های $t < ۰$ تحلیل می‌کنیم تا مقدار ولتاژ خازن را در لحظه‌ی $t = ۰^-$ به دست بیاوریم (دقت کنید خازن در لحظه‌ی $t = ۰^-$ مدار باز است).

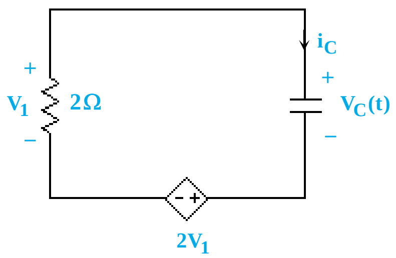
با توجه به مدار ملاحظه می‌شود: $v_۱ = ۴v$

با اعمال KVL در حلقه‌ی ۱ داریم:

$$KVL(۱): \quad -v_۱ + v_C(۰^-) + ۲v_۱ = ۰ \quad \Rightarrow v_C(۰^-) = -۴v$$

حال مدار را برای زمان‌های بزرگ‌تر از صفر تحلیل می‌کنیم. با باز شدن کلید در لحظه‌ی $t = ۰$، سمت چپ مدار از سمت راست آن جدا می‌شود.

با اعمال KVL در حلقه‌ی مدار داریم: $\quad v_C(t) = -v_۱ \quad (۱)$



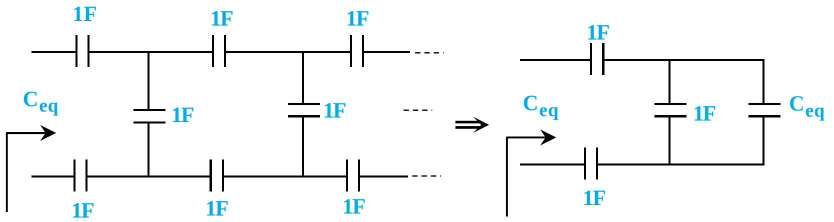
از طرفی داریم:

$$i_C(t) = -\frac{v_۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{۱}{۶}v_۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{v_C(t)}{۶} \Rightarrow \frac{dv_C(۰^+)}{dt} = \frac{v_C(۰^+)}{۶} = \frac{v_C(۰^-)}{۶} = -\frac{۴}{۶} = -\frac{۲}{۳}$$

۲ـ گزینه «۲» برای به‌دست آوردن ثابت زمانی مدار ابتدا خازن معادل دیده شده از دو سر منبع ولتاژ و مقاومت را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{(C_{eq}+۱)\times\frac{۱}{۲}}{C_{eq}+۱+\frac{۱}{۲}} = \frac{C_{eq}+۱}{۲C_{eq}+۳}$$

$$\rightarrow ۲C_{eq}^۲ + ۲C_{eq} - ۱ = ۰ \Rightarrow C_{eq} = ۰/۳۶۶F$$

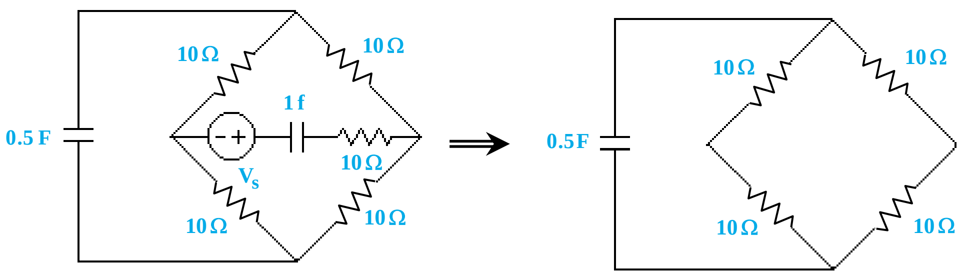
بنابراین ثابت زمانی به راحتی قابل محاسبه می‌باشد: $\quad \tau = RC_{eq} = ۳/۶۶ \simeq ۳/۶ \sec$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به مدار مشاهده می‌شود که مدار دارای پل وتسون می‌باشد. بنابراین از دید منبع ولتاژ از خازن ۰/۵ فارادی جریانی عبور نکرده و همانند مدار باز عمل می‌کند. حال برای به‌دست آوردن ثابت زمانی خازن ۱ فارادی کافی است مقاومت معادل دیده شده از دو سر آن را به‌دست آوریم:

$$R_{eq} = ۱۰ + ۲۰ \| ۲۰ = ۲۰\ \Omega$$

بنابراین داریم: $\quad \tau = R_{eq}C = ۲۰\times۱ = ۲۰\sec$

البته از دید خازن ۰/۵ فارادی هم پل وتسون برقرار است که با شرط داشتن شرایط اولیه ثابت زمانی زیر ظاهر می‌شود:



$$\Rightarrow \tau = R_{eq}C = (۱۰+۱۰) \| (۱۰+۱۰) \times ۰/۵ = ۵\sec$$

بنابراین بزرگ‌ترین ثابت زمانی مدار ۲۰ ثانیه می‌باشد.

۴ـ گزینه «۴» از مجموع پاسخ پله و پاسخ ضربه و پاسخ ورودی صفر مشاهده می‌شود که مدار از مرتبه‌ی اول می‌باشد. بنابراین داریم:

پاسخ پله $M(t)=y(\infty)(۱-e^{-t})$

پاسخ ضربه: $h(t)=\dfrac{dM(t)}{dt}=y(\infty)\,e^{-t} \quad\Rightarrow M(t)+k(t)+h(t)=y(\infty)+y(۰)\,e^{-t}$

پاسخ ورودی صفر: $k(t)=y(۰)\,e^{-t}$

بنابراین:

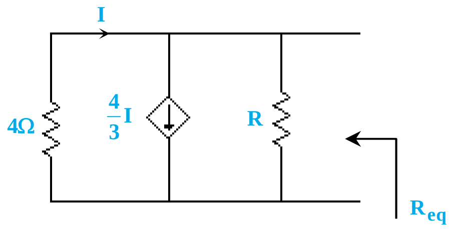
$$۱-e^{-t}=y(\infty)+y(۰)e^{-t} \;\Rightarrow\; y(\infty)=۱ \quad,\quad y(۰)=-۱$$

حال معادله‌ی زمان پاسخ کامل را به‌دست می‌آوریم:

$$y(t)=y(\infty)+(y(۰)-y(\infty))e^{-t}=۱-۲e^{-t} \xrightarrow{t=۰} y(۰)=-۱$$

البته بدون نوشتن معادله‌ی زمانی پاسخ کامل هم می‌توانستیم پاسخ پله را در لحظه‌ی صفر به دست آوریم، چون قبل از آن $y(۰)$ را به دست آورده بودیم.

۵ـ گزینه «۴»



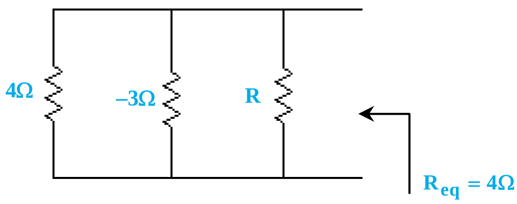
کافی است مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن ۲F را به‌دست آوریم.

برای این کار تمامی منابع را خنثی می‌کنیم:

از طرفی با توجه به مقدار ثابت زمانی (یعنی $\tau=RC=۸\,Sec$)، مقدار R_{eq} باید ۴ باشد.

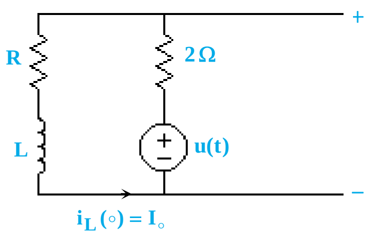
$$R_{\text{منبع جریان وابسته}}=\frac{-۴I}{\frac{۴}{۳}I}=-۳\,\Omega$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \underbrace{۴\,||(-۳)}_{-۱۲}||\;R=۴ \;\Rightarrow\; \frac{-۱۲R}{R-۱۲}=۴ \;\Rightarrow\; R=۳\Omega$$

۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه معادله‌ی $v(t)$ از نوع پاسخ مدار مرتبه‌ی اول است، پس شبکه‌ی N می‌تواند یک مدار RL سری باشد.



$$v(t)=\frac{۴}{۳}(۱-e^{-\frac{۳}{۲}t})$$

$$v(\infty)=\frac{۴}{۳} \xrightarrow[\text{اتصال کوتاه است}]{\text{سلف در بی‌نهایت}} \frac{R}{R+۲}\times۱=\frac{۴}{۳} \;\Rightarrow R=-۸\,\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R+۲}=\frac{۲}{۳} \quad\Rightarrow\quad L=-۴H$$

$$V(۰^+)=۰\to -۱+۲i_L(۰^+)=۰\to i_L(۰^+)=۰/۵A$$

حال اگر مقاومت ۲ اهمی با مقاومت ۴ اهمی جایگزین شود، خواهیم داشت:

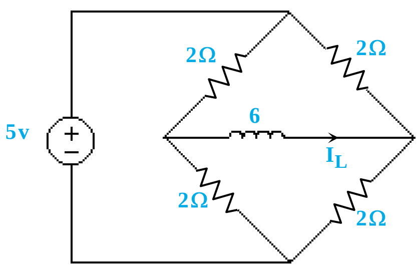
$$R_{eq}\,(\text{از دید سلف})=-۸+۴=-۴\Omega \Rightarrow \tau=\frac{L}{R}=\frac{-۴}{-۴}=۱sec$$

$$v(۰)=-۱+۴\times i_L(۰)=۱$$

$$v(\infty)=\frac{-۸}{-۸+۴}\times۱=۲ \quad\to\quad v(t)=۲(۱-e^{-t})+۱=۳-۲e^{-t}v$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به پیوستگی جریان سلف، جریان آن را در زمان ۰^- به دست می‌آوریم:

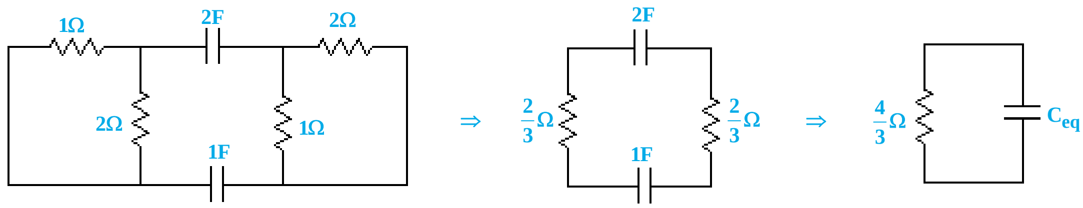
$t<۰:$



با توجه به وجود پل وتسون، از سلف مورد نظر جریانی عبور نمی‌کند. بنابراین:

$i_L(۰^-)=$

۸ـ گزینه «۳» این مدار، یک مدار مرتبه دو است؛ اما باید دقت کرد که می‌توان آن را به شکل یک مدار مرتبه اول مدل نمود. ثابت زمانی این مـدار مرتبـه اول را می‌توان با غیرفعال نمودن منابع مدار به شکل زیر محاسبه کرد:

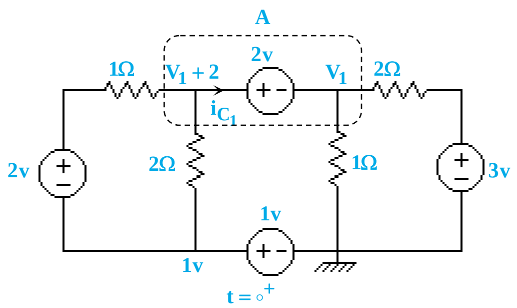


$$C_{eq}=\frac{۲\times۱}{۲+۱}=\frac{۲}{۳}F \qquad \tau=RC_{eq}=\frac{۴}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۹}sec$$

حال برای محاسبه $V_{C_۱}(t)$ باید مقدار $V_{C_۱}(\infty)$ را نیز داشته باشیم تا بتوانیم براساس رابطه‌ای که بلدیم، $V_{C_۱}(t)$ را محاسبه کنیم.

اما با توجه به اینکه دو خازن مدار سری هستند، محاسبه $V_{C_۱}(\infty)$ به روش معمول چندان ساده نیست؛ لذا سعی می‌کنیم به‌جای ولتاژ خازن $C_۱$، جریان آن را محاسبه کرده و سپس از روی آن مقدار ولتاژ را به‌دست آوریم.

مقدار نهایی جریان خازن مشخصاً صفر است، زیرا خازن در نهایت مدار باز می‌شود. حال مقدار اولیه جریان خازن را با توجه به مدار مقابل محاسبه می‌کنیم:



با نوشتن رابطه KCL در ابرگره A داریم:

$$\frac{V_۱+۲-(۱+۲)}{۱}+\frac{V_۱+۲-۱}{۲}+\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۱-۳}{۲}=۰ \Rightarrow ۳V_۱-۲=۰ \Rightarrow V_۱=\frac{۲}{۳}v$$

$$i_{C_۱}=\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۱-۳}{۲}=\frac{۲}{۳}-\frac{۷}{۶}=-\frac{۱}{۲}A$$

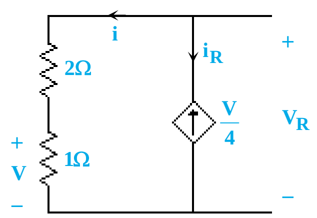
لذا می‌توان نوشت:

$$i_{C_۱}(t)=i_{C_۱}(۰^+)e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۹}{۸}t}$$

$$V_{C_۱}(t)=\frac{۱}{۲}\int_۰^t i_{C_۱}(t)dt+V_{C_۱}(۰)=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۹}e^{-\frac{۹}{۸}t}\Big|_۰^t\right)+۲=\frac{۲}{۹}(e^{-\frac{۹}{۸}t}-۱)+۲=\frac{۲}{۹}(۸+e^{-\frac{۹}{۸}t}) \Rightarrow V_{C_۱}(t)=\frac{۲}{۹}(۸+e^{-\frac{۹}{۸}t})$$

دقت کنید که برای حل تست می‌توانستیم از همان ابتدا، مدار را با تبدیل منابع ساده کنیم و بعد تحلیل‌ها را انجام دهیم. در هر صورت انتخاب روش حل در چنین تست‌هایی بستگی به خود داوطلب دارد.

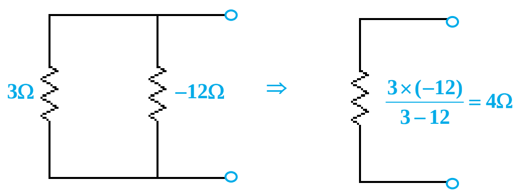
۹ـ گزینه «۲» با توجه به وجود دو کلید در مدار، سـه وضـعیت مختلـف بـر مـدار حـاکم خواهد بود که با تحلیل هر وضعیت می‌توان مدار را در زمان‌های مختلف تحلیل کرد. قبـل از تحلیل مدار برای ساده‌تر شدن محاسبات می‌توان منبع جریان وابسته را با یک مقاومت مدل و جایگزین کرد. مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$i=\frac{V}{۱}=V \quad , \quad V_R=۲i+V=۳V$$

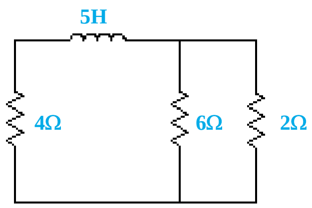
$$R=\frac{V_R}{i_R}=\frac{۳V}{-\frac{V}{۴}}=-۱۲\Omega$$

لذا در سمت چپ مدار، مقاومتی به شکل مقابل خواهیم داشت:



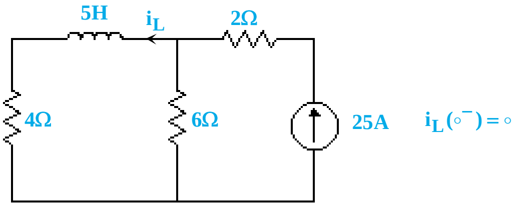
حال مدار را در $t<۰$ در نظر بگیرید (دقت کنید که در این حالت جریانِ منبع جریانِ ۲۵ آمپری به‌طور کامل از $S_۱$ عبور می‌کند و لذا این منبع تأثیری در مقدار جریان سلف ندارد.)

از آنجایی‌که مدار منبع مستقل فعالی ندارد، سلف شارژ نشده و جریان آن صفر خواهد بود.



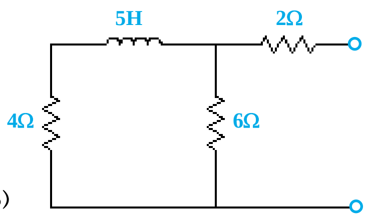
$t<۰$

اکنون زمان $۰<t<۰/۲۵$ را در نظر گرفته و مدار را مدل می‌کنیم:

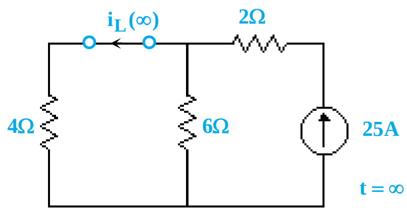


$۰<t<0.25$

دقت کنید که مدار عاری از منبع ضربه‌ای بوده و داریم: $i_L(۰^+)=i_L(۰^-)=۰$. حال برای تحلیل این مدار، ثابت زمانی آن و مقدار $i_L(\infty)$ را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی ثابت زمانی، منبع جریان مدار را غیرفعال کرده و مقاومت مدار را از دو سر L محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی $i_L(\infty)$ نیز، سلف را اتصال کوتاه می‌کنیم.



(محاسبه‌ی τ)



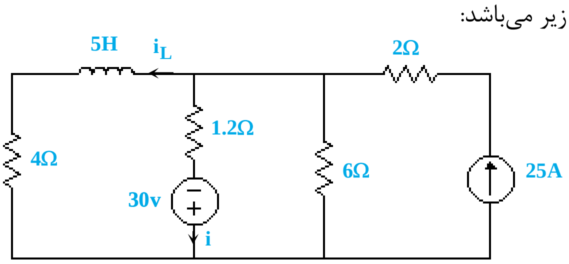
$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{۵}{۴+۶}=۰/۵sec \qquad i_L(\infty)=\frac{۶}{۴+۶}\times ۲۵=۱۵A$$

لذا داریم:

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(۰^+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=۱۵(۱-e^{-۲t})$$

$$i_L(t=۰/۲۵)=۱۵(۱-e^{-۲\times۰/۲۵})\cong ۱۵(۱-۰/۶)=۶A$$

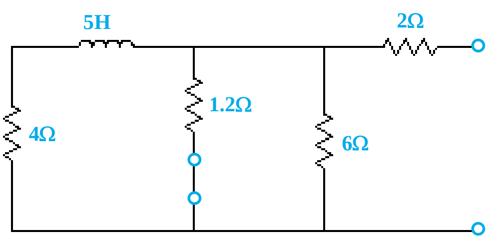
حال مدار را برای زمان‌های $t>۰/۲۵$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان‌ها مدار به شکل زیر می‌باشد:



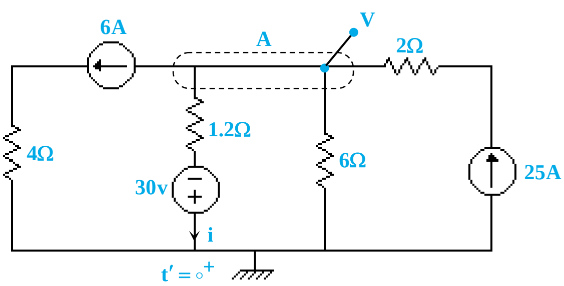
$t>0.25$

$$i_L(t'=۰^-)=i_L(t'=۰^+)=۶A$$
$$(t'=t-۰/۲۵)$$

حال باید مقادیر τ، $i(t'=۰^+)$ و $i(t'=\infty)$ را محاسبه کنیم:



$$\tau=\frac{۵}{۴+۶||۱/۲}=\frac{۵}{۵}=۱sec$$

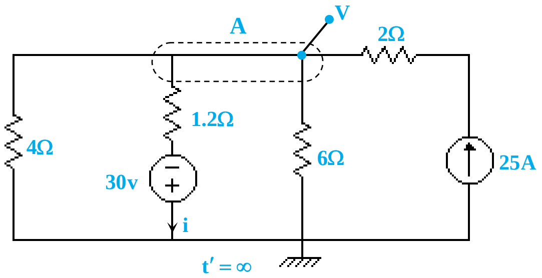


$t'=۰^+$

$$KCL\ A:\frac{V+۳۰}{۱/۲}+\frac{V}{۶}+۶-۲۵=۰\Rightarrow V=-۶v$$

$$\Rightarrow i=\frac{V+۳۰}{۱/۲}=۲۰A$$

$$\Rightarrow i(t'=۰^+)=۲۰A$$



$$KCLA: \frac{V}{۴}+\frac{V+۳۰}{۱/۲}+\frac{V}{۶}-۲۵=۰ \Rightarrow V=۰$$

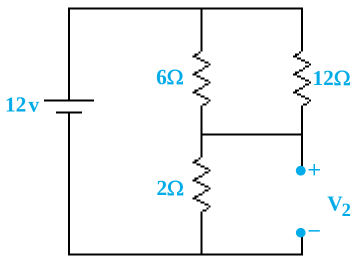
$$\Rightarrow i=\frac{V+۳۰}{۱/۲}=۲۵A$$

$$\Rightarrow i(t'=\infty)=۲۵A$$

در نتیجه داریم:

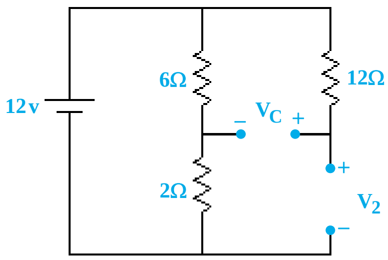
$$i(t')=۲۵+(۲۰-۲۵)e^{-t'}=۲۵-۵e^{-t'} \Rightarrow i(t)=۲۵-۵e^{-(t-۰/۲۵)} \qquad (t>۰/۲۵sec)$$

۱۰ـ گزینه «۴» از آنجایی که در صورت سؤال فرض شده است کـه کلیـد $S_۲$ همیشـه بـاز است، لذا مقاومت ۶ اهمی سری با آن از مـدار حـذف مـی‌شـود. حـال بـا بسـتن کلیـد $S_۱$ در $t=۰$، چون ولتاژ اولیه‌ی خازن صفر است، خازن اتصال کوتاه شده و مدار مطابق شـکل زیر ساده می‌گردد.



$$\Rightarrow V_۲=\frac{۲}{۲+۶\|۱۲}\times ۱۲=\frac{۲}{۲+۴}\times ۱۲=۴V$$

در بی‌نهایت خازن باز شده و مدار مطابق شکل زیر می‌گردد. مشاهده می‌شود که با باز شدن خازن، هـیچ جریـانی از مقاومـت ۱۲ اهمـی عبـور نمـی‌کنـد و لذا $V_۲=۱۲v$ خواهد بود. ضمن اینکه مقاومت دیده شده از ۲ سر خازن نیز برابر خواهد بود با:



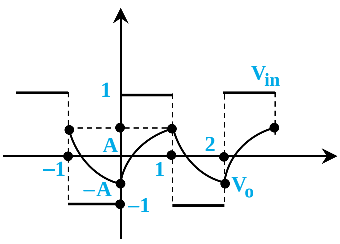
$$R_{eq}=۲\|۶+۱۲=۱۳/۵\Omega \to \tau=RC=۱/۳۵sec$$

بنابراین داریم:

$$V_۲(t)=V_۲(\infty)+[V_۲(۰)-V_۲(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=۱۲-۸e^{-\frac{t}{۱/۳۵}}$$

$$\Rightarrow V_۲(t)=۹v \to t=۱/۳۵\ln(\frac{۸}{۳})\simeq ۱/۳۵S$$

۱۱ـ گزینه «۳» از آنجایی که مدار از زمان‌های طولانی به منبع V_{in} وصل بوده اسـت، مـی‌تـوان گفت که مقدار متوسط ورودی و خروجی باید برابر باشند. چون مقدار متوسط ورودی برابـر صـفر است، لذا مقدار متوسط V_o نیز باید صفر باشد. برای همین، مطابق شکل روبـه‌رو، ولتـاژ خروجـی حالت متقارنی نسبت به محور زمان به خود می‌گیرد:



حال اگر معادله‌ی ولتاژ خازن (یا همان V_o) را از لحظه‌ی صفر $(t=۰)$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$V_o(t)=V_C(\infty)+(V_C(۰)-V_C(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (۱)$$

فرض کرده‌ایم که در لحظه‌ی صفر ولتاژ خازن $-A$ ولت است. پس $V_C(۰)=-A$. از طرفی اگر مدار به صورت طولانی به ورودی $V_{in}=۱$ وصل می‌ماند، مطمئناً $V_o=۱$ می‌شد. پس $V_C(\infty)=۱$. ثابت زمانی مدار نیز برابر $\tau=RC=۱s$ می‌باشد. با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی (۱) داریم:

$$\xrightarrow{(۱)} V_o(t)=۱+(-A-۱)e^{-t}=۱-(A+۱)e^{-t}$$

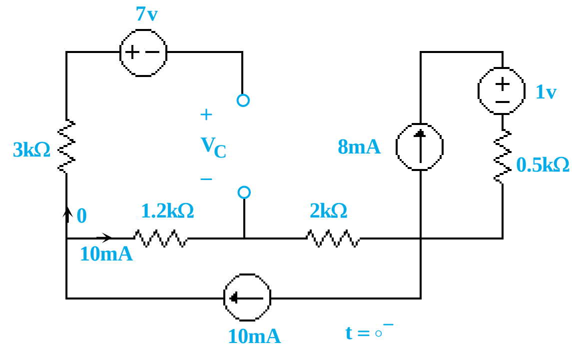
می‌دانیم که در زمان $t=۱$ ورودی به $V_{in}=-۱$ تغییر می‌یابد. پس لازم است ولتاژ شارژ شده‌ی خازن را در این لحظه $(t=۱)$ در معادله‌ی (۲) قرار دهیم:

$$\xrightarrow[V_o(۱)=A]{(۲)} A=۱-(A+۱)e^{-۱}=۱-۰/۶۳(A+۱) \Rightarrow ۱/۶۳A=۰/۳۷ \Rightarrow A=۰/۲۲۷ \Rightarrow V_o(t)=۱-۱/۲۲۷e^{-t}$$

مطابق شکل ولتاژ خازن در $t=۱$ حداکثر است. جریان در این لحظه برابر خواهد بود با:

$$I_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt}=۱/۲۲۷e^{-t} \xrightarrow{t=۱} I_C(۱)\simeq ۰/۷۷A$$

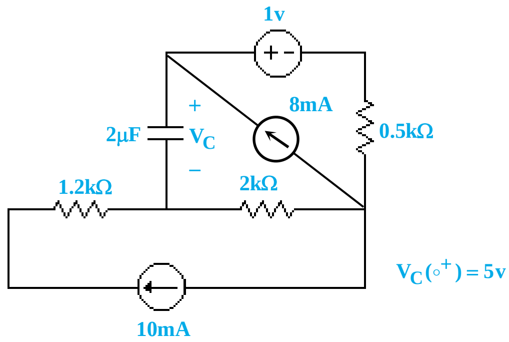
۱۲ـ گزینه «۱» برای حل تست، ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و ولتاژ اولیه خازن را محاسبه می‌کنیم. در این لحظه کلید در وضعیت a قرار داشته و مدار به شکل مقابل خواهد بود:



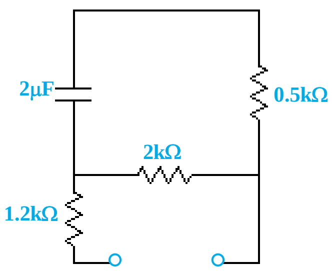
حال به راحتی می‌توان نوشت:

$$V_C(0^-)=1/2\times10^3\times10\times10^{-3}-7=12-7=5v$$

دقت کنید که به علت عدم وجود حلقه‌ی خازنی و منابع ضربه‌ای در مدار، ولتاژ خازن در لحظه‌ی $t=0$ تغییری نمی‌کند و داریم: $V_C(0^+)=V_C(0^-)=5v$
اکنون برای تحلیل مدار در زمان‌های $t>0$، مقادیر $V_C(\infty)$ و τ یا ثابت زمانی مدار را محاسبه می‌کنیم. در این حالت کلید در وضعیت b قرار گرفته است:



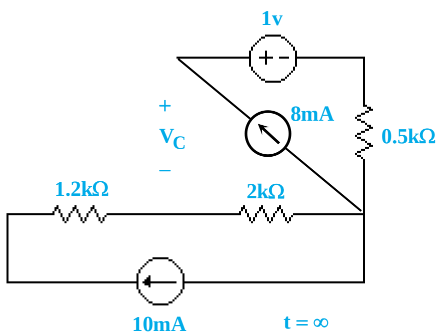
برای محاسبه ثابت زمانی می‌توان منابع مدار را غیرفعال کرد:



$$\tau=RC=(0/5+2)\times10^3\times2\times10^{-6}=5\,msec$$

مقدار $V_C(\infty)$ نیز با مدار باز نمودن خازن محاسبه می‌شود:

$$V_C(\infty)=1+8\times10^{-3}\times0/5\times10^3-2\times10^3\times10\times10^{-3}=-15\,v$$



حال می‌توان نوشت:

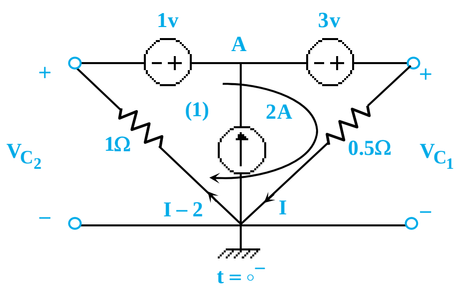
$$V_C(t)=V_C(\infty)+[V_C(0^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=-15+[5-(-15)]e^{-\frac{t}{5}}=-15+20e^{-\frac{t}{5}}$$

(t برحسب میلی‌ثانیه است)

$$V_C(t)=-14v\Rightarrow-15+20e^{-\frac{t}{5}}=-14\Rightarrow e^{-\frac{t}{5}}=\frac{1}{20}$$

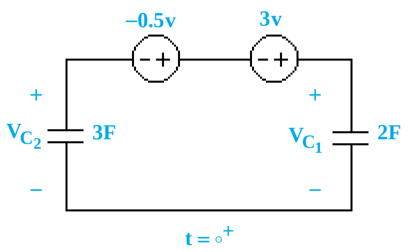
$$\Rightarrow\frac{t}{5}=-Ln(\frac{1}{20})=Ln20=2Ln2+Ln5\cong3\Rightarrow t=15\,msec$$

۱۳ـ گزینه «۱» ابتدا با تحلیل مدار در زمان $t=0^-$، شرایط اولیه خازن‌های موجود در مدار را به‌دست می‌آوریم. مطابق شکل با نوشتن رابطه KVL در حلقه (۱) داریم:



$$0/5I+I-2-1-3=0\Rightarrow I=\frac{6}{1/5}=4A$$

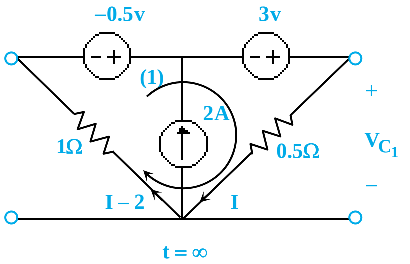
$$\Rightarrow\begin{cases}V_{C_2}(0^-)=-1\times(I-2)=-2v\\V_{C_1}(0^-)=0/5\times I=2v\end{cases}$$



حال مدار را در زمان‌های $t>0$ تحلیل می‌کنیم. ابتدا دقت کنید که مدار دارای یک حلقه خازنی بوده (و در نتیجه مرتبه یک است) و در این حلقه یک منبع ولتاژ پله‌ای وجود دارد که در لحظه صفر فعال می‌شود؛ لذا در $t=0$ ولتاژ خازن‌های مدار تغییر خواهد کرد. برای محاسبه ولتاژ خازن C_1 در لحظه $t=0^+$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$V_{C_1}(0^+)=\frac{C_2}{C_1+C_2}[V_S-V_{C_1}(0^-)+V_{C_2}(0^-)]+V_{C_1}(0^-)$$

$$=\frac{۳}{۲+۳}\times[۲/۵-۲-۲]+۲=۱/۱v$$

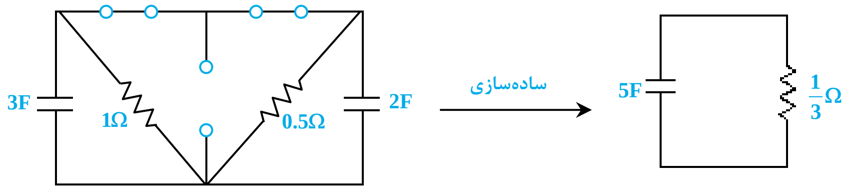


مقدار $V_{C_1}(\infty)$ را نیز می‌توان به‌راحتی محاسبه کرد:

$$KVL(۱):۰/۵I+I-۲+۰/۵-۳=0\Rightarrow I=\frac{۴/۵}{۱/۵}=۳A$$

$$V_{C_1}(\infty)=۰/۵I=۱/۵v$$

ثابت زمانی مدار را نیز می‌توان با غیرفعال نمودن منابع به راحتی محاسبه کرد:

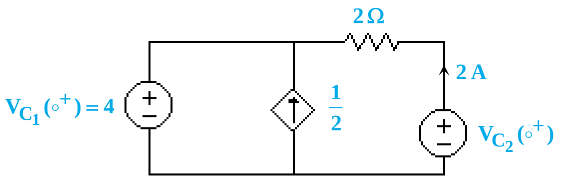


$$\Rightarrow \tau=۵\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}sec$$

در نهایت داریم:

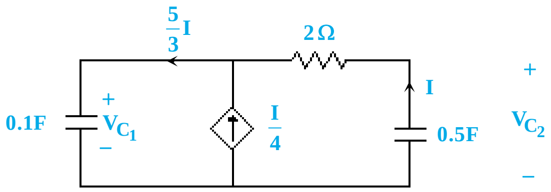
$$V_{C_1}(t)=V_{C_1}(\infty)+[V_{C_1}(0^+)-V_{C_1}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=۱/۵+[۱/۱-۱/۵]e^{-۰/۶t}=۱/۵-۰/۴e^{-۰/۶t}$$

۱۴ـ گزینه «۴» **روش تشریحی:** ابتدا شرایط اولیه مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow v_{C_2}(0^+)=۲\times۲+۴=۸\ v$$

حال با اعمال KVL در حلقه‌ی بیرونی مدار مقدار $I(t)$ را به‌دست می‌آوریم:



$$v_{C_1}(t)=v_{C_1}(0^+)+\frac{۱}{۰/۱}\int_0^t\frac{۵}{۴}I\,dt$$

$$v_{C_2}(t)=v_{C_2}(0^+)+\frac{۱}{۰/۵}\int_0^t(-I)\,dt$$

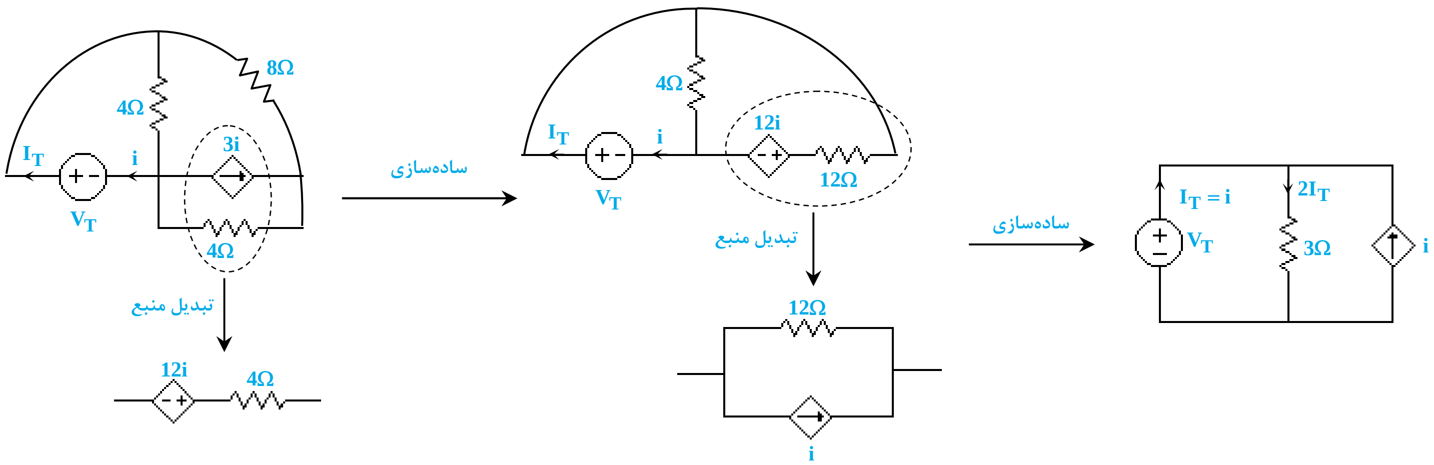
$$KVL:-v_{C_1}(t)-۲I+v_{C_2}(t)=0\Rightarrow\ -۴-۱۰\int_0^t\frac{۵}{۴}I\,dt-۲I+۸-۲\int_0^t I\,dt=0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}}\begin{cases}\frac{d}{dt}I+\frac{۲۹}{۴}I=0\\ I(0^+)=۲\end{cases}\Rightarrow\ I(t)=۲e^{-۷/۲۵\,t}\ \Rightarrow\ v(t)=v_{C_1}(t)=۴+\frac{۵۰}{۴}\int_0^t ۲e^{-۷/۲۵\,t}\,dt$$

$$v(t)=۴+\frac{۲۵}{۷/۲۵}(1-e^{-۷/۲۵t})=۷/۴۵-۳/۴۵e^{-۷/۲۵\,t}$$

روش تستی: با بررسی شرط اولیه‌ی $v(0^+)=۴$ به راحتی می‌توان به گزینه‌ی ۴ رسید.

۱۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم در یک مدار مرتبه اول که فاقد منبع مستقل است، در زمان $t=\tau Ln۲$ ثانیه، ولتاژ خازن یا جریان سلف به نصف مقدار اولیه خود می‌رسند. مدار مورد سؤال در اینجا نیز زمانی که کلید باز می‌شود، فاقد تغذیه بوده و در گزاره فوق صدق خواهد نمود، به شرط آنکه مبدأ زمانی به لحظه‌ی باز شدن کلید منتقل گردد. لذا برای پاسخگویی به تست تنها نیاز است، مقدار τ یا ثابت زمانی مدار را محاسبه نماییم. مطابق شکل زیر مقاومت دیده شده از دو سر خازن را بعد از باز شدن کلید محاسبه می‌کنیم:



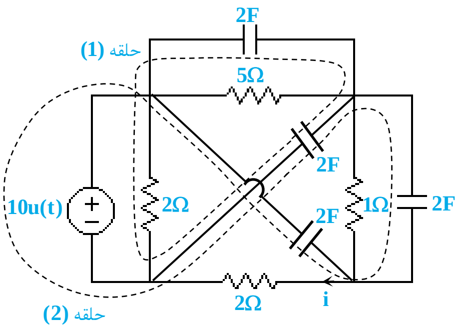
$$V_T = 3\times(2I_T) = 6I_T \Rightarrow R = 6\Omega$$

لذا ثابت زمانی مدار برابر است با:

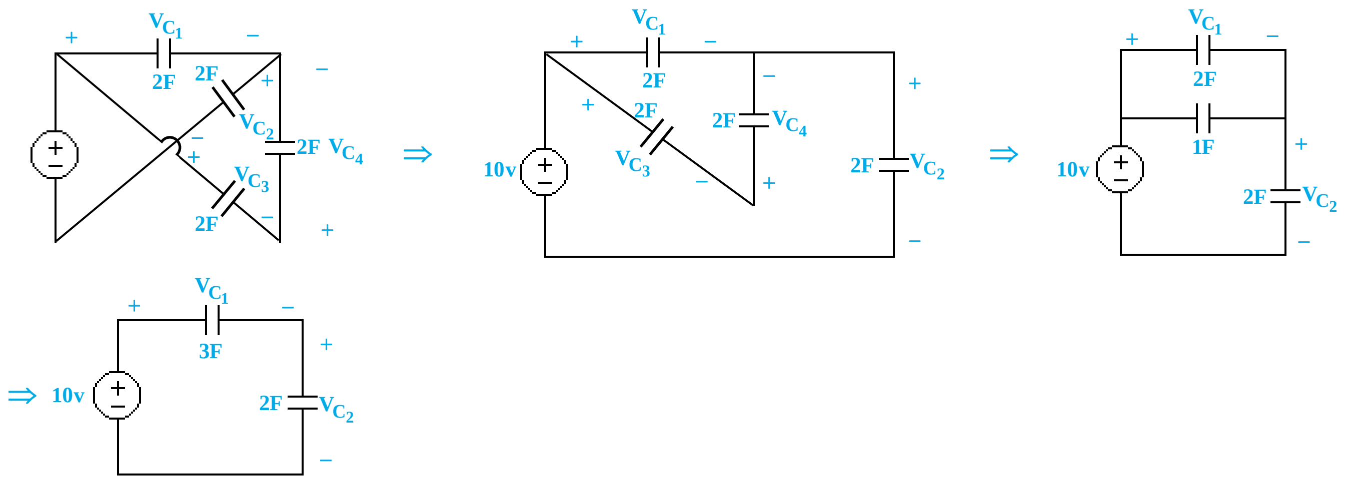
$$\tau = RC = 6\times\frac{1}{9} = \frac{2}{3}\sec$$

و در نتیجه پس از گذشت زمان $\frac{2}{3}\text{Ln}2$ ثانیه از باز شدن کلید S، ولتاژ خازن نصف خواهد شد.

۱۶ـ گزینه «۳» با کمی دقت مشخص است که دو حلقه خازنی در مدار وجـود دارد و لذا انتظار داریم ولتاژ خازن‌ها در $t = 0^+$ تغییر کند.



برای محاسبه ولتاژ خازن‌ها می‌توان آنها را با اتصال کوتاه مدل نمود و لذا مقاومت‌های مدار هیچ تأثیری در مقدار ولتاژ خازن‌ها در لحظه $t = 0^+$ ندارد. حال مطابق شکل زیر داریم:



حال طبق رابطه‌ای که در درسنامه فصل دوم دیدیم، برای دو خازن سری با ولتاژ اولیه‌ی صفر، داریم:

$$V_{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\times V_S \quad , \quad V_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\times V_S$$

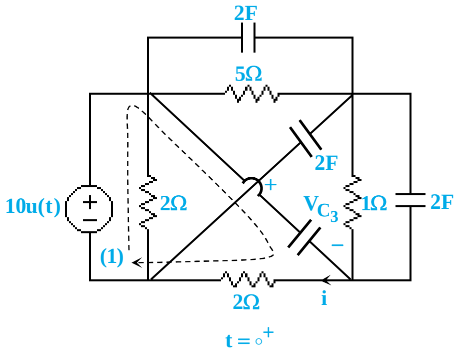
در نتیجه می‌توان نوشت:

$$V_{C_1} = \frac{2}{3+2}\times 10 = 4\text{v} \quad , \quad V_{C_2} = \frac{3}{3+2}\times 10 = 6\text{v}$$

همچنین می‌توان نوشت:

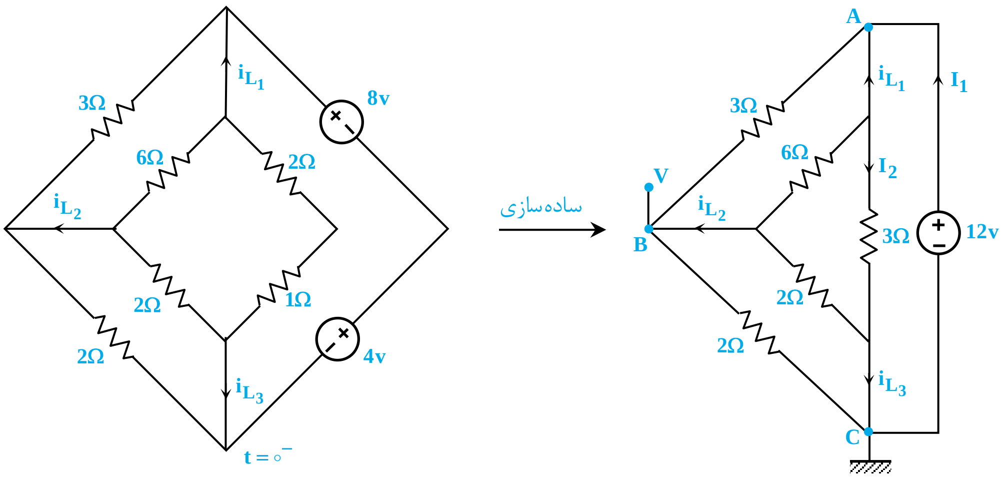
$$V_{C_3} = V_{C_4} = \frac{1}{2}\times V_{C_1} = 2\text{v}$$

در نهایت مطابق شکل مقابل داریم:



$$KVL(۱): i = \frac{۱۰ - V_{C_۳}}{۲} = \frac{۱۰ - ۲}{۲} = ۴A$$

۱۷ـ گزینه «۲» انرژی ذخیره شده در سلف‌ها به جریانشان بستگی داشته و لذا در این تست باید مقدار جریان سلف‌ها در $t = ۰^+$ محاسبه شود. با توجه به اینکه مقدار جریان سلف‌ها در لحظه‌ی $t = ۰^+$ وابسته به مقدارشان در لحظه‌ی $t = ۰^-$ است، لذا ابتدا مدار را در $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم:

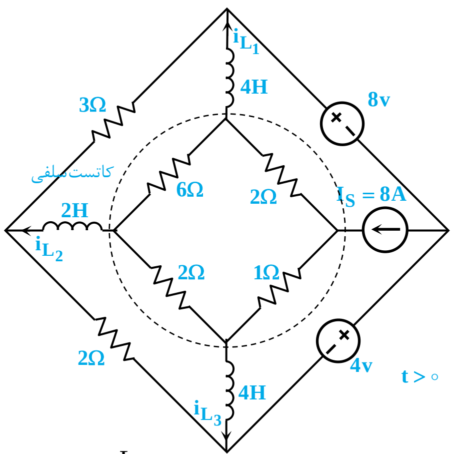


$$V = \frac{۲||۲}{(۲||۲)+(۳||۶)} \times ۱۲ = \frac{۱}{۳} \times ۱۲ = ۴v \quad , \quad I_۱ = \frac{۱۲}{۳||(۲+۱)} = \frac{۱۲}{۱/۵} = ۸A$$

$$KCL\,A: i_{L_۱}(۰^-) = \frac{۱۲ - V}{۳} - I_۱ = \frac{۱۲-۴}{۳} - ۸ = \frac{۸}{۳} - ۸ = -\frac{۱۶}{۳}A$$

$$KCL\,B: i_{L_۲}(۰^-) = \frac{V-۱۲}{۳} + \frac{V-۰}{۲} = -\frac{۸}{۳} + \frac{۴}{۲} = -\frac{۲}{۳}A \quad , \quad KCL\,C: i_{L_۳}(۰^-) = I_۱ - \frac{V-۰}{۲} = ۸ - ۲ = ۶A$$

حال مدار را در $t = ۰$ تحلیل می‌کنیم. دقت کنید که در این لحظه، سلف‌های مدار به همراه منبع جریان یک کاتست تشکیل می‌دهند و در سلف‌ها جهش جریان خواهیم داشت.



بدون توجه به سایر عناصر مدار، می‌توان مقدار جریان سلف‌ها را در $t = ۰^+$ با استفاده از روابط زیر که در درسنامه فصل دوم کتاب آمده است، محاسبه کرد: $L_{eq} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}} = ۱H$

$$i_{L_۱}(۰^+) = \frac{L_{eq}}{L_۱}[I_S \overbrace{-i_{L_۱}(۰^-) - i_{L_۲}(۰^-) - i_{L_۳}(۰^-)}^{۰}] + i_{L_۱}(۰^-) = \frac{۱}{۴} \times ۸ - \frac{۱۶}{۳} = -\frac{۱۰}{۳}A$$

$$i_{L_۲}(۰^+) = \frac{L_{eq}}{L_۲} \times [I_S - ۰] + i_{L_۲}(۰^-) = \frac{۱}{۲} \times ۸ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۰}{۳}A$$

$$i_{L_۳}(۰^+) = \frac{L_{eq}}{L_۳} \times [I_S - ۰] + i_{L_۳}(۰^-) = \frac{۱}{۴} \times ۸ + ۶ = ۸A$$

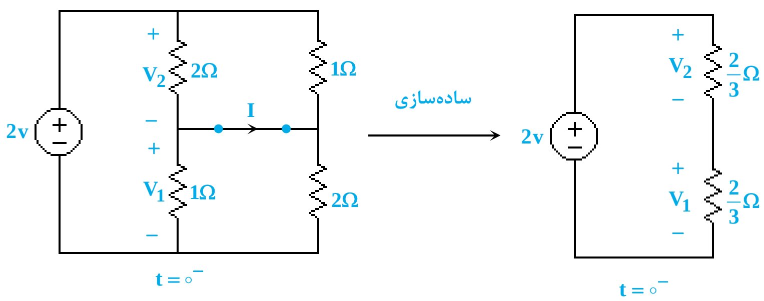
در نهایت داریم:

$$W_T = W_{L_۱} + W_{L_۲} + W_{L_۳}$$

$$W_{L_۱} = \frac{۱}{۲} L_۱ i_{L_۱}^۲(۰^+) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times (-\frac{۱۰}{۳})^۲ = \frac{۲۰۰}{۹}J \quad , \quad W_{L_۲} = \frac{۱}{۲} L_۲ i_{L_۲}^۲(۰^+) = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times (\frac{۱۰}{۳})^۲ = \frac{۱۰۰}{۹}J$$

$$W_{L_۳} = \frac{۱}{۲} L_۳ i_{L_۳}^۲(۰^+) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸^۲ = ۱۲۸J \quad , \quad W_T = \frac{۲۰۰}{۹} + \frac{۱۰۰}{۹} + ۱۲۸ = \frac{۴۸۴}{۳}J$$

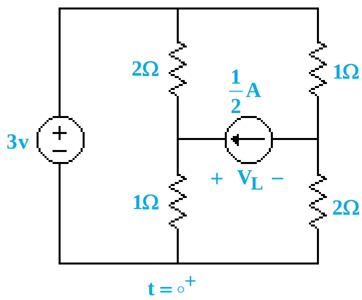
۱۸ـ گزینه «۴» مطابق معمول برای حل چنین تست‌هایی، ابتدا با تحلیل مدار در $t = 0^-$، شرایط اولیه را محاسبه می‌کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



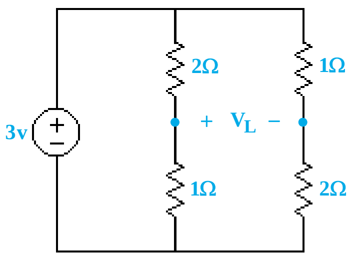
$$V_1 = V_2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1\,v$$

$$I = \frac{V_2}{2} - \frac{V_1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,A$$

با محاسبه‌ی مقدار $I(0^-)$، می‌توان گفت که به علت عدم وجود کاتست سلفی و منبع ضربه‌ای در مدار داریم $I(0^+) = I(0^-)$ و لذا مقدار $I(0^+)$ نیز برابر $-\frac{1}{2}$ آمپر است. حال مدار را در لحظه‌ی $t = 0^+$ در نظر گرفته و ولتاژ دو سر سلف را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور از جمع آثار استفاده می‌کنیم.

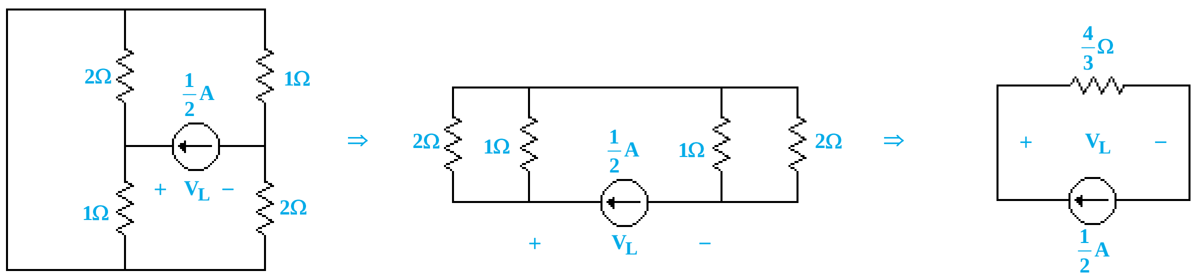


ابتدا با خاموش کردن منبع جریان، مقدار V_L ناشی از منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قاعده‌ی تقسیم ولتاژ داریم:



$$V_L = \left(\frac{1}{1+2} - \frac{2}{1+2}\right) \times 3 = -\frac{1}{3} \times 3 = -1\,v$$ ناشی از منبع ولتاژ

این بار منبع ولتاژ را خاموش کرده و اثر منبع جریان را محاسبه می‌کنیم:



$$V_L = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\,v$$ ناشی از منبع جریان

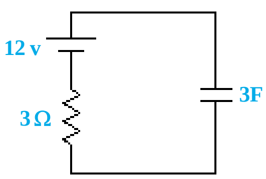
حال می‌توان نوشت:

$$V_L(0^+) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\,v$$

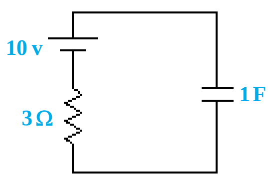
$$\frac{dI}{dt}(0^+) = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}\,\frac{A}{sec}$$

۱۹ـ گزینه «۳» با تحلیل مدار در زمان‌های منفی، ابتدا شرایط اولیه‌ی دو خازن را به‌دست می‌آوریم (دقت کنید خازن در لحظه‌ی $t = 0^-$ به حالت دائمی رسیده و مدار باز می‌شود):

$t < 0$:

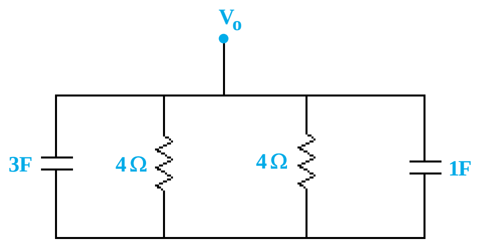


$\Rightarrow \quad v_{C_1}(0^-) = 12\,v$



$\Rightarrow \quad v_{C_2}(0^-) = 10\,v$

حال مدار در زمان $t>\circ$ به صورت زیر است.



با توجه به مدار مشاهده می‌شود که خازن‌های ۱F و ۳F با هم موازی هستند. از آنجا که شرایط اولیه‌ی آن‌ها متفاوت می‌باشد، پس از موازی شدن به یک ولتاژ یکسان می‌رسند که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$v_C(\circ^+)=\frac{C_۱v_{C_۱}(\circ^-)+C_۲v_{C_۲}(\circ^-)}{C_۱+C_۲}=\frac{۳\times۱۲+۱\times۱\circ}{۴}=\frac{۲۳}{۲}v$$

از طرفی با توجه به عدم وجود منبع مستقل در زمان‌های مثبت، ولتاژهای نهایی مدار در $t\to\infty$ برابر صفر می‌باشد. بنابراین:

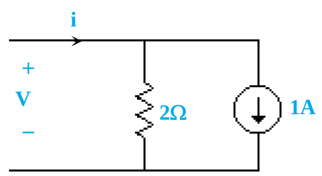
$$V_o(t)=V_o(\infty)+(V_o(\circ^+)-V_o(\infty))e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases}R(\text{از دید خازن معادل})=۴\parallel۴=۲\Omega\\ C(\text{خازن معادل موازی})=۱+۳=۴F\end{cases}\Rightarrow V_o(t)=\frac{۲۳}{۲}e^{-\frac{t}{۸}}=۱۱/۵\,e^{-\frac{t}{۸}}\,V$$

۲۰ـ گزینه «۳» برای حل سؤال باید رابطه V و i را از طریق شکل‌های داده شده پیدا کرده و سپس مدار معادلی برای آن بیابیم.

$$\text{در بازه } \circ<t<۲ \Rightarrow\begin{cases}V=-۲t+۴ & (۱)\\ i=-t+۳ & (۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{-V+۴}{۲}\\ t=-i+۳\end{cases}\Rightarrow -i+۳=\frac{-V+۴}{۲}\Rightarrow -۲i+۶=-V+۴\Rightarrow V=۲i-۲\quad(۳)$$

این رابطه می‌تواند بیانگر مدار معادل مقابل باشد:

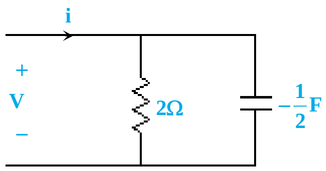


با توجه به اینکه ولتاژ منبع جریان همواره مثبت بوده و با در نظر گرفتن جهت منبع جریان، این منبع جریان همواره در حال دریافت توان است. همچنین چون مقاومت ۲Ω دارای مقدار مثبت است، این مقاومت هم همواره توان و انرژی دریافت می‌کند. پس کل شبکه N باید همواره در حال دریافت انرژی باشد. در صورتی که در بازه زمانی $۲<t<۳$، V منفی و i مثبت بوده و $V\times i$ منفی می‌باشد، شبکه N در حال تولید توان و انرژی است. پس شبکه باید علاوه بر مقاومت دارای المانی همچون خازن یا سلف باشد که در برخی از زمان‌ها شارژ و در برخی زمان‌های دیگر دشارژ شوند.

اگر خازن داشته باشیم، نیاز به داشتن V' داریم. از رابطه (۱) داریم: $V'=-۲$

$$\Rightarrow V=۲i-۲\ ,\ V'=-۲\Rightarrow V=۲i+V'\Rightarrow i=\frac{V-V'}{۲}$$

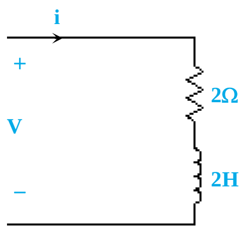
$\Rightarrow$ مدار معادل :



چون مقدار ظرفیت خازن منفی است پس قابل قبول نیست.

اگر سلف داشته باشیم، نیاز به داشتن i' داریم. از رابطه (۲) داریم: $i'=-۱$

$V=۲i-۲\Rightarrow V=۲i+۲i'\Rightarrow$ مدار معادل :



چون مقادیر به دست آمده برای سلف و مقاومت مثبت است، پس این مدار معادل قابل قبول است.

$$\text{انرژی مصرفی مقاومت در بازه زمانی } ۱<t<۲ = W_R=\int_۱^۲ i_R(t)\times V_R(t)dt=\int_۱^۲ i(t)\times۲i(t)dt=۲\times\int_۱^۲ i^۲(t)dt=۲\times\int_۱^۲(-t+۳)^۲dt$$

$$=۲\times\int_۱^۲(t^۲+۹-۶t)dt=۲\times[\frac{۷}{۳}+۹-۳\times۳]=\frac{۱۴}{۳}\Rightarrow W_R=\frac{۱۴}{۳}\ \text{ژول}$$

انرژی مصرفی شبکه N در بازه زمانی $1<t<2$ $= W_N = \int_1^2 V(t)\times i(t)dt = \int_1^2 (-2t+4)\times(-t+3)dt$

$$= \int_1^2 (2t^2-10t+12)dt = 2\times\frac{7}{3}-5\times3+12=\frac{5}{3} \Rightarrow W_N=\frac{5}{3}$$ ژول

انرژی مصرفی سلف در بازه زمانی $1<t<2$ $= W_L$ $W_N = W_R + W_L \Rightarrow \frac{5}{3}=\frac{14}{3}+W_L \Rightarrow W_L=-3$ ژول

پس سلف در این بازه زمانی ۳− ژول مصرف یا به عبارتی ۳ ژول تولید می‌کند. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۲۱ـ گزینه «۳» ابتدا ولتاژ خازن را در لحظه $t=160\,\mu s$ به دست می‌آوریم. بدین منظور مساحت زیر نمودار جریان خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_I = (40\times25+40\times10+40\times25+40\times0)\times10^{-6} = 2/4\times10^{-3}$$

حال داریم:

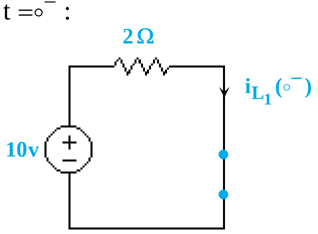
$$V_C(t=160\,\mu s) = V_C(t=0)+\frac{1}{C}\times S_I = 40+\frac{1}{10^{-5}}\times2/4\times10^{-3} = 280\,v$$

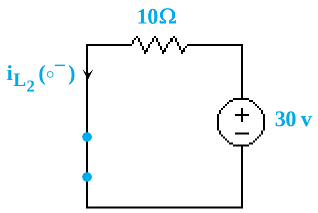
اکنون انرژی ذخیره شده در خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_C=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\times10^{-5}\times280^2=0/392J=392mJ$$

۲۲ـ گزینه «۳» ابتدا با تحلیل مدار برای زمان‌های منفی مقدار جریان سلف‌ها را در لحظه‌ی 0^- به‌دست می‌آوریم:

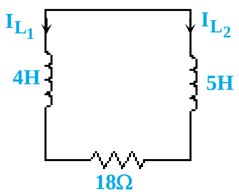
$t=0^-$:





$$\Rightarrow i_{L_1}(0^-)=i_{L_1}(0^+)=\frac{10}{2}=5A$$

$$i_{L_2}(0^-)=i_{L_2}(0^+)=\frac{30}{10}=3A$$



حال در زمان‌های مثبت سلف‌ها با هم سری می‌شوند، بنابراین باید جریان اولیه‌ی معادلشان را به‌دست آوریم:

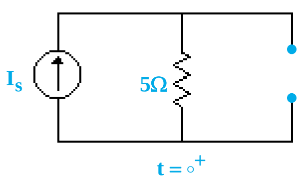
(توجه شود که چون جهت جریان سلف L_2 در خلاف جهت $I(t)$ می‌باشد، آن را منفی در نظر می‌گیریم).

$$I_L(0^+)=\frac{L_1I_{L_1}(0)+L_2I_{L_2}(0)}{L_1+L_2}=\frac{4\times5-5\times3}{9}=\frac{5}{9}A$$

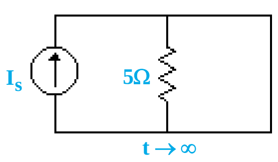
با توجه به اینکه در مدار مربوط به $t>0$ منبع مستقل وجود ندارد، بنابراین $I(\infty)$ برابر صفر می‌باشد. با استفاده از فرم پاسخ مدار مرتبه‌ی اول داریم:

$$I(t)=I(\infty)+(I(0)+I(\infty))\,e^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow[L=9H]{R=18\Omega} I(t)=\frac{5}{9}e^{-\frac{18}{9}t}=\frac{5}{9}e^{-2t}\,A$$

۲۳ـ گزینه «۳» معادله‌ی زمانی جریان سلف و جریان مقاومت را برحسب I_S می‌نویسیم:



$$\begin{cases} i_L(0^+)=0 \\ i_L(0^+)=I_S \end{cases} \rightarrow I_L(t)=I_S(1-e^{-\frac{5}{2/5}t})=I_S(1-e^{-2t})A$$



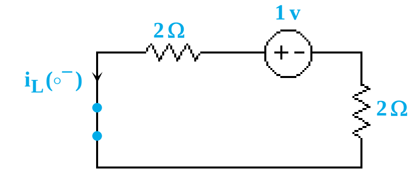
$$\begin{cases} i_R(0^+)=I_S \\ i_R(\infty)=0 \end{cases} \rightarrow i_R(t)=I_S\,e^{-2t}\,A$$

حال زمان برابر شدن مقدار جریان سلف و مقاومت را به‌دست می‌آوریم:

$$i_R(t)=i_L(t) \Rightarrow I_S\,e^{-2t}=I_S(1-e^{-2t}) \rightarrow t=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,2\,\mathrm{sec}$$

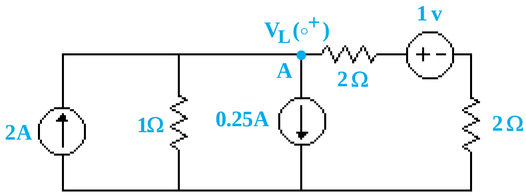
۲۴ـ گزینه «۳» ابتدا جریان سلف را در لحظه‌ی $t=\circ^-$ به دست می‌آوریم:

$t=\circ^-$:



$$\Rightarrow\ i_L(\circ^-)=\frac{۱}{۴}=\circ/۲۵\ A$$

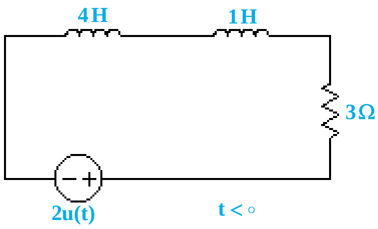
حال برای لحظه‌ی $t=\circ^+$ داریم:



$$KCL\ (A):\ -۲+\frac{V_C(\circ^+)}{۱}+\circ/۲۵+\frac{V_C(\circ^+)-۱}{۴}=\circ$$

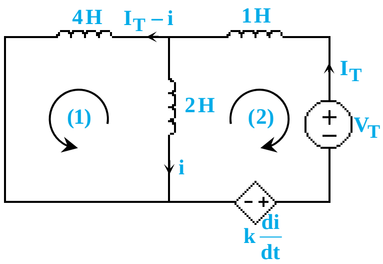
$$\Rightarrow ۵V_L(\circ^+)=۸\quad\Rightarrow\quad V_L(\circ^+)=\frac{dI_L(\circ^+)}{dt}=\frac{۸}{۵}v$$

۲۵ـ گزینه «۲» قبل از $t=\circ$ زمانی‌که کلید باز است، i صفر بوده و منبع ولتاژ وابسته خاموش است. در این حالت ثابت زمانی مدار به راحتی محاسبه می‌شود:



$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{۴+۱}{۳}=\frac{۵}{۳}s$$

در $t>\circ$ کلید بسته شده و منبع ولتاژ وابسته‌ی $k\frac{di}{dt}$ برقرار است. برای محاسبه‌ی ثابت زمانی، سلف معادل مدار را از دو سر مقاومت ۳ اهمی با استفاده از رابطه $V=L\frac{di}{dt}$ و با استفاده از منبع تست V_T که به‌جای مقاومت مدار قرار می‌گیرد، محاسبه می‌کنیم:



$$KVL\quad (۱):۲\frac{di}{dt}=۴\frac{d}{dt}(I_T-i)\ \Rightarrow\ \frac{di}{dt}=\frac{۲}{۳}\frac{dI_T}{dt}\qquad (۱)$$

$$KVL\quad (۲):-۲\frac{di}{dt}-\frac{dI_T}{dt}+V_T+k\frac{di}{dt}=\circ\ \xrightarrow{(۱)}$$

$$\frac{۲(k-۲)}{۳}\frac{dI_T}{dt}-\frac{dI_T}{dt}+V_T=\circ\ \Rightarrow V_T=\frac{۷-۲k}{۳}\frac{dI_T}{dt}\ \Rightarrow L=\frac{۷-۲k}{۳}$$

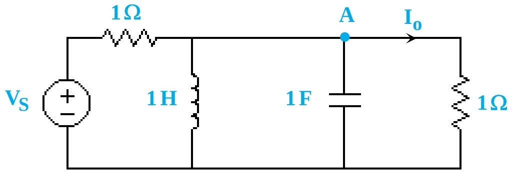
بنابراین ثابت زمانی مدار در $t>\circ$ برابر است با:

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{\frac{۷-۲k}{۳}}{۳}=\frac{۷-۲k}{۹}$$

حالت باید داشته باشیم:

$$\frac{۷-۲k}{۹}=\frac{۵}{۳}\ \Rightarrow ۷-۲k=۱۵\ \Rightarrow k=-۴$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل سوم



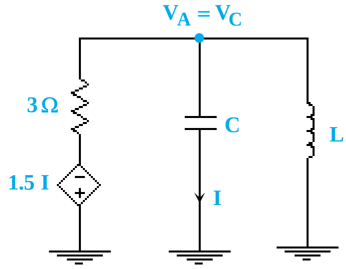
۱ـ گزینه «۱» با اعمال KCL در گره A داریم:

$$V_A = I_o \times 1 = I_o$$

$$KCL(A): I_o + \frac{dV_A}{dt} + i_L + \frac{V_A - V_S}{1} = 0$$

$$\Rightarrow I_o + \frac{dI_o}{dt} + i_L(0) + \int_0^t V_A dt + \frac{I_o - V_S}{1} = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d^2 I_o}{dt^2} + \frac{2dI_o}{dt} + I_o = \frac{dV_S}{dt}$$

۲ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره A، معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به مدار را می‌نویسیم:



$$KCL(A): i_L + \frac{CdV_C}{dt} + \frac{V_C + 1/5 I}{3} = 0$$

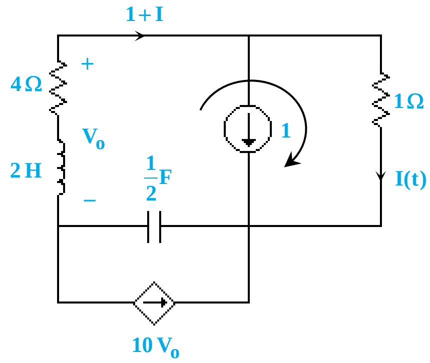
$$\Rightarrow i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V_C dt + \frac{CdV_C}{dt} + \frac{V_C + 1/5c\frac{dV_C}{dt}}{3} = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} 1/5C\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{dV_C}{3dt} + \frac{V_C}{L} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{dV_C}{4/5Cdt} + \frac{2}{3LC}V_C = 0 \Rightarrow \text{فرکانس تشدید}: \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3LC}}\,\frac{rad}{sec}$$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا جریان شاخه‌های مدار را مشخص می‌کنیم. سپس با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$t > 0$

$$KVL: 4\times(1+I) + 2\times\frac{d}{dt}(1+I) + I + V_C = 0$$



حال به ازای زمان $t = 0^+$ داریم (دقت کنید به علت عدم وجود منبع مستقل در زمان‌های منفی، شرایط اولیه‌ی سلف و خازن صفر است):

$$\begin{cases} V_C(0^+) = 0 \\ I_L(0^+) = 1 + I(0^+) = 0 \Rightarrow I(0^+) = -1 \end{cases}$$

$$KVL: 4\times(1+(-1)) + \frac{2d}{dt}I(0^+) + (-1) + 0 = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt}(0^+) = \frac{1}{2}$$

$$V_o = -4\times(1+I) - \frac{2d}{dt}(1+I) \Rightarrow V_o(0^+) = \frac{-2dI(0^+)}{dt} = -1$$

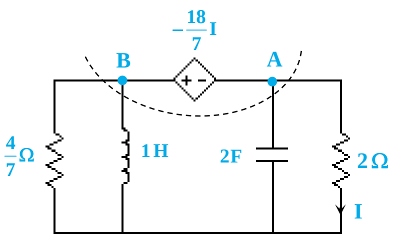
حال از معادله‌ی به‌دست آمده از KVL مشتق گرفته و $\frac{d^2I(0^+)}{dt^2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{4dI}{dt} + \frac{2d^2I}{dt^2} + \frac{dI}{dt} + \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2I(0^+)}{dt^2} = -\frac{5}{2}\frac{dI(0^+)}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dV_C(0^+)}{dt} \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$i_C = \frac{1}{2}\frac{dV_c}{dt} = 1 + I + 10V_o \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dV_C(0^+)}{dt} = -10\,v \xrightarrow{(1)} \frac{d^2I(0^+)}{dt^2} = -\frac{5}{4} + 10 = \frac{35}{4} = 8/75\,\frac{A^2}{sec^2}$$

۴ـ گزینه «۴» ابتدا ولتاژ گره‌های A و B را به‌دست می‌آوریم. سپس با اعمال KCL در کات‌ست نشان داده شده، معادله‌های دیفرانسیل مربوط به مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$v_A = 2I$$

$$v_B = \frac{-18}{7}I + 2I = \frac{-4}{7}I$$

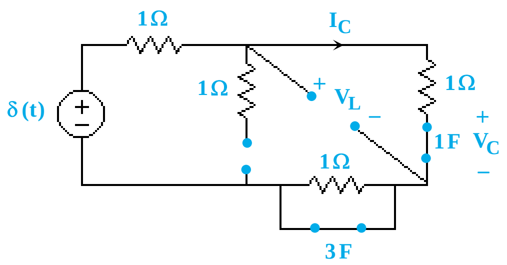
$$KCL: \frac{v_B}{\frac{4}{7}} + i_L + \frac{2d}{dt}(v_A) + I = 0 \Rightarrow \cancel{-I} + i_L + \frac{4dI}{dt} + \cancel{I} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{-i_L}{4} \qquad (1)$$

$$v_B = \frac{di_L}{dt} = \frac{-4}{7}I \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{d^2I}{dt^2} = \frac{I}{7} \rightarrow$$

از آنجایی که ضریب میرایی معادله صفر می‌باشد، بنابراین عملکرد مدار به صورت بدون اتلاف خواهد بود.

۵ـ گزینه «۴» با توجه به وجود منبع ولتاژ با تابع ضربه، برای محاسبه‌ی I_0 در لحظه‌ی صفر مثبت، کافی است سلف‌ها را در مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه کنیم. حال با به‌دست آوردن ولتاژ سلف با استفاده از رابطه‌ی زیر جریان سلف در لحظه‌ی $t=۰^+$ را به‌دست می‌آوریم:



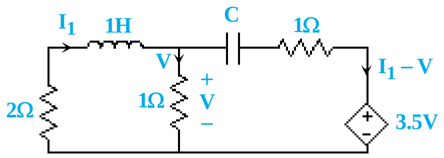
$$I_۰(۰^+) = \underbrace{\cancel{I_۰(۰^-)}}_{۰} + \frac{۱}{L}\int_{۰^-}^{۰^+} V_L(t)dt = \frac{۱}{۲}\int_{۰^-}^{۰^+} V_L(t)dt$$

در زمان $t=۰^+$ برای متغیرهای شبکه داریم:

$$i_C = \frac{\delta(t)}{۱+۱} = \frac{\delta(t)}{۲} \Rightarrow V_C(t) = \underbrace{\cancel{V_C(۰^-)}}_{۰} + \int_{۰^-}^{t}\frac{\delta(t)}{۲}dt = \frac{u(t)}{۲}$$

$$\Rightarrow V_L(t) = ۱\times i_C + V_C = \frac{\delta(t)}{۲} + \frac{u(t)}{۲} \Rightarrow I_۰(۰^+) = \frac{۱}{۲}\int_{۰^-}^{۰^+}\left(\frac{\delta(t)}{۲} + \underbrace{\cancel{\frac{u(t)}{۲}}}_{۰}\right)dt = \frac{۱}{۴}A$$

۶ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه‌های مدار معادله‌ی دیفرانسیل مدار را به‌دست می‌آوریم.



$$\text{KVL (حلقه‌ی چپ)}: ۲I_۱ + \frac{dI_۱}{dt} + V = ۰ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی راست)}: -V + V_C + I_۱ - V + ۳/۵v = ۰$$

$$\xrightarrow{V_C = \frac{۱}{C}\int_۰^t (I_۱ - V)dt} -V + \frac{۱}{C}\int_۰^t(I_۱-V)dt + I_۱ - V + ۳/۵v = ۰$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} ۱/۵\frac{dv}{dt} + \frac{I_۱ - V}{C} + \frac{dI_۱}{dt} = ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱/۵\frac{d}{dt}\left(-۲I_۱ - \frac{dI_۱}{dt}\right) + \frac{۱}{C}\left(I_۱ + ۲I_۱ + \frac{dI_۱}{dt}\right) + \frac{dI_۱}{dt} = ۰$$

$\Rightarrow ۱/۵\frac{d^۲I_۱}{dt^۲} + (۲ - \frac{۱}{C})\frac{dI_۱}{dt} - \frac{۳}{C}I_۱ = ۰ \rightarrow$ برای نوسانی شدن مدار ضریب $\frac{dI_۱}{dt}$ باید صفر شود

$$\Rightarrow C = \frac{۱}{۲}F$$

۷ـ گزینه «۴» می‌دانیم که معادله‌ی مشخصه‌ی یک مدار RLC سری به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^۲ + \frac{R}{L}x + \frac{۱}{LC} = ۰ \\ x^۲ + ۲\alpha x + \omega_۰^۲ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱, x_۲ = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_۰^۲ - \alpha^۲} \\ \alpha = \frac{R}{۲L}, \omega_۰ = (\sqrt{LC})^{-۱} \end{cases}$$

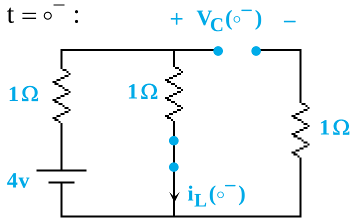
بنابراین پاسخ مدار به صورت مقابل می‌باشد: $y(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\omega_۰^۲-\alpha^۲}\,t+\theta)$

از طرفی داریم: $k = ۶/۲۵$ و $\alpha = ۳ \Rightarrow \frac{R}{۲L} = ۳ \Rightarrow R = ۶L = ۶\times ۱/۶۶ = ۱۰\Omega$

مشاهده می‌شود که داده‌های Td و C برای حل این سؤال اضافی است.

۸ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را به‌دست می‌آوریم:

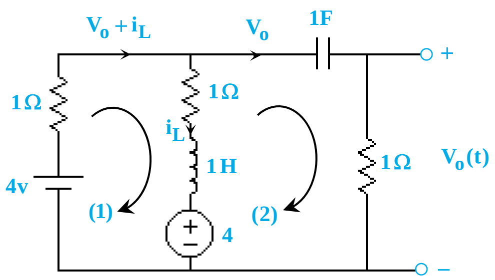
$t = ۰^-$:



$$i_L(۰^-) = \frac{۴}{۱+۱} = ۲A$$

$$V_C(۰^-) = ۱\times i_L(۰^-) = ۲v$$

برای زمان $t > ۰$ داریم:



$$\text{KVL}(۱): -۴ + V_o + i_L + i_L + \frac{di_L}{dt} + ۴ = ۰$$

$$V_o + ۲i_L + \frac{di_L}{dt} = ۰ \rightarrow V_o + (D+۲)i_L = ۰ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL}(۲): -۴ - \frac{di_L}{dt} - i_L + V_C + V_o = ۰ \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{-d^۲i_L}{dt^۲} - \frac{di_L}{dt} + \underbrace{\frac{dv_c}{dt}}_{v_o} + \frac{dv_o}{dt} = ۰$$

$$\Rightarrow V_o(D+۱) = i_L(D^۲+D) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} V_o(D+1)=\frac{-V_o}{D+2}(D^2+D) \Rightarrow V_o((D+1)(D+2)+D(D+1))=0$$

$$\Rightarrow 2V_o(D+1)^2=0 \to V_o(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$$

حال برای به‌دست آوردن C_1 و C_2 باید شرایط اولیه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل را محاسبه کنیم:

$$V_o(0^+)=? \to \text{KVL (حلقه‌ی بیرونی)}: -4+V_o(0^+)+i_L(0^+)+V_C(0^+)+V_o(0^+)=0$$

$$\Rightarrow 2V_o(0^+)=4-2-2=0 \Rightarrow V_o(0^+)=0 \Rightarrow C_1=0$$

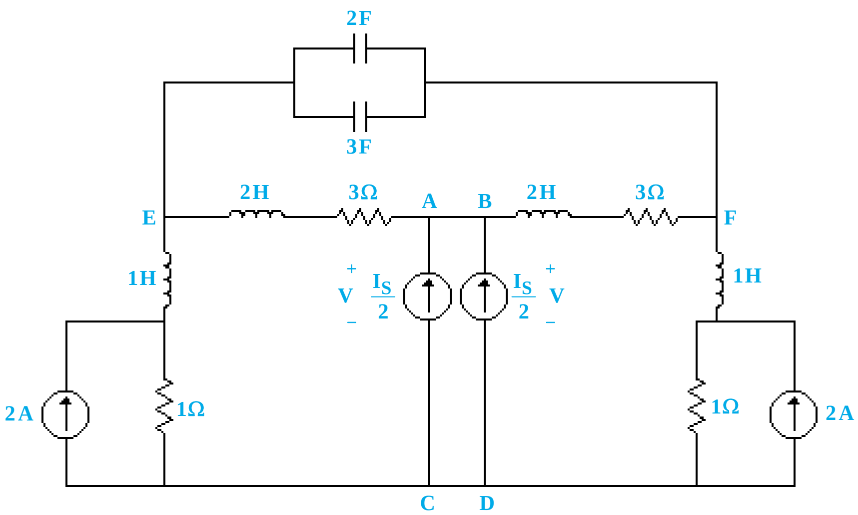
$$\frac{dV_o(0^+)}{dt}=?$$

$$(1) \xrightarrow{t=0^+} \frac{di_L}{dt}(0^+)=-4$$

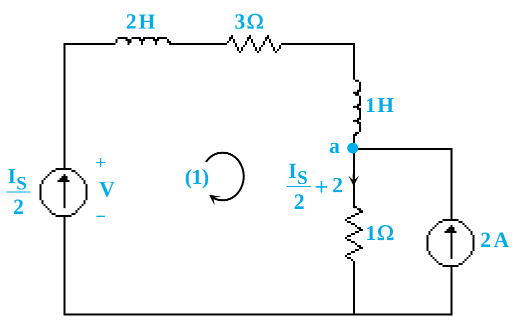
$$(1) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dV_o}{dt}+\frac{2di_L}{dt}+\frac{d^2i_L}{dt^2}=0 \xrightarrow{(2)} \frac{dV_o}{dt}+V_o=\frac{-dV_o}{dt}-\frac{2di_L}{dt}+\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{dV_o}{dt}=-\frac{V_o}{2}-\frac{di_L}{2dt} \Rightarrow \frac{dV_o}{dt}(0^+)=2$$

$$\frac{dV_o}{dt}=(C_2-C_2t)e^{-t} \Rightarrow \boxed{C_2=2} \Rightarrow V_o(t)=2te^{-t}$$

۹ـ گزینه «۳» با کمی دقت بر روی شکل، شبه‌تقارن را می‌توان دید. با تبدیل منبع ولتاژ به منبع جریان و همچنین با توجه به اینکه حاصل سلف‌های موازی ۴ هانری، برابر ۲H می‌شود، مدار به صورت زیر درخواهد آمد.



با توجه به تقارن مدار، جریان در شاخه‌های AB، CD و EF صفر می‌شود. بنابراین کافی است که مدار روبه‌رو را حل کنیم.



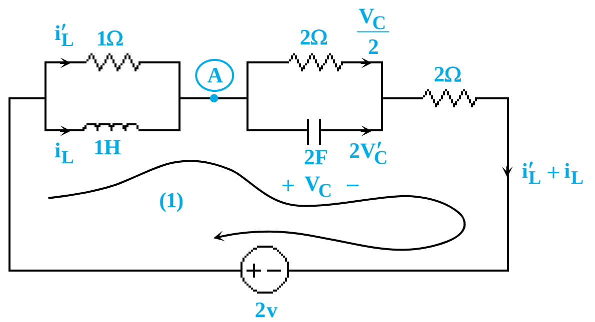
با نوشتن KCL در گره a، جریان مقاومت ۱Ω در جهت نشان داده شده برابر $\frac{I_S}{2}+2$ خواهد بود. حال کافی است که در حلقه ۱، KVL بزنیم.

$$V=2\times\frac{d(\frac{I_S}{2})}{dt}+3\times\frac{I_S}{2}+1\times\frac{d(\frac{I_S}{2})}{dt}+1\times[\frac{I_S}{2}+2]$$

$$\Rightarrow V=3\times\frac{d(\frac{I_S}{2})}{dt}+2I_S+2 \qquad (1)$$

با جایگذاری معادله I_S در رابطه ۱ داریم:

$$V=3\times[2\cos 2t]+4\sin 2t+2 \Rightarrow V=6\cos 2t+4\sin 2t+2$$



۱۰ـ گزینه «۲» برای حل سؤال باید رابطه i_L را برحسب i_L'' و V_C پیدا کنیم.
با توجه به اینکه ولتاژ سلف ۱H، برابر i_L' است، بنابراین جریان مقاومت ۱Ω موازی با آن در جهت نشان داده شده برابر i_L' خواهد بود.
همچنین به دلیل موازی بودن خازن ۲F با مقاومت ۲Ω، جریان مقاومت ۲Ω برابر $\frac{V_C}{2}$ خواهد شد. ضمناً جریان خازن نیز برابر $2V_C'$ است.
رابطه KVL را برای حلقه ۱ می‌نویسیم:

$$KVL_1: i_L' + V_C + 2\times[i_L' + i_L] = 2 \Rightarrow 3i_L' + 2i_L + V_C = 2 \Rightarrow \boxed{i_L' = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i_L - \frac{V_C}{3} \qquad (1)}$$

رابطه KCL را برای گره A می‌نویسیم:

$$KCL_A: i_L' + i_L = 2V_C' + \frac{V_C}{2} \Rightarrow \boxed{V_C' = \frac{i_L'}{2} + \frac{i_L}{2} - \frac{V_C}{4} \qquad (2)}$$

با قرار دادن رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$V_C' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i_L - \frac{V_C}{6} + \frac{i_L}{2} - \frac{V_C}{4} \Rightarrow \boxed{V_C' = \frac{1}{3} + \frac{i_L}{6} - \frac{5}{12}V_C \qquad (3)}$$

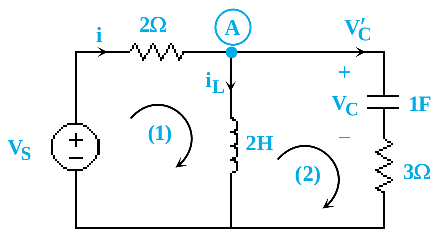
با مشتق گرفتن از رابطه (۱) داریم:

$$\boxed{i_L'' = -\frac{2}{3}i_L' - \frac{V_C'}{3} \qquad (4)}$$

حال با قرار دادن رابطه (۱) و (۳) در رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$i_L'' = -\frac{2}{3}\times[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i_L - \frac{V_C}{3}] - \frac{1}{3}\times[\frac{1}{3} + \frac{i_L}{6} - \frac{5}{12}V_C]$$

$$\Rightarrow i_L'' = -\frac{5}{9} + \frac{7}{18}i_L + \frac{13}{36}V_C \Rightarrow i_L''(0^+) = -\frac{5}{9} + \frac{7}{18}i_L(0^+) + \frac{13}{36}V_C(0^+) \Rightarrow \frac{5}{9} = -\frac{5}{9} + \frac{7}{18}\times i_L(0^+) + \frac{13}{36}\times 2 \Rightarrow \boxed{i_L(0^+) = 1A}$$



۱۱ـ گزینه «۳» با توجه به خواسته مسأله باید معادله i برحسب V_S را پیدا کرده و در آن معادله به‌جای i، $\frac{1}{3}V_S$ قرار دهیم و به‌دنبال تعیین شرایط اولیه i باشیم به‌طوری که i برابر $\frac{e^{-t}u(t)}{3}$ شود و در نتیجه مقادیر $V_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$ را بیابیم.

$$\begin{cases} KVL_1: 2i + 2i_L' = V_S & (1)\\ KVL_2: 2i_L' = 3V_C' + V_C & (2)\\ KCL_A: i = i_L + V_C' & (3)\end{cases}$$

$$(1),(2) \rightarrow 2i + 3V_C' + V_C = V_S \qquad (4) \qquad \xrightarrow{\text{از رابطه (۳) داریم}} : i_L = V_C' - i \qquad (5)$$

$$(2),(5) \rightarrow 2\times[V_C' - i]' = 3V_C' + V_C \Rightarrow 3V_C' + V_C = 2V_C'' - 2i' \qquad (6)$$

$$(4),(6) \rightarrow 2i + 2V_C'' - 2i' = V_S \Rightarrow V_C'' = i' - i + \frac{V_S}{2} \qquad (7)$$

$$\text{مشتق گرفتن از رابطه (۴)} \rightarrow 2i' + 3V_C'' + V_C' = V_S' \qquad (8)$$

$$(7),(8) \rightarrow 2i' + 3\times[i' - i + \frac{V_S}{2}] + V_C' = V_S' \Rightarrow 5i' - 3i + V_C' = V_S' - \frac{3}{2}V_S \qquad (9)$$

$$\text{مشتق گرفتن از رابطه (۹)} \rightarrow 5i'' - 3i' + V_C'' = V_S'' - \frac{3}{2}V_S' \qquad (10)$$

$$\text{قرار دادن رابطه (۷) در رابطه (۱۰)} \rightarrow 5i'' - 3i' + [i' - i + \frac{V_S}{2}] = V_S'' - \frac{3}{2}V_S' \Rightarrow 5i'' - 2i' - i = V_S'' - \frac{3}{2}V_S' - \frac{V_S}{2}$$

$$\text{تبدیل لاپلاس}: [5S^2 - 2S - 1]i(S) - 5Si(0^-) - 5i'(0^-) + 2i(0^-) = (S^2 - \frac{3}{2}S - \frac{1}{2})\times V_S(S)$$

$$\Rightarrow (5S^2 - 2S - 1)\times\frac{1}{3(S+1)} - 5Si(0^-) - 5i'(0^-) + 2i(0^-) = (S^2 - \frac{3}{2}S - \frac{1}{2})\times\frac{1}{S+1}$$

$$\Rightarrow 5S^2 i(0^-)+[3i(0^-)+5i'(0^-)]S+[5i'(0^-)-2i(0^-)]=\frac{2}{3}S^2+\frac{5}{6}S+\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} 5i(0^-)=\frac{2}{3} \\ 3i(0^-)+5i'(0^-)=\frac{5}{6} \\ 5i'(0^-)-2i(0^-)=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0^-)=\frac{2}{15} \\ i'(0^-)=\frac{13}{150} \end{cases}$$

حال باید رابطه $V_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$ را برحسب $i(0^-)$ و $i'(0^-)$ پیدا کنیم. با استفاده از رابطه ۹ داریم:

$$5\times i'(0^-)-3i(0^-)+V_C'(0^-)=V_S'(0^-)-\frac{3}{2}V_S(0^-) \Rightarrow 5\times\frac{13}{150}-3\times\frac{2}{15}+V_C'(0^-)=[-e^{-t}u(t)+\delta(t)]\Big|_{t=0^-}-\frac{3}{2}[e^{-t}u(t)]\Big|_{t=0^-}$$

$$\Rightarrow V_C'(0^-)=-\frac{1}{30}$$

با استفاده از رابطه ۳ خواهیم داشت:

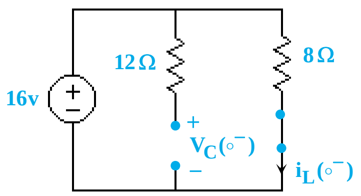
$$i(0^-)=i_L(0^-)+V_C'(0^-) \Rightarrow \frac{2}{15}=i_L(0^-)+(-\frac{1}{30}) \Rightarrow \boxed{i_L(0^-)=\frac{1}{6}A}$$

با استفاده از رابطه ۴ داریم:

$$2\times i(0^-)+3\times V_C'(0^-)+V_C(0^-)=V_S(0^-) \Rightarrow 2\times\frac{2}{15}+3\times(-\frac{1}{30})+V_C(0^-)=[e^{-t}u(t)]\Big|_{t=0^-} \Rightarrow \boxed{V_C(0^-)=-\frac{1}{6}V}$$

۱۲ـ گزینه «۱» با تحلیل مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ شرایط اولیه‌ی مدار را به‌دست می‌آوریم:

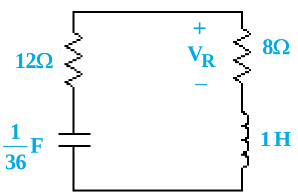
$t=0^-$:



$$i_L(0^-)=\frac{16}{8}=2A$$

$$V_C(0^-)=16v$$

برای زمان‌های $t>0$ داریم:

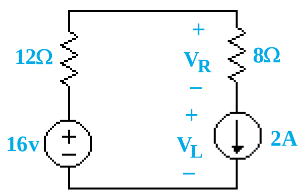


$$\text{سری RLC}: \frac{d^2V_R}{dt^2}+\frac{(8+12)}{1}\frac{dV_R}{dt}+36V_R=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V_R}{dt^2}+20\frac{dV_R}{dt}+36V_R=0 \Rightarrow V_R(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-18t}$$

برای به‌دست آوردن C_1 و C_2 باید شرایط اولیه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل را به‌دست آوریم:

$t=0^+$:



$$\Rightarrow V_R(0^+)=2\times 8=16 \rightarrow C_1+C_2=16 \qquad (1)$$

$$V_R=8i_L \Rightarrow \frac{dV_R}{dt}(0^+)=8\frac{di_L(0^+)}{dt}=8V_L(0^+)=8\times(16-12\times 2-16)=-192$$

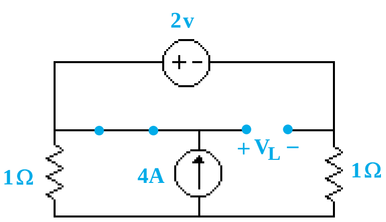
$$\Rightarrow -2C_1-18C_2=-192 \Rightarrow C_1+9C_2=96 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} C_1=6\ ,\ C_2=10 \rightarrow V_R(t)=6e^{-2t}+10e^{-18t}V$$

۱۳ـ گزینه «۱» با توجه به عدم وجود منبع مستقل در $t<0$ شرایط اولیه‌ی مدار صفر می‌باشد. $(i_L(0^-)=V_C(0^-)=0)$

برای $t=0^+$ داریم:

$t=0^+$:

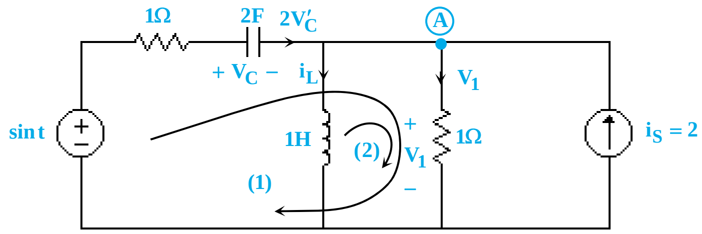


$$V_L(0^+)=\frac{dI_o(0^+)}{dt}=2$$

$I_o(0^+)=0 \Rightarrow I_o(0^+)=0 \quad (1)$ با این شرط گزینه‌های ۱ و ۴ می‌توانند درست باشند

$\frac{dI_o(0^+)}{dt}=2 \xrightarrow{(1)}$ با این شرط تنها گزینه (۱) صحیح است.

۱۴ـ گزینه «۴» برای حل سؤال، باید V_1' را برحسب منابع مدار و ولتاژ خازن و جریان سلف بنویسیم.



باتوجه به این‌که ولتاژ مقاومت 1Ω برابر V_1 است، جریان این مقاومت در جهت مشخص شده برابر V_1 می‌شود.

$$KCL_A : 2V_C' = i_L + V_1 - i_S \qquad (1)$$
$$KVL_1 : V_S = 2V_C' + V_C + V_1 \qquad (2)$$
$$KVL_2 : i_L' = V_1 \qquad (3)$$

$$(1),(2) \rightarrow V_S = i_L + V_1 - i_S + V_C + V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{V_S + i_S - i_L - V_C}{2} \qquad (4) \Rightarrow V_1 = \frac{\sin t + 2 - i_L - V_C}{2} \Rightarrow \boxed{V_1(0^+) = \frac{-1}{2}v}$$

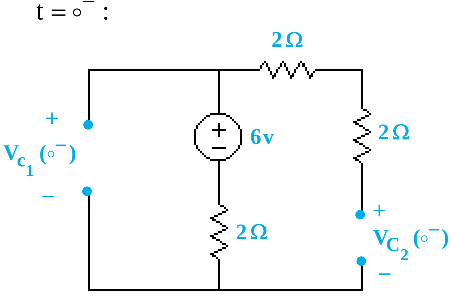
مشتق گرفتن از رابطه (۴) : $V_1' = \frac{V_S' + i_S' - i_L' - V_C'}{2} \Rightarrow V_1' = \frac{\cos t - i_L' - V_C'}{2} \qquad (5)$

$$(1),(3),(5) \rightarrow V_1' = \frac{\cos t - V_1 - \frac{1}{2}\times[i_L + V_1 - i_S]}{2} \Rightarrow V_1' = \frac{\cos t - \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}i_L + \frac{i_S}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V_1'(0^+) = \frac{1 - \frac{3}{2}\times(\frac{-1}{2}) - \frac{1}{2}\times 2 + 1}{2} = \frac{7}{8} \Rightarrow \boxed{V_1'(0^+) = \frac{7}{8}(\frac{V}{s})}$$

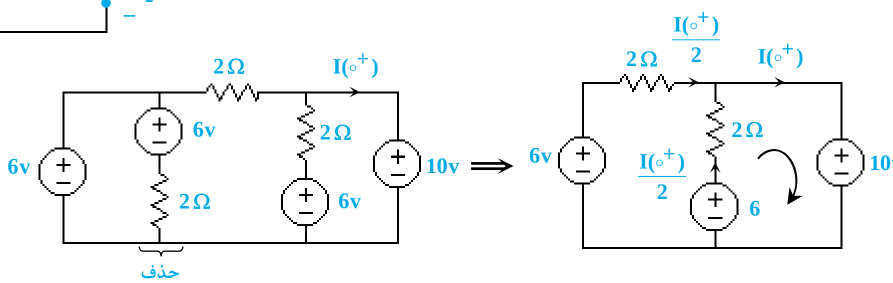
۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا شرایط اولیه‌ی خازن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$t = 0^- :$



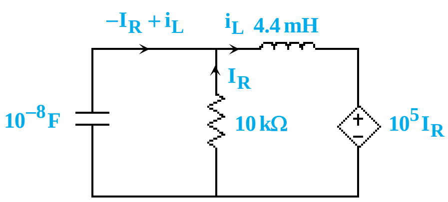
$$\Rightarrow V_{C_1}(0^-) = V_{C_2}(0^-) = 6v$$

در لحظه‌ی $t = 0^+$ داریم:



$KVL : -6 + I(0^+) + 10 = 0 \Rightarrow I(0^+) = -4A \rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۶ـ گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به مدار را به‌دست می‌آوریم:



KVL (حلقه‌ی چپ): $10^8 \int_0^t (i_L - I_R)dt - 10^4 I_R = 0 \qquad (1)$

KVL (حلقه‌ی راست): $10^4 I_R + 4.4\times 10^{-3}\frac{di_L}{dt} + 10^5 I_R = 0 \qquad (2)$

$$(1) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 10^8(i_L - I_R) - 10^4\frac{dI_R}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_R}{dt} + 10^4 I_R - 10^4 i_L = 0 \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(2),(3)} \frac{d^2I_R}{dt^2} + 10^4\frac{dI_R}{dt} + 10^4\left(\frac{1.1\times 10^5 I_R}{4.4\times 10^{-3}}\right) = 0$$

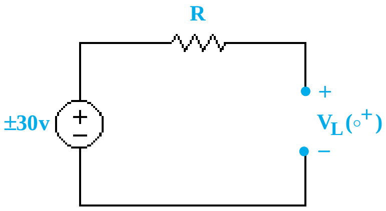
$$\begin{cases} Q=\dfrac{\omega_0}{2\alpha} \\ 2\alpha=10^4 \\ \omega_0=\sqrt{\dfrac{1/1\times10^9}{4/4\times10^{-3}}}=5\times10^5 \end{cases} \rightarrow Q=\frac{5\times10^5}{10^4}=50$$

۱۷ــ گزینه «۳» انرژی اولیه ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}CV_C(0)^2=45\mu j$$

$$C=0/1\mu F\rightarrow V_C(0)=\sqrt{900}=\pm30\,v \quad \text{و} \quad i_L(0^-)=0$$

برای $t=0^+$ داریم:

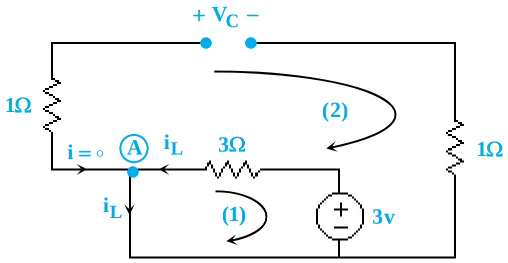


$$\Rightarrow V_L(0^+)=\frac{L\,di_L(0^+)}{dt}=\pm30\,v\rightarrow\frac{di_L(0^+)}{dt}=\pm\frac{30}{L}\quad(1)$$

از طرفی معادله‌ی مشخصه‌ی مدار به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:(s+2000).(s+8000)=0\Rightarrow s^2+10^4s+16\times10^6=0\Rightarrow\omega_0^2=\frac{1}{LC}=16\times10^6\Rightarrow L=0/625H\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{di_L(0^+)}{dt}=\pm48$$

۱۸ــ گزینه «۴» ابتدا مدار را برای $t=0^-$ که به حالت دائمی رسیده و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است، رسم کرده و تحلیل می‌کنیم.

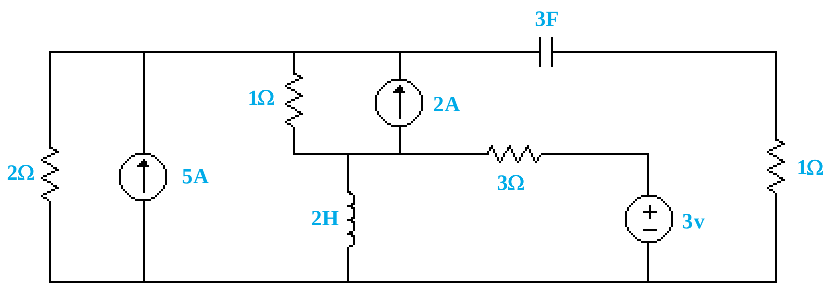


با توجه به این‌که خازن مدار باز است، جریان $i=0$ بوده و با در نظر گرفتن KCL برای گره A، جریان مقاومت 3Ω برابر i_L خواهد بود.

$$KVL_1:3i_L=3\Rightarrow\boxed{i_L(0^-)=1A}$$

$$KVL_2:V_C+1\times0-3+3i_L+1\times0=0\Rightarrow\boxed{V_C(0^-)=0v}$$

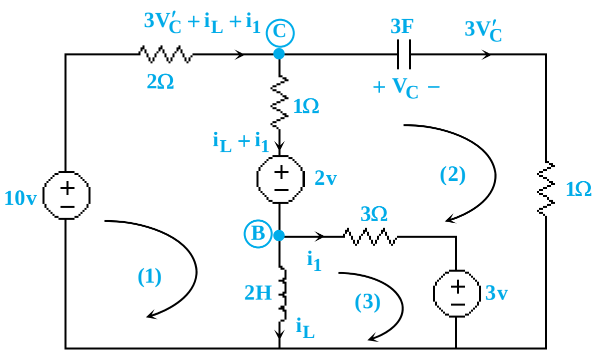
مدار برای $t>0$:



با توجه به این‌که حلقه خازنی و کاتست سلفی و تابع ضربه در $t=0$ نداریم، بنابراین V_C و i_L در $t=0^+$ مقادیر مشابه خود را در $t=0^-$ دارند.

$$\begin{cases} i_L(0^+)=i_L(0^-)=1A \\ V_C(0^+)=V_C(0^-)=0v \end{cases}$$

با تبدیل تونن نورتن داریم:



$KCL_C: ۲\Omega$ جریان مقاومت $= ۳V'_C + i_L + i_۱$

$KCL_B: ۲V$ جریان مقاومت ۱Ω سری با منبع ولتاژ $= i_L + i_۱$

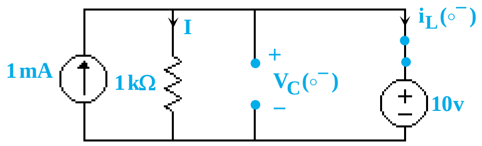
$$\begin{cases} KVL_۱: ۱۰ = ۲\times(۳V'_C + i_L + i_۱) + ۱\times(i_L + i_۱) + ۲ + ۲i'_L \\ KVL_۲: V_C + ۳V'_C \times ۱ = (i_L + i_۱)\times ۱ + ۲ + ۳i_۱ + ۳ \\ KVL_۳: ۲i'_L = ۳i_۱ + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶V'_C + ۲i'_L + ۳i_L + ۳i_۱ = ۸ & (۱) \\ ۳V'_C = i_L + ۴i_۱ - V_C + ۵ & (۲) \\ ۲i'_L = ۳i_۱ + ۳ & (۳) \end{cases}$$

$$(۱),(۳) \to ۶V'_C + ۳i_۱ + ۳ + ۳i_L + ۳i_۱ = ۸ \Rightarrow ۶V'_C + ۶i_۱ + ۳i_L = ۵ \Rightarrow i_۱ = \frac{۵ - ۶V'_C - ۳i_L}{۶} \quad (۴)$$

$$(۲),(۴) \to ۳V'_C = i_L + ۴\times\left(\frac{۵ - ۶V'_C - ۳i_L}{۶}\right) - V_C + ۵ \Rightarrow ۹V'_C = ۳i_L + ۱۰ - ۱۲V'_C - ۶i_L - ۳V_C + ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲۱V'_C = -۳i_L - ۳V_C + ۲۵ \Rightarrow V'_C = \frac{۲۵ - ۳V_C - ۳i_L}{۲۱} \Rightarrow V'_C(۰^+) = \frac{۲۵ - ۳V_C(۰^+) - ۳i_L(۰^+)}{۲۱} = \frac{۲۵ - ۰ - ۳\times ۱}{۲۱} = \frac{۲۲}{۲۱}$$

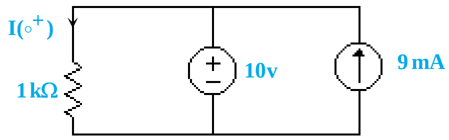
۱۹ـ گزینه «۳» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow v_c(۰^-) = ۱۰\,v$$

$$I_{1k\Omega} = \frac{۱۰\,v}{1k\Omega} = ۱۰\,mA \Rightarrow i_L(۰^-) = -۹mA$$

در لحظه‌ی $t = ۰^+$ داریم:



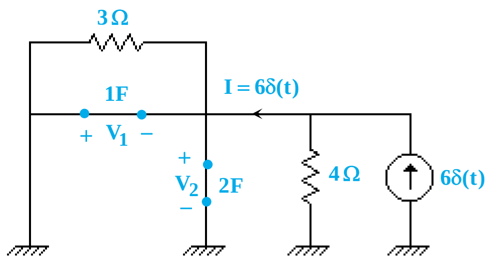
$$I(۰^+) = \frac{۱۰\,v}{۱k\Omega} = ۱۰\,mA$$

با بررسی گزینه‌ها و با توجه به اینکه مدار مرتبه‌ی دوم بوده و فرکانس سینوس و کسینوس باید یکی باشند، مشاهده می‌شود که گزینه‌ی (۳) پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه وجود تابع ضربه در ورودی باعث ناپیوستگی ولتاژ خازن در $t = ۰$ می‌شود، باید منبع ولتاژ با تابع پله را بی‌اثر کرده و اثر منبع با تابع ضربه را بررسی می‌کنیم.

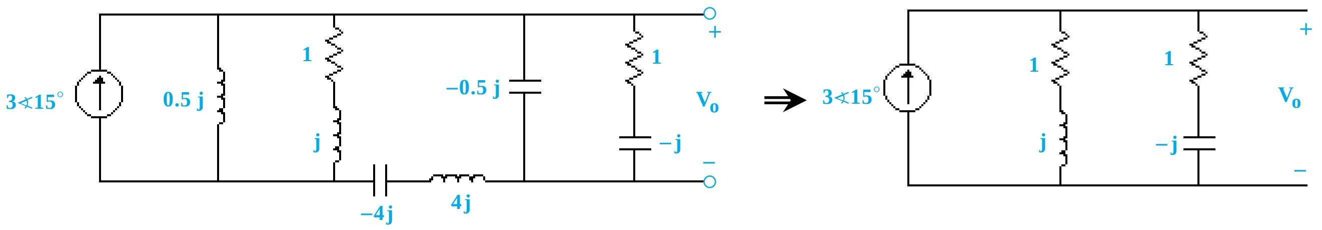
مشاهده می‌شود که همه‌ی جریان $۶\delta(t)$ از مسیر اتصال کوتاه عبور می‌کند (معادل موازی دو خازن):

$$V_{C_۱}(t) = V_{C_۱}(۰^-) - \frac{۱}{C_۱ + C_۲}\int_{۰^-}^{t} I dt \Rightarrow V_{C_۱}(۰^+) = -۳ - \frac{۱}{۳}\int_{۰^-}^{۰^+} ۶\delta(t)dt = -۵v$$



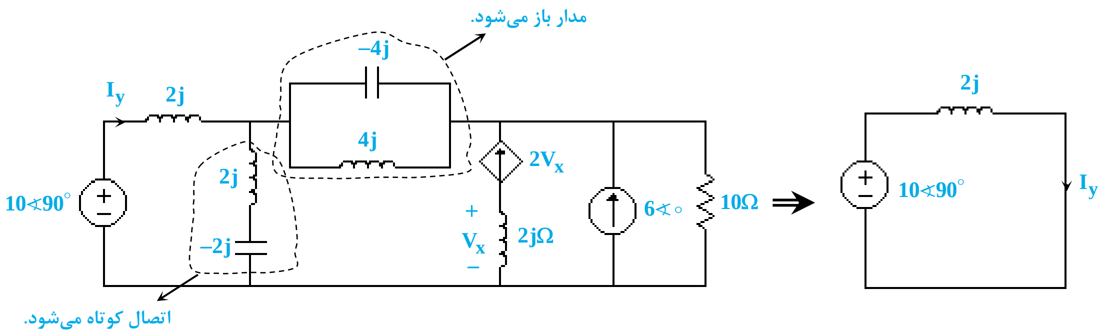
پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل چهارم

۱ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی برده و با ساده‌سازی مدار فازور ولتاژ V_o را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow\ V_o = (1+j)\,\|\,(1-j)\times 3\angle 15^\circ = \frac{(1+j)\times(1-j)}{1+j+1-j}\times 3\angle 15^\circ = 3\angle 15^\circ$$

۲ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی برده و با ساده‌سازی مدار مقدار فاز I_y را به‌دست می‌آوریم.



$$I_y = \frac{10\angle 90}{2j} = 5\angle 0\ A$$

۳ـ گزینه «۳» امپدانس دیده شده که برابر با Z_{eq} است، برابر با اتصال موازی خازن CF و معادل سری سلف LH و $R_L\Omega$ است.

$$Z_{eq} = (Lj\omega + R_L)\,\|\,\frac{1}{Cj\omega} = \frac{(R_L + Lj\omega)\times\frac{1}{j\omega C}}{R_L + Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_L + Lj\omega}{1 - LC\omega^2 + j\omega R_L C} \qquad (1)$$

از طرفی داریم $Z_{eq} = R_S$. پس داریم:

$$\frac{R_L + Lj\omega}{1 - LC\omega^2 + j\omega R_L C} = R_S \ \Rightarrow R_L + Lj\omega = R_S - LC\omega^2 R_S + j\omega R_L C R_S$$

از برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی با هم و قسمت‌های موهومی با هم داریم:

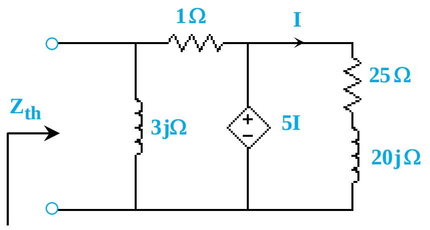
$$\begin{cases} R_L = R_S - LC\omega^2 R_S \ \Rightarrow \boxed{LC = (\frac{R_S - R_L}{R_S\omega^2})} & (2) \\ L\omega = \omega R_L C R_S \ \Rightarrow \boxed{L = R_L C R_S} & (3) \end{cases}$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$R_L C R_S C = R_L R_S C^2 = \frac{R_S - R_L}{R_S\omega^2} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{R_S - R_L}{\omega^2 R_S^2 R_L}}$$

حال طبق رابطه (۳) داریم:

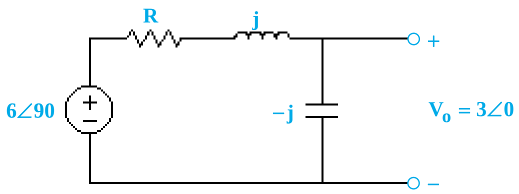
$$L = R_L R_S\sqrt{\frac{R_S - R_L}{\omega^2 R_S^2 R_L}} = \sqrt{(R_L^2 R_S^2)\frac{R_S - R_L}{\omega^2 R_S^2 R_L}} = \sqrt{\frac{R_L(R_S - R_L)}{\omega^2}}$$



۴ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن Z_{th} ابتدا منبع را بی‌اثر کرده و سپس با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت راست و ساده‌سازی، Z_{th} را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \ ۵I = (۲۵ + j۲۰) \times I \Rightarrow I = ۰$$

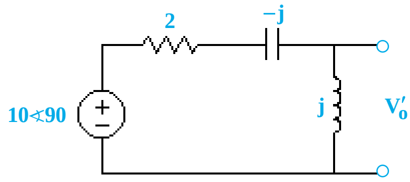
$$\Rightarrow \ Z_{th} = j۳ \,||\, ۱ = \frac{j۳}{۱ + j۳} = j۰/۳(۱ - j۳) = ۰/۹ + j۰/۳\Omega$$



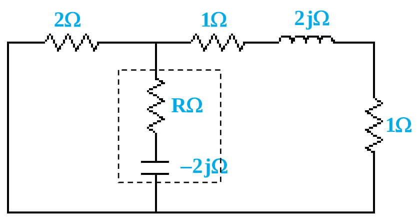
۵ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه فاز ولتاژ خروجی ۹۰ درجه کاهش یافته است، می‌توان نتیجه گرفت که ولتاژ خروجی، ولتاژ دو سر خازن بوده است و همچنین مدار RLC سری بوده است که خازن و سلف همدیگر را خنثی کرده‌اند:

$$V_o = ۳\angle ۰ = \frac{-j}{R + (j - j)} \times ۶\angle ۹۰ \Rightarrow R = ۲\Omega$$

حال با تعویض سلف و خازن با هم داریم:



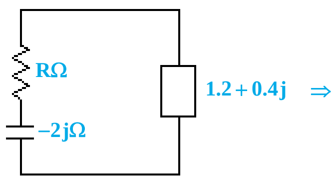
$$\Rightarrow \ V'_o = \frac{j}{۲} \times ۱۰ \measuredangle ۹۰ = ۵ \measuredangle ۱۸۰ \ \Rightarrow \ V'_o(t) = ۵\cos(t + ۱۸۰)v$$



۶ـ گزینه «۴» ابتدا شرایط اینکه توان جعبه N بیشینه شود را اعمال می‌کنیم. برای این کار $\omega = ۱\frac{rad}{s}$ بوده و مدار به صورت مقابل تبدیل می‌شود.

امپدانس دیده شده از دو سر N برابر است با:

$$۲ \,||\, (۲ + ۲j) = ۱/۲ + ۰/۴j$$

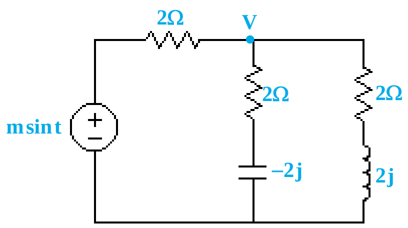


برای اینکه توان رسیده از منبع ولتاژ به جعبه N بیشینه شود R باید برابر با اندازه امپدانس دیده شده از دو سر خودش باشد.

$$R = |۱/۲ + ۰/۴j - ۲j| = |۱/۲ - ۱/۶j|$$

برای اعمال توان ماکزیمم به جعبه N از طریق منبع ولتاژ باید اندازه‌ی R برابر باشد با:

$$R = \sqrt{(۱/۲)^۲ + (۱/۶)^۲} = ۲\Omega$$

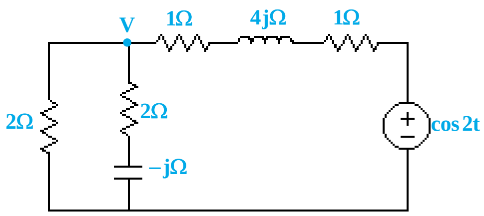


حال با $R = ۲\Omega$ حداکثر توان دریافتی آن را که ناشی از منبع ولتاژ است حساب می‌کنیم.

مدار معادل $(۲ - ۲j) \,||\, (۲ + ۲j)$ برابر است با ۲Ω.

پس ولتاژ V برابر است با $\frac{m}{۲}\sin t = \frac{۲}{۲ + ۲}(m\sin t)$. پس توان ماکزیمم R برابر است با:

$$P_۱ = \frac{V_{rms}^۲}{R} = \frac{(\frac{m}{۲\sqrt{۲}})^۲}{۲} = \frac{m^۲}{۱۶}$$



حال به محاسبه توان از طریق منبع جریان می‌پردازیم. با $\omega = ۲\frac{rad}{s}$ مدار به صورت مقابل می‌شود:

ولتاژ V برابر است با:

$$\frac{(۲) \,||\, (۲ - j)}{(۲) \,||\, (۲ - j) + ۲ + ۴j} \times ۱\measuredangle ۰ = \frac{۲(۲ - j)}{۲(۲ - j) + (۲ + ۴j)(۴ - j)} = ۰/۱ - ۰/۲j$$

بنابراین ولتاژ V برابر است با:

$$V = ۰/۱\cos ۲t + ۰/۲\sin ۲t$$

مقدار V_{rms} برابر است با:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{۰/۰۱+۰/۰۴}{۲}} = \sqrt{\frac{۰/۰۵}{۲}} = \sqrt{\frac{۵}{۲۰۰}}$$

حال توان ناشی از منبع جریان بر روی مقاومت R برابر است با:

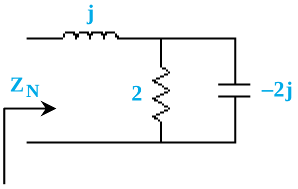
$$P_۲ = \frac{V_{rms}^۲}{R} = \frac{۵}{۲\times ۲۰۰} = \frac{۱}{۸۰}$$

طبق گفته سؤال $P_۱ = ۲۴۵P_۲$. پس داریم:

$$\frac{m^۲}{۱۶} = \frac{۲۴۵\times ۱}{۸۰} = \frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{m}{۴} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow \boxed{m = ۷}$$

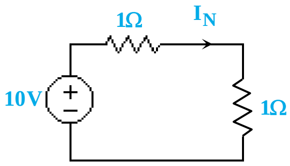
پس $R = ۲\Omega$ و $m = ۷$ می‌باشد، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۷ـ گزینه «۳» ابتدا امپدانس معادل شبکه‌ی N را محاسبه می‌کنیم:



$$Z_N = ۲ \| (j-۲) + j = \frac{-j۴}{۲-j۲} + j = ۱\Omega$$

حال مقدار جریان عبوری از امپدانس Z_n را به‌دست می‌آوریم:

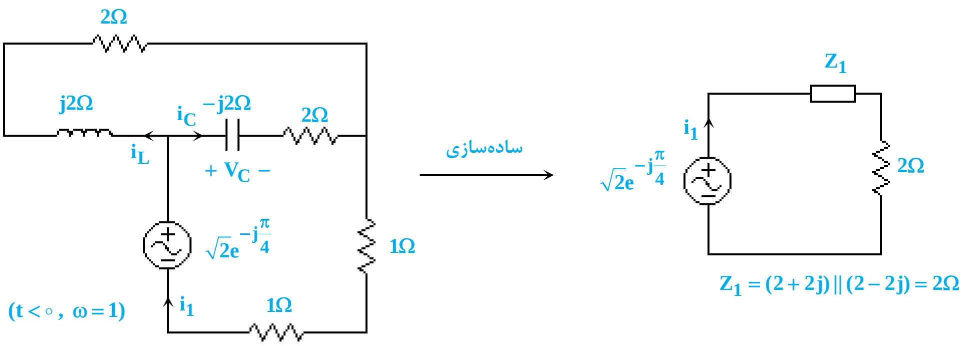


$$\Rightarrow I_N = \frac{۱۰}{۲} = ۵A$$

بنابراین داریم:

$$P = RI_{rms}^۲ = ۱\times(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = ۱۲/۵\,w$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا باید با تحلیل مدار در زمان $t = ۰^-$ ولتاژ خازن و جریان سلف را محاسبه کنیم. بدین منظور مدار را در دو حالت ماندگار AC و DC و در حالت دائمی تحلیل کرده و با استفاده از قاعده جمع آثار، مقادیر نهایی را به‌دست می‌آوریم. در گام اول با خاموش کردن منبع DC، مدار را در حالت AC تحلیل می‌کنیم:



$$\Rightarrow i_۱ = \frac{۱}{۲+۲}\times\sqrt{۲}e^{-j\frac{\pi}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}e^{-j\frac{\pi}{۴}}$$

با استفاده از قاعده‌ی تقسیم جریان داریم:

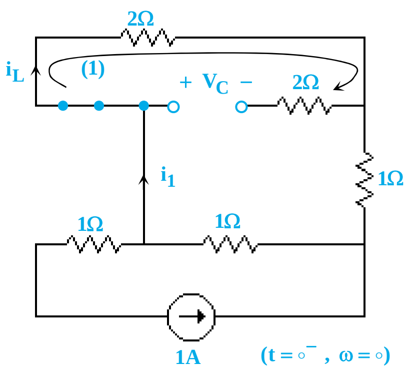
$$i_L = \frac{۲-j۲}{۲-j۲+۲+j۲}\times i_۱ = \frac{۱-j}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۴}e^{-j\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱-j}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۴}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - j\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -\frac{j}{۴}$$

$$i_C = i_۱ - i_L = \frac{\sqrt{۲}}{۴}e^{-j\frac{\pi}{۴}} + \frac{j}{۴} = (\frac{۱}{۴} - \frac{j}{۴}) + \frac{j}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow V_C = -j۲\times\frac{۱}{۴} = -\frac{j}{۲}$$

لذا داریم:

$$i_L(t) = -\frac{۱}{۴}\sin(t+\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow i_L(t=۰^-) = -\frac{۱}{۴}A \quad , \quad V_C(t) = -\frac{۱}{۲}\sin(t+\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow V_C(t=۰^-) = -\frac{۱}{۲}v$$

حال مدار را در حالت ماندگار DC تحلیل می‌کنیم. با توجه به شکل مقابل و با استفاده از قاعده‌ی تقسیم جریان داریم:



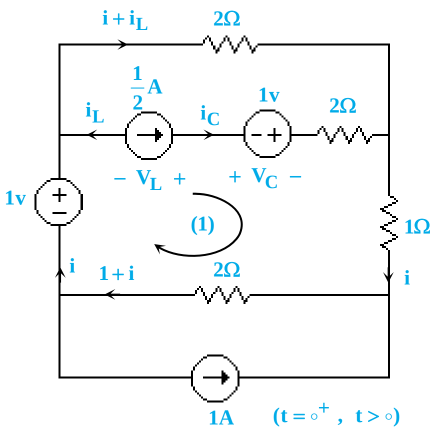
$$i_L = (-۱)\times\frac{۱}{۱+(۱+۲)} = -\frac{۱}{۴}A$$

$$KVL(۱): V_C = ۲i_L = -\frac{۱}{۲}v$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$i_L(۰^-) = i_L(۰^-)_{AC} + i_L(۰^-)_{DC} = -\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = -\frac{۱}{۲}A$$

$$V_C(۰^-) = V_C(۰^-)_{AC} + V_C(۰^-)_{DC} = -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = -۱v$$



حال با استفاده از شکل زیر، مدار را در $t = ۰^+$ تحلیل می‌کنیم.

مشخص است که مدار فاقد کاتست سلفی، حلقه‌ی خازنی و منبع ضربه‌ای بوده و لذا ولتاژ خازن و جریان سلف مدار، در لحظه‌ی $t = ۰$ تغییر نمی‌کند. با نوشتن رابطه KVL در حلقه بیرونی مدار برای زمان‌های $t > ۰$ داریم:

$$-۱ + ۲\times(i + i_L) + ۱\times i + ۲\times(۱ + i) = ۰ \Rightarrow ۵i + ۱ + ۲i_L = ۰$$

$$\Rightarrow i = -\frac{۱ + ۲i_L}{۵} \quad (۱) \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{۲}{۵}\frac{di_L}{dt} = -\frac{۲}{۵}\times\frac{V_L}{۲} = -\frac{V_L}{۵} \quad (۲)$$

لذا برای محاسبه‌ی $\frac{di(۰^+)}{dt}$ باید مقدار V_L را در لحظه $t = ۰^+$ محاسبه کنیم:

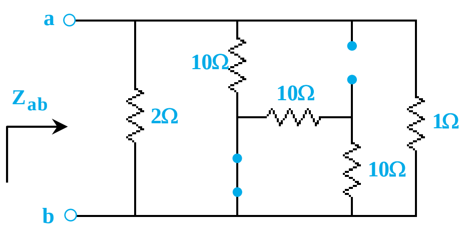
$$(۱) \rightarrow i(۰^+) = -\frac{۱ + ۲\times(-\frac{۱}{۲})}{۵} = ۰$$

$$KVL\ (۱): -۱ - V_L - ۱ + ۲\times\frac{۱}{۲} + ۱\times۰ + ۲\times(۱ + ۰) = ۰ \Rightarrow V_L(۰^+) = ۱v$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{di}{dt}(۰^+) = -\frac{V_L(۰^+)}{۵} = -\frac{۱}{۵}\frac{A}{sec}$$

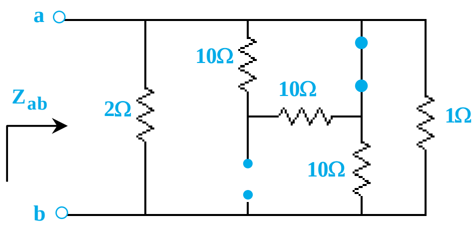
۹ـ گزینه «۲» برای بررسی اینکه آیا امپدانس دیده شده از دو سر a و b تابعی از فرکانس می‌باشد، کافی است دو فرکانس $s = ۰$ و $s = \infty$ را امتحان کنیم.

$s = ۰:$



$$Z_{ab} = ۲ \| ۱۰ \| ۱\Omega$$

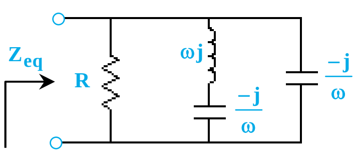
$s = \infty:$



$$Z_{ab} = ۲ \| ۱۰ \| ۱\Omega$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار امپدانس در دو حالت با هم برابر می‌باشد. بنابراین امپدانس معادل تابعی از فرکانس نمی‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی برده و امپدانس معادل دیده شده را به‌دست می‌آوریم:



$$Z_{eq} = R \| (\omega j - \frac{j}{\omega}) \| (-\frac{j}{\omega})$$

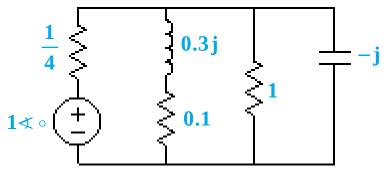
همان‌طور که مشاهده می‌شود در صورتی‌که موازی شده‌ی دو شاخه‌ی سمت راست مدار باز شود، یعنی رزونانس رخ داده و امپدانس معادل دیده شده برابر R خواهد شد.

$$(\omega j - \frac{j}{\omega}) \| (-\frac{j}{\omega}) = \frac{۱ - \frac{۱}{\omega^۲}}{j(\omega - \frac{۲}{\omega})}$$

برای اینکه عبارت فوق به سمت بی‌نهایت میل کند، کافی است:

$$\omega - \frac{۲}{\omega} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{۲}$$

۱۱ـ گزینه «۳» مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم. دقت شود با توجه به اینکه می‌خواهیم توان مصرفی را به‌دست آوریم، بهتر است مقدار فازور منبع برحسب مقدار rms آن نوشته شود تا جریان مقاومت‌ها به‌صورت rms به‌دست آید. ابتدا امپدانس معادل دیده شده از دو سر منبع را محاسبه می‌کنیم:

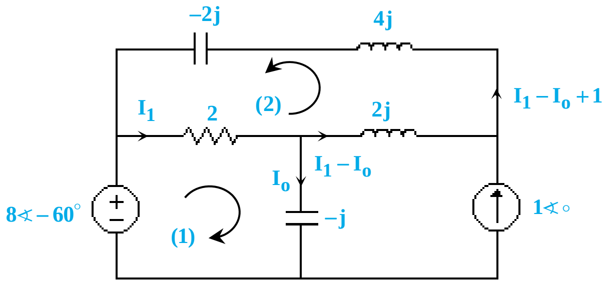


$$Z_{eq}=\frac{۱}{۴}+(۰/۱+۰/۳j)\parallel(-j)\parallel ۱=۰/۵+۰/۲۵j$$

$$I_{rms}=\frac{۱\measuredangle ۰}{۰/۵+۰/۲۵j}\Rightarrow |I_{rms}|=۱/۷۸۸A$$

$$\Rightarrow P=RI_{rms}^{۲}=۰/۵\times(۱/۷۸۸)^{۲}=۱/۶w$$

۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $V_S=۸\sin(۲t+۳۰)=۸\cos(۲t-۶۰)$ می‌باشد مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم. با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص شده داریم:



$$KVL(۱): -۸\measuredangle -۶۰^{\circ}+۲I_۱-jI_o=۰ \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): ۲I_۱+j۲(I_۱-I_o)+j۲(I_۱-I_o+۱)=۰$$

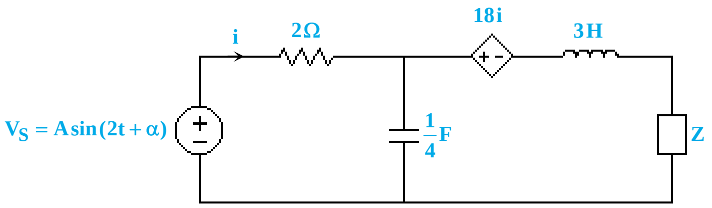
$$\Rightarrow\ -j۴I_o+(۲+j۴)I_۱=-j۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -j۴I_o+(۱+j۲)(۸\measuredangle ۶۰^{\circ}+jI_o)=-j۲$$

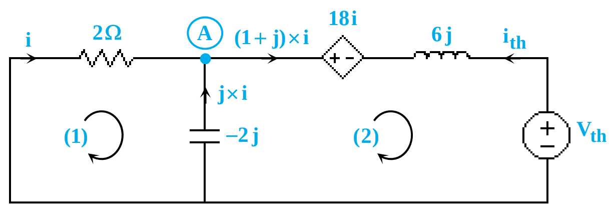
$$\Rightarrow I_o(۲+j۳)=۱۸/۱۱\measuredangle ۹/۷۶^{\circ}\Rightarrow |I_o|\simeq ۵A$$

۱۳ـ گزینه «۳» برای حل سؤال، ابتدا باید امپدانس Z را پیدا کنیم.

برای این منظور، منبع ولتاژ سینوسی با فرکانس $۲\frac{rad}{s}$ را به دو سر a و b بسته و مقدار Z را برای اینکه توان متوسط مصرفی آن حداکثر شود، می‌یابیم.



برای اینکه بار Z حداکثر توان متوسط را مصرف کند، بایستی امپدانسی که از دو سر آن دیده می‌شود، مزدوج امپدانس Z باشد. بنابراین به دنبال امپدانس دو سر بار Z هستیم. برای این کار، منبع V_S را صفر (اتصال کوتاه) کرده و مدار را در حالت دائمی حل می‌کنیم.

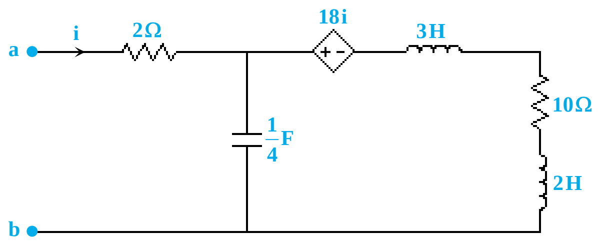


با درنظر گرفتن رابطه KVL در حلقه ۱، جریان خازن $-۲j$ اهمی در جهت نشان داده شده برابر $j\times i$ می‌شود و با توجه به رابطه KCL در گره A، جریان شاخه سمت راست برابر $(۱+j)\times i$ خواهد شد. حال با درنظر گرفتن اینکه $(۱+j)\times i=-i_{th}$ است، رابطه KVL در حلقه ۲ را می‌نویسیم.

$$KVL\,in(۲): ۲i+۱۸i+V_{th}=۶ji_{th}\Rightarrow V_{th}=۶ji_{th}-۲۰i \quad (۱) \quad و \quad (۱+j)\times i=-i_{th} \quad (۲)$$

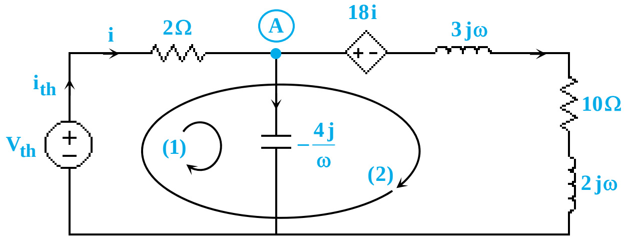
$$\xrightarrow{(۱)\ و\ (۲)} V_{th}=۶ji_{th}+\frac{۲۰i_{th}}{۱+j}=(۱۰-۴j)i_{th}\Rightarrow V_{th}=(۱۰-۴j)i_{th}\Rightarrow Z=(۱۰-۴j)^{*}\Rightarrow Z=(۱۰+۴j)\Omega$$

با توجه به اینکه $\omega=۲\frac{rad}{s}$ است، پس می‌توان گفت Z از یک مقاومت ۱۰Ω سری با یک سلف ۲H تشکیل شده است. پس داریم:



حال می‌خواهیم فرکانس منبع سینوسی را طوری تعیین کنیم که اگر این منبع را به دو سر a و b وصل کنیم، فقط توان اکتیو تولید کند. پس باید امپدانس دو سر a و b اهمی خالص باشد.

پس به دنبال امپدانس دو سر a و b هستیم.



با درنظر گرفتن KVL در حلقه ۱، جریان خازن $\frac{-۴j}{\omega}$ اهمی، در جهت نشان داده شده برابر $j\omega(\frac{V_{th}-۲i_{th}}{۴})$ خواهد بود. با درنظر گرفتن KVL در حلقه ۲، جریان شاخه سمت راست در جهت نشان داده شده برابر $\frac{V_{th}-۲۰i_{th}}{۱۰+۵j\omega}$ می‌شود. دقت شود که در مدار بالا i برابر i_{th} است.

حال کافی است که KCL را در گره A بنویسیم.

$$KCLA: i_{th}=(\frac{V_{th}-۲i_{th}}{۴})j\omega+\frac{V_{th}-۲۰i_{th}}{۱۰+۵j\omega}\Rightarrow V_{th}=\frac{(۱۲۰-۱۰\omega^{۲})+۴۰j\omega}{(۴-۵\omega^{۲})+۱۰j\omega}i_{th}$$

$$\Rightarrow Z_{ab}=\frac{(۱۲۰-۱۰\omega^{۲})+۴۰j\omega}{(۴-۵\omega^{۲})+۱۰j\omega}\Rightarrow Z_{ab}=\frac{[(۱۲۰-۱۰\omega^{۲})(۴-۱۵\omega^{۲})+۴۰۰\omega^{۲}]+j[۴۰\omega(۴-۵\omega^{۲})-۱۰\omega(۱۲۰-۱۰\omega^{۲})]}{(۴-۵\omega^{۲})^{۲}+۱۰۰\omega^{۲}}$$

برای اینکه Z_{ab} اهمی خالص شود، باید عبارت زیر صفر شود:

$$۴۰\omega(۴-۵\omega^{۲})-۱۰\omega(۱۲۰-۱۰\omega^{۲})=۰\Rightarrow \omega=۰ \text{ یا } ۴(۴-۵\omega^{۲})=۱۲۰-۱۰\omega^{۲}\Rightarrow \omega^{۲}=-۱۰/۴\Rightarrow \omega=\sqrt{۱۰/۴}\,j \text{ یا } \omega=-\sqrt{۱۰/۴}\,j$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega=۰ & \text{قق}\\ \omega=\sqrt{۱۰/۴}\,j & \text{غ قق}\\ \omega=-\sqrt{۱۰/۴}\,j & \text{غ قق}\end{cases}$$

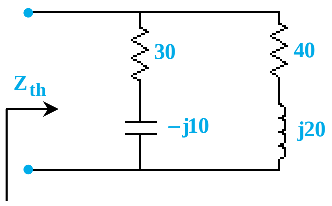
$$\omega=۰\Rightarrow Z_{ab}=۳۰\Omega$$

پس رابطه ولتاژ و جریان منبع در صورتی که $\omega=۰\frac{rad}{s}$ باشد، به صورت روبه‌رو است:

$$\frac{V_{\text{منبع}}}{I_{\text{منبع}}}=۳۰$$

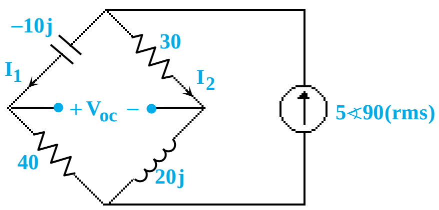
۱۴ـ گزینه «۳» برای به دست آوردن حداکثر توان جذبی Z_L کافی است مدار معادل تونن دیده شده از دو سر آن را به‌دست آوریم:

برای به‌دست آوردن Z_{th}، منبع جریان را بی‌اثر می‌کنیم. بنابراین:



$$\Rightarrow\quad Z_{th}=(۴۰+j۲۰)\,||\,(۳۰-j۱۰)=۲۰\Omega$$

برای به‌دست آوردن ولتاژ تونن کافی است ولتاژ مدار باز دیده شده از دو سر Z_L را به‌دست آوریم:



$$I_{۱}=\frac{۳۰+j۲۰}{۷۰+j۱۰}۵\angle۹۰=-۱/۱+j۲/۳$$

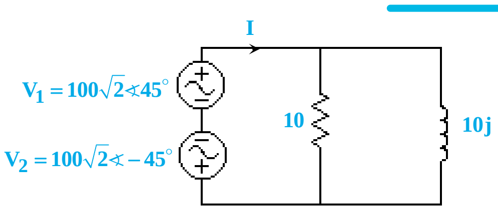
$$I_{۲}=۵\angle۹۰-I_{۱}=۱/۱+j۲/۷$$

$$V_{oc}=j۱۰I_{۱}+۳۰I_{۲}=۱۰+j۷۰\quad\Rightarrow\quad|V_{th}|=|V_{oc}|=\sqrt{۵۰۰۰}\simeq۷۰/۷۲v$$

بنابراین حداکثر توان جذبی Z_L برابر است با:

$$P_{Z_L\,max}=\frac{۱}{۴}\frac{|V_{th}|^{۲}}{R_{th}}=۶۲/۵w$$

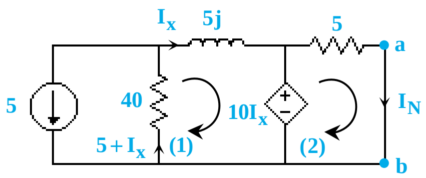
۱۵ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال کافی است فاز جریان را به‌دست آوریم:



$$I=\frac{۱۰۰\sqrt{۲}(۱\angle۴۵^{\circ}-۱\angle-۴۵^{\circ})}{۱۰}+\frac{۱۰۰\sqrt{۲}(۱\angle۴۵^{\circ}-۱\angle-۴۵^{\circ})}{۱۰j}\Rightarrow I=۲۸/۲۸\angle۴۵^{\circ}A$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بین I و $V_۱$ اختلاف فازی وجود ندارد.

۱۶ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی جریان نورتن از دید a و b کافی است دو سر a و b را اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را به‌دست آوریم:

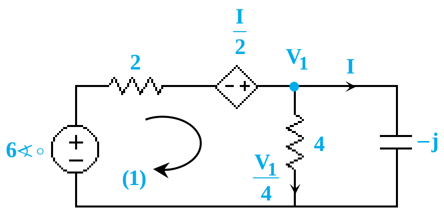


با اعمال KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$KVL(۱):۴۰\times(I_x+۵)+۵۰jI_x+۱۰I_x=۰\quad\Rightarrow\quad I_x(۵۰+۵۰j)=-۲۰۰\quad\Rightarrow\quad I_x=\frac{-۴}{۱+j}A$$

$$KVL(۲):۱۰I_x=۵I_N\quad\Rightarrow\quad I_N=۲I_x=\frac{-۸}{۱+j}=-۴+۴jA$$

۱۷ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی توان مختلط منبع مستقل کافی است جریان آن را به‌دست آوریم:



$$V_۱ = -jI$$

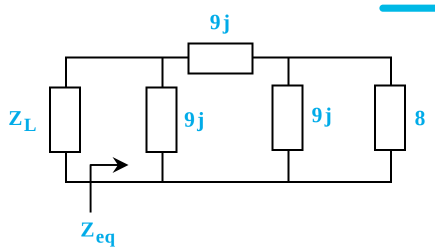
$$KVL\,(۱): -۶+۲\times(I+\frac{V_۱}{۴})-\frac{I}{۲}+V_۱=۰ \Rightarrow -۶+۲I-۰/۵jI-۰/۵I-jI=۰$$

$$\Rightarrow I(۱/۵-۱/۵j)=۶ \Rightarrow I=۲+۲jA$$

$$I_S = I+\frac{V_۱}{۴}=(۱-۰/۲۵j)I=۲/۵+۱/۵jA$$

$$S=\frac{۱}{۲}VI^*=\frac{۱}{۲}\times۶\times(۲/۵-۱/۵j)=۷/۵-۴/۵jVA$$

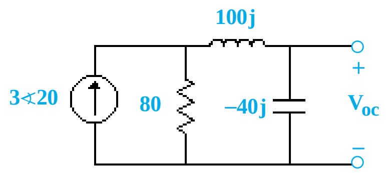
۱۸ـ گزینه «۲» برای اینکه ماکزیمم توان به Z_L برسد، باید Z_L برابر با مزدوج امپدانس دیده شده از دو سر باشد. بنابراین با بی‌اثر کردن منبع ولتاژ، امپدانس معادل را به‌دست می‌آوریم:



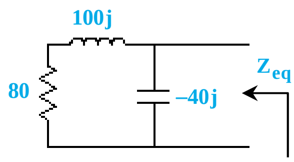
$$Z_{eq}=۹j\,||\,(۹j+(۹j\,||\,۸))=۰/۷۲+۵/۴۶j$$

$$Z_L=Z_{eq}^*=۰/۷۲-۵/۴۶j\Omega$$

۱۹ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی ماکزیمم توان جذب شده توسط بار مدار معادل تونن دیده شده از دو سر بار را به‌دست می‌آوریم:



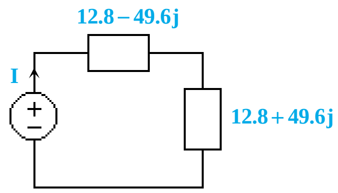
$$V_{th}=V_{oc}=-۴۰j\times\frac{۸۰}{۸۰+۶۰j}\times۳\measuredangle۲۰=۹۶\measuredangle-۱۰۶/۹^\circ$$



$$Z_{th}=Z_{eq}=(۸۰+۱۰۰j)\,||\,(-۴۰j)=۱۲/۸-۴۹/۶j\Omega$$

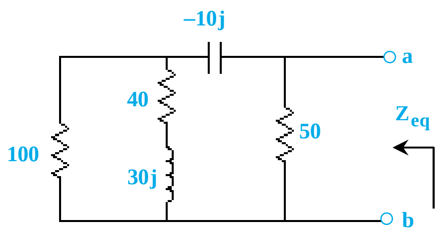
$$Z_L=Z_{th}^*=۱۲/۸+۴۹/۶j\Omega$$

بنابراین داریم:



$$P_{max}=\frac{۱}{۴}\frac{V_{th(rms)}^۲}{Re[Z_{th}]}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۹۶^۲}{۱۲/۸}=۱۸۰w$$

۲۰ـ گزینه «۲» زمانی ماکزیمم توان متوسط توسط مقاومت خالص جذب می‌شود که مقدار آن برابر اندازه‌ی امپدانس دیده شده از دو سر باشد. بنابراین داریم:



$$Z_{eq}=[۱۰۰\,||\,(۴۰+۳۰j)+(-۱۰j)]\,||\,۵۰=۱۹/۵+۱/۷۳j$$

$$R=|Z_{eq}|=۱۹/۵۸\simeq۱۹/۶\Omega$$

۲۱ـ گزینه «۳» مطابق قانون جمع آثار می‌توان جریان مقاومت R را به شکل زیر نوشت:

$$i_R=A_۱\cos(۲t+\theta_۱)+A_۲\cos(۲t+\theta_۲)+B\cos(t+\theta_۳)$$

حال مقادیر $A_۱$ و $A_۲$ و B را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، زمانی که منابع مدار به‌صورت تک‌تک روشن هستند، توان مقاومت R ناشی از منابع مختلف برابر است با:

$$P_{R(V_{S_۱})}=۱/۸w\ ,\ P_{R(I_{S_۱})}=۱/۲۵w\ ,\ P_{R(I_{S_۲})}=۵w$$

حال می‌توان توان مصرفی ناشی از هر منبع در مقاومت R را برحسب مقدار پیک جریان تولیدی آن منبع در مقاومت R، به شکل زیر نوشت و مقدار پیک جریان‌های مربوطه را محاسبه کرد:

$$P_{R(V_{S_۱})} = \frac{۱}{۲} R i^{۲}_{R(V_{S_۱})} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times A_۱^{۲} = A_۱^{۲} = ۱/۸ \Rightarrow A_۱ = \sqrt{۱/۸}$$

$$P_{R(I_{S_۱})} = \frac{۱}{۲} R i^{۲}_{R(I_{S_۱})} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times A_۲^{۲} = A_۲^{۲} = ۱/۲۵ \Rightarrow A_۲ = \sqrt{۱/۲۵}$$

$$P_{R(I_{S_۲})} = \frac{۱}{۲} R i^{۲}_{R(I_{S_۲})} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times B^{۲} = B^{۲} = ۵ \Rightarrow B = \sqrt{۵}$$

اکنون می‌توان مقدار مؤثر i_R را در شرایط جدید یعنی زمانی که همه منابع روشن هستند، محاسبه کرد:

$$i_R = \underbrace{\sqrt{۱/۸}\cos(۲t+\theta_۱) + \sqrt{۱/۲۵}\cos(۲t+\theta_۲)}_{i_۱(t)} + \underbrace{\sqrt{۵}\cos(t+\theta_۳)}_{i_۲(t)}$$

$$i^{۲}_{۱-rms} = \frac{۱}{۲} \times (۱/۸ + ۱/۲۵ + ۲ \times \sqrt{۱/۸ \times ۱/۲۵} \times \cos(\theta_۱ - \theta_۲)) = \frac{۱}{۲}(۳/۰۵ + ۳\cos(\theta_۱ - \theta_۲)) \quad , \quad i^{۲}_{۲-rms} = \frac{۱}{۲} \times ۵ = \frac{۵}{۲}$$

$$i^{۲}_{rms} = i^{۲}_{۱-rms} + i^{۲}_{۲-rms} = \frac{۱}{۲} \times (۸/۰۵ + ۳\cos(\theta_۱ - \theta_۲))$$

(دقت کنید که دامنه سیگنال $u(t) = a\cos(\omega t + \theta_۱) + b\cos(\omega t + \theta_۲)$ به‌صورت $\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + ۲ab\cos(\theta_۱ - \theta_۲)}$ می‌باشد.)

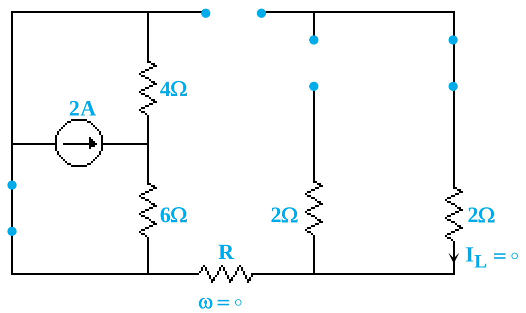
در نهایت می‌توان توان تلفاتی روی R را محاسبه کرد:

$$P_R = R i^{۲}_{rms} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times (۸/۰۵ + ۳\cos(\theta_۱ - \theta_۲)) = ۸/۰۵ + ۳\cos(\theta_۱ - \theta_۲)$$

$$\Rightarrow ۸/۰۵ - ۳ \le P_R \le ۸/۰۵ + ۳ \Rightarrow ۵/۰۵\,w \le P_R \le ۱۱/۰۵\,w$$

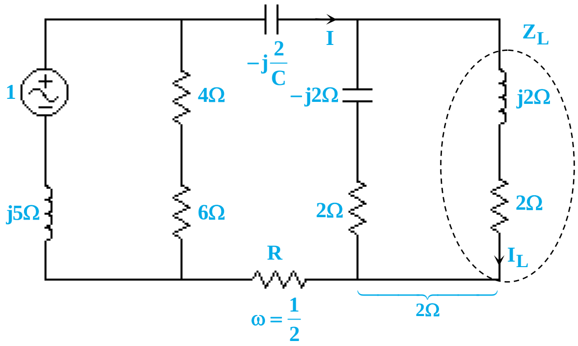
می‌بینیم که تنها گزینه (۳) یعنی $P_R = ۱۱$ وات در محدوده قابل دستیابی است.

۲۲ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را در حالت ماندگار DC مدل می‌کنیم تا ببینیم چه توانی در اثر منبع جریان DC به Z_L می‌رسد:



با توجه به شکل روبه‌رو مشخص است که جریان بارِ ناشی از منبع DC در حالت دائمی صفر بوده و لذا مقدار R و C هیچ تأثیری در توان بار Z_L در حالت DC ندارند.

حال مدار را در حالت فازوری و با فرض $\omega = \frac{۱}{۲}\frac{rad}{s}$ مدل می‌کنیم:



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

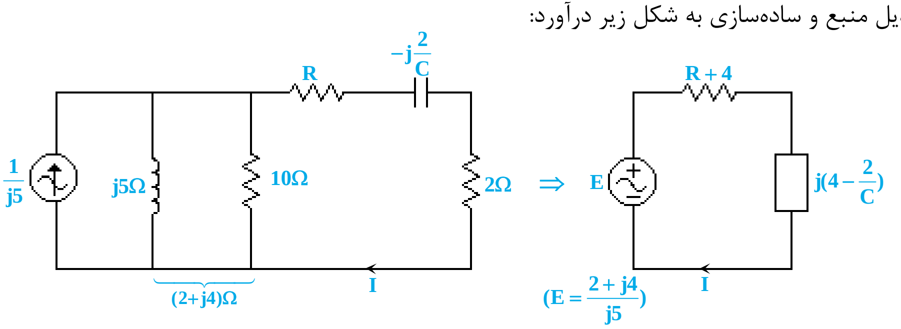
$$I_L = \frac{۲ - j۲}{۲ - j۲ + ۲ + j۲} \times I = \frac{۱ - j}{۲} I$$

$$\Rightarrow |I_L| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}|I| \quad , \quad P_{Z_L} = \frac{۱}{۲} R_L |I_L|^{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \frac{۱}{۲}|I|^{۲} = \frac{۱}{۲}|I|^{۲}$$

لذا برای آن که توان بار Z_L حداکثر شود، کافی است اندازه جریان I بیشینه گردد.

(I_L و I مقدار ماکزیمم جریان‌های سینوسی نشان داده شده هستند.)

حال می‌توان مدار را با تبدیل منبع و ساده‌سازی به شکل زیر درآورد:



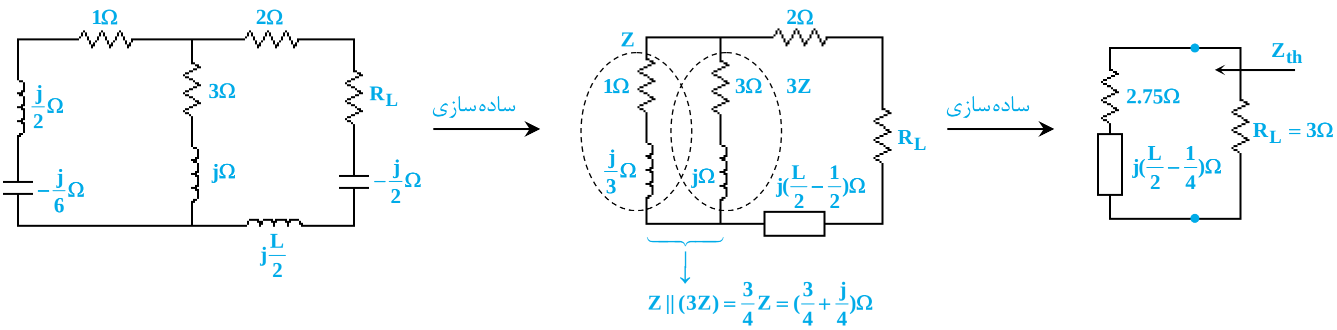
با توجه به شکل داریم:

$$I=\frac{E}{R+۴+j(۴-\frac{۲}{C})}\Rightarrow |I|=\frac{|E|}{\sqrt{(R+۴)^۲+(۴-\frac{۲}{C})^۲}}$$

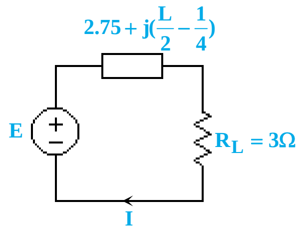
برای آن که $|I|$ بیشینه شود، مخرج رابطه بالا کمینه شود؛ لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}R=۰\\ ۴-\frac{۲}{C}=۰\Rightarrow C=\frac{۱}{۲}F\end{cases}$$

۲۳ـ گزینه «۱» در درجه اول باید دقت کرد که در حالت DC و در حالت ماندگار، مقدار L هیچ تأثیری در توان مصرفی R_L ندارد، زیرا در نهایت سلف اتصال کوتاه خواهد شد. همچنین دقت کنید از آنجایی که امپدانس شبکه متغیر و مطلوب است، نمی‌توانیم از قضیه تطبیق امپدانس استفاده کنیم. با توجه به مقدار ثابت و معین بار، در اینجا کافی است مقدار L طوری تنظیم شود که جریان بار R_L بیشینه گردد. حال مدار را در حالت فازوری و با $\omega=\frac{۱}{۲}\frac{rad}{s}$ مدل نموده و سعی می‌کنیم امپدانس شبکه از دید R_L را محاسبه کنیم. بدین منظور تمامی منابع را غیرفعال می‌کنیم:



لذا می‌توان مدار را به شکل مقابل مدل نمود:



دقت کنید که در مدار روبه‌رو مقدار E معین بوده و مستقل از مقدار L است، چرا که E یا ولتاژ تونن مدار از دو سر R_L، باید در حالت مدار باز و زمانی که R_L برابر بی‌نهایت است، به دست آید که در این حالت جریان L نیز صفر بوده و مقدار آن تأثیری در ولتاژ مدار باز خروجی ندارد. حال برای آن که توان R_L ماکزیمم گردد، باید دامنه‌ی جریان I حداکثر باشد و این زمانی رخ می‌دهد که اندازه‌ی امپدانس مدار از دید E حداقل گردد:

$$|I|=\frac{|E|}{\underbrace{|R_L+۲/۷۵+j(\frac{L}{۲}-\frac{۱}{۴})|}_{Z}}\qquad |Z|\downarrow\ \Rightarrow |I|\uparrow$$

این مهم زمانی رخ می‌دهد که جزء موهومی Z برابر صفر باشد.

$$\frac{L}{۲}-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow L=\frac{۱}{۲}H$$

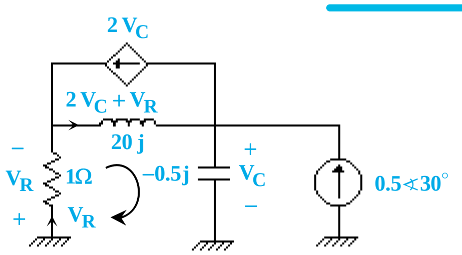
۲۴ـ گزینه «۱» با مساوی قرار دادن امپدانس و ادمیتانس دیده شده از دو سر A و B داریم:

$$Y_{in}=\frac{۱}{Z_{in}}=Z_{in}\ \Rightarrow |Z_{in}|=۱\ \Rightarrow \frac{|(R+\omega j)(R-\frac{j}{C\omega})|}{|۲R+j(\omega-\frac{۱}{C\omega})|}=۱\Rightarrow \frac{|R^۲+\frac{۱}{C}+jR(\omega-\frac{۱}{C\omega})|}{|۲R+j(\omega-\frac{۱}{C\omega})|}=۱$$

بنابراین مشاهده می‌شود برای برابری اندازه‌ی صورت و مخرج تحت هر فرکانس باید:

$$\begin{cases}R=۱\\ R^۲+\frac{۱}{C}=۲R\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=۱\Omega\\ C=۱F\end{cases}$$

۲۵ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:

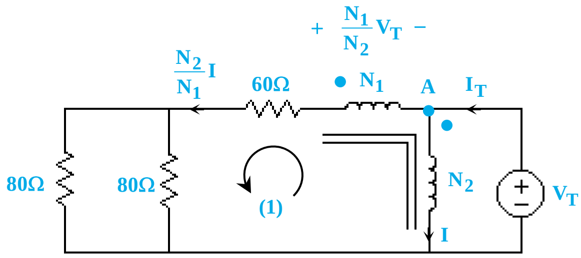


با اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$+V_R+۲۰j(۲V_c+V_R)+V_c=۰\ \Rightarrow\ (۱+۲۰j)V_R=-۱(۱+۴۰j)V_c\ \Rightarrow\ \frac{|V_R|}{|Vc|}=\frac{|-(۱+۴۰j)|}{|۱+۲۰j|}=۱/۹۹۸\simeq ۲$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل پنجم

۱ـ گزینه «۱» زمانی حداکثر توان به مقاومت R_L انتقال پیدا می‌کند که مقاومت بار برابر مقاومت تونن دیده شده از دو سرش باشد. بنابراین با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T در دو سر بار مقاومت تونن را به‌دست می‌آوریم:



با اعمال KVL در حلقه‌ی (۱) و KCL در گره A داریم:

$$KCL\ A: I_T = I + \frac{N_۲}{N_۱}I = (\frac{N_۱+N_۲}{N_۱})I \qquad (۱)$$

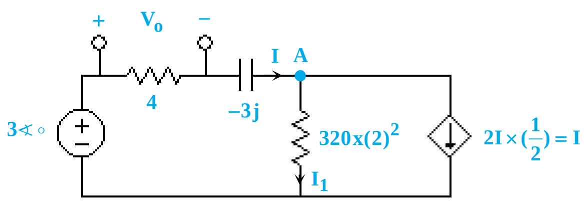
$$KVL\,(۱): -V_T - \frac{N_۱}{N_۲}V_T + (۶۰+۸۰\,||\,۸۰)\frac{N_۲}{N_۱}I \Rightarrow -V_T(\frac{N_۱+N_۲}{N_۲}) + ۱۰۰\frac{N_۲}{N_۱}I = ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_T(\frac{N_۱+N_۲}{N_۲}) = ۱۰۰\frac{N_۲}{N_۱}\times\frac{N_۱}{N_۱+N_۲}I_T \Rightarrow V_T = ۱۰۰(\frac{N_۲}{N_۱+N_۲})^۲ I_T$$

بنابراین:

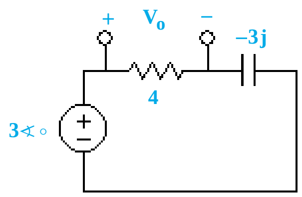
$$R_{th} = ۱۰۰(\frac{N_۲}{N_۱+N_۲})^۲ = ۱۶ \Rightarrow \frac{N_۲}{N_۱+N_۲} = ۰/۴ \Rightarrow \frac{N_۲}{N_۱} = ۰/۶۶$$

۲ـ گزینه «۲» ابتدا المان‌های موجود در سمت راست ترانس را به سمت چپ انتقال داده و سپس مقدار V_o را تعیین می‌کنیم:



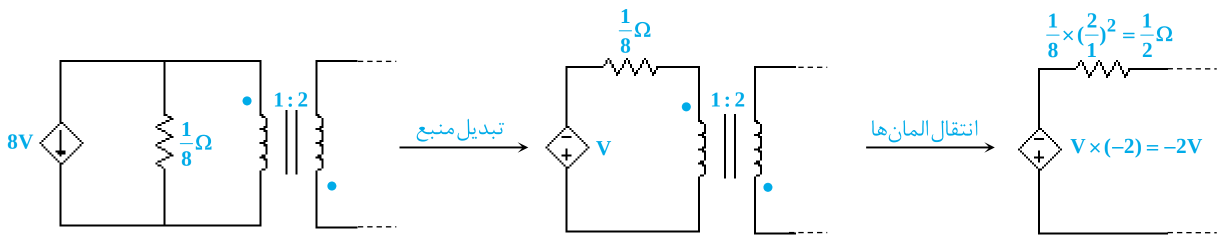
$$KCL\ \ A: I = I + I_۱ \Rightarrow I_۱ = ۰$$

بنابراین مدار به صورت زیر به دست می‌آید:

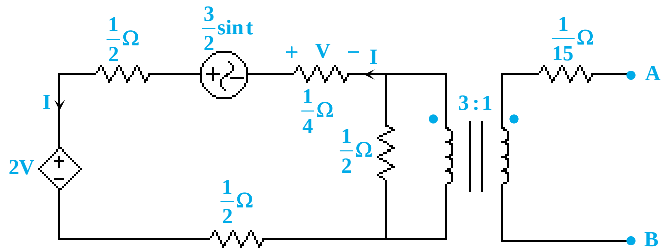


$$\Rightarrow V_o = \frac{۴}{۴-۳j}\times ۳\measuredangle ۰ = ۲/۴\measuredangle ۳۶^\circ\ v$$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا منبع جریان وابسته را به همراه مقاومت موازی آن، به منبع ولتاژ معادلش تبدیل نموده و سپس آن را به سمت راست ترانسفورماتور سمت چپ مدار انتقال می‌دهیم:



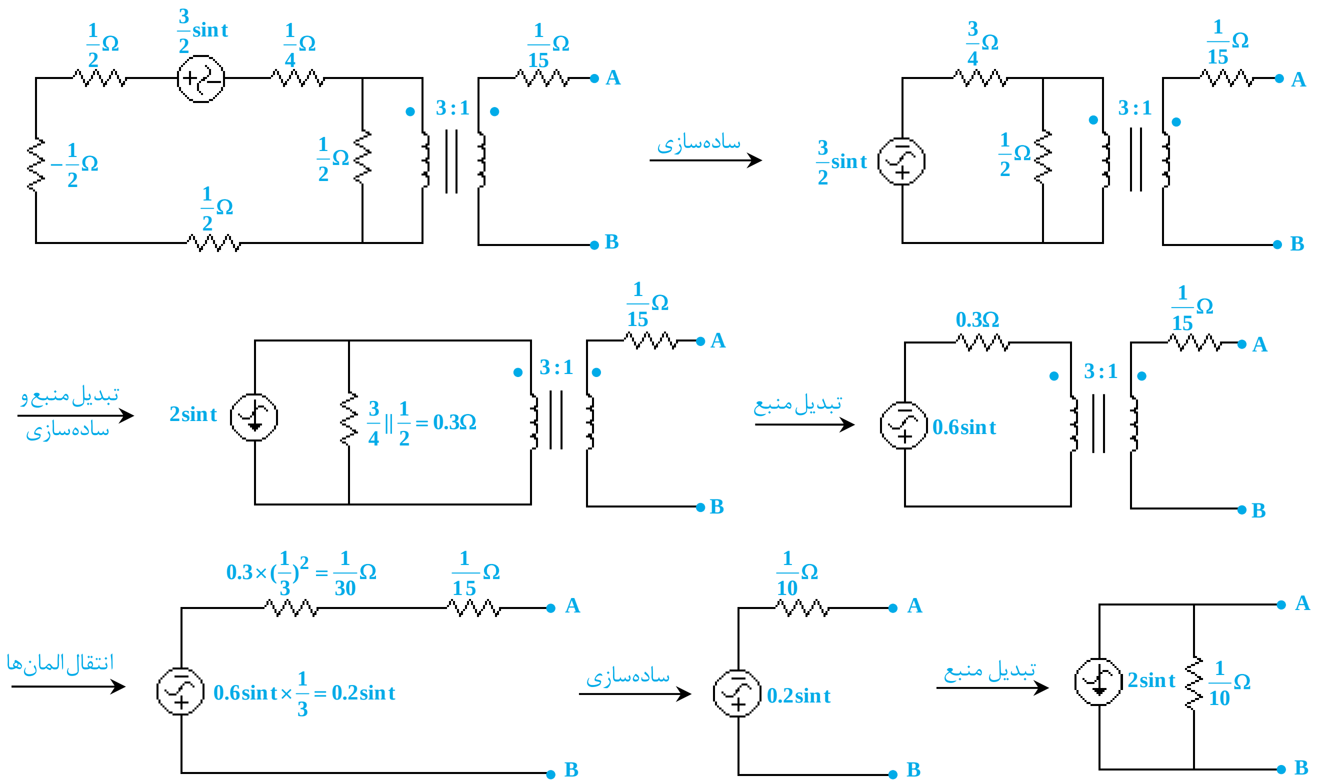
لذا مدار به شکل زیر درمی‌آید:



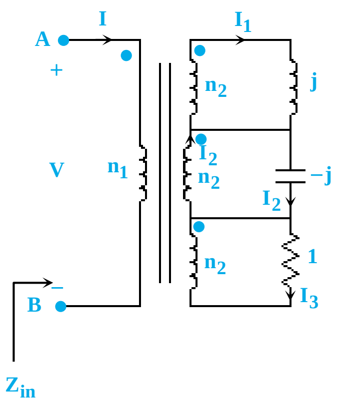
در این مدار می‌توان منبع ولتاژ وابسته را با مقاومت R جایگزین نمود:

$$I = -\frac{V}{\frac{۱}{۴}} = -۴V \quad , \quad R = \frac{۲V}{I} = \frac{۲V}{-۴V} = -\frac{۱}{۲}\Omega$$

حال با جایگزینی R به جای منبع وابسته، مدار را ساده می‌کنیم:



۴ـ گزینه «۳» ابتدا جریان عبوری از سیم‌پیچی‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$I_۱ = \frac{\frac{n_۲}{n_۱}V}{j} = -۰/۵jV$$

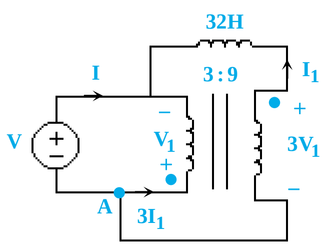
$$I_۲ = \frac{\frac{n_۲}{n_۱}V}{-j} = ۰/۵jV$$

$$I_۳ = \frac{n_۲}{n_۱}V = ۰/۵V$$

از طرفی با نوشتن قانون آمپر داریم:

$$n_۱I = n_۲I_۱ + n_۲I_۲ + n_۲I_۳ = n_۲(I_۱ + I_۲ + I_۳) \Rightarrow ۴I = ۲\times(۰/۵j - ۰/۵j + ۰/۵)V \Rightarrow V = ۴I \Rightarrow Z_{in} = ۴\Omega$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا اندوکتانس‌های معادل دیده شده از دو سر خازن را به دست می‌آوریم:

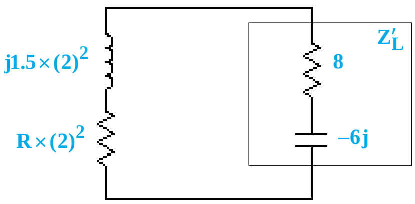


$$\text{KCL A}: I + ۳I_۱ + I_۱ = ۰ \Rightarrow I_۱ = -\frac{I}{۴}$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی خارجی)}: -V - ۳۲\frac{dI_۱}{dt} + ۳V_۱ = ۰ \xrightarrow[I_۱ = -\frac{I}{۴}]{V_۱ = -V} -۴V - ۳۲\frac{d}{dt}(-\frac{I}{۴}) = ۰ \Rightarrow ۴V = \frac{۸dt}{dt} \Rightarrow V = \frac{۲dt}{dt} \Rightarrow L_{eq} = ۲H$$

بنابراین فرکانس رزونانس به صورت روبه‌رو می‌باشد:

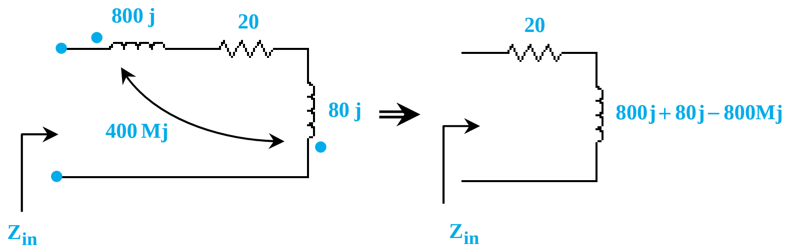
$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۴\pi}Hz$$



۶ـ گزینه «۱» ابتدا منبع ولتاژ را بی‌اثر کرده و سپس با نسبت تبدیل $(\frac{۱۰۰+۱۰۰}{۱۰۰})^۲$ امپدانس‌های سمت اولیه‌ی اتوترانسفورمر را به سمت ثانویه‌ی آن انتقال می‌دهیم.

برای انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L داریم:

$$Z'_L = Z_{th}^* \Rightarrow ۸-۶j=(۴R+۶j)^* \Rightarrow R=۲\Omega$$



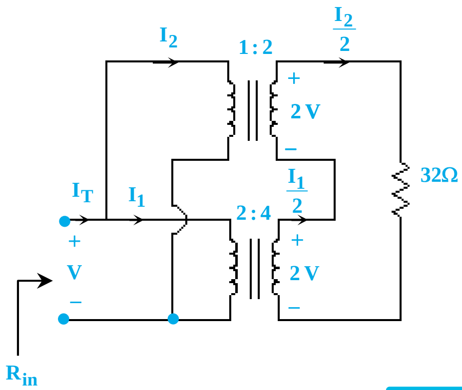
۷ـ گزینه «۳» از آنجا که هر دو سلف $L_۱$ و $L_۲$ روی یک هسته پیچیده شده‌اند، بنابراین حتماً دارای تزویج متقابل می‌باشند. از طرفی شار تولیدی دو سیم‌پیچ در خلاف جهت هم می‌باشد. بنابراین مدار معادل شکل داده شده به صورت روبه‌رو می‌باشد.

بنابراین:

$Z_{in}=۲۰+(۸۸۰-۸۰۰M)j \Rightarrow$ پس گزینه‌ی (۳) پاسخ صحیح است.

حال با توجه به اینکه قسمت موهومی در گزینه‌ی ۳ برابر ۷۰۰ می‌باشد، می‌توانیم مقدار M را نیز محاسبه کنیم:

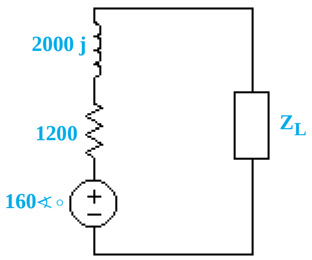
$$۸۸۰-۸۰۰M=۷۰۰ \Rightarrow M=۰/۲۲۵H$$



۸ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مدار مشاهده می‌شود که اولیه‌ی ترانس‌ها با هم موازی و ثانویه ترانس با هم سری شده‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{I_۱}{۲}=\frac{I_۲}{۲} \Rightarrow I_۱=I_۲ \Rightarrow I_T=۲I_۱$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی خروجی)}: ۴V=\frac{I_۱}{۲}\times ۳۲=۱۶I_۱ \Rightarrow V=۴I_۱=۲I_T \Rightarrow R_{in}=۲\Omega$$



۹ـ گزینه «۱» ابتدا تمام المان‌ها را به سمت ثانویه‌ی اتوترانسفورمر انتقال می‌دهیم:

$$(a=\frac{N_۱+N_۲}{N_۲}=\frac{۸۰۰}{۲۰۰}=۴)$$

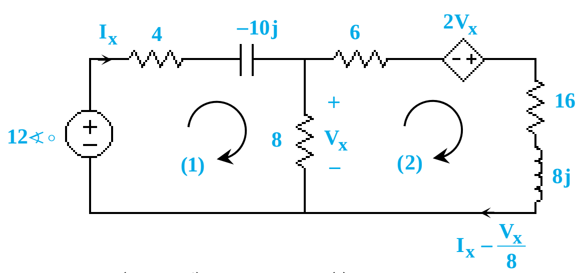
برای انتقال توان ماکزیمم داریم:

$$Z_L=Z_{th}^*=۱۲۰۰-۲۰۰۰j=(۱/۲-۲j)k\Omega$$

بنابراین توان ماکزیمم برابر است با:

$$P_{L\max}=\frac{V_{rms}^۲}{۴Re[Z_L]}=\frac{(۱۶۰)^۲}{۴\times ۱۲۰۰}=۵/۳w$$

۱۰ـ گزینه «۴» با انتقال المان‌های مدار به بخش میانی داریم:



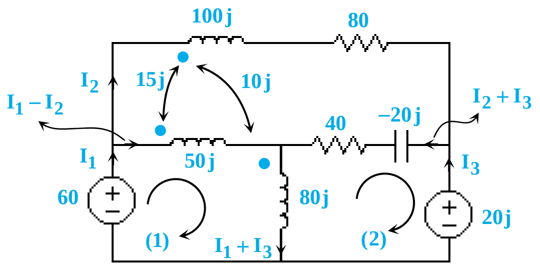
با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$KVL(۱): -۱۲+(۴-۱۰j)I_x+V_x=۰ \Rightarrow V_x+(۴-۱۰j)I_x=۱۲ \quad (۱)$$

$$KVL(۲): -V_x+(۲۲+۸j)(I_x-\frac{V_x}{۸})-۲V_x=۰ \Rightarrow (۵/۷۵+j)V_x=(۲۲+۸j)I_x \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{(۲۲+۸j)}{(۵/۷۵+j)}I_x+(۴-۱۰j)I_x=۱۲ \Rightarrow |I_x|=۰/۹۸\simeq ۱A$$

۱۱ـ گزینه «۳» ابتدا جریان شاخه‌های مدار را بر حسب جریان‌های مشخص شده تعیین می‌کنیم و سپس با اعمال KVL در سه حلقه موجود، مقدار $I_۱+I_۲$ را به دست می‌آوریم:



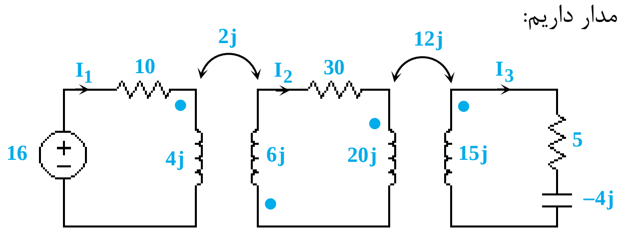
$$KVL(۱): -۶۰+۵۰j(I_۱-I_۲)+۱۵jI_۲+۸۰j(I_۱+I_۳)+۱۰jI_۲=۰ \Rightarrow ۱۳۰jI_۱-۲۵jI_۲+۸۰jI_۳=۶۰ \quad (۱)$$

$$KVL(۲): -(۴۰-۲۰j)(I_۲+I_۳)+۲۰j-۸۰j(I_۱+I_۳)-۱۰jI_۲=۰ \Rightarrow ۸۰jI_۱+(۴۰-۱۰j)I_۲+(۴۰+۶۰j)I_۳=۲۰j \quad (۲)$$

KVL (حلقه‌بیرونی): $-۶۰+۱۰۰jI_۲+۱۵j(I_۱-I_۲)+۱۰j(I_۱+I_۳)+۸۰I_۲+۲۰j=۰ \Rightarrow ۲۵jI_۱+(۸۰+۸۵j)I_۲+۱۰jI_۳=۶۰-۲۰j \quad (۳)$

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \begin{cases} I_۱=۰/۴۸۹-۱/۲۱۰۷j \\ I_۲=۰/۰۸۵۶-۰/۳۹۷۸j \\ I_۳=-۰/۷۶۸+۱/۰۹۳j \end{cases} \Rightarrow |I_۱+I_۲|=۱/۷A$$

۱۲ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:



$$KVL(۱): -۱۶+۱۰I_۱+۴jI_۱+۲jI_۲=۰ \Rightarrow (۱۰+۴j)I_۱+۲jI_۲=۱۶ \quad (۱)$$

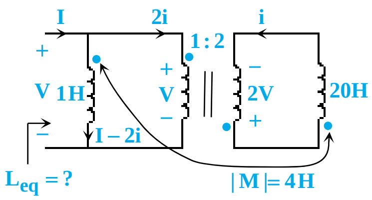
$$KVL(۲): ۶jI_۲+۲jI_۱+۳۰I_۲+۲۰jI_۲-۱۲jI_۳=۰ \Rightarrow ۲jI_۱+(۳۰+۲۶j)I_۲-۱۲jI_۳=۰ \quad (۲)$$

$$KVL(۳): (۵-۴j)I_۳+۱۵jI_۳-۱۲jI_۲=۰ \Rightarrow (۵+۱۱j)I_۳-۱۲jI_۲=۰ \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \begin{cases} I_۱=۱/۳۸-۰/۵۴j \\ I_۲=-۰/۰۵-۰/۰۵j \\ I_۳=-۰/۰۲۶۸-۰/۰۷۲۱j \end{cases} \Rightarrow |I_۲|=۷۷mA$$

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا باید امپدانس دیده شده از دو سر ورودی جعبه $N_۱$ را به دست آورد. برای این کار ابتدا قسمت سمت راست را ساده می‌کنیم.

با اعمال KVL در حلقه سمت راست داریم:



$$۲۰\frac{di}{dt}+۴(\frac{dI}{dt}-۲\frac{di}{dt})-۲V=۰ \Rightarrow \boxed{۱۲\frac{di}{dt}+۴\frac{dI}{dt}=۲V} \quad (۱)$$

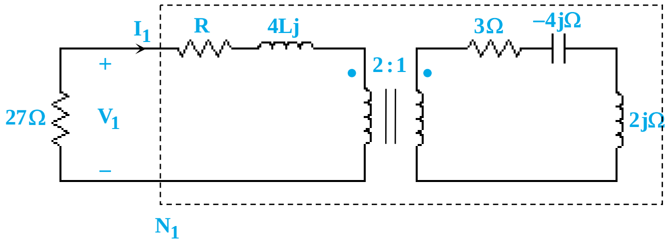
با اعمال KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$(\frac{dI}{dt}-۲\frac{di}{dt})+۴\frac{di}{dt}-V=۰ \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt}+۲\frac{di}{dt}=V} \quad (۲)$$

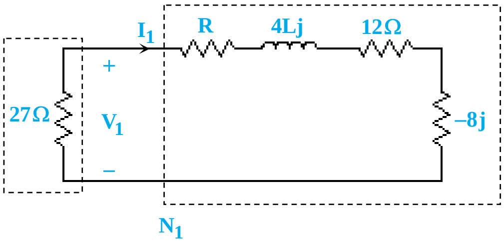
با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$V=\frac{۱}{۲}\frac{dI}{dt} \Rightarrow L_{eq}=\frac{۱}{۲}H$$

حال مدار ساده شده با $\omega=۴\frac{rad}{s}$ به صورت زیر است:



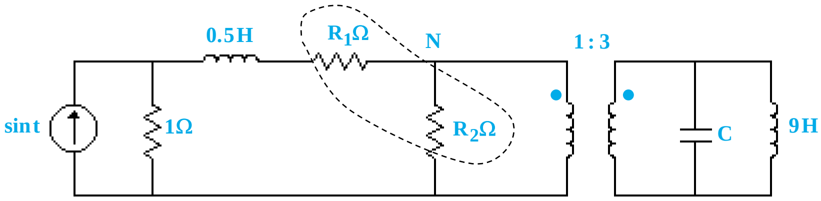
با انتقال امپدانس سمت راست ترانس به سمت چپ آن به مدار زیر می‌رسیم:



برای اعمال هم‌فاز بودن V و I $\rightarrow$ ضریب توان $=۱ \Rightarrow ۴Lj-۸j=۰ \Rightarrow \boxed{L=۲H}$

رسیدن حداکثر توان به $N_۱$ $\rightarrow R+۱۲=۲۷ \Rightarrow \boxed{R=۱۵\Omega}$

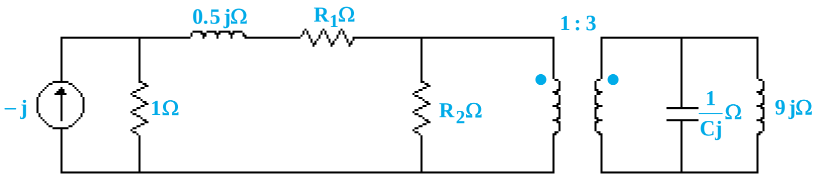
۱۴ـــ گزینه «۳» می‌خواهیم مجموع توان مصرفی مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ حداکثر شود، یعنی می‌خواهیم توان مصرفی شبکه N مشخص شده ماکزیمم شود. همواره در این‌گونه مسائل (حداکثر توان مصرفی) به دنبال امپدانس دیده‌شده از دو سر باری هستیم که می‌خواهیم توان مصرفی آن حداکثر شود. ولی در این مثال شبکه N که همان بارهاست، ۲ سر ندارد!!!



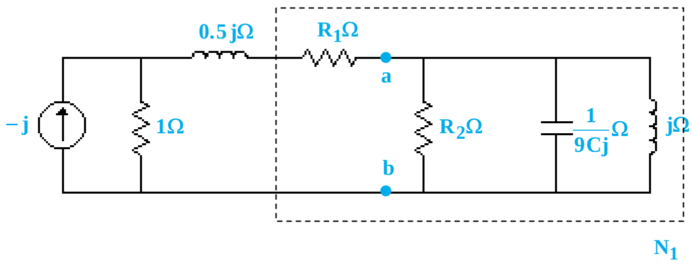
با توجه به این‌که خازن و سلف توان متوسط صفر دارند، می‌توانیم خازن C و سلف ۹ هانری را به طرف چپ منتقل کرده و آن‌ها را هم جزو شبکه N درنظر بگیریم و به دنبال امپدانس دیده‌شده از دو سر شبکه جدید باشیم. مدار را در حالت دائمی رسم می‌کنیم:

$\sin(t)=\cos(t-۹۰)$

$\sin(t) \Rightarrow ۱\measuredangle-۹۰=-j$

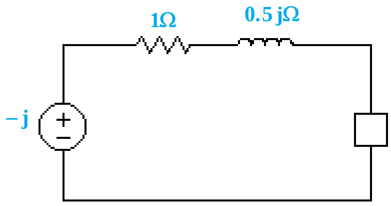


حال خازن C و سلف ۹ هانری را به سمت چپ ترانس منتقل می‌کنیم.



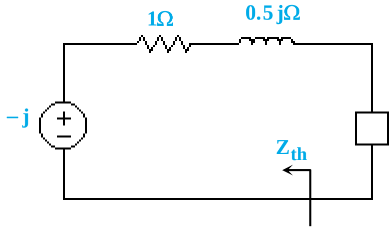
حال اگر توان مصرفی شبکه $N_۱$ حداکثر شود، مجموع توان مصرفی مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ هم حداکثر می‌شود.

شبکه $N_۱$ را ساده می‌کنیم. $Y=$ ادمیتانس دیده‌شده از دو سر a و b $=\dfrac{۱}{R_۲}+۹Cj+\dfrac{۱}{j}$ امپدانس دیده‌شده از دو سر a و b $=\dfrac{۱}{Y}$



$$Z_L=R_۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۱}{R_۲}+۹Cj+\cfrac{۱}{j}}$$

$\Rightarrow$



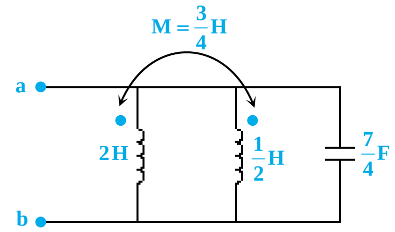
$Z_L=۰/۵+\dfrac{۱-(۹C-۱)j}{۱+(۹C-۱)^۲} \Leftarrow$ امپدانس باری که می‌خواهیم حداکثر توان متوسط را مصرف کند.

$Z_{th}=۱+۰/۵j$ برای این‌که توان مصرفی Z_L حداکثر شود $\Rightarrow Z_L=Z_{th}^*$

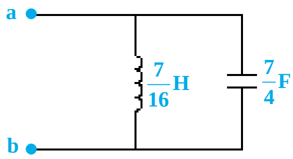
$$\Rightarrow 0/5+\frac{1-(9C-1)j}{1+(9C-1)^2}=(1+0/5j)^*=1-0/5j \Rightarrow \begin{cases} 0/5+\dfrac{1}{1+(9C-1)^2}=1 \\ \dfrac{-(9C-1)}{1+(9C-1)^2}=-0/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+(9C-1)^2}=0/5 \\ \dfrac{(9C-1)}{1+(9C-1)^2}=0/5 \end{cases} \Rightarrow (9C-1)=1 \Rightarrow C=\frac{2}{9}F$$

۱۵ـ گزینه «۲» باید امپدانس یا ادمیتانس مدار را از دو سر a و b به‌دست آوریم. برای این منظور، مدار سمت راست ترانس را به طرف چپ ترانس با توجه به قضیه انتقال امپدانس، منتقل می‌کنیم.

$$L_t=\frac{2\times\frac{1}{2}-(\frac{3}{4})^2}{2+\frac{1}{2}-2\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{16}$$



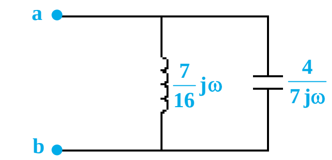
$\Rightarrow$



امپدانس هر یک از المان‌ها بر روی شکل مشخص شده است.

ادمیتانس دیده شده از دو سر a و b را به‌دست می‌آوریم، در نتیجه داریم:

$\Rightarrow$



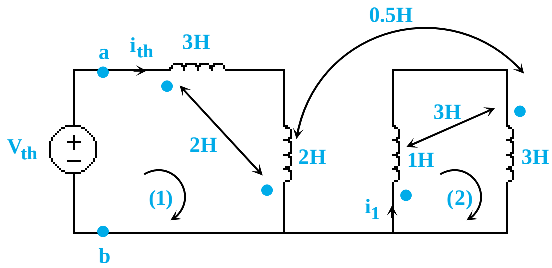
$$Y_{ab}=\frac{1}{\frac{7}{16}j\omega}+\frac{7j\omega}{4}$$

برای این‌که مدار در حالت تشدید باشد، باید قسمت موهومی Y_{ab}، صفر باشد. بنابراین داریم:

$$I_m[Y_{ab}]=I_m[\frac{-16j}{7\omega}+\frac{7j\omega}{4}]=\frac{-16}{7\omega}+\frac{7\omega}{4}$$

$$I_m[Y_{ab}]=0 \Rightarrow \frac{-16}{7\omega}+\frac{7\omega}{4}=0 \Rightarrow \omega^2=\frac{16\times4}{49} \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{8}{7}\frac{rad}{s}}$$

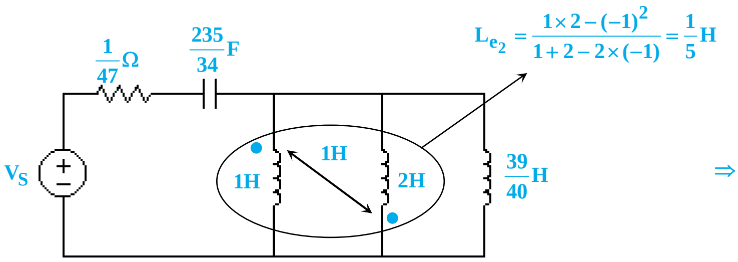
۱۶ـ گزینه «۳» ابتدا سلف معادل از دید a و b را پیدا می‌کنیم.



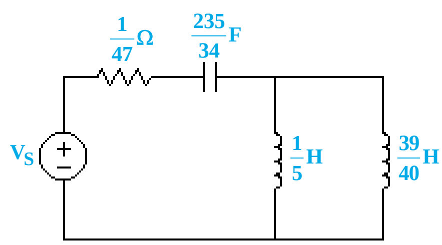
$$\begin{cases} KVL_1: V_{th}=3i'_{th}-2i'_{th}+2i'_{th}-2i'_{th}-0/5i'_1 \\ KVL_2: i'_1+3i'_1+3i'_1-0/5i'_{th}+3i'_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{th}=i'_{th}-0/5i'_1 \\ 10i'_1=0/5i'_{th} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{th}=i'_{th}-0/5\times[\frac{0/5}{10}i'_{th}]$$

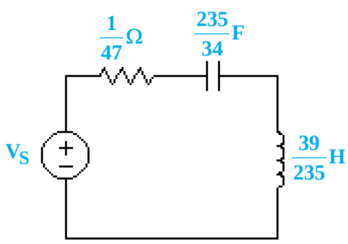
$\Rightarrow V_{th}=\frac{39}{40}i'_{th} \Rightarrow$ سلف دیده شده از دو سر a و b $=\frac{39}{40}H$



$\Rightarrow$

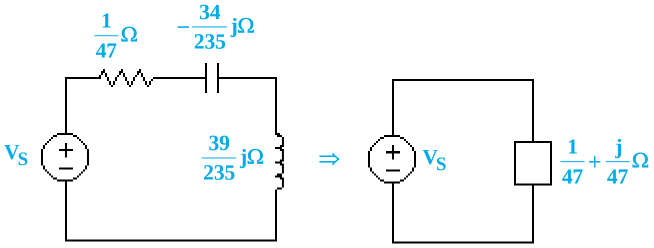


$\Rightarrow$



مدار را به حالت دائمی سینوسی می‌بریم:

با توجه به اینکه ضریب توان منبع، برابر کسینوس فاز امپدانس دیـده شده از دو سر آن است، داریم:

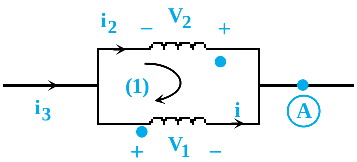


$$P.F = \text{ضریب توان منبع} = \cos(\measuredangle[\frac{۱}{۴۷}+\frac{j}{۴۷}]) = \cos(\measuredangle[\frac{۱}{۴۷}\times[۱+j]])$$

$$= \cos[\measuredangle(۱+j)] = \cos(۴۵^\circ) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

همچنین چون فاز امپدانس دیده شده از دو سر منبع مثبت است، پس ضریب توان پس‌فاز است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به موازی شدن سمت اولیه و ثانویه ترانس روبه‌رو، داریم:

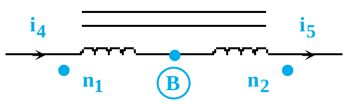


$$\begin{cases} \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{n_۱}{n_۲} = ۲ \\ KVL_۱ : V_۲ + V_۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۲V_۲ \\ V_۱ + V_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow V_۱ = V_۲ = ۰ \qquad (۱)$$

$$n_۲ i_۲ = n_۱ \times i \Rightarrow i_۲ = \frac{n_۱}{n_۲}\times i = ۲i \Rightarrow i_۲ = ۲i$$

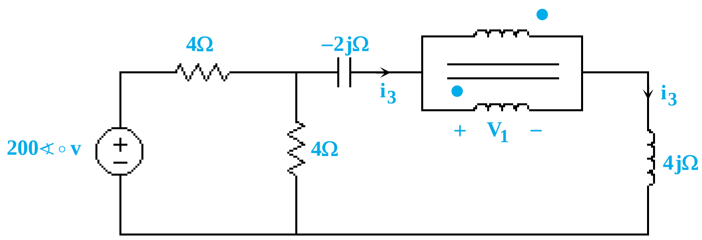
$$\Rightarrow KCL_A : i_۳ = i_۲ + i = ۲i + i = ۳i \Rightarrow i_۳ = ۳i \qquad (۲)$$

با توجه به سری شدن سمت اولیه و ثانویه ترانس روبه‌رو، خواهیم داشت:

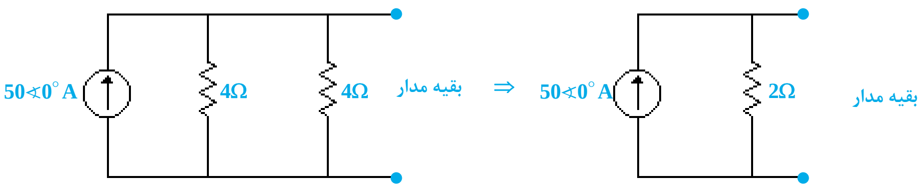


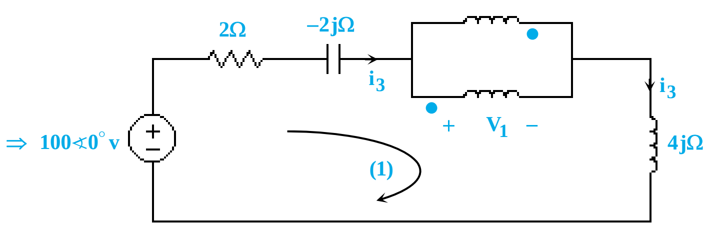
$$\begin{cases} i_۴ \times n_۱ = i_۵ \times n_۲ \\ KCL_B : i_۴ = i_۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_۵ = ۲i_۴ \\ i_۴ = i_۵ \end{cases} \Rightarrow i_۴ = i_۵ = ۰$$

پس شاخه مربوط به این ترانس دارای جریان صفر است. بنابراین داریم:



با استفاده از تونن نورتن، سمت چپ مدار را ساده می‌کنیم.



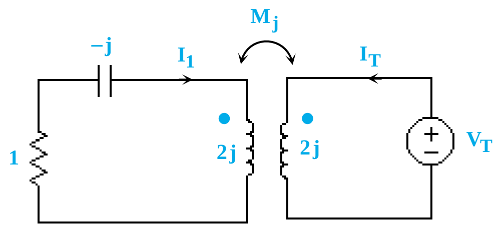


$$KVL_۱ : ۱۰۰ = (۲ - ۲j + ۴j)\times i_۳ + V_۱ \qquad (۳)$$

$$(۱),(۳) \Rightarrow i_۳ = \frac{۱۰۰}{۲+۲j} = ۲۵ - ۲۵j \Rightarrow i_۳ = ۲۵ - ۲۵j \qquad (۴)$$

$$(۲),(۴) \Rightarrow ۳i = ۲۵ - ۲۵j \Rightarrow \boxed{i = \frac{۲۵}{۳}(۱-j)A}$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا منبع ولتاژ مستقل را بی‌اثر کرده و سپس امپدانس تونن دیده شده از دو سر مقاومت R را محاسبه می‌کنیم:

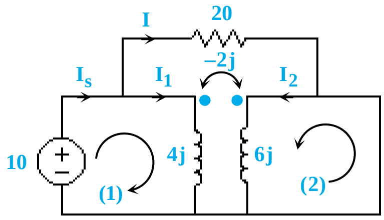


$$\text{KVL (حلقه‌ی چپ)}: (۱-j+۲j)I_۱ + MjI_T = ۰ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی راست)}: V_T = ۲jI_T + MjI_۱ \xrightarrow{(۱)} V_T = (۲j + \frac{M^۲}{۱+j})I_T \Rightarrow Z_{eq} = \frac{M^۲ - ۲ + ۲j}{۱+j}$$

برای انتقال توان ماکزیمم اندازه‌ی امپدانس معادل باید با مقدار R برابر باشند. با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود تنها گزینه‌ی ۲ می‌تواند گزینه‌ی صحیح باشد.

۱۹ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:



$$I = \frac{۱۰}{۲۰} = ۰/۵A$$

$$\text{KVL}(۱): ۱۰ = ۴jI_۱ - ۲jI_۲ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL}(۲): ۶jI_۲ - ۲jI_۱ = ۰ \Rightarrow I_۱ = ۳I_۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۰ = ۴jI_۱ - ۲j\frac{I_۱}{۳} \Rightarrow I_۱ = -۳jA$$

بنابراین جریان منبع برابر است با:

$$I_s = I + I_۱ = \frac{۱}{۲} - ۳jA$$

۲۰ـ گزینه «۲»

$$V_۲ = j\omega L_۲ I_۲ + j\omega I_۱ M$$

$$V_۲ = j\omega(\frac{۲V_R}{\frac{R}{۲}} \times \frac{M}{۲} + \frac{V_R}{R}M)$$

$$V_۲ = j\omega(\frac{۲MV_R + MV_R}{R}) \Rightarrow |M| = \frac{R}{۳\omega}\left|\frac{V_۲}{R}\right|$$