فصل اول

« تبدیل لاپلاس »

یکی از مهم‌ترین مسائلی که در درس کنترل فرآیند با آن مواجه خواهیم شد، حل معادلات دیفرانسیلی می‌باشد. معادلات به‌دست آمده از حل سیستم‌ها، اغلب معادلاتی پیچیده هستند. از اینرو به‌دنبال روشی هستیم که از طریق آن سیستم‌ها را بصورت ساده‌تر حل و فصل نماییم.

روش تبدیل لاپلاس یک روش خاص جهت حل معادلات دیفرانسیلی می‌باشد که در حل معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره‌ای کاربردهای فراوانی دارد. یکی از مزایای روش تبدیل لاپلاس این است که بدون حل معادلات پیچیده دیفرانسیلی که بازگو کننده شرایط سیستم می‌باشد، می‌توان عکس العمل و عملکرد سیستم را پیش‌بینی نمود.

تعریف تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته از متغیر مستقل t برای $0 < t < \infty$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع با $L\{f(t)\}$ نشان داده می‌شود که مقدار آن از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را به‌طور اختصار با $F(s)$ نمایش داده که s در تبدیل لاپلاس یک پارامتر بوده و در حالت کلی عددی مختلط می‌باشد.

مثال۱: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 1$ عبارتست از:

۱) $F(s) = \frac{1}{s}$　　۲) $F(s) = s$　　۳) $F(s) = 1$　　۴) $F(s) = e^{-s}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای گرفتن تبدیل تابع ابتدا تابع $f(t)$ را در فرم اصلی معادله تبدیل لاپلاس جایگزین می‌کنیم و سپس انتگرال حاصل را حل می‌کنیم.

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt \Rightarrow L[1] = \int_0^\infty 1.e^{-st}.dt = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-st}.dt \Rightarrow L[1] = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}.e^{-st}\right)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}.e^{-st}.+\frac{1}{s}\right)$$

با توجه به تساوی $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$، حد فوق زمانی وجود دارد که $s > 0$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$L[1] = \frac{1}{s} \;;\; s > 0$$

نکته ۱: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس، این تابع هیچ نوع اطلاعاتی راجع به رفتار تابع $f(t)$ به ازای $t < 0$ (متغیر زمان) نمی‌دهد. البته این نکته در مطالعه سیستم‌های کنترل محدودیتی ایجاد نمی‌کند زیرا متغیر مستقل t برای این سیستم‌ها زمان می‌باشد و رفتار سیستم‌ها به ازای زمان مثبت مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال۲: تبدیل لاپلاس تابع زیر عبارت است از:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^{n+1} & t > 0 \end{cases}$$

۱) $\frac{(n+1)}{s}.L[t^n]$　　۲) $(n+1).L[t^n]$　　۳) $\frac{n}{s}.L[t^n]$　　۴) $n.L[t^n]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای به‌دست آوردن تبدیل لاپلاس، تابع را به فرم $F(s)$ می‌نویسیم:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt$$

با توجه به رابطه، تابع به ازای زمان‌های مثبت بررسی می‌شود:

$$F(s) = \int_0^\infty t^{n+1}.e^{-st}.dt$$

برای گرفتن انتگرال مقابل، از روش انتگرال‌گیری جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} e^{-st}.dt = du \\ t^{n+1} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{s}e^{-st} = u \\ (n+1)t^{n} = dv \end{cases} \Rightarrow F(s) = vu - \int_{0}^{\infty} udv \Rightarrow F(s) = (\frac{-1}{s}e^{-st}t^{n+1})\Big|_{0}^{\infty} + \frac{(n+1)}{s}\int_{0}^{\infty} t^{n}.e^{-st}.dt$$

در سمت راست تساوی، ترم اول در $t \to \infty$ و $t = 0$ برای $Re(s) > 0$ صفر می‌باشدو فقط ترم دوم باقی می‌ماند. متوجه می‌شویم عبارت داخل انتگرال،معادل تعریف لاپلاس $f(t) = t^{n}$ می‌باشد:

$$\Rightarrow F(s) = \frac{(n+1)}{s}\int_{0}^{\infty} t^{n}.e^{-st}.dt = \frac{(n+1)}{s}.L[t^{n}]$$

نکته ۲: بایستی به این نکته توجه داشت که تبدیل لاپلاس برای توابعی موجود است که در فاصله $0 \le t < \infty$ تعریف شده باشد وتابعی پیوسته باشد.

مثال ۳: تحقیق کنید تابع روبرو دارای لاپلاس می‌باشد؟ $\mathbf{f(t) = \frac{1-\cos t}{t^{2}}}$

۱) چون در بازه $0 < t < \infty$ پیوسته نیست، دارای لاپلاس نیست.

۲) دارای حد متناهی در $t = 0$ نمی‌باشد.

۳) تابع دارای لاپلاس می‌باشد.

۴) به طور مشروط دارای لاپلاس می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرم تابع مشخص است که تابع در فاصله $0 < t < \infty$ پیوسته می‌باشد. حال بایستی تحقیق شود که تابع در قسمت‌های $0^{+}, \infty$ دارای حد متناهی می‌باشد یا خیر.

$$\lim_{t\to 0^{+}} \frac{1-\cos t}{t^{2}} = \lim_{t\to 0^{+}} \frac{2\sin^{2}\frac{t}{2}}{t^{2}} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{t\to 0^{+}} \frac{2\sin^{2}\frac{t}{2}}{t^{2}} \overset{Hop}{=\!=} 2(\frac{(\frac{t}{2})^{2}}{t^{2}}) = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-\cos t}{t^{2}} = 0$$

بنابراین تابع $f(t)$ دارای لاپلاس می‌باشد.

تبدیل معکوس لاپلاس

اگر $F(s)$ تابع لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ می‌نامند و آن را با علامت L^{-1} نشان می‌دهند

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

خاصیت خطی: تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس دارای خاصیت خطی می‌باشد که می‌توان آن را به صورت ریاضی به شکل زیر نشان داد:

$$L[c_{1}f_{1}(t) \pm c_{2}f_{2}(t)] = c_{1}L[f_{1}(t)] \pm c_{2}L[f_{2}(t)] \qquad ;c_{1}, c_{2} \in R$$

$$L[\sum_{i=1}^{n} c_{i}f_{i}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i}.L[f_{i}(t)] \qquad ;c_{i} \in R \quad ,i \in \{1,2,....,n\}$$

و همچنین برای تبدیل معکوس روابط زیر را داریم:

$$L^{-1}[c_{1}F_{1}(s) \pm c_{2}F_{2}(s)] = c_{1}\ L^{-1}[F_{1}(s)] \pm c_{2}L^{-1}[F_{2}(s)] \qquad ;c_{1}, c_{2} \in R$$

$$L^{-1}[\sum_{i=1}^{n} c_{i}F_{i}(s) = \sum_{i=1}^{n} c_{i}.L^{-1}[F_{i}(s)] \qquad ;c_{i} \in R \quad ,i \in \{1,2,....,n\}$$

تبدیل لاپلاس مشتق‌ها

تبدیل لاپلاس صرفا تابعی از t را به تابعی از s تغییر می‌دهدتوابع s آسان‌تر از توابع t به‌نظر نمی‌رسند و همانند مورد $L\{f(t) = c\} = \frac{c}{s}$ ممکن است پیچیده‌تر هم باشد. در واقع ویژگی برجسته این تبدیل آن است که هر کجا لازم باشد از تابعی نسبت به t مشتق گرفته شود ، با توجه به تعریفی که در زیر آورده می‌شود تابع s مربوط به آن تابع فقط در s ضرب می‌شود. این ویژگی در حل معادلات دیفرانسیلی بسیار مفید خواهد بود.

$$L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow L[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$$

اگر رابطه بالا را برای مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر بنویسیم به رابطه کلی زیر خواهیم رسید:

$$L[\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}] = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه بالا $f^{(n)}(\circ)$ نشان‌دهنده مشتق مرتبه n تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t به ازای $t=\circ$ است.

به‌عنوان مثال مشتق مرتبه دوم تابع $f(t)$ به‌صورت روبرو نوشته خواهد شد:
$$L[\frac{d^{۲}f(t)}{dt^{۲}}]=s^{۲}F(s)-sf(\circ)-f'(\circ)$$

بایستی توجه نمود که دو ترم آخر عبارت سمت راست تساوی مربوط به $f(t)$ به ازای $t=\circ$ می‌باشد و نباید آن‌را با $F(s)$ به ازای $s=\circ$ اشتباه گرفت.
بنابراین تبدیل لاپلاس، عمل مشتق‌گیری از یک تابع را به عمل ضرب تبدیل آن در s تغییر می‌دهد، که تعداد ضرب‌ها به تعداد مشتق‌ها مربوط می‌شود.

مثال۴: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را که در معادله دیفرانسیلی و شرایط اولیه زیر صدق می‌کند پیدا کنید؟

$$۵\frac{d^{۳}f}{dt^{۳}}+\frac{d^{۲}f}{dt^{۲}}+۶\frac{df}{dt}+۲f=۸ \quad , \quad f(\circ)=\frac{df(\circ)}{dt}=\frac{d^{۲}f(\circ)}{dt^{۲}}=\circ$$

۱) $\frac{۸}{s(۵s^{۳}+s^{۲}+۶s+۲)}$ ۲) $\frac{۸s}{(۵s^{۳}+s^{۲}+۶s+۲)}$ ۳) $\frac{۲}{s(۵s^{۳}+s^{۲}+۶s+۸)}$ ۴) $\frac{۲s}{(۵s^{۳}+s^{۲}+۶s+۸)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای به‌دست آوردن لاپلاس بایستی از دو طرف معادله دیفرانسیلی تبدیل لاپلاس گرفته شود و هر دو طرف را مساوی هم قرار داد، زیرا مساوی بودن توابع به معنی مساوی بودن تبدیلات آن‌ها نیز می‌باشد.
برای حل این معادله خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس نیز استفاده می‌شود،لذا خواهیم داشت:

$$۵[s^{۳}F(s)-s^{۲}f(\circ)-sf'(\circ)-f''(\circ)]+[s^{۲}F(s)-sf(\circ)-f'(\circ)]+۶[sF(s)-f(\circ)]+۲F(s)=\frac{۸}{s}$$

با جایگذاری شرایط اولیه مسئله در عبارت به‌دست آمده به رابطه نهایی زیر خواهیم رسید.

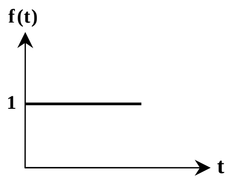
$$\Rightarrow \quad F(s)=\frac{۸}{s(۵s^{۳}+s^{۲}+۶s+۲)}$$

در روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل، توابع به تبدیلات خود برگردانده می‌شوند و معادلات حاصل به طریق جبری برای این تابع ناشناخته حل می‌شوند. این کار بسیار آسان‌تر از حل یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

تبدیلات توابع ساده

اکنون به محاسبه تبدیلات بعضی از توابع مفید وساده می‌پردازیم:

الف ــ تابع پله‌ای



با توجه به شکل، تابع پله‌ای از نظر فیزیکی به صورت تابع ثابتی است که در زمان‌های مثبت $(t>\circ)$و به صورت ناگهانی به سیستم اعمال می‌شود و شرایط سیستم در آن ثابت باقی خواهد ماند.

$$u(t)=\begin{cases}\circ & t<\circ \\ ۱ & t>\circ\end{cases}$$

تبدیل تابع پله‌ای

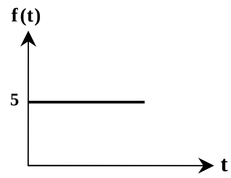
مثال اول این فصل مربوط به یک تابع پله‌ای می‌باشد که روش تعیین تبدیل لاپلاس در این مثال توضیح داده شده است.
همانطور که قبلا اشاره شد در حل مسائل مربوط به کنترل، زمان‌های منفی برای ما دارای اهمیت نمی‌باشد. رفتار تابع به‌ازای $t<\circ$ روی تبدیل لاپلاس هیچ اثری ندارد.

$$f(t)=۱ \Rightarrow L[f(t)]=L[۱\times u(t)]=\frac{۱}{s}$$

نکته ۳: هر عدد ثابت A را می‌توان به‌صورت تابع $f(t)=A.u(t)$ در نظر گرفت، لذا تبدیل آن به‌صورت $F(s)=\frac{A}{s}$ خواهد بود.به طور کلی توابعی که در کنترل در نظر گرفته می‌شود به فرم $g(t).u(t)$ می‌باشند که اغلب از نوشتن $u(t)$ خودداری می‌شود.
اگر تابعی به فرم زیر داشته باشیم برای حل و تبدیل آن به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$f(t)=\begin{cases}a & \alpha_{۱}<t<\alpha_{۲} \\ b & \alpha_{۲}<t<\alpha_{۳} \\ c & \alpha_{۳}<t<\alpha_{۴}\end{cases} \quad \Rightarrow f(t)=a.u(t-\alpha_{۱})+(b-a).u(t-\alpha_{۲})+(c-b).u(t-\alpha_{۳})-c.u(t-\alpha_{۴})$$

مثال۵: تبدیل لاپلاس تابع مقابل برابر است با:



۱) $F(s)=5s$ ۲) $F(s)=\frac{5}{s}$

۳) $F(s)=5$ ۴) $F(s)=5-s$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نمودار در زمان‌های مثبت، تغییر ثابتی در سیستم رخ می‌دهد و با گذشت زمان این مقدار برابر ۵ ثابت باقی خواهد ماند.

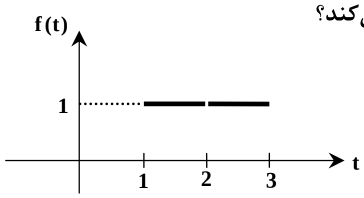
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 5 & t>0\end{cases}$$

برای تعیین تبدیل لاپلاس، تابع را به صورت فرم ریاضی تبدیل لاپلاس در می‌آوریم:

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}.dt=\int_0^{\infty} 5e^{-st}.dt=5\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{-5}{s}(0-1)=\frac{5}{s}$$

ترم نمایی در $t\to\infty$ برابر صفر می‌باشد.

مثال۶: نمودار تابع $f(t)$ در شکل نشان داده شده است کدام یک از مقادیر تابع $f(t)$ را تعریف می‌کند؟



۱) $u(t-1)+u(t-3)$

۲) $u(t-1)+u(t-2)+u(t-3)$

۳) $u(t-1)+u(t-3)$

۴) $u(t-1)-u(t-3)$

پاسخ: گزینه «۴» برای تعیین تبدیل لاپلاس ابتدا فرم ریاضی نمودار را می‌نویسیم:

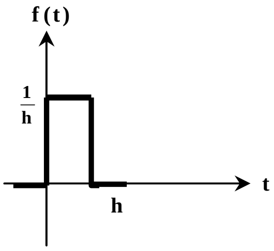
$$f(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<1\\ 1 & 1<t<3\\ 0 & 3<t<\infty\end{cases}$$

با توجه به نکته ذکر شده ، تابع را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$f(t)=(1-0)u(t-1)+(0-1)u(t-3)=u(t-1)-u(t-3)$$

ب ــ تابع ضربانی

با توجه به شکل، از نظر فیزیکی تابع ضربان واحد به صورت تغییری است که در یک محدوده زمانی مشخص به سیستم اعمال می‌شود و پس از سپری شدن زمان معین شرایط سیستم به شرایط اولیه خود باز می‌گردد.



$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{h} & 0<t<h\\ 0 & t>h\end{cases}$$

تبدیل تابع ضربان: تابع ضربان با توجه به نکته‌ای که در قسمت تابع پله‌ای ذکر شد به‌صورت مقابل نوشته می‌شود:

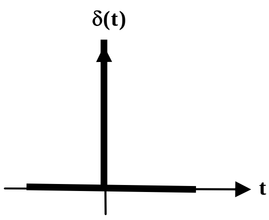
$$f(t)=\frac{1}{h}.[u(t)-u(t-h)]$$

با لاپلاس گیری از معادله به‌دست آمده، به رابطه نهایی زیر خواهیم رسید:

(نحوه چگونگی تبدیل لاپلاس ترم دوم عبارت سمت راست در قسمت قضیه انتقال تبدیل توضیح داده خواهد شد.)

$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{1}{h}.[\frac{1}{s}-\frac{e^{-h.s}}{s}]$$

نکته ۴: در تابع ضربان در صورتی‌که مقدار h به سمت صفر میل کند، تابع جدیدی به‌دست خواهد آمد که مقدار آن همه جا صفر است جز در مبداء، که مقدار آن بینهایت می‌شود. البته باید توجه داشت که سطح زیر این تابع همیشه برابر واحد باقی می‌ماند. این تابع جدید تابع ضربان ایده‌آل واحد نامیده می‌شود و شکل ریاضی آن به‌صورت زیر می‌باشد:



تابع ضربان ایده‌آل واحد به عنوان یک تغییر ایده‌آل، در تحلیل‌ها و طرح سیستم‌های کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\Rightarrow\int_{+\infty}^{+\infty}\delta(t).dt=1$$

مثال ۷: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & -\infty<t<a \\ 1/k & a<t<a+k \\ 0 & a+k<t<\infty \end{cases}$$

۱) $e^{-as}(1-e^{-ks})$ ۲) $\frac{e^{-as}}{k}(1-e^{-ks})$ ۳) $\frac{e^{-as}}{ks}(1-e^{-ks})$ ۴) $ke^{-as}(1-e^{-ks})$

پاسخ: گزینه «۳» تابع در تمامی نقاط به غیر از بازه زمانی $a<t<a+k$ برابر صفر می‌باشد و تابع ضربان می‌باشد، برای تعیین لاپلاس ابتدا فرم ریاضی تابع را می‌نویسیم:

$$f(t)=(\frac{1}{k}-0).u(t-a)+(0-\frac{1}{k}).u(t-a-k)=\frac{1}{k}[u(t-a)-u(t-a-k)]$$

برای تعیین لاپلاس، از خاصیت خطی تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

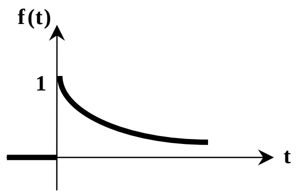
$$\Rightarrow F(s)=L\{\frac{1}{k}[u(t-a)-u(t-a-k)]\}=\frac{1}{k}\{L[u(t-a)]-L[u(t-a-k)]\}$$

با توجه به روابطی که برای تابع ضربان ذکر شد، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{k}(\frac{e^{-as}}{s}-\frac{e^{-(a+k)s}}{s})=\frac{e^{-as}}{ks}(1-e^{-ks})$$

ج ـ تابع نمایی

با توجه به شکل،تابع نمایی به صورت تغییری است که در زمان‌های مثبت به سیستم اعمال می‌شود و با سپری شدن زمان، شرایط سیستم رفته رفته به شرایط اولیه سیستم میل می‌کند.



$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-at} & t>0 \end{cases}=u(t).e^{-at}$$

تبدیل تابع نمایی

برای گرفتن تبدیل تابع نمایی ابتدا تابع را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری می‌کنیم و سپس از رابطه به‌دست آمده انتگرال‌گیری می‌نماییم.

$$L[f(t)]=\int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt \Rightarrow L[f(t)]=\int_0^\infty u(t).e^{-at}.e^{-st}.dt=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}.dt$$

$$\Rightarrow L[f(t)]=\lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{(a+s)}.e^{-(a+s)t})\Big|_0^t=\lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{(a+s)}.e^{-(a+s)t}.+\frac{1}{(a+s)})\Big|_0^t$$

با این شرط که $(a+s)>0$ یعنی $s>-a$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع نمایی به‌صورت مقابل خواهد شد: $L[f(t)]=\frac{1}{(a+s)}$

نکته ۵: در صورتی‌که در مثال بالا s یک عدد مختلط باشد، بایستی شرط زیر برای وجود تبدیل لاپلاس برقرار باشد: $Re(s)>-a$

مثال ۸: تبدیل لاپلاس تابع روبرو عبارت است از: $f(t)=e^{5tj}$

۱) $\frac{1}{(s+5j)}$ ۲) $\frac{5j}{(s-5j)}$ ۳) $\frac{1}{(s-5j)}$ ۴) $\frac{-1}{(s-5j)}$

پاسخ: گزینه «۳» با جایگذاری تابع $f(t)$ در فرم تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s)=L[e^{5tj}]=\int_0^\infty e^{5tj}e^{-st}.dt \quad ; \quad F(s)=\int_0^\infty e^{(5j-s)t}.dt=\frac{e^{(5j-s)t}}{(5j-s)}\Big|_0^\infty$$

در رابطه بالا، با این شرط که $(5j-s)<0$ یعنی $s>5j$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع نمایی به‌صورت زیر خواهد شد:

در $t\to\infty$، عبارت نمایی برابر صفر می‌باشد.

$$F(s)=\frac{e^{(5j-s)t}}{(5j-s)}\Big|_0^\infty=\frac{1}{(5j-s)}(0-1)=\frac{1}{(s-5j)}$$

نکته ۶: در صورتی‌که تابع نمایی به فرم $f(t)=e^{jat}$ باشد یعنی توان نمایی مختلط داشته باشد می‌توان از رابطه $e^{jat}=\cos at+j\sin at$ استفاده کرد. و همچنین چنانچه تابع نمایی به فرم $f(t)=e^{(a+bj)t}$ باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$f(t)=e^{jat}=\cos at+j\sin at \quad ; \quad f(t)=e^{(a+bj)t}=e^{at}(\cos bt+j\sin bt)$$

مثال ۹: تابع تبدیل $\cosh ۶t$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}[\frac{s}{s^۲-۶^۲}]$ ۲) $\frac{۱}{۲}[\frac{s}{s^۲+۶^۲}]$ ۳) $[\frac{s}{s^۲-۶^۲}]$ ۴) $[\frac{s}{s^۲+۶^۲}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌توان با تبدیل تابع مثلثاتی به فرم نمایی، به طریق زیر عمل نمود:

می‌دانیم $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{۲}$ بنابراین تابع $f(t)$ برابر خواهد بود با:

$$f(t)=\cosh ۶t=\frac{e^{۶t}+e^{-۶t}}{۲}\Rightarrow F(s)=L[\frac{e^{۶t}+e^{-۶t}}{۲}]=\frac{۱}{۲}\{L[e^{۶t}]+L[e^{-۶t}]\}$$

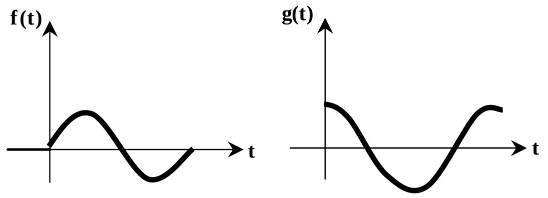
با استفاده از روابط به‌دست آمده در قسمت تبدیل لاپلاس تابع نمایی، رابطه نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow F(s)=\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{s-۶}+\frac{۱}{s+۶}]=\frac{۱}{۲}.[\frac{۲s}{s^۲-۶^۲}]=[\frac{s}{s^۲-۶^۲}]$$

د ــ تابع سینوسی و کسینوسی

$$f(t)=\begin{cases}\circ & t<\circ\\ \sin kt & t>\circ\end{cases}=u(t).\sin kt$$

$$g(t)=\begin{cases}\circ & t<\circ\\ \cos kt & t>\circ\end{cases}=u(t).\cos kt$$



با توجه به شکل، با اعمال توابع سینوسی و کسینوسی به سیستم، شرایط سیستم به‌صورت تناوبی و با دامنه مشخص حول شرایط اولیه سیستم نوسان می‌کند.

تبدیل تابع سینوسی و کسینوسی

با توجه به رابطه $e^{jkt}=\cos kt+j\sin kt$ و همچنین با توجه به رابطه‌ای که برای تبدیل تابع نمایی به‌دست آورده بودیم می‌توان تابع تبدیل توابع $f(t),g(t)$ را تعیین نماییم:

می‌دانیم که $L[e^{at}]=\frac{۱}{s-a}$، با قرار دادن $a=jk$ ($j=\sqrt{-۱}$)خواهیم داشت:

$$L[e^{jkt}]=\frac{۱}{s-jk}=\frac{(s+jk)}{(s-jk)(s+jk)}=\frac{(s+jk)}{s^۲+k^۲}=\frac{s}{s^۲+k^۲}+j\frac{k}{s^۲+k^۲}$$

با توجه به نتایج فوق و مقایسه رابطه ایجاد شده با رابطه $e^{jkt}=\cos kt+j\sin kt$ می‌توان به نتایج زیر رسید:

$$L[e^{jkt}]=L[\cos kt+j\sin kt]=L[\cos kt]+jL[\sin kt]=\frac{s}{s^۲+k^۲}+j\frac{k}{s^۲+k^۲}\Rightarrow\begin{cases}L[\cos kt]=\frac{s}{s^۲+k^۲}\\ L[\sin kt]=\frac{k}{s^۲+k^۲}\end{cases}$$

در حل معادله بالا از خاصیت جمع‌پذیری تبدیل لاپلاس استفاده شده است

مثال ۱۰: تبدیل تابع روبرو عبارت است از: $f(t)=e^{۵tj}$

۱) $\frac{۱}{(s+۵j)}$ ۲) $\frac{۵j}{(s-۵j)}$ ۳) $\frac{۱}{(s-۵j)}$ ۴) $\frac{-۱}{(s-۵j)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل تست با استفاده از نکته ذکر شده در قسمت انتهایی تبدیل تابع نمایی می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

$$f(t)=e^{۵tj}=\cos ۵t+j\sin ۵t$$

با جایگذاری تابع $f(t)$ در فرم تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s)=L[f(t)]=L[\cos ۵t+j\sin ۵t]$$

با استفاده از خاصیت خطی تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s)=L[\cos ۵t]+jL[\sin ۵t]$$

$$F(s)=\frac{s}{s^۲+۲۵}+j\frac{۵}{s^۲+۲۵}=\frac{(s+۵j)}{(s^۲+۲۵)}=\frac{(s+۵j)}{(s^۲-(۵j)^۲)}=\frac{(s+۵j)}{(s+۵j)(s-۵j)}=\frac{۱}{(s-۵j)}$$

مشاهده می‌شود از این روش نیز، به گزینه ۳ خواهیم رسید.

مثال ۱۱: حل معادله روبرو عبارت است از:

$$\frac{d^۲f}{dt^۲}+۹f=e^{-t}\ \ ;\ \ f(۰)=f'(۰)=۰$$

۱) $\frac{۱}{۱۰}(e^{-t}-\cos ۳t+\frac{۱}{۳}\sin ۳t)$

۲) $\frac{۱}{۱۰}(e^{-t}-۰\sin ۳t)$

۳) $\frac{۱}{۶۰}(e^{-t}-\cos ۳t-\frac{۱}{۳}\sin ۳t)$

۴) $\frac{۱}{۶۰}(e^{-t}-۰\sin ۳t)$

پاسخ: گزینه «۱» همانطور که قبلا اشاره شد توسط روش لاپلاس می‌توان معادلات دیفرانسیلی پیچیده را تحلیل نمود. برای حل معادله بالا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$L[\frac{d^۲f}{dt^۲}+۹f]=L[e^{-t}]\Rightarrow s^۲F(s)-sf(۰)-f'(۰)+۹F(s)=\frac{۱}{s+۱}$$

با جایگذاری شرایط اولیه سیستم در عبارت بالا، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$s^۲F(s)+۹F(s)=\frac{۱}{s+۱}\Rightarrow (s^۲+۹)F(s)=\frac{۱}{s+۱}\Rightarrow F(s)=\frac{۱}{(s+۱)(s^۲+۹)}$$

حال برای به دست آوردن تابع $f(t)$ از تابع تبدیل بالا، معکوس لاپلاس می‌گیریم:

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)(s^۲+۹)}]$$

برای حل این نوع توابع (توابعی که مخرج آن‌ها حاصلضرب چند عبارت می‌باشد)، ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\frac{۱}{(s+۱)(s^۲+۹)}=\frac{۱}{(s+۱)(s+۳j)(s-۳j)}=\frac{A}{(s+۱)}+\frac{B}{(s+۳j)}+\frac{C}{(s-۳j)}$$

$$\frac{۱}{(s+۱)(s^۲+۹)}=\frac{A(s+۳j)(s-۳j)+B(s+۱)(s-۳j)+C(s+۱)(s+۳j)}{(s+۱)(s-۳j)(s+۳j)}$$

می‌دانیم صورت کسر مقابل، معادل ۱ می‌باشد:

$$As^۲+۹A+Bs^۲-۳Bjs+Bs-۳Bj+Cs^۲+۳Cjs+Cs+۳Cj=۱$$

$$\Rightarrow\ (A+B+C)s^۲+(B+C-۳Bj+۳Cj)s+(۹A-۳Bj+۳Cj)=۱\Rightarrow\begin{cases}(A+B+C)=۰\\(B+C-۳Bj+۳Cj)=۰\\(۹A-۳Bj+۳Cj)=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{۱}{۱۰}\\B=\frac{-۳+j}{۶۰}\\C=\frac{-۳-j}{۶۰}\end{cases}$$

$$F(s)=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{(s+۱)}+(\frac{-۳+j}{۶۰}\times\frac{۱}{s+۳j})+(\frac{-۳-j}{۶۰}\times\frac{۱}{s-۳j})$$

برای معکوس گیری از $F(s)$، از تبدیل تابع نمایی استفاده می‌کنیم $(L[e^{-at}]=\frac{۱}{s+a})$. این موضوع که a عددی مختلط است تغییری در نتیجه ایجاد نخواهد کرد:

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=\frac{۱}{۱۰}e^{-t}+\frac{-۳+j}{۶۰}e^{-۳jt}+\frac{-۳-j}{۶۰}e^{۳jt}$$

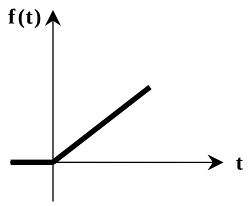
با استفاده از اتحاد $e^{(a+bj)t}=e^{at}(\cos bt+j\sin bt)$ خواهیم داشت:

$$e^{-۳jt}=(\cos-۳t+j\sin-۳t)=(\cos ۳t-j\sin ۳t)\ \ ;\ \ e^{۳jt}=(\cos ۳t+j\sin ۳t)$$

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=\frac{۱}{۱۰}e^{-t}+\frac{-۳+j}{۶۰}(\cos ۳t-j\sin ۳t)+\frac{-۳-j}{۶۰}(\cos ۳t+j\sin ۳t)$$

$$f(t)=\frac{۱}{۱۰}(e^{-t}-\cos ۳t+\frac{۱}{۳}\sin ۳t)$$

ذ ـ تابع خطی (Ramp)



با توجه به شکل، تابع خطی به صورت تغییری است که در زمان‌های مثبت به سیستم اعمال می‌شود و با سپری شدن زمان شرایط سیستم دائما و به‌صورت خطی تغییر می‌کند و از شرایط اولیه سیستم فاصله می‌گیرد.

$$f(t)=\begin{cases}۰ & t<۰\\t & t>۰\end{cases}=t.u(t)$$

تبدیل تابع خطی: برای گرفتن تبدیل لاپلاس تابع خطی ابتدا تابع را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری می‌کنیم و سپس از رابطه به‌دست آمده انتگرال‌گیری می‌نماییم.

برای حل انتگرال حاصل، بایستی از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده نماییم:

$$L[t.u(t)]=\int_{۰}^{\infty} t.e^{-st}.dt$$

$$\begin{cases} e^{-st}.dt=dv \\ t=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\frac{-۱}{s}e^{-st} \\ dx=dt \end{cases} \Rightarrow L[t.u(t)]=v.x-\int_{۰}^{\infty} v.dx=\frac{-t}{s}.e^{-st}\Big|_{۰}^{\infty}+\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{s}.e^{-st}.dt$$

در سمت راست تساوی فوق، عبارت اول در $t\to\infty$ و $t=۰$ با شرط $s>۰$ صفر می‌باشد. بنابراین مقدار نهایی تبدیل لاپلاس برابر خواهد بود با:

$$L[t.u(t)]=-\frac{۱}{s^{۲}}(e^{-st})\Big|_{۰}^{\infty} \Rightarrow L[t.u(t)]=\frac{۱}{s^{۲}}$$

مثال ۱۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر است با: $\mathbf{f(t)=t^{۲}+۱}$

۱) $\frac{۳+s^{۲}}{s^{۳}}$ ۲) $\frac{۲+s^{۳}}{s^{۲}}$ ۳) $\frac{۳+s^{۳}}{s^{۲}}$ ۴) $\frac{۲+s^{۲}}{s^{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s)=L[t^{۲}+۱]=\int_{۰}^{\infty}(t^{۲}+۱).e^{-st}.dt=\int_{۰}^{\infty}t^{۲}e^{-st}.dt+\int_{۰}^{\infty}۱.e^{-st}.dt$$

برای تعیین انتگرال اول عبارت سمت راست تساوی از روش انتگرال جزء به جزء استفاده می‌شود:

$$\int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt \Rightarrow \begin{cases} t^{۲}=u \\ e^{-st}dt=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲t.dt=du \\ \frac{-۱}{s}e^{-st}=v \end{cases} \quad ; \quad \int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt=(\frac{-۱}{s}e^{-st}.t^{۲})\Big|_{۰}^{\infty}+\frac{۲}{s}\int_{۰}^{\infty}te^{-st}.dt$$

ترم اول عبارت سمت راست تساوی در $t\to\infty\ ,\ t=۰$ برابر صفر می‌باشد، برای تعیین ترم دوم بایستی از روش انتگرال جز به جز استفاده نماییم:

$$\Rightarrow \int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt=\frac{۲}{s}\int_{۰}^{\infty}te^{-st}.dt \Rightarrow \begin{cases} t=u \\ e^{-st}dt=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt=du \\ \frac{-۱}{s}e^{-st}=v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt=\frac{۲}{s}\int_{۰}^{\infty}te^{-st}.dt=\frac{۲}{s}\{(\frac{-t}{s}.e^{-st})\Big|_{۰}^{\infty}+\frac{۱}{s}\int_{۰}^{\infty}e^{-st}.dt\}$$

ترم اول عبارت سمت راست تساوی در $t\to\infty, t=۰$ برابر صفر می‌باشد و نهایتا مقدار انتگرال مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$\Rightarrow \int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt=\frac{۲}{s}(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{\infty}e^{-st.dt})=\frac{۲}{s^{۲}}(\frac{-۱}{s}e^{-st})\Big|_{۰}^{\infty}=\frac{-۲}{s^{۳}}(۰-۱)=\frac{۲}{s^{۳}} \Rightarrow \int_{۰}^{\infty}t^{۲}.e^{-st}.dt=\frac{۲}{s^{۳}}$$

حال به قسمت اول مسئله باز می‌گردیم:

$$F(s)=\int_{۰}^{\infty}t^{۲}e^{-st}.dt+\int_{۰}^{\infty}۱.e^{-st}.dt=\frac{۲}{s^{۳}}+\frac{۱}{s}=\frac{۲+s^{۲}}{s^{۳}}$$

در جدول زیر تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم که ممکن است در حل مسائل با آن‌ها مواجه شویم، آمده است:

تبدیل لاپلاس	تابع	تبدیل لاپلاس	تابع
$\frac{s}{s^{۲}+k^{۲}}$	$\cos kt.u(t)$	$\frac{۱}{s}$	$u(t)$
$\frac{k}{s^{۲}+k^{۲}}$	$\sin kt.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+۱}}$	$t^{n}.u(t)\ : n\in\mathbb{N}$
$\frac{s}{s^{۲}-k^{۲}}$	$\cosh kt.u(t)$	$\frac{\Gamma(n+۱)}{s^{n+۱}}$	$t^{n}.u(t) : n\in\mathbb{R}$
$\frac{k}{s^{۲}-k^{۲}}$	$\sinh kt.u(t)$	$\frac{۱}{s+a}$	$e^{-at}.u(t)$
$\frac{(s+a)}{(s+a)^{۲}+k^{۲}}$	$e^{-at}.\cos kt.u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+۱}}$	$t^{n}.e^{-at}.u(t)$
$\frac{k}{(s+a)^{۲}+k^{۲}}$	$e^{-at}.\sin kt.u(t)$		

مثال ۱۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر را به‌دست آورید؟ $f(t)=\cos^2 t$

۱) $\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$ ۲) $(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$ ۳) $2(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$ ۴) $-\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$

پاسخ: گزینه «۱» برای تبدیل معادله، ابتدا سعی می‌کنیم تا معادله را از حالت توانی خارج سازیم و برای سادگی کار آن را به یکی از فرم‌هایی که در جدول آورده شده است، ارائه می‌نماییم. برای این منظور معادله را با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ جایگذاری می‌نماییم. همانطور که مشاهده می‌شود هر دو ترم سمت راست عبارت مشابه فرم‌های ارائه شده در جدول می‌باشد:

با توجه به خاصیت خطی تبدیل لاپلاس: $F(s)=L[\cos^2 t]=L[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)]$

$$F(s)=\frac{1}{2}(L[1]+L[\cos 2t])\Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$$

مثال ۱۴: معکوس تبدیل لاپلاس $F(s)=\frac{s+5}{s^2-2s-3}$ برابر است با:

۱) $2e^{3t}-e^{-t}$ ۲) $2e^{3t}+e^{-t}$ ۳) $2e^{-3t}+e^{t}$ ۴) $2e^{-3t}-e^{t}$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل تابع ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\frac{s+5}{s^2-2s-3}=\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}=\frac{As+A+Bs-3B}{(s-3)(s+1)}=\frac{(A+B)s+(A-3B)}{(s-3)(s+1)}$$

$$(A+B)s+(A-3B)=s+5\Rightarrow\begin{cases}(A+B)=1\\(A-3B)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

$$\frac{s+5}{s^2-2s-3}=\frac{2}{s-3}+\frac{-1}{s+1}$$

ملاحظه می‌شود که عبارت کسری به دو عبارت کسری ساده‌تر تبدیل شده است و اکنون می‌توانیم با استفاده از خاصیت خطی معکوس تبدیل لاپلاس، از عبارات به دست آمده تبدیل معکوس بگیریم.

$$f(t)=L^{-1}[\frac{s+5}{s^2-2s-3}]=L^{-1}[\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}]=2L^{-1}[\frac{1}{s-3}]-L^{-1}[\frac{1}{s+1}]$$

با استفاده از روابط ذکر شده در جدول تبدیلات به رابطه نهایی روبرو خواهیم رسید: $f(t)=2e^{3t}-e^{-t}$

مثال ۱۵: تبدیل معکوس لاپلاس توابع روبرو را به‌دست آورید؟ $F(s)=\frac{1}{s\ (s+5)}$

۱) $\frac{1}{5}(1+e^{-5t})$ ۲) $(1-e^{-5t})$ ۳) $5(1-e^{-5t})$ ۴) $\frac{1}{5}(1-e^{-5t})$

پاسخ: گزینه «۴» برای حل این نوع توابع(توابعی که مخرج آن‌ها حاصلضرب چند عبارت می‌باشد)، ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$F(s)=\frac{1}{s(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}=\frac{As+5A+Bs}{s(s+5)}=\frac{(A+B)s+5A}{s(s+5)}$$

صورت کسر ظاهر شده، معادل عبارت کسری مورد نظر می‌باشد:

$$(A+B)s+5A=1\Rightarrow\begin{cases}5A=1 & A=\frac{1}{5}\\A+B=0 & B=-\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow F(s)=\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{\frac{1}{5}}{s+5}$$

برای تعیین لاپلاس معکوس تابع مقابل از خاصیت خطی استفاده می‌نماییم:

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s(s+5)}]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{\frac{1}{5}}{s+5}]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{5}}{s}]-L^{-1}[\frac{\frac{1}{5}}{s+5}]$$

با توجه به روابطی که برای توابع و تبدیلات آن‌ها در جدول ارائه شده است، به جواب نهایی مقابل خواهیم رسید: $\Rightarrow f(t)=\frac{1}{5}(1-e^{-5t})$

نکته ۷: چنانچه با مسئله‌ای مواجه شویم که نیاز به تفکیک کسرها داشته باشد و در صورتی‌که در مخرج کسر، توان عبارت s بالاتر از یک باشد عبارتی که در صورت نوشته می‌شود بایستی به‌صورتی نوشته شود که توان آن یک واحد از توان مخرج کمتر باشد.

مثال ۱۶: تبدیل معکوس تابع مقابل را به‌دست آورید؟ $F(s)\frac{1}{s^2(s+5)}$

۱) $\frac{1}{25}[1-5t-e^{-5t}]$ ۲) $\frac{-1}{25}[1-5t-e^{-5t}]$ ۳) $\frac{-1}{25}[1-5t+e^{-5t}]$ ۴) $\frac{-1}{25}[1+5t-e^{-5t}]$

پاسخ: گزینه «۲» برای تعیین تبدیل معکوس تابع توسط عملیات تفکیک کسرها، عبارت کسری را ساده می‌کنیم و آن‌را به صورت مجموع کسرهای قابل تبدیل می‌نویسیم:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+5)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{C}{s+5}$$

$$F(s)=\frac{As^2+5As+Bs+5B+Cs^2}{s^2(s+5)}=\frac{(A+C)s^2+(5A+B)s+5B}{s^2(s+5)}$$

صورت کسر ظاهر شده، معادل عبارت کسری مورد نظر می‌باشد:

$$(A+C)s^2+(5A+B)s+5B=1 \Rightarrow A=\frac{-1}{25}\ ,\ B=\frac{1}{5}\ ,\ C=\frac{1}{25}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+5)}=\frac{\frac{-1}{25}s+\frac{1}{5}}{s^2}+\frac{\frac{1}{25}}{s+5}=\frac{-1}{25}.(\frac{s-5}{s^2}-\frac{1}{s+5})=\frac{-1}{25}(\frac{1}{s}-\frac{5}{s^2}-\frac{1}{s+5})$$

با توجه به روابطی که برای توابع و تبدیلات آن‌ها در جدول ارائه شده است، به جواب نهایی زیر خواهیم رسید:

$$\Rightarrow\ f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{-1}{25}[1-5t-e^{-5t}]$$

مثال ۱۷: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\sin 3t-4\cos 3t$ عبارت است از:

۱) $\frac{1+s}{s^2+4}$ ۲) $\frac{1-s}{s^2+4}$ ۳) $\frac{3-4s}{s^2+9}$ ۴) $\frac{3+4s}{s^2+9}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرم رابطه $f(t)$، برای گرفتن تبدیل لاپلاس بایستی از دو ترم $\sin 3t$ و $-4\cos 3t$ تبدیل گرفته شود، لذا از خاصیت خطی تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

$$L[f(t)]=L[\sin 3t-4\cos 3t]=L[\sin 3t]-4L[\cos 3t]$$

با توجه به روابط ارائه شده برای توابع و تبدیلات آن‌ها در جدول، تابع تبدیل به فرم زیر خواهد بود

$$L[f(t)]=L[\sin 3t-4\cos 3t]=(\frac{3}{s^2+9})-4(\frac{s}{s^2+9})=\frac{3-4s}{s^2+9}$$

* روش تستی: با کمی دقت در گزینه‌ها، متوجه خواهیم شد گزینه‌های ۱و۲ نمی‌توانند گزینه‌های صحیح باشند زیرا ضریب t در هر دو ترم سینوسی و کسینوسی، برابر ۳ می‌باشد و با توجه به جدول در تبدیل این دو تابع، در مخرج عبارت 3^2 را خواهیم داشت و بنابراین گزینه‌های ۱و۲ حذف خواهند شد.

مجموعه‌ای از قضایای مهم و کاربردی

الف ـ قضیه مقدار نهایی

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد قضیه مقدار نهایی به صورت مقابل بیان می‌شود: $\lim_{t\to\infty}[f(t)]=\lim_{s\to 0}[sF(s)]$

این رابطه مشروط بر این‌که $sF(s)$ برای تمام مقادیر s که در رابطه $\mathrm{Re}(s)\geq 0$ صدق می‌کند، بی‌نهایت نشود. با استفاده از این قضیه می‌توان مقدار تابع $f(t)$ را در زمان بی‌نهایت (حالت پایدار سیستم) به‌دست آورد.

نکته ۸: با استفاده از قضیه مقدار نهایی می‌توان مشخص نمود که سیستم با توجه به تغییرات حاکم، حالت پایدار یا حالت ناپایدار دارد.در شرایطی که $t\to\infty$، و مقدار $f(t)$ به سمت حدی میل نکرد، در این صورت سیستم ناپایدار بوده و به حالت پایدار نرسیده است. در غیر این‌صورت سیستم پایدار می‌باشد.