مدرسان شریف

فصل اول

« مفاهیم اولیه »

مقدمه

دینامیک بخشی از علم مکانیک است که حرکت اجسام را تحت نیروهای وارد شده مورد بررسی قرار می‌دهد. این علم به دو بخش اصلی به نام‌های سینماتیک و سینتیک تقسیم‌بندی می‌شود.

باید توجه داشت که در سینماتیک، حرکت اجسام را مورد بررسی قرار داده بدون اینکه نیروی وارد بر آنها را در نظر بگیریم، در حالی که در سینتیک به نیروهای وارد بر اجسام در حال حرکت می‌پردازیم. این نکته را به خاطر داشته باشید که در سینماتیک، حرکت اجسام از جنبه ریاضی اهمیت داشته، البته قوانین فیزیکی حاکم بر آن مانند قوانین نیوتن در نظر گرفته نمی‌شوند.

در این کتاب، در ابتدا به معرفی سینماتیک و سینتیک ذرات می‌پردازیم، سپس سینماتیک و سینتیک اجسام صلب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قبل از اینکه مباحث اصلی دینامیک را شروع کنیم، مفاهیم اساسی این درس را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

* **جرم:** جرم یک جسم مقدار لختی و مقاومت جسم در برابر تغییرات سرعت خطی نامیده می‌شود.

ذره: به جسمی با ابعاد بسیار کوچک و جرم محدود، نقطه مادی یا ذره می‌گوییم، دقت کنید در مطالعه‌ی حرکت جسم، زمانی آن را ذره در نظر می‌گیریم که ابعاد جسم وابسته به حرکت یا نیروهای وارد بر آن نباشد. پس می‌توانیم بگوییم که در بسیاری از مسائل، برای بررسی جنبه‌های حرکت جسم، لزومی به داشتن اندازه و شکل جسم نیست، بلکه جرم جسم است که مهم می‌باشد.

نیرو: به اثر برداری یک جسم بر جسم دیگرکه می‌تواند عامل حرکت شود، نیرو می‌گوییم.

جسم صلب: جسمی که تحت نیروهای وارد بر آن، تغییرات شکلی بسیار کوچک و ناچیزی داشته باشد، جسم صلب گفته می‌شود.

قوانین نیوتن

الف) قانون اول: اگر برآیند نیروهای وارد برجسمی مساوی صفر باشد، در صورتی که جسم ساکن باشد همچنان در حالت سکون باقی مانده و اگر در حال حرکت باشد با سرعتی ثابت به حرکت خود در مسیر مستقیم ادامه می‌دهد.

ب) قانون دوم: اگر برجسمی نیرویی وارد شود، جسم در جهت آن نیرو شتابی می‌گیرد که مقدار آن با مقدار نیرو نسبت مستقیم داشته، در حالی که با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$$

ج ـ قانون سوم: قانون سوم نیوتن نه تنها مربوط به دینامیک و مواردی از این قبیل می‌باشد بلکه در زندگی روزمره نیز بسیار از آن استفاده می‌شود، بی‌آنکه مردم بدانند این قانون به نام قانون سوم نیوتن معروف است. این قانون بسیار آشنا می‌گوید: برای هر عملی عکس‌العملی مساوی و در خلاف جهت آن وجود دارد.

قانون جاذبه عمومی نیوتن: با توجه به این قانون هر دو جسم بر هم نیروی جاذبه‌ای اعمال می‌کنند که مقدار این نیرو با حاصل ضرب جرم‌های دو جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصله دو مراکز جرم دو جسم نسبت معکوس دارد.

$$F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$$

در رابطه فوق F نیروی جاذبه متقابل بین دو ذره، m_1 و m_2 جرم‌های آنها و همچنین r فاصله بین مرکزهای آن دو می‌باشد. از طرفی G موسوم به ثابت جهانی گرانش بوده و برابر $6/673\times10^{-11}\ \frac{m^3}{kg.s^2}$ است.

سیستم آحاد: به طور معمول در این درس با دو سیستم متریک SI و سیستم آمریکایی مواجه هستیم. در جدول زیر کمیت‌های اصلی و نمادهای آن در این دو سیستم را نشان داده‌ایم:

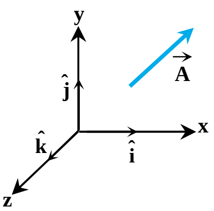
کمیت	واحد SI	نماد	واحد امریکایی	نماد
جرم M	کیلوگرم	kg	اسلاگ	slug
طول L	متر	m	فوت	ft
زمان T	ثانیه	s	ثانیه	sec
نیرو F	نیوتن	N	پوند	lb

اسکالر: اسکالر کمیتی است که تنها دارای مقدار می‌باشد، مانند: جرم، طول، زمان، دما و ...

بردار: بردار کمیتی است که علاوه بر مقدار، دارای جهت نیز بوده و طبق قانون متوازی الاضلاع با هم جمع می‌شوند، مانند: نیرو، سرعت، شتاب و ... .

می‌دانید که در علم دینامیک باید با جبر بردارها آشنا باشید، پس برای آشنایی شما در این قسمت بخشی از خواص مورد نیاز بردارها را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

جبر بردارها



بردار در فضا: برداری مانند $\vec{A}$ را در یک دستگاه مختصات سه بعدی مانند شکل زیر به این صورت بیان می‌کنیم.

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}} \quad (۱)$$

در رابطه فوق A_x و A_y و A_z مولفه‌های بردار $\vec{A}$ به ترتیب در راستای محورهای x و y و z می‌باشند.

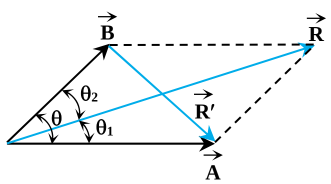
با استفاده از مولفه‌های بردار می‌توانیم اندازه بردار $|\vec{A}|$ را به صورت زیر تعیین کنیم.

$$\boxed{A=|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \quad (۲)$$

ضرب اسکالر در بردار: حاصلضرب اسکالر m در بردار $\vec{A}$ را با $m\vec{A}$ نشان داده که برداری در جهت بردار $\vec{A}$ می‌باشد و با توجه به رابطه زیر بدست می‌آید:

$$m\vec{A}=mA_x\hat{i}+mA_y\hat{j}+mA_z\hat{k} \quad (۳)$$

جمع و تفاضل بردارها: برای جمع دو بردار از قانون متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. در شکل زیر $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ به ترتیب مجموع و تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ خواهند بود.



$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\vec{R}'=\vec{A}-\vec{B}$$

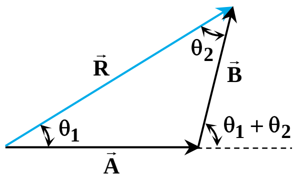
برای به دست آوردن اندازه بردارهای $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ از قانون کسینوس‌ها مطابق رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$R=|\vec{R}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta} \quad (۴\ \text{الف})$$

$$R'=|\vec{R}'|=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta} \quad (۴\ \text{ب})$$

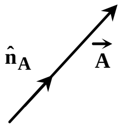
لازم به ذکر است که A و B به ترتیب اندازهٔ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و R و R' اندازه بردارهای $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ می‌باشند.

قانون مثلث: قانون مثلث یا قانون سینوس را می‌توان بین اضلاع و زوایای هر مثلث دلخواهی نوشت. طبق این قانون، نسبت اندازه هر ضلع مثلث به سینوس زاویه مقابلش مقداری ثابت است. پس همان‌گونه که در شکل نیز می‌بینید داریم:



$$\boxed{\frac{A}{\sin\theta_2}=\frac{B}{\sin\theta_1}=\frac{R}{\sin(\theta_1+\theta_2)}} \qquad (۵)$$

بردار یکه: بردار یکه برداری است که برابر نسبت هر بردار به اندازه‌اش بوده و در جهت بردار اولیه می‌باشد. اندازه‌ی این بردار مساوی یک است.



$$\boxed{\hat{n}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{A}}{A}} \qquad (۶)$$

توجه داشته باشید که مؤلفه‌های بردار یکه، کسینوس‌های هادی بردار می‌باشند. در صورتی که بردار با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ تشکیل دهند، آن‌گاه بردار یکه را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

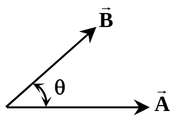
$$\boxed{\hat{n}_A=\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}} \qquad (۷ \text{ الف})$$

$$1=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} \qquad (۷ \text{ ب})$$

اکنون با توجه به روابطی که بیان شد مولفه‌های یک بردار مانند بردار $\vec{A}$، توسط کسینوس‌های هادی آن بردار به صورت زیر قابل بیان است.

$$A_x=A\cos\alpha \quad , \quad A_y=A\cos\beta \quad , \quad A_z=A\cos\gamma$$

ضرب نقطه‌ای (اسکالر) دو بردار: برای به دست آوردن حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار از یکی از دو رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta} \qquad (۸)$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z} \qquad (۹)$$

در رابطهٔ فوق θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

به ضرب نقطه‌ای، ضرب داخلی نیز می‌گوییم.

لازم به ذکر است که اگر بخواهیم تصویر اسکالر و تصویر برداری یک بردار، مانند $\vec{A}$ را بر برداری مانند $\vec{B}$ محاسبه کنیم، از روابط ضرب داخلی استفاده نموده و آنها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A_B=\vec{A}.\frac{\vec{B}}{B} \quad (\text{تصویر اسکالر بردار } \vec{A} \text{ بر بردار } \vec{B}) \qquad (۱۰)$$

$$\vec{A}_B=(\vec{A}.\frac{\vec{B}}{B})\frac{\vec{B}}{B}=A_B\frac{\vec{B}}{B} \qquad (۱۱)$$

ضرب خارجی (برداری) دو بردار: حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، برداری است که بر صفحه‌ی دو بردار عمود بوده و با توجه به قاعده‌ی دست راست جهت آن را تعیین می‌کنیم.

$$\boxed{\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}} \qquad (۱۲)$$

طبق قاعده دست راست، سه انگشت اشاره، میانی و شست دست راست را دو به دو عمود بر هم قرار می‌دهیم، سپس بردار اول که بردار $\vec{A}$ بوده در راستای انگشت اشاره و بردار دوم یعنی بردار $\vec{B}$ در راستای انگشت میانی در نظر گرفته می‌شوند در این صورت بردار $\vec{C}$ در راستای انگشت شست دست راست می‌باشد.
رابطه‌ی زیر می‌تواند برای محاسبه‌ی مقدار حاصل‌ضرب خارجی دو بردار مورد استفاده قرار گیرد:

$$C=|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ فوق θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد. یکی از کاربردهای ضرب خارجی، محاسبه لنگر نیرو حول یک نقطه است.

ضرب سه‌گانه مختلط برداری: در ضرب سه گانه‌ی مختلط برداری از هر دو ضرب داخلی و خارجی استفاده می‌کنیم. توجه کنید که این ضرب بین سه بردار تعریف شده و حاصل آن یک مقدار اسکالر است. (لازم به ذکر است که در ضرب سه گانه مختلط برداری، ضرب داخلی باید بیرون پرانتز باشد.)

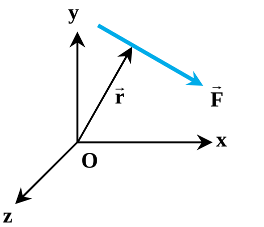
$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}=(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A} \qquad (۱۴)$$

برای محاسبه گشتاور نیرو حول یک محور از ضرب سه‌گانه‌ی مختلط استفاده می‌شود.

ضرب سه گانه برداری: این ضرب مانند ضرب سه‌گانه مختلط بین سه بردار تعریف شده با این تفاوت که در این ضرب، فقط از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم. حاصل این ضرب را می‌توان از ضرب داخلی طبق رابطه‌ی زیر بدست آورد.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \qquad (۱۵)$$

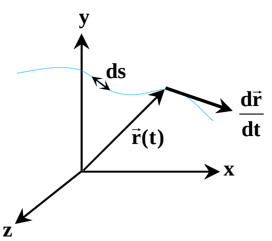
لنگر یا گشتاور یک بردار: لنگر برداری مانند نیروی $\vec{F}$ حول یک نقطه مانند O مساوی است با:



$$\overrightarrow{M_O}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ r_x & r_y & r_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (۱۶)$$

در رابطه فوق $\vec{r}$ بردار مکان بوده که ابتدای آن نقطه‌ای است که نسبت به آن گشتاورگیری می‌شود و انتهای آن یک نقطه دلخواه از راستای نیرو می‌باشد.

مشتق توابع برداری: برای به دست آوردن مشتق یک تابع برداری مانند بردار مکان $\vec{r}(t)$ (که در دستگاه مختصات دکارتی ثابت قرار دارد)، نسبت به متغیر میدان به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}} \qquad (۱۷)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}} \qquad (۱۸)$$

بهتر است بدانید که مولفه‌های تابع برداری $\vec{r}(t)$ یعنی x و y و z خود تابعی از متغیر t بوده همچنین بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ ثابت بوده و مشتق آنها صفر است.

راستای بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ مماس بر منحنی $\vec{r}(t)$ بوده و مقدار آن مساوی است با:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^۲+(\frac{dy}{dt})^۲+(\frac{dz}{dt})^۲}=\frac{ds}{dt} \qquad (۱۹)$$

s در این رابطه طول قوس منحنی است.

اگر تابع برداری برحسب متغیر طول قوس بیان شود $r=r(s)$، در نتیجه می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\hat{i}+\frac{dy}{ds}\hat{j}+\frac{dz}{ds}\hat{k} \qquad (۲۰)$$

با توجه به تعریف مشتق، بردار فوق در امتداد مماس بر منحنی می‌باشد. بنابراین برای به دست آوردن مقدار این بردار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

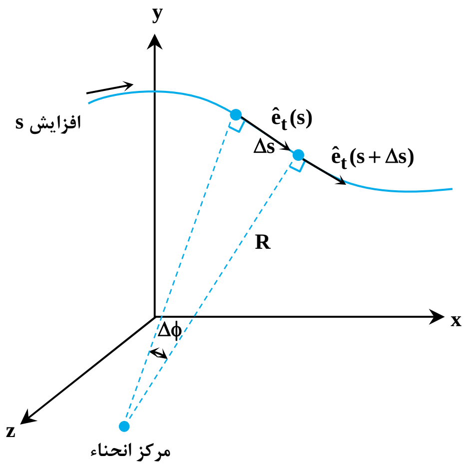
$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\frac{dr}{ds}=\sqrt{(\frac{dx}{ds})^۲+(\frac{dy}{ds})^۲+(\frac{dz}{ds})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{(ds)^۲}[(dx)^۲+(dy)^۲+(dz)^۲]}=\sqrt{\frac{(ds)^۲}{(ds)^۲}}=۱ \qquad (۲۱)$$

توجه کنید که بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ دارای مقدار واحد بوده بنابراین این بردار، بردار یکه مماس بر منحنی می‌باشد. همچنین جمله‌های $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ و $\frac{dz}{ds}$ کسینوس‌های هادی خط مماس بر منحنی خواهند بود.

$$\hat{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \qquad \boxed{\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} \qquad (۲۲)$$

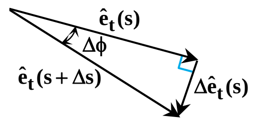
همان‌طور که قبلاً گفتیم بردار $\vec{r}(t)$ بردار مکان یک ذره نامیده می‌شود. اکنون با توجه به این توضیح، $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بردار سرعت ذره و $\frac{d\vec{r}}{ds}$ یا $\hat{e}_t$ بردار یکه مماس بر مسیر حرکت ذره می‌باشند.

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{e}_t = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\frac{d\vec{r}}{ds}} \qquad (۲۳)$$



ذره‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل بر روی مسیر حرکت می‌کند. بردار یکه مماس بر مسیر حرکت را در دو لحظه متوالی با $\hat{e}_t(s)$ و $\hat{e}_t(s+\Delta s)$ نشان می‌دهیم. به صفحه‌ای که مماس بر $\hat{e}_t(s)$ به موازات $\hat{e}_t(s+\Delta s)$ رسم شود، صفحه بوسان می‌گوییم.

می‌بینید که تغییرات بردار یکه موازی با صفحه بوسان است، در نتیجه مقدار آن را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\hat{e}_t(s+\Delta s) - \hat{e}_t(s)}{\Delta s}$$

با توجه به اینکه بردار یکه $\hat{e}_t$ همواره دارای مقدار واحد بوده بنابراین تغییرات آن تنها شامل تغییر جهت بردار می‌باشد که همان‌طور که در شکل فوق ملاحظه می‌شود عمود بر راستای $\hat{e}_t$ است.

از طرفی چون بردار $\hat{e}_t$ مماس بر مسیر حرکت بوده بنابراین مشتق برداری بردار یکه $\hat{e}_t$، در صفحه قائم آن منحنی واقع خواهد بود. به امتداد قائم بر بردار یکه $\hat{e}_t$، امتداد قائم اصلی می‌گوییم.

$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right| = \left|\underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta s}\right| = \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{|\Delta\hat{e}_t|}{\Delta s} = \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{|\hat{e}_t|\,\Delta\phi}{\Delta s} = 1 \times \frac{d\phi}{ds} = \kappa \qquad (۲۴)$$

توجه کنید که مقدار κ انحنای منحنی را نشان داده که این مقدار برابر عکس شعاع انحنای خمشی منحنی است.

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{R}} \qquad (۲۵)$$

$$\boxed{\frac{de_t}{ds} = \frac{1}{R}} \qquad (۲۶)$$

همانطور که در شکل می‌بینید جهت بردار $\frac{d\hat{e}_t}{ds}$ همواره به سمت مرکز انحناء بوده، پس بردار یکه آن را با $\hat{e}_n$ نشان داده و آن را بردار یکه قائم اصلی می‌نامیم. یعنی:

$$\hat{e}_n = \frac{\frac{d\hat{e}_t}{ds}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right|} \Rightarrow \hat{e}_n = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{e}_t}{ds} = R\frac{d\hat{e}_t}{ds} \qquad (۲۷)$$

لازم به ذکر است که در هر نقطه از منحنی برای محاسبه‌ی مقدار انحنای یک منحنی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{1}{R}=\frac{de_t}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)=\frac{d^2r}{ds^2}$$

$$\vec{r}=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}\Rightarrow\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}\Rightarrow\frac{d^2r}{ds^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

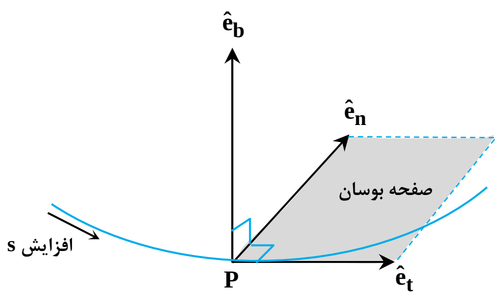
$$\boxed{\kappa=\frac{1}{R}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\qquad (۲۸)$$

حال با توجه به بردار یکهٔ $\hat{e}_n$ که در مورد آن توضیح داده شد، یک دستگاه مختصات سه وجهی قائم $(\hat{e}_t,\hat{e}_n,\hat{e}_b)$ را تعریف نموده که راستای اول آن را با بردار یکه $\hat{e}_t$ نشان می‌دهیم که در امتداد خط مماس بر منحنی و در جهت مثبت طول کمان است. راستای دوم را با بردار یکه $\hat{e}_n$ نشان داده که در امتداد قائم اصلی و در جهت تقعر منحنی است.

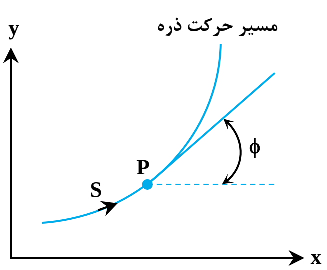
در نتیجه راستای سوم دستگاه سه وجهی که در امتداد عمود بر صفحه $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ است با استفاده از قانون دست راست و رابطه‌ی ضرب برداری $\hat{e}_b=\hat{e}_t\times\hat{e}_n$ تعیین می‌شود.

به بردار یکه $\hat{e}_b$ بردار یکهٔ قائم مضاعف می‌گوییم. دستگاه قائم سه وجهی $(\hat{e}_t,\hat{e}_n,\hat{e}_b)$ در شکل زیر نشان داده شده است. اما بردارهای یکه این دستگاه به اختصار با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\boxed{\begin{cases}\hat{e}_t=\dfrac{d\vec{r}}{ds}\\[2ex]\hat{e}_n=\dfrac{\dfrac{d\hat{e}_t}{ds}}{\left|\dfrac{d\hat{e}_t}{ds}\right|}=\dfrac{\dfrac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left|\dfrac{d\hat{e}_t}{dt}\right|}=\hat{e}_b\times\hat{e}_t\\[2ex]\hat{e}_b=\hat{e}_t\times\hat{e}_n\end{cases}}\qquad (۲۹)$$



انحنای یک منحنی صفحه‌ای: در شکل مقابل مسیر حرکت ذره‌ای را می‌بینید که در یک نقطه مانند P شیب خط مماس برمنحنی با زاویه ϕ نمایش داده شده است. بردار مکان ذره در هر لحظه با $\vec{R}(t)$ تعیین می‌شود. مولفه‌های این بردار $x(t)$ و $y(t)$ بوده بنابراین بردار $R(t)$ برابر است با:



$$\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد حاصل $\frac{d\phi}{ds}$ برابر انحنای منحنی بوده که مقدار آن به روش زیر قابل محاسبه است.

با توجه به اینکه شیب خط مماس بر منحنی برابر $tg\phi = \frac{dy}{dx}$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$tg\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow \phi = tg^{-1}(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{1+(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})^2} \times \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} \times \frac{dt}{ds}$$

اما طول منحنی برابر است با:

$$ds = [(dx)^2+(dy)^2]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = [(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2]^{\frac{1}{2}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)} \times \frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۳۰)$$

اکنون رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\boxed{\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}} \qquad (۳۱)$$

که در رابطه فوق $\vec{v}$ و $\vec{a}$ به ترتیب بردار سرعت و شتاب ذره می‌باشند.

همچنین اگر بتوانیم معادله منحنی مسیر حرکت ذره را برحسب رابطه $y=f(x)$ بیان کنیم آنگاه برای محاسبه شعاع انحنای مسیر حرکت در هر نقطه می‌توانیم اینگونه بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{ds} \\ tg\phi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow (1+tg^2\phi)\frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+tg^2\phi)} \times \frac{dx}{ds}$$

اما چون $dx = ds\cos\phi$ است در نتیجه:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}} \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+tg^2\phi)} \times \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\phi)}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+tg^2\phi)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (۳۲)$$

مشتق برداری: در صورتی‌که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را دو تابع برداری از متغیر t و m را یک تابع اسکالر از این متغیر در نظر بگیریم اتحادهای زیر برقرار می‌شوند:

$$\vec{A} = \vec{A}(t) \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}(t) \quad , \quad m = m(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (۳۳ \text{ الف})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (۳۳ \text{ ب})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (۳۳ \text{ ج})$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{A}) = \frac{dm}{dt}\vec{A} + m\frac{d\vec{A}}{dt} \qquad (۳۳\text{د})$$

مثال ۱: بردار یکه مماس بر مسیر حرکت یک ذره که بردار مکان آن توسط رابطه زیر داده شده است، را تعیین کنید؟

$$\vec{R}(t)=(\cos t)\hat{i}+(\sin t)\hat{j}+t\hat{k}$$

☑ **پاسخ:** همانطور که در توضیحات متن درس اشاره شد، بردار یکه مماس بر مسیر حرکت $\hat{e}_t$ از رابطه $\hat{e}_t=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ قابل محاسبه بوده بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=(-\sin t)\hat{i}+(\cos t)\hat{j}+1\hat{k}\quad;\quad |\vec{v}|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}\Rightarrow \hat{e}_t=\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$$

مثال ۲: بردارهای قائم و مماسی را برای حرکت دایره‌ای با معادله پارامتری زیر تعیین کنید.

$$R(t)=(\cos 2t)\hat{i}+(\sin 2t)\hat{j}$$

☑ **پاسخ:**

$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=-2\sin 2t\hat{i}+2\cos 2t\hat{j}\quad,\quad |\vec{v}|=\sqrt{4\sin^2 2t+4\cos^2 2t}=2$$

$$\hat{e}_t=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(-2\sin 2t)\hat{i}+(2\cos 2t)\hat{j}}{2}=-(\sin 2t)\hat{i}+(\cos 2t)\hat{j}$$

$$\hat{e}_n=\frac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt}=-2(\cos 2t)\hat{i}-2(\sin 2t)\hat{j}\Rightarrow\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right|=\sqrt{4\cos^2 2t+4\sin^2 2t}=2\Rightarrow \hat{e}_n=\frac{-2(\cos 2t)\hat{i}-2(\sin 2t)\hat{j}}{2}=-(\cos 2t)\hat{i}-(\sin 2t)\hat{j}$$

فصل دوم

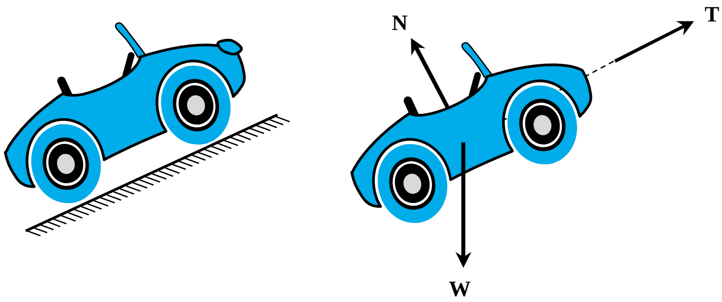
« سینماتیک ذره‌ها »

مقدمه

در این فصل می‌خواهیم حرکت ذراتی را بررسی کنیم که بر روی مسیرهای مستقیم و منحنی تحت سرعت‌های ثابت و متغیر در حال حرکت می‌باشند. برای مطالعه حرکت ذره از مختصات‌های دکارتی، قائم ـ مماسی، مختصات قطبی، مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی استفاده می‌کنیم. پس از تعیین مختصات مناسب برای مطالعه حرکت ذره، ارتباط بین جابه‌جایی و سرعت و شتاب ذره مورد بررسی قرار می‌گیرد. روابط حاکم بر این بخش از مکانیک بر پایه مفاهیمی مانند مشتق و انتگرال استوار می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که سینماتیک بخشی از علم مکانیک است که حرکت اجسام را مورد مطالعه قرار می‌دهد بدون آنکه عوامل حرکت را در نظر بگیرد.

همان‌طور که قبلاً (در بخش مفاهیم اولیه) اشاره کردیم ذره مفهوم و معنایی ایده‌آل دارد که حجم آن بسیار کوچک ولی دارای جرم است. البته این تعریف در بسیاری از مسائل صحت ندارد چرا که حتی ممکن است حجم جسم بزرگ بوده اما در مقایسه با مسیر حرکتی که طی می‌کند کوچک باشد.

بنابراین آن را ذره در نظر می‌گیریم (مانند حرکت سیارات به دور خورشید) یا اینکه ممکن است اندازه جسم کوچک نباشد ولی ابعاد جسم بر روی جنبه‌هایی از حرکت که مورد مطالعه‌ی ماست، تأثیری ندارد، بنابراین آن را ذره در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال حرکت یک اتومبیل را در نظر بگیرید که تحت نیروی کششی T بر روی سطح شیبدار به بالا حرکت می‌کند. حال اگر از نیروی مقاومت هوا و اثرات چرخشی چرخ‌های اتومبیل صرف‌نظر کنیم می‌توانیم اتومبیل را ذره در نظر بگیریم و تمامی نیروهای وارد بر آن را در مرکز جرمش متمرکز کنیم.



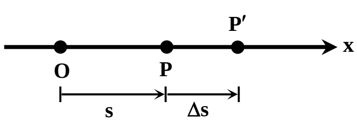
حرکت بر روی خط راست

اگر حرکت جسم به گونه‌ای باشد که تمام ذرات تشکیل دهنده جسم در هر لحظه از زمان مسیرهای مشابهی را طی کند و دارای سرعت‌های یکسانی باشد، می‌گوییم حرکت از نوع انتقالی است. در این حالت حرکت مرکز جرم است که تمامی اطلاعات لازم برای شناخت و درک حرکت جسم را مشخص می‌کند، بنابراین می‌توانیم جسم صلب را ذره در نظر بگیریم.

در ابتدا حرکت انتقالی جسم (یا ذره) بر روی یک مسیر مستقیم (مانند محور x) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

توجه داشته باشید که اگر مکان ذره در هر لحظه t با متغیر s از مبدأ مکان (نقطه O) مشخص شود، در نتیجه سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را با استفاده از روابط زیر به دست می‌آوریم:

اگر سرعت لحظه‌ای مساوی مشتق مکان ذره نسبت به زمان باشد، پس می‌توانیم بنویسیم:



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \Rightarrow \boxed{ds = vdt} \qquad (۱)$$

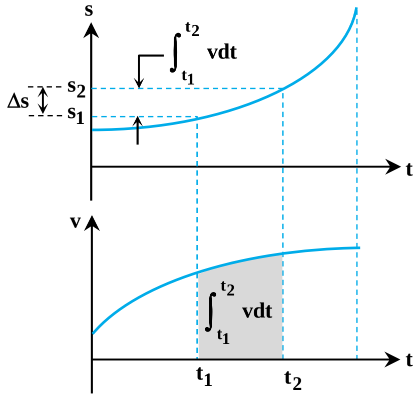
حال در صورتی که شتاب لحظه‌ای نیز مساوی مشتق سرعت لحظه‌ای نسبت به زمان باشد، بنابراین:

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \Rightarrow \boxed{dv = adt} \qquad (۲)$$

اگر رابطه‌ی (۱) و (۲) را ترکیب کنیم، داریم:

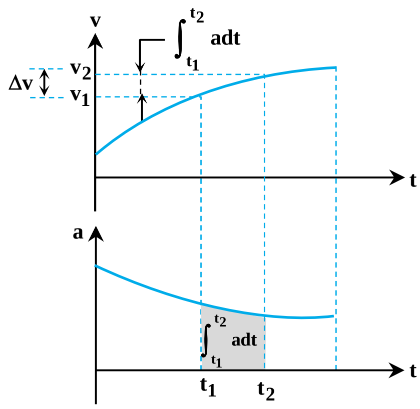
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ds}{v}=dt\\[2mm] \dfrac{dv}{a}=dt\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{ds}{v}=\frac{dv}{a}\Rightarrow \qquad \boxed{vdv=ads\Rightarrow \dot{s}d\dot{s}=\ddot{s}ds} \qquad (۳)$$

اکنون می خواهیم مسافت پیموده شده توسط ذره در مدت زمان t_1 تا t_2 را به دست آوریم، برای این کار باید از رابطه‌ی (۱) انتگرال بگیریم:



$$\boxed{\int_{s_1}^{s_2} ds=\int_{t_1}^{t_2} vdt\Rightarrow \Delta s=(\text{مساحت زیرمنحنی } v-t)} \qquad (۴)$$

همچنین می‌توانید با انتگرال‌گیری از رابطه (۲) و با استفاده از رابطه (۳) نیز تفاضل مجذورات سرعت را برحسب رابطه شتاب ـ مکان بدست آورید. تغییرات سرعت ذره را از زمان t_1 تا t_2 در نظر می‌گیریم که مقدار آن برابر است با:

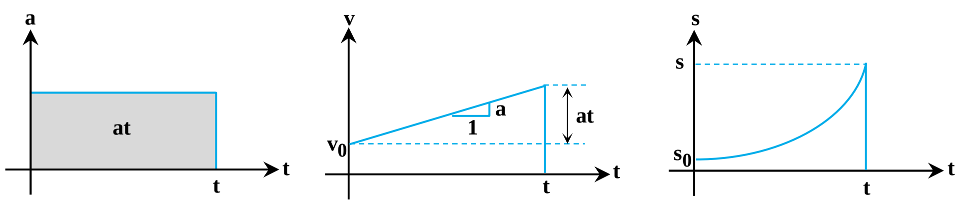


$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} dv=\int_{t_1}^{t_2} adt\Rightarrow \Delta v=(\text{مساحت زیرمنحنی } a-t)} \qquad (۵)$$

$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} vdv=\int_{s_1}^{s_2} ads\Rightarrow \frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)=(\text{مساحت زیرمنحنی } a-s)} \qquad (۶)$$

مسائل سینماتیک ذره می‌تواند به شکل‌های مختلف مطرح شده که برای حل آنها باید دقت کافی داشت به منظور جلوگیری از اشتباه، مسائل مختلف سینماتیک ذره را در حالات خاص زیر ارائه می‌دهیم:

حالت خاص ۱: در صورتی که شتاب ثابت باشد، روابط فوق را به شکل زیر ساده می‌کنیم.



(۷ الف) $$dv=adt\Rightarrow v=v_0+at$$

(۷ ب) $$vdv=ads\Rightarrow v^2-v_0^2=2as$$

(۷ ج) $$ds=vdt\xrightarrow{(\text{۷ الف})}ds=(at+v_0)dt\Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds=\int_{0}^{t}(at+v_0)dt\Rightarrow s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$$

(۷ د) $$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\Rightarrow \Delta s=\frac{v+v_0}{2}\times \Delta t$$

s_0 و v_0 به ترتیب جابه‌جایی و سرعت ذره در لحظه $t=0$ را نشان می‌دهند و $\bar{v}$ بیانگر سرعت متوسط ذره در طول زمان Δt است.

دقت کنید که در حالت کلی شتاب ثابت نیست بلکه متغیر است. در حالت‌های خاص زیر به چند حالت از شتاب متغیر اشاره شده است.