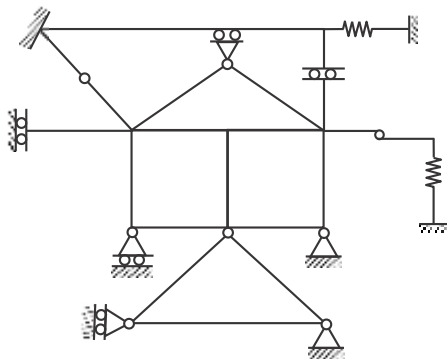


فصل اول

«بررسی معینی و نامعینی در سازه‌ها»

مثال ۱: سازه مقابل چند درجه نامعین است؟



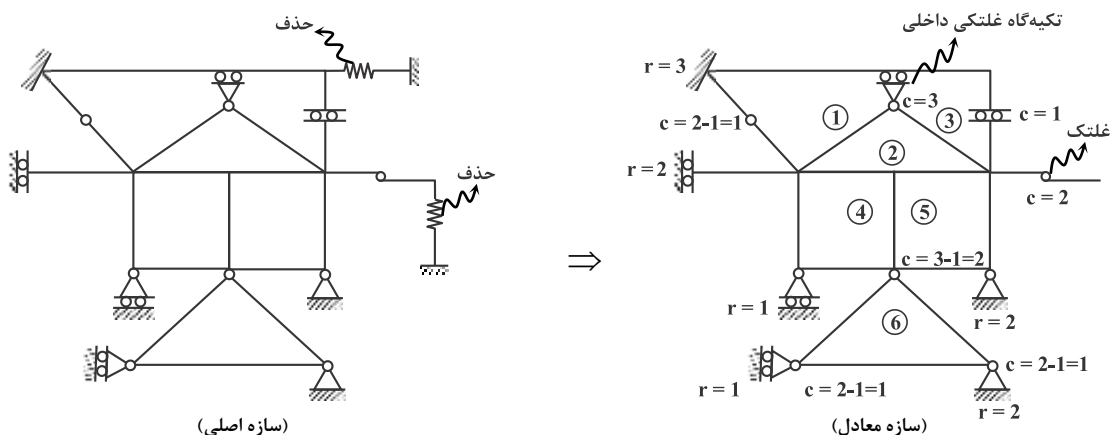
(۱) ۱۸

(۲) ۱۶

(۳) ۱۹

(۴) ۱۷

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که این قاب دارای دو فنر انتقالی تکیه‌گاهی است. بنابراین با حذف این دو فنر انتقالی تکیه‌گاهی از سازه اصلی، سازه معادل زیر حاصل می‌شود:



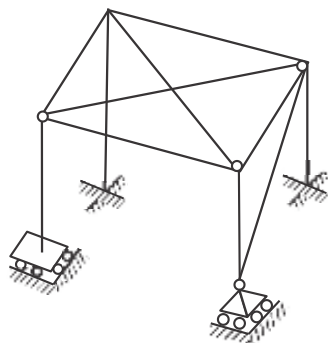
سپس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد معادلات شرط (c) و تعداد فضاهای بسته در قاب بدون در نظرگیری زمین (k)، برای سازه معادل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r = 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 = 11, \quad c = 3 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 11, \quad k = 6$$

در نتیجه با توجه به حذف دو فنر انتقالی تکیه‌گاهی از سازه اصلی، به مقدار درجه نامعینی از سازه معادل، ۲ عدد اضافه می‌کنیم. پس درجه نامعینی سازه اصلی برابر است با:

$$DI = [(r + 3k) - (c + 3)] + 2 \Rightarrow DI = [(11 + 3 \times 6) - (11 + 3)] + 2 \Rightarrow DI = [(29) - (14)] + 2 = 17$$

مثال ۲: درجه نامعینی قاب فضایی مقابل کدام است؟

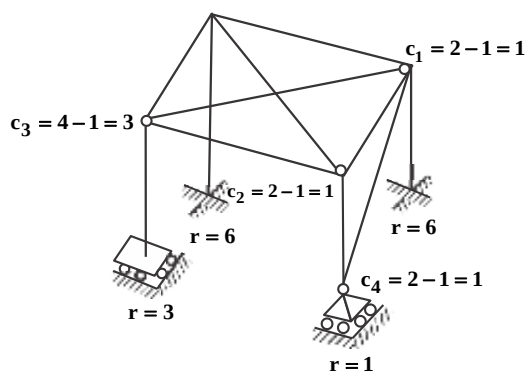


(۱) ۱۷

(۲) ۱۸

(۳) ۱۹

(۴) ۲۰



پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه قاب فضایی است، پس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد اعضا (m) و تعداد گره‌ها (n) را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$r = 6 + 6 + 3 + 1 = 16, \quad m = 11, \quad n = 8$$

سپس تعداد معادلات شرط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$c = 3(\sum c_i) - (\text{تعداد اعضا دو سر مفصل در قاب})$$

$$c = 3(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) - (1) = 3(1 + 1 + 3 + 1) - (1) = 3(6) - 1$$

$$\Rightarrow c = 18 - 1 = 17$$

بنابراین درجه نامعینی قاب فضایی برابر است با:

$$DI = (6m + r) - (6n + c) \Rightarrow DI = (6 \times 11 + 16) - (6 \times 8 + 17) \Rightarrow DI = 82 - 65 = 17$$



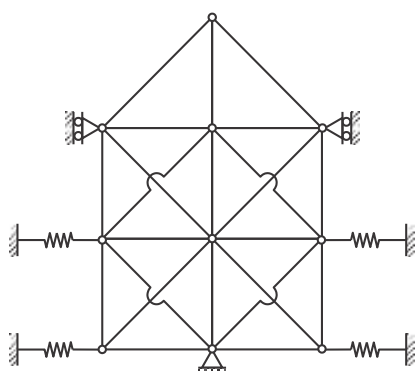
مثال ۳: درجه نامعینی خرپای مقابل کدام است؟

۶ (۱)

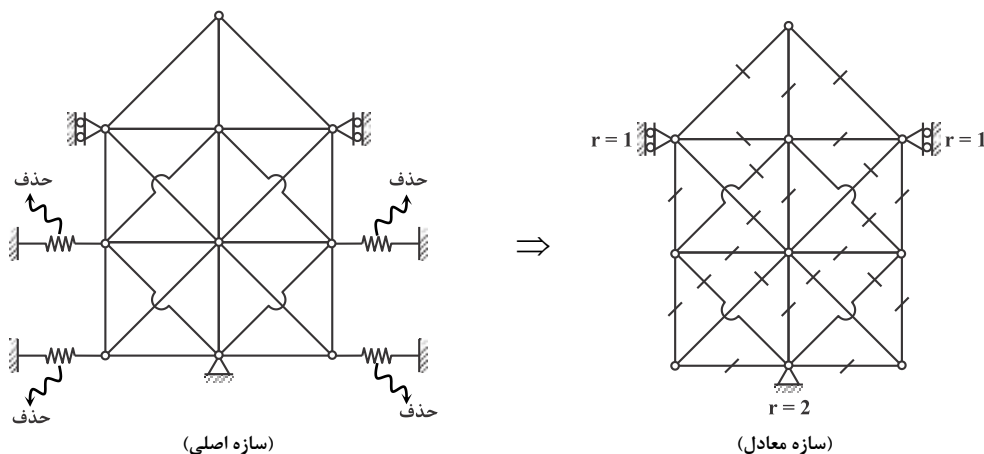
۷ (۲)

۱۱ (۳)

۱۰ (۴)



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در این خرپا چهار فنر انتقالی تکیه‌گاهی وجود دارد. پس ابتدا فنرها را حذف کرده تا سازه معادل زیر ایجاد شود:



سپس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد اعضا خرپا (m) و تعداد مفصل‌های خرپا (n) برای سازه معادل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r = 2 + 1 + 1 + 1 = 5, \quad m = 23, \quad n = 10$$

با توجه به اینکه چهار فنر از سازه اصلی حذف شده است، بنابراین به درجه نامعینی سازه معادل، ۴ عدد اضافه می‌شود. پس درجه نامعینی سازه اصلی برابر است با:

$$DI = [(m + r) - 2n] + 4 \Rightarrow DI = [(23 + 5) - 2 \times 10] + 4 \Rightarrow DI = [28 - 20] + 4 \Rightarrow DI = 8 + 4 = 12$$

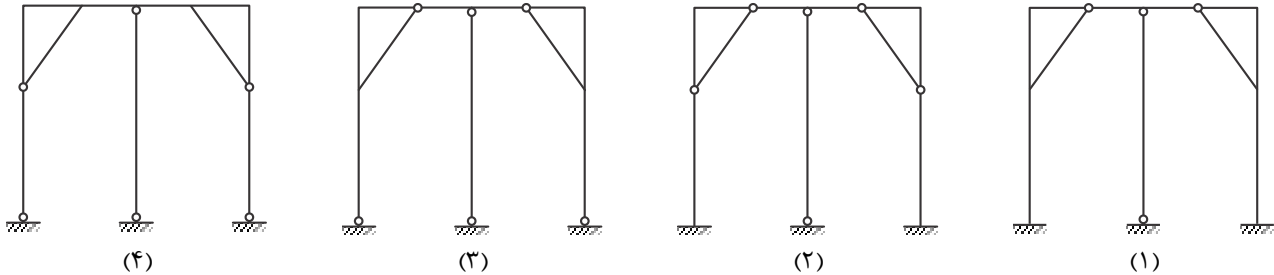


فصل دوم

«بررسی پایداری و ناپایداری سازه‌ها»

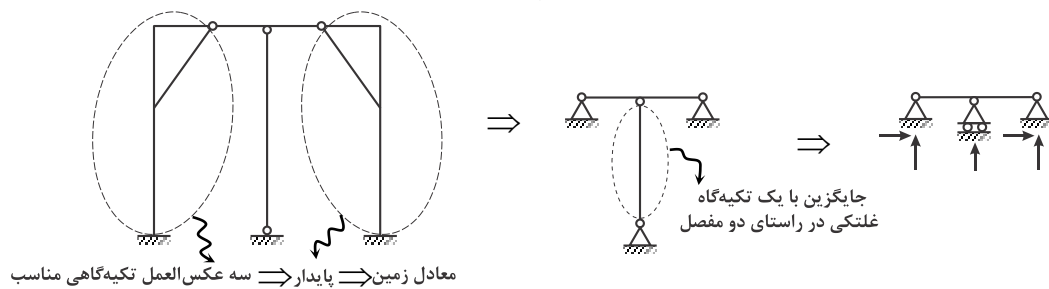
(مهندسی عمران - سراسری ۸۶)

مثال: کدام یک از سازه‌های زیر پایدار است؟ (کلیه سازه‌ها متقارن هستند).



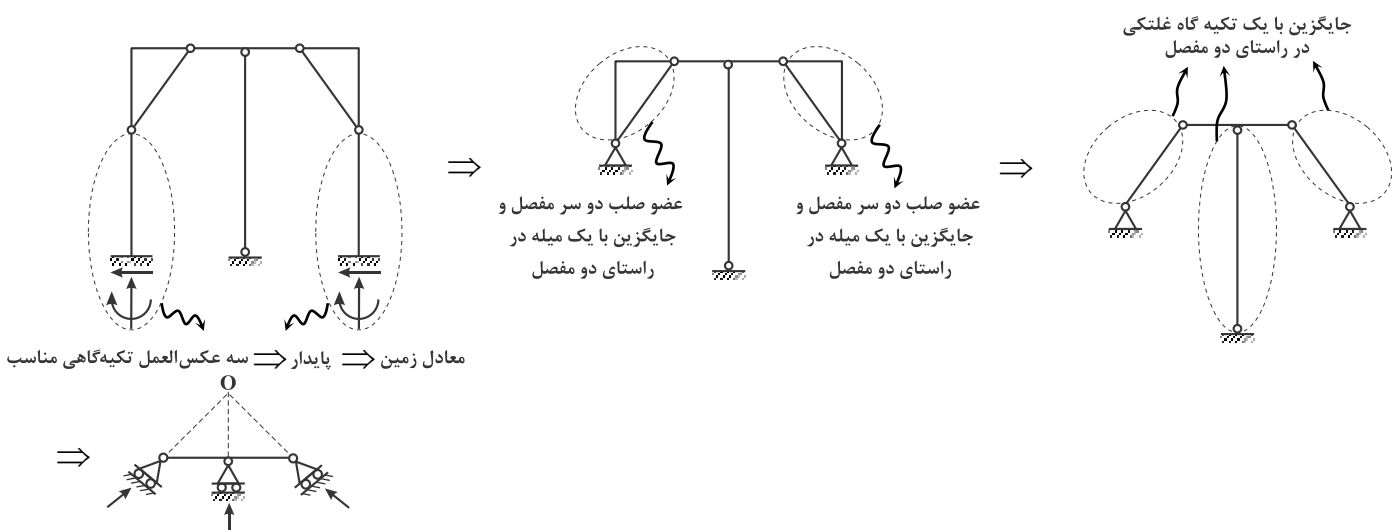
✓ پاسخ: گزینه «۱» باید تمام گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی نمود:

گزینه (۱): در این سازه قسمت‌های سمت چپ و راست سازه صلب بوده و توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب به زمین متصل شده‌اند، بنابراین این دو قسمت را می‌توان پایدار و در نهایت معادل زمین در نظر گرفت، پس داریم:



در نهایت مشاهده می‌شود که قسمت صلب توسط پنج عکس‌العمل تکیه‌گاهی به زمین متصل شده که سه تا از آن‌ها به صورت غیرموازی و غیرهم‌مرس می‌باشند، در نتیجه سازه پایدار است.

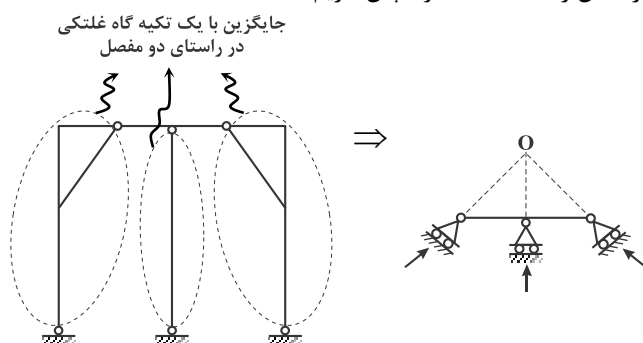
گزینه (۲): در این سازه قسمت‌های صلب و پیوسته سمت چپ و راست با سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب به زمین متصل شده‌اند، پس پایدار و معادل زمین هستند، بنابراین داریم:



بنابراین مشاهده می‌شود که قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی هم‌مرس در نقطه O به زمین متصل شده و در نتیجه سازه ناپایدار است.

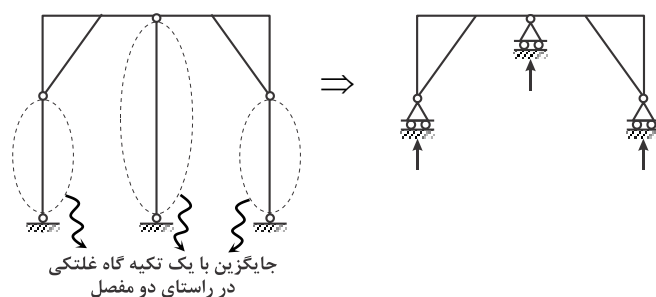


گزینه (۳): در این سازه قسمت‌های صلب در وسط، سمت چپ و راست سازه به صورت دو مفصل هستند و می‌توان آن‌ها را با یک میله در راستای دو مفصل جایگزین نمود و سپس از تکیه‌گاه‌های غلتکی در همان راستا استفاده کرد. پس داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌شود قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی هم‌رس در نقطه O به زمین متصل شده و در نتیجه این سازه ناپایدار است.

گزینه (۴): این سازه در قسمت‌های چپ و راست و همچنین قسمت وسط، به صورت قسمت‌های صلب دو سر مفصل بوده و می‌توان آن‌ها را با یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای دو مفصل جایگزین نمود. بنابراین داریم:

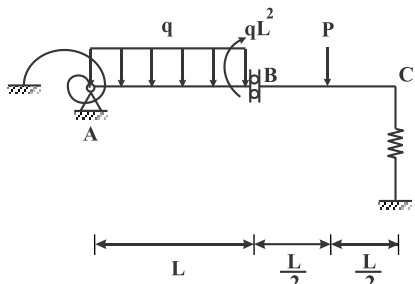


همان‌طور که مشاهده می‌شود قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی موازی به زمین متصل شده و در نتیجه این سازه ناپایدار است.

فصل سوم

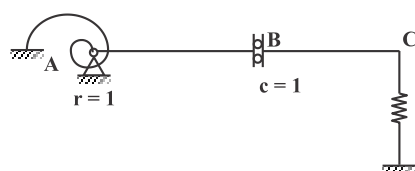
«بررسی استاتیک سازه‌های معین»

مثال ۱: در تیر شکل زیر مقدار لنگر در فنر دورانی A و نیروی فنر C به ترتیب کدام است؟



$$(1) \quad 2P \text{ و } \frac{3qL^2}{2} + 2PL \quad (2) \quad P \text{ و } \frac{3qL^2}{2} + PL$$

$$(3) \quad P \text{ و } \frac{3qL^2}{2} - PL \quad (4) \quad 2P \text{ و } \frac{3qL^2}{2} - 2PL$$

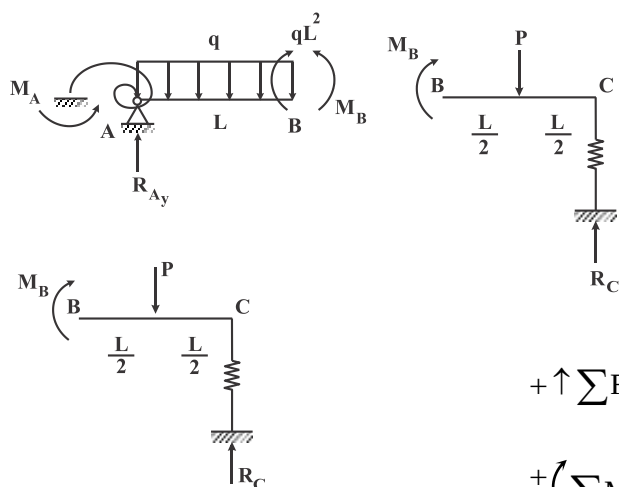


پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه تحت اثر

بارگذاری افقی و مایل قرار نگرفته، پس تیر محسوب می‌شود. بنابراین در این حالت از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی افقی و همچنین نیروهای محوری داخلی در اعضا و مفاصل صرف‌نظر می‌گردد. از طرفی سازه معین است زیرا:

فنر انتقالی و فنر دورانی از تیر حذف شده و در انتها دو عدد به درجه نامعینی آن اضافه می‌شود.

$$DI = [r - (c + 2)] + 2 \Rightarrow DI = [1 - (1 + 2)] + 2 \Rightarrow DI = 0$$



حال تیر را از مفصل برشی B جدا کرده و داریم:

با توجه به شکل‌های ایجادشده از قسمت BC شروع می‌کنیم زیرا دارای دو مجهول است (M_B , R_C).

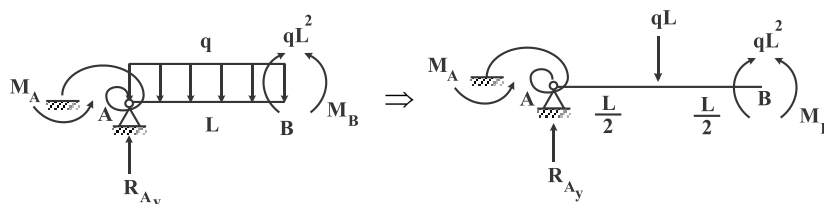
پس معادلات تعادل را برای آن نوشته و به‌صورت زیر داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_C - P = 0 \Rightarrow R_C = P \Rightarrow R_{\text{فنر}} = R_C = P$$

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow M_B - (R_C \times L) = 0 \Rightarrow M_B = R_C L \Rightarrow M_B = PL\right)$$

حال با مشخص شدن مقدار M_B از قسمت BC، تعداد مجهولات قسمت AB برابر دو می‌شود (M_A , R_{Ay})، پس با نوشتن معادلات تعادل برای

قسمت AB داریم:



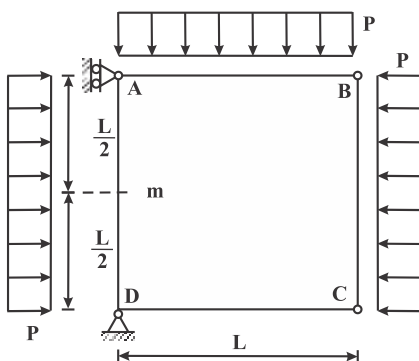
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - qL = 0 \Rightarrow R_{Ay} = qL$$

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - M_B + qL^2 + (qL \times \frac{L}{2}) = 0 \xrightarrow{M_B=PL} -M_A - PL + \frac{3qL^2}{2} = 0 \Rightarrow M_A = M_{\text{فنر}} = \frac{3qL^2}{2} - PL\right)$$



(مهندسی عمران - سراسری ۷۶)

مثال ۲: در شکل مقابل گشتاور خمشی در نقطه m واقع در وسط AD کدام است؟



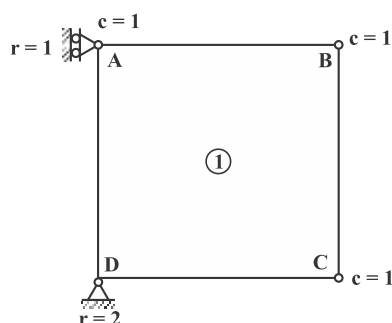
$$\frac{PL^2}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{2PL^2}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3PL^2}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{4PL^2}{8} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:



$$\begin{cases} r = 2 + 1 = 3 \\ c = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \\ k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI = (3 + 3 \times 1) - (3 + 3) \Rightarrow DI = 0$$

بنابراین قاب معین است. حال با توجه به اینکه تمام اعضای دو سر مفصل و پیوسته AB، BC و ADC دارای بارگذاری به صورت مستقیم هستند، پس در این قاب هیچ عضو دو نیرویی نداریم. بنابراین ابتدا قسمت AB را از قاب جدا کرده و به صورت زیر خواهیم داشت:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -PL + V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B = \frac{PL}{2}$$

با توجه به تقارن در بارگذاری قائم، نیروهای V_A و V_B برابر هستند و داریم:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N_A - N_B = 0 \Rightarrow N_A = N_B$$

همچنین می‌توان نوشت:

پس عضو BC را جدا کرده و داریم:

با توجه به تقارن در بارگذاری افقی، نیروهای N_C و N_B برابر هستند و داریم:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N_B + N_C - PL = 0 \Rightarrow N_B = N_C = \frac{PL}{2}$$

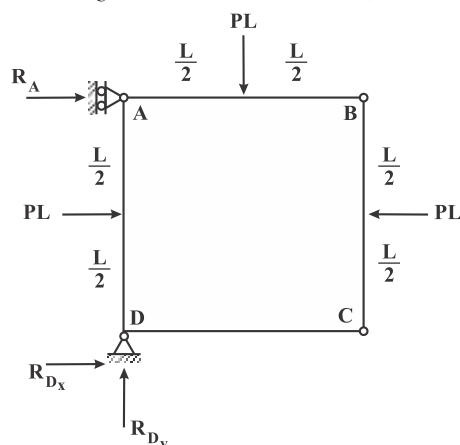
همچنین خواهیم داشت:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - V_B = 0 \Rightarrow V_C = V_B$$

$$V_C = \frac{PL}{2} \quad \text{و} \quad N_A = \frac{PL}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

سپس برای محاسبه مقدار لنگر خمشی در نقطه m، باید مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه D را بدست آوریم. بنابراین با لنگرگیری حول نقطه A در کل سازه به صورت زیر داریم:

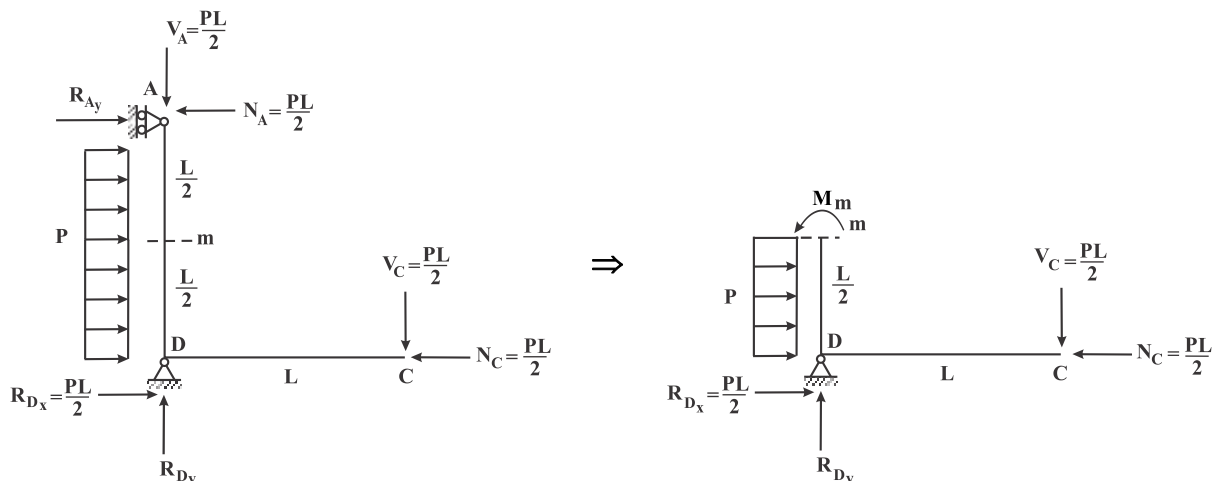


$$\uparrow \sum M_A = 0 \Rightarrow (PL \times \frac{L}{2}) + (PL \times \frac{L}{2}) - (PL \times \frac{L}{2}) - (R_{Dx} \times L) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{PL^2}{2} = R_{Dx} \times L \Rightarrow R_{Dx} = \frac{PL}{2}$$



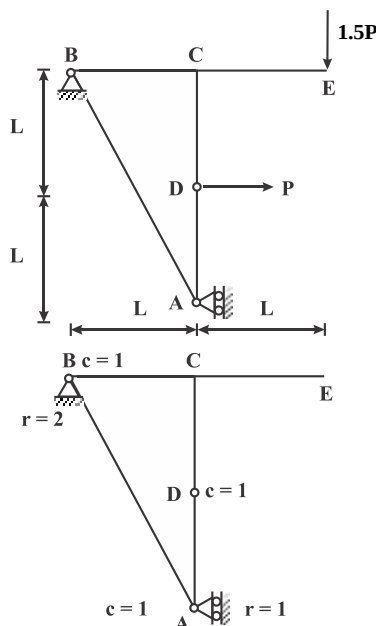
در نهایت با زدن مقطعی در m برای عضو جدا شده ADC داریم:



$$+\left(\sum M_m = 0 \Rightarrow \left(\frac{PL}{2} \times \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{PL}{2} \times L\right) - \left(\frac{PL}{2} \times \frac{L}{2}\right) - \left(P \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2}\right) - M_m = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{2} - \frac{PL^2}{8} = M_m \Rightarrow M_m = \frac{3PL^2}{8}\right.$$

مثال ۳: مقدار لنگر M_{CB} چقدر است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۸۲)



(۱) صفر

(۲) $\frac{PL}{2}$ در جهت عقربه‌های ساعت

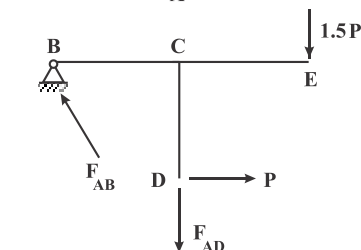
(۳) $PL/5$ در جهت عقربه‌های ساعت

(۴) PL در جهت عکس عقربه‌های ساعت

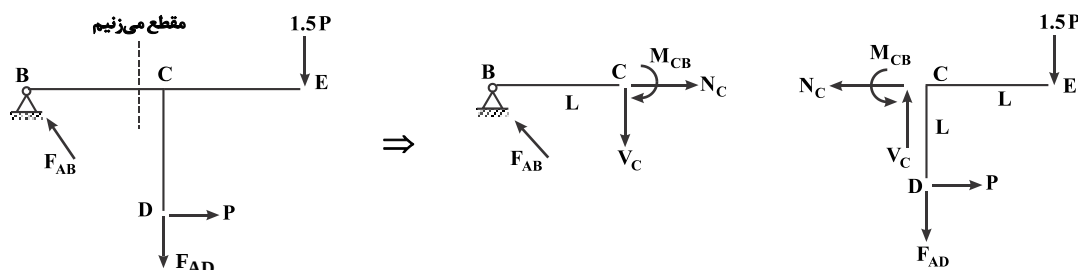
پاسخ: گزینه «۲» ابتدا درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} r = 2 + 1 = 3 \\ c = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow DI = (3 + 3 \times 1) - (3 + 3) \Rightarrow DI = 0$$

بنابراین قاب معین است. حال مشاهده می‌شود که اعضای AB و AD به صورت پیوسته، دو سر مفصل و فاقد بارگذاری مستقیم هستند، بنابراین اعضا دو نیرویی می‌باشند و نیروی داخلی آنها در راستای دو مفصل قرار دارد. پس به صورت مقابل داریم:



پس می‌توان بدون محاسبه نیروهای F_{AB} و F_{AD} ، مقدار لنگر خمشی M_{CB} را به صورت زیر محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا سمت چپ نقطه C از قسمت BCDE را مقطع زده و لنگر M_C را بدست می‌آوریم:





در ادامه با در نظرگیری قسمت سمت راست C داریم:

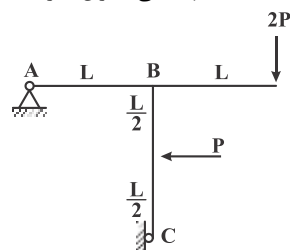
$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow (1/2 P \times L) - (P \times L) - M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{PL}{2}\right)$$

حال با انتقال لنگر M_C به قسمت چپ C، مقدار لنگر M_{CB} هم مقدار با M_C ولی خلاف جهت آن بدست می‌آید:

$$M_{CB} = \frac{PL}{2} \text{ (در جهت عقربه‌های ساعت)}$$

مثال ۴: در قاب مقابل لنگر M_{BC} برابر است با:

(مهندسی عمران - آزاد ۸۴)



$$(1) 3PL$$

$$(2) 2PL$$

$$(3) 5PL$$

$$(4) 4PL$$

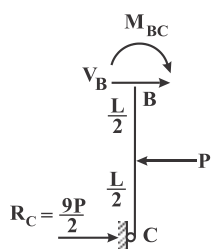
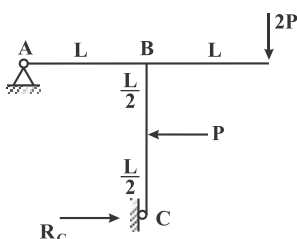
پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به صورت زیر درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} r = 2 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \Rightarrow DI = (3 + 0) - (0 + 3) \Rightarrow DI = 0$$

قاب معین است، همچنین مشاهده می‌شود که این قاب پیوسته (فاقد ناپیوستگی داخلی) دارای سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی است، بنابراین برای محاسبه لنگر M_{BC} ، ابتدا باید مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_C را بدست آوریم:

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow (2P \times 2L) + (P \times \frac{L}{2}) - (R_C \times L) = 0\right)$$

$$\Rightarrow 4PL + \frac{PL}{2} - (R_C \times L) = 0 \Rightarrow R_C = \frac{9P}{2}$$



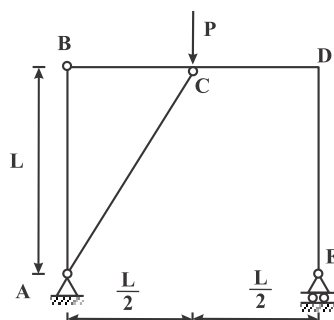
حال با زدن مقطعی از نقطه B می‌توان مقدار لنگر M_{BC} را تعیین نمود:

$$+\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + (P \times \frac{L}{2}) - (R_C \times L) = 0\right)$$

$$\Rightarrow M_{BC} + \frac{PL}{2} - (\frac{9P}{2} \times L) = 0 \Rightarrow M_{BC} = 4PL$$

مثال ۵: در قاب مقابل نیروی محوری در عضو AC چقدر است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۸۷)



$$(1) \text{ صفر}$$

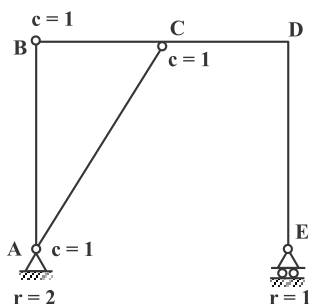
$$(2) \frac{\sqrt{5}}{2} P$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$(4) \frac{\sqrt{3}}{2} P$$



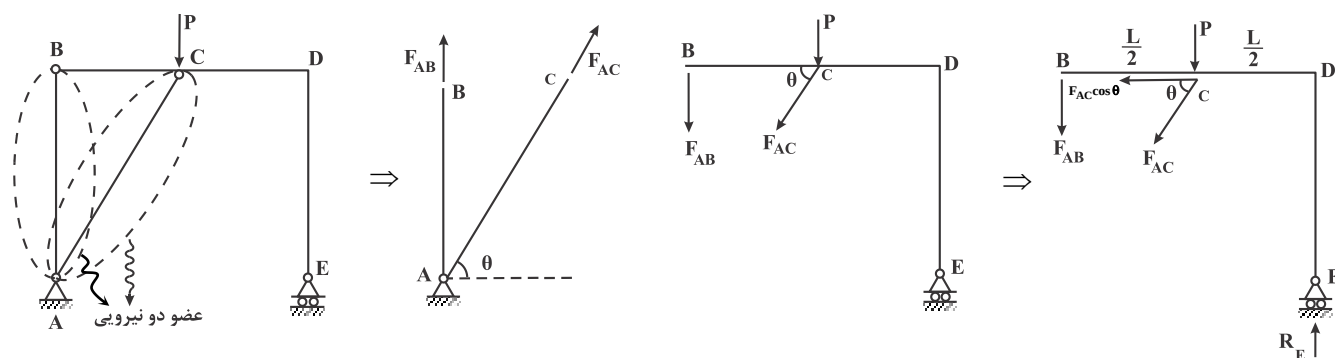
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا درجه نامعینی قاب را به صورت زیر بدست می‌آوریم:



$$\begin{cases} r = 2 + 1 = 3 \\ c = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \\ k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI = (3 + 3 \times 1) - (3 + 3) \Rightarrow DI = 0$$

بنابراین قاب معین است. حال مشاهده می‌شود که اعضای AC و AB به صورت پیوسته، دو سر مفصل و فاقد بارگذاری مستقیم هستند، این اعضا دو نیرویی می‌باشند و نیروی داخلی آنها در راستای دو مفصل قرار می‌گیرد پس به صورت زیر داریم:



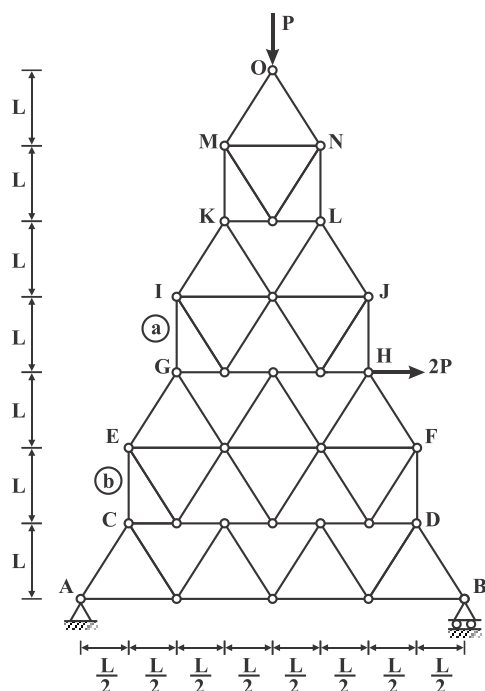
حال با در نظرگیری قسمت BCDE به صورت زیر مقدار نیروی محوری در عضو AC را بدست می‌آوریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} \cos \theta = 0 \Rightarrow F_{AC} = 0$$

همچنین می‌توان مقدار نیروی عضو AB را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -(F_{AB} \times L) - (P \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow F_{AB} \times L = -\frac{PL}{2} \Rightarrow F_{AB} = -\frac{P}{2} \text{ (خلاف جهت فرضی اولیه)}$$

مثال ۶: به خرابای متقارن شکل زیر دو نیروی P و ۲P اعمال شده است، نیروی داخلی عضو b چند برابر عضو a می‌باشد؟ (مهندسی عمران - سراسری ۸۸)

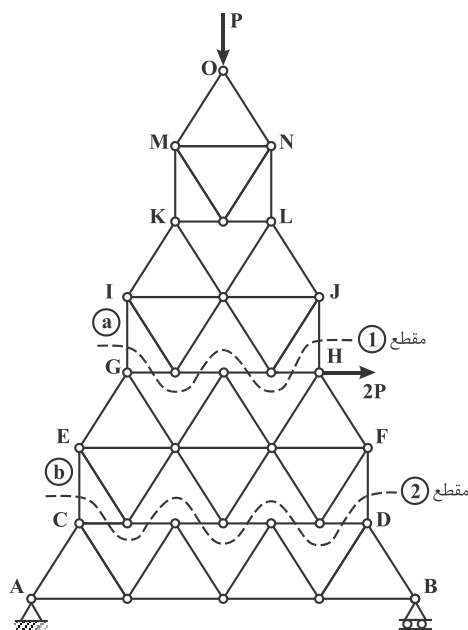


$$-\frac{7}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (2)$$

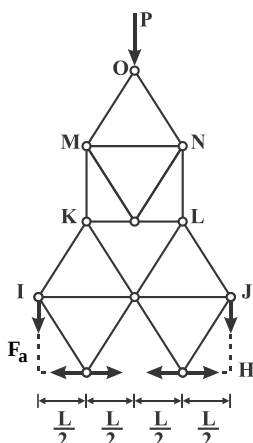
$$-\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (4)$$



پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل این خرپا پیچیده است، بنابراین بهترین روش برای محاسبه نیروی اعضای این خرپا، روش مقطع زدن است.

دقت داشته باشید که مقطع زده‌شده باید به نحوی باشد که با استفاده از یک معادله تعادل لنگر برای آن مقطع بتوان نیروی عضو موردنظر را به‌دست آورد. پس به‌طور کلی مطابق شکل مقابل نیروی هر یک از اعضا a و b را با مقاطع نشان داده شده به‌دست می‌آوریم:



ابتدا نیروی عضو a را با استفاده از مقطع (۱) به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مطابق شکل مقابل با لنگرگیری حول مفصل H می‌توان به‌صورت زیر با یک معادله مقدار نیروی عضو a را تعیین نمود، پس داریم:

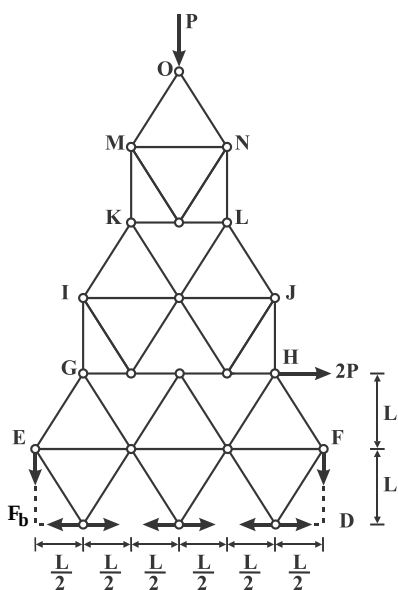
$$\begin{aligned} \sum M_H = 0 &\Rightarrow -[F_a \times 4(\frac{L}{3})] - [P \times 2(\frac{L}{3})] = 0 \\ \Rightarrow F_a \times 4L &= -PL \Rightarrow F_a = \frac{-P}{4} \end{aligned}$$

حال برای محاسبه نیروی عضو b، با استفاده از مقطع (۲)، مطابق شکل مقابل با لنگرگیری حول مفصل D می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 &\Rightarrow -[F_b \times 6(\frac{L}{3})] - [P \times 3(\frac{L}{3})] + [2P \times 2L] = 0 \\ \Rightarrow F_b \times 3L &= -\frac{3PL}{3} + 4PL \Rightarrow F_b \times 3L = \frac{5}{3}PL \\ \Rightarrow F_b &= \frac{5}{6}P \end{aligned}$$

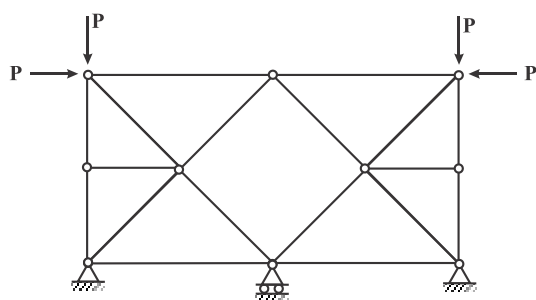
در نهایت نسبت نیروهای F_a به F_b برابر است با:

$$\frac{F_b}{F_a} = \frac{\frac{5}{6}P}{-\frac{P}{4}} = -\frac{10}{3}$$



(مهندسی عمران - آزاد ۹۰)

مثال ۷: در خرپای مقابل تحت بارگذاری نشان داده شده تعداد اعضای صفر نیرویی کدام است؟



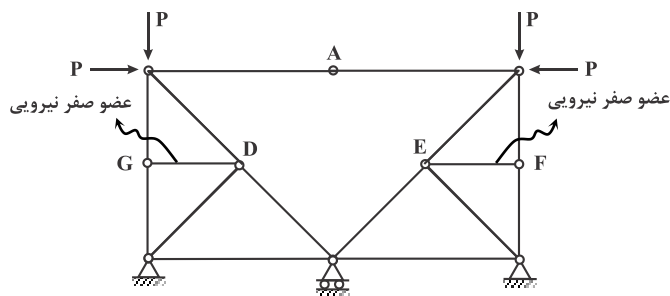
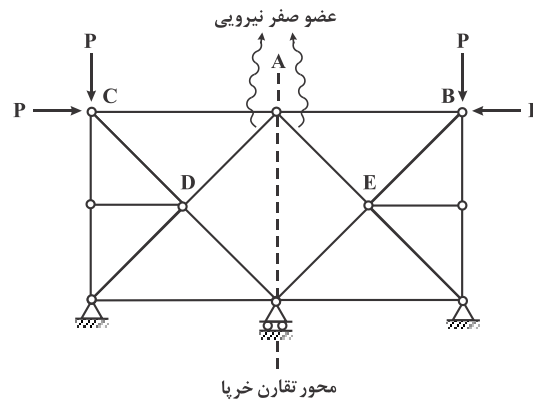
۴ (۱)

۶ (۲)

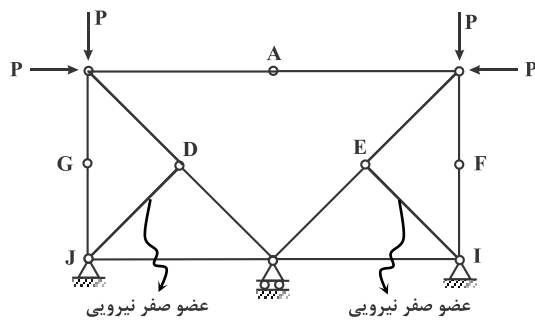
۸ (۳)

۱۰ (۴)

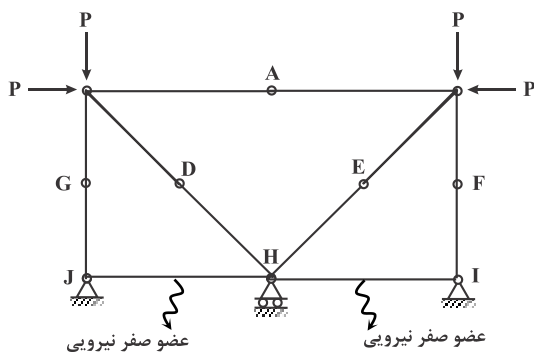
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه خرپا متقارن است، بنابراین مفصل A روی محور تقارن خرپا قرار دارد و از طرفی دیگر دارای چهار عضو است که دو عضو آن عمود بر محور تقارن (AC و AB) و دو عضو دیگر آن با محور تقارن خرپا زاویه یکسان ساخته‌اند (AD و AE)، بنابراین می‌توان گفت که مفصل A دارای دو عضو صفر نیرویی است (AD و AE).



حال با در نظرگیری مفصل‌های F و G که هر دو شرایط یکسانی دارند، مشاهده می‌شود که این مفصل‌ها از سه عضو تشکیل شده‌اند که دو عضو آنها در یک راستا و عضو سوم در راستای دیگر است، از طرفی با توجه به اینکه هیچ نیروی خارجی به آنها اعمال نشده است، بنابراین اعضا FE و GD صفر نیرویی می‌باشند.



سپس با حذف عضوهای EF و AE برای مفصل E و هم‌چنین عضوهای AD و GD برای مفصل D، این دو مفصل سه عضوی شده که دو عضو آنها در یک راستا قرار دارند و عضو سوم آنها در راستای دیگر، بنابراین می‌توان گفت عضو سوم آنها یعنی اعضا EI و JD صفر نیرویی هستند، و داریم:



در نهایت با توجه به اینکه اعضا HI و HJ بین دو تکیه‌گاه مفصلی قرار گرفته‌اند و تغییر مکان آنها صفر است، پس این اعضا نیز صفر نیرویی هستند:

بنابراین در این خرپا ۸ عضو صفر نیرویی وجود دارد.

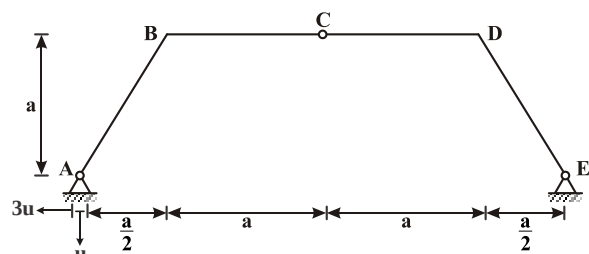


فصل چهارم

« محاسبه خیز و شیب در سازه‌های معین به روش کار مجازی »

(مهندسی عمران - سراسری ۷۵)

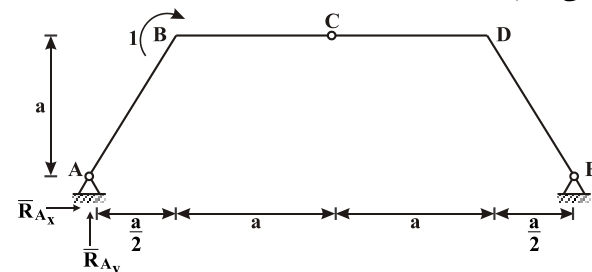
مثال ۱: در اثر نشست‌های تکیه‌گاهی در تکیه‌گاه A از سازه شکل زیر دوران B کدام است؟



$$(1) \quad \frac{11u}{6a} \quad (2) \quad \frac{7u}{6a}$$

$$(3) \quad \frac{u}{3a} \quad (4) \quad \frac{11u}{3a}$$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود قاب معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار ندارد و از طرفی تحت اثر عامل غیرمستقیم نظیر نشست تکیه‌گاهی قرار گرفته است پس با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را انجام می‌دهیم.



مرحله اول: برای محاسبه دوران نقطه B باید لنگر واحد در این نقطه اعمال گردد و سپس مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاطی که نشست تکیه‌گاهی ایجاد شده است مشخص گردد، پس با توجه به اینکه در نقطه A در دو جهت نشست تکیه‌گاهی ایجاد شده است بنابراین باید عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی A را در دو جهت تحت اثر بارگذاری واحد بدست آوریم:

$$+ (\sum M_E = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} \times (3a + 1) = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} = \frac{-1}{3a}$$

حال قاب را در نقطه C جدا کرده و قسمت ABC را بررسی می‌کنیم:

$$+ (\sum M_C = 0 \Rightarrow (-\bar{R}_{Ax} \times a) + (\bar{R}_{Ay} \times (a + \frac{a}{2})) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{Ax} \times a = 1 + (-\frac{1}{3a} \times \frac{3a}{2}) \Rightarrow \bar{R}_{Ax} \times a = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{R}_{Ax} = \frac{1}{2a}$$

مرحله دوم: به علت اینکه فقط نشست تکیه‌گاهی داریم، پس با توجه به مقادیر بدست آمده در مرحله اول مقدار W_R را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$W_R = (\bar{R}_{Ay} \times \Delta_{Ay}) + (\bar{R}_{Ax} \times \Delta_{Ax}) \Rightarrow W_R = (-\frac{1}{3a} \times u) + (\frac{1}{2a} \times 3u) = -\frac{u}{3a} + \frac{3u}{2a} = \frac{7u}{6a}$$

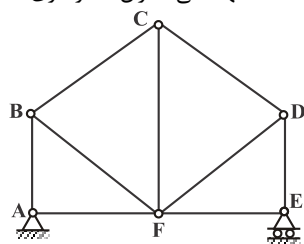
$$\theta_B + W_R = 0 \Rightarrow \theta_B + \frac{7u}{6a} = 0 \Rightarrow \theta_B = -\frac{7u}{6a}$$

پس رابطه کار مجازی به صورت مقابل ارائه می‌گردد:

علامت منفی نشان دهنده این است که جهت لنگر واحد در نقطه B خلاف جهت دوران این نقطه می‌باشد.

مثال ۲: در خرپای شکل زیر عضو CF در حین اجرا ۲ سانتی‌متر کوتاه‌تر اجرا شده است. تغییر مکان افقی نقطه C را پس از مونتاژ حساب کنید. (می‌دانیم در صورتی که این خرپا تحت اثر بار افقی ۷ ton از چپ به راست قرار گیرد، نیروی داخلی میله CF برابر ۲/۶۲۵ - (فشاری) می‌باشد.)

(مهندسی عمران - سراسری ۸۵)



$$(1) \quad 75 \text{ cm} \rightarrow \text{به سمت چپ}$$

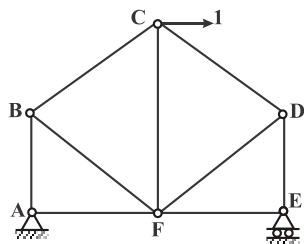
$$(2) \quad 75 \text{ cm} \rightarrow \text{به سمت راست}$$

$$(3) \quad 25 \text{ cm} \rightarrow \text{به سمت راست}$$

$$(4) \quad \text{برای محاسبه ابعاد هندسی سازه باید حذف شود.}$$



✓ پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود خرپا معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار نداشته و فقط در عضو CF ساخت ایجاد شده است، بنابراین با انجام مراحل زیر داریم:

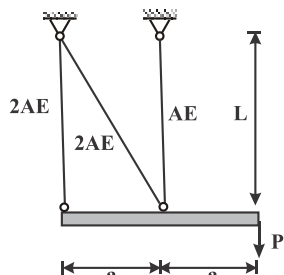


مرحله اول: با توجه به محاسبه تغییر مکان افقی نقطه C، نیروی واحد افقی در نقطه C اعمال می‌کنیم. دقت داشته باشید در صورت سؤال اشاره شده که اگر این خرپا از چپ به راست تحت اثر بار ۷ton قرار گیرد، آنگاه نیروی ایجاد شده در عضو CF برابر ۲/۶۲۵ton است. بنابراین با توجه به اینکه بار واحد از چپ به راست در نقطه C اعمال شده پس مقدار نیروی عضو CF تحت بارگذاری واحد برابر است با:

نیروی وارد بر نقطه C (بارگذاری اصلی) ۷ton	نیروی وارد بر عضو CF ۲/۶۲۵	$\Rightarrow \bar{F}_{CF} = \frac{-2/625 \times 1}{7}$
۱ton (بارگذاری واحد)	$\bar{F}_{CF}$	

مرحله دوم: حال با قرار دادن مقدار بدست آمده از مرحله اول در رابطه کار مجازی داریم: $\Delta_{C_x} = \sum \bar{F} \delta = (\bar{F} \delta)_{CF} = \frac{-2/625}{7} \times (-2) = 0.075 \text{ cm}$. پس تغییر دقت داشته باشید که عضو CF کوچک‌تر از مقدار واقعی ساخته شده، بنابراین مقدار آن در رابطه کار مجازی منفی است ($\delta_{CF} = -2 \text{ cm}$). مکان افقی نقطه C مقدار مثبت بدست آمده و این یعنی تغییر مکان آن هم‌جهت با نیروی واحد افقی است.

(مهندسی عمران - آزاد ۸۸)



✍ مثال ۳: در سازه مقابل تغییر مکان افقی میله صلب کدام است؟

$$\frac{PL}{2AE} \quad (2)$$

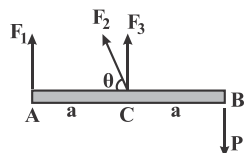
$$\frac{2Pa}{AE} \quad (1)$$

صفر (۴)

$$\frac{2PL^2}{AEa} \quad (3)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود سازه معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار دارد. بنابراین با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای محاسبه نیروی عضوهای سازه تحت اثر بارگذاری اصلی می‌توان نوشت:

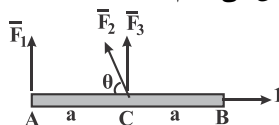


$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -F_y \cos \theta = 0 \Rightarrow F_y = 0$$

$$\uparrow \sum M_C = 0 \Rightarrow (F_1 \times a) + (P \times a) = 0 \Rightarrow F_1 = -P$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_y + F_y \sin \theta - P = 0 \Rightarrow \frac{F_y = 0}{F_y = -P} \rightarrow -P + F_y - P = 0 \Rightarrow F_y = 2P$$

مرحله دوم: برای تعیین تغییر مکان افقی میله با اعمال بار واحد افقی در نقطه B نیروی اعضا را براساس بارگذاری واحد تعیین می‌کنیم:



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 1 - \bar{F}_y \cos \theta = 0 \Rightarrow \bar{F}_y = \frac{1}{\cos \theta}$$

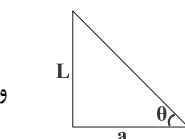
$$\uparrow \sum M_C = 0 \Rightarrow \bar{F}_1 \times a = 0 \Rightarrow \bar{F}_1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{F}_1 + \bar{F}_y + \bar{F}_y \sin \theta = 0 \Rightarrow \frac{\bar{F}_1 = 0}{\bar{F}_y = \frac{1}{\cos \theta}} \rightarrow \bar{F}_y + \left(\frac{1}{\cos \theta} \times \sin \theta \right) = 0 \Rightarrow \bar{F}_y + \tan \theta = 0 \Rightarrow \bar{F}_y = -\tan \theta$$

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده در رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

$$\Delta_{B_x} = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} \Rightarrow \Delta_{B_x} = \left(\frac{F \bar{F} L}{AE} \right)_1 + \left(\frac{F \bar{F} L}{AE} \right)_2 + \left(\frac{F \bar{F} L}{AE} \right)_3 = \left(\frac{(-P)(0) \times L}{2AE} \right) + \left(\frac{(0) \times \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \times (\sqrt{a^2 + L^2})}{2AE} \right) + \left(\frac{(2P)(-\tan \theta) \times L}{AE} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{B_x} = 0 + 0 - \frac{2PL \tan \theta}{AE} \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-2PL \tan \theta}{AE}$$



$$\tan \theta = \frac{L}{a}$$

$$\Delta_{B_x} = \frac{-2PL}{AE} \times \frac{L}{a} = \frac{-2PL^2}{AEa}$$

بنابراین تغییر مکان افقی نقطه B برابر است با:

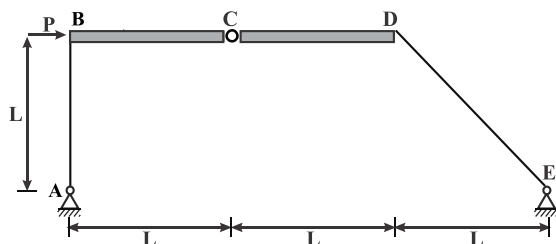
توجه داشته باشید علامت منفی نشان‌دهنده این است که نیروی واحد افقی در نقطه B خلاف جهت تغییر مکان افقی این نقطه اعمال شده است.



مثال ۴: در قاب زیر اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C ($\Delta\theta_C$) کدام است؟

(مهندسی عمران - آزاد ۸۹)

(اعضای BC و CD صلب و سایر اعضا دارای صلبیت خمشی EI می‌باشند).

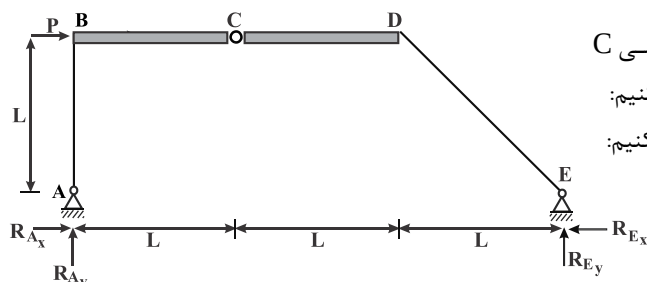


$$\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{PL^2}{EI} \quad (۱)$$

$$\frac{(\sqrt{2}+1)}{9} \frac{PL^2}{EI} \quad (۲)$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)}{9} \frac{PL^2}{EI} \quad (۳)$$

$$\frac{PL^2}{3EI} \quad (۴)$$



پاسخ: گزینه «۳» به منظور محاسبه اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C

برای قاب معین ABCDE با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله اول: نمودار لنگر خمشی در قاب را با توجه به بارگذاری اصلی آن رسم می‌کنیم:

ابتدا با لنگرگیری حول نقطه E در کل قاب داریم:

$$+\left(\sum M_E = 0 \Rightarrow (R_{Ay} \times 3L) + (P \times L) = 0 \Rightarrow R_{Ay} \times 3L = -PL \Rightarrow R_{Ay} = -\frac{P}{3}\right)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{Ey} = 0 \Rightarrow R_{Ey} - \frac{P}{3} = 0 \Rightarrow R_{Ey} = \frac{P}{3}$$

سپس با جداسازی قسمت ABC از مفصل C داریم:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow (R_{Ay} \times L) - (R_{Ax} \times L) = 0\right)$$

$$\Rightarrow R_{Ax} \times L = R_{Ay} \times L \Rightarrow R_{Ax} = R_{Ay} \Rightarrow R_{Ax} = -\frac{P}{3}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + V_C = 0 \Rightarrow V_C = -R_{Ay} \Rightarrow V_C = \frac{P}{3}$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + P - N_C = 0 \Rightarrow N_C = R_{Ax} + P \Rightarrow N_C = -\frac{P}{3} + P \Rightarrow N_C = \frac{2P}{3}$$

همچنین با بررسی قسمت CDE داریم:

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{2P}{3} - R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Ex} = \frac{2P}{3}$$

مرحله دوم: حال به منظور محاسبه اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C، باید

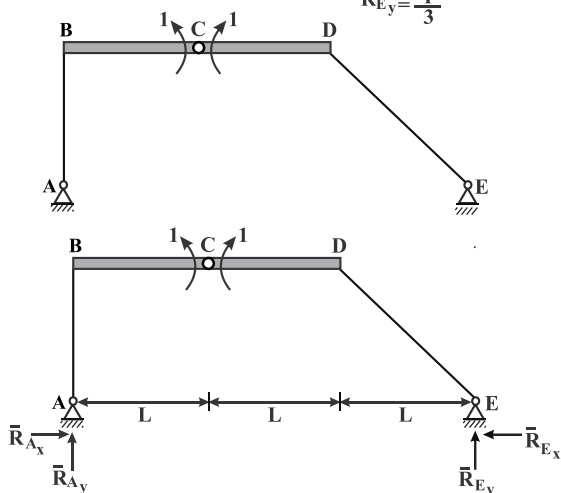
دو لنگر واحد در خلاف جهت هم در طرفین مفصل خمشی C اعمال نماییم و

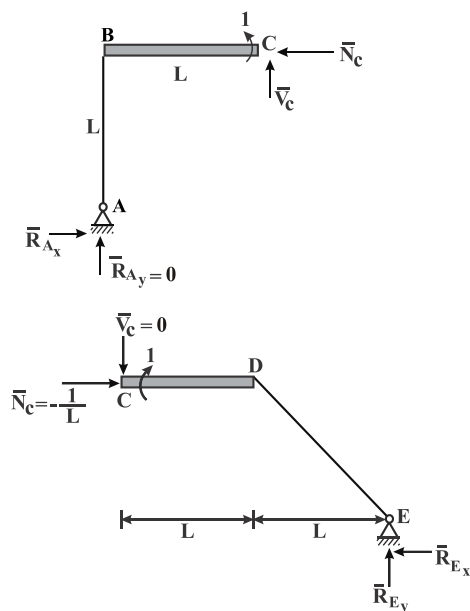
سپس نمودارهای لنگر خمشی در قاب را تحت اثر این بارگذاری واحد رسم کنیم:

ابتدا با لنگرگیری حول نقطه E در کل قاب داریم:

$$+\left(\sum M_E = 0 \Rightarrow (\bar{R}_{Ay} \times 3L) + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} = 0\right)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} + \bar{R}_{Ey} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ey} = 0$$





حال با جداسازی قسمت ABC از قاب داریم:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow -1 - (\bar{R}_{Ax} \times L) = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ax} = \frac{-1}{L}\right)$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ax} - \bar{N}_C = 0 \Rightarrow \bar{N}_C = \bar{R}_{Ax} \Rightarrow \bar{N}_C = \frac{-1}{L}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} + \bar{V}_C = 0 \Rightarrow \bar{V}_C = 0$$

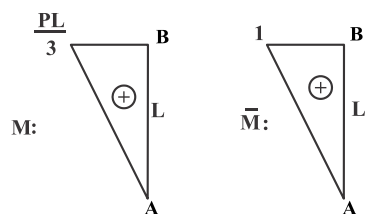
سپس برای قسمت CDE به صورت زیر داریم:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{N}_C - \bar{R}_{Ex} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{Ex} = \bar{N}_C = -\frac{1}{L}$$

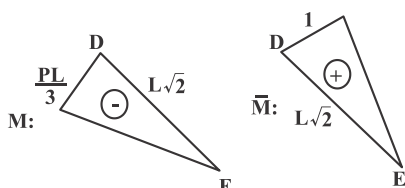
مرحله سوم: با رسم نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی (مرحله اول) و بارگذاری واحد (مرحله دوم) می‌توان با استفاده از روش ترسیمی مور

مقادیر $\int M \bar{M} dx$ را به دست آورد:



$$\int_A^B M \bar{M} dx = \frac{\frac{PL}{3} \times 1 \times L}{3} \Rightarrow \int_A^B M \bar{M} dx = \frac{PL^2}{9}$$

قسمت AB:



$$\int_D^E M \bar{M} dx = \frac{\frac{-PL}{3} \times 1 \times L \sqrt{2}}{3} \Rightarrow \int_D^E M \bar{M} dx = \frac{-PL^2 \sqrt{2}}{9}$$

قسمت DE:

مرحله چهارم: بنابراین با قراردادن مقادیر به دست آمده در مرحله سوم، می‌توان مقدار اختلاف دوران در مفصل خمشی C را با استفاده از رابطه کار مجازی

تعیین نمود:

$$(\Delta\theta)_C = \int_A^E \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \int_A^B \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_B^C \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_C^D \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_D^E \frac{M \bar{M} dx}{EI}$$

$$\Rightarrow (\Delta\theta)_C = \frac{PL^2}{9EI} + \frac{PL^2}{9EI} - \frac{PL^2}{9EI} - \frac{PL^2 \sqrt{2}}{9EI} \Rightarrow (\Delta\theta)_C = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{9}\right) \frac{PL^2}{EI}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در گزینه‌ها ضریب $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)$ وجود دارد و می‌توان گفت که مقدار مثبت در گزینه‌ها در نظر گرفته شده و در واقع از لحاظ

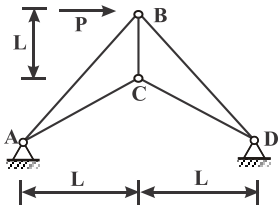
اندازه فرقی با $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{9}\right)$ ندارد.

توجه داشته باشید به علت اینکه اعضای CD و BC صلب هستند، بنابراین مقدار $\int_B^C \frac{M \bar{M} dx}{EI}$ و $\int_C^D \frac{M \bar{M} dx}{EI}$ برابر صفر می‌باشد و در مرحله سوم برای این قسمت‌ها مقادیری محاسبه نشده است.



مثال ۵: عضو BC در اثر بارگذاری P به اندازه δ_0 افزایش طول می‌دهد. چنانچه این عضو در اثر خطای ساخت $2\delta_0$ کوتاه ساخته شده باشد، پس از نصب و در غیاب هرگونه بارگذاری خارجی روی خرپا، تغییر مکان افقی گره B کدام است؟ (EA ثابت)

(مهندسی عمران - آزاد ۹۰)



$$\frac{4EA\delta_0^2}{PL} \quad (2)$$

$$\frac{2EA\delta_0^2}{PL} \quad (1)$$

$$\frac{5EA\delta_0^2}{PL} \quad (4)$$

$$\frac{3EA\delta_0^2}{PL} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» خرپا معین و تحت اثر بارگذاری مستقیم P قرار گرفته است. همچنین عضو BC دارای خطای ساخت است، پس با انجام مراحل زیر داریم:
مرحله اول: خرپا تحت اثر بارگذاری مستقیم P قرار دارد که در اثر این بارگذاری عضو BC به اندازه δ_0 افزایش طول می‌دهد. پس با استفاده از رابطه تغییر مکان محوری در عضو از درس مقاومت مصالح، نیروی عضو BC را تحت بارگذاری اصلی بدست می‌آوریم:

$$\Delta_{BC} = \frac{F_{BC}L_{BC}}{(EA)_{BC}} \Rightarrow \delta_0 = \frac{F_{BC} \times L}{EA} \Rightarrow F_{BC} = \frac{EA\delta_0}{L}$$

مرحله دوم: جهت محاسبه تغییر مکان افقی نقطه B باید بار واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم. به دلیل اینکه نیروی واحد افقی در جهت نیروی P در بارگذاری اصلی به نقطه B اعمال می‌شود، می‌توان مقدار نیروی عضو BC تحت بارگذاری اصلی را بر P تقسیم کرده و نیروی عضو BC تحت بارگذاری

$$\bar{F}_{BC} = \frac{F_{BC}}{P} \Rightarrow \bar{F}_{BC} = \frac{EA\delta_0}{L} \times \frac{1}{P} = \frac{EA\delta_0}{PL}$$

واحد را بدست آوریم:

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن در رابطه کار مجازی داریم:

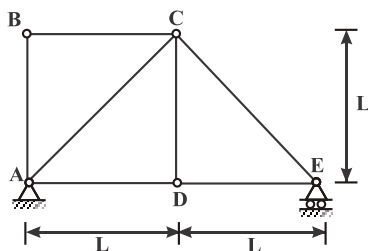
دقت داشته باشید در صورت سؤال بیان شده است که مقدار تغییر مکان افقی نقطه B را در شرایط بدون بارگذاری خارجی تعیین نمایید. بنابراین از اثر بارگذاری مستقیم بر سازه و ترم $\sum \frac{F\bar{F}L}{AE}$ در رابطه کار مجازی صرف نظر می‌کنیم. یعنی داریم:

$$\Delta_{B_x} = \sum \bar{F}\delta = (\bar{F}\delta)_{BC} \Rightarrow \Delta_{B_x} = \left(\frac{EA\delta_0}{PL}\right) \times (-2\delta_0) \Rightarrow \Delta_{B_x} = -\frac{2EA\delta_0^2}{PL}$$

علامت منفی در $-2\delta_0$ به علت این است که عضو BC کوتاه‌تر از مقدار واقعی ساخته شده است و علامت منفی در Δ_{B_x} نشان‌دهنده این است که تغییر مکان افقی نقطه B خلاف جهت نیروی واحد افقی در این نقطه می‌باشد.

مثال ۶: در خرپای مطابق شکل زیر عضو DE را به چه اندازه گرم کنیم تا تغییر مکان افقی مفصل B به سمت راست برابر $L \times 10^{-4}$ شود؟

(مهندسی در سوانح طبیعی - سراسری ۹۳)



(ضریب انبساط حرارتی را $\frac{1}{C} = 10^{-5}$ فرض کنید).

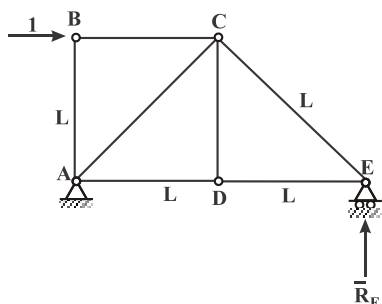
$$1^\circ C \quad (1)$$

$$2^\circ C \quad (2)$$

$$4^\circ C \quad (3)$$

$$5^\circ C \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» خرپا معین و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار نگرفته و از طرفی عضو DE تغییر دما داشته است. بنابراین با استفاده از روش کار مجازی و انجام مراحل زیر داریم:

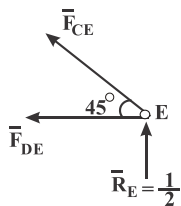


مرحله اول: به منظور محاسبه تغییر مکان افقی مفصل B باید نیروی واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم و سپس نیروی عضو DE را تحت بارگذاری واحد به صورت زیر تعیین کنیم. پس داریم:
دقت داشته باشید چون تغییر مکان افقی نقطه B به سمت راست مطرح شده است بنابراین نیروی افقی واحد نیز باید در سمت راست به نقطه B اعمال گردد.

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow (R_E \times 2L) - (1 \times L) = 0 \Rightarrow R_E = \frac{1}{2}\right)$$



مفصل E:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_E + \bar{F}_{CE} \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + (\bar{F}_{CE} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow \bar{F}_{CE} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

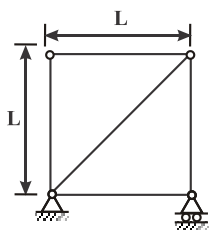
$$\leftarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{F}_{DE} + \bar{F}_{CE} \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow \bar{F}_{DE} + (-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow \bar{F}_{DE} = \frac{1}{2}$$

مرحله دوم: بنابراین با قرار دادن مقدار بدست آمده از مرحله اول در رابطه کار مجازی داریم:

دقت شود که تغییر مکان افقی نقطه B برابر $10^{-4} L$ است، پس خواهیم داشت:

$$\Delta B_x = \sum \bar{F}_x \Delta T = (\bar{F}_x \Delta T)_{DE} \Rightarrow 10^{-4} L = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times L \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = 2^\circ \text{C}$$

مثال ۷: در خرابی مقابل که سطح مقطع همه میله‌ها یکسان و برابر A است فقط چهار ضلع را به اندازه ΔT حرارت می‌دهیم. تنش حاصل در میله قطری چقدر است؟ (مهندسی عمران - آزاد ۹۳)



$$\frac{\sqrt{2}}{2} E \alpha \Delta T \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} E \alpha \Delta T \quad (2)$$

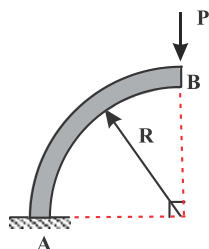
$$E \alpha \Delta T \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» خرابی معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار ندارد. از طرفی چهار عضو آن دچار تغییر دما به اندازه ΔT شده‌اند. می‌دانیم در خرابی معین که تنها تحت اثر عوامل غیرمستقیم نظیر نشست تکیه‌گاهی، تغییر دما و خطای ساخت قرار گرفته باشد، نیروی در اعضای خرابی ایجاد نمی‌گردد و در نتیجه تنش در اعضا آن برابر صفر است.

(مهندسی عمران - آزاد ۹۳)

مثال ۸: در میله یکنواخت زیر با بارگذاری نشان داده شده مطلوب است تعیین تغییر مکان افقی و عمودی نقطه B:



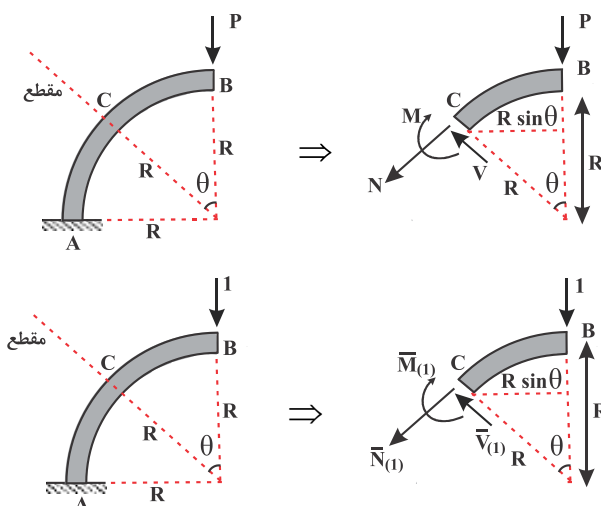
$$\frac{PR^3 \pi}{2EI}, \frac{PR^3}{EI} \quad (2)$$

$$\frac{PR^3 \pi}{2EI}, \frac{PR^3}{2EI} \quad (1)$$

$$\frac{PR^3 \pi}{4EI}, \frac{PR^3}{2EI} \quad (4)$$

$$\frac{PR^3}{2EI}, \frac{PR^3}{2EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه تغییر مکان افقی و قائم قاب قوسی شکل معین با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

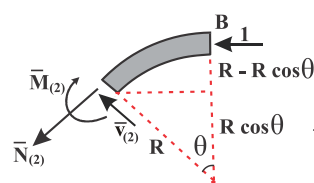
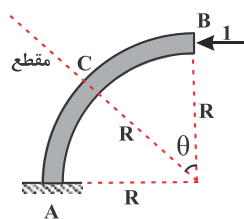


مرحله اول: ابتدا توجه داشته باشید که فقط مقدار صلیبیت خمشی قاب ارائه شده است، بنابراین تنها باید معادله لنگر خمشی را تحت اثر بارگذاری اصلی بر حسب θ بدست آوریم. پس با زدن مقطعی مطابق شکل زیر داریم:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow M + P(R \sin \theta) = 0 \Rightarrow M = -PR \sin \theta\right)$$

مرحله دوم: برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B، ابتدا بار واحد قائم را در نقطه B اعمال می‌کنیم و سپس با زدن مقطعی معادله لنگر خمشی را بر حسب θ تحت اثر بارگذاری واحد بدست می‌آوریم:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow \bar{M}_{(1)} + (1 \times R \sin \theta) = 0 \Rightarrow \bar{M}_{(1)} = -R \sin \theta\right)$$



هم‌چنین برای محاسبه تغییرمکان افقی نقطه B، کافی است بار واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم و سپس با زدن مقطعی معادله لنگر خمشی را برحسب θ تحت اثر بارگذاری واحد تعیین کنیم:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow \bar{M}(\theta) - (1 \times (R - R \cos \theta)) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{M}(\theta) = R(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مراحل اول و دوم در رابطه کار مجازی داریم:

(۱) تعیین تغییر مکان قائم نقطه B:

$$\begin{aligned} \Delta_{B_y} &= \int_0^{\pi/2} \frac{M \bar{M}(\theta)}{EI} R d\theta \Rightarrow \Delta_{B_y} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \sin \theta)(-R \sin \theta)}{EI} R d\theta \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &\Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^3}{2EI} \left[\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \right] \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^3}{2EI} \left[\theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2} \right] \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^3 \pi}{4EI} \end{aligned}$$

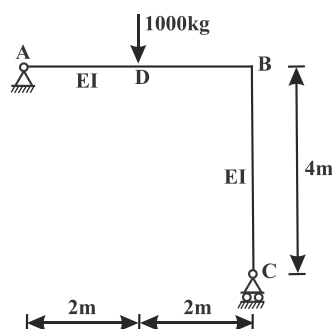
(۲) تعیین تغییر مکان افقی نقطه B:

$$\begin{aligned} \Delta_{B_x} &= \int_0^{\pi/2} \frac{M \bar{M}(\theta)}{EI} R d\theta \Rightarrow \Delta_{B_x} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \sin \theta)(R(1 - \cos \theta))}{EI} R d\theta \Rightarrow \Delta_{B_x} = \int_0^{\pi/2} \frac{-PR^3 (\sin \theta)(1 - \cos \theta)}{EI} d\theta \\ &= \frac{-PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos \theta) d\theta \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-PR^3}{EI} \left[\frac{(1 - \cos \theta)^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{-PR^3}{EI} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-PR^3}{2EI} \end{aligned}$$

علامت منفی نشان‌دهنده این است که جهت انتخاب اعمال نیروی افقی واحد خلاف جهت تغییر مکان افقی نقطه B می‌باشد.

(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۴)

مثال ۹: در قاب زیر تغییرمکان افقی نقطه D چند سانتی‌متر است؟ ($EI = 2 \times 10^{11} \text{ kg.cm}^2$)



(۱) / ۱۶

(۲) / ۳۲

(۳) / ۴۸

(۴) / ۶۴

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه تغییرمکان افقی نقطه D در قاب می‌توان از روش کار مجازی به صورت زیر استفاده کرد.

توجه داشته باشید که اعضا فقط دارای صلبیت خمشی هستند پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی برای اعضا قاب به صورت مقابل رسم می‌شوند:

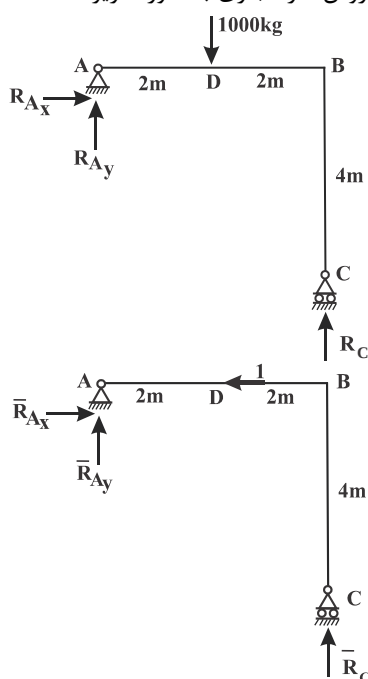
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow (1000 \times 2) - (R_C \times 4) = 0 \Rightarrow R_C = 500 \text{ kg} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_C - 1000 = 0 \Rightarrow R_{Ay} + 500 - 1000 = 0 \\ &\Rightarrow R_{Ay} = 500 \text{ kg} \end{aligned}$$

مرحله دوم: حال برای محاسبه مقدار تغییرمکان افقی نقطه D باید بار واحد افقی را در

نقطه D وارد کرده و نمودارهای لنگر خمشی اعضای قاب تحت اثر بارگذاری واحد را

رسم نماییم:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow \bar{R}_C \times 4 = 0 \Rightarrow \bar{R}_C = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{Ay} + \bar{R}_C = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} = 0 \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{Ax} - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ax} = 1 \end{aligned}$$





بنابراین مشاهده می‌شود که نمودار لنگر خمشی در اعضای قاب تحت اثر بارگذاری واحد صفر است.

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور برای محاسبه مقادیر $\int M \bar{M} dx$ داریم: $\int_A^D M \bar{M} dx = \int_D^B M \bar{M} dx = \int_B^C M \bar{M} dx = 0$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

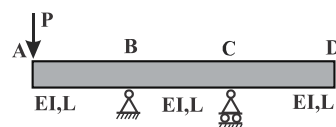
$$\Delta_{D(x)} = \int \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \int_A^D \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_D^B \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_B^C \frac{M \bar{M} dx}{EI} \Rightarrow \Delta_{D(x)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

پس ملاحظه می‌شود که مقدار تغییر مکان افقی نقطه D برابر صفر است و در هیچ گزینه‌ای این مقدار ارائه نشده است.



(مهندسی در سوانح طبیعی - سراسری ۹۴)

مثال ۱۰: در تیر خمشی زیر خیز قائم در نقطه D کدام است؟



$$\frac{PL^3}{6EI} \quad (2)$$

$$\frac{PL^3}{12EI} \quad (1)$$

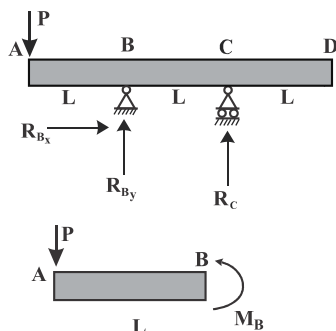
$$\frac{PL^3}{2EI} \quad (4)$$

$$\frac{PL^3}{3EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه خیز قائم نقطه D در تیر معین می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. با توجه به این که فقط مقدار صلبیت

خمشی اعضای تیر داده شده است، پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای رسم نمودار لنگر خمشی اعضا تیر تحت بارگذاری اصلی به صورت زیر داریم:



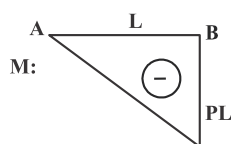
قسمت AB:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow (R_C \times L) + (P \times L) = 0 \Rightarrow R_C = -P$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{By} + R_C - P = 0 \Rightarrow R_{By} - P - P = 0 \Rightarrow R_{By} = 2P$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0$$

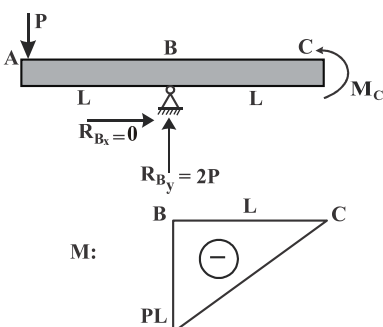
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B + (P \times L) = 0 \Rightarrow M_B = -PL$$



قسمت BC:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow M_C + (P \times 2L) - (2P \times L) = 0$$

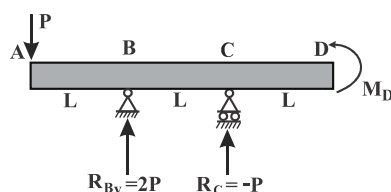
$$\Rightarrow M_C + 2PL - 2PL = 0 \Rightarrow M_C = 0$$



قسمت CD:

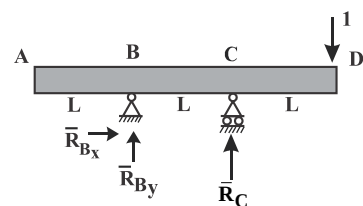
$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow M_D + (P \times 3L) - (2P \times 2L) - ((-P) \times L) = 0$$

$$\Rightarrow M_D + 3PL - 4PL + PL = 0 \Rightarrow M_D = 0$$





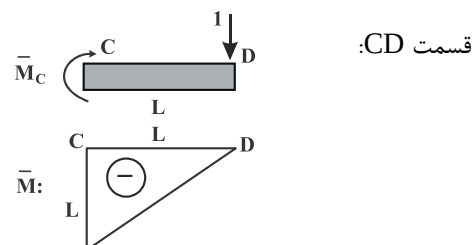
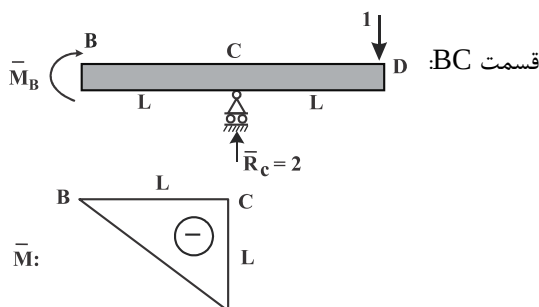
مرحله دوم: برای محاسبه مقدار خیز قائم نقطه D باید بار قائم واحد در نقطه D را اعمال کرده و نمودار لنگر خمشی اعضای تیر را تحت اثر بارگذاری واحد رسم نماییم:



$$+\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow (\bar{R}_C \times L) - (1 \times 2L) = 0 \Rightarrow \bar{R}_C = 2\right)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_C + \bar{R}_{By} - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{By} + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{By} = -1$$

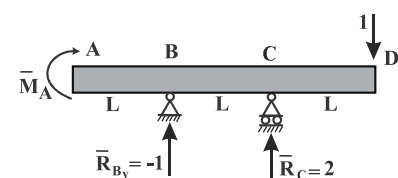
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Bx} = 0$$



$$+\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow \bar{M}_B + (1 \times 2L) - (2 \times L) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_B + 2L - 2L = 0 \Rightarrow \bar{M}_B = 0$$

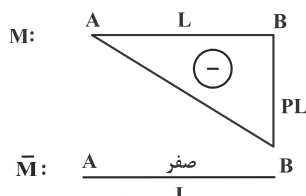
$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow \bar{M}_C + (1 \times L) = 0 \Rightarrow \bar{M}_C = -L\right)$$



$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + (1 \times 3L) - (2 \times 2L) - ((-1) \times L) = 0\right)$$

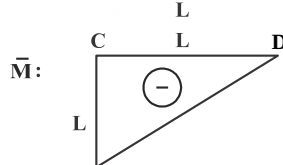
$$\Rightarrow \bar{M}_A + 3L - 4L + L = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = 0$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقادیر $\int M\bar{M}dx$ را برای اعضا قاب به کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت بارگذاری اصلی و واحد به صورت زیر بدست آورد:



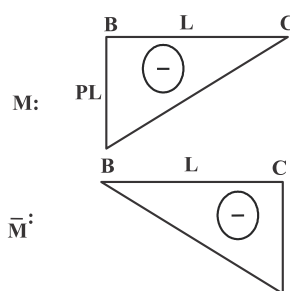
$$\int_A^B M\bar{M}dx = 0$$

قسمت‌های AB و CD:



$$\int_C^D M\bar{M}dx = 0$$

قسمت BC:

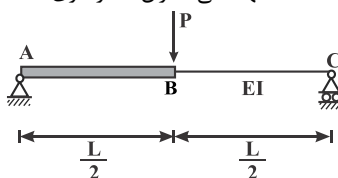


$$\int_B^C M\bar{M}dx = \frac{(-PL)(-L) \times L}{6} \Rightarrow \int_B^C M\bar{M}dx = \frac{PL^3}{6}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

$$\Delta_{Dy} = \int \frac{M\bar{M}dx}{EI} = \int_A^B \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_C^D \frac{M\bar{M}dx}{EI} \Rightarrow \Delta_{Dy} = 0 + \left(\frac{PL^3}{6} \times \frac{1}{EI}\right) + 0 \Rightarrow \Delta_{Dy} = \frac{PL^3}{6EI}$$

(مهندسی عمران - سراسری ۹۵)



مثال ۱۱: در تیر زیر قطعه AB صلب است، تغییر مکان نقطه B کدام است؟

$$\frac{PL^3}{24EI} \quad (2)$$

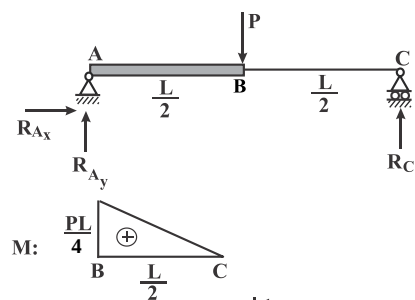
$$\frac{PL^3}{16EI} \quad (1)$$

$$\frac{PL^3}{96EI} \quad (4)$$

$$\frac{PL^3}{48EI} \quad (3)$$

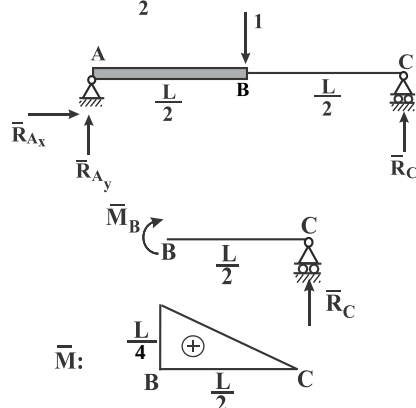
پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه تغییرمکان نقطه B برای تیر معین نشان داده شده می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. البته توجه داشته باشید که قسمت AB صلب است ($EI = \infty$) و از طرفی برای قسمت BC فقط مقدار صلبیت خمشی ارائه شده است. بنابراین کافی است تنها نمودار لنگر خمشی برای قسمت BC را رسم کرده و با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: نمودار لنگر خمشی تحت بارگذاری اصلی برای قسمت BC به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} + \left(\sum M_A = 0 \Rightarrow (R_C \times L) - (P \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow R_C = \frac{P}{2} \right. \\ \left. + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_C - P = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{P}{2} \right. \\ \left. + \left(\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - (R_C \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{4} \right. \right. \end{aligned}$$

مرحله دوم: برای محاسبه مقدار تغییرمکان نقطه B، باید بار واحد قائم در نقطه B اعمال گردد و سپس نمودار لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری واحد به صورت مقابل رسم شود:



$$\begin{aligned} + \left(\sum M_A = 0 \Rightarrow (\bar{R}_C \times L) - (1 \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \bar{R}_C = \frac{1}{2} \right. \\ \left. + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} + \bar{R}_C - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{Ay} = \frac{1}{2} \right. \\ \left. + \left(\sum M_B = 0 \Rightarrow \bar{M}_B - (\bar{R}_C \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \bar{M}_B = \frac{L}{4} \right. \right. \end{aligned}$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقدار $\int M \bar{M} dx$ را برای قسمت BC به صورت زیر با کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی و واحد به دست آورد:

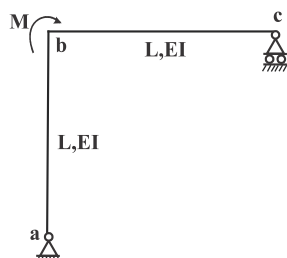
$$\int_B^C M \bar{M} dx = \frac{(\frac{PL}{4})(\frac{L}{2}) \times \frac{L}{2}}{3} \Rightarrow \int_B^C M \bar{M} dx = \frac{PL^3}{96}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قراردادن مقدار $\int M \bar{M} dx$ در رابطه کار مجازی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \int \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \int_A^B \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_B^C \frac{M \bar{M} dx}{EI} \Rightarrow \Delta_B = 0 + \left(\frac{PL^3}{96} \times \frac{1}{EI} \right) \Rightarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{96EI}$$

(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۵)

مثال ۱۲: جابه‌جایی نقطه C چه مقدار است؟



$$\frac{ML^2}{3EI} \quad (2)$$

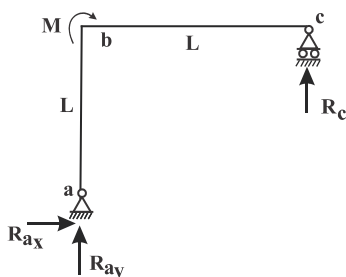
$$\frac{ML^2}{EI} \quad (1)$$

(۴) صفر است.

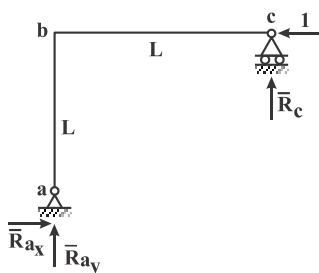
$$\frac{2ML^2}{3EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه مقدار جابه‌جایی نقطه C در قاب معین می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. با توجه به این که برای اعضای قاب فقط مقدار صلبیت خمشی اعضا ارائه شده است، پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای رسم نمودار لنگر خمشی اعضا قاب تحت اثر بارگذاری اصلی داریم:



$$\begin{aligned} + \left(\sum M_a = 0 \Rightarrow (R_c \times L) - M = 0 \Rightarrow R_c = \frac{M}{L} \right. \\ \left. + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_c + R_{ay} = 0 \Rightarrow R_{ay} = -\frac{M}{L} \right. \\ \left. + \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 0 \right. \end{aligned}$$



مرحله دوم: برای محاسبه جابه‌جایی نقطه C باید بار واحد افقی را در نقطه C اعمال نماییم و نمودارهای لنگر خمشی برای قاب تحت بارگذاری واحد را رسم کنیم:

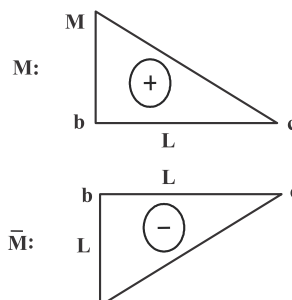
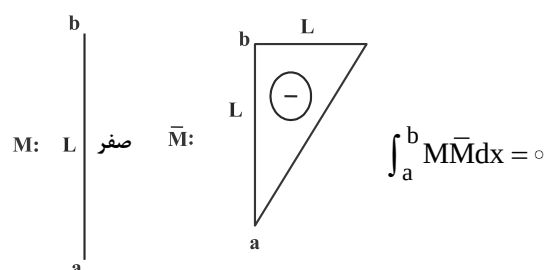
$$\left(\sum M_a = 0 \Rightarrow (\bar{R}_c \times L) + (1 \times L) = 0 \Rightarrow \bar{R}_c = -1 \right)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{R}_{a_y} + \bar{R}_c = 0 \Rightarrow \bar{R}_{a_y} = 1$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{R}_{a_x} - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{a_x} = 1$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقادیر $\int M \bar{M} dx$ را برای اعضای قاب به کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی و واحد به صورت زیر بدست آورد:

قسمت‌های ab و bc:



$$\int_b^c M \bar{M} dx = \frac{M \times (-L) \times L}{3}$$

$$\Rightarrow \int_b^c M \bar{M} dx = \frac{-ML^2}{3}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

$$\Delta_C = \int \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \int_a^b \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \int_b^c \frac{M \bar{M} dx}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \left(0 \times \frac{1}{EI} \right) + \left(\frac{-ML^2}{3} \times \frac{1}{EI} \right) \Rightarrow \Delta_C = \frac{-ML^2}{3EI}$$

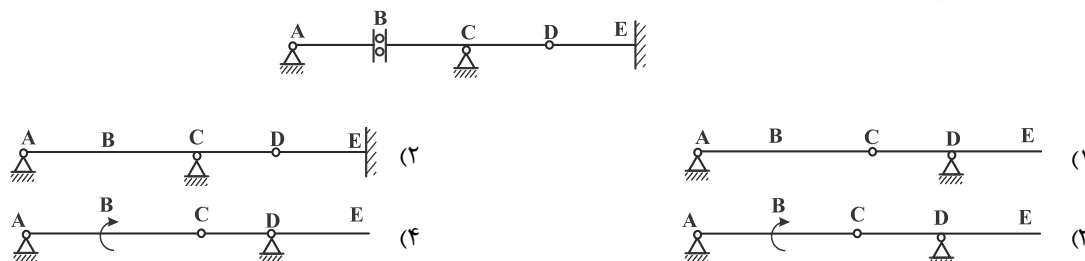
علامت منفی به معنای این است که جهت اعمال نیروی واحد خلاف جهت تغییر مکان نقطه C می‌باشد.

فصل پنجم

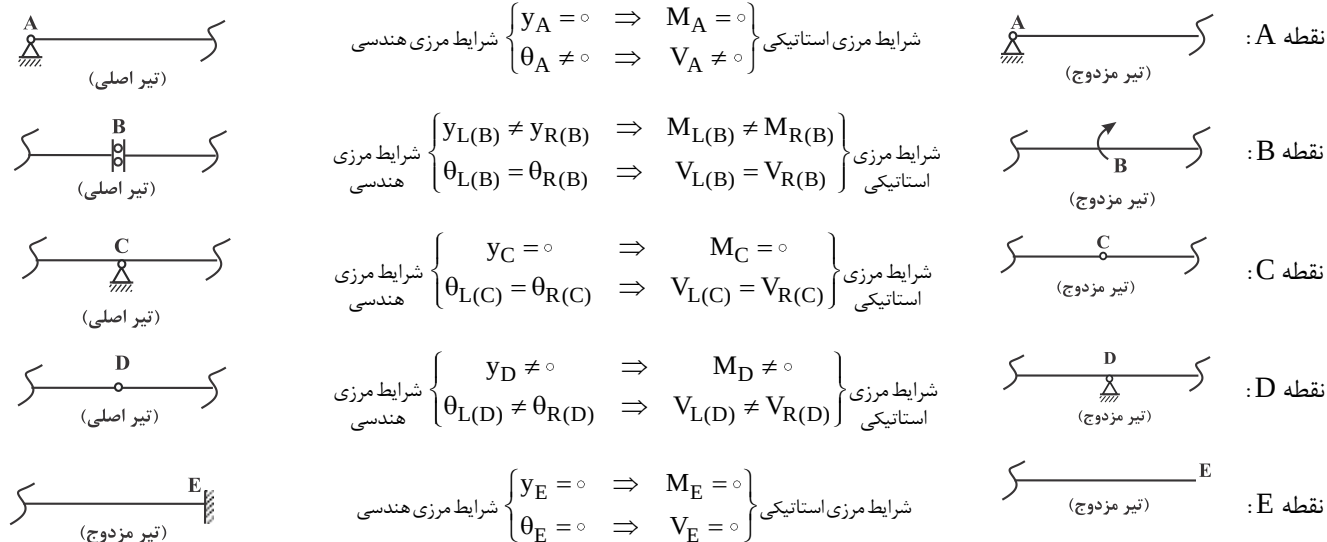
« بررسی روش تیر مزدوج و روش‌های هندسی در محاسبه خیز و شیب تیرها »

(مهندسی عمران - سراسری ۸۳)

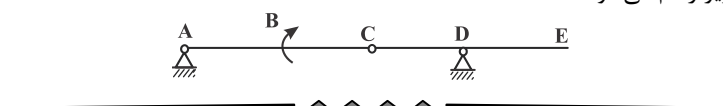
مثال ۱: تیر مزدوج تیر شکل زیر مطابق کدام گزینه است؟



پاسخ: گزینه «۳» به منظور رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها از تیر اصلی به تیر مزدوج را به صورت زیر تغییر دهیم:

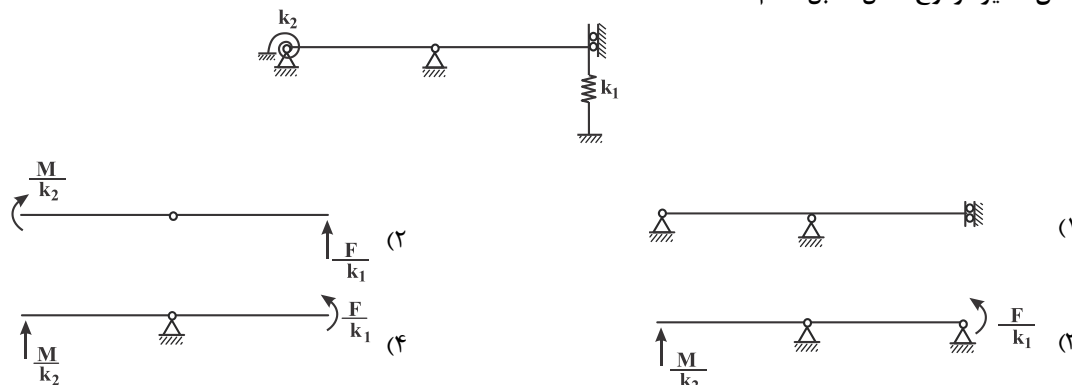


بنابراین تیر مزدوج حاصل به صورت زیر رسم می‌شود:

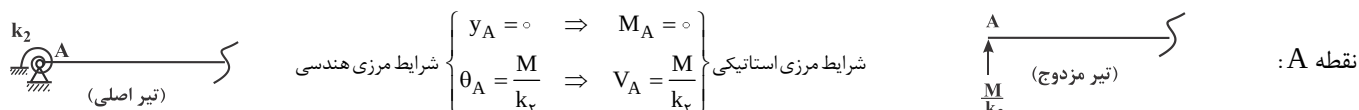


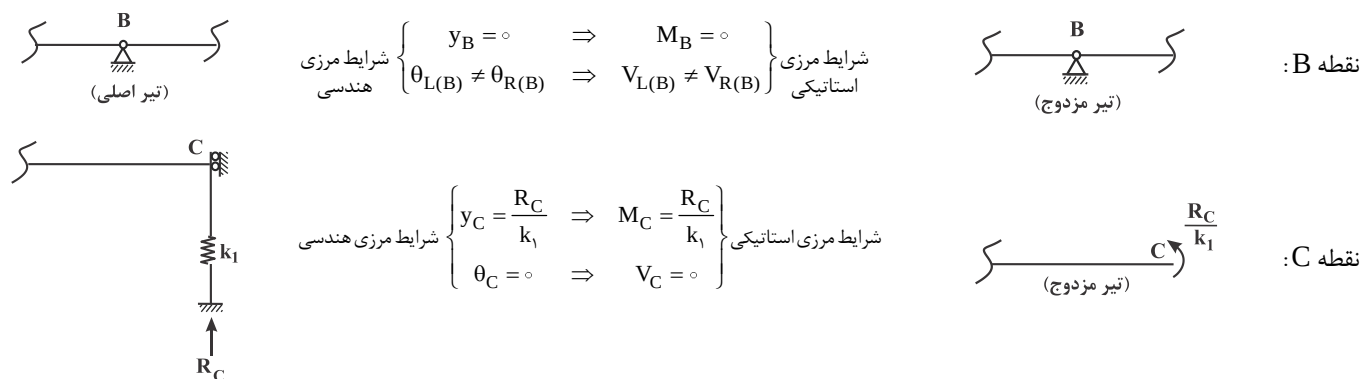
(مهندسی عمران - آزاد ۸۶)

مثال ۲: تیر مزدوج شکل مقابل کدام است؟

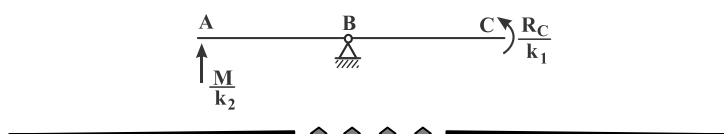


پاسخ: گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر و تکیه‌گاه‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم. پس داریم:



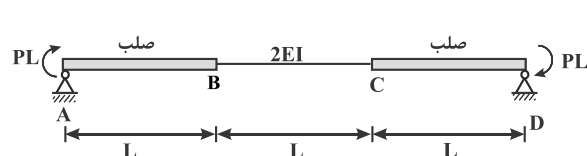


بنابراین تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌شود:



(مهندسی عمران - آزاد ۸۶)

مثال ۳: مقدار چرخش نقطه A در تیر زیر کدام است؟



$$\frac{PL^2}{36EI} \quad (۲)$$

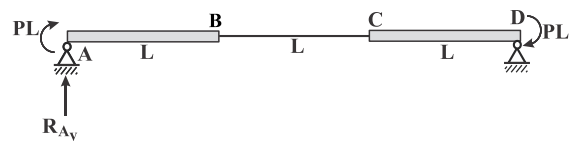
$$\frac{PL^2}{18EI} \quad (۴)$$

$$\frac{PL^2}{72EI} \quad (۱)$$

$$\frac{PL^2}{108EI} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه چرخش (دوران) نقطه A می‌توان از روش تیر مزدوج با انجام مراحل زیر استفاده نمود:

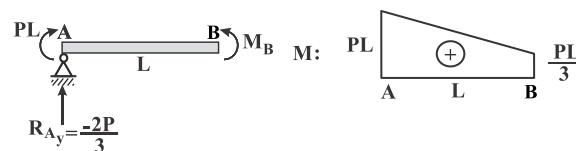
مرحله اول: نمودار لنگر خمشی تیر را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



$$\left(\sum M_D = 0 \Rightarrow (R_{Ay} \times 3L) + PL + PL = 0 \right)$$

$$\Rightarrow R_{Ay} \times 3L = -2PL \Rightarrow R_{Ay} = -\frac{2P}{3}$$

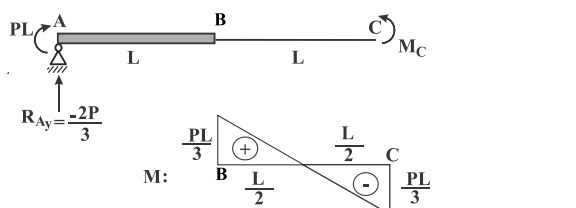
قسمت AB:



$$\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - PL - (R_{Ay} \times L) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow M_B = PL + \left(\frac{-2P}{3} \times L \right) \Rightarrow M_B = \frac{PL}{3}$$

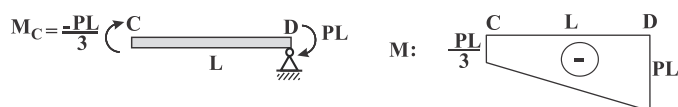
قسمت BC:



$$\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C - PL - (R_{Ay} \times 2L) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow M_C = PL + \left(\frac{-2P}{3} \times 2L \right) \Rightarrow M_C = \frac{-PL}{3}$$

قسمت CD:



مرحله دوم: نمودار $\frac{M}{EI}$ را برای هر قسمت از تیر به صورت زیر رسم می‌نماییم:

$$\frac{M}{EI}: \text{صفر} \quad A \quad L \quad B$$

$$\frac{M}{EI}: \begin{matrix} \frac{PL}{6EI} \\ \oplus \\ B \quad \frac{L}{2} \quad C \\ \ominus \\ \frac{PL}{6EI} \end{matrix}$$

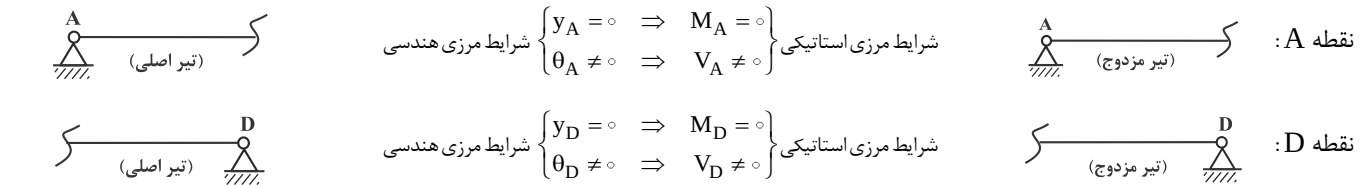
$$\frac{M}{EI}: \text{صفر} \quad C \quad L \quad D$$

$$\frac{M}{EI} = 0$$

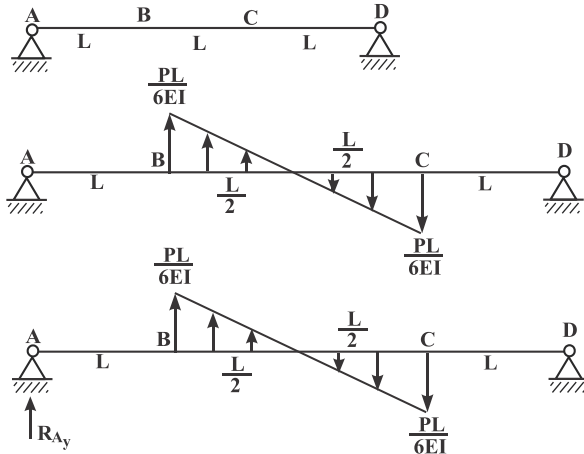
توجه داشته باشید در قسمت AB و CD تیر صلب بوده و صلبیت محوری آن در این قسمت‌ها برابر بی‌نهایت است بنابراین داریم:



مرحله سوم: برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید نقاط اتصال تکیه‌گاه‌ها و تیر را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:



بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌گردد:



مرحله چهارم: حال با قرار دادن نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت‌های مختلف تیر اصلی (بدست آمده از مرحله دوم) بر روی تیر مزدوج (بدست آمده از مرحله سوم) به صورت مقابل داریم:

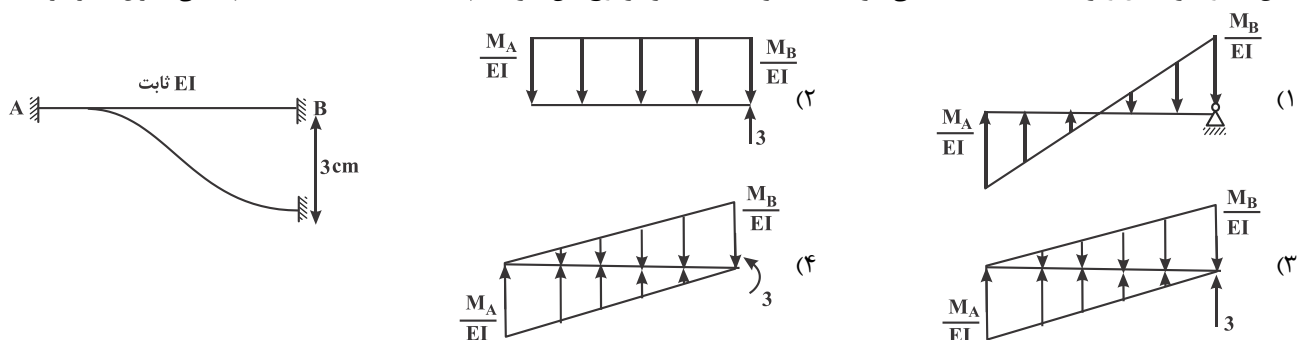
مرحله پنجم: برای محاسبه چرخش (دوران) نقطه A از تیر اصلی، باید مقدار برش (عکس‌العمل تکیه‌گاهی) نقطه A از روی تیر مزدوج را بدست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} + \left(\sum M_D = 0 \Rightarrow (R_{Ay} \times 3L) + \left[\left(\frac{PL}{6EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{L}{2} + L \right) \right] - \left[\left(\frac{PL}{6EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) + L \right) \right] \right) &= 0 \\ (R_{Ay} \times 3L) + \left[\frac{PL^2}{24EI} \times \frac{11L}{6} \right] - \left[\frac{PL^2}{24EI} \times \frac{7L}{6} \right] &= 0 \Rightarrow R_{Ay} \times 3L = \frac{-PL^2}{36EI} \Rightarrow R_{Ay} = \frac{-PL^2}{108EI} \\ \theta_{A(\text{تیر اصلی})} = R_{Ay(\text{تیر مزدوج})} &= \frac{-PL^2}{108EI} \end{aligned}$$

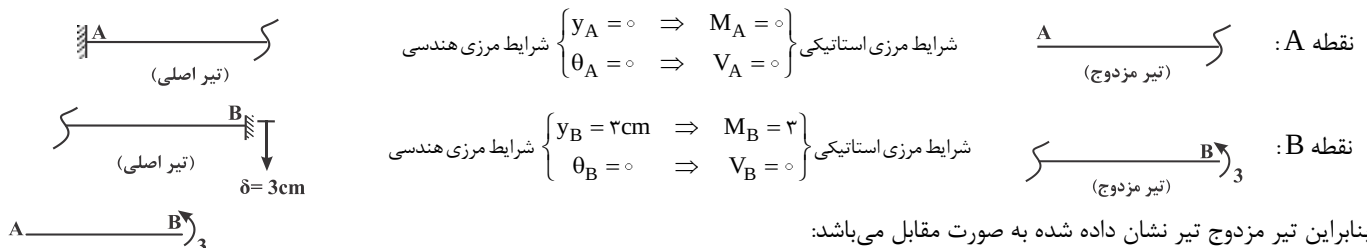
بنابراین داریم:

(مهندسی عمران - سراسری ۸۸)

مثال ۴: در تیر شکل زیر تکیه‌گاه B، ۳ سانتی‌متر نشست کرده است، تیر مزدوج این تیر کدام است؟

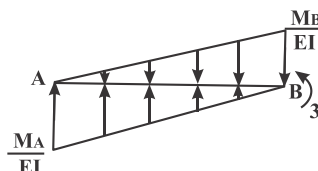


پاسخ: گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید دو نقطه A و B را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم:



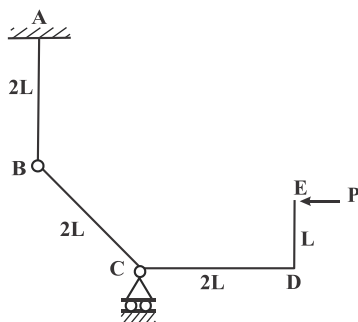
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل می‌باشد:

البته با اعمال نمودار لنگر خمشی از تیر اصلی و تقسیم آن بر EI، تیر مزدوج آن به صورت زیر رسم می‌شود.





مثال ۵: در سازه مقابل زاویه بین مماس‌های رسم شده به نمودار تغییر شکل سازه بین نقطه B و C چقدر است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران - آزاد ۹۰)



$$\frac{PL^2}{3EI} \quad (۱)$$

$$\frac{2PL^2}{EI} \quad (۲)$$

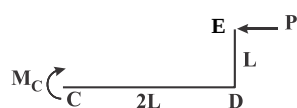
$$\frac{3PL^2}{EI} \quad (۳)$$

$$\frac{PL^2}{EI} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» به منظور محاسبه زاویه بین مماس‌های رسم شده بین دو نقطه B و C می‌توان از روش لنگر سطح و قضیه اول آن به صورت زیر استفاده نمود. پس داریم:

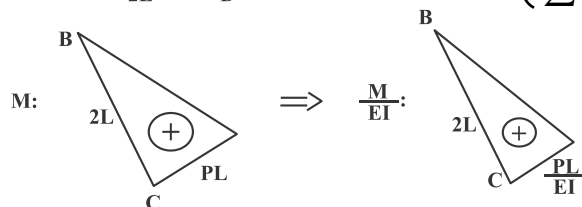
مرحله اول: رسم نمودار لنگر خمشی برای قسمت BC

ابتدا قسمت CDE را جدا کرده و داریم:



$$(\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C - (P \times L) = 0 \Rightarrow M_C = PL)$$

مرحله دوم: رسم نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت BC



$$S_{BC} = \frac{\frac{PL}{EI} \times 2L}{2} = \frac{PL^2}{EI}$$

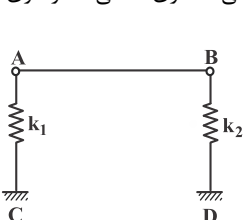
مرحله سوم: محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت BC

$$\theta_{C/B} = \theta_C - \theta_B = \int_B^C \frac{M dx}{EI} = S_{BC} \Rightarrow \theta_{C/B} = \frac{PL^2}{EI}$$

در نتیجه اختلاف شیب (دوران) دو نقطه B و C برابر است با:

(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۱)

مثال ۶: تیر مزدوج سازه زیر کدام است؟

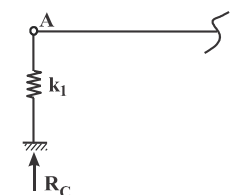


$$\frac{R_C}{k_1} \quad \frac{R_D}{k_2} \quad (۲)$$

$$\frac{R_C}{k_1} \quad \frac{R_D}{k_2} \quad (۴)$$

$$\begin{matrix} \uparrow R_C & \uparrow R_D \\ \frac{R_C}{k_1} & \frac{R_D}{k_2} \\ \uparrow R_A & \uparrow R_B \end{matrix} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید دو نقطه A و B را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:



$$\left\{ \begin{matrix} y_A = \frac{R_C}{k_1} \Rightarrow M_A = \frac{R_C}{k_1} \\ \theta_A \neq 0 \Rightarrow V_A \neq 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{شرایط مرزی استاتیکی}$$

$$\frac{R_C}{k_1} \quad \text{نقطه A: (تیر مزدوج)}$$

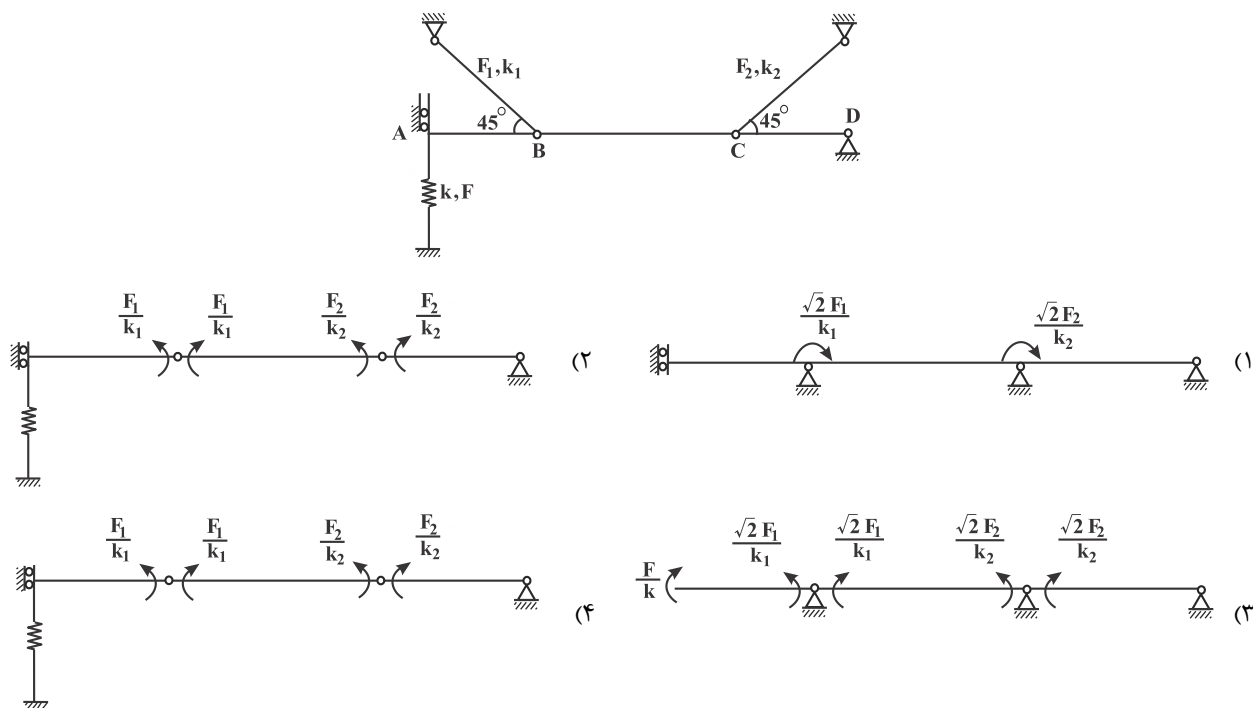
$$\frac{R_C}{k_1} \quad \frac{R_D}{k_2}$$

با توجه به اینکه نقطه B مشابه نقطه A است، پس تیر مزدوج تیر نشان داده شده برابر است با:

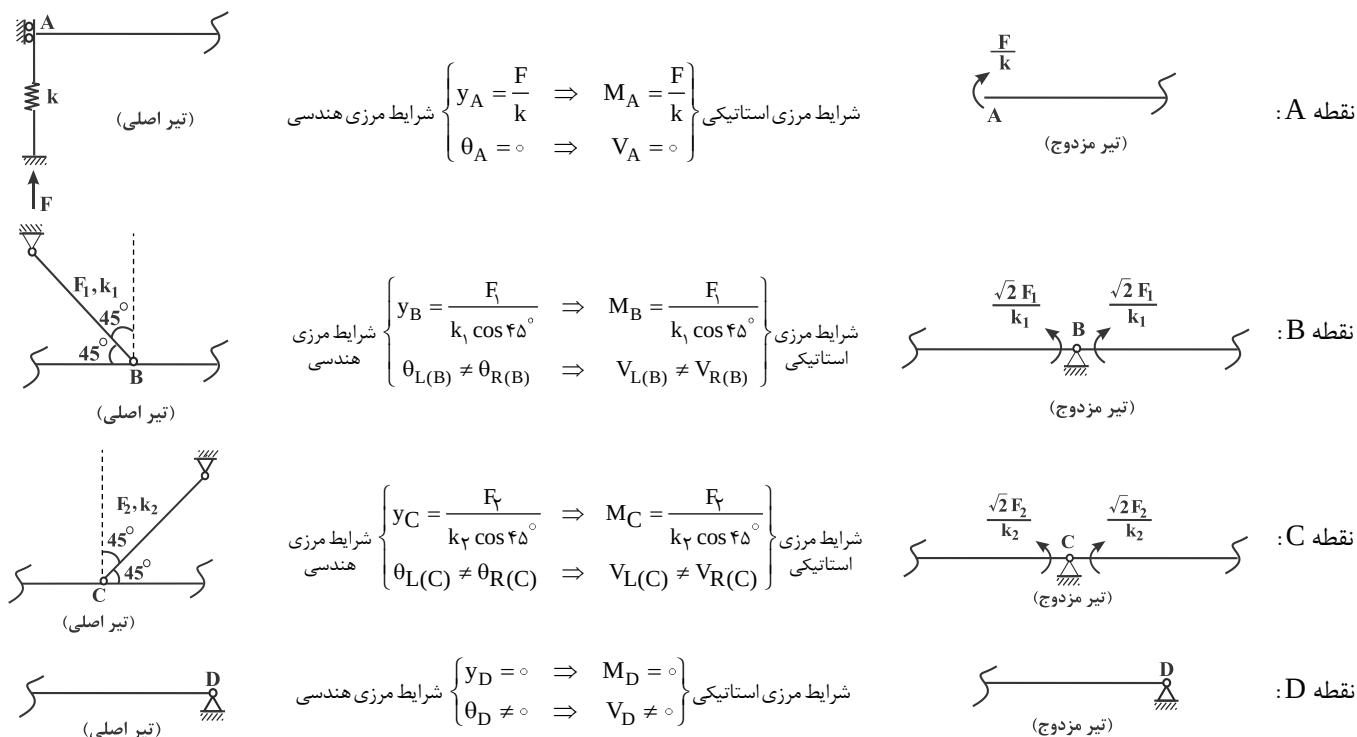


(مهندسی عمران - آزاد ۹۱)

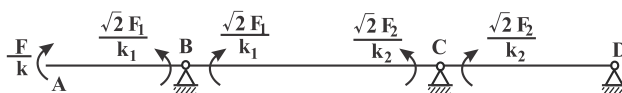
مثال ۷: تیر مزدوج سازه نشان داده شده کدام است؟



پاسخ: گزینه «۳» جهت رسم تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم. پس داریم:



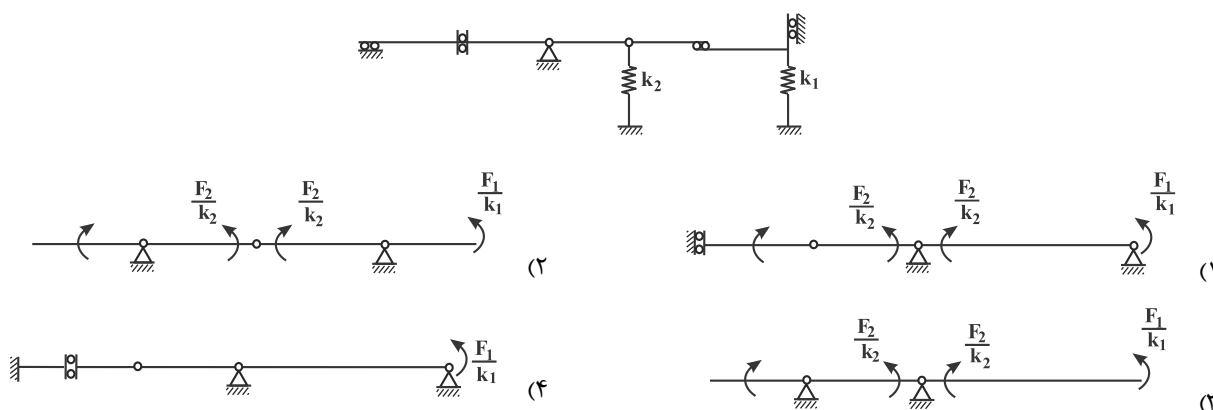
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌گردد:





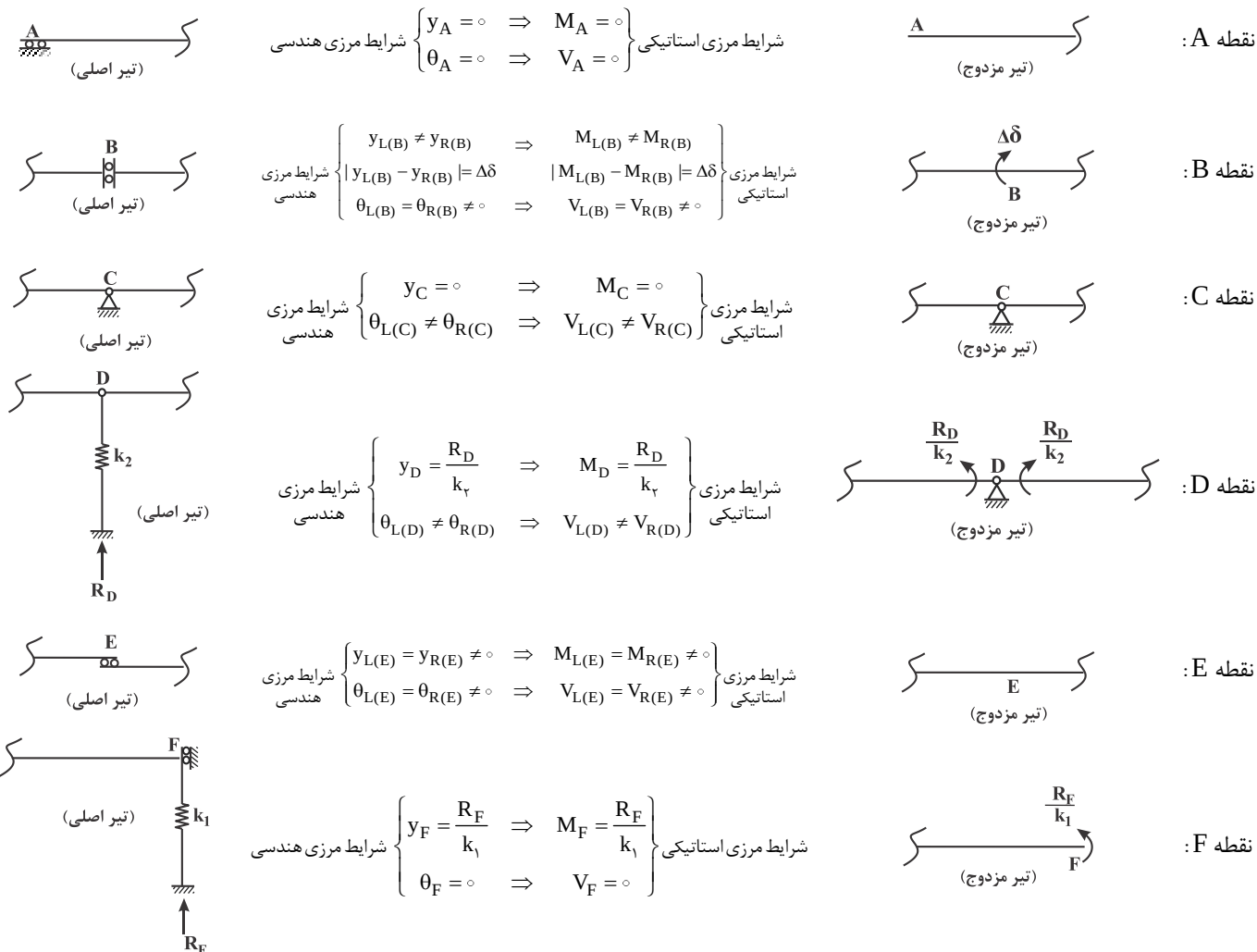
(مهندسی عمران - آزاد ۹۲)

مثال ۸: تیر مزدوج تیر نشان داده شده کدام است؟

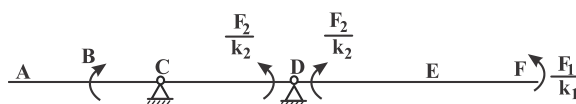


پاسخ: گزینه «۳» به منظور رسم تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر با تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج

تغییر دهیم. پس داریم:



بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌شود:

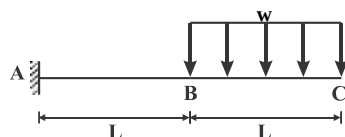


فصل ششم

« محاسبه خیز و شیب سازه‌های معین با استفاده از روابط حفظی »

(مهندسی عمران - آزاد ۸۱)

مثال ۱: خیز نقطه B در تیر مقابل کدام است؟ (EI ثابت)



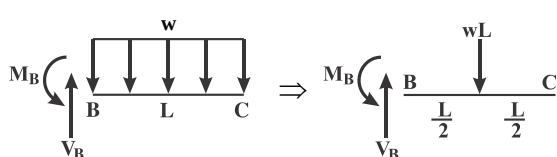
$$\frac{5wL^4}{12EI} \quad (۱)$$

$$\frac{wL^4}{3EI} \quad (۳)$$

$$\frac{7wL^4}{12EI} \quad (۲)$$

$$\frac{wL^4}{4EI} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه خیز نقطه B باید تیر را از نقطه B مقطع زده و به صورت زیر نیرو و لنگر وارد بر نقطه B را تعیین کنیم. پس داریم:

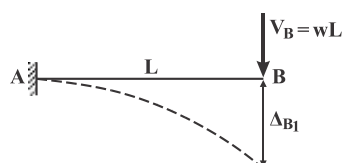


$$+\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - (wL \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow M_B = \frac{wL^2}{2}\right)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B - wL = 0 \Rightarrow V_B = wL$$

حال برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:

$$\text{بارگذاری دوم} + \text{بارگذاری اول} = \text{بارگذاری دوم} + \text{بارگذاری اول}$$



بارگذاری اول:

$$\downarrow \Delta_{B1} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B1} = \frac{wL \times L^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B1} = \frac{wL^4}{3EI}$$

بارگذاری دوم:

$$\downarrow \Delta_{B2} = \frac{M_B L^2}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B2} = \frac{(\frac{wL^2}{2}) L^2}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B2} = \frac{wL^4}{4EI}$$

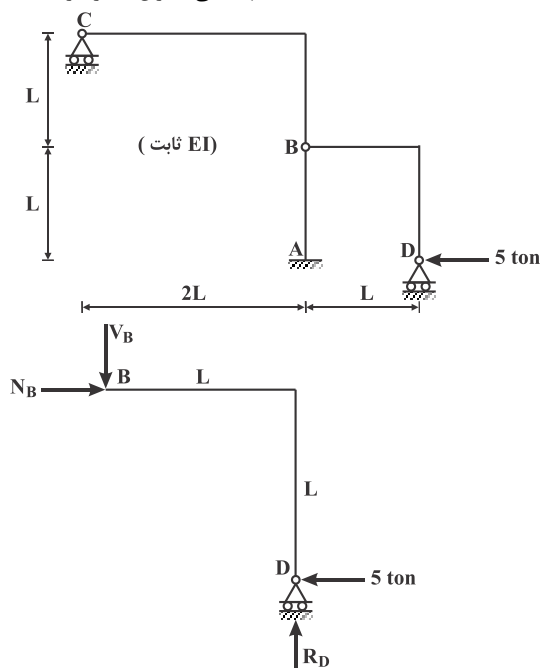
$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{wL^4}{3EI} + \frac{wL^4}{4EI} = \frac{7wL^4}{12EI}$$

بنابراین خیز نقطه B برابر است با:

مثال ۲: در سازه شکل مقابل تکیه‌گاه C به اندازه ۱cm در جهت قائم نشست کرده و بار افقی در نقطه D بر آن اثر می‌کند. با در نظر گرفتن اثر

(مهندسی عمران - سراسری ۸۲)

خمش، جابه‌جایی افقی نقطه B چقدر است؟



$$\frac{5L^3}{3EI} \quad (۲)$$

$$\frac{5L^3}{3EI} + 1 \quad (۴)$$

$$\frac{5L^3}{EI} \quad (۱)$$

$$\frac{10L^3}{EI} \quad (۳)$$

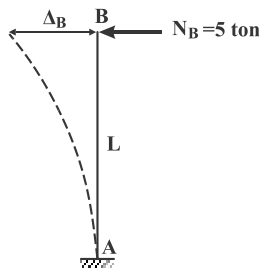
پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه سازه معین است، بنابراین نشست‌های تکیه‌گاهی در

سازه نیرو ایجاد نکرده و در نتیجه نشست در نقطه C در تغییر مکان نقطه B تأثیر ندارد.

پس تغییر مکان نقطه B تنها در اثر نیروی ۵ton در سازه ایجاد می‌گردد. از طرفی با توجه

به اینکه قسمت AB تیر کنسول می‌باشد، با استفاده از روابط حفظی تیرهای کنسولی تغییر

مکان نقطه B به‌دست می‌آید.



برای این منظور ابتدا قسمت BD را جدا کرده و داریم:

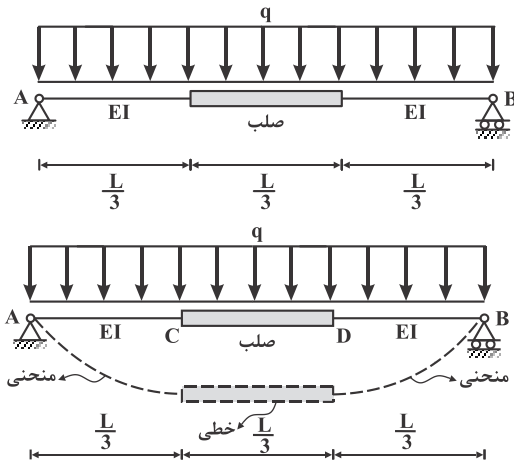
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_B - \Delta = 0 \Rightarrow N_B = \Delta \text{ ton}$$

حال برای تیر کنسول AB داریم:

$$\Delta_B = \frac{N_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{\Delta L^3}{3EI}$$

(مهندسی عمران - آزاد ۸۲)

مثال ۳: در تیر شکل مقابل تغییر مکان قائم جسم صلب کدام است؟



$$\frac{qL^4}{648EI} \quad (2)$$

$$\frac{qL^4}{162EI} \quad (1)$$

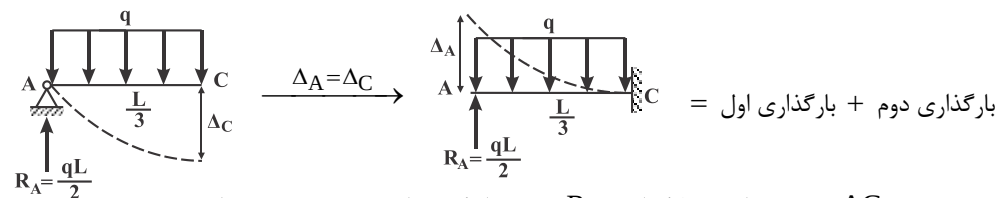
$$\frac{qL^4}{64EI} \quad (4)$$

$$\frac{qL^4}{216EI} \quad (3)$$

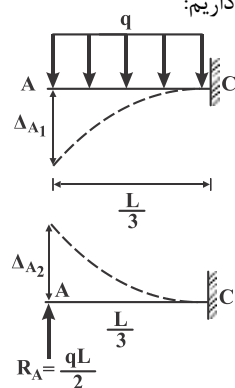
پاسخ: گزینه «۳» با دقت در تیر مشاهده می‌شود که این تیر متقارن و

تحت اثر بارگذاری متقارن نیز قرار گرفته است. بنابراین به علت اینکه قسمت CD صلب است، تغییر شکل آن به صورت خطی و قسمت‌های AC و DB به علت صلبیت خمشی یکسان هر دو قسمت به صورت منحنی تغییر شکل می‌دهند. پس به صورت مقابل داریم:

حال برای محاسبه تغییر مکان قائم جسم صلب CD در نظر داشته باشید که تغییر مکان نقاط C و D برابر است یعنی قسمت CD دوران ندارد ($\theta_C = \theta_D = 0$). از طرفی تغییر شکل قسمت‌های AC و DB به نحوی است که می‌توان فرض زیر را برای قسمت‌های AC و CD در نظر گرفت: نقاط C و D را به صورت تکیه‌گاه گیردار برای تیر کنسول AC و DB فرض نموده و تمام بارگذاری‌های وارد بر قسمت‌های AC و DB را به آن نیز اعمال نماییم. یعنی خواهیم داشت: قسمت‌های AC و DB مشابه هستند و کافی است یکی از آنها مثلاً AC را بررسی نماییم.



حال برای محاسبه تغییر مکان نقطه A در تیر کنسول AC که تحت اثر دو بارگذاری R_A و q قرار گرفته است، به صورت زیر داریم:



$$\downarrow \Delta_{A1} = \frac{q(\frac{L}{3})^4}{8EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{A1} = \frac{qL^4}{3^4 \times 8EI} = \frac{qL^4}{(81 \times 8)EI}$$

بارگذاری دوم:

$$\uparrow \Delta_{A2} = \frac{R_A(\frac{L}{3})^3}{3EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{A2} = \frac{(\frac{qL}{2})(\frac{L}{3})^3}{3EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{A2} = \frac{qL^4}{(81 \times 2)EI}$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر مکان نهایی نقطه A باید رو به بالا باشد، پس جهت بالا را به عنوان جهت مثبت در نظر گرفته و تغییر مکان نقطه A تحت اثر هر دو بارگذاری برابر است با:

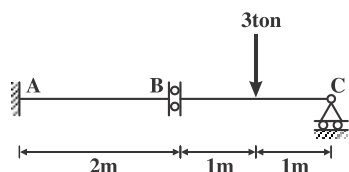
$$\uparrow \Delta_A = \downarrow \Delta_{A1} + \uparrow \Delta_{A2} \Rightarrow \uparrow \Delta_A = \left(\frac{-qL^4}{(81 \times 8)EI} \right) + \left(\frac{qL^4}{(81 \times 2)EI} \right) \Rightarrow \uparrow \Delta_A = \frac{3qL^4}{(81 \times 8)EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_A = \frac{qL^4}{216EI}$$

$$\Delta_C = \frac{qL^4}{216EI}$$

در نتیجه تغییر مکان نقطه C برابر با تغییر مکان نقطه A است و داریم:

مثال ۴: در تیر شکل زیر تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B بر حسب mm کدام است؟ ($EI = 1000 \text{ ton.m}^2$)

(مهندسی عمران - سراسری ۸۴)



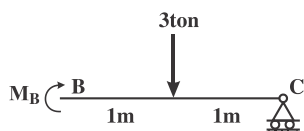
(۱) صفر

(۲) ۶

(۳) ۵

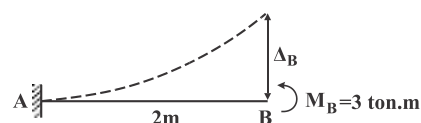
(۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه مقدار تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B در نظر داشته باشید که عضو AB از سازه، تیر کنسول است. بنابراین با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای کنسول می‌توان مقدار تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B را تعیین نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BC را جدا کرده و داریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow M_B - (3 \times 1) = 0 \Rightarrow M_B = 3 \text{ ton.m}$$

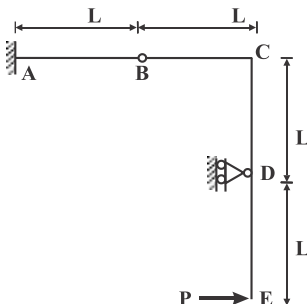
حال با بررسی تیر کنسول AB خواهیم داشت:



$$\uparrow \Delta_B = \frac{M_B L^3}{3EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_B = \frac{3 \times 2^3}{3 \times 1000} = 0.006 \text{ m} = 6 \text{ mm}$$

(مهندسی عمران - سراسری ۸۶)

مثال ۵: در سازه نشان داده شده، جابه‌جایی قائم مفصل B چقدر است؟ (EI برای کلیه اعضا یکسان است)



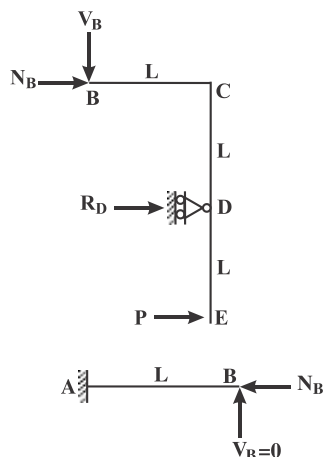
(۱) صفر

(۲) $\frac{PL^3}{EI}$

(۳) $\frac{PL^3}{3EI}$

(۴) $\frac{2PL^3}{3EI}$

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود عضو AB از قاب به صورت تیر کنسول می‌باشد، بنابراین برای محاسبه تغییر مکان قائم مفصل B می‌توان از روابط حفظی تیرهای کنسول استفاده نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BCDE را جدا کرده و داریم:



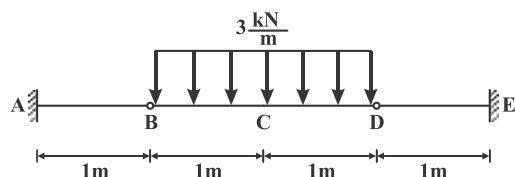
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

سپس با بررسی تیر کنسول AB خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{0 \times L^3}{3EI} = 0$$



(مهندسی عمران - سراسری ۸۶)

مثال ۶: در شکل مقابل، Δ_C را تعیین کنید. (EI ثابت فرض شود)

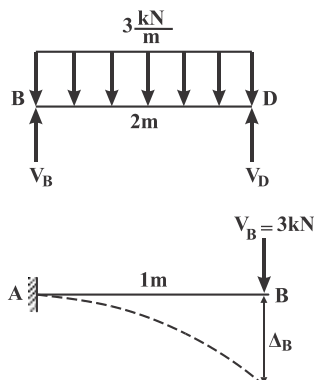
$$\frac{1/5}{EI} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{EI} \quad (۱)$$

$$\frac{0/625}{EI} \quad (۴)$$

$$\frac{1/625}{EI} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در تیر مشاهده می‌شود که می‌توان قسمت BCD را به صورت تیر دو سر مفصل در نظر گرفت، البته نقاط B و D دارای تغییر مکان به سمت پایین هستند که با توجه به متقارن بودن سازه و بارگذاری، این تغییر مکان‌ها برابر هستند. پس با این موارد می‌توان فرض کرد که تیر دو سر مفصل BCD علاوه بر بارگذاری بار گسترده $3 \frac{kN}{m}$ تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی مفاصل B و D (تغییر مکان قائم نقاط B و D) قرار دارد. بنابراین ابتدا باید تغییر مکان نقاط B و D را برای تیرهای کنسول AB و DE به صورت زیر به دست آوریم، برای این منظور قسمت BCD را از تیر جدا کرده و داریم:



$$+\circlearrowleft (\sum M_C = 0 \Rightarrow (V_B \times 2) - (3 \times 2 \times \frac{2}{2}) = 0 \Rightarrow V_B = 3 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B + V_D - (3 \times 2) = 0 \Rightarrow 3 + V_D - 6 = 0 \Rightarrow V_D = 3 \text{ kN}$$

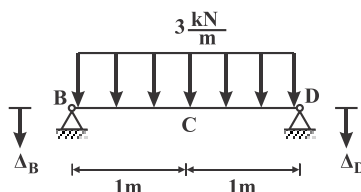
حال برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:

$$\downarrow \Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{3 \times 1^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{1}{EI}$$

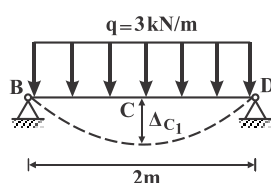
$$\Delta_B = \Delta_D = \frac{1}{EI}$$

به علت تقارن داریم:

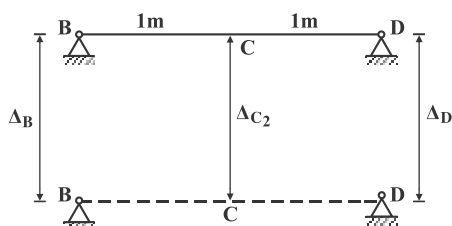
بنابراین برای تیر دو سر مفصل BCD می‌توان نوشت:



همان‌طور که مشاهده می‌شود تیر دو سر مفصل BCD تحت اثر هم‌زمان بارگذاری با بار گسترده $3 \frac{kN}{m}$ و نشست‌های تکیه‌گاهی Δ_B و Δ_D قرار دارد. پس داریم:

(۱) تغییر مکان نقطه C تحت اثر بارگذاری با بار گسترده $3 \frac{kN}{m}$:

$$\downarrow \Delta_{C1} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \times 3 \times 2^4}{384EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C1} = \frac{5}{8EI}$$

(۲) تغییر مکان نقطه C تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی Δ_B و Δ_D :

$$\Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \downarrow \Delta_{C2} = \Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \downarrow \Delta_{C2} = \frac{1}{EI}$$

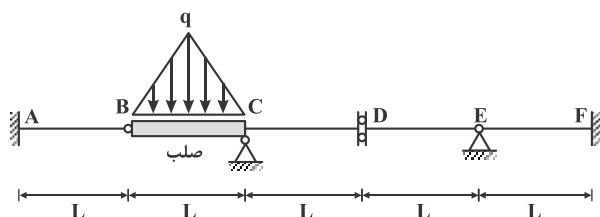
در نهایت تغییر مکان نقطه C برابر است با:

$$\Delta_C = \downarrow \Delta_{C1} + \downarrow \Delta_{C2} \Rightarrow \Delta_C = \frac{5}{8EI} + \frac{1}{EI} = \frac{13}{8EI} = \frac{1/625}{EI}$$



(مهندسی عمران - آزاد ۹۰)

مثال ۷: تغییر مکان سمت چپ مفصل برشی D کدام است؟ (EI ثابت)



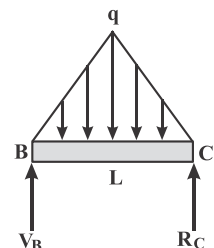
$$\frac{qL^4}{3EI} \quad (2)$$

$$\frac{qL^4}{6EI} \quad (1)$$

$$\frac{qL^4}{8EI} \quad (4)$$

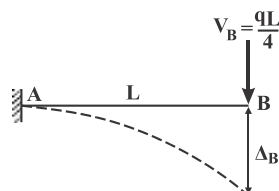
$$\frac{qL^4}{12EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۳» دقت داشته باشید در این سازه قسمت AB به صورت تیر کنسول بوده که توسط یک مفصل خمشی به عضو صلب BC متصل شده است. بنابراین با محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B می‌توان تغییر مکان قائم نقطه D را به دست آورد. توجه داشته باشید که عضو CD با عضو صلب BC اتصال پیوسته دارد. پس ابتدا عضو صلب BC را جدا کرده و داریم:

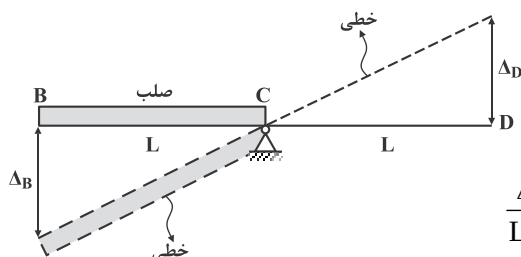


$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow (V_B \times L) - \left(\frac{q \times L}{2} \times \frac{L}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow V_B \times L &= \frac{qL^2}{4} \Rightarrow V_B = \frac{qL}{4} \end{aligned}$$

سپس تغییر مکان قائم نقطه B را به دست می‌آوریم:



$$\Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{\frac{qL}{4} \times L^3}{3EI} = \frac{qL^4}{12EI}$$

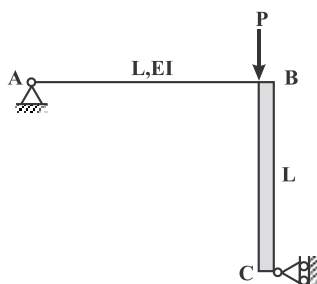


در ادامه مطابق شکل زیر تغییر مکان قائم نقطه D در سمت چپ مفصل برشی به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta_B}{L_{BC}} = \frac{\Delta_D}{L_{CD}} \Rightarrow \frac{\Delta_B}{L} = \frac{\Delta_D}{L} \Rightarrow \Delta_D = \Delta_B = \frac{qL^4}{12EI}$$

(مهندسی عمران - آزاد ۹۱)

مثال ۸: تغییر مکان تکیه‌گاه C کدام است؟ (میله BC صلب است)

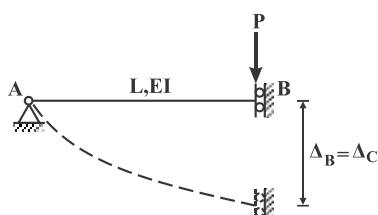


$$\frac{PL^3}{12EI} \quad (2)$$

$$\frac{PL^3}{3EI} \quad (1)$$

$$\frac{PL^3}{48EI} \quad (4)$$

$$\frac{PL^3}{24EI} \quad (3)$$

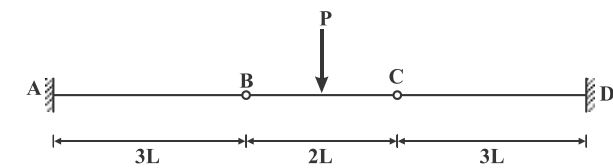


پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت در شکل مشاهده می‌شود که نقطه C می‌تواند تغییر مکان قائم داشته باشد، از طرفی قسمت BC صلب است و در واقع امکان دوران هم نمی‌تواند داشته باشد (یعنی $\theta_B = 0$). بنابراین می‌توان گفت که نقطه B همانند یک تکیه‌گاه لغزنده گیردار می‌باشد. پس سازه را به صورت یک تیر یک سر مفصل و یک سر لغزنده گیردار AB فرض می‌نماییم. بنابراین تغییر مکان قائم نقطه B برابر با تغییر مکان نقطه C می‌باشد و داریم:

$$\Delta_B = \Delta_C = \frac{PL^3}{3EI}$$



مثال ۹: تیر متقارن روبه‌رو حاوی مفصل در نقاط B و C است. تغییر مکان قائم نقطه B بعد از اعمال بار متمرکز P در وسط بخش BC چقدر است؟ (EI ثابت)



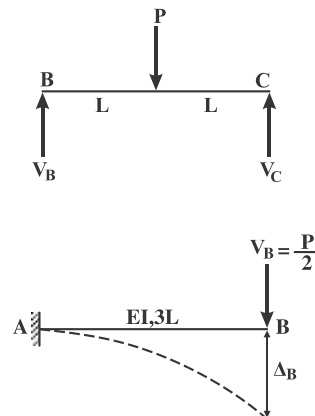
$$\frac{9PL^3}{2EI} \quad (2)$$

$$\frac{9PL^3}{EI} \quad (1)$$

$$\frac{8PL^3}{3EI} \quad (4)$$

$$\frac{16PL^3}{3EI} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه قسمت AB از سازه به صورت تیر کنسول است، بنابراین برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B می‌توان از روابط حفظی تیرهای کنسول استفاده نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BC را جدا کرده و به صورت زیر داریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow (V_B \times 2L) - (P \times L) = 0$$

$$\Rightarrow V_B \times 2L = PL \Rightarrow V_B = \frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B + V_C - P = 0 \Rightarrow V_C = \frac{P}{2}$$

بنابراین برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:

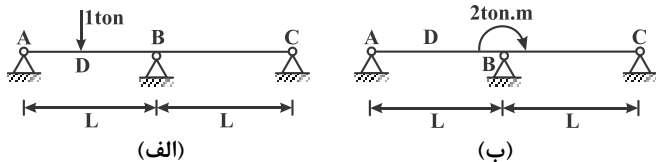
$$\downarrow \Delta_B = \frac{V_B(2L)^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{\left(\frac{P}{2}\right) \times 2^3 L^3}{3EI} = \frac{9PL^3}{3EI}$$



فصل هفتم

«بررسی انرژی کرنشی و قضایای کاستلیانو و بتی - ماکسول در سازه‌ها»

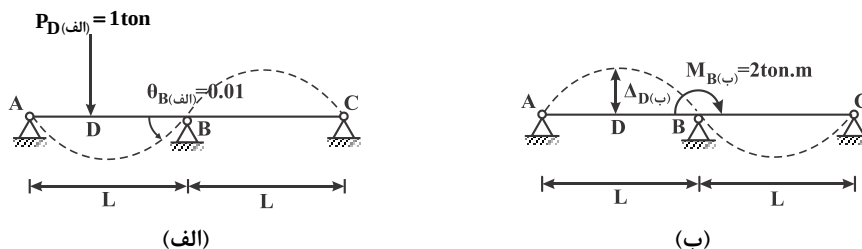
مثال ۱: تیر ABC تحت بارگذاری (الف) و (ب) قرار گرفته است. اگر تحت اثر بارگذاری (الف)، $\theta_B = 0.01$ باشد، تغییر مکان نقطه D تحت اثر بارگذاری (ب) چقدر است؟ (مهندسی عمران - سراسری ۸۱)

(۲) $0.02L$ (۱) $0.01L$

(۴) ۲cm

(۳) ۱cm

پاسخ: گزینه «۴» مشاهده می‌شود که هندسه تغییر شکل سازه‌ها رسم نشده است. از طرفی در مورد صلبیت خمشی سازه‌ها صحبتی نشده بنابراین فرض می‌کنیم که سازه‌ها دارای صلبیت خمشی یکسانی هستند. پس ابتدا به صورت زیر هندسه تغییر شکل سازه‌ها را رسم کرده و سپس بارگذاری و تغییر شکل‌های آنها را مشخص می‌کنیم:



$$P_{D(الف)} \times \Delta_{D(ب)} = M_{B(ب)} \times \theta_{B(الف)}$$

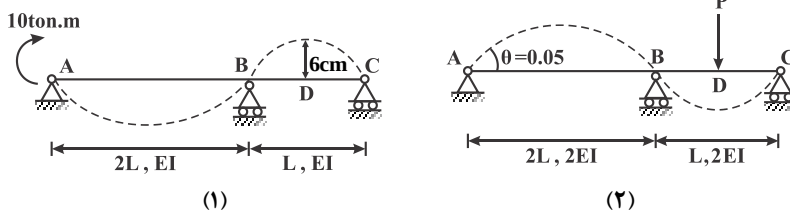
بنابراین قضیه بتی - ماکسول به صورت مقابل ارائه می‌گردد:

مشاهده می‌شود که دوران نقطه B در سازه (الف) $(\theta_{B(الف)})$ خلاف جهت لنگر نقطه B در سازه (ب) $(M_{B(ب)})$ می‌باشد، پس حاصل ضرب آنها در رابطه منفی است. همچنین تغییر مکان نقطه D در سازه (ب) $(\Delta_{D(ب)})$ خلاف جهت نیروی نقطه D در سازه (الف) $(P_{D(الف)})$ است پس حاصل ضرب آنها در رابطه منفی خواهد بود. بنابراین مقدار تغییر مکان نقطه D در سازه (ب) برابر است با:

$$-(1 \times \Delta_{D(ب)}) = -(2 \times 0.01) \Rightarrow \Delta_D = 0.02m = 2cm$$

(مهندسی عمران - سراسری ۸۲)

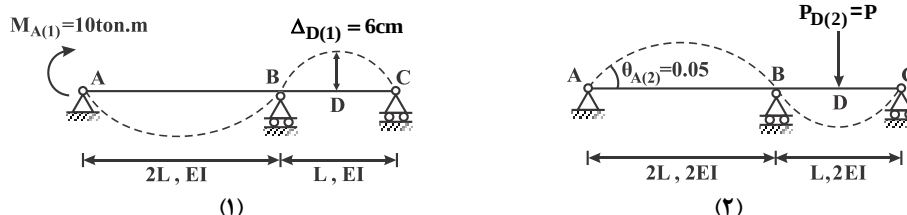
مثال ۲: با توجه به دو سازه مقابل مقدار نیروی P برابر چند ton است؟

(۲) $\frac{20}{3}$ (۱) $\frac{50}{3}$

(۴) ۱۰

(۳) ۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه صلبیت خمشی سازه (۲) دو برابر سازه (۱) است $((EI)_2 = 2(EI)_1)$ بنابراین مطابق شکل زیر بارگذاری‌ها و تغییر شکل سازه‌ها را مشخص کرده و داریم:



پس قضیه بتی - ماکسول در شرایطی که سازه‌های (۱) و (۲) صلبیت خمشی یکسانی ندارند به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$M_{A(1)} \times ((EI)_2 \times \theta_{A(2)}) = P_{D(2)} \times ((EI)_1 \times \Delta_{D(1)})$$

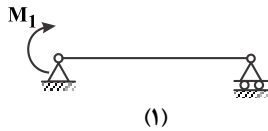


با توجه به شکل‌های بالا مشاهده می‌شود تغییر مکان نقطه D از سازه (۱) ($\Delta_{D(1)}$) در خلاف جهت نیروی وارد بر نقطه D در سازه (۲) ($P_{D(2)}$) است و در نتیجه علامت حاصل ضرب آنها در رابطه بالا منفی است. از طرفی دوران نقطه A در سازه (۲) ($\theta_{A(2)}$) در خلاف جهت لنگر وارد بر نقطه A در سازه (۱) ($M_{A(1)}$) است پس حاصل ضرب آنها در رابطه بالا منفی خواهد بود. بنابراین به صورت زیر می‌توان نوشت:

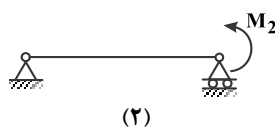
$$- [1 \times (2(EI)_1 \times 0.5)] = - [P \times ((EI)_1 \times 0.6m)] \Rightarrow 1 = P \times 0.6 \Rightarrow P = \frac{1}{0.6} \text{ ton} = \frac{5}{3} \text{ ton}$$

مثال ۳: انرژی کرنشی تیرهای (۱)، (۲) و (۳) در شکل‌های زیر به ترتیب برابر U_1 ، U_2 و U_3 می‌باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (EI در تیرها یکسان است)

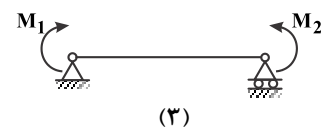
(مهندسی عمران - آزاد ۸۵)



(۱)



(۲)



(۳)

(۴) هیچکدام

(۳) $U_3 > U_1 + U_2$

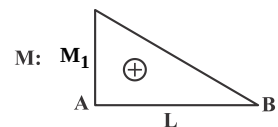
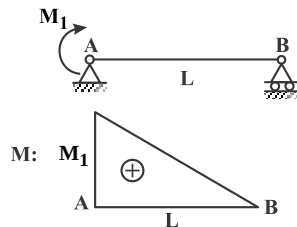
(۲) $U_3 < U_1 + U_2$

(۱) $U_3 = U_1 + U_2$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه انرژی کرنشی هر یک از تیرهای نشان داده شده توجه داشته باشید که فقط لنگر متمرکز بر آنها وارد شده و انرژی کرنشی این سه تیر ناشی از خمش است. انرژی کرنشی تیرها را می‌توان با استفاده از روش ترسیمی مور و محاسبه مقدار $\int M^2 dx$ به دست آورد. پس می‌توان برای هر تیر به صورت زیر داشته باشیم:

تیر (۱):

$$M_A = M_1, \quad M_B = 0$$

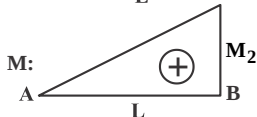
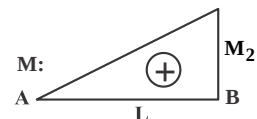
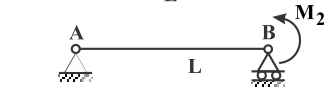


$$\int_A^B M^2 dx = \frac{M_1 \times M_1 \times L}{3} \Rightarrow \int_A^B M^2 dx = \frac{M_1^2 L}{3}$$

$$U_{M(1)} = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U_{M(1)} = \left(\frac{M_1^2 L}{3} \times \frac{1}{2EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{6EI}$$

$$M_A = 0, \quad M_B = M_2$$

تیر (۲):



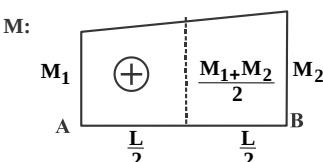
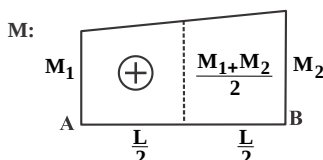
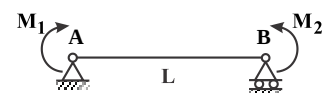
$$\int_A^B M^2 dx = \frac{M_2 \times M_2 \times L}{3} \Rightarrow \int_A^B M^2 dx = \frac{M_2^2 L}{3}$$

$$U_{M(2)} = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U_{M(2)} = \left(\frac{M_2^2 L}{3} \times \frac{1}{2EI} \right) = \frac{M_2^2 L}{6EI}$$

تیر (۳):

$$M_A = M_1, \quad M_B = M_2$$

(فرض می‌کنیم M_2 بزرگتر از M_1 است)



$$\int_A^B M^2 dx = [M_1 \times M_1 + \frac{4}{3} \left(\frac{M_1 + M_2}{2} \right) \times \left(\frac{M_1 + M_2}{2} \right) + M_2 \times M_2] \times \frac{L}{6}$$

$$\Rightarrow \int_A^B M^2 dx = \frac{[M_1^2 + (M_1 + M_2)^2 + M_2^2] L}{6}$$

$$U_{M(3)} = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U_{M(3)} = \left(\frac{[M_1^2 + (M_1 + M_2)^2 + M_2^2] L}{6} \right) \times \frac{1}{2EI}$$

$$\Rightarrow U_{M(3)} = \frac{[M_1^2 + (M_1 + M_2)^2 + M_2^2] L}{12EI} = \frac{2(M_1^2 + M_2^2) L}{12EI} + \frac{2M_1 M_2 L}{12EI}$$

$$\Rightarrow U_{M(3)} = \frac{L}{6EI} [(M_1^2 + M_2^2) + M_1 M_2]$$



حال با توجه به گزینه‌ها مقادیر انرژی کرنشی به دست آمده در تیرهای (۱) و (۲) را با هم جمع کرده و داریم:

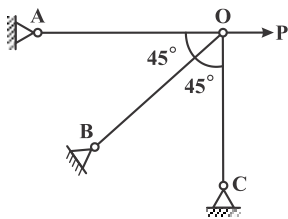
$$U_{M(1)} + U_{M(2)} = \frac{M_1^2 L}{6EI} + \frac{M_2^2 L}{6EI} = \frac{L}{6EI} (M_1^2 + M_2^2)$$

در نهایت با مقایسه مقدار $U_{M(1)} + U_{M(2)}$ و $U_{M(3)}$ مشخص است که مقدار $U_{M(3)}$ بزرگتر از $U_{M(1)} + U_{M(2)}$ است و خواهیم داشت:

$$U_{M(3)} > U_{M(1)} + U_{M(2)}$$

مثال ۴: انرژی کرنشی خرابی زیر به صورت $U = \frac{AE}{4L} (3\Delta_1^2 + 3\Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2)$ می‌باشد که در این رابطه Δ_1 و Δ_2 به ترتیب تغییر مکان افقی و قائم مفصل O می‌باشد. قدر مطلق نسبت $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ برای بارگذاری داده شده چقدر است؟

(مهندسی عمران - آزاد ۸۶)



(۱) ۳ / ۵

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۲ / ۵

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود در صورت سؤال انرژی کرنشی خرابی تابعی از تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه O می‌باشد. بنابراین

به منظور تعیین مقدار $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

با توجه به شکل سؤال مشخص است که نیروی خارجی در جهت قائم به مفصل O وارد نمی‌گردد بنابراین با توجه به قضیه اول کاستلیانو می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \left[\frac{AE}{4L} (3\Delta_1^2 + 3\Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{4L} \times \frac{\partial}{\partial \Delta_2} (3\Delta_1^2 + 3\Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2) = 0 \Rightarrow \frac{AE}{4L} (0 + 6\Delta_2 + 2\Delta_1) = 0$$

$$\Rightarrow 6\Delta_2 + 2\Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = -3\Delta_2 \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -3 \Rightarrow \left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right| = 3$$

(مهندسی عمران - آزاد ۸۶)

مثال ۵: مقدار لنگر مجهول x چقدر باشد تا انرژی ذخیره شده در تیر حداقل گردد؟



(۲) ۲PL

(۱) PL

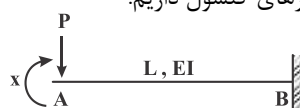
(۴) $\frac{PL}{2}$

(۳) $\frac{PL}{4}$

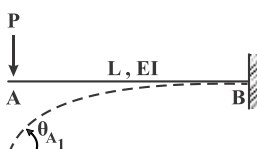
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده مقدار لنگر x چقدر باشد تا انرژی ذخیره شده در تیر حداقل گردد، یعنی باید از انرژی کرنشی نسبت به لنگر x مشتق‌گیری جزئی انجام می‌دهیم. پس به صورت زیر برای نقطه A یعنی محل اعمال لنگر x می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & (\text{حداقل شدن انرژی کرنشی}) \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \theta_A & (\text{قضیه دوم کاستلیانو}) \end{cases} \Rightarrow \theta_A = 0$$

بنابراین کافی است مقدار دوران در تیر نشان داده شده در نقطه A برابر صفر باشد. پس با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای کنسول داریم:

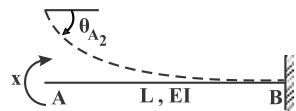


بارگذاری دوم + بارگذاری اول =



$$\theta_{A1} = \frac{-PL^2}{2EI} \quad (\text{دوران در جهت پاد ساعتگرد})$$

بارگذاری اول:



$$\theta_{A_r} = \frac{xL}{EI} \quad (\text{دوران در جهت ساعتگرد})$$

بارگذاری دوم:

$$\theta_A = \theta_{A_l} + \theta_{A_r} \Rightarrow \theta_A = \frac{-PL^2}{2EI} + \frac{xL}{EI}$$

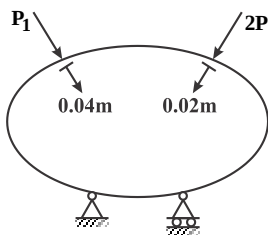
بنابراین دوران نقطه A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{-PL^2}{2EI} + \frac{xL}{EI} = 0 \Rightarrow \frac{xL}{EI} = \frac{PL^2}{2EI} \Rightarrow x = \frac{PL}{2}$$

در نتیجه مقدار لنگر X برای اینکه انرژی کرنشی حداقل شود برابر است با:

مثال ۶: یک سازه الاستیک خطی مطابق شکل زیر مفروض است. اگر انرژی تغییر شکل این سازه را برحسب نیروهای وارد شده به صورت $U = U(P)$ بیان کنیم، کدام رابطه زیر صحیح است؟

(مهندسی عمران - سراسری ۸۹)



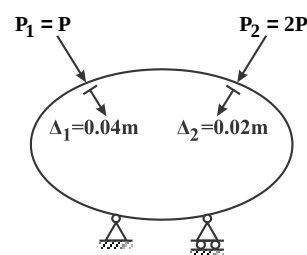
$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 / 0.5 \text{ m} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 / 0.8 \text{ m} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 / 0.4 \text{ m} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 / 0.6 \text{ m} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده انرژی کرنشی سازه تابعی از نیروهای وارد بر آن است ($U = U(P)$)، بنابراین با



$$U = f(P_1, P_2)$$

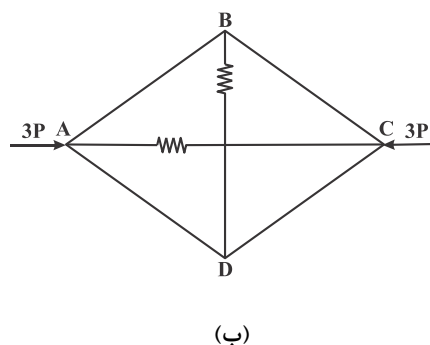
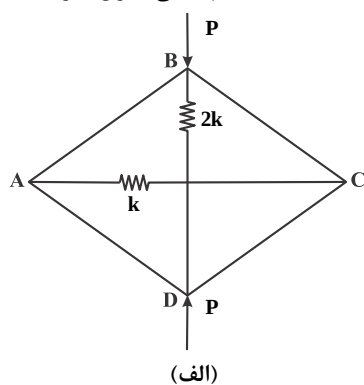
استفاده از قضیه دوم کاستلیانو مقدار $\frac{\partial U}{\partial P}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \left(\frac{\partial U}{\partial P_1} \times \frac{\partial P_1}{\partial P} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial P_2} \times \frac{\partial P_2}{\partial P} \right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \left(\Delta_1 \times \frac{\partial}{\partial P}(P) \right) + \left(\Delta_2 \times \frac{\partial}{\partial P}(2P) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = (0 / 0.4 \times 1) + (0 / 0.2 \times 2) = 0 / 0.4 + 0 / 0.4 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = 0 / 0.8 \text{ m}$$

مثال ۷: اگر تحت بارگذاری نشان داده شده در سازه (الف)، نیروی ایجاد شده در فنر افقی برابر F_0 باشد، آنگاه تحت بارگذاری سازه (ب) چه نیرویی در فنر قائم آن ایجاد می‌شود؟

(مهندسی عمران - آزاد ۹۱)

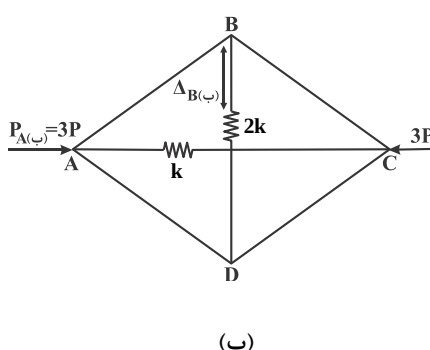
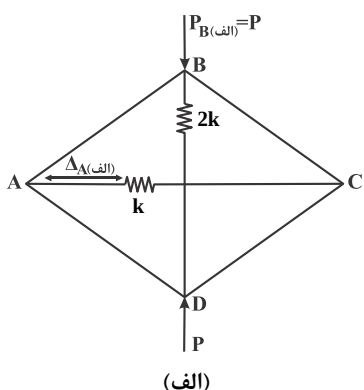


$$2F_0 \quad (1)$$

$$4F_0 \quad (2)$$

$$6F_0 \quad (3)$$

$$8F_0 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده

می‌شود در سازه‌ها فنرهای انتقالی وجود دارد که در واقع تغییر مکان در راستای نیروی وارد بر آن نقطه را با تغییر شکل فنر می‌توان نشان داد و محاسبه نمود. بنابراین مطابق شکل‌های مقابل نیروها و تغییر مکان‌های آن در هر دو سازه نشان داده می‌شود:



پس قضیه بتی - ماکسول به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$P_{B(الف)} \times \Delta_{B(ب)} = P_{A(ب)} \times \Delta_{A(الف)}$$

همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود تغییر مکان‌ها و بارهای وارد بر نقطه‌های A و B خلاف جهت هم هستند و در نتیجه حاصل ضرب آنها در رابطه بالا با علامت منفی است. با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده که نیروی فنر افقی در سازه (الف) برابر F_0 است، پس تغییر مکان فنر افقی در سازه

$$\Delta_{A(الف)} = \frac{F_0}{k} \quad \text{(الف یعنی } \Delta_{A(الف)} \text{ برابر است با:)}$$

$$-(P \times \Delta_{B(ب)}) = -\left(3P \times \left(\frac{F_0}{k}\right)\right) \Rightarrow \Delta_{B(ب)} = \frac{3F_0}{k} \quad \text{به صورت مقابل تعیین می‌شود:}$$

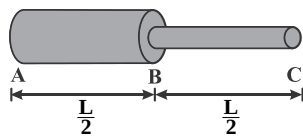
$$\begin{cases} \Delta_{B(ب)} = \frac{3F_0}{k} \\ \Delta_{B(ب)} = \frac{F'}{2k} \end{cases} \Rightarrow \frac{F'}{2k} = \frac{3F_0}{k} \Rightarrow F' = 6F_0$$

در نهایت مقدار نیروی فنر قائم در سازه (ب) برابر است با:

مثال ۸: قطر عضو AB را چند برابر قطر BC در نظر بگیریم تا انرژی جذب شده تحت نیروی محوری P برابر $\frac{5}{6}$ انرژی ذخیره شده در صورت

(مهندسی عمران - آزاد ۹۳)

استفاده از عضو یکنواخت به طول L و مقطع BC باشد؟



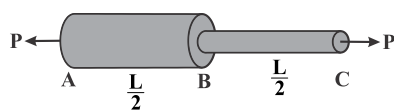
$$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

(۱)

(۴) قابل محاسبه نیست

(۳) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» دقت داشته باشید نیروی متمرکز محوری P به سازه در حالت اول و دوم به صورت زیر اعمال می‌گردد و مقدار انرژی کرنشی در هر



حالت تعیین می‌گردد:
حالت اول: در این حالت مقدار انرژی کرنشی تنها ناشی از نیروی متمرکز محوری P می‌باشد و برابر است با:

$$U_{N(1)} = \int \frac{N^2 dx}{2EA} \xrightarrow{\text{به دلیل اینکه نیروی محوری متمرکز است}} U_{N(1)} = \sum \frac{N^2 L}{2EA} \Rightarrow U_{N(1)} = \frac{N_{AB}^2 \times L_{AB}}{2(EA)_{AB}} + \frac{N_{BC}^2 \times L_{BC}}{2(EA)_{BC}}$$

$$\Rightarrow U_{N(1)} = \frac{P^2 \times \frac{L}{2}}{2E \times A_{AB}} + \frac{P^2 \times \frac{L}{2}}{2E \times A_{BC}} = \frac{P^2 L}{4E \times A_{AB}} + \frac{P^2 L}{4E \times A_{BC}}$$

حالت دوم: در این حالت هم مشابه حالت قبل مقدار انرژی کرنشی تنها ناشی از نیروی متمرکز محوری P می‌باشد و داریم:

$$U_{N(2)} = \sum \frac{N^2 L}{2EA} \Rightarrow U_{N(2)} = \frac{N_{AB}^2 \times L_{AB}}{2(EA)_{AB}} + \frac{N_{BC}^2 \times L_{BC}}{2(EA)_{BC}}$$

$$\Rightarrow U_{N(2)} = \frac{P^2 \times \frac{L}{2}}{2E \times A_{BC}} + \frac{P^2 \times \frac{L}{2}}{2E \times A_{BC}} = \frac{P^2 L}{4E \times A_{BC}} + \frac{P^2 L}{4E \times A_{BC}} \Rightarrow U_{N(2)} = \frac{P^2 L}{2E \times A_{BC}}$$

توجه داشته باشید در حالت دوم مساحت تمام مقاطع برابر قسمت BC می‌باشد ($A_{AB} = A_{BC}$) در نهایت براساس صورت سؤال داریم:

$$U_{N(1)} = \frac{5}{6} U_{N(2)} \Rightarrow \left(\frac{P^2 L}{4E \times A_{AB}} + \frac{P^2 L}{4E \times A_{BC}} \right) = \frac{5}{6} \left(\frac{P^2 L}{2E \times A_{BC}} \right) \Rightarrow \frac{P^2 L}{4E} \left(\frac{1}{A_{AB}} + \frac{1}{A_{BC}} \right) = \frac{5}{6} \left(\frac{P^2 L}{2E \times A_{BC}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_{AB}} + \frac{1}{A_{BC}} = \frac{5}{3A_{BC}} \Rightarrow \frac{1}{A_{AB}} = \frac{2}{3A_{BC}} \Rightarrow \frac{A_{BC}}{A_{AB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)_{BC}}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)_{AB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{D_{BC}^2}{D_{AB}^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{\frac{3}{2}} D_{BC}$$